RESISTIVIDAD APARENTE DE UNA ESFERA CONDUCTORA ENTERRADA OBTENIDA POR EL METODO DE IMAGENES

T E S I S que presenta

JUAN MANUEL ESPINDOLA CASTRO

para obtener el título

de F I S I C O

MEXICO, D. F. 1974

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres
con toda mi gratitud
y cariño.

A mis hermanos

A Silvia.

Este trabajo se desarrolló en el Instituto de Geofísica de la U.N.A.M. Quiero hacer patente mi agradecimiento al Doctor Shri Krishna Singh por su dirección y estímulo en la elaboración del mismo.

Mi más sincero agradecimiento también al M. en C. Servando De la Cruz por su continua ayuda durante mi permanencia en el Instituto, así como al Doctor Román Alvarez y al Doctor Federico Sabina.

También al Físico Liborio Cruz López quien amablemente aceptó fungir como sinodal.

C O N T E N I D O

	Pág.
RESUMEN	1
INTRODUCCION	2
SOLUCION AL PROBLEMA DE UNA ESFERA ENTERRADA EN UN SEMIESPACIO HOMOGENEO E ISOTROPO POR EL METODO DE IMAGENES	5
RESULTADOS Y DISCUSION	18
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	26
REFERENCIAS	27
APENDICE	28
TABLA	31
FIGURAS	32

R E S U M E N

En el presente trabajo se calcula la resistividad aparente en la superficie de un medio espacio infinito homogéneo e isótropo, en el que está contenida una esfera perfectamente conductora. La resistividad aparente se expresa entonces como una serie infinita, por lo cual se desarrolló un programa para computadora escrito en FORTRAN IV que puede utilizarse para cualquiera configuración.

El programa resulta menos complicado que otros desarrollados hasta la fecha y su uso, y adaptación a cualquier configuración, es sencilla a la vez que requiere poco tiempo de computadora. Se analizan los resultados de seis configuraciones usuales y se presentan en forma de gráficas y en la Tabla 1; por medio de ellos es posible decidir sobre el arreglo más adecuado al trabajo específico de campo.

I. INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales en Geofísica de Exploración es la localización de yacimientos de importancia económica. Para lograr esto se recurre a diversos métodos, uno de los cuales es el de resistividad eléctrica, en el que se aprovecha el hecho de que algunos de estos yacimientos presentan un contraste de resistividad eléctrica con el medio adyacente. Esencialmente consiste en colocar dos electrodos en la superficie de la tierra y hacer circular por medio de ellos una corriente directa; con otro par de electrodos se mide la diferencia de potencial a partir de la cual se calculan los valores de la llamada resistividad aparente. A través de estos valores es posible inferir la localización más probable del yacimiento que se busca.

El análisis de los datos se hace por comparación con resultados teóricos obtenidos a través de un modelo apropiado. Algunos yacimientos minerales o celdas geotérmicas tienen aproximadamente la misma magnitud en sus tres dimensiones, de manera que pueden idealizarse como esferas enterradas en un semiespacio; este es el modelo utilizado en este trabajo.

El cálculo de la diferencia de potencial entre dos puntos para los problemas en que aparecen cuerpos conductores, se resuelve en general por métodos numéricos; existe sin embargo una corta serie de ellos en que es posible obtener solución

analítica; el problema de la esfera es precisamente uno de ellos y puede resolverse por separación de variables en coordenadas - biesféricas (Lipskaya, 1949; Van Nostrand, 1953; Merkel y Alexander, 1971), la solución se expresa como una serie infinita en la que intervienen los potinomios asociados de Legendre.

Si la esfera es perfectamente conductora, el problema también puede resolverse con teoría de imágenes (Van Nostrand y Cook, -- 1965, pág. 59; Scurtu, 1972).

En este trabajo se dá la descripción de la solución de el método de imágenes y se presenta en el Apéndice un programa para - computadora desarrollado en Fortran IV para obtener la resistividad aparente de cualquier configuración de electrodos.

Se presentan resultados numéricos para seis configuraciones - en forma de gráficas. Los resultados obtenidos pueden ser útiles en la elección de la configuración más conveniente para un trabajo de campo específico.

El programa presentado aquí sigue un procedimiento distinto al seguido por Scurtu (1972) y se desarrolló aplicando directamente el método de imágenes, sin recurrir a la teoría de gráficas como lo hace dicho autor; se logra de esta manera más simplicidad y - ahorro en tiempo de computadora.

La suposición de que la esfera es perfectamente conductora no resta generalidad a los resultados en vista de la rápida "saturación" de las curvas de resistividad aparente. Como veremos después la solución se presenta como una serie cuya convergencia depende de la razón del radio de la esfera a la profundidad del --

centro de la misma: mientras menor sea este cociente, más rápida es la convergencia y se requiere calcular menos términos de la serie.

II. SOLUCION AL PROBLEMA DE UNA ESFERA ENTERRADA EN UN SEMIESPACIO HOMOGENEO E ISOTROPO POR EL METODO DE IMAGENES

II.1. El método de imágenes se utiliza para resolver problemas de una o más cargas en presencia de fronteras mantenidos a potencial constante. Bajo ciertas circunstancias es posible suponer cargas imagen de magnitud apropiadas, externas a la región de interés que simulen las condiciones requeridas en las fronteras. De esta manera se reemplaza un problema de condiciones a la frontera por un problema de varias cargas (Jackson, 1962, -- pág. 26).

La aplicación de este método al caso que nos interesa puede comprenderse mejor si se consideran antes los siguientes dos -- problemas:

a) Esfera conductora en un espacio homogéneo e isótropo. Supóngase que la esfera tiene radio a y que se coloca -- una fuente de corriente I en C (Fig. 1a.), el potencial satisface, en cualquier punto A distinto de C, la -- ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0 \quad ;$$

y debe cumplir las siguientes condiciones a la frontera:

$$U\Big|_{r_0 \to \infty} = 0 \quad ; \quad U\Big|_{r=0} = \text{constante}$$

donde r_0 es la distancia entre el centro de la esfera y

el punto de observación.

Una solución que cumpla la ecuación de Laplace y las condiciones a la frontera puede obtenerse si se suponen dos imágenes en la esfera: una en P de intensidad $-\,{}^{a}/_{r}\,I$, con lo cual se tiene la superficie de la esfera a potencial cero; y otra en el origen con intensidad $+\,{}^{a}/_{r}\,I$ para que el potencial sea $U\big|_{r_0=a}$ = constante.

La posición de P es: $OP = \frac{a^2}{r}$

El potencial en A es entonces:

$$U = \frac{I\rho}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{a/r}{r_i} + \frac{a/r}{r_0}\right],$$

donde:

R es la distancia entre la fuente y el punto A

r es la distancia entre el centro de la esfera y la posición de la fuente

r_i es la distancia entre el lugar en que se supone la imagen y el punto de observación A.

r_0 es la distancia del centro de la esfera al punto A.

ρ es la resistividad eléctrica del medio en que se halla la esfera.

b) Potencial debido a una fuente colocada en un medio espacio homogéneo e isótropo.

Consideremos ahora un semiespacio homogéneo e isótropo de resistividad ρ y en el que se ha colocado una fuente de corriente

I (Fig. 1b). Si la otra mitad del espacio es de recistividad infinita, el potencial en cualquier punto A excepto en la fuente debe cumplir las siguiente condiciones:

$$\nabla^2 U = 0 \quad ; \quad \left.\frac{dU}{dz}\right|_{z=0} = 0 \qquad \left. U \right|_{R\to\infty} = 0$$

Si la fuente está en Z=Zo y colocamos una imagen de la misma intensidad en Z=-Zo podemos obtener la solución que cumpla con estas condiciones; esta es:

$$U = \frac{I\rho}{4\pi}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{Ri}\right]$$

donde R es la distancia de la fuente al punto de observación A.
Ri es la distancia de la imagen al punto A.
I es la intensidad de la fuente y ρ la resistividad del medio espacio.

Sobre la superficie se tiene que $R = Ri$ y el potencial es

$$U = \frac{I\rho}{2\pi R}$$

II.2. Con los resultados anteriores puede llegarse fácilmente a la expresión del potencial para el caso que nos interesa:

Supóngase una esfera conductora enterrada en un semiespacio homogéneo e isótropo de resistividad ρ; la segunda mitad del semiespacio tiene resistividad infinita (Fig. 2). Si colocamos una fuente de corriente I sobre la superficie en el punto C, el potencial en cualquier punto A distinto de C debe cumplir las -

siguientes condiciones

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (1a)$$

$$U\Big|_{r=a} = \text{constante} \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \qquad (1c)$$

Como en el caso II.1.a) podemos suponer una imagen en un punto interior a la esfera de intensidad:

$$I_1 = \frac{-Ia}{(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2}}$$

y de coordenadas:

$$X_1 = \frac{X_0 a^2}{(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)}$$

$$Y_1 = \frac{Y_0 a^2}{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}$$

$$Z_1 = Z\left[1 - \frac{a^2}{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}\right]$$

donde (X_0, Y_0) son las coordenadas del punto C, Z_0 es la coordenada del centro de la esfera y a es el radio de la esfera.

Esta imagen es la inversa de la fuente en I, con respecto a la superficie de la esfera, de manera que con esto logramos tener la superficie de la esfera a potencial cero; sin embargo, al haber supuesto esta imagen, estamos violando la condición de que no debe haber flujo de corriente a través de la superficie (condición 1 c); para evitar esto es necesario suponer, como en el caso (II.1.b), una imagen en P_1' de la misma intensi--

dad y coordenadas $(X_1, Y_1, -Z_1)$. Con esto a su vez no se satisface (1 b), como consecuencia se necesita una imagen inversa en P_2, una reflejada en P_2' y así sucesivamente.

La posición e intensidad de la imagen en P_2 se obtiene conociendo la posición e intesidad de la imagen en P_1', las cuales a su vez se conocen si se conocen las correspondientes a P_1, de manera que la posición e intensidad de la imagen colocada en P_n se puede calcular conociendo la posición e intensidad en P_{n-1} y así tendremos:

$$J_n = \frac{-J_{n-1}\, a}{\left[X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + (z_0 + Z_{n-1})^2\right]^{1/2}}, \quad n \geq 2 \tag{2a}$$

$$X_n = \frac{X_{n-1}\, a^2}{X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + (z_0 + Z_{n-1})^2}, \quad n \geq 2 \tag{2b}$$

$$Y_n = \frac{Y_{n-1}\, a^2}{X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + (z_0 + Z_{n-1})^2}, \quad n \geq 2 \tag{2c}$$

$$Z_n = z_0 - \frac{(z_0 + Z_{n-1})\, a^2}{X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + (z_0 + Z_{n-1})^2}, \quad n \geq 2 \tag{2d}$$

Para que no haya flujo neto de corriente a través de la esfera es necesario ahora, colocar una imagen en el origen cuya intensidad sea la suma de las colocadas en P_1, P_2,... y de signo contrario

$$J = -\sum_{n=1}^{\infty} J_n \tag{3a}$$

BIBLIOTECA CENTRAL
U. N. A. M.

al tomar esta imagen, debemos suponer otra en O' para que no haya flujo de corriente en la superficie; pero ahora el potencial en la superficie de la esfera no es cero, de manera que debemos tomar una imagen en O_1, y así sucesivamente se tendrán que colocar imágenes en O_1, O_2,.. y O_1', O_2',...; sin embargo el proceso no termina allí, porque nuevamente debe colocarse en el origen una imagen cuya intensidad sea la suma de las colocadas en O_n y O_n' y signo contrario. El proceso es infinito, cada vez que se coloca una imagen en O se deben tomar imágenes en los puntos O_n y cada vez que se consideran estos, se debe colocar una imagen con intensidad igual a su suma en el origen.

Si llamamos J_k a las imágenes colocadas en el origen; $J_{k,n}$ a la intensidad de las imágenes colocadas en los puntos O_n y Z_n' a las posiciones de estos puntos, tendremos las siguientes relaciones:

$$J_k = -\sum_{n=1}^{\infty} J_{k-1,n} \quad , \quad k \geq 2 \tag{3b}$$

$$Z_1' = Z_0 - \frac{a^2}{2Z_0} \tag{4a}$$

$$Z_n' = Z_0 - \frac{a^2}{Z_0 + Z_{n-1}'} \quad , \quad n \geq 2 \tag{4b}$$

$$J_{k,1} = -\frac{J_k a}{2Z_0} \tag{5a}$$

$$J_{k,n} = -\frac{J_{k,n-1}\,a}{Z_0 + Z'_{n-1}}\,, \quad n \geq 2 \tag{5b}$$

Para un punto A en la superficie del semiespacio la distancia a las imágenes dentro de la esfera y a las correspondientes reflejadas es igual y así, solo basta tomar el factor 2 en el potencial secundario debido a las imágenes. Por consiguiente, la expresión para el potencial en el punto A está dada por:

$$U = \frac{\rho}{2\pi}\left\{\frac{I}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n}{[(x-x_n)^2+(y-y_n)^2+z_n^2]^{1/2}} + \frac{2}{[x^2+y^2+z_0^2]^{1/2}}\sum_{k=1}^{\infty}J_k + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}J_{k,n}}{[x^2+y^2+z_n^2]^{1/2}}\right\} \tag{6}$$

El cálculo de J_n, x_n, y_n, z_n puede hacerse sencillamente de las ecuaciones (2). Luego, puede calcularse J_1 por medio de 3a; conociendo J_1 pueden calcularse $J_{1,1}$, $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, ..., $J_{1,n}$ de las ecuaciones (5), con estos valores puede calcularse a su vez J_2 utilizando (3b). Con J_2 y las ecs. 5 se pueden calcular $J_{2,1}$, $J_{2,2}$, ..., $J_{2,n}$; con estos valores y 3b calculamos J_3 y así sucesivamente.

Si se colocan 2 electrodos, uno de corriente +I en $C_1(x_{s1}, y_{s1})$ y otro de corriente -I en $C_2(x_{s2}, y_{s2})$ (Fig. 3), el potencial

en un punto A sobre la superficie puede escribirse como:

$$U = \frac{\rho}{2\pi}\left\{ \frac{I}{\left[(X-X_{S1})^2+(Y-Y_{S1})^2\right]^{1/2}} - \frac{I}{\left[(X-X_{S2})^2+(Y-Y_{S2})^2\right]^{1/2}} \right.$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n^p}{\left[(X-X_n^p)^2+(Y-Y_n^p)^2+(Z_n^p)^2\right]^{1/2}} -$$

$$- 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n^n}{\left[(X-X_n^n)^2+(Y-Y_n^n)^2+(Z_n^n)^2\right]^{1/2}}$$

$$\left. + \frac{2\sum_{k=1}^{\infty} J_k}{\left[X^2+Y^2+Z_0^2\right]^{1/2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} J_{k,n}}{\left[X^2+Y^2+Z_n^2\right]^{1/2}} \right\} \qquad (7)$$

donde:

I_n^p X_n^p, Y_n^p, Z_n^p corresponden a + I

y I_n^n, X_n^n, Y_n^n, Z_n^n corresponden a - I

En este caso $J_1 = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_n^p - I_n^n\right]$, el resto de los cálculos es igual.

El potencial para otro punto B estaría dado también por la ecuación (7) simplemente cambiando las coordenadas (X,Y) de A por las coordenadas X',Y') de B.

La diferencia de potencial entre A y B se puede escribir en una forma más compacta con las siguientes definiciones:

$$R_{PA} = \left[(X-X_{S1})^2+(Y-Y_{S1})^2\right]^{1/2}$$

$$R_{NA} = \left[(x' - x_{S1})^2 + (y' - y_{S1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{PB} = \left[(x' - x_{S2})^2 + (y' - y_{S1})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{NB} = \left[(x' - x_{S2})^2 + (y' - y_{S2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{PAn} = \left[(x - x_n^P)^2 + (y' - y_{S2})^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{NAn} = \left[(x - x_n^n)^2 + (y' - y_n^n)^2 + (z_n^n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{PBn} = \left[(x' - x_n^P)^2 + (y' - y_n^P)^2 + (z_n^P)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{NBn} = \left[(x' - x_n^n)^2 + (y' - y_n^n)^2 + (z_n^n)^2 \right]^{1/2}$$

$$R_A = \left[x^2 + y^2 + z_0^2 \right]^{1/2} \; ; \quad R_B = \left[x'^2 + y'^2 + z_0^2 \right]^{1/2}$$

$$R_{AC} = \left[x^2 + y^2 + z_n^2 \right]^{1/2} \; ; \quad R_{BC} = \left[x'^2 + y'^2 + z_n^2 \right]^{1/2}$$

Entonces el potencial en A y B debido a I puede escribirse como:

$$U_{PA} = \frac{I\rho}{2\pi} \left[G(P,A) \right]$$

$$U_{PB} = \frac{I\rho}{2\pi} \left[G(P,B) \right]$$

y el debido a -I puede a su vez escribirse como:

$$U_{NA} = -\frac{I\rho}{2\pi} \left[G(N,A) \right]$$

$$U_{NB} = -\frac{I\rho}{2\pi} \left[G(N,B) \right]$$

donde:

$$G(P,A) = \frac{1}{R_{PA}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^P/I}{R_{PAn}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k/J}{R_A} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} J_{k,n}/J}{R_{AC}}$$

$$G(P,B) = \frac{1}{R_{PB}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^P/I}{R_{PBn}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k/J}{R_B} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} J_{k,n}/J}{R_{BC}}$$

$$G(N,A) = \frac{1}{R_{NA}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^N/I}{R_{NAn}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k/J}{R_A} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} J_{k,n}/J}{R_{AC}}$$

$$G(N,B) = \frac{1}{R_{NB}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^N/I}{R_{NBn}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k/J}{R_B} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} J_{k,n}/J}{R_{BC}}$$

por consiguiente la diferencia de potencial entre A y B se puede escribir como:

$$\Delta U = U_A - U_B$$

$$\Delta U = (U_{PA} + U_{NA}) - (U_{PB} + U_{NB})$$

$$\therefore \quad \Delta U = \frac{I^P}{2\pi}\left[G(P,A) - G(N,A) - G(P,B) + G(N,B)\right] \quad (8)$$

Como puede verse de las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) la convergencia de las series estárelacionada con el cociente $a/_{Zo}$; es decir convergen más rápidamente a menor valor de $a/_{Zo}$. Así, las series pueden contarse en un punto con lo cual se obtiene el potencial dentro del margen de exactitud que se requiera. En

este trabajo se ha calculado la diferencia de potencial (8) - por medio de un programa para computadora en Fortran IV (Apéndice).

Scurtu (1972), ha hecho notar, que se necesitan tantos términos como imágenes se consideren en la esfera, para evitar - esto recurre a la teoría de Gráficas por medio de la cual construye una matriz infinita.

Para calcular el potencial secundario de orden n se toma - el producto de $\frac{I\rho}{2\pi}$ por el elemento a_{21} de la $(n+1)$ esima potencia de los primeros $2n+1$ renglones y $2n+1$ columnas de esta matriz. El potencial secundario de orden n es el potencial debido a las $2^{n+1} - 2$ imágenes consideradas en la esfera.

El procedimiento es elegante, pero no es más sencillo que - el indicado anteriormente y no ofrece ventaja en cuanto a tiempo de computadora porque además del producto de matrices deben calcularse los coeficientes de esta matriz. Por otro lado no son necesarios tantos términos como imágenes se tomen en la esfera, como puede verse en el siguiente ejemplo para $n = 5$: si se colocan 2 electrodos de corrientes I y - I en la superficie de la tierra y se desea saber la diferencia de potencial entre los puntos A y B, según el método seguido por Scurtu deben -- calcularse 4 matrices de 14 x 14 y la 6a. potencia de cada una de ellas y se estarían tomando en cuenta 252 imágenes dentro - de la esfera. Por el método directo seguido en este trabajo, no se pueden incluir en el mismo orden dentro de la serie, las contribuciones de estas imágenes; pero se puede hacer una com-

paración de la siguiente manera: Si tomamos 6 imágenes I_n^n 6 imágenes I_n^n y 6 en cada uno de los grupos $J_{1,k}$ y $J_{2,k}$ estaríamos considerando 444 imágenes y solo se tendrían que calcular 36 posiciones y 36 imágenes así como 72 distancias a los puntos A y B. Esto es menos complicado que el procedimiento de Scurtu y se puede lograr mayor exactitud y menos tiempo de computadora.

II.3. Resistividad Aparente.

Como se ha dicho anteriormente, la interpretación de los datos se hace a través de la noción de resistividad aparente. Si la tierra fuera uniforme eléctricamente, bastaría una sola medida de la diferencia de potencial y del flujo de corriente para determinar su resistividad. La fórmula que nos da la resistividad en un medio espacio homogéneo, puede utilizarse para definir una resistividad aparente en el caso en que haya inhomogeneidades. Esta cantidad cambiará con la geometría del arreglo en los electrodos, y la interpretación es un esfuerzo para explicar estas variaciones en términos de las características de las inhomogeneidades.

Vamos entonces a obtener la resistividad aparente de un medio espacio homogéneo e isótropo, que servirá para definir la resistividad aparente. Considérense dos electrodos sobre la superficie de la tierra y colocados en C_1 y C_2; los electrodos de medida están en los puntos A y B (Fig. 4).

BIBLIOTECA CENTRAL
U. N. A. M.

Los potenciales en los puntos A y B son:

$$U_A = \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{C_1A} - \frac{1}{C_2A}\right] \; ; \; U_B = \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{C_1A} - \frac{1}{C_2B}\right]$$

por consiguiente la diferencia de potencial entre A y B es:

$$\Delta U = \frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{C_1A} - \frac{1}{C_2A} - \frac{1}{C_1B} + \frac{1}{C_2B}\right] = \frac{I\rho}{2\pi}G$$

donde $G = \left[\frac{1}{C_1A} - \frac{1}{C_2A} - \frac{1}{C_1B} + \frac{1}{C_2B}\right]$ es un factor que depende de la configuración en los electrodos. Si despejamos ρ tenemos:

$$\rho = \frac{2\pi\,\Delta U}{I\,G} \qquad (9)$$

en el caso del semiespacio ρ tiene el mismo valor para cualquier G porque ΔU varía de manera que esto suceda. Podemos generalizar la ecuación (9) para cualquier caso del semiespacio, es decir para el caso en el que en el semiespacio tenga estratos de distinta resistividad, o como en nuestro estudio, una esfera conductora o cualquier otra posibilidad. Definimos entonces resistividad aparente como:

$$\rho_a = \frac{2\pi}{IG}\Delta U \qquad (10)$$

Sustituyendo en (10) la expresión obtenida para la esfera enterrada, es decir la ecuación (8) tendremos:

$$\rho_a/\rho = \frac{1}{G}\left[G(P,A) - G(N,A) - G(P,B) + G(N,B)\right] \qquad (11)$$

III. RESULTADOS Y DISCUSION

III.1. La resistividad aparente puede calcularse por medio de la ecuación (11) para cualquier configuración. En la primera parte de este trabajo se analiza la relación que existe entre ρ_a y el espaciamiento entre los electrodos para poder escoger el óptimo en cada configuración. Posteriormente se comparan las configuraciones entre sí.

Las configuraciones utilizadas son las mostradas en la Fig. 5. En las 5 configuraciones los electrodos quedan sobre una misma línea y hay por lo menos dos móviles. Se utiliza la siguiente notación

R es la distancia entre los electrodos móviles externos

Y_c es la distancia entre el centro de la configuración y el epicentro de la esfera a lo largo del eje Y

a y z_o son el radio y la profundidad del centro de la esfera respectivamente.

En todos los casos Xc, la coordenada sobre el eje x del centro de la configuración, es cero.

III.2. Configuración Wenner. Los resultados para la configuración Wenner vienen graficados en las figuras 6 y 7. En la Fig. 6 se presentan varias curvas para distintos valores de a/z_o y cuando la configuración está sobre una línea que cruza el epicentro; la Fig. 7 muestra los resultados para varios valores de

Y_c/R. Los resultados de la Fig. 6 concuerdan con los dados por Van-Nostrand (1953), con excepción de Z_0/a=1.125 es decir cuando la esfera se encuentra más cerca de la superficie, la diferencia posiblemente se deba a que dicho autor no incluyó suficientes términos dentro de la serie que se obtiene al resolver el problema por separación de variables. Puede observarse en ambas gráficas que para cualquier espaciamiento el valor de ρ_a/ρ es menor que 1 es decir, puede ser detectada la anomalía; sin embargo, el mínimo valor da el espaciamiento óptimo. El valor de R/a para el mínimo en ρ_a/ρ va de 1.53 para Z_0/a =1.125 hasta 6 para Z_0/a = 2 y con valores en ρ_a/ρ que van desde .22 hasta .88. Si el centro de la configuración es desplazando una cierta distancia del epicentro de la esfera, el contraste entre ρ_a y ρ es menor como puede verse en la Fig. 6; por ejemplo la curva de Y_c/a tiene aproximadamente los mismos valores para ρ_a/ρ y R/a que los que tiene la curva de Z_0/a =1.6 en la Fig. 6 y similarmente con las curvas Y_c/a=1.0 y Z_0/a=2. Por consiguiente, un alejamiento del epicentro tiene los mismos efectos que un cambio en la profundidad de la esfera.

III.3. Configuración Schlumberger. Las figuras 8 y 9 fueron obtenidas con la cinfiguración Schlumberger y concuerdan con las obtenidas por Scurtu (1972). Puede verse que los valores mínimos en ρ_a/ρ se obtienen a mayor espaciamiento en los electrodos; esto quiere decir que siempre se podrá observar la anomalía si se toman distancias suficientemente grandes. Esto no quiere decir que convenga, en cualquier caso, tomar distancias muy grandes

porque el valor de ρ_a/ρ es prácticamente constante, después de un punto en el eje de R/a. Este punto puede tomarse como óptimo para el valor de R/a y va de 8 para z_0/a =1.25 hasta 12 para a/z_0 =2.0 y con un valor de ρ_a/ρ que va desde .160 hasta .764. Como se ve, R/a óptimo es mayor para un valor más grande en a/z_0 lo cual resulta lógico puesto que debe aumentarse el espaciamiento para obtener respuesta de una esfera enterrada más profundamente. En la Fig. 9 tenemos los datos para cuando se varía el valor de y_c/a es decir, cuando el arreglo no está en una línea que pasa por el epicentro, como en el caso Wenner las curvas tienen la misma forma y disminuye el valor óptimo de R/a con el aumento en y_c/a, los valores en ρ_a/ρ van desde .17 para y_c/a =0 hasta .58 para y_c/a =1.0. Para $z_0/a > 2$ los valores de ρ_a/ρ son mayores de .764 y aunque no son mayores de 1 son ya bastante grandes como para no poder utilizar el método de resistividad en la prospección de tales masas; por ejemplo para z_0/a =4 y R/a =20 el valor de ρ_a/ρ es de .974.

III.4. Configuración Dipolo-Dipolo.

La Fig. 10 corresponde a la configuración dipolo-dipolo, se tienen mínimos en R/a =1.4 para z_0/a =1.25 con ρ_a/ρ =.141 y R/a =3.2 para z_0/a =2 con ρ_a/ρ =.74.

Como puede verse se requiere menor espaciamiento en los electrodos para obtener el valor mínimo de ρ_a/ρ; pero el valor de ρ_a/ρ alcanza rápidamente valores mayores de 1 si se aumenta el espaciamiento.

Así, esta configuración no resulta muy apropiada para perfila

je aunque si para sondeo, si se tiene alguna idea del valor de Z_0/a

III.4. Configuración Polo-Polo (Fig. 11). En esta configuración se requiere aún menor espaciamiento en los electrodos - pero ρ_a/ρ mín. es mayor que en el caso anterior y alcanza más rápidamente valores mayores de 1. En este caso se tienen de --- ρ_a/ρ =.613 para Z_0/a =1.35 y R/a =.8 hasta ρ_a/ρ =.872 para --- Z_0/a =1.95 y R/a =1.4. La configuración no resulta tan satis-- factoria como las anteriores; pero tiene la ventaja de que dos electrodos son fijos y las distancias entre los electrodos móviles deben ser pequeñas, lo cual podría ser de utilidad en algún caso.

III.5. Configuración Unipolo Modificado. En la Fig. 12, se encuentran graficados los resultados obtenidos para esta configuración en que cada electrodo tiene corriente del mismo signo y solo hay un electrodo de medida en un punto fijo; el electrodo de corriente - I y el otro de medida se encuentran en el infinito. Para esta configuración ρ_a/ρ va desde 0.516 hasta 0.894 para Z_0/a =1.25 y Z_0/a =2.0 con R/a desde 0.9 hasta 3.0; el valor de ρ_a/ρ tiende hacerse constante para todo valor de Z_0/a aproximándose a 1. En esta configuración hay dos electrodos móviles y no se requiere espaciamiento muy grande entre los electrodos -- aunque ρ_a/ρ mín. es mayor que en el caso de las cinfiguraciones Schlumberger y Dipolo-Dipolo.

III.6. En todas las configuraciones el valor mínimo de ρ_a/ρ se obtiene cuando el centro de la configuración se encuentra sobre el epicentro de la esfera, y para un valor particular de R/a La elección de una configuración determinada depende del trabajo en particular que se esté realizando y no se puede dar una regla absoluta sin embargo hay que hacer notar que si se aumenta el espaciamiento la penetración es mayor; pero hay que aumentar la corriente en los electrodos. Además el hecho de tener electrodos fijos facilita la operación en el campo. Por otro lado, si bien es cierto que teóricamente se puede calcular siempre la resistividad aparente, en el trabajo de campo lo que se mide es la diferencia de potencial. En la Tabla 1 se presentan los valores de $|\Delta U/I\rho|$ correspondientes a los mínimos valores de ρ_a/ρ de cada configuración, así como el valor de R/a en cada caso.

La Tabla 1 sirve para comparar entre cada una de las configuraciones y decidir cual es la más adecuada al trabajo y requerimientos específicos. Nótese por ejemplo que el mínimo valor de corresponde a la configuración Dipolo-Dipolo; pero la diferencia de potencial sería menor que en cualquiera de las otras es decir se requiere una corriente más intensa que en los otros casos para tener potenciales más fácilmente medibles.

III.7. Configuración Dipolo-Dipolo Modificada.

En esta configuración los electrodos de corriente están fijos a una distancia grande en comparación con la distancia entre

los electrodos de medida, los cuales se mueven a través de toda la superficie. Las Figs. 13 a 22 presentan los resultados obtenidos para esta configuración. Las curvas son líneas de igual resistividad aparente (ρ_a/ρ) sobre el plano horizontal; es decir sobre la superficie del semiespacio en que se encuentra la esfera cuya proyección corresponde al círculo en cada una de las -- gráficas; la resistividad aparente en cada punto, se asignó tomando el punto medio entre los electrodos de medida.

Todas las distancias están normalizadas con respecto al radio de la esfera.

Estas curvas pueden ayudar en la localización de la esfera. Cuando se tiene simetría con respecto a los dos ejes (Figs. 13 a 15) el epicentro se encuentra en el punto medio entre los electrodos de corriente. La Fig. 16 además de tener simetría en los do dos ejes presenta líneas de igual resistividad que corresponden a circunferencias; en este caso la posición de la esfera queda determinada fácilmente. Las Figs. 17 a 19 presentan 6 casos en que hay simetría con respecto a un eje, en estos casos el epicentro está en un punto de la línea con respecto a la cual hay simetría y que pasa por el punto medio entre los electrodos. La Fig. 20 presenta simetría con respecto al otro eje, nuevamente el epicentro se halla en la línea con respecto a la cual hay simetría aunque en este caso pasa por ambos electrodos. Las Figs. 21 y - 22 son casos en que no hay simetría, nótese que las líneas de menor resistividad se concentran en la proyección de la esfera y - muy próximas al epicentro. Esta concentración de líneas de igual

ρ_a es más cercana al epicentro mientras más lejos se encuentren los electrodos de corriente, como puede notarse también en las Figs. 13, 17, 18, 19 y 20. Conforme los electrodos se acercan más a la proyección de la esfera, las líneas de menor ρ_a se desplazan hacia afuera de la proyección de la esfera y cuando los electrodos de corriente están dentro de esta proyección las líneas de menor ρ_a quedan fuera de ella (Figs. 14, 15, 16). Otra observación que puede hacerse es la siguiente: en todos los casos, las líneas de igual resistividad se aproximan más entre sí en los lugares próximos al epicentro.

Estas observaciones pueden resultar de utilidad para señalar el lugar más probable en que se encuentre el epicentro de la esfera. Si en el trabajo de campo se tuvieran líneas de resistividad simétricas con respecto a 2 ejes la localización sería inmediata: el epicentro está en el punto medio entre los electrodos. Si se tiene simetría con respecto a un eje, el epicentro se encuentra sobre ese eje y su localización más probable estaría en el lugar en que las líneas tienden a unirse; podría hacerse una segunda serie de medidas con los electrodos más lejos para precisar la localización ya que las líneas de menor resistividad tienden hacia la proyección de la esfera mientras más lejanos se encuentren los electrodos. Otra alternativa sería colocarlos sobre el lugar en que se suponga esta proyección; si las líneas de mínima resistividad se alejan de este lugar se confirmaría la hipótesis.

Cuando las curvas no presentan simetría, el lugar más proba

ble sería aquel en que las líneas se aproximaran más entre sí. (Véanse las zonas punteadas en las Figs. 21 y 22).

IV. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Por medio de la aplicación directa del método de imágenes es posible construir un programa aplicable a cualquier configuración. La elaboración y manejo del mismo demuestran que son bastante sencillos y de esta manera se evitan las complicaciones de los otros métodos.

Los resultados obtenidos pueden constituir una guía de selección ya que nos indican lo que es posible esperar de cada una de las configuraciones. Si la prospección se realiza utilizando el mínimo en Z_0/ρ, las configuraciones dipolo-dipolo, Schlumberger y Wenner resultan ser las mejores en ese orden; sin embargo, puesto que las medidas de campo son las diferencias de potencial es necesario poner atención a este punto para escoger aquella que permita obtener potenciales fácilmente medibles. Asimismo hay que considerar que el mayor espaciamiento entre los electrodos requiere de más trabajo de campo.

En el Apéndice se presente el programa utilizado y las indicaciones necesarias para su uso; este puede servir también en el caso en el que los electrodos se encuenten en pozos.

Los resultados que se presentan pueden ayudar a estimar por comparación los valores de Zo y a. Para determinar algunas otras características de la esfera (p. ej. su forma) es necesario ampliar los resultados y su análisis;para esto se cuenta ya con el programa de computadora.

REFERENCIAS

- Grant, F.S. and West, G.F. 1965. Interpretation theory in applied Geophysics. Mc Graw Hill Books, New York.

- Jackson, J. 1962. Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons Inc. New York.

- Lipskaja, N.V. 1949. The Field of a Point Electrode Observed on the Earth Surface Near the Conductive Buried Sphere, Akad. Nauk. SSSR. Izv. Ser. Geogr. i Geofiz., 13.

- Merkel, R.H. and Alexander, S.S. 1971. Resistivity Analisis for Models of a Sphere in a Half-Space with Buried Current Sources, Geophysical Prospecting 19, 640-651.

- Roy, A. and Shikhar C., Jain. 1973. Comparative Field Performance of Electrode Arrays in Time Domain Induced Polarization Profiling, Geophysical Prospecting 21, 626-634.

- Scurtu, E.F. 1972. Computer Calculation of Resistivity Pseudosections of a Buried Spherical Conductor Body, Geophysical Prospecting 20, 605-625.

- Singh, S.K. and Espíndola J.M. 1973. Apparent Resistivity of a Buried Sphere by the Method of Images. Presentado en la Reunión Anual de la Unión Geofísica Mexicana.

- Van Nostrand, R.G. 1953. Limitations on Resistivity Methods as inferred from the Buried Sphere Problem, Geophysics 23, 423-433.

- Van Nostrand, R.G. and Cook, K.L. 1966. Interpretation of Resistivity data, Geological Survey Professional paper 499

A P E N D I C E

ESTE PROGRAMA CALCULA, POR EL METODO DE IMAGENES, LA RESISTIVIDAD APARENTE SOBRE LA SUPERFICIE DE UN SEMIESPACIO EN EL QUE ESTA CONTENIDA UNA ESFERA CONDUCTORA.

LOS DATOS QUE HAY QUE PROPORCIONAR SON LOS SIGUIENTES:

NSOR EL NUMERO DE POSICIONES DE LOS ELECTRODOS DE DE CORRIENTE.

NOBS EL NUMERO DE POSICIONES DE LOS ELECTRODOS DE MEDIDA POR CADA UNA DE LAS POSICIONES DE LOS ELECTRODOS DE CORRIENTE.

A y ZO EL RADIO Y LA PROFUNDIDAD DEL CENTRO DE LA ESFERA.

XS1,YS1,XS2,YS2 LAS COORDENADAS DE LOS ELECTRODOS DE CORRIENTE.

XA,YA,XB,YB LAS COORDENADAS DEL SEGUNDO PAR DE ELECTRODOS.

```
FILE  5=TARJ,UNIT=READER
FILE  6=IHPR,UNIT=PRINTER
      DIMENSION  XSP(9),XSN(9),YSP(9),YSN(9),ZSP(9),ZSN(9),AIP(9),AIN(9)
     1  , DPA(9),DPB(9),DNA(9),DNB(9),RCA(9),RCB(9),AJI(9),ZI(9)
      NSOR=25
      NOBS=1
      READ(5,1)  A,ZO
1     FORMAT(2F10.3)
      WRITE(6,601) A,ZO
601   FORMAT(2X,'RADIUS=',F10.3,'DEPTH=',F10.3)
      DO 500 K=1,NSOR
      READ(5,2) XS1,YS1,XS2,YS2
2     FORMAT(4F10.3)
      CALL IMAGE(XS1,YS1,ZO,A,XSP,YSP,ZSP,AIP)
      CALL IMAGE(XS2,YS2,ZO,A,XSN,YSN,ZSN,AIN)
      AJC=0.0
      DO 109 I=1,9
      AJCC=-(AIP(I)-AIN(I))
      AJC=AJC+AJCC
109   CONTINUE
      CALL CENT(ZO,A,          AJC,AJI,ZI)
      DO 100  N=1,NOBS
      READ(5,2)  XA,YA,XB,YB
      RPA=SQRT((XA-YS1)**2+(YA-YS1)**2)
      RNA=SQRT((XA-YS2)**2+(YA-YS2)**2)
      RPB=SQRT((XB-YS1)**2+(YB-YS1)**2)
      RNB=SQRT((XB-YS2)**2+(YB-YS2)**2)
```

```
      G=(1./RPA)-(1./RNA)-(1./RPB)+(1./RNB)
C
      DO 801 I=1,9
      DPA(I)=SQRT((XSP(I)-XA)**2+(YSP(I)-YA)**2 + ZSP(I)**2 )
      DPB(I)=SQRT((XSP(I)-XB)**2+(YSP(I)-YB)**2 + ZSP(I)**2 )
      DNA(I)=SQRT((XSN(I)-XA)**2+(YSN(I)-YA)**2 + ZSN(I)**2 )
      DNB(I)=SQRT((XSN(I)-XB)**2+(YSN(I)-YB)**2 + ZSN(I)**2 )
C
      RCA(I)=SQRT((XA**2)+(YA**2)+ZI(I)**2)
      RCB(I)=SQRT((XB**2)+(YB**2)+ZI(I)**2)
801   CONTINUE
C
      RA=SQRT( XA**2 + YA**2 + Z0**2)
      RB=SQRT( XB**2 + YB**2 + Z0**2)
C
      GPA=(1./RPA)+(2.*AJC/RA)
      GPB=(1./RPB)+(2.*AJC/RB)
      GNA=(1./RNA)
      GNB=(1./RNB)
C
      DO 701 I=1,9
      GPPA=(2.*AIP(I)/DPA(I))+(2.*AJI(I)/RCA(I))
      GPPB=(2.*AIP(I)/DPB(I))+(2.*AJI(I)/RCB(I))
      GNNA=(2.*AIN(I)/DNA(I))
      GNNB=(2.*AIN(I)/DNB(I))
C
      GPA=GPPA+GPA
      GPB=GPPB+GPB
      GNA=GNNA+GNA
      GNB=GNNB+GNB
701   CONTINUE
C
      RHO=(GPA-GNA-GPB+GNB)/G
      WRITE(6,101) XS1,YS1,XS2,YS2,XA,YA,XB,YB,RHO
101   FORMAT(2X,9(2X,F10.3))
100   CONTINUE
500   CONTINUE
      CALL EXIT
      END

      SUBROUTINE IMAGE(XS0,YS0,Z0,A,XS,YS,ZS,AI)
      DIMENSION XS(9),YS(9),ZS(9),AI(9)
      R=(XS0**2)+(YS0**2)+(Z0**2)
      XS(1)=(XS0*(A**2))/R
      YS(1)=(YS0*(A**2))/R
      ZS(1)=Z0*(R-A**2)/R
      AI(1)=-A/SQRT(R)
      DO 10 I=2,9
      XX=(XS(I-1)**2) + (YS(I-1)**2) + (Z0+ZS(I-1))**2
      XS(I)=XS(I-1)*(A**2)/XX
      YS(I)=YS(I-1)*(A**2)/XX
      ZS(I)=Z0-( (Z0+ZS(I-1))*(A**2))/XX
      AI(I)=-AI(I-1)*A/SQRT(XX)
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CENT(Z0,A,          AJC,AJI,ZI)
      DIMENSION AJI(9),ZI(9),AIP(9),AIN(9) ,AJII(9)
      AJI(1)=-(AJC*A)/(2.*Z0)
      ZI(1)=Z0-(A**2)/(2.*Z0)
      DO 20 I=2,9
      ZI(I)=Z0-((A**2)/(Z0+ZI(I-1)))
      AJI(I)=-(AJI(I-1)/(Z0+ZI(I-1)))
20    CONTINUE
      AJJC=0.0
      DO 30 I=1,9
      AJJCC=-AJI(I)
      AJJC=AJJC+AJJCC
30    CONTINUE
      AJII(1)=-(AJJC*A/(2.*Z0))
      DO 40 I=2,9
      AJII(I)=(AJII(I-1)/(Z0+ZI(I-1)))
40    CONTINUE
      AJIC=0.0
      DO 50 I=1,9
      AJICC=-AJII(I)
      AJIC=AJIC+AJICC
50    CONTINUE
      AJC=AJC+AJJC+AJIC
      DO 60 I=1,9
      AJI(I)=AJI(I)+AJII(I)
60    CONTINUE
      RETURN
      END
```

TABLA 1.

$\rho_a/\rho_0 = 1.25$

CONFIGURACION	ρ_a/ρ	R/a	$\lvert \Delta U/\text{unit } I \rvert$
WENNER	0.460	2.4	27.60×10^{-4}
SCHLUMBERGER	0.160	18.0	0.16×10^{-4}
DIPOLO - DIPOLO	0.141	1.4	4.23×10^{-7}
POLO - POLO	0.613	0.8	77.66×10^{-7}
UNIPOLO MODIFICADO	0.516	0.9	11.46×10^{-2}

TITULOS DE LAS FIGURAS

FIG. 1a. Esfera conductora de radio a en un espacio infinito homogéneo e isótropo de resistividad Po . I' e I" son las intensidades de las imágenes. r es la distancia del centro al punto c en que está la fuente de intensidad I; i es la distancia de la imagen al punto de observación A; es la distancia del centro de la esfera al punto A.

FIG. 1b Un medio-espacio infinito homogéneo e isótropo de resistividad ρ_0 en que hay una fuente de intensidad I. Zo es la profundidad de la fuente; I' es la intensidad de la imagen. R es la distancia de la fuente al punto de observación A; Ri es la distancia entre A y la posición de la imagen.

FIG. 2 Esfera conductora enterrada en un medio espacio homogéneo e isótropo infinito de resistividad ρ . I es la intensidad de la fuente colocada en C(Xo,Yo,O). Los puntos Pn y On son las posiciones de las imágenes dentro de la esfera. Los puntos Pn' y On son las posiciones de las imágenes reflejadas. A es la posición del punto de observación. El sistema de ejes tiene su origen en el epicentro de la esfera (E), el eje Z pasa por el centro de la esfera y es positivo hacia abajo, el eje Y pasa por los puntos A y C.

FIG. 3. Esfera enterrada en un medio espacio C_1 y C_2 son las posiciones de los electrodos de corriente, A y B son las posiciones de los electrodos de medida.

FIG. 4. Electrodos de corriente I y -I colocados en C_1 y C_2 y electrodos de medida colocados en A y B. Todos sobre la superficie de un semiespacio homogéneo e isótropo.

FIG. 5. Configuraciones utilizadas y sus características.

FIG. 6. Resultados de la configuración Wenner para distintos valoresde

FIG. 7. Configuración Wenner para distintos valores de

FIG. 8. Configuración Schlumberger. Resultados para distintos valores de

FIG. 9. Configuración Schlumberger. Resultados para distintos valores de

FIG. 10. Resultados de la configuración Dipolo-Dipolo para distintos valores de

FIG. 11. Configuración Polo-Polo. Resultados para distintos valores de

FIG. 12. Configuración Unipolo-Modificada. Resultados para distintos valores de

FIG. 13. Curvas de igual resistividad aparente sobre la superficie de un medioespacio homogéneo e isótropo en el que está contenida la esfera cuya proyección se representa. Se graficó en un solo cuadrante debido a la simetría de las curvas. Las distancias están normalizadas con respecto al radio de la esfera. C_1 es la posición de uno de los electrodos el otro estaría en (0, -2).

FIG. 14. Curvas de igual resistividad para las posiciones de los electrodos en C_1 (0,1) y C_2(0, -1). Para mayor descripción ver Fig. 13.

FIG. 15. Curvas de igual resistividad cuando los electrodos están en C_1(0,0.5) y C_2(0,-0.5). Ver Fig. 13.

FIG. 16. Curvas de igual resistividad cuando uno de los electrodos está en el epicentro de la esfera y el otro en infinito.

FIG. 17. Curvas de igual resistividad aparente en el caso en que los electrodos están en C_1(0,5) y C_2(0,-5) (Líneas continuas) y C_1(-5,5) y C_2(-5,-5) (líneas punteadas). Como en ambos casos hay simetría con respecto a un eje se graficó solo en dos cuadrantes y se presentan ambos casos en la misma gráfica. Las distancias están normalizadas con respecto a el radio de la esfera.

FIG. 18. Curvas de igual resistividad para las siguientes posiciones de los electrodos:

C_1(-1,2) y C_2(-1,-2) (líneas continuas)

C_1(-2,2) y C_2(-2,-2) (líneas punteadas) Ver Fig. 17.

FIG. 19. Curvas de igual resistividad para

C_1(-1,4) y C_2(-1,-1) (líneas continuas)

C_1(-2,1) y C_2(-2,-1) (líneas continuas) Ver. Fig. 17

FIG. 20. Curvas de igual resistividad aparente cuando hay simetría con respecto al segundo eje.
Los electrodos están en

$C_1(0,4)$ y $C_2(0,2)$ (líneas continuas) y

$C_1(0,5)$ y $C_2(0,3)$ (líneas punteadas) Ver. Fig. 17

FIG. 21. Curvas de igual resistividad aparente, los electrodos se encuentran en $C_1(-2,-2)$ y $C_2(-2,-4)$. Para mayor descripción ver Fig. 13.

FIG. 22. Como en la Fig. 21 pero con los electrodos en $C_1(-1,-1)$ y $C_2(-1,-3)$.

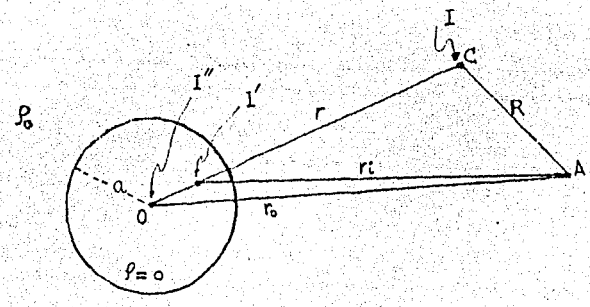


FIGURA 1a

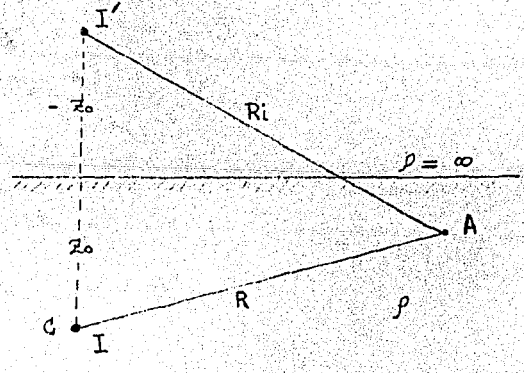


FIGURA 1b

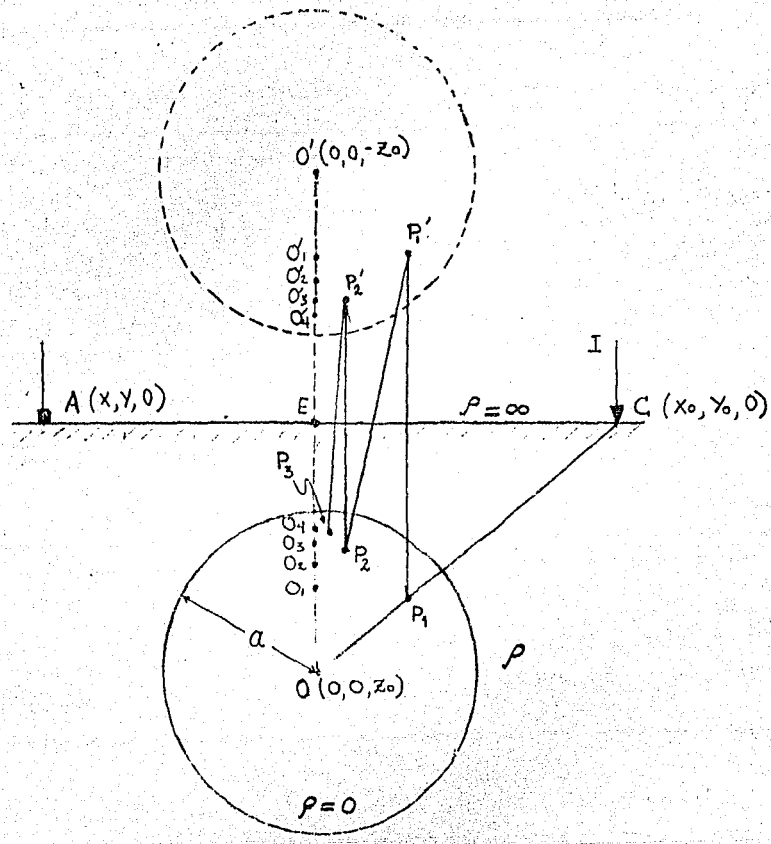

O'(0,0,-Zo)
P1'
O'1
O'2
O'3
O'4
P2'
I
A (X,Y,0)
E
ρ=∞
C (Xo,Yo,0)
P3
O4
O3
O2
O1
P2
P1
a
ρ
O (0,0,Zo)
ρ=0

FIGURA 2

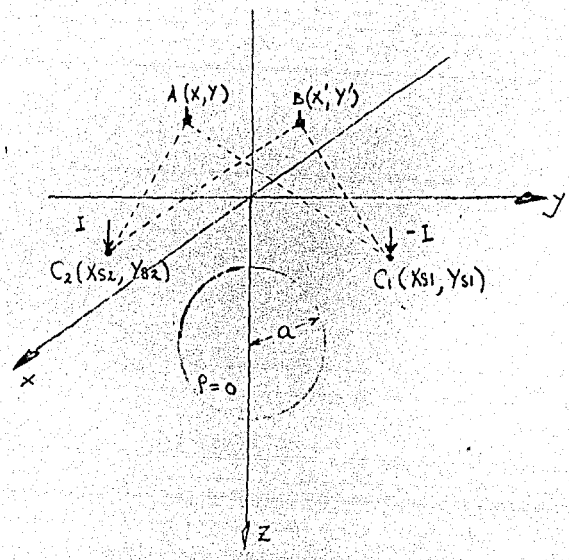


FIGURA 3

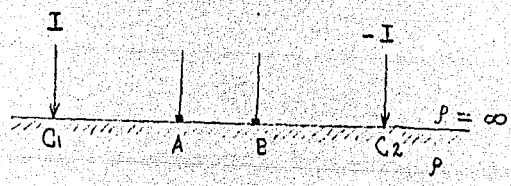


FIGURA 4

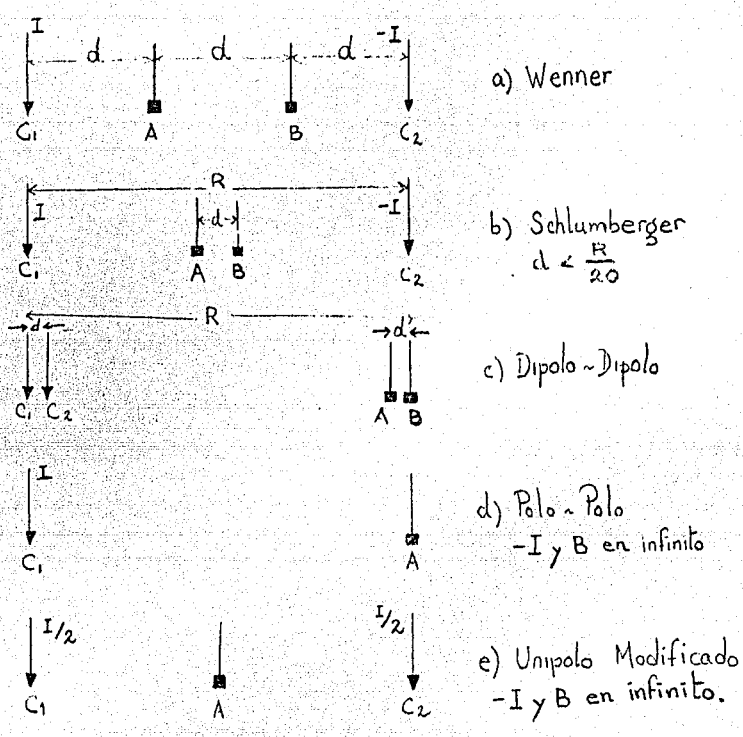

I
d
d
d
-I
C1
A
B
C2
a) Wenner
R
I
d
-I
C1
A
B
C2
b) Schlumberger
d < R/20
R
d
d'
C1
C2
A
B
c) Dipolo ~ Dipolo
I
C1
A
d) Polo ~ Polo
-I y B en infinito
I/2
I/2
C1
A
C2
e) Unipolo Modificado
-I y B en infinito.

FIGURA 5

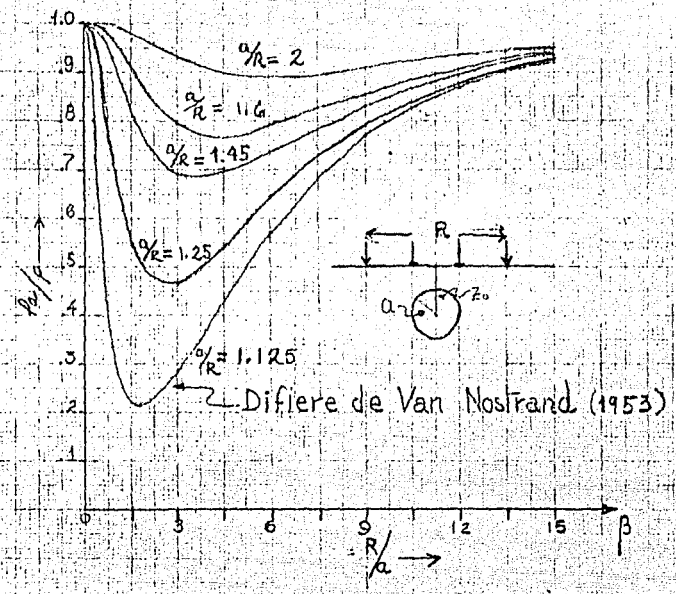


Figura 6

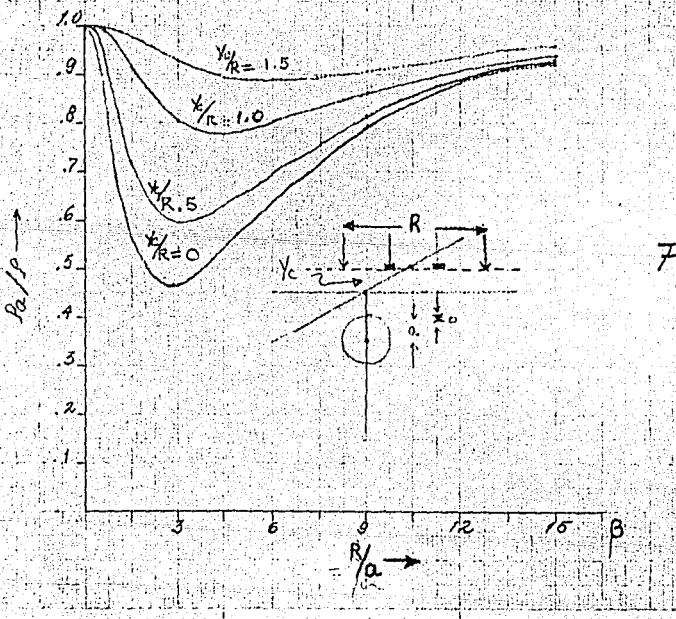
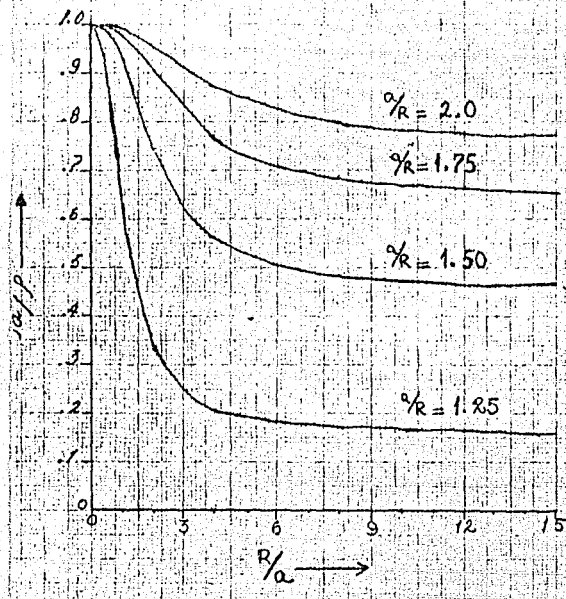


Figura 7



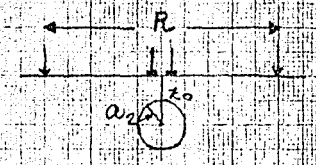
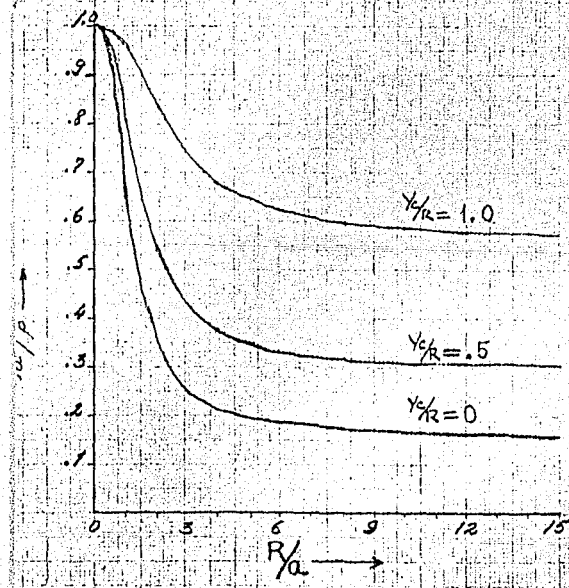


Figura 8



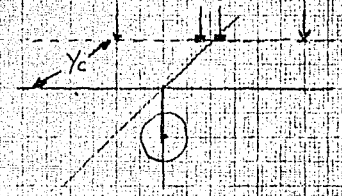


Figura 9

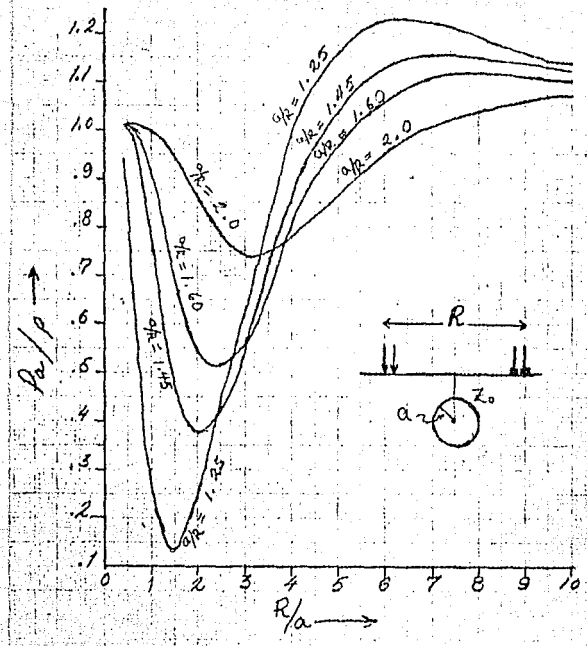

1.2
1.1
1.0
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
R/a
a/R = 1.25
a/R = 1.45
a/R = 1.60
a/R = 2.0
a/R = 2.0
a/R = 1.60
a/R = 1.45
a/R = 1.25
R
a
z₀

Fig. 10

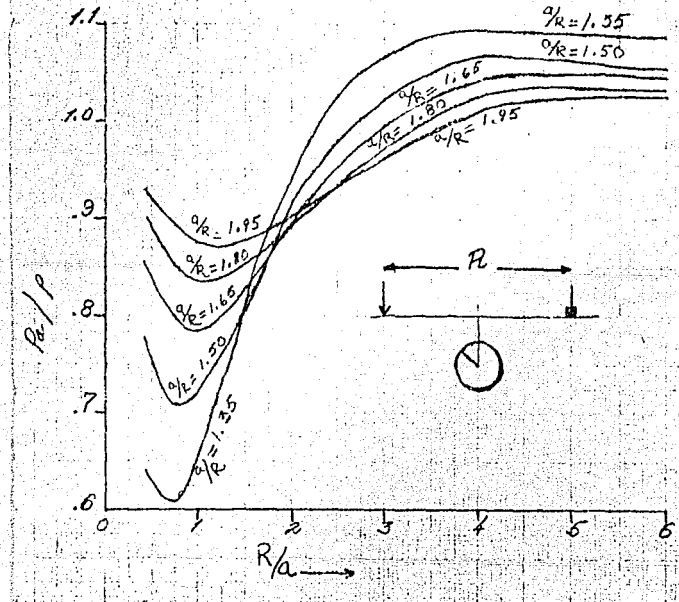

1.1
1.0
.9
.8
.7
.6
0
1
2
3
4
5
6
R/a
a/R = 1.35
a/R = 1.50
a/R = 1.65
a/R = 1.80
a/R = 1.95
a/R = 1.95
a/R = 1.80
a/R = 1.65
a/R = 1.50
a/R = 1.35
R

Fig. 11

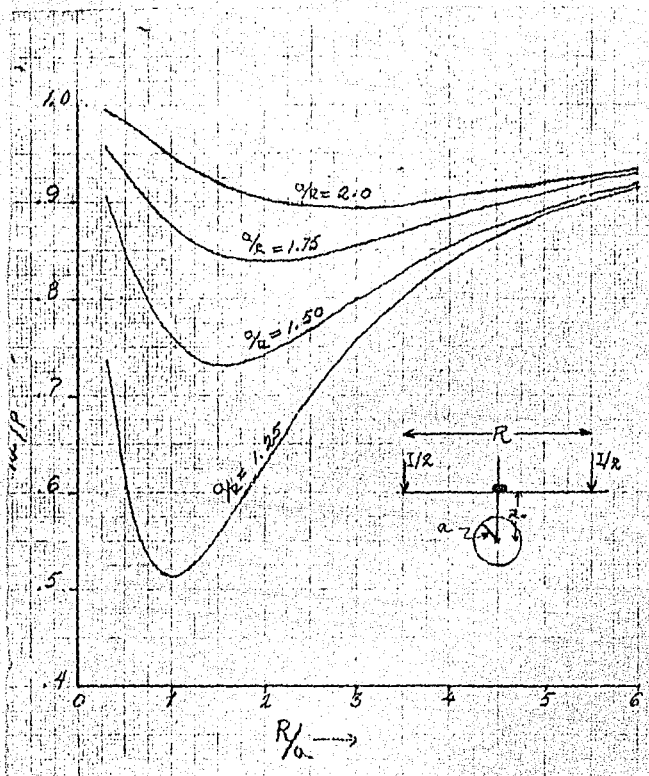


Figura 12

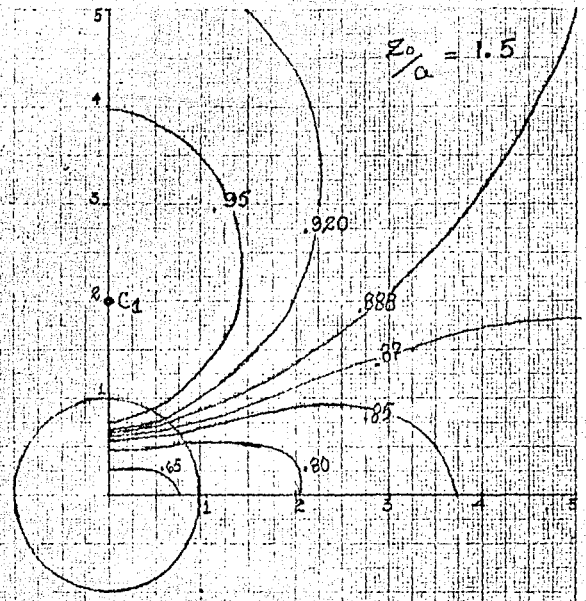


Figura 13

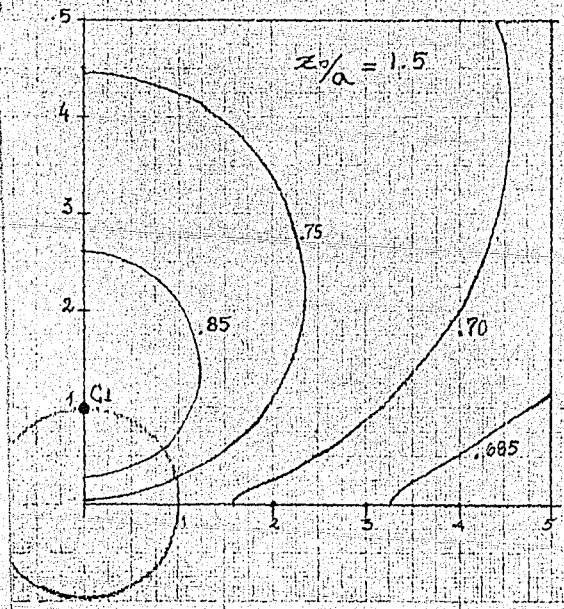


Figura 14

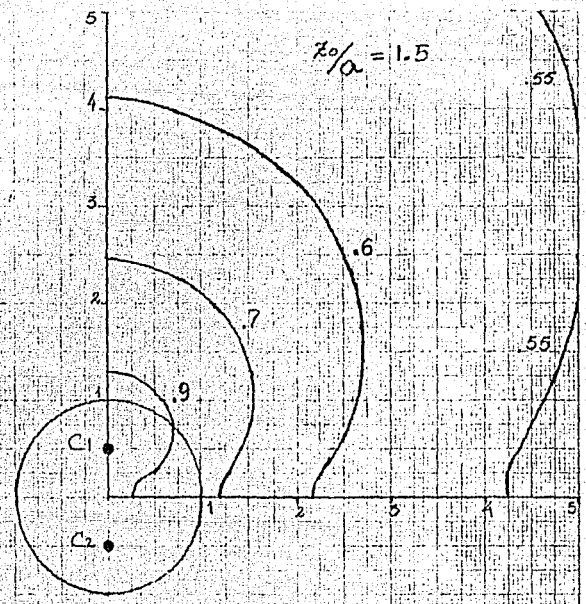


Figura 15

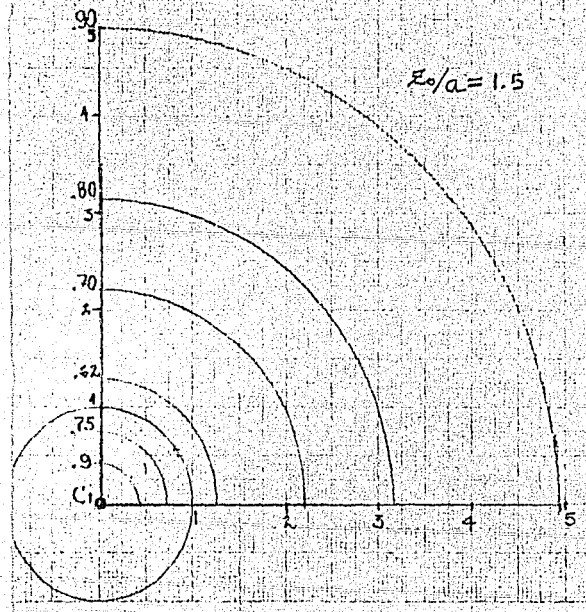


Figura 16

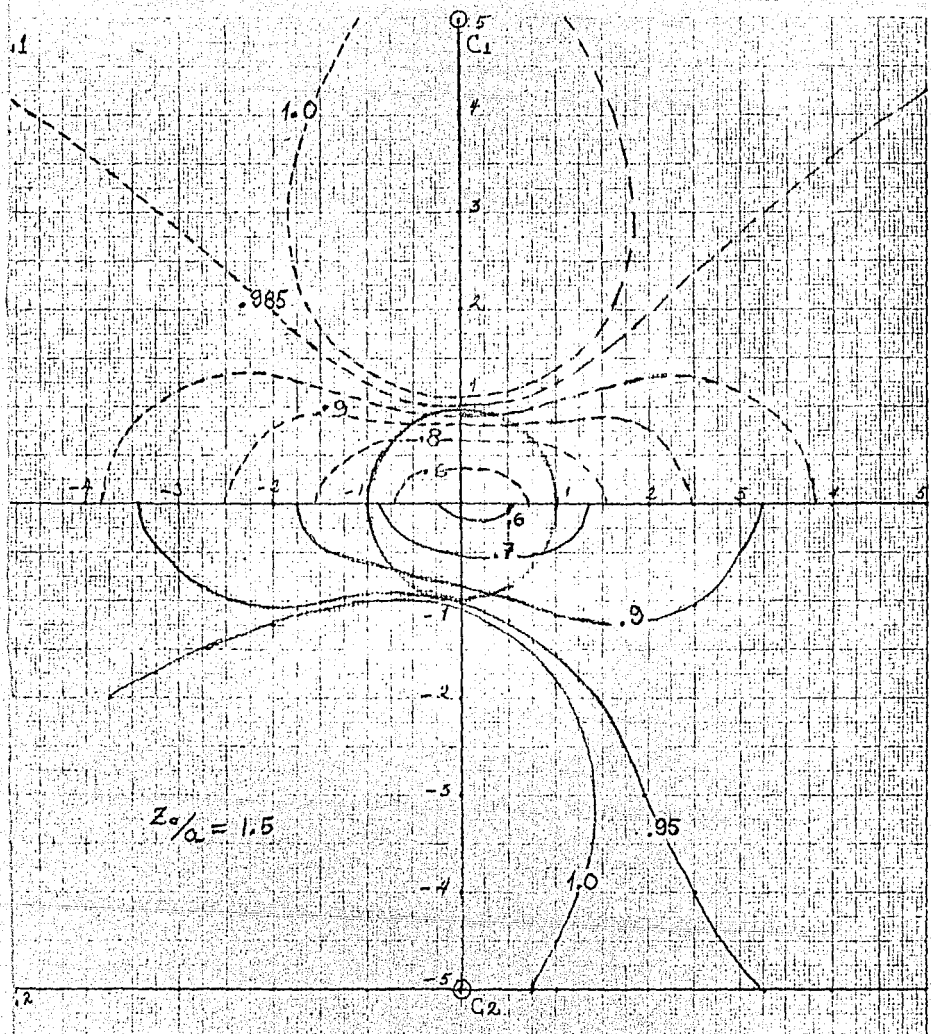


Figura 17

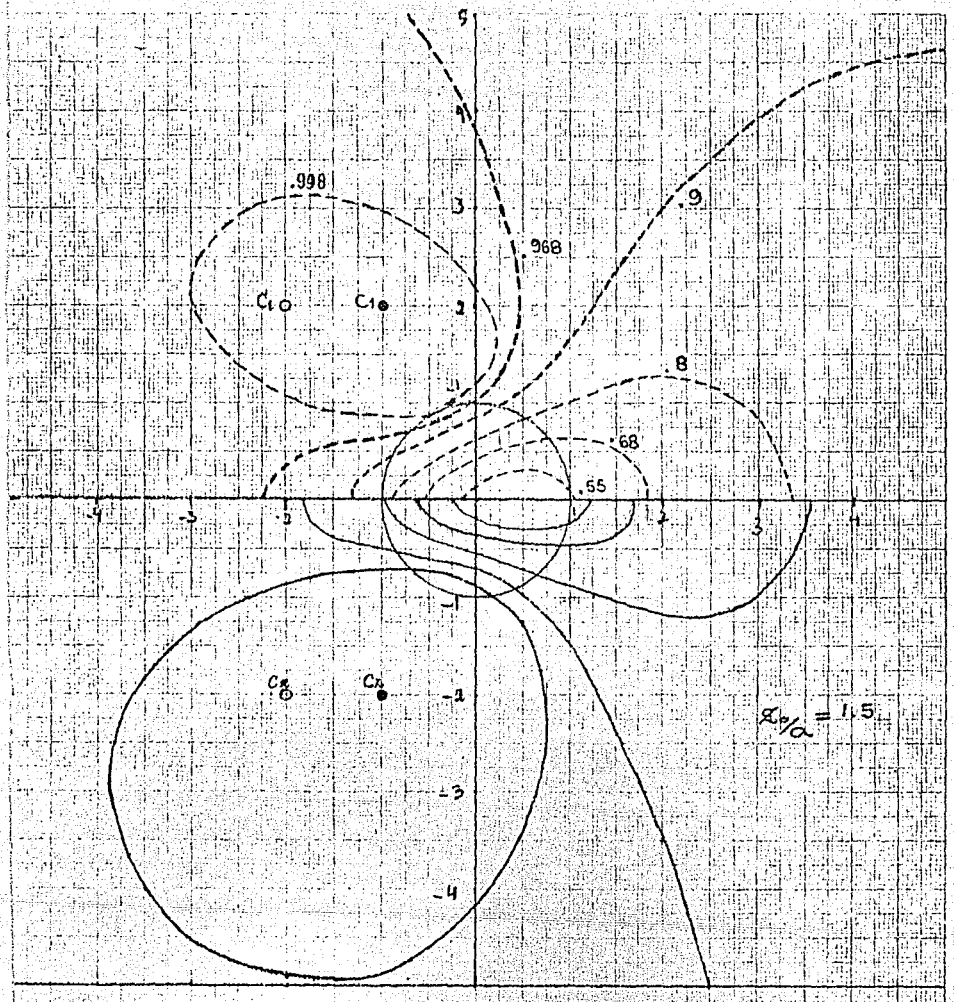


Figura 18

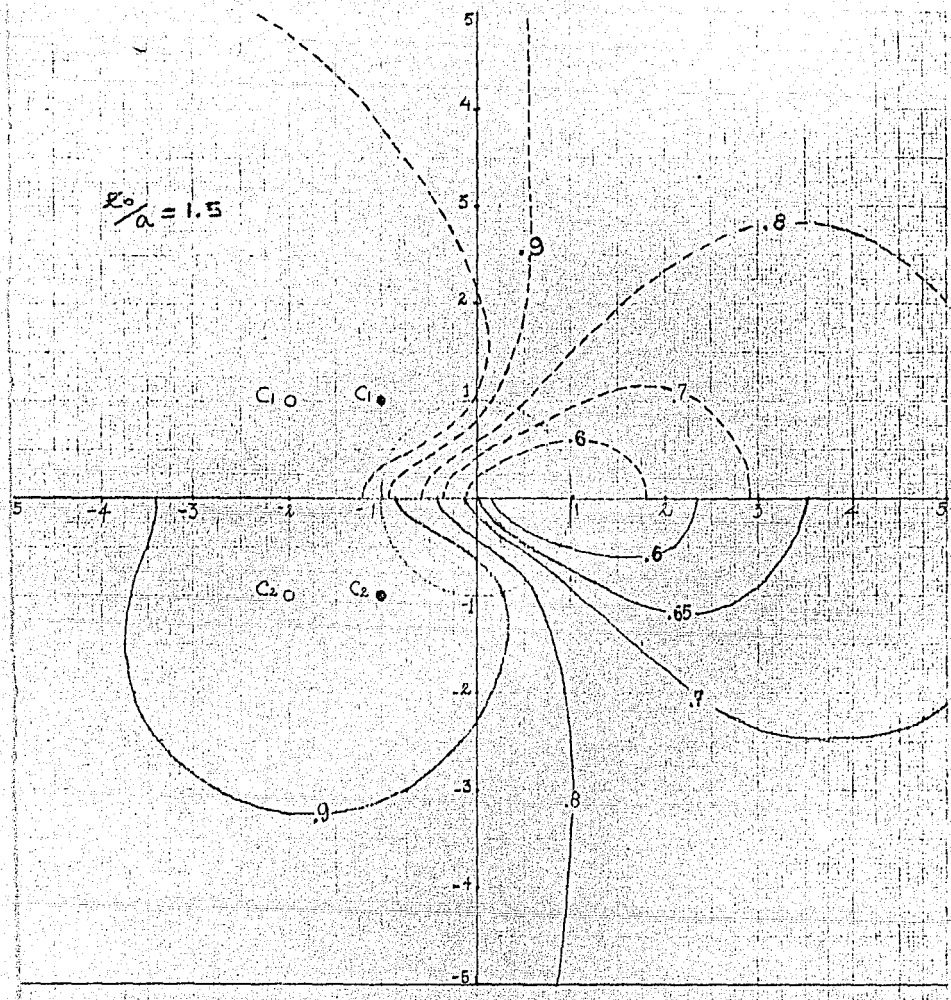


Figura 15

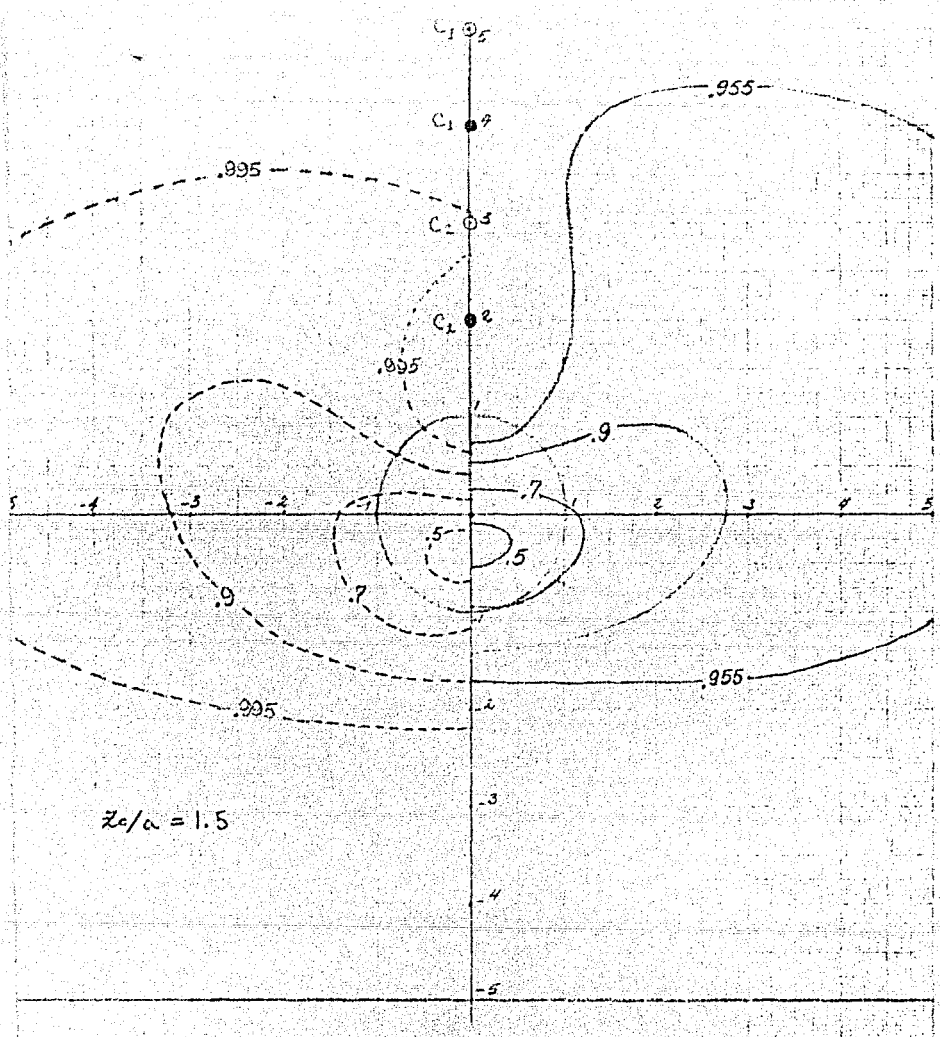


Figura 20

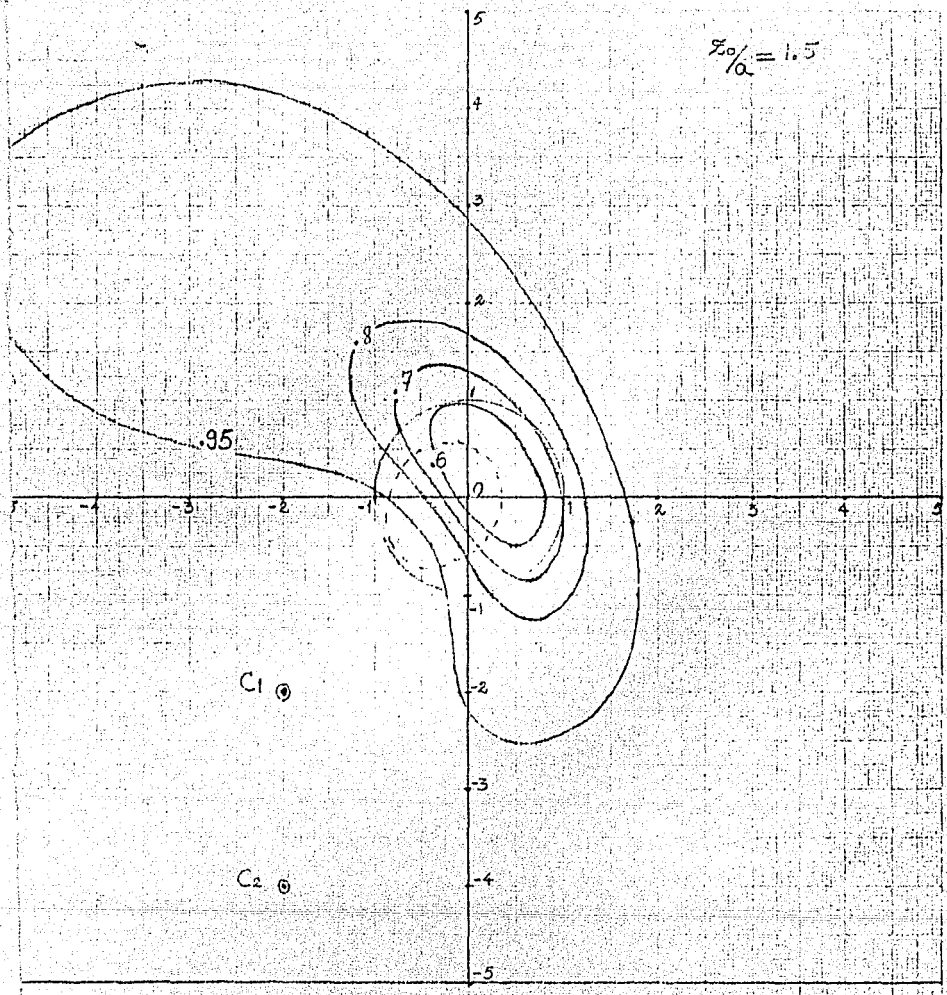


Figura 21

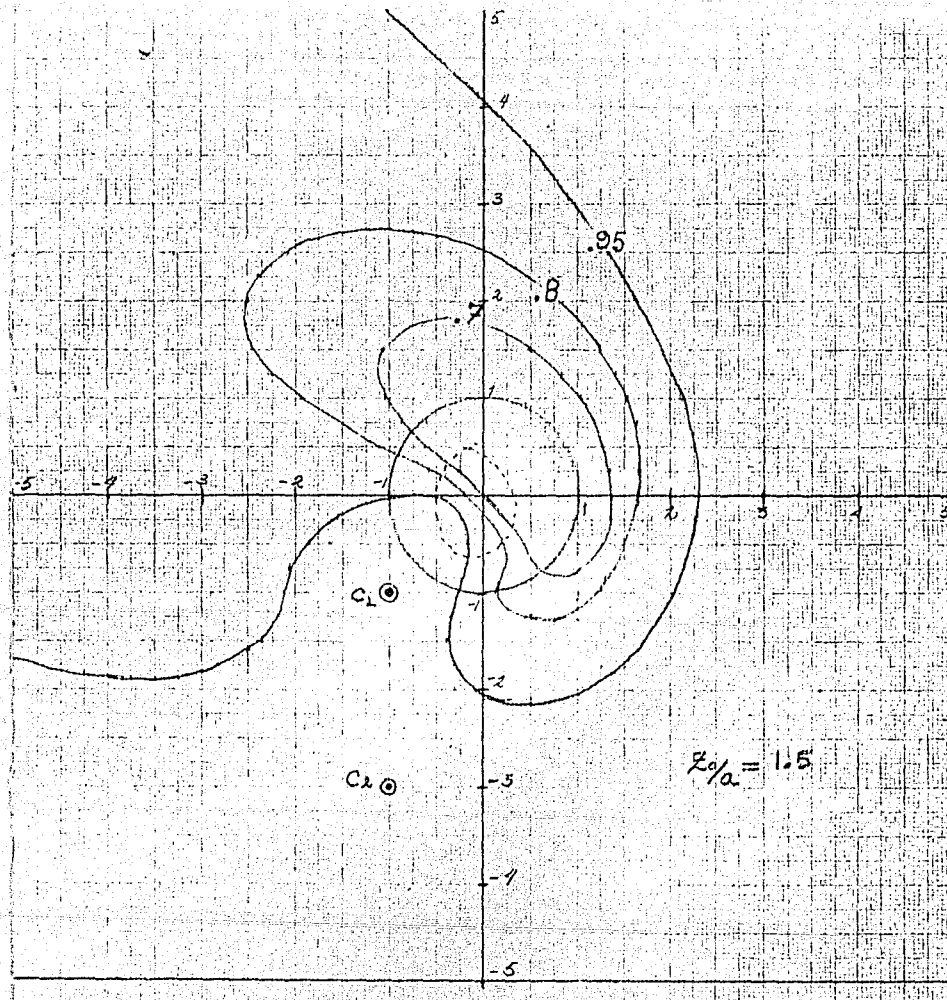


Figura 22