Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ciencias

Relación entre números construibles y números origami

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Jaime Ulises Jiménez Cardoso

TUTOR

Mtra. Arilín Susana Haro Palma

Ciudad Universitaria, CDMX, 2024

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

«Dedico esta tesis a mi querida esposa. Tu apoyo y amor me han permitido construir este logro y perseguir mi pasión. Mi éxito es nuestro éxito, y estoy profundamente agradecido por tener a alguien tan especial a mi lado.»

Ulises Jiménez

Agradecimientos

Quiero aprovechar esta oportunidad para expresar mi agradecimiento a todas las personas que me brindaron su apoyo a lo largo de mi trayectoria académica y en la realización de mi tesis. En particular, deseo dedicar unas palabras especiales a mi esposa.

Mi amor, quiero expresarte mi gratitud por tu apoyo constante e incluso tus regaños para seguir adelante con este proyecto. Tú has sido mi motor y mayor fuente de motivación para terminar la carrera que comencé como un hobbie y ha sido una de mis más grandes pasiones.

No hay palabras suficientes para expresar cuánto valoro tu apoyo y cuánto significa para mí tener una persona tan hermosa a mi lado. *Te amo infinito no numerable* $\aleph_1$

También quiero extender mis agradecimientos a mis padres por su constante respaldo y por inculcarme el valor del esfuerzo, el estudio y la disciplina. Su amor y apoyo incondicionales han sido fundamentales en cada paso de mi vida.

Por último, pero no menos importante, quiero expresar mi reconocimiento a mi asesora por su orientación, conocimientos y dedicación que fueron fundamentales para esta tesis. Agradezco profundamente su disposición para brindarme su conocimiento y experiencia en cada paso de este proyecto.

Índice general

Agradecimientos **v**

1. Introducción **1**
1.1. Motivación 1
1.2. Objetivo 1

2. Estructuras algebraicas **3**
2.1. Estructuras algebraicas 3
2.1.1. Conjuntos 3
2.1.2. Grupos 4
2.1.3. Anillos 4
2.1.4. Campos 5
2.2. Conjuntos numéricos 5
2.2.1. Los números naturales 5
2.2.2. Los números enteros 6
2.2.3. Los números reales 8

3. Números construibles **9**
3.1. La regla y el compás 9
3.2. Estructura algebraica de los números construibles 22
3.3. Los problemas clásicos de los griegos 29

4. Números origami **37**
4.1. Los axiomas de origami 37
4.1.1. Construcción de ejes 40
4.2. Operaciones de campo 40
4.2.1. Operaciones elementales 40
4.2.2. Suma 40
4.2.3. Multiplicación 41
4.2.4. Inverso multiplicativo 42
4.3. Raíces cuadradas 43
4.4. Raíces cúbicas 44
4.5. El campo de los números origami 44
4.6. Ejemplos de objetos origami construibles 45
4.6.1. La duplicación del cubo 45

4.6.2. Trisección del ángulo 48

5. Conclusiones **53**

Apéndice A. **55**
A.1. Geometría 55
A.2. Geometría analítica 57
A.3. Álgebra 60

Bibliografía **61**

1 Introducción

1.1. Motivación

La propuesta de esta investigación es describir y analizar los números construibles y los números origami. A lo largo de mi tesis, examinaré su estructura algebraica y las operaciones que se pueden definir y realizar con estos conjuntos numéricos. Además, haré una comparación entre ellos, lo cual brindará una comprensión más clara de estas construcciones numéricas.

Los números construibles son aquellos que se pueden obtener utilizando únicamente regla y compás, siguiendo ciertas operaciones geométricas como la suma, resta, multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas y construcción de alugnas raíces n-ésimas [2].

Por otro lado, los números origami son aquellos que se pueden construir utilizando una técnica llamada origami, que consiste en plegar papel en patrones específicos para crear figuras tridimensionales. Esta técnica también puede ser utilizada para construir ciertos números, como los enteros, los racionales y muchos más [15].

1.2. Objetivo

En primer lugar, en este trabajo se describen las estructuras algebraicas, que son la base para entender la estructura que cumplen los números construibles y los números origami. Inmediatamente describimos los números construibles, se exploran las construcciones geométricas posibles con regla y compás y las operaciones que se pueden realizar con estos. Adicionalmente planteamos los tres problemas clásicos de la geometría, a saber, *la trisección del ángulo*, *la duplicación del cubo* y *la cuadratura del círculo* y el porqué no se pueden resolver.

Continuamos con los números origami, investigando las técnicas y construcciones específicas que permiten construir longitudes utilizando únicamente pliegues de papel. Por ejemplo en la versión más común de la construcción de origami, se comienza con una hoja de papel cuadrada sin marcar y sólo se permite doblar, no cortar. También exploramos cómo resolver dos de los problemas clásicos con esta técnica.

Espero que esta tesis contribuya al avance de la comprensión de los números construibles y los números origami desde el punto de vista geométrico y algebraico.

2 Estructuras algebraicas

Como introducción a este trabajo primero hablaremos de algunos conceptos sobre álgebra y la construcción de los conjuntos numéricos.

2.1. Estructuras algebraicas

En matemáticas, una estructura algebraica consta de un conjunto no vacío de elementos y un conjunto de reglas o condiciones que estos elementos tienen que satisfacer [23].

2.1.1. Conjuntos

Pero ¿qué es un *Conjunto*? Supongamos, por ejemplo, que definimos el término conjunto como 'Un conjunto es una colección bien definida de objetos'. Pero nos podríamos preguntar, ¿qué se entiende por colección? Podríamos definirla como 'Una colección es un agregado de cosas' ¿Qué es, entonces, un agregado? Ahora bien, nuestro lenguaje es finito, por lo que después de un tiempo nos quedaremos sin nuevas palabras para usar y tendremos que repetir [9]. Por esta razón, se considera a *conjunto* como un término primitivo, es decir, un concepto que se acepta sin definición formal. Algunas de las cosas que supondremos de los conjuntos son:

1. Un conjunto S está compuesto de elementos y si a es uno de esos elementos, denotamos esto como $a \in S$, que se lee como a pertenece a S.

2. Hay exactamente un conjunto sin elementos. El *conjunto vacío* se denota por $\emptyset$.

3. Si los elementos x de un conjunto están descritos por una propiedad $P(x)$, los denotaremos con $\{x \mid P(x)\}$ que se lee como, el conjunto de todos los elementos x tales que la proposición $P(x)$ es verdadera.

Definición 2.1 ([9, p. 20])
Una operación binaria $*$ en un conjunto S es una función que mapea $S \times S$ en S. Para cada $(a, b) \in S \times S$, denotaremos al elemento $*((a, b))$ de S como $a * b$.

Definición 2.2 ([8, p. 16])
Sea $*$ una operación binaria en un conjunto S. Un subconjunto H de S es cerrado bajo $*$ si para todo $a, b \in H$, tenemos $a * b \in H$.

2.1.2. Grupos

Ya que tenemos una noción básica de qué es un conjunto definamos brevemente la primera estructura algebraica de este trabajo *grupo*.

Definición 2.3 ([9, p. 37])
Un grupo $\langle G, * \rangle$ es un conjunto G cerrado bajo la operación binaria $*$, tal que las siguientes propiedades se cumplen:

Asociatividad de $*$: Para todo $a, b, c \in G$ tenemos que,

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Elemento identidad e para $*$: Existe un elemento e en G tal que $\forall\ x \in G$,

$$e * x = x * e = x$$

Inverso a' de a: Para todo $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que,

$$a * a' = a' * a = e$$

Adicionalmente decimos que:

Definición 2.4
Un grupo G es *abeliano* si su operación binaria es conmutativa. Para todos $a, b \in G$ tenemos que,

$$a * b = b * a$$

Con las definiciones de *grupo* y *grupo abeliano*, definiremos una de las estructuras algebraicas principales de este trabajo, la de *anillo*.

2.1.3. Anillos

Definición 2.5 ([9, p. 167])
Un anillo $\langle R, +, \cdot \rangle$ es un conjunto R junto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, las cuales llamaremos adición y producto definidas en R, tal que las siguientes propiedades se cumplen:

- $\langle R, + \rangle$ es un grupo abeliano.
- El producto es asociativo.
- Para todo $a, b, c \in R$ se cumplen la *ley de la distribución por la izquierda*, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y la *ley de la distribución por la derecha* $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Definición 2.6 ([9, p. 173])
Un anillo en el cual la multiplicación es conmutativa es un *anillo conmutativo*. Un anillo con neutro multiplicativo es un *anillo con unidad*.

2.1.4. Campos

Definición 2.7 ([17, p. 286])
Sea R un conjunto y $+, \cdot$ dos operaciones definidas en R. Decimos que $\langle R, +, \cdot \rangle$ es un *campo* si es un *anillo conmutativo* y además cada elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo.

Los campos son anillos en los que las estructuras aditiva y multiplicativa tienen propiedades similares. Para ser más específicos, en un campo F, no sólo el conjunto F es un grupo abeliano con la suma, sino que también el conjunto de elementos distintos de cero de F es un grupo abeliano con la multiplicación. Así, en un campo no sólo son posibles la suma, la resta y la multiplicación, sino que también se puede definir la división, ya que podemos encontrar inversos multiplicativos de elementos distintos de cero [7, p. 169].

Definición 2.8 ([21, p.34])
Un campo F es un *campo euclidiano* si cumple con la siguiente condición:
Si x está en F y $x > 0$, entonces $\sqrt{x}$ está en F.

2.2. Conjuntos numéricos

En esta sección hablaremos de los conjuntos de números y sus propiedades. Haremos una introducción intuitiva y no formal de estos.

2.2.1. Los números naturales

Los números naturales son el sistema numérico más primitivo que conocemos. En la antigüedad se les utilizaba sin tener un concepto claro, simplemente para contar. En este trabajo sólo presentaremos las propiedades del conjunto de los sistemas naturales y las tomaremos como ciertas, una construcción formal de los números naturales se puede encontrar en [6, p. 18].

Definición 2.9 ([17, p. 129])
Denotaremos con $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales cuyos elementos son:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

La suma $+$ y el producto $\cdot$ tienen las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma. Para cualesquiera $m, n, r \in \mathbb{N}$, se cumple que:

Propiedad asociativa: $(m + n) + r = m + (n + r)$.

Propiedad conmutativa: $m + n = n + m$.

Existencia del neutro aditivo 0: $m + 0 = 0 + m = m$.

Ley de la cancelación por la izquierda: Si $m+n = m+r$, entonces $n = r$.

Ley de la cancelación por la derecha: Si $m + n = r + n$, entonces $m = r$.

Propiedades del producto. Para cualesquiera $m, n, r \in \mathbb{N}$, se cumple que:

Propiedad asociativa: $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$.

Propiedad conmutativa: $m \cdot n = n \cdot m$.

Existencia del neutro multiplicativo 1: $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.

Ley de la cancelación por la izquierda: Si $m \cdot n = m \cdot r$ y $m \neq 0$, entonces $n = r$.

Ley de la cancelación por la derecha: Si $m \cdot n = r \cdot n$ y $n \neq 0$, entonces $m = r$.

Distributividad del producto sobre la suma. Para cualesquiera $m, n, r \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$m \cdot (n + r) = m \cdot n + m \cdot r$$

2.2.2. Los números enteros

De la misma manera que hicimos con los números naturales, en este trabajo no presentaremos la definición formal de los números enteros, sólo los abordaremos de manera intuitiva. Por cada número natural n consideremos un objeto denotado por $-n$.

Sea $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, el conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$; entonces $a \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $a = -n$ o $a = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Continuemos con las propiedades de los números enteros pero antes necesitamos definir la suma y el producto en los enteros.

Para definir la suma y el producto en $\mathbb{Z}$ debemos considerar las cuatro posibilidades que existen para una pareja a y b de números enteros con m y n números naturales, que son:

1. $a = m,\ b = n$.
2. $a = -m,\ b = -n$.
3. $a = m,\ b = -n$.
4. $a = -m,\ b = n$.

Definición 2.10
Sean a y b números enteros, la suma de a y b está dada por:

$$a + b = \begin{cases} m + n & \text{si } a = m,\ b = n \\ -(m + n) & \text{si } a = -m,\ b = -n \\ m - n & \text{si } a = m,\ b = -n \text{ y } n \leq m \\ -(n - m) & \text{si } a = m,\ b = -n \text{ y } m < n \\ n - m & \text{si } a = -m,\ b = n \text{ y } m \leq n \\ -(m - n) & \text{si } a = -m,\ b = n \text{ y } n < m \end{cases}$$

A continuación, así como con los números naturales, enunciaremos qué propiedades cumple la suma que acabamos de definir.

Propiedades de la suma. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.

Existencia del neutro aditivo: $a + 0 = a$.

Existencia del inverso aditivo: Existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$.

Como con la suma, veremos la definición del producto en los números enteros para cualesquiera enteros a y b.

Definición 2.11
Sean a y b números enteros, el producto de a y b está dado por:

$$a \cdot b = \begin{cases} m \cdot n & \text{si } a = m,\ b = n \text{ o } a = -m,\ b = -n \\ -(m \cdot n) & \text{si } a = m,\ b = -n \text{ o } a = -m,\ b = n \end{cases}$$

Y cumple las siguientes propiedades.

Propiedades del producto. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se cumplen:

Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.

Existencia del neutro multiplicativo: $a \cdot 1 = a$.

Ley distributiva del producto con respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Con las propiedades que acabamos de enunciar y con la definición de anillo (definición 2.5), podemos comprobar que los números enteros forman un anillo con la suma y el producto, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$.

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ es un grupo abeliano, ya que cumple con *asociatividad* en la suma $+$, tiene el elemento neutro para la suma 0 y cumple con la existencia del inverso para todo $a \in \mathbb{Z}$, a saber, $-a$.

2. El producto es asociativo.

3. El producto cumple con la ley distributiva con respecto a la suma.

2.2.3. Los números reales

El último conjunto numérico del que hablaremos en este capítulo es el de los números reales denotado por $\mathbb{R}$ pero para poder hablar de estos primero hablemos de los números racionales denotados por $\mathbb{Q}$.

Definición 2.12 ([7, p. 70])
El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Dado un número racional $\frac{a}{b}$, a se llama el *numerador* y b se llama el *denominador*. Donde: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ si y sólo si $a \cdot b' = a' \cdot b$ en $\mathbb{Z}$.

Fueron los griegos, con el famoso *teorema de Pitágoras*, quienes concluyeron que el sistema de los números racionales es incompleto para medir. Si consideramos el triángulo rectángulo donde cada uno de los catetos mide 1 y x es la medida de la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras debe ser $x^2 = 1 + 1 = 2$. Por lo cual, x es un número cuyo cuadrado es 2; sin embargo, no existe un número racional cuyo cuadrado se igual a 2, la demostración de esto se encuentra en el famoso libro de los *Elementos* de Euclídes. Por lo que, $\sqrt{2}$ no es un número racional [17, p. 129].

Si bien los números racionales son aquellos números que se pueden representar como fracciones, los números que no se pueden representar como una razón de dos enteros, como $\sqrt{2}$, se llaman irracionales y el conjunto de los números irracionales lo denotaremos como $\mathbb{I}$.

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ juntos forman el conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. Los números reales se construyeron axiomáticamente por primera vez en el siglo XIX por Dedekind(1831-1916). Sin embargo, no daremos una construcción estricta del conjunto de números reales, una demostración formal de estos se puede encontrar en [4], pero si diremos que las reglas de igualdad, suma y multiplicación son las mismas que para las fracciones. La "regla de los signos" para la multiplicación/división es la misma que para los números enteros por lo que los números reales cumplen con las propiedades de campo.

En este capítulo introdujimos las definiciones de estructuras algebraicas y presentamos los conjuntos numéricos que utilizaremos más adelante en este trabajo para comprobar qué propiedades cumplen los números construibles y los números origami. Principalmente utilizaremos que los números reales los podemos utilizar para medir longitudes.

3 Números construibles

Los números construibles son aquellos que se pueden obtener utilizando únicamente regla y compás [2]. La historia de los números construibles se remonta a los antiguos matemáticos griegos, quienes exploraron las posibilidades de construir longitudes utilizando sólo regla y compás. Euclides, en su famosa obra 'Elementos', sentó las bases de la geometría euclidiana y abordó la construcción de figuras geométricas utilizando únicamente estos dos instrumentos [21].

3.1. La regla y el compás

Nota cultural: [21, p. 29]
A través de su oráculo en Delos, Apolo informó a los delianos que si querían librarse de la peste debían construir un nuevo altar cúbico que duplicaba exactamente el volumen del existente. El problema de Delos entonces era construir un cubo que tuviera un lado $\sqrt[3]{2}$ veces más largo que un lado del cubo original. Según otra leyenda, Eratóstenes informó que el problema fue enviado a los geómetras de la Academia de Platón en Atenas. Se supone que Platón dijo que el dios había asignado la tarea de avergonzar a los griegos por su negligencia en las matemáticas y su desprecio por la geometría. No es que los griegos no pudieran construir segmentos de la longitud requerida por varios métodos, sino que no podían hacerlo usando sólo la regla y el compás. *Esa era su tarea.* Seguramente, los griegos sospecharon que el problema no tenía solución; sin embargo, carecían del álgebra para probarlo.

Los griegos partieron de cinco postulados o axiomas, *Los postulados de Euclides*, para la construcción de su geometría, recordemos cuáles son estos:

Definición 3.1 ([5, p. 6])
Postulados de Euclides

1. **Por dos puntos siempre se puede trazar un recta.** Esto nos permite trazar AB, figura 3.1.

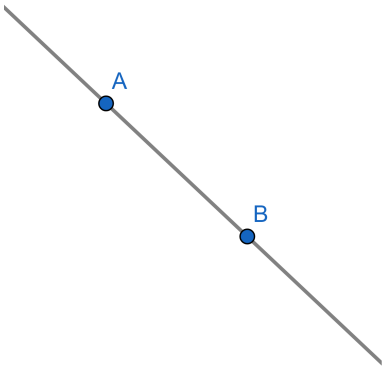


Figura 3.1: Primer postulado de Euclides.

2. **Toda recta es prolongable tanto como se quiera en cualquiera de sus dos direcciones.** Con esto podemos trazar AB y BC, figura 3.2.

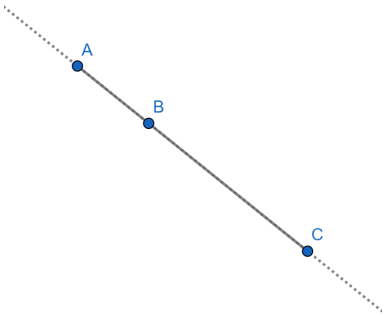


Figura 3.2: Segundo postulado de Euclides.

3. **Cualquier punto del plano se puede usar como centro de un círculo (o de un arco de círculo) de radio arbitrario.** Esta propiedad permite comparar tamaños de segmentos, figura 3.3.

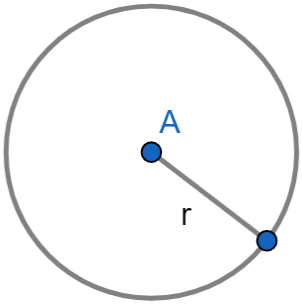


Figura 3.3: Tercer postulado de Euclides.

4. **Todos los ángulos rectos son iguales**. Con esta propiedad es posible definir una unidad angular: el ángulo recto.

5. **Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una sola paralela a la recta dada que contenga al punto dado**, figura 3.4.

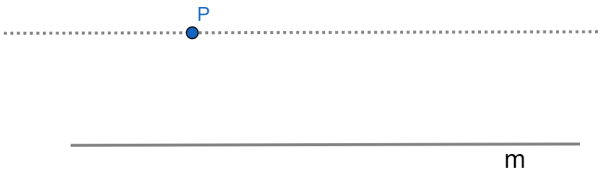


Figura 3.4: Quinto postulado de Euclides.

[24] **Nota cultural:**
Como se puede notar, el quinto postulado tiene una forma más complicada que los otros cuatro, incluso parece que Euclides percibió el papel especial de éste, ya que evitó utilizarlo en la deducción de las primeras 28 proposiciones de los *Elementos*.
Es justo este quinto postulado el que atrajo la atención de los matemáticos durante siglos, que trataron de demostrar el quinto postulado a partir de los cuatro anteriores.
No es fácil mencionar las ideas y todas las personas que contribuyeron a crear una nueva rama de una ciencia y justo para el descubrimiento de otro tipo de geometría se tuvo que construir y destruir.
La geometría no Euclidiana es una categoría general que abarca geometrías que no cumplen con los postulados de la geometría euclidiana y que fueron desarrolladas por varios matemáticos a lo largo de mucho tiempo. Las dos más conocidas son:

Geometría elíptica: También conocida como geometría esférica, se basa en la superficie de una esfera. En la geometría elíptica, la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180 grados y no hay líneas paralelas.

Geometría hiperbólica: También conocida como geometría de Lobachevsky-Bolyai-Gauss. En la geometría hiperbólica, la suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que 180 grados y hay múltiples líneas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada.

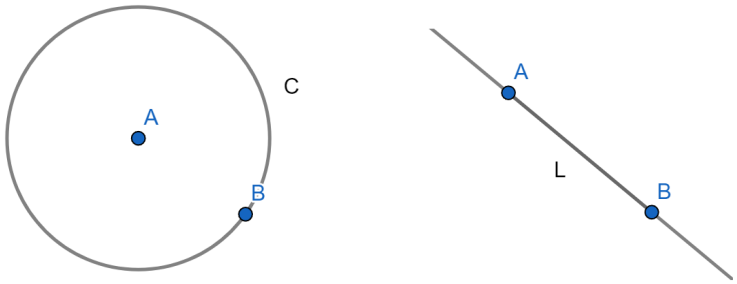
Para saber qué podemos construir con la regla y el compás, tenemos que precisar lo que entendemos por 'construir'. Con la regla podemos trazar una recta siempre que tengamos dos puntos. Es importante mencionar que la regla sólo se usa para trazar líneas a través de dos puntos dados y no se puede usar para medir la longitud. Con el compás podemos dibujar un círculo siempre que nos den el centro y un punto en el círculo o podemos dibujar un círculo si se nos da el centro y cualquier segmento que tenga la longitud de un radio. Adicionalmente, nosotros tenemos una ventaja que no estaba al alcance de los griegos, a saber, la geometría analítica. René Descartes (1596-1650) fue quien desarrolló las bases de la geometría analítica la cual nos proporciona un sistema de coordenadas para poder medir distancias con mayor facilidad y poder ubicarnos con precisión en el plano (definición A.1).

Con la idea del párrafo anterior, ahora continuemos con una definición formal de qué entenderemos por *números construibles*.

Definición 3.2
Supongamos que tenemos una hoja de papel infinita, o como lo podríamos pensar en geometría analítica, $\mathbb{R}^2$, y las dos siguientes herramientas:

1. Un **Compás.** Dados dos puntos A, B en nuestro papel, el compás permite dibujar un único círculo centrado en A que pasa por el punto B (figura 3.5a).

2. Una **Regla** de longitud infinita. Dados dos puntos cualesquiera A, B en nuestro papel, la regla nos permite dibujar una recta que pase por ambos puntos (figura 3.5b).



(a) Círculo con compás (b) Línea con regla

Figura 3.5: Construcción con regla y compás.

Es importante señalar que, si bien la regla y el compás son las herramientas que forman la abstracción de las construcciones de este trabajo, para elaborar los dibujos utilizamos Geogebra `https://www.geogebra.org/geometry`.

Ya que contamos con estas dos herramientas ¿qué podemos hacer? Aparentemente, debemos tener dos puntos dados para usar la regla o el compás euclidiano en primer lugar. Por lo que se deduce que necesariamente debemos tener un conjunto inicial que consta de al menos dos puntos a partir de los cuales podemos construir nuevos puntos con nuestras herramientas. Los puntos que podemos construir se obtienen como las intersecciones de rectas y circunferencias que podemos construir a partir de los puntos $\{(0,0),(1,0)\}$ y para eso utilizaremos la siguiente definición formal.

Definición 3.3 ([21, p. 31])
En el plano cartesiano, un punto es *construible*, si el punto está en $\{(0,0),(1,0)\}$ o se obtiene de los puntos anteriores de manera inductiva aplicando las siguientes tres construcciones de una de tres maneras:

1. La intersección de dos líneas, figura 3.6.

2. Un punto de intersección de una línea y un círculo, figura 3.7.

3. Un punto de intersección de dos círculos, figura 3.8.

Tomemos nuestros dos puntos $\{(0,0),(1,0)\}$ y veamos qué otro punto podemos construir, por ejemplo $(2,0)$. Sigamos los siguientes pasos:

1. Dibujemos una línea L a través de $(0,0)$ y $(1,0)$.

2. Dibujemos un círculo C centrado en $(1,0)$ a través de $(0,0)$.

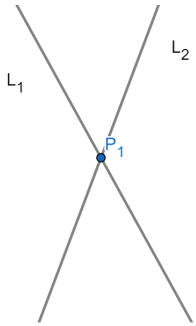


Figura 3.6: Intersección de líneas.

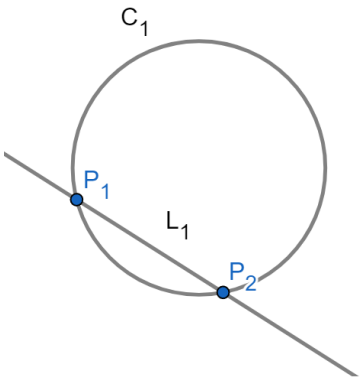


Figura 3.7: Intersección de línea y círculo.

3. Con esto encontramos un segundo punto P en el cual L y C se intersectan, porque L pasa a través del centro de C. La distancia de P a $(0,0)$ es exactamente el doble del radio de C, i.e. 2, y P también está a 1 de distancia del centro de C que es $(1,0)$; más aún, ya que P está en la línea entre dos puntos con cero en la coordenada y, la coordenada y de P es también 0 y en consecuencia P debe de ser $(2,0)$, figura 3.9.

De esta manera podemos construir cualquier punto de la forma $(n,0)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4
Un número real $r \in \mathbb{R}$ es *construible* si hay un número finito de construcciones con regla y compás, que en cierto orden crean un punto P con por lo menos una coordenada igual a r.

Teorema 3.1 ([2, p. 4])**.** *Todos los números naturales* $\mathbb{N}$ *son construibles.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ por demostrar que n es construible. Haremos la demostración por principio de inducción y usaremos la definición A.4.

Paso base: Empezaremos por ver que $0 \in \mathbb{N}$ y $1 \in \mathbb{N}$ son construibles y esto se cumple por la definición 3.3.

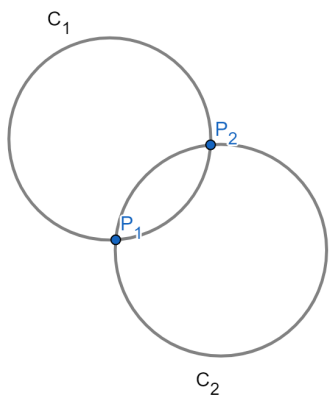


Figura 3.8: Intersección de círculos.

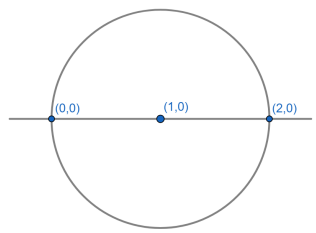


Figura 3.9: Construcción números naturales.

Paso inductivo: Ahora asumimos que ya hemos construido todos los números naturales, entre 1 y n; específicamente, suponemos que construimos los números de la forma $(k, 0)$ para $0 \leq k \leq n$ y buscamos probar que podemos construir $n + 1$.

Para esto, simplemente construimos la línea L a través de $(n - 1, 0)$ y $(n, 0)$, y dibujamos el círculo C centrado en $(n, 0)$ que pase por $(n - 1, 0)$. Entonces, obtenemos un segundo punto, P, en el que L y C se intersecan. La distancia de P a $(n, 0)$ es 1, porque C es un círculo de radio 1. Finalmente, la coordenada y de P es 0. Por lo tanto, P es precisamente el punto $(n + 1, 0)$, figura 3.10.

□

Con esta misma idea podemos extender la construcción hacía la izquierda y construir todos los números negativos y por tanto los números enteros. Otra idea sería, por cada número natural que ya construimos podemos dibujar un círculo centrado en $(0, 0)$ que pase a través del natural $(n, 0)$ y entonces un segundo punto P se intersecta con la línea L y la distancia de $(0, 0)$ a P es n, lo que construye el punto $(0, -n)$.

Teorema 3.2. *Todos los números enteros $\mathbb{Z}$ son construibles.*

Hasta este punto sólo hemos hecho construcciones sobre el eje x. Para movernos también por y demostraremos algunos teoremas. Primero vamos a construir una línea perpendicular a otra dada.

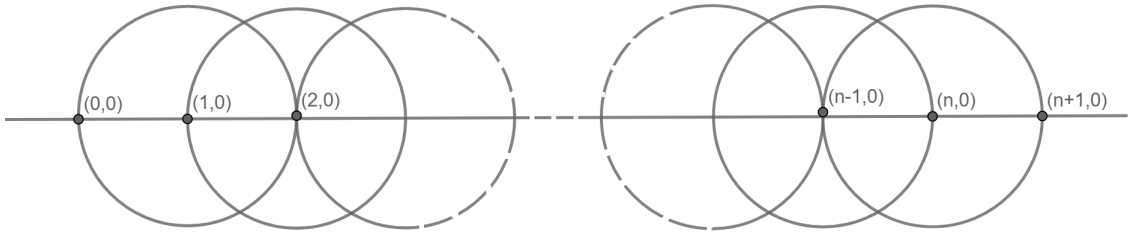


Figura 3.10: Construcción de los números naturales.

Teorema 3.3 ([2, p. 5])**.** *Supongamos que L es un una línea y A es un punto que no está en L. Entonces, podemos construir una línea M a través de A que es* perpendicular *a L; i.e., podemos construir una línea M tal que las dos líneas L y M intersectan en un ángulo de $\pi/2$ radianes.*

Demostración. Sean L una línea y A un punto que no está en L; entonces para la construcción de la línea perpendicular:

1. Tomamos un punto X_1 en nuestra línea L.
2. Dibujamos un círculo C_1 con centro X_1 a través de A.
3. L pasa a través de este círculo y por lo tanto tiene dos puntos de intersección con éste. Elegimos cualquiera y lo llamamos X_2.
4. Ahora dibujamos otro círculo C_2 con centro en X_2 que pase por A.
5. Sabemos que C_1 y C_2 tienen como intersección A porque así los construimos. También sabemos que dos círculos se pueden intersectar en uno o dos puntos. Si se intersectan en un punto quiere decir que estos son tangentes, pero como ambos círculos tienen su centro en L el punto de intersección de tangencia tendría que estar en L y sabemos por la hipótesis que A no está en L. Por lo tanto, debe de existir otro punto B que surge de la intersección de C_1 y C_2.
6. Dibujemos una línea M por A a través de B como se ve en figura 3.11.
7. Finalmente afirmamos que M es nuestra línea perpendicular.

Para demostrar que efectivamente M y L son perpendiculares, seguimos los siguientes tres pasos, figura 3.12:

1. El triángulo ΔX_1AX_2 es congruente al triángulo ΔX_1BX_2 porque tienen los tres lados del mismo tamaño, definición A.2. Uno con el radio de C_1, $X_1A = X_1B$; otro con el radio de C_2, $X_2A = X_2B$, y comparten el lado X_1X_2 .
2. Por lo tanto, los ángulos $\alpha_1 = \angle AX_1P$, $\alpha_2 = \angle BX_1P$ son iguales. Entonces, los triángulos ΔAX_1P, ΔBX_1P son congruentes por el criterio 2 de definición A.2.

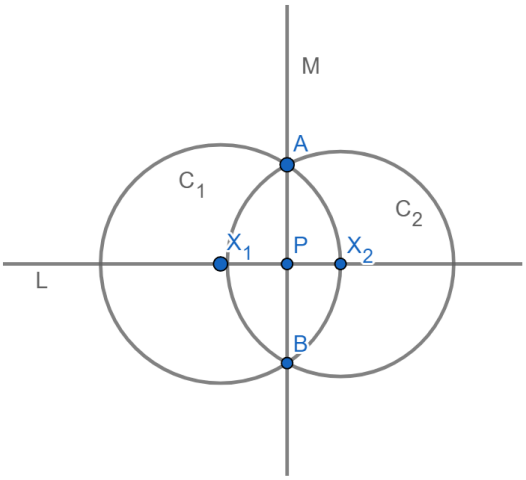


Figura 3.11: Construcción de línea perpendicular.

3. En consecuencia, el ángulo $\beta_1 = \angle APX_1$ es igual al ángulo $\beta_2 = \angle BPX_1$. Pero la suma de estos dos ángulos es $\pi = 180°$, y como M es una línea recta que pasa por A, P y B, estos ángulos tienen que medir $\pi/2 = 90°$. Entonces M y L son perpendiculares.

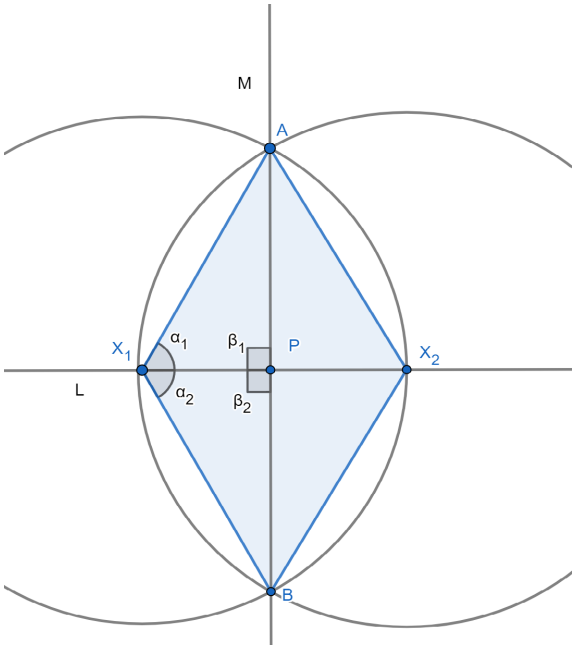


Figura 3.12: Prueba de ortogonalidad.

□

Similar al resultado anterior, algo que también podemos hacer es construir *líneas paralelas*.

Teorema 3.4 ([2, p. 7]). *Supongamos que L es una línea y X es un punto que no está en L. Entonces podemos construir una línea N que pase por A y es* paralela *a L.*

Demostración. Sean L una línea y A un punto que no está en L. Para construir una línea paralela seguimos los siguientes pasos:

1. Tomamos nuestra línea L y escogemos cualquier punto X que no esté en L.
2. Por el teorema 3.3 podemos dibujar una línea M perpendicular a L que pase por X.
3. Si la línea pasa por A, elegimos otro punto X', dibujamos una línea perpendicular M', borramos X y M y llamamos al nuevo par X, M.
4. Con M perpendicular a L y A que no está en M, construimos una línea perpendicular a M que pase por A y la llamamos N.

Para comprobar que N y L son paralelas, notamos que el ángulo entre L y M es $\pi/2$ y que el ángulo entre M y N es también $\pi/2$; como consecuencia, el ángulo entre L y N es $\pi/2 \pm \pi/2 = 0$ o π.

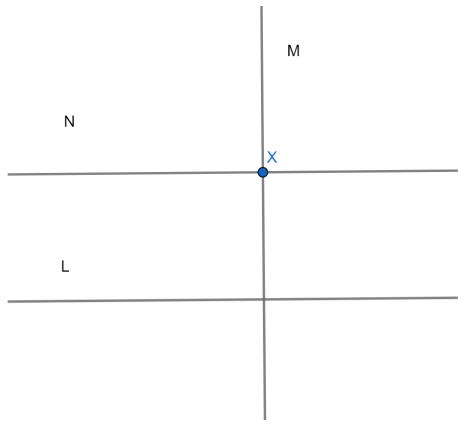


Figura 3.13: Líneas paralelas.

□

Teorema 3.5 (Equivalencia con el compás [2, p.7]). *Dado cualquier punto A y cualesquiera dos puntos diferentes B, C, podemos dibujar un círculo alrededor de A con radio igual a la distancia de B a C. En otras palabras, podemos "transferir" el círculo centrado en B que pasa por C a A.*

Demostración. Sean A un punto y C_1 el círculo con centro en B que pasa a través de C, figura 3.14. Primero construimos un círculo C_2 con centro en A que pase por B y el círculo C_3 con centro en B que pase por A. C_2 y C_3 se intersectan en dos puntos D y E. Por otro lado C_1 y C_2 intersectan en dos puntos F y G. Construimos un último círculo C_4 con centro en D y que pasa por F, éste intersecta con C_3 en un punto P, figura 3.15. Afirmamos que la distancia de A a P es la misma que B a C.

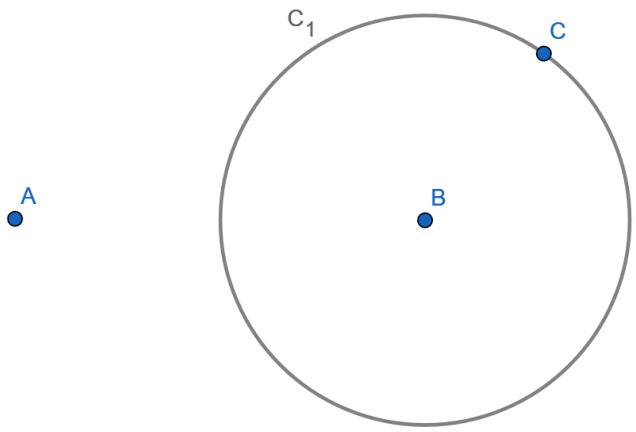


Figura 3.14: Equivalencia con el compás.

Los triángulos $\Delta PDB \cong \Delta FDA$ son congruentes por el criterio de lados iguales, definición A.2. Entonces, $\angle PDB \cong \angle FDA$ y $\angle PDB - \angle ADB = \angle FDA - \angle ADB$. Por lo que, $\angle PDA \cong \angle FDB$.

Ahora, por cómo construimos los círculos, $DP \cong DF$ y $AD \cong BD$. Por lo tanto, por el criterio de lado-ángulo-lado (definición A.2) $\Delta APD \cong \Delta BFD$, lo que implica que $AP \cong BF$. Finalmente, construimos C_1' con centro en A y radio AP.

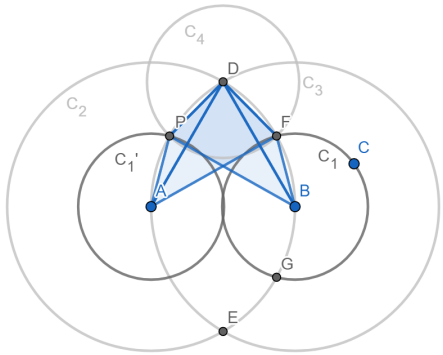


Figura 3.15: Construcción de la equivalencia con el compás.

□

Otro resultado importante para convertir la noción de números construibles, elementos de $\mathbb{R}$ a puntos elementos de $\mathbb{R}^2$ es el siguiente teorema.

Teorema 3.6 ([2, p.7])**.** *Supongamos que los dos valores a, b son construibles; entonces, podemos crear los puntos $(\pm a, \pm b)$ con regla y compás.*

Demostración. Sean a, b números construibles. Si a es construible, existe un punto P con una coordenada igual a a y la otra coordenada igual a algún valor c. Supongamos sin perdida de generalidad que $P = (a, c)$. Dibujamos una línea M perpendicular al eje-x y que pasa por P. Esta línea intersecta con el eje-x en el punto $(a, 0)$. Si dibujamos un círculo centrado en el origen y que pase por $(a, 0)$, construimos los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm a)$. De la misma manera, lo podemos hacer con $(\pm b, 0)$ y $(0, \pm b)$. Con nuestro teorema anterior teorema 3.5, podemos transferir un punto a otro y construir $(\pm a, \pm b)$. Por ejemplo, la intersección del círculo con centro en $(a, 0)$ y de radio la distancia de b al origen, interseca con M en (a, b). □

Con las herramientas anteriores, ahora podemos sumar dos puntos de la siguiente manera.

Teorema 3.7 ([2, p.7])**.** *Supongamos que podemos construir los puntos (a, b) y (c, d) con regla y compás. Entonces podemos construir $(a + c, b + d)$.*

Demostración. Sean a, b, c, d construibles, entonces podemos construir $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, $(d, 0)$. Tomamos el punto $(a, 0)$ y utilizando el teorema 3.5, dibujamos un círculo de radio dado por la distancia de $(c, 0)$ al origen. Este círculo tiene radio c por construcción e intersecta con el eje-x en dos puntos $(a \pm c, 0)$. De igual manera podemos obtener $(0, b \pm d)$. Ahora, dibujamos una línea paralela al eje-x que pase por $(0, b + d)$; esto nos genera todos los puntos de la forma $(x, b + d)$. De manera similar, construimos una línea paralela al eje-y que pase por $(a + c, 0)$; esto genera todos los puntos de la forma $(a + c, y)$. Entonces, la intersección de estas dos líneas es $(a + c, b + d)$, figura 3.16.

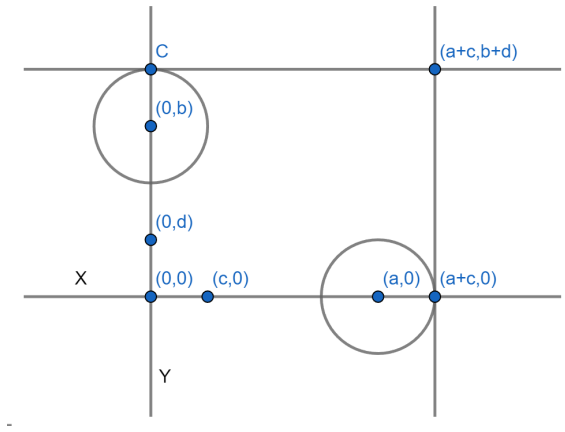


Figura 3.16: Construcción de $(a + b, c + d)$.

□

Teorema 3.8 ([2, p.8])**.** *Supongamos que podemos construir el punto (a, b) y también supongamos que podemos construir el valor x, para $x \neq 0$. Entonces podemos construir (xa, xb) y $(a/x, b/x)$.*

Demostración. Sea (a, b), sin pérdida de generalidad, un punto que no está en el eje-x, y x un valor que también podemos construir. Entonces para demostrar que podemos "multiplicar" (a, b) seguimos los siguientes pasos.

1. Dibujamos una línea L que pase por (a, b) y el origen $(0, 0)$.
2. Dibujamos otra línea M que pase por (a, b) y el punto $(1, 0)$.
3. Como x es construible, podemos construir el punto $(x, 0)$.
4. Dibujamos una línea M' paralela a M que pase por $(x, 0)$.
5. Etiquetamos el puntos $(0, 0)$ como C, (a, b) como D, $(1, 0)$ como E, al punto de intersección de L, M' como F, y otro punto $(x, 0)$ como G, figura 3.17.

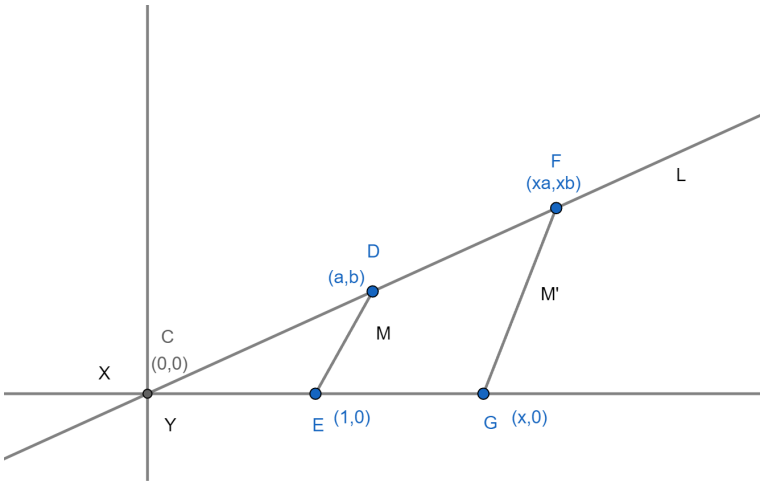


Figura 3.17: Construcción de (xa, xb).

Afirmamos que F es (xa, ab), para esto veamos que como M y M' son paralelas. Por el teorema A.1, la longitud de (a, b) a F es proporcional a la longitud de $(1, 0)$ a $(x, 0)$, lo que quiere decir que F es un punto cuya longitud al origen es x veces más que (a, b), que es $F = (xa, xb)$.

Para dividir, supongamos que empezamos con el punto $F = (xa, xb)$ y necesitamos construir el punto (a, b) y para esto seguimos el siguiente proceso:

1. Dibujamos la línea L que conecta a (xa, xb) con $(0, 0)$.
2. Como x es construible, podemos construir $(x, 0)$.
3. Dibujamos la línea M' que conecta a (xa, xb) a $(x, 0)$.
4. Dibujamos una línea paralela M a M' que pase por $(1, 0)$.
5. Etiquetamos a la intersección de M y L como D.

Con la misma lógica y resultado del teorema A.1, el punto $D = (a, b)$. Por lo tanto, podemos dividir por x. Si empezamos con $F = (a, b)$ y seguimos los pasos que acabamos de enumerar, conectando F a $(x, 0)$, podemos crear el punto D con coordenadas $(a/x, b/x)$. □

3.2. Estructura algebraica de los números construibles

A partir de los resultados anteriores, ahora hablaremos de la estructura algebraica de los números construibles.

Corolario 3.8.1 ([2, p.10]). *La colección de todos los números construibles forma un campo.*

Demostración. Por los teoremas anteriores, sabemos que los números construibles tienen la suma y multiplicación, además también sabemos que contienen a $0, 1$ por la definición 3.4. Entonces tenemos los mismos axiomas de asociatividad $(+, \cdot)$, conmutatividad $(+, \cdot)$, distributividad $(+, \cdot)$ e identidad $(+, \cdot)$. Sólo nos falta tener cerradura e inversos. Por el teorema 3.7 sabemos que la suma de dos números construibles, es construible y por el teorema 3.8, para cualquier número construible, podemos constuir su inverso. Por lo tanto, los números construibles forman un campo. □

Corolario 3.8.2 ([2, p.10]). *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es construible.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{Q}$ entonces $r = \frac{a}{b}$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Sabemos por el teorema 3.2 que a, b son construibles por ser enteros. Por el teorema 3.8 podemos construir $\frac{1}{b}$, ya que 1 y b son construibles. De la misma manera podemos construir $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Por lo tanto, r pertenece a los números construibles. □

Ya sabemos que podemos construir los números racionales $\mathbb{Q}$, pero ¿podemos ir más allá?. Los siguientes teoremas nos dicen qué más podemos construir.

Teorema 3.9. *Si n es construible, entonces también podemos construir $\sqrt{n}$.*

Demostración. Supongamos que n es un número construible. Veamos que podemos construir $\sqrt{n}$.

1. Empezamos la construcción con el segmento de longitud $n - 1$. Dado que podemos construir la suma de números construibles.

2. Construimos el punto medio de este segmento, ya que podemos construir números racionales, para obtener un segmento AB de longitud $\frac{n-1}{2}$.

3. Construimos la recta L perpendicular a AB en B.

4. Con el compás, dibujamos un círculo de radio $\frac{n+1}{2}$ centrado en A y llamamos C a la intersección del círculo y L, figura 3.18.

Si consideramos el $\triangle ABC$, por el Teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1)}{4} = n.$$

Entonces, $BC = \sqrt{n}$. Por lo tanto, $\sqrt{n}$ es construible.

□

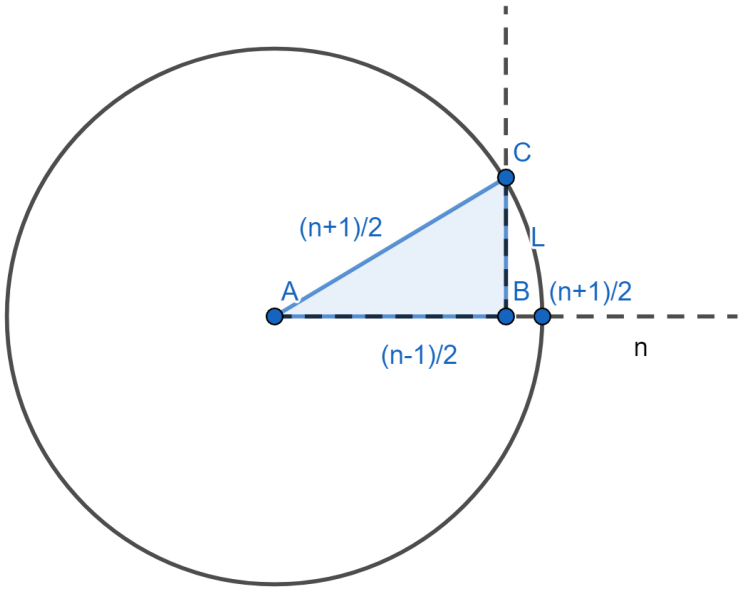


Figura 3.18: Construcción de $\sqrt{n}$.

Corolario 3.9.1. *Los números construibles forman un* campo euclidiano.

Demostración. Decir que x es un cuadrado en el campo F significa que x está en F y hay un número y en F tal que $y^2 = x$. En otras palabras, el número x en F es un cuadrado en F si y sólo si $\sqrt{x}$ también está en F. Entonces, un campo F es euclidiano si y sólo si todo número positivo en F es un cuadrado en F. Por lo que demostramos en teorema 3.9, sabemos que podemos construir la raíz cuadrada de cualquier número construible, por lo tanto $\sqrt{x}$ está en el campo de los números construibles y forma un campo euclidiano. □

Los tres problemas que interesaron a los griegos de la antigüedad y que han pasado de generación en generación a través de los siglos son los tres problemas de la geometría elemental, a saber, *la trisección del ángulo* ¿Podemos construir $cos(20°)$?; *la duplicación del cubo* ¿Se puede construir $\sqrt[3]{2}$?, y *la cuadratura del círculo* ¿Podemos construir π?, [25].

Como lo mencionamos al principio, los griegos no contaban con las herramientas para demostrar que ninguno de estos problemas se puede resolver sólo con regla y compás.

Hasta ahora hemos hecho construcciones con regla y compás. Para dar respuesta a los problemas anteriores, será necesario incluir herramientas del álgebra.

La idea es agrandar un campo dado para formar un campo nuevo, de modo que el campo nuevo contenga algún número nuevo además de todos los números del campo dado. Esto resulta fácil en el caso especial en el que el cuadrado del número específico que se va a sumar está en el campo dado. Por ejemplo, $\sqrt{5}$ no es un número racional pero $(\sqrt{5})^2$ está en $\mathbb{Q}$. Queremos crear el campo que contenga $\sqrt{5}$, así como todos los números racionales. Con $F = \mathbb{Q}$ y $d = 5$ en el enunciado del teorema a continuación,

el teorema dice que el nuevo campo consta de todos los números de la forma $p+q\sqrt{5}$ con p y q en $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema da la receta general para extender un campo dado por la raíz cuadrada de un número positivo que ya está en el campo.

Teorema 3.10 ([21, p.35])**.** *Si F es un campo y d es un número entero positivo en F pero $\sqrt{d}$ no está en F entonces $\{p+q\sqrt{d} \mid p,q \in F\}$ es un campo.*

Demostración. Sea F un campo y d un número entero positivo en F tal que $\sqrt{d} \notin F$. Queremos demostrar que el conjunto $K = \{p+q\sqrt{d} \mid p,q \in F\}$ forma un campo bajo las operaciones de suma y multiplicación de F.

Mostraremos que la suma y la multiplicación en K satisfacen los axiomas de campo:

Propiedades de la Suma: Sea la suma definida por $(p_1+q_1\sqrt{d})+(p_2+q_2\sqrt{d}) = (p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{d}$.

Cerradura bajo la suma: Sean $x = p_1+q_1\sqrt{d}$ e $y = p_2+q_2\sqrt{d}$ elementos cualesquiera de K. Entonces, $x+y = (p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{d}$. Dado que p_1+p_2 y q_1+q_2 son elementos de F (ya que F es un campo), se sigue que $x+y$ también es un elemento de K.

Conmutatividad: Sean $x = p_1+q_1\sqrt{d}$ e $y = p_2+q_2\sqrt{d}$ elementos cualesquiera de K. Entonces, $x+y = (p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{d} = (p_2+p_1)+(q_2+q_1)\sqrt{d} = y+x$. La suma en K es conmutativa, ya que la suma en F es conmutativa.

Asociatividad: Sean $x = p_1+q_1\sqrt{d}$, $y = p_2+q_2\sqrt{d}$ y $z = p_3+q_3\sqrt{d}$ elementos cualesquiera de K. Entonces, $x+(y+z) = (p_1+(p_2+p_3))+(q_1+(q_2+q_3))\sqrt{d} = ((p_1+p_2)+p_3)+((q_1+q_2)+q_3)\sqrt{d} = (x+y)+z$. La suma en K es asociativa, ya que la suma en F es asociativa.

Elemento neutro aditivo: El elemento neutro aditivo es $0+0\sqrt{d}$, que es el mismo que el elemento neutro aditivo en F.

Inversos aditivos: Para cualquier $x = p+q\sqrt{d} \in K$, su inverso aditivo es $-p-q\sqrt{d}$, que también está en K.

Propiedades de la Multiplicación: Sea la multiplicación definida por

$$(p_1+q_1\sqrt{d})\cdot(p_2+q_2\sqrt{d}) = (p_1p_2+dq_1q_2)+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{d}$$

Cerradura bajo la multiplicación: Sean $x = p_1+q_1\sqrt{d}$ e $y = p_2+q_2\sqrt{d}$ elementos cualesquiera de K. Entonces, $x\cdot y = (p_1p_2+dq_1q_2)+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{d}$. Dado que $p_1p_2+dq_1q_2$ y $p_1q_2+p_2q_1$ son elementos de F (ya que F es un campo), se sigue que $x\cdot y$ también es un elemento de K.

Conmutatividad: La multiplicación en K es conmutativa, ya que la multiplicación en F es conmutativa.

Asociatividad: Para probar la asociatividad de la multiplicación, necesitamos demostrar que para todos $a, b, c \in K$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Sean $a = p_1 + q_1\sqrt{d}$, $b = p_2 + q_2\sqrt{d}$, y $c = p_3 + q_3\sqrt{d}$. Calculamos ambas formas de la multiplicación asociativa:

$$(a \cdot b) \cdot c = ((p_1 + q_1\sqrt{d}) \cdot (p_2 + q_2\sqrt{d})) \cdot (p_3 + q_3\sqrt{d})$$

$$= (p_1p_2 + dq_1q_2 + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{d}) \cdot (p_3 + q_3\sqrt{d})$$

Desarrollando esta expresión:

$$= (p_1p_2+dq_1q_2)p_3+(p_1p_2+dq_1q_2)q_3\sqrt{d}+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{d}p_3+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{d}q_3\sqrt{d}$$

$$= (p_1p_2p_3+dq_1q_2p_3)+(p_1p_2q_3\sqrt{d}+dq_1q_2q_3\sqrt{d})+(p_1q_2p_3\sqrt{d}+p_2q_1p_3\sqrt{d})+(p_1q_2q_3d+p_2q_1q_3d)$$

$$= (p_1p_2p_3+dq_1q_2p_3+dp_1q_2q_3+dp_2q_1q_3)+(p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+p_2q_1p_3+dq_1q_2q_3)\sqrt{d}$$

Ahora calculamos $a \cdot (b \cdot c)$:

$$a \cdot (b \cdot c) = (p_1 + q_1\sqrt{d}) \cdot ((p_2 + q_2\sqrt{d}) \cdot (p_3 + q_3\sqrt{d}))$$

$$= (p_1 + q_1\sqrt{d}) \cdot (p_2p_3 + dq_2q_3 + (p_2q_3 + p_3q_2)\sqrt{d})$$

Desarrollando esta expresión:

$$= p_1(p_2p_3+dq_2q_3)+p_1(p_2q_3+p_3q_2)\sqrt{d}+q_1\sqrt{d}(p_2p_3+dq_2q_3)+q_1\sqrt{d}(p_2q_3+p_3q_2)\sqrt{d}$$

$$= p_1p_2p_3+dp_1q_2q_3+p_1p_2q_3\sqrt{d}+p_1p_3q_2\sqrt{d}+q_1p_2p_3\sqrt{d}+dq_1q_2q_3\sqrt{d}+dq_1p_2q_3+dq_1p_3q_2$$

$$= (p_1p_2p_3+dq_1q_2p_3+dp_1q_2q_3+dp_2q_1q_3)+(p_1p_2q_3+p_1p_3q_2+p_2q_1p_3+dq_1q_2q_3)\sqrt{d}$$

Comparando ambas expresiones obtenidas, vemos que son idénticas:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por lo tanto, se cumple la asociatividad de la multiplicación en K.

Elemento neutro multiplicativo: El elemento neutro multiplicativo es $1 + 0\sqrt{d}$, que es el mismo que el neutro multiplicativo en F.

Inversos multiplicativos: Sea $x = p + q\sqrt{d} \in K$ con $p \neq 0$. Entonces, el inverso multiplicativo de x en K es $\frac{p-q\sqrt{d}}{p^2+q^2d}$.

La propiedad distributiva se cumple en K, ya que se cumple en F. □

Definición 3.5 ([21, p.36])
Si d es un número positivo en el campo F pero $\sqrt{d}$ no está en F, entonces $F(\sqrt{d})$ denota el campo $\{p + q\sqrt{d} \mid p, q \in F\}$. Llamamos a $F(\sqrt{d})$ una *extensión cuadrática* de F. Si $F_1 = F(\sqrt{d_1})$, $F_2 = F_1(\sqrt{d_2}), \ldots, F_n = F_{n-1}(\sqrt{d_n})$, entonces escribimos a $F_n = F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$ y llamamos a cada uno de $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ una *extensión cuadrática iterada* de F. Sea $\mathbb{E}$ la unión de todas las extensiones cuadráticas iteradas del campo $\mathbb{Q}$.

El siguiente diagrama nos muestra la iteración sobre los racionales; así, F_{i+1} es una extensión cuadrática del campo F_1. Entonces, F_1 está contenido en F_{i+1} y F_n es una extensión cuadrática iterada de los racionales. La unión de los números en todas esas iteraciones sobre los racionales es $\mathbb{E}$.

$$
\begin{array}{c}
\mathbb{E} \\
| \\
\vdots \\
| \\
F_n = F_{n-1}\left(\sqrt{d_n}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}\right) \\
| \\
\vdots \\
| \\
F_{i+1} = F_i\left(\sqrt{d_{i+1}}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_{i+1}}\right) \\
F_i = F_{i-1}\left(\sqrt{d_i}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_i}\right) \\
| \\
\vdots \\
| \\
F_3 = F_2\left(\sqrt{d_3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}\right) \\
F_2 = F_1\left(\sqrt{d_2}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\right) \\
| \\
F_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d_1}\right) \\
| \\
\mathbb{Q}
\end{array}
$$

Teorema 3.11. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) Si una línea pasa por dos puntos construibles, entonces la línea tiene una ecuación con coeficientes en el campo de los números construibles.

(b) Si tanto el centro de un círculo como un punto en el círculo tienen coordenadas construibles, entonces el círculo tiene una ecuación con coeficientes en el campo de los números construibles.

Demostración. Sea a en el campo F, la prueba la haremos por casos:

Línea recta: Primero tomemos líneas que podemos construir con sólo dos puntos construibles (a, b), (c, d). Construyamos la línea que pasa por estos dos puntos

(teorema A.5):

$$y - b = \frac{d-b}{c-a}(x-a), \quad a \neq c$$

o equivalentemente,

$$y = \frac{d-b}{c-a}x + \Big(\frac{b}{c-a} - \frac{a}{d-b}\Big).$$

Notemos que por corolario 3.8.2, $\frac{d-b}{c-a}$, $\frac{b}{c-a}$, $\frac{a}{d-b}$ son construibles y podemos escribir la ecuación anterior como la ecuación de la recta para m, b construibles.

$$y = mx + b$$

Círculo: Consideremos cualquier círculo que podamos construir, lo podemos hacer especificando el centro (a, b) y el punto (c, d), por lo tanto los círculos tienen la forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

Notamos que justo la parte derecha también se puede construir y por lo tanto, podemos escribirla como la ecuación general del círculo, teorema A.6.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$$

□

Teorema 3.12. *Si dos rectas se cruzan y tienen coeficientes construibles, entonces el punto de intersección es construible.*

Demostración.

Intersección de líneas: Si se intersectan dos líneas cualesquiera, no paralelas, de la forma:

$$y = m_1x + b_1, \; y = m_2x + b_2$$

Obtenemos,

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \; , \; y = m_1\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1$$

Por lo tanto, el punto de intersección es construible. □

Teorema 3.13. *Si una recta y un círculo se intersecan y cada uno tiene una ecuación con coeficientes construibles, entonces los puntos de intersección son construibles.*

Demostración. Sean las ecuaciones de la línea y el círculo,

$$y = mx + c,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$$

Si sustituimos $mx + c$ en y en la segunda ecuación, obtenemos:

$$(x-a)^2 + (mx + c - b)^2 = r$$
$$\Rightarrow x^2 + \frac{2m(c-b) - 2a}{m^2+1}x + \frac{a^2 + (c-b)^2 - r}{m^2+1} = 0$$

De nuevo notemos que $\frac{2m(c-b)-2a}{m^2+1}x$, $\frac{a^2+(c-b)^2-r}{m^2+1}$ son igualmente números construibles. Por lo tanto, podemos cambiar estos por valores y decir que todas las soluciones para x son raíces del polinomio de la forma:

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

Para α, β construibles. □

Teorema 3.14. *Si cada uno de dos círculos que se intersecan tiene una ecuación con coeficientes construibles, entonces los puntos de intersección tienen coordenadas construibles.*

Demostración. Similarmente, supongamos que se intersecan dos círculos, entonces lo que tratamos es resolver las dos siguientes ecuaciones:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1 \ , \ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2$$

Simplemente tomamos la diferencia y obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= r_1 - r_2 \\ \Rightarrow (2a_2 - 2a_1)x + (2b_2 - 2b_1)y &= r_1 - r_2 - a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2\end{aligned}$$

Que es justo la ecuación de una línea con coeficientes construibles. □

Teorema 3.15 ([21, p.39])**.** *Las coordenadas de un número construible están en una* extensión cuadrática iterada *del campo de los racionales* $\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea x un número construible entonces de la definición vemos que x debe ser el último de una secuencia $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de puntos, cada uno de los cuales es $(0,0), (1,0)$, o se obtiene en uno de tres maneras: (i) como la intersección de dos líneas; (ii) como punto de intersección de una línea y un círculo, o (iii) como punto de intersección de dos círculos. Por teorema 3.11, teorema 3.12, teorema 3.13 y teorema 3.14, podemos asociar cada punto x_1 con los racionales y observar que cada punto x_1 para $i > 1$ puede asociarse con un campo F_i tal que las coordenadas de x_1 están en F_i y tal que F_i es igual a F_{i-1} o es una extensión cuadrática de F_{i-1}. Por lo tanto, F_n es una extensión cuadrática iterada de los racionales y las coordenadas de x se encuentran en F_n. □

Teorema 3.16 ([21, p.42])**.** *Si el polinomio de grado n,*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

tiene coeficientes enteros y una raíz racional p/q donde p y q son números enteros que no tienen factor común mayor que 1, entonces p divide a a_0 y q divide a_n.

Demostración. Sustituyendo p/q en lugar de x en la ecuación y multiplicando el resultado por q^n, obtenemos $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Como p divide el lado derecho de la ecuación y como p divide todos los términos del lado izquierdo que preceden al último, entonces p debe dividir $a_0 q^n$. Sin embargo, dado que p no tiene factor común mayor que 1 en común con q, entonces p debe dividir a a_0. Asimismo, dado que q divide todos los términos después del primero pero no tiene un factor común mayor que 1 en común con p, entonces q debe dividir a_n. □

Teorema 3.17 ([21, p.42]). *Si una ecuación cúbica con coeficientes racionales no tiene raíz racional, entonces ninguna de sus raíces es un número construible.*

Demostración. Sean a, b, c números racionales y la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sin raíz racional pero con una raíz construible. Sea $F_0 = \mathbb{Q}$. Entonces hay un entero positivo k que es el mínimo, tal que la ecuación tiene una raíz construible en una extensión cuadrática iterada F_k de los racionales con $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_k})$. Sea $F_i = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_i})$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Entonces F_i es una extensión cuadrática de F_{i-1} para $i = 1, 2, \ldots, k$. Es decir, $F_i = F_{i-1}(\sqrt{d_i})$. Por nuestra suposición, existen p y q en F_{k-1} tales que $r = p + q\sqrt{d_k}$. Debemos tener $q \neq 0$, ya que de lo contrario r está en F_{k-1} y entonces k no es mínimo. De la identidad algebraica

$$\begin{aligned}
&(p \pm q\sqrt{d_k})^3 + a(p \pm q\sqrt{d_k})^2 + b(p \pm q\sqrt{d_k}) + c \\
&= p^3 \pm 3p^2q\sqrt{d_k} + 3pq^2d_k \pm q^3(\sqrt{d_k})^3 + ap^2 \pm 2apq\sqrt{d_k} + aq^2d_k + bp \pm bq\sqrt{d_k} + c \\
&= (p^3 + 3pq^2d_k + ap^2 + aq^2d_k + bp + c) \pm (3p^2q + q^3d_k + 2apq + bq)\sqrt{d_k} = 0
\end{aligned}$$

vemos que $p - q\sqrt{d_k}$ debe de ser raíz si $p + q\sqrt{d_k}$ por que para que sea igual a 0 ambos términos deben de ser igual a 0. Las raíces $p - q\sqrt{d_k}$ y $p + q\sqrt{d_k}$ son distintas ya que $q \neq 0$. Sea t la tercera raíz, entonces:

$$\begin{aligned}
&x^3 + ax^2 + bx + c \\
&= (x - t)(x - (p + q\sqrt{d_k}))(x - (p - q\sqrt{d_k})) \\
&= (x - t)(x - p - q\sqrt{d_k})(x - p + q\sqrt{d_k}) \\
&= (x - t)(x^2 - px + \cancel{xq\sqrt{d_k}} - px + p^2 - \cancel{pq\sqrt{d_k}} - \cancel{xq\sqrt{d_k}} + \cancel{pq\sqrt{d_k}} - q^2d_k) \\
&= (x - t)(x^2 - 2px + p^2 - q^2d_k) \\
&= x^3 - 2px^2 - xq^2d_k + xp^2 - tx^2 + 2pxt + tq^2d_k - tp^2 \\
&= x^3 + x^2(-t - 2p) + x(p^2 - q^2d_k + 2pt) + tq^2d_k - tp^2
\end{aligned}$$

para todo x. Al comparar los coeficientes de x^2 en ambos lados, notamos que debemos de tener $a = -t - 2p$, entonces $t = -a - 2p$ y $t \in F_{k-1}$; sin embargo, esto es una contradicción la minimalidad de k, ya que t es una raíz y está en F_{k-1}, por lo que nuestro supuesto es falso.

□

3.3. Los problemas clásicos de los griegos

Ya tenemos la herramientas necesarias para contestar si los problemas clásicos de los griegos se pueden construir con regla y compás.

Teorema 3.18 ([21, p.44]). *El número $\sqrt[3]{2}$ no es construible.*

Demostración. Notemos que $\sqrt[3]{2}$ es solución de la ecuación $x^3 - 2 = 0$. Por el teorema 3.16, sabemos que si un polinomio tiene una raíz racional p/q, donde el máximo común divisor de p y q es 1, entonces p divide a -2 y q divide a 1. Para este polinomio vemos que ninguno de los divisores de -2, ± 1 , ± 2, es raíz del polinomio $x^3 - 2$. Por lo tanto, no hay ningún número racional que sea solución de la ecuación $x^3 - 2 = 0$.

Ahora por el teorema 3.17 sabemos que si una ecuación con coeficientes racionales, como $x^3 - 2 = 0$, no tiene ninguna raíz racional entonces ninguna de sus raíces es construible; por lo tanto, la raíz $\sqrt[3]{2}$, es un número que no es construible. □

Lo que finalmente implica que la **DUPLICACIÓN DEL CUBO** no tiene solución.

Continuemos con el desarrollo de las herramientas necesarias para demostrar que no se puede resolver el siguiente problema clásico.

Teorema 3.19 ([21, p.43])**.** *Un ángulo de medida θ es construible si y sólo si* $\cos\theta$ *es construible.*

Demostración. Para demostrar este teorema vamos a probar ambas implicaciones:

Implicación Directa (⇒): Sea θ construible, debido a la periodicidad, podemos restringir nuestra atención al intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, más aún, podemos enforcarnos a $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, pues:

1. Si un ángulo con medida θ es construible entonces también los ángulos $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ y $2\pi - \theta$.
2. Si x es construible también $|x|$.

Si el ángulo está formado por las líneas L_1 y L_2 que se intersectan en el punto c.

1. Dibujamos un círculo de radio 1 alrededor de c.
2. El círculo interseca con L_2 en el punto q.
3. Dibujamos una línea perpendicular a L_1 a través de q que cortará a L_1 en un punto $\cos\theta$ alejado de c y $\operatorname{sen}\theta$ alejado de q, figura 3.19.

Implicación Inversa (⇐): Supongamos que $\cos\theta$ es construible. Esto significa que podemos construir un segmento de longitud $\cos\theta$ utilizando únicamente regla y compás. Ahora consideremos la ecuación trigonométrica básica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Podemos reorganizar esta ecuación como $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Dado que podemos construir $\cos\theta$ y realizar operaciones aritméticas y raíces cuadradas con segmentos construibles, también podemos construir $\sin^2\theta$ y, por lo tanto, $\sin\theta$.

Construir $\cos\theta$ y $\sin\theta$ nos permite ubicar el punto en la circunferencia unitaria que corresponde al ángulo θ. Luego, trazamos líneas desde ese punto para construir el ángulo θ. Por lo tanto, demostramos que el ángulo θ es construible, figura 3.20 .

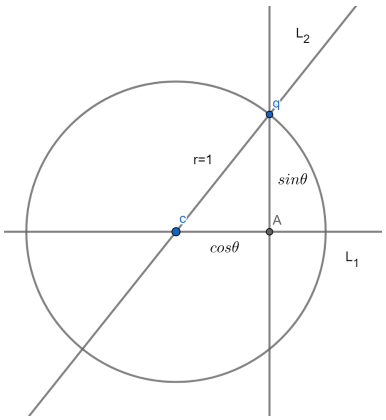


Figura 3.19: Construcción de $\cos\theta$.

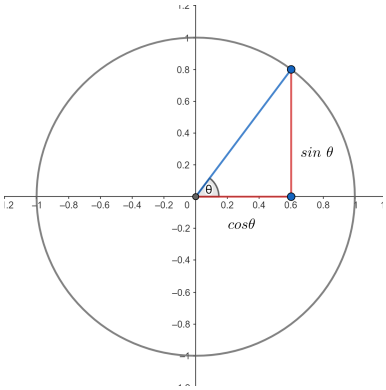


Figura 3.20: Construcción de θ.

Ya demostramos que un ángulo de medida θ es construible si y sólo si $\cos\theta$ es construible.

□

Lema 3.1. *La ecuación* $x^3 - 3x - 2\cos(3A) = 0$ *tiene las siguientes soluciones:*

$$2\cos A,\ 2\cos(A + \frac{2}{3}\pi),\ 2\cos(A + \frac{4}{3}\pi)$$

Demostración. Sea la ecuación $x^3 - 3x - 2\cos(3A) = 0$, para encontrar sus soluciones, recordemos algunas identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ 1 &= \cos^2 A + \sin^2 A \end{aligned}$$

De éstas obtenemos:

▪

$$\begin{aligned} \sin 2A &= \sin(A+A) \\ &= \sin A\cos A + \cos A\sin A \\ &= 2\sin A\cos A \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos(A+A)\\ &= \cos A\cos A - \sin A\sin A\\ &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2\cos^2 A - 1\\ &= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin 3A = \sin(A+2A) &= \sin A\cos 2A + \cos A\sin 2A\\ &= \sin A(2\cos^2 A - 1) + \cos A(2\cos A\sin A)\\ &= \sin A(2\cos^2 A - 1 + \cos A(2\cos A))\\ &= [\sin A][4(\cos A)^2 - 1]\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(A+2A)\\ &= \cos A\cos 2A - \sin A\sin 2A\\ &= \cos A(2\cos^2 A - 1) - \sin A(2\sin A\cos A)\\ &= 2\cos^3 - \cos A - 2\sin^2 A\cos A\\ &= 2\cos^3 - \cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A\\ &= 2\cos^3 - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A\\ &= 4(\cos A)^3 - 3\cos A\end{aligned}$$

Multiplicando las últimas ecuaciones por 2 y ajustando términos, obtenemos:

$$(2\cos A)^3 - 3(2\cos A) - 2\cos 3A = 0$$

Por lo que $2\cos A$ es solución de la ecuación. Ahora, veamos que las siguientes igualdades se cumplen $\cos[3(A+\frac{2}{3}\pi)] = \cos[3(A+\frac{4}{3}\pi)] = \cos[3A]$.

$$\begin{aligned}\cos[3(A+\frac{2}{3}\pi)] &= \cos[3A+2\pi]\\ &= \cos 3A\cos 2\pi - \operatorname{sen} 3A\operatorname{sen} 2\pi\\ &= \cos 3A\cdot 1 - \cancel{\operatorname{sen} 3A\cdot 0}\\ &= \cos 3A\end{aligned}$$

De manera análoga para $\cos[3(A+\frac{4}{3}\pi)]$.
Sustituyendo $2\cos(A+\frac{2}{3}\pi)$ en nuestra ecuación original obtenemos que:

$$\begin{aligned}(2\cos(A+\frac{2}{3}\pi))^3 - 3(2\cos(A+\frac{2}{3}\pi)) - 2\cos(3A) &=\\ 8(\cos(A+\frac{2}{3}\pi))^3 - 6\cos(A+\frac{2}{3}\pi) - 2\cos(3A) &=\\ 2\cos(3(A+\frac{2}{3}\pi)) + \cancel{6\cos(A+\frac{2}{3}\pi)} - \cancel{6\cos(A+\frac{2}{3}\pi)} - 2\cos(3A) &=\\ \cancel{2\cos(3A)} - \cancel{2\cos(3A)} &= 0\end{aligned}$$

De la misma manera para $\cos[3(A+\frac{4}{3}\pi)]$. Por lo tanto, $2\cos A$, $2\cos(A+\frac{2}{3}\pi)$ y $2\cos(A+\frac{4}{3}\pi)$ son soluciones. □

Teorema 3.20. *El número* $\cos\frac{\pi}{9}$ *no es construible.*

Demostración. Sea el $\cos\frac{\pi}{3}=1/2$, si tomamos $3A=\frac{\pi}{3}$ por el lema 3.1, vemos que la ecuación $x^3-3x-1=0$ tiene como soluciones $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{7}{9}\pi$ y $2\cos\frac{13}{9}\pi$. Como la ecuación no tiene solución racional por teorema 3.16, por el teorema 3.17 sus raíces no son construibles. □

Más aún, por el teorema 3.19, el ángulo $\frac{\pi}{3}$ no es construible ya que el $\cos\frac{\pi}{3}$ no es construible. Si bien hay una infinidad de estos ángulos, basta con escoger uno para demostrar que el problema de la **TRISECCIÓN DEL ÁNGULO** no tiene solución.

Por último, veamos si el problema de la cuadratura del círculo no se puede resolver.

Lema 3.2. *Si c es una raíz de un polinomio de grado k con coeficientes en $F(\sqrt{d})$, entonces c es una raíz de un polinomio de grado $2k$ con coeficientes en F.*

Demostración. Supongamos que c es una raíz del polinomio $P(x)$ de grado k con coeficientes en $F(\sqrt{d})$. Es decir,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$$

donde cada a_i es un elemento de $F(\sqrt{d})$. Cada a_i se puede expresar como $a_i=u_i+v_i\sqrt{d}$ donde u_i y v_i son elementos de F.

Entonces,

$$P(x)=\sum_{i=0}^{k}(u_i+v_i\sqrt{d})x^i$$

Dado que c es una raíz de $P(x)$, tenemos que

$$P(c)=\sum_{i=0}^{k}(u_i+v_i\sqrt{d})c^i=0$$

Ahora, consideremos el conjugado de $P(x)$ denotado $P^*(x)$ donde reemplazamos $\sqrt{d}$ por $-\sqrt{d}$:

$$P^*(x)=\sum_{i=0}^{k}(u_i-v_i\sqrt{d})x^i$$

Entonces,

$$P(x)P^*(x)=\left(\sum_{i=0}^{k}(u_i+v_i\sqrt{d})x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k}(u_i-v_i\sqrt{d})x^i\right)$$

Para simplificar esta expresión, consideremos el producto de dos términos genéricos de las sumas:

$$(u_i + v_i\sqrt{d})x^i \cdot (u_j - v_j\sqrt{d})x^j$$

Este producto se expande como:

$$(u_i + v_i\sqrt{d})(u_j - v_j\sqrt{d})x^{i+j} = (u_iu_j - u_iv_j\sqrt{d} + v_iu_j\sqrt{d} - v_iv_jd)x^{i+j}$$

$$= (u_iu_j - v_iv_jd)x^{i+j} + (v_iu_j - u_iv_j)\sqrt{d}x^{i+j}$$

Para el producto completo, debemos sumar todos los términos resultantes:

$$P(x)P^*(x) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}(u_iu_j - v_iv_jd + (v_iu_j - u_iv_j)\sqrt{d})x^{i+j}$$

Notamos que los términos que involucran $\sqrt{d}$ se cancelan en pares:

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}(v_iu_j - u_iv_j)\sqrt{d}x^{i+j} = 0$$

De modo que la expresión completa se reduce a:

$$P(x)P^*(x) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}(u_iu_j - v_iv_jd)x^{i+j}$$

Esto resulta en un polinomio de grado $2k$ con coeficientes en F.

Finalmente, dado que $P(c) = 0$, entonces $P^*(c) = 0$. Así, $P(c)P^*(c) = 0$. Esto demuestra que c es una raíz del polinomio $P(x)P^*(x)$, que tiene grado $2k$ y coeficientes en F.

Por lo tanto, queda demostrado que si c es una raíz de un polinomio de grado k con coeficientes en $F(\sqrt{d})$, entonces c es una raíz de un polinomio de grado $2k$ con coeficientes en F.

□

Teorema 3.21. *Un elemento de $\mathbb{E}$ es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes enteros cuyo grado es una potencia de 2.*

Demostración. Dado que $\mathbb{E} = F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$, donde d_i son elementos en $\mathbb{E}$. Tomemos cualquier elemento α en $\mathbb{E}$. Por definición de $\mathbb{E}$ como una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$, α se puede escribir como:

$$\alpha = a + b\sqrt{d}$$

donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

El polinomio mínimo de $\sqrt{d}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $x^2 - d$. Esto es porque $(\sqrt{d})^2 - d = 0$.

Considera el polinomio:

$$P(x) = (x - (a + b\sqrt{d}))(x - (a - b\sqrt{d})) = x^2 - 2ax + (a^2 - b^2d)$$

Las raíces de $P(x)$ son precisamente $a + b\sqrt{d}$ y $a - b\sqrt{d}$.

Utilizando el lema 3.2, sabemos que cada $\sqrt{d_i}$ es raíz de un polinomio de grado 2 con coeficientes en F.

Ahora, consideremos la extensión $F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}) = \mathbb{E}$, que es una extensión de grado 2^n sobre F, ya que cada extensión cuadrática introduce una extensión de grado 2 porque el polinomio mínimo tiene grado 2. Entonces, cualquier elemento c en $\mathbb{E}$ es raíz de un polinomio de grado 2^n con coeficientes en F. Esto cumple con la condición de que el grado del polinomio sea una potencia de 2.

Para obtener coeficientes enteros, podemos considerar el denominador común m de los coeficientes de $P(x)$ y multiplicar todo el polinomio por m^2 (el grado del polinomio), obteniendo un nuevo polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros.

□

Finalmente, vamos a concluir que el tercer problema clásico de los griegos de construcción, la **CUADRATURA DEL CÍRCULO** tampoco tiene solución. Para mostrar esto es necesario y suficiente mostrar que π no es construible. Del teorema 3.21 sabemos que los números construibles son solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. A estas soluciones se les conoce como números algebraicos. Los números reales que no son raíces de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros se llaman números trascendentales. En 1882, el matemático alemán Ferdinard Lindemann (1852-1939) demostró que π es trascendental y demostró así que el último de los tres problemas de construcción clásicos tampoco tiene solución. La demostración se puede encontrar en [11].

Con esto concluimos nuestro viaje a través de los números construibles y ahora continuaremos con el siguiente conjunto, *los números origami*.

4 Números origami

Los números origami son aquellos que se pueden construir utilizando una técnica homónima llamada origami, que consiste en plegar papel en patrones específicos para crear figuras tridimensionales. Esta técnica también puede ser utilizada para construir ciertos números, como los enteros y las fracciones [15].

En una construcción origami comenzamos con una hoja de papel que puede ser de tamaño infinito. La hoja de papel, tiene dos puntos marcados en ella 0 y 1. La hoja de papel representa al plano complejo con el eje real que pasa por los puntos 0 y 1 y el eje imaginario perpendicular al eje real y con intersección en 0.

Las construcciones origami son simplemente series de dobleces en el papel. Cuando el papel se dobla y se desdobla deja pliegues que en la construcción actúan como líneas. En las construcciones oriagmi un punto sólo existe si se encuentra en la intersección de dos pliegues. Los tipos de dobleces que podemos hacer estarán definidos por los axiomas que veremos en la siguiente sección.

4.1. Los axiomas de origami

Humiaki Huzita enumeró seis pliegues que podemos usar en la construcción de origami, [12].

Axioma 4.1
Las operaciones que se pueden realizar en la construcción de números origami son las siguientes:

O_1**:** Dados dos puntos p_1 y p_2, podemos doblar una línea que pase por p_1 y p_2, figura 4.1.

Figura 4.1: Axioma O_1 de origami.

O_2**:** Dados dos puntos p_1 y p_2, podemos doblar una recta colocando p_1 sobre p_2 (i.e. encontrar la perpendicular al segmento formado por p_1 y p_2), figura 4.2.

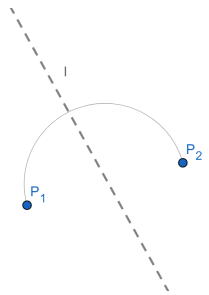


Figura 4.2: Axioma O_2 de origami.

O_3**:** Dadas dos rectas l_1 y l_2, doblar una recta colocando l_1 sobre l_2 (i.e. podemos bisectar el ángulo entre ellas), figura 4.3.

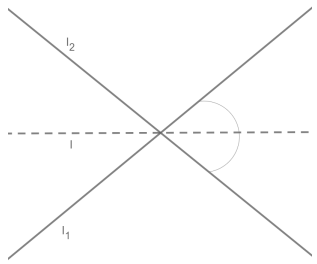


Figura 4.3: Axioma O_3 de origami.

O_4**:** Dado un punto p y una recta l, podemos doblar una recta que pase por p y sea perpendicular a l, figura 4.4.

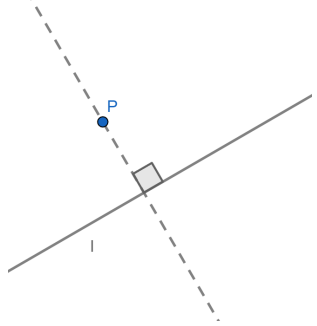


Figura 4.4: Axioma O_4 de origami.

O_5**:** Dados dos puntos p_1 y p_2 y una recta l, podemos doblar una recta colocando p_1 sobre l y pasando por p_2, figura 4.5.

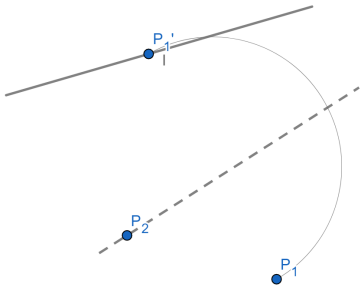


Figura 4.5: Axioma O_5 de origami.

O_6**:** Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos rectas l_1 y l_2, podemos doblar una recta colocando p_1 sobre l_1 y colocando p_2 sobre l_2 con una sola línea, figura 4.6.

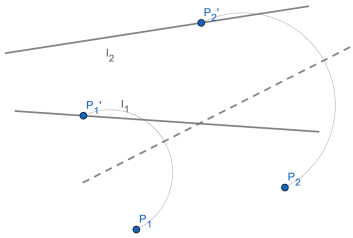


Figura 4.6: Axioma O_6 de origami.

Podemos pensar cada axioma como una función que toma puntos y líneas como parámetros y regresa una línea, a saber, doblez.

4.1.1. Construcción de ejes

Empecemos con nuestra hoja de papel y los dos puntos 0 y 1. Si aplicamos el axioma 4.1,**O1** a 0 y 1 nos da el eje real. Aplicando el axioma 4.1,**O4** a 0 y el eje real obtenemos el eje imaginario.

4.2. Operaciones de campo

El objetivo de esta sección es ver que los números Origami forman un sub-campo de $\mathbb{C}$, es decir, estos están contenidos en $\mathbb{C}$ y vamos a demostrar que para cualesquiera números origami α y β, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$ son origami y que α^{-1} también es origami para $\alpha \neq 0$.

4.2.1. Operaciones elementales

Para lo siguiente definamos dos operaciones más:

Lema 4.1. ***E1: Líneas paralelas*** *Dados un punto p y una línea l, doblamos una línea paralela a l que pase por p.*

Demostración. consiste en aplicar dos veces axioma 4.1, **O4** y puede ser definida por $E1(p, l) = O4(p, O4(p, l))$. La primera aplicación de $O4$ nos da la línea l_1 que es perpendicular a l y que pasa por p. La segunda aplicación nos da una línea l_2 que es perpendicular a l_1; por lo tanto paralela a l, y pasa por p. □

Lema 4.2. ***E2: Líneas perpendiculares*** *Dados un punto p y una línea l, reflejamos p a través de l.*

Demostración. Primero aplicamos el axioma 4.1, **O4** a p y l para obtener la línea l_1 perpendicular a l y que pasa por p. Luego elegimos un punto p_1 en l que no esté en l_1, este punto se puede obtener con la intersección de l con la línea que va de p a 1, ó 0, ó i. Ahora aplicamos axioma 4.1, **O5** a p, p_1, y l_1 para doblar p sobre l y mantenemos el plano doblado. Una vez doblado, podemos marcar la línea entre p y p_1. Esto marca el punto p_2 que es una reflexión de p en l. □

4.2.2. Suma

La suma se puede obtener si aplicamos dos veces $O1$ y dos veces $E1$. Empezamos con tres puntos p_1, p_2 y 0. Aplicamos las operaciones en el siguiente orden para obtener el punto p_3 que es la suma de $p_1 + p_2$.

- $l_1 \leftarrow O_1(0, p_1)$
- $l_2 \leftarrow O_1(0, p_2)$
- $l_3 \leftarrow E_1(p_2, l_1)$
- $l_4 \leftarrow E_1(p_1, l_2)$
- p_3 intersección de (l_3, l_4)

Esencialmente lo que hacemos es encontrar la cuarta esquina del paralelogramo con puntos $0, p_1, p_2$, como se ve en la figura 4.7.

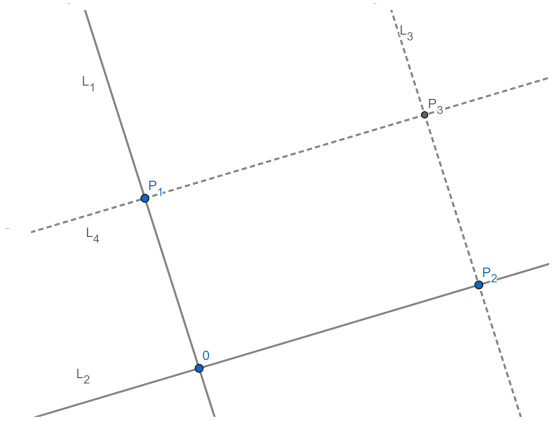


Figura 4.7: Suma origami.

Cuando sumamos dos puntos p_1 y p_2 que son múltiplos escalares, el paralelogramo forma una sola línea, por lo que este método no funciona. Supongamos sin pérdida de generalidad que p_2 tiene mayor magnitud que p_1, primero aplicamos O_1 para marcar la línea l_1 que pasa por 0, p_1 y p_2. Después, aplicamos $O_2(p_2, p_1)$ (en el caso de que $p_1 = p_2$, aplicamos $O_4(p_1, l_1)$) y mantenemos el papel doblado. Ahora nuestro punto p_3 está encima de 0. Con el papel todavía doblado aplicamos $O_4(p_1, l_1)$ y esto marca la suma p_3.

En origami, para obtener un número negativo se hace reflejando al número dado respecto a 0. Para esto, evaluamos el punto p de la siguiente manera $E_2(p, O_4(p, O_1(0, p)))$.

4.2.3. Multiplicación

La multiplicación en origami se implementa con dos operaciones, a saber, la multiplicación por un número real y la multiplicación por i. Utilizamos propiedades de los triángulos para multiplicar un número p_1 por un real r, de la siguente manera, figura 4.8.

- $l_1 \leftarrow O_1(0, p_1)$
- $l_2 \leftarrow O_1(1, p_1)$

- $l_3 \leftarrow E_1(r, l_2)$
- p_2 intersección de (l_1, l_3)

Notamos que este método no funciona si p_1 es un número real. En este caso, podemos simplemente agregar i a p_1, multiplicarlo por r y proyectar el producto en el eje real con con O_4

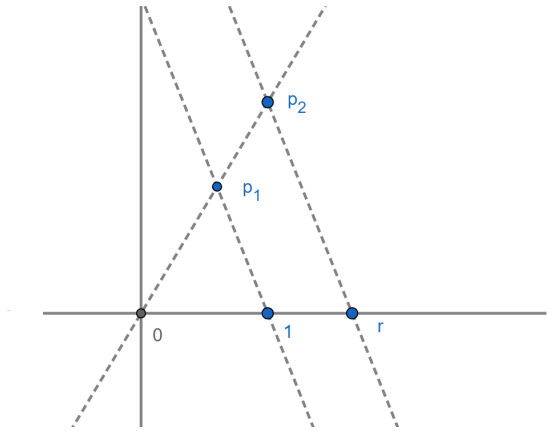


Figura 4.8: Multiplicación por un número real origami.

Para multiplicar un número por i, lo que haremos será rotar $\pi/2$ en sentido contrario a las manecillas del reloj en 0.

- $l_1 \leftarrow O_1(0, p_1)$
- $l_2 \leftarrow O_4(0, l_1)$
- $l_3 \leftarrow O_2(l_1, l_3)$
- $p_2 \leftarrow E_2(p_1, l_3)$

Con esto podemos sumar, restar, multiplicar por reales y multiplicar por i, y finalmente combinar estas operaciones para multiplicar cualquier número complejo.

4.2.4. Inverso multiplicativo

Sabemos que el inverso multiplicativo de cualquier número complejo (a, b) es igual a $(a - bi)/(a^2 + b^2)$. Para realizar esto, necesitamos saber dividir. Esto se hace de manera similar a la multiplicación, como se muestra en figura 4.9.

- $l_1 \leftarrow O_1(0, p_1)$
- $l_2 \leftarrow O_1(r, p_1)$
- $l_3 \leftarrow E_1(1, l_2)$
- p_2 intersección de (l_1, l_3)

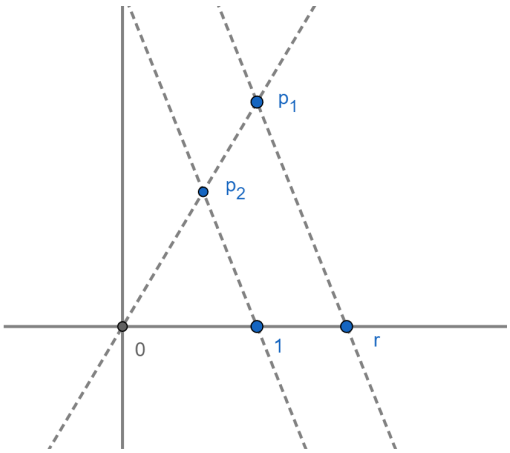


Figura 4.9: División por un número real origami.

4.3. Raíces cuadradas

Cuando calculamos la raíz de un número complejo, consideramos su representación polar, calculamos la raíz de su magnitud y dividimos el ángulo entre 2. Para hacerlo en origami, por lo tanto debemos de tener dos operaciones: obtener la raíz de un número real positivo y bisecar un ángulo. La última ya la conocemos pues es el axioma O_3. Sacar la raíz cuadrada de un número real r usando origami requiere el uso del círculo. Con la ecuación:

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + y^2$$

obtenemos, justamente $y = \sqrt{x}$. Con esto, entonces consideremos el círculo con centro en $(0, \frac{r-1}{s})$, con radio $\frac{r+1}{2}$ y notemos que interseca al eje real en $p_3 = (\sqrt{r}, 0)$. El metódo para obtener p_3, raíz de r, es el siguiente, figura 4.10:

- $p_1 \leftarrow ir$
- $p_2 \leftarrow \frac{p_1 - i}{2}$
- $l_3 \leftarrow O_5(-i, p_2, \text{eje real})$
- $p_3 \leftarrow E_2(-i, l_3)$

Para calcular la raíz de un número complejo p_1, primero bisecamos el ángulo entre el eje real y p_1 para obtener el ángulo medio l_1, luego rotamos p_1 en el eje real con O_5 y E_2 para obtener el real con magnitud positiva p_1, el cual llamaremos r. Tomamos la raíz cuadrada de esta magnitud y la llamamos p_2. Finalmente rotamos p_2 a l_1 con O_5 y E_2 para obtener p_3 que es la raíz cuadrada de nuestro punto original p_1.

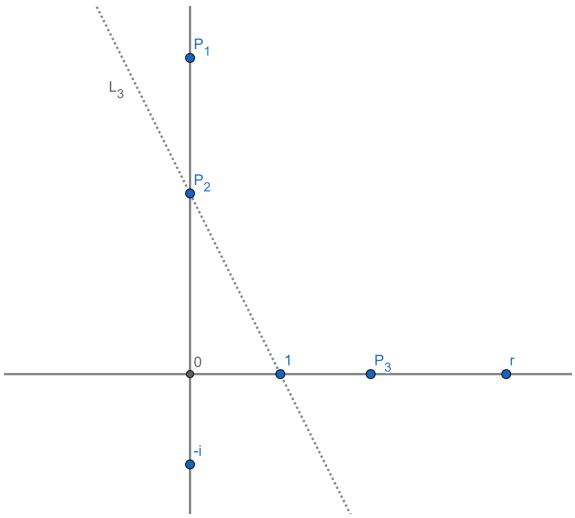


Figura 4.10: Raíz cuadrada origami.

4.4. Raíces cúbicas

Vamos a seguir el método para resolver las ecuaciones cúbicas en $\mathbb{R}$ de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c$ con origami porpuesto en [12].

Sean dos puntos p_1 y p_2 con coordenadas $(a, 1)$ y (c, b), respectivamente, y las líneas l_1 y l_2 con ecuaciones $y + 1 = 0$ y $x + c = 0$, respectivamente. Doblamos una línea colocando p_1 en l_1 y colocando p_2 en l_2. Entonces la pendiente del pliegue es la solución de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Sea P_1 una parábola con foco p_1 y directriz l_1. Dado que el pliegue no es paralelo al eje-y, podemos dejar que el pliegue tenga la ecuación $y = tx + u$. Sea el pliegue tangente a P_1 en (x_1, y_1) y $(x_1 - a)^2 = 4y_1$. Debido a que el pliegue tiene la ecuación $(x_1 - a)(x - x_1) = 2(y - y_1)$, obtenemos $t = (x_1 - a)/2$ y $u = y_1 - x_1(x_1 - a)/2$. De estas ecuaciones, obtenemos $u = -t^2 - at$, figura 4.11.

Cuando c no es 0, sea P_2 una parábola que tiene el foco p_2 y la directriz l_2. Sea el pliegue tangente a P_2 en (x_2, y_2) y $(y_2 - b)^2 = 4cx_2$. Debido a que el pliegue tiene la ecuación $(y_2-b)(y-y_2) = 2c(x-x_2)$, obtenemos $t = 2c/(y_2-b)$ y $u = y_2-2cx_2/(y_2-b)$. De estas ecuaciones, obtenemos $u = b+c/t$ (t no es 0 porque el pliegue no es paralelo al eje-x). Por lo tanto, $t^3 + at^2 + bt + c = 0$.

Cuando c es 0, p_2 está en l_2. Entonces, el pliegue es perpendicular a l_2 o el pliegue pasa por p_2. En el primer caso, $t = 0$. En el último caso, $u = b$, y $t^2 + at + b = 0$. Por lo tanto $t^3 + at^2 + bt + c = 0$.

4.5. El campo de los números origami

Con las operaciones que revisamos en la apartado 4.2, vemos que los números origami $\mathbf{O}$ forman un subcampo de $\mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{O} \subseteq \mathbb{C}$. Las secciones apartado 4.3 y apartado 4.4 nos hablan de que podemos resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Esto significa que, para cualquier subcampo k de $\mathbf{O}$, si una extensión K/k

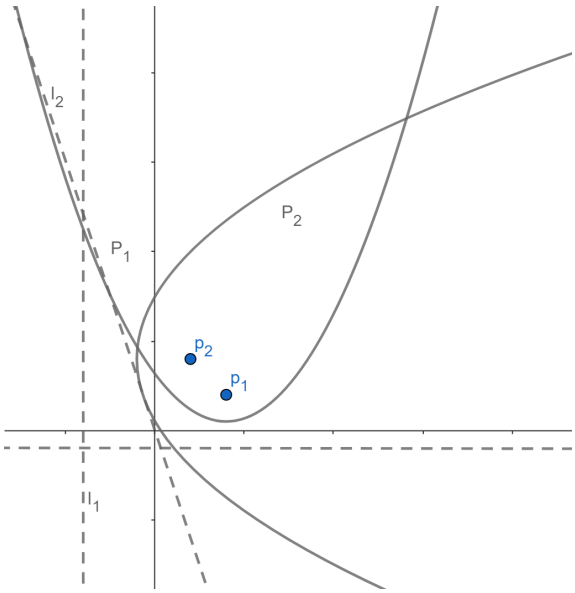


Figura 4.11: Raíz cúbica en origami.

tiene grado 2 ó 3, entonces K es un subcampo de $\mathbf{O}$. La consecuencia de esto es que un número complejo α es origami, si existe una cadena de campos

$$\mathbb{Q} \subset K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = \mathbb{Q}(\alpha)$$

donde cada extensión K_{i+1}/K_i tiene grado 2 ó 3. Si α es origami, su conjugado $\overline{\alpha}$ pude construirse al reflejar α en el eje imaginario al aplicar la operación E_2.

4.6. Ejemplos de objetos origami construibles

En el capítulo 3 comprobamos que las construcciones con regla y compás producen números que son soluciones a ecuaciones que son parte de una extensión cuadrática; sin embargo, también demostramos que no se puede trisecar un ángulo o duplicar un cubo con regla y compás.

Como ya vimos en el apartado 4.4, además de construir lo que pueden hacer la regla y el compás, el origami también puede construir puntos que son soluciones a ecuaciones cúbicas. Entonces, es posible duplicar un cubo y trisecar un ángulo con origami.

4.6.1. La duplicación del cubo

Recordemos que la duplicación del cubo se refiere a construir un cubo con volumen igual a 2. Así que este problema se puede resolver siempre y cuando se pueda construir un lado con longitud igual a $\sqrt[3]{2}$. A continuación, veremos que esto sí es posible realizando operaciones (dobleces) origami.

Teorema 4.1 ([18, p.51]). *Es posible construir $\sqrt[3]{2}$ con origami.*

Demostración. Según [16] y [13], Peter Messer [22] desarrolló el método de construcción de $\sqrt[3]{2}$ en 1986.

Primero, doblamos la hoja de papel cuadrada en tercios, como explica [16], figura 4.12.

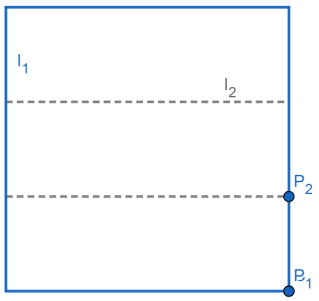


Figura 4.12: Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 1.

Sea l_1 el borde izquierdo del papel l_2 la línea del pliegue del tercio superior, la esquina inferior derecha del papel P_1 y la intersección del borde derecho del papel con la línea de pliegue de un tercio inferior P_2.

Aplicamos O_6 a los puntos P_1, P_2 y las líneas l_1,l_2 para hacer una línea de pliegue m que coloque P_1 en l_1 y P_2 en l_2, figura 4.13.

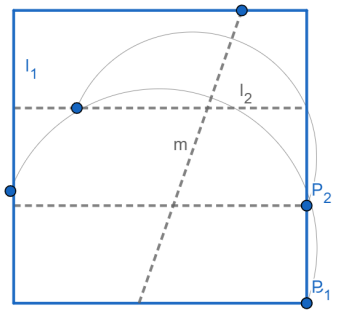


Figura 4.13: Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 2.

El punto P_1' donde P_1 toca el borde del papel divide el borde por $\sqrt[3]{2}$ a 1. Para mostrar esto, consideramos la figura 4.14.

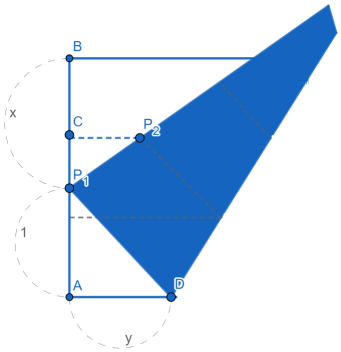


Figura 4.14: Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 3.

Sea $P_1B = x$; $P_1A = 1$; $AD = y$. Entonces $AB = x + 1$; $P_1D = x + 1 - y$; $P_1P_2 = (x + 1)/3$; $CP_1 = x - (x + 1)/3 = (2x - 1)/3$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ΔP_1AD, tenemos,

$$\begin{aligned} (x + 1 - y)^2 &= 1 + y^2 \\ \Rightarrow y &= \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \angle P_1CP_2 = \angle DAP_1 &= \frac{\pi}{2} \\ \angle CP_1P_2 + \angle CP_2P_1 &= \frac{\pi}{2} \\ \angle ADP_1 + \angle AP_1D &= \frac{\pi}{2} \\ \angle CP_1P_2 + \angle AP_1D &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Entonces, $\angle CP_1P_2 = \angle CP_2P_1$ y $\angle CP_2P_1 = \angle AP_1D$. Por lo tanto, $\Delta P_1CP_2 \sim \Delta DAP_1$ y:

$$\begin{aligned} \frac{DA}{DP_1} &= \frac{P_1C}{P_1P_2} \\ \Rightarrow \frac{y}{x + 1 - y} &= \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} = \frac{2x - 1}{x + 1} \\ \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{2x - 1}{x + 1} \text{ por la ecuación (4.1)} \\ \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 2x &= 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 \\ \Rightarrow x^3 &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = \sqrt[3]{2}$ $\square$

4.6.2. Trisección del ángulo

En esta sección vamos a demostrar como, a diferencia de con los números construibles, con origami sí podemos construir la trisección de cualquier ángulo. Según [13] y [1] Hisashi Abe desarrolló el método de trisección de ángulos publicado en 1980 [10].

Teorema 4.2 ([18, p.53])**.** *Es posible trisecar cualquier ángulo θ con origami.*

Demostración. Primero, colocamos un ángulo de medida θ en la esquina inferior izquierda P de una hoja de papel cuadrada formada por el borde inferior del papel y la línea l_1, figura 4.15.

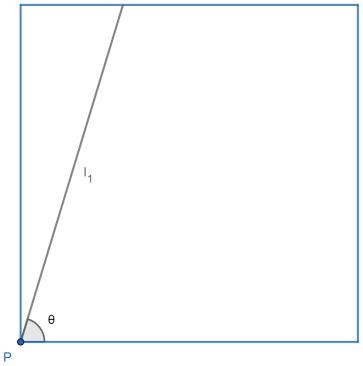


Figura 4.15: Trisección de un ángulo θ con origami, paso 1.

Luego, para cualquier punto Q construible en el borde izquierdo del papel, aplique O_4 para doblar una línea perpendicular al borde izquierdo del papel a través del punto Q. Después con O_2 doblamos P sobre Q para producir la línea l_2 equidistante a las rectas paralelas que pasan por P y Q, figura 4.16.

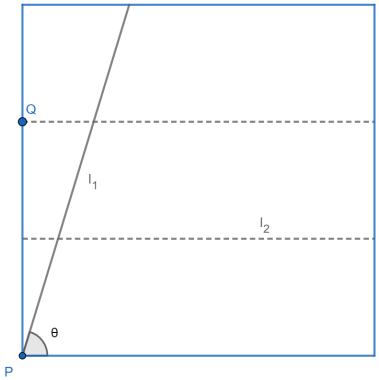


Figura 4.16: Trisección de un ángulo θ con origami, paso 2.

Finalmente, aplicamos O_6 a los puntos P, Q y las líneas l_1 , l_2 para hacer la línea de pliegue m que pone P en l_2 y Q en l_1 figura 4.17.

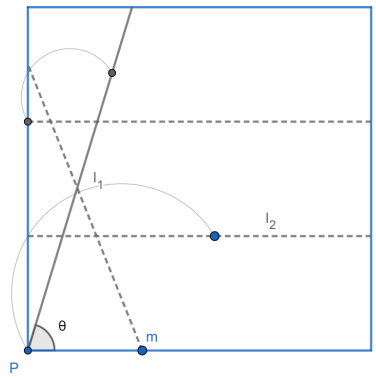


Figura 4.17: Trisección de un ángulo θ con origami, paso 3.

La reflexión P' del punto P sobre la línea m, se puede construir como la intersección de la línea perpendicular a m que pasa por P y l_2. De manera análoga construimos la reflexión Q' del punto Q. El ángulo formado por el borde de abajo del papel y el segmento PP' tiene medida $\theta/3$.

Para demostrarlo, consideramos figura 4.18.

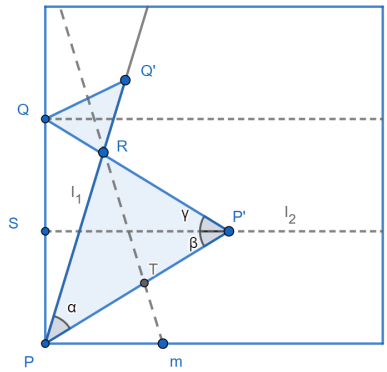


Figura 4.18: Trisección de un ángulo θ con origami, paso 4.

Sea R la intersección de los segmentos PQ' y $P'Q$; S la intersección del borde izquierdo del papel y línea l_2, y T la intersección del segmento PP' y la línea m. Además, sean $\angle RPP' = \alpha$, $\angle PP'S = \beta$, y $\angle RP'S = \gamma$. Como P' y Q' son reflexiones de P y Q sobre m, R se encuentra también en la línea m. Además, como $PS = QS$ y PQ es perpendicular a SP', $\Delta P'QP$ es un triángulo isósceles. Entonces,

$$\beta = \gamma \tag{4.3}$$

Similarmente, ya que P' es una reflexión de P en m, $PT = P'T$ y $PP' \perp TR$, $\Delta RPP'$ es un triángulo isósceles. Por lo tanto,

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{4.4}$$

Ya que l_1 y el borde inferior del papel son paralelos, el ángulo formado por el segmento PP' y el borde inferior del papel tiene medida β . Entonces

$$\theta = \alpha + \beta \quad = (\beta + \gamma) + \beta, \text{ de la ecuación (4.5)} = 3\beta, \text{ de la ecuación (4.3).} \tag{4.5}$$

Notemos que el ángulo en la figura 4.18 está entre 0 y π. Cuando el ángulo tiene medida $\theta = \pi/2$, $Q = Q'$, entonces la línea m dobla el punto P en l_2 a través de Q. Dado que, $\Delta QPP'$ es un triángulo equilátero, en este caso, el segmento PP' triseca θ. Cuando el ángulo es obtuso, el ángulo puede ser dividido en un ángulo agudo α y un ángulo recto β, entonces $\theta = \alpha + \beta$. Esto se puede hacer usando O_4 para construir una línea l perpendicular a un lado del ángulo a través del centro O, figura 4.19.

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{\theta}{3}$$

Entonces, el ángulo entre m (la línea de trisección del ángulo agudo) y n (la línea de trisección del ángulo recto), nos da la trisección del ángulo obtuso. Por lo tanto, este método puede ser aplicado a cualquier ángulo.

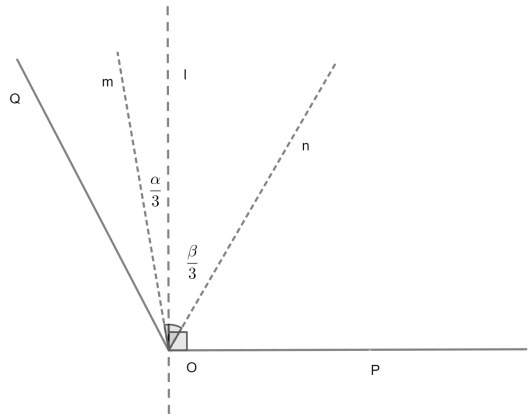


Figura 4.19: Trisección de un ángulo obtuso con origami.

□

Si bien los números origami agregan raíces cúbicas y nos permiten resolver dos de los problemas clásicos de los griegos, que son imposibles de resolver sólo con regla y compás, se tiene que el tercer problema, la cuadratura del círculo, no se puede resolver con la construcción de números origami. Ya que π es un número trascendental, esta demostración, queda fuera del alcance de la tesis.

El estudio de los números origami es relativamente reciente a comparación de otras áreas de las matemáticas y se continua con su estudio.

En [14] estudiaron posibles extensiones del origami con compás. Con el compás se puede construir círculos centrados en un punto de origami con radio una distancia entre dos puntos de origami. En este árticulo se da una nueva demostración para la trisección del ángulo y resolver ecuaciones de cuarto grado. No obstante, se concluye

que utilizar el compás con origami no aumenta el poder de construcción de los números origami.

En [20], Lucero revisa las operaciones de doblado al verlas como geometría de reflexiones. Después de enumerar todas las posibles incidencias entre puntos y rectas construibles con un plano de reflexión, con esto se obtienen 8 posibles operaciones de doblado. Las ocho operaciones incluyen los siete de los axiomas tradicionales y una nueva operación, que es doblar una línea construible de modo que se doble sobre sí misma.

5 Conclusiones

En esta tesis, se han estudiado ciertos conjuntos de números algebraicos, los números construibles con regla y compás y también los números construibles con origami.

El conjunto de los números construibles con regla y compás conforman el conjunto de números que se pueden construir usando sólo un compás y una regla. Este conjunto es un subconjunto de los números algebraicos que incluye algunos números irracionales, tales como las raíces cuadradas de los enteros.

El conjunto de los números construibles con origami es el conjunto de todos los números que se pueden construir haciendo dobleces en una hoja de papel. Este conjunto contiene al conjunto de los números construibles con regla y compás, además también incluye a otros números irracionales, como las raíces cúbicas de los enteros.

El análisis de las estructuras algebraicas de estos conjuntos revela que el conjunto de números construibles con regla y compás es un subconjunto de los números construibles con origami. Además, las construcciones de origami pueden resolver dos problemas clásicos griegos:

1. **Duplicación del Cubo**: Construir un cubo con el doble del volumen de un cubo dado requiere construir una longitud de lado de $\sqrt[3]{2}$. Las construcciones de origami pueden lograr esto.

2. **Trisección de un Ángulo**: Aunque es imposible con sólo una regla y un compás, el origami puede trisecar cualquier ángulo.

Sin embargo, el tercer problema clásico, cuadrar el círculo, sigue siendo imposible incluso con origami porque π es un número trascendente. A pesar de esta limitación, el estudio de los números de origami es un desarrollo relativamente reciente en las matemáticas, y la investigación en curso continúa explorando sus posibilidades. Por ejemplo, algunos investigadores han ampliado las posibilidades de las construcciones de origami al utilizar un compás. Si bien esto permite la construcción de círculos centrados en un punto de origami con un radio igual a la distancia entre dos puntos de origami, se ha demostrado que el uso de un compás con origami no aumenta el poder de la construcción de números de origami. Además, otros estudios han explorado diferentes enfoques para comprender las operaciones de origami. Por ejemplo, un estudio examinó las operaciones de plegado como reflexiones en geometría, lo que llevó a la identificación de ocho posibles operaciones de plegado. Estas operaciones incluyen los siete axiomas tradicionales del origami, junto con una nueva operación que implica plegar una línea construible sobre sí misma.

La exploración de los números de origami y sus métodos de construcción es un testimonio de la rica interacción entre la geometría, el álgebra y esta antigua forma de arte.

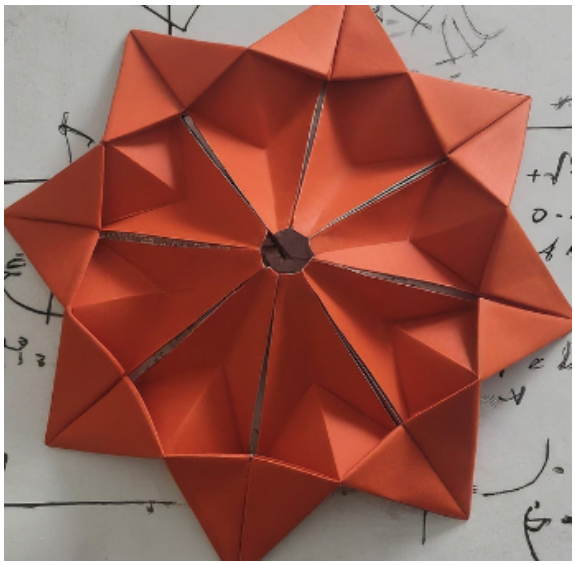


Figura 5.1: Imagen generada con inteligencia artificial.

A

A.1. Geometría

Definición A.1 ([19, p. 5])
El sistema coordenado regular o plano cartesiano consta de dos rectas dirigidas $X'X$ y $Y'Y$, llamadas ejes coordenados, perpendiculares entre sí. La recta $X'X$ se llama eje-x; $Y'Y$ es el eje-y, y su punto de intersección O, el origen. Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. La dirección positiva del eje-x es hacia la derecha y la del eje-y hacia arriba.

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular. Se traza PA perpendicular al eje-x y PB perpendicular al eje-y. La longitud del segmento dirigido OA se representa por x y se llama *abscisa* de P, la longitud del segmento OB se representa por y y se llama *ordenada* de P. Los números reales, x y y, se llaman *coordenadas* de P y se representa por (x, y). Las abscisas medidas sobre el eje-x a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas sobre Y arriba de O son positivas y abajo negativas, figura A.1.

Dadas las coordenadas (x, y), $x \neq y$, quedan determinados dos puntos uno de coordenadas (x, y) y otro de coordenadas (y, x) que son diferentes. De aquí que sea importante escribir las coordenadas en su propio orden, con la abscisa en el primer lugar y la ordenada en el segundo. Por esta razón un par de coordenadas en el plano se llama un par *ordenado* de números reales.

Definición A.2 ([3, p. 6])
Dos triángulos son *congruentes*, si tienen sus lados y sus ángulos correspondientes iguales. Es decir, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $CA = C'A'$ y los ángulos en A,B y C son iguales a los ángulos A', B' y C'.

El primer criterio de congruencia nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como *lado-ángulo-lado*.

El segundo criterio nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como *ángulo-lado-ángulo*.

Finalmente, el tercer criterio nos dice que si tenemos dos triángulos con tres lados iguales, entonces son congruentes. a este criterio se le conoce como *lado-lado-lado*.

Definición A.3 ([3, p. 18])
Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son *semejantes*, si sus ángulos respectivos

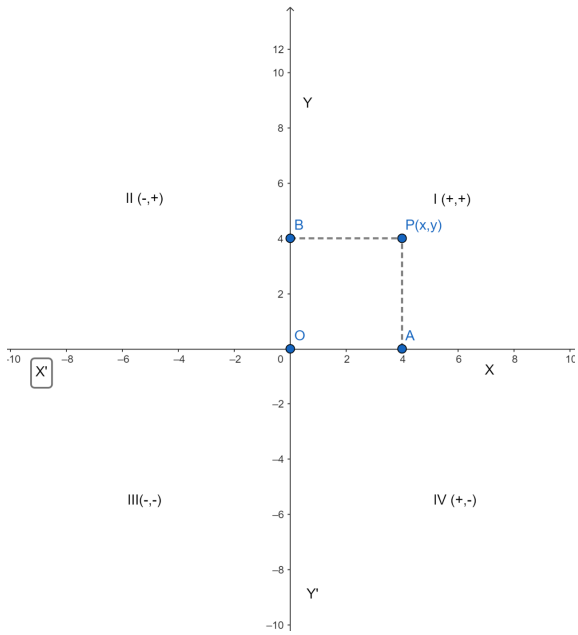


Figura A.1: Plano Cartesiano.

son iguales, es decir,

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Lema A.1 ([3, p. 14])**.** *Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces, la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura común.*

Demostración. Sean los triángulos ΔABC y ΔXYZ, su área está dada por

$$A(\Delta ABC) = \frac{BC \cdot h}{2} \text{ y } A(\Delta XYZ) = \frac{YZ \cdot h}{2}$$

donde h es la altura común. Así la razón de sus áreas es:

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta XYZ} = \frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{YZ \cdot h}{2}} = \frac{BC}{YZ}$$

□

Teorema A.1 (Primer teorema de Thales [3, p. 15])**.** *En el triángulo ΔABC, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC. Entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Demostración. Sean el triángulo ΔABC y DE una recta paralela a la base. Observamos que los triángulos ΔABE y ΔADE tienen la misma altura desde el vértice E, figura A.2. Luego, la razón de sus bases es igual a la razón de sus áreas, lema A.1, así:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A(ABE)}{A(ADE)} \tag{A.1}$$

Análogamente, al considerar los triángulos ΔADC y ΔADE, tenemos que:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{A(ADC)}{A(ADE)} \tag{A.2}$$

Observemos que los triángulos ΔDEB y ΔDEC tienen a DE como base común; y como DE y BC son paralelos, las repectivas alturas sobre esta base miden lo mismo, luego: $A(\Delta DBE) = A(\Delta DCE)$. Por lo tanto , $A(\Delta ABE) = A(\Delta ADE) + A(\Delta DBE) = A(\Delta ADE) + A(\Delta DCE) = A(\Delta ADC)$. Esta identidad junto con la ecuación (A.1) y la ecuación (A.2), nos lleva a que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

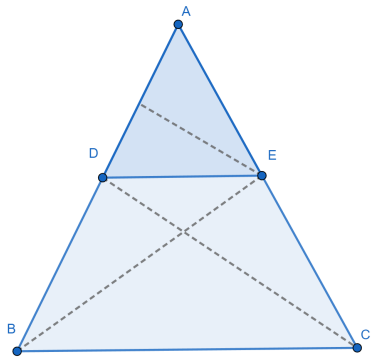


Figura A.2: Primer teorema de Thales

□

Teorema A.2 ([3, p. 8])**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* 180°

Demostración. Por el vértice A del triángulo ABC trazamos una recta paralela al lado BC (quinto postulado de Euclides definición 3.1). Entonces β y γ son iguales a los ángulos $\beta' = \angle YAB$ y $\gamma' = \angle XAC$ respectivamente, por ser alternos internos (esto se sigue de la congruencia de triángulos). Por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 180°$

□

A.2. Geometría analítica

Teorema A.3 ([19, p. 8])**.** *La longitud del segmento de recta entre dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.*

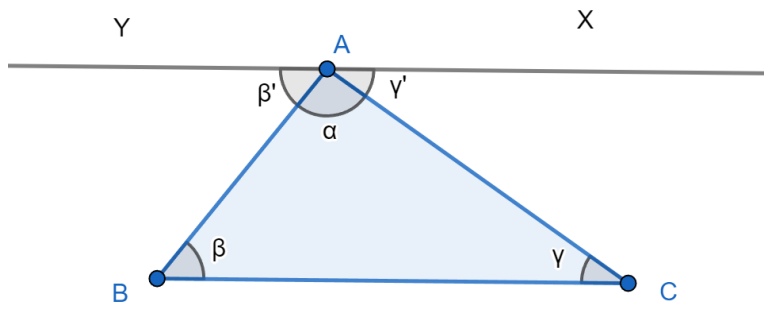


Figura A.3: Suma de ángulos internos de un triángulo

Demostración. Veamos la figura A.4, se cumple la relación:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}$$

Pero, $\overline{OP_1} = x_1$ y $\overline{OP_2} = x_2$. Luego,

$$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2$$

de donde,

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

Por lo que, en cualquier caso la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final. □

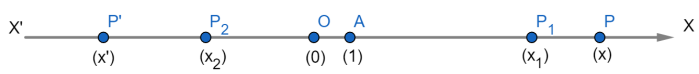


Figura A.4: Sistema coordenado lineal

Teorema A.4 ([19, p. 11]). *La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula:*

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Demostración. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera. Vamos a determinar la distancia d entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P_1P_2}|$. Por P_1P_2 trazamos las perpendiculares P_1A y P_2D a ambos ejes coordenados, como se indica en la figura A.5 y sea E su punto de intersección. Ahora consideremos el triángulo ΔP_1EP_2. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2E}^2 + \overline{EP_1}^2 \tag{A.3}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$, $D(0, y_2)$. Luego, por teorema A.3 tenemos que:

$$\overline{P_2E} = \overline{CA} = x_1 - x_2, \quad \overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación (A.3), obtenemos que,

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

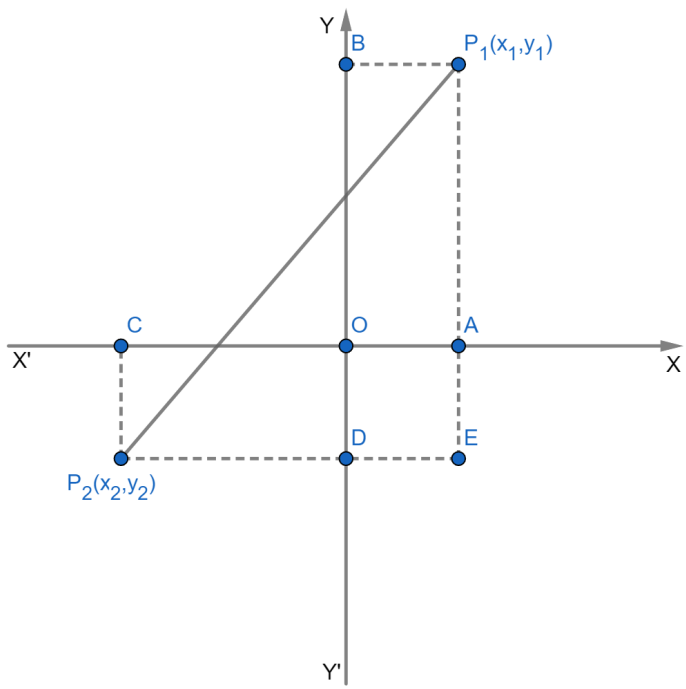


Figura A.5: Distancia entre dos puntos

□

Teorema A.5 ([19, p. 60]). *La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2$$

Demostración. Sea la recta P_1P_2. Como se conocen los dos puntos, su pendiente está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Por tanto, con esta pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$, el problema se reduce a hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene pendiente dada que es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

. □

Teorema A.6 ([19, p. 99])**.** *La circunferencia cuyo centro es el punto* (h, k) *y cuyo radio es constante* r*, tiene por ecuación*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Demostración. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera dentro de la circunferencia de centro (h, k) y radio r. Entonces por definición de circunferencia, el punto P debe de satisfacer la condición geométrica que la distancia al centro es igual al radio.

$$|\overline{CP}| = r$$

la cual podemos expresar por el teorema A.4 como :

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

□

A.3. Álgebra

Definición A.4 ([17, p. 136])
Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

1. $0 \in A$
2. $n \in A$ implica $n + 1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Sea $P(n)$ una proposición. Si queremos demostrar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir que,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadera}\} = \mathbb{N}$$

es suficiente mostrar que A satisface las dos hipótesis del Principio de Inducción Completa.

Bibliografía

[1] Alperin, R. C., and Lang, R. J. One-, two-, and multi-fold origami axioms. *Origami 4* (2009), 371–393.

[2] Barlett, P. Lecture 6: Constructible numbers in computer assisted diagnosis, 2014.

[3] Bulajich Manfrino, R., and Gomez Ortega, J. A. Geometria. *Ejercicios y problemas* (2003).

[4] Cárdenas, H., Luis, E. I., Francisco III, T., et al. *Álgebra superior: conjuntos y combinatoria, introducción al álgebra lineal, estructuras numéricas, polinomios y ecuaciones.* Trillas, 2012.

[5] Cárdenas, S. *Notas de geometría.* Prensas de Ciencias, 2013.

[6] Castillo, C. I. *Álgebra.* Autoedición, 2011.

[7] Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A., and Subbotin, I. Y. *An introduction to essential algebraic structures.* John Wiley & Sons, 2014.

[8] Dummit, D. S., and Foote, R. M. *Abstract algebra*, vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.

[9] Fraleigh, J. B. *A first course in abstract algebra.* Pearson Education India, 2003.

[10] Fusimi, K. Trisection of angle by abe. *Saiensu supplement 8* (1980).

[11] Hadlock, C. R. *Field theory and its classical problems.* No. 19. Cambridge University Press, 2000.

[12] Hatori, K. Origami construction, 2004.

[13] Hull, T. *Project origami: activities for exploring mathematics.* CRC Press, 2012.

[14] Kasem, A., Ghourabi, F., and Ida, T. Origami axioms and circle extension. In *Proceedings of the 2011 ACM symposium on applied computing* (2011), pp. 1106–1111.

[15] King, J. Origami-constructible numbers. *Article. December 17* (2004).

[16] Lang, R. J. Origami and geometric constructions. *Self Published (1996 2003)* (1996).

[17] Laveaga, C. G. *Álgebra superior: curso completo.* Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[18] Lee, H. Y. Origami-constructible numbers, 2017.

[19] Lehmann, C. H. *Geometría analítica.* LIMUSA, México, 2003.

[20] Lucero, J. C. On the elementary single-fold operations of origami: reflections and incidence constraints on the plane. *arXiv preprint arXiv:1610.09923* (2016).

[21] Martin, G. E. *Geometric constructions.* Springer Science & Business Media, 2012.

[22] Messer, P. Problem 1054. *Crux Mathematicorum 12*, 10 (1986), 284–285.

[23] Pal, P. B. *A Physicist's Introduction to Algebraic Structures: Vector Spaces, Groups, Topological Spaces and More.* Cambridge University Press, 2019.

[24] Ramírez-Galarza, A. I., and Sienra-Loera, G. *Invitación a las geometrías no euclidianas.* Prensas de Ciencias, 2015.

[25] Shively, L. S. *Introducción a la geometría moderna.* México: CECSA,, 1961.

Índice de figuras

3.1. Primer postulado de Euclides. 10
3.2. Segundo postulado de Euclides. 10
3.3. Tercer postulado de Euclides. 11
3.4. Quinto postulado de Euclides. 11
3.5. Construcción con regla y compás. 13
3.6. Intersección de líneas. 14
3.7. Intersección de línea y círculo. 14
3.8. Intersección de círculos. 15
3.9. Construcción números naturales. 15
3.10. Construcción de los números naturales. 16
3.11. Construcción de línea perpendicular. 17
3.12. Prueba de ortogonalidad. 17
3.13. Líneas paralelas. 18
3.14. Equivalencia con el compás. 19
3.15. Construcción de la equivalencia con el compás. 19
3.16. Construcción de $(a + b, c + d)$. 20
3.17. Construcción de (xa, xb). 21
3.18. Construcción de $\sqrt{n}$. 23
3.19. Construcción de $\cos\theta$. 31
3.20. Construcción de θ. 31

4.1. Axioma O_1 de origami. 37
4.2. Axioma O_2 de origami. 38
4.3. Axioma O_3 de origami. 38
4.4. Axioma O_4 de origami. 38
4.5. Axioma O_5 de origami. 39
4.6. Axioma O_6 de origami. 39
4.7. Suma origami. 41
4.8. Multiplicación por un número real origami. 42
4.9. División por un número real origami. 43
4.10. Raíz cuadrada origami. 44
4.11. Raíz cúbica en origami. 45
4.12. Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 1. 46
4.13. Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 2. 46
4.14. Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con origami, paso 3. 47

4.15. Trisección de un ángulo θ con origami, paso 1. 48
4.16. Trisección de un ángulo θ con origami, paso 2. 48
4.17. Trisección de un ángulo θ con origami, paso 3. 49
4.18. Trisección de un ángulo θ con origami, paso 4. 49
4.19. Trisección de un ángulo obtuso con origami. 50

5.1. Imagen generada con inteligencia artificial. 54

A.1. Plano Cartesiano. 56
A.2. Primer teorema de Thales 57
A.3. Suma de ángulos internos de un triángulo 58
A.4. Sistema coordenado lineal 58
A.5. Distancia entre dos puntos 59