UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAGRANGIANOS EQUIVALENTES EN MECANICA CLASICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

HUGO MARLESTON LOPEZ-ESPINO

MEXICO, D. F. ABRIL 1980

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Indice

	Pág.
NOTACION Y CONVENCIONES	i
INTRODUCCION	iii
CAPITULO I.- EQUIVALENCIA ENTRE LAGRANGIANOS.	
1.- Introducción.	1
2.- Tipos de Equivalencia.	
a) Transformaciones de Coordenadas.	2
b) Transformaciones de "Forma".	3
c) Transformaciones "1".	5
3.- S-Equivalencia.	
a) Definición. Dos puntos de vista.	6
b) Comentario.	8
CAPITULO II.- S-EQUIVALENCIA. EL CASO UNIDIMENSIONAL.	
1.- Introducción.	10
2.- Teorema de S-Equivalencia Unidimensional. Planteamiento, demostración, comentarios.	11
3.- Ejemplo. Comentarios.	16
CAPITULO III.- S-EQUIVALENCIA. EL CASO MULTIDIMENSIONAL.	
1.- Introducción.	24

Pág.

2.- Teorema de S-Equivalencia Multidimensional. Planteamiento, demostración y comentarios. 26

3.- Lagrangianos S-Equivalentes ante Transformaciones "l".

a) El "Lagrangianito" l. Obtención, propiedades. 41

b) Las Ecuaciones Diferenciales para "l". 45

4.- El Teorema "Tradicional" de Equivalencia.

a) Presentación usual en los textos. 47

b) Reinterpretación en términos de S-Equivalencia. 50

c) Reformulación. 52

CAPITULO IV.- CONSTRUCCION DE LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES.

1.- Introducción. 53

2.- Oscilador Armónico Bidimensional Isotrópico. 55

3.- Oscilador Armónico Tridimensional Isotrópico. 81

CONCLUSIONES 89

REFERENCIAS 92

[illegible]

1.- Todos los índices (i,j,r,s,etc.) toman valores 1,2,...,n, donde n es el número de grados de libertad del sistema en cuestión. En ocasiones, cuando no haya peligro de confusión, se omitirán los índices, por ejemplo:

$$L(q_i,\dot{q}_i,t) \longrightarrow L(q,\dot{q},t)$$

2.- En general trataremos con funciones de la posición (q_i), la velocidad ($\dot{q}_i$) y el tiempo (t), salvo cuando se indique lo contrario, por ejemplo: $l_r = l_r(q,\dot{q},\ddot{q},t)$.
Supondremos que todas las funciones tienen primeras y segundas derivadas continuas en la región del espacio donde se definan.

3.- Si L es una función lagrangiana, denotaremos con L_r a la derivada lagrangiana de L respecto a la coordenada q_r, explícitamente:

$$L_r \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} ,$$

e introducimos la notación:

$$a_{rs} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \quad , \quad v_{rs} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s} \quad ,$$

para los coeficientes de las aceleraciones y - velocidades respectivamente. Con ello escribimos:

$$L_r \equiv W_{rs}\ddot{q}^s + V_{rs}\dot{q}^s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^r} \quad .$$

4.- Utilizaremos la convención de suma sobre - índices repetidos: cuando aparezcan dos índi-- ces repetidos en un mismo término, se sobreentiende la suma sobre todos los valores que puede tomar el índice que se repite, salvo cuando se indique lo contrario.

5.- La posición de los índices sólo es relevante para la aplicación de la convención de índices (punto 4.), ya que en todos los casos se - tiene: $A^s \equiv A_s$. $A_r{}^s \equiv A_{rs}$. etc.

6.- En ocasiones se utilizará la notación $L_{\dot{q}\dot{q}}$, $L_{\dot{q}t}$, etc., para denotar derivación parcial respecto a la(s) variable(s) que aparezca(n) como subíndice(s).

7.- Números entre corchetes [] indican las referencias, que se encuentran listadas al final - del trabajo.

INTRODUCCION.

Existe la creencia, muy generalizada entre la gente que se dedica a la Física, de que la Mecánica Clásica ya está terminada y contenida en su totalidad en los libros existentes; situaciones similares se han presentado con anterioridad en la Física y desarrollos posteriores han demostrado que tales creencias carecían de bases.

En este trabajo mostraremos que aún se pueden lograr resultados novedosos e interesantes en Mecánica Clásica y que algunos de los libros de texto más comunes, e.g., [1,...,5], así como algunos de los artículos relacionados con este tema, e.g., [6,7,11], ignoran completamente el problema que trataremos aquí, o mencionan sólo parte de los resultados que presentaremos.

Para aquellos que han tenido contacto con el formalismo Lagrangiano de la Mecánica, resulta familiar el hecho de que dos lagrangianos difieren por la derivada total respecto al tiempo de alguna función de las coordenadas y

el tiempo, si y sólo si las ecuaciones de movimiento obtenidas de ambos lagranginnos son "exactamente las mismas" ; se dice entonces que esos dos lagrangianos son equivalentes. Este teorema, que podemos calificar de "tradicional" debido a que se menciona en los libros, pero sin demostración * , presenta, usualmente, problemas de interpretación en lo que respecta sobre todo al significado de la frase "exactamente las mismas ecuaciones de movimiento". Es precisamente en la interpretación de esta frase, donde radica la clave que permite, no sólo asegurar la validez de este teorema "tradicional", sino además definir un nuevo tipo de equivalencia entre lagrangianos, ya no a nivel de las ecuaciones de movimiento sino más allá, a nivel del conjunto de soluciones de esas ecuaciones de movimiento. Es interesante hacer notar que los experimentos u observaciones nos dan información acerca de las trayectorias de

---

(*) Con excepción de Saletan y Cromer [1] , que lo demuestran para el caso unidimensional.

los sistemas mecánicos que pueden ser más elegantemente descritas como el conjunto completo de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, no son las ecuaciones diferenciales mismas las que son sujetas de comprobación experimental, sino sus soluciones. Se verá en el cuerpo de este trabajo que existen distintos sistemas de ecuaciones diferenciales cuyos conjuntos completos de soluciones coinciden; este hecho permite la ampliación del concepto tradicional de equivalencia a uno más general.

Este concepto de equivalencia es el que será tratado con todo detalle en el presente trabajo, en forma muy general para sistemas mecánicos con cualquier número de grados de libertad. Se verá que, con la equivalencia a nivel del conjunto de soluciones de las ecuaciones de movimiento, se pueden tener (y construir explícitamente) lagrangianos equivalentes cuya diferencia es en general una función de las coordenadas, las velocidades y el tiempo, que no se puede escribir como la derivada total respecto al tiempo de alguna función de coordenadas y tiempo, es decir, el teorema "tradicional" de

todos conocido resulta ser un caso particular del teorema de equivalencia que introduciremos en las siguientes páginas.

El contenido del trabajo se ha dividido en cuatro capítulos que a grandes rasgos se pueden resumir así:

Primer Capítulo: se exponen los tipos de equivalencia usualmente discutidos en los textos [1,...,5], que se pueden definir entre lagrangianos de sistemas mecánicos, incluyendo una nueva forma de equivalencia tratada por primera vez en [6], que hemos llamado s-equivalencia.

Segundo Capítulo: se trata en forma detallada el problema de s-equivalencia para el caso unidimensional [6], como preámbulo para el estudio del caso multidimensional.

Tercer Capítulo: se desarrolla la teoría de s-equivalencia para el caso multidimensional, demostrándose en detalle el Teorema de S-Equivalencia. Además, se analiza y discute el teorema "tradicional" desde el punto de vista de s-equivalencia.

Cuarto Capítulo: se construyen con todo detalle ejemplos de lagrangianos s-equivalentes en los casos bidimensional y tridimensional para el problema de oscilador armónico isotrópico, con lo cual se pretende ilustrar de manera clara la validez del Teorema expuesto en el Tercer Capítulo.

Finalmente, se presentan algunas conclusiones y problemas que quedan abiertos a discusión e investigaciones futuras, y que pueden tener consecuencias importantes en otras áreas de la Física como la Mecánica Cuántica y las Teorías de Campo.

CAPITULO I.

EQUIVALENCIA ENTRE LAGRANGIANOS.

1.- Introducción.

Tradicionalmente, en los textos de Mecánica Clásica, se describen dos formas de equivalencia entre lagrangianos. Una de ellas se debe a la covariancia de las ecuaciones de Euler-Lagrange ante transformaciones de coordenadas y la otra se obtiene al utilizar las llamadas transformaciones de "norma" (*), que en Mecánica Clásica consisten simplemente en sumar a un cierto lagrangiano L, la derivada total respecto al tiempo de alguna función de las coordenadas (q) y el tiempo (t), para obtener un lagrangiano equivalente L'.

A continuación estudiaremos estas dos formas de equivalencia y veremos que es posible definir una tercera forma de equivalencia que, en realidad, contiene a la segunda forma de equivalencia (transformaciones de "norma") como un caso particular.

(*) Se escribe entre comillas porque el término "norma" es utilizado comúnmente en Teoría de Campos, y no tiene el mismo significado en Mecánica Clásica.

2.- Tipos de Equivalencia.

2a. Transformaciones de Coordenadas. [1,2,3,4,5]

Consideremos dos sistemas de coordenadas generalizadas q, q' que estén relacionados por medio de las ecuaciones de transformación(*) (invertibles):

$$q'_\alpha = q'_\alpha (q,t) \ . \qquad (\ I.2.1\ )$$

Las coordenadas q, q' describen el mismo punto físico en el espacio de configuración, así que el lagrangiano tendrá el mismo valor, ya sea que esté expresado en términos de q, o de q', aunque en general, será una función diferente de q' de la que es de q. Estas dos funciones se relacionan con la ecuación:

$$L(q,\dot{q},t) = L(\ q(q',t),\ \dot{q}(q',\dot{q}';t),\ t\ ) = \\ = L'(\ q',\dot{q}',t\ ). \qquad (\ I.2.2\ )$$

Es fácil comprobar que, así las cosas, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0 \ , \quad (\ I.2.3\ )$$

(*) Estas transformaciones reciben el nombre de "transformaciones puntuales".

y en este sentido se dice que los lagrangianos L y L' son equivalentes ante transformaciones de coordenadas.

2b. Transformaciones de "Norma". [1,3]

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en Mecánica Clásica la equivalencia de lagrangianos ante transformaciones de -- "norma" se da entre lagrangianos que difieren - por la derivada total respecto al tiempo de alguna función de las coordenadas y el tiempo.

Consideremos dos lagrangianos L y L' relacionados de la siguiente manera:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \frac{dF}{dt} \quad , \quad (I.2.4)$$

donde $F = F(q,t)$; entonces, al calcular la derivada lagrangiana de la expresión (I.2.4) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r} \quad , \quad (I.2.5)$$

debido a que la derivada lagrangiana de dF/dt es idénticamente cero. Con ello se tiene que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r} = 0 \quad . \quad (I.2.6)$$

Debemos hacer notar que las ecuaciones de movimiento obtenidas de L son exactamente las mismas que aquellas obtenidas de L', para cada coordenada (q^r). Se dice entonces que los lagrangianos L, L' son equivalentes y la ecuación (I.2.4) que relaciona L y L' es una transformación de --"norma".

Observación: Se puede considerar aquí una generalización simple de la ecuación (I.2.4). Si en lugar de esta ecuación escribimos:

$$L'(q,\dot{q},t) = \lambda\, L(q,\dot{q},t) - \frac{dF}{dt} \quad , \qquad (\text{I.2.7})$$

donde $\lambda \neq 0$ es una constante numérica y --- $F = F(q,t)$, al calcular la derivada lagrangiana de esta expresión obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = \lambda\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r}\right] \quad , \qquad (\text{I.2.8})$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = 0 \iff \lambda\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r}\right] = 0 \quad , \qquad (\text{I.2.9})$$

que es esencialmente el mismo resultado expresado en (I.2.6) para $\lambda = 1$, y las ecuaciones de movimiento son las mismas, salvo un factor numérico.

(*) Ver la Sección 4 del Capítulo III.

2c. Transformaciones "l".

Tomando como modelo la ecuación (I.2.7), consideremos ahora dos lagrangianos L, L' que se relacionen de la siguiente manera:

$$L'(q,\dot{q},t) = \beta L(q,\dot{q},t) + l(q,\dot{q},t) \quad , \quad (I.2.10)$$

donde $\beta \neq 0$ es una constante numérica y en general(*):

$$l(q,\dot{q},t) \neq \frac{dG}{dt} \quad , \quad (I.2.11)$$

con $G = G(q,t)$.

Nos dedicaremos en todo lo que sigue, a estudiar la equivalencia de lagrangianos que se relacionen de esta manera y obtendremos algunos resultados y conclusiones interesantes. Para lograrlo, comenzaremos por definir lo que llamaremos S-Equivalencia.

(*) Obviamente, si $l = \frac{dG(q,t)}{dt}$, la relación (I.2.10) y sus consecuencias se reducen al caso estudiado en la sección anterior, ver la Sección 4, Capítulo III.

3.- S-Equivalencia.

3a. Definición. Dos puntos de vista.

Consideremos un sistema mecánico cualquiera con n grados de libertad; supongamos que existen al menos dos funciones lagrangianas: $L(q,\dot{q},t)$ y $L'(q,\dot{q},t)$, que determinen toda la dinámica de dicho sistema mecánico, esto es, tales que las ecuaciones de Euler - Lagrange obtenidas de ambas L y L' constituyan dos sistemas de n ecuaciones diferenciales, $L_q = 0$ y $L'_{\dot{q}} = 0$, tales que el conjunto de todas las soluciones de $L_q = 0$ coincida con el conjunto de todas las soluciones de $L'_{\dot{q}} = 0$, entonces decimos que los lagrangianos L y L' son s-equivalentes(*).

Podemos escribir matemáticamente la definición anterior de manera sencilla como sigue:

L y L' lagrangianos s-equivalentes

$\Leftrightarrow$

$\{L_q = 0\} \Leftrightarrow \{L'_{\dot{q}} = 0\}$

(*) La "s" de s-equivalencia no tiene ningún significado oculto, simplemente proviene de la palabra "solución".

Otra manera simple de "visualizar" la definición anterior es la siguiente [6] :

Consideremos dos lagrangianos L, L' que describen a un mismo sistema mecánico con n grados de libertad. Las ecuaciones de movimiento obtenidas de L y L' respectivamente, escritas explícitamente son entonces:

$$L_s \equiv W_{st}\ddot{q}^t + V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} = 0 \quad , \qquad (I.3.1)$$

y

$$L'_r \equiv W'_{rt}\ddot{q}^t + V'_{rt}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = 0 \quad . \qquad (I.3.2)$$

Por comodidad, démosle un nombre a los últimos tres términos de los miembros intermedios de estas ecuaciones. Sean

$$A_s \equiv V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} \quad , \qquad (I.3.3a)$$

$$A'_r \equiv V'_{rt}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} \quad . \qquad (I.3.3b)$$

Ahora bien, supongamos que los coeficientes de las aceleraciones, i.e., W_{st} , W_{rt} , tienen inverso; sean U^{tp} , U'^{tp} los inversos de W_{st} , W_{rt} respectivamente. Con ello podemos despejar las aceleraciones de las ecuaciones (I.3.1) y (I.3.2), es decir, obtenemos las ecuaciones diferenciales para las variables de posición:

De la ecuación (I.3.1):

$$\ddot{q}^{\rho} = -U^{\rho\nu}A_{\nu} + \beta^{\rho}(q,\dot{q},t) \qquad , \quad (\text{I.3.4a})$$

de la ecuación (I.3.2):

$$\ddot{q}^{\rho} = -U'^{\rho\nu}A'_{\nu} + \beta'^{\rho}(q,\dot{q},t) \qquad , \quad (\text{I.3.4b})$$

Y así podemos afirmar que:

$$\beta^{\rho} = \beta'^{\rho} \iff L,\ L' \text{ son s-equivalentes.}$$

Esto es, si las ecuaciones diferenciales para las variables de posición obtenidas del lagrangiano L son las mismas que aquellas obtenidas del lagrangiano L', entonces los lagrangianos L , L' son s-equivalentes.

3b. Comentario.

Con la definición de S-Equivalencia hemos *generalizado* el concepto de equivalencia, en el sentido de que ya no pedimos que las ecuaciones de movimiento sean exactamente las mismas para ambos lagrangianos, ahora sólo exigimos la igualdad del conjunto de soluciones de las *ecuaciones obtenidas de* un lagrangiano (L) con el *conjunto de soluciones* de las ecuaciones *obtenidas de otro* lagrangiano (L').

Así pues, se trata de una generalización natural y simple del concepto de equivalencia - entre lagrangianos.

CAPITULO II.

S-EQUIVALENCIA. CASO UNIDIMENSIONAL.

1.- Introducción.

En junio de 1966, Currie y Saletan [6], publicaron un trabajo en el cual, entre otras - cosas, resuelven en su totalidad el problema de s-equivalencia de lagrangianos para el caso unidimensional * .

Expondremos en este capítulo los resultados obtenidos por los autores mencionados en lo que respecta a lagrangianos s-equivalentes y a-- gregaremos a su trabajo el ejemplo sencillo de - un oscilador armónico unidimensional, inspirado en un ejemplo similar expuesto por R.K. Santilli [7] en una publicación posterior a la de Currie-Saletan.

(*) En realidad este problema fue tratado por Oskar Bolza, en su libro [8] ; el caso bidimensional fue tratado por J. Douglas [9] .

2.- Teorema de S-Equivalencia Unidimensional.

En la sección denominada "El Problema Lagrangiano" de su artículo [6] , Currie y - Saletan hablan de dos lagrangianos equivalentes, L y L', en el sentido de que las ecuaciones de Euler - Lagrange obtenidas de L implican y son implicadas por aquellas obtenidas del lagrangiano L'. Y este es precisamente el sentido que nosotros damos a la s-equivalencia.

Analicemos entonces lo que ellos hacen: Sean $L(q,\dot{q},t)$ y $L'(q,\dot{q},t)$ dos lagrangianos para un sistema sin constricciones con un grado de libertad. Supongamos que los "tensores de masa" $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = L_{\dot{q}\dot{q}}$, $\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^2} = L'_{\dot{q}\dot{q}}$, son distintos de cero e infinito en alguna región R del espacio $(q,\dot{q},t)$. Llamemos a L' subordinado a L en R si (*)

$$L_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow L'_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \quad , \quad (\text{II.2.1})$$

Con esta definición, enunciamos el siguiente teorema.

(*) Utilizamos aquí la notación: $L_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$ para ser consistentes con la notación que usaremos a partir del siguiente capítulo y mencionada al principio de este trabajo.

Teorema.

Primera parte. Si L' es subordinado a L en R, entonces L es subordinado a L' en R, i.e., L y L' son s-equivalentes en R. Además:

$$L'_i = f(q,\dot{q},t)\, L_i \quad , \qquad \text{(II.2.2)}$$

donde $f(q,\dot{q},t)$ es el cociente de "tensores de masa" :

$$f(q,\dot{q},t) = L'_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L_{\dot{q}\dot{q}} \qquad \text{(II.2.3)}$$

y $f(q,\dot{q},t)$ es una constante de movimiento.

Segunda parte: Consideremos un lagrangiano L y una constante de movimiento $f(q,\dot{q},t)$, tales que $0 \neq f, L_{\dot{q}\dot{q}} \neq \infty$ en la región R del espacio $(q,\dot{q},t)$ bajo consideración. Entonces existe un lagrangiano L', equivalente a L en R, que satisface la ecuación (II.2.2). Además, L' queda determinado en forma única hasta una derivada total respecto al tiempo de cierta función de q y t.

Antes de proceder a demostrar la primera parte del teorema, haremos algunas observaciones acerca de la segunda parte del mismo:

i) En el caso multidimensional esta segunda parte del teorema no se ha intentado generalizar, dada la dificultad para resolver en forma general las ecuaciones diferenciales parciales que se obtienen en ese caso (*) ; es por esto que únicamente enunciamos la segunda parte del teorema sin ofrecer una demostración (**) .

ii) Al proceso para construir el lagrangiano equivalente L', con f y L conocidas, Currie y Saletan le llaman "fouling" que quiere decir aproximadamente "contaminación". Así pues, "contaminando" a L con la constante de movimiento f, se obtiene un lagrangiano L', s-equivalente a L, determinado hasta una "norma".

(*) Sin embargo, sí se han podido solucionar las ecuaciones para algunos casos particulares que trataremos en el Capítulo IV.

(**) Currie y Saletan, en su artículo, hacen con detalle esta demostración para el caso unidimensional, [6] .

Probemos ahora la primera parte del teorema. La ecuación de Euler - Lagrange para L es:

$$\ddot{q}\, L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q = 0 \quad , \quad (\text{II.2.4})$$

de donde:

$$-\ddot{q}\, L_{\dot{q}\dot{q}} = \dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q \quad . \quad (\text{II.2.5})$$

Similarmente, para L' tenemos:

$$-\ddot{q}\, L'_{\dot{q}\dot{q}} = \dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_q \; . \quad (\text{II.2.6})$$

Como $L'_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0$, podemos despejar $-\ddot{q}$ de (II.2.6), luego:

$$-\ddot{q} = \left[\dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_q\right]\left(1/\, L'_{\dot{q}\dot{q}}\right). \quad (\text{II.2.7})$$

Por hipótesis, la ecuación (II.2.5) implica a la ecuación (II.2.7), entonces podemos sustituir (II.2.7) en (II.2.5) y obtenemos:

$$\left[\dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_q\right]\left(L_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L'_{\dot{q}\dot{q}}\right) \equiv$$

$$\equiv \dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q \; . \quad (\text{II.2.8})$$

Con ello podemos escribir:

$$L_1 \equiv \ddot{q}\, L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q \equiv$$

$$\equiv \ddot{q}\, L_{\dot{q}\dot{q}} + \left[\dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_q\right]\left(L_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L'_{\dot{q}\dot{q}}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(L_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L'_{\dot{q}\dot{q}}\right)\left[\ddot{q}\, L'_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_{q}\right] \equiv$$

$$\equiv \left(L_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L'_{\dot{q}\dot{q}}\right) L'_1 \quad ,$$

pero $L'_{\dot{q}\dot{q}} \,/\, L_{\dot{q}\dot{q}} \equiv f(q,\dot{q},t)$, (II.2.3)

entonces:

$$L_1 \equiv (1/f)\, L'_1 \quad . \qquad \text{(II.2.9)}$$

Como se supuso que tanto $L_{\dot{q}\dot{q}}$ como $L'_{\dot{q}\dot{q}}$ no son cero ni infinito en R, f tampoco lo es, por tanto:

$$L'_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0 \quad , \qquad \text{(II.2.10)}$$

luego L es subordinado a L'. Como por hipótesis L' es subordinado a L, se tiene que L y L' son s-equivalentes en R.

Ahora mostramos que $f(q,\dot{q},t)$ es una constante de movimiento:

Sean L' y L s-equivalentes de tal forma que se satisfacen las relaciones (II.2.2) y (II.2.9) para alguna $f(q,\dot{q},t)$.

Como $L'_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0$, siguiendo el mismo proceso para obtener la ecuación (II.2.8), obtenemos ahora:

$$\dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_q \equiv \left(L'_{\dot{q}\dot{q}} / L_{\dot{q}\dot{q}}\right)\left[\dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right] \equiv$$

$$\equiv f\left[\dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right] \quad . \qquad (\text{II.2.11})$$

Como (II.2.11) es una identidad, se puede derivar parcialmente respecto a $\dot{q}$ en ambos miembros, obteniéndose después de la cancelación de algunos términos:

$$\dot{q}\, L'_{\dot{q}\dot{q}q} + L'_{\dot{q}\dot{q}t} \equiv f_{\dot{q}}\left(\dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right) + \dot{q} f L_{\dot{q}\dot{q}q} + f L_{\dot{q}\dot{q}t}$$

que podemos reescribir así:

$$\dot{q} L'_{\dot{q}\dot{q}q} + L'_{\dot{q}\dot{q}t} - \dot{q} f L_{\dot{q}\dot{q}q} - f L_{\dot{q}\dot{q}t} \equiv f_{\dot{q}}\left(\dot{q} L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_q\right). \quad (\text{II.2.12})$$

Por otro lado, de la ecuación (II.2.3) tenemos:

$$L'_{\dot{q}\dot{q}} \equiv f\, L_{\dot{q}\dot{q}} \quad , \qquad (\text{II.2.3a})$$

las derivadas parciales de esta expresión respecto a q y respecto a t, son respectivamente:

$$L'_{\dot{q}\dot{q}q} \equiv f_q\, L_{\dot{q}\dot{q}} + f\, L_{\dot{q}\dot{q}q} \quad , \qquad (\text{II.2.13a})$$

$$L'_{\dot{q}\dot{q}t} \equiv f_t\, L_{\dot{q}\dot{q}} + f\, L_{\dot{q}\dot{q}t} \quad . \qquad (\text{II.2.13b})$$

Sustituyendo estos resultados en (II.2.12) resulta:

$$\dot{q} f_q L_{\dot{q}\dot{q}} + \ddot{q} f_{\dot{q}} L_{\dot{q}\dot{q}} + f_t L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} L_{\dot{q}\dot{q}t} - \ddot{q} f_{\dot{q}} L_{\dot{q}\dot{q}} - \dot{q} L_{\dot{q}\dot{q}t} \equiv$$

$$\equiv f_{\dot{q}} \left(\ddot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} + L_{\dot{q}t} - L_q \right) ,$$

cancelando los términos correspondientes, obtenemos:

$$\dot{q} f_q L_{\dot{q}\dot{q}} + f_t L_{\dot{q}\dot{q}} \equiv f_{\dot{q}} \left(\dot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} + L_{\dot{q}t} - L_q \right) . \qquad (II.2.14)$$

Recordando la ecuación de movimiento (II.2.5), vemos que el paréntesis del miembro derecho de (II.2.14) es simplemente ($- \bar{q} L_{\dot{q}\dot{q}}$); al sustituir este valor, la identidad (II.2.14) deja de serlo para transformarse en una ecuación y después de reacomodar los términos y factorizar la cantidad $L_{\dot{q}\dot{q}}$, obtenemos finalmente:

$$\left(\bar{q} f_{\dot{q}} + \dot{q} f_q + f_t \right) L_{\dot{q}\dot{q}} = 0 . \qquad (II.2.15)$$

Pero la cantidad dentro del paréntesis no es más que la derivada total respecto al tiempo de $f(q,\dot{q},t)$, y como $L_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0$, la única posibilidad es:

$$\frac{d}{dt} f(q,\dot{q},t) = 0 , \qquad (II.2.16)$$

luego $f(q,\dot{q},t)$ es constante de movimiento. Con

esto queda completa la prueba de la primera parte del teorema, que es la que nos interesa para los fines de este trabajo.

3.- Ejemplo.

Veremos ahora el ejemplo explícito de un oscilador armónico unidimensional. Suponiendo conocidos un lagrangiano L y una constante de movimiento $f(q,\dot{q},t)$, construiremos un lagrangiano L', s-equivalente a L.

El lagrangiano usual para oscilador armónico unidimensional (con $\omega=1$ por simplicidad) es:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}q^2 \quad . \qquad (\text{II.3.1})$$

La ecuación de Euler - Lagrange obtenida de L es entonces:

$$L_1 \equiv \ddot{q} + q = 0 \quad . \qquad (\text{II.3.2})$$

Consideremos la constante de movimiento * :

$$f(q,\dot{q},t) = q\,\mathrm{Cos}\,t - \dot{q}\,\mathrm{Sen}\,t \quad . \qquad (\text{II.3.3})$$

(*) Es fácil ver que en efecto f es constante de movimiento para el sistema descrito por L, pues $\dot{f} = -(\ddot{q} + q)\,\mathrm{Sen}\,t$ y gracias a la ecuación (II.3.2); $\dot{f} = 0$.

Usaremos ahora las ecuaciones (II.2.3a) y -- (II.2.11) de la sección anterior. La ecuación (II.2.3a) es:

$$L'_{\dot{q}\dot{q}} \equiv f(q,\dot{q},t)\, L_{\dot{q}\dot{q}} \quad ; \qquad (\text{II.2.3a})$$

en este caso, $L_{\dot{q}\dot{q}} = 1$, entonces explícitamente tenemos:

$$L'_{\dot{q}\dot{q}} = q \operatorname{Cos} t - \dot{q} \operatorname{Sen} t \quad , \qquad (\text{II.3.4})$$

que se puede integrar fácilmente así :

$$L'_{\dot{q}} = \dot{q}q \operatorname{Cos} t - \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 \operatorname{Sen} t + g(q,t) \, ,$$

luego:

$$L' = \tfrac{1}{2} q\dot{q}^2 \operatorname{Cos} t - \tfrac{1}{6}\dot{q}^3 \operatorname{Sen} t + \dot{q}\, g(q,t) + h(q,t) \quad , \qquad (\text{II.3.5})$$

donde las funciones $g(q,t)$ y $h(q,t)$ surgen de la doble integración parcial y serán determinadas a continuación, con ayuda de la ecuación (II.2.11):

$$\dot{q}\, L'_{\dot{q}q} + L'_{\dot{q}t} - L'_{q} \equiv f\left[\dot{q}\, L_{\dot{q}q} + L_{\dot{q}t} - L_{q}\right] . \quad (\text{II.2.11})$$

Calculemos primero los términos del miembro derecho de (II.2.11), con L dado por la expresión (II.3.1) :

$$L_q = -q \quad , \qquad \text{(II.3.6a)}$$

$$L_{\dot{q}q} = L_{\dot{q}t} = 0 \quad . \qquad \text{(II.3.6b)}$$

Ahora, los términos del miembro izquierdo de - (II.2.11), con L' dado por la expresión - - (II.3.5) son :

$$L'_q = \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 \cos t + \dot{q}\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial h}{\partial q} \; , \qquad \text{(II.3.7a)}$$

$$L'_t = -\tfrac{1}{2}q\dot{q}^2 \sin t - \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 \cos t + \dot{q}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \; ,$$

$$L'_{\dot{q}t} = -q\dot{q}\sin t - \tfrac{1}{2}\dot{q}^2 \cos t + \frac{\partial g}{\partial t} \; , \qquad \text{(II.3.7b)}$$

$$L'_{\dot{q}q} = \dot{q}\cos t + \frac{\partial g}{\partial q} \quad . \qquad \text{(II.3.7c)}$$

Sustituyendo (II.3.6a,b) y (II.3.7a,b,c), así como (II.3.3) en (II.2.11) obtenemos, después de la cancelación de los términos correspondientes :

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial q} = q^2 \cos t \quad . \qquad \text{(II.3.8)}$$

Una solución particular de ésta ecuación es, claramente,

$$h(q,t) = -\tfrac{1}{3}q^3 \cos t \quad , \qquad \text{(II.3.9a)}$$

$$g(q,t) = 0 \quad , \qquad \text{(II.3.9b)}$$

con lo cual podemos escribir el lagrangiano L' ,

s-equivalente a L, usando la expresión (II.3.5), así :

$$L' = \tfrac{1}{2} q\dot{q}^2 \operatorname{Cos} t - \tfrac{1}{6} \dot{q}^3 \operatorname{Sen} t - \tfrac{1}{2} q^3 \operatorname{Cos} t \ . \quad (II.3.5a)$$

Para verificar que nuestro resultado (II.3.5a) es correcto, calculemos la derivada lagrangiana asociada a él :

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \tfrac{1}{2} \dot{q}^2 \operatorname{Cos} t - q^2 \operatorname{Cos} t \quad ,$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = q\dot{q} \operatorname{Cos} t - \tfrac{1}{2} \dot{q}^2 \operatorname{Sen} t \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) = \tfrac{1}{2} \dot{q}^2 \operatorname{Cos} t + q\ddot{q} \operatorname{Cos} t - q\dot{q} \operatorname{Sen} t - \dot{q}\ddot{q} \operatorname{Sen} t \ .$$

Por tanto :

$$L'_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = (q \operatorname{Cos} t - \dot{q} \operatorname{Sen} t)(\ddot{q} + q) \quad ,$$

o bien, usando (II.3.2) :

$$L'_1 = (q \operatorname{Cos} t - \dot{q} \operatorname{Sen} t) L_1 \quad , \qquad (II.3.10)$$

que es precisamente la condición (II.2.2) expresada en el teorema de s-equivalencia unidimensional, con la constante de movimiento

$$f(q,\dot{q},t) = q \operatorname{Cos} t - \dot{q} \operatorname{Sen} t \ ,$$

misma que teníamos desde un principio (*cf.* ec. II.3.3).

Aquí podemos hacer la siguiente observación: De la ecuación (II.3.10) es obvio que $L_1 = 0 \Rightarrow L'_1 = 0$, pero no resulta tan evidente la afirmación inversa, es decir, $L'_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0$, debido a que $f(q,\dot{q},t)$ podría tomar, para algún caso especial, el valor cero. Este problema es en realidad inexistente; veamos: Si $f(q,\dot{q},t) = 0$, la solución general de

$$q \operatorname{Cos} t - \dot{q} \operatorname{Sen} t = 0 \quad , \qquad (II.3.11)$$

es:

$$q(t) = c \operatorname{Sen} t \quad , \qquad (II.3.12)$$

donde c es una constante arbitraria. Obviamente (II.3.12) es una solución particular de (II.3.2), i.e., $\ddot{q} + q = 0$. Luego podemos afirmar que las soluciones de $L'_1 = 0$ con $f(q,\dot{q},t) = 0$, también son soluciones de $L_1 = 0$, es decir, $L'_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0$, con lo cual podemos asegurar que los lagrangianos L y L' de nuestro ejemplo, son s-equivalentes.

Debemos hacer notar que aquí hemos relajado la condición $L'_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0$, y a pesar de ello hemos obtenido s-equivalencia. Veremos después que también se puede relajar esta condición para los -

ejemplos bidimensionales expuestos en el Capítulo IV, lo cual nos hace pensar en la posibilidad de que este sea el caso en algunos otros problemas interesantes con relevancia física; por lo pronto, este punto queda abierto a discusión, aunque un tratamiento más detallado - aparecerá en un trabajo posterior, [10].

CAPITULO III.

S-EQUIVALENCIA. CASO MULTIDIMENSIONAL.

1.- Introducción.

Pasemos ahora a la generalización del Teorema de S-Equivalencia para sistemas con n grados de libertad. En el desarrollo de este capítulo se verá que se trata realmente de una generalización muy natural del trabajo de Currie Saletan [5], que acabamos de analizar. Demostraremos con todo detalle el Teorema de S-Equivalencia para el caso multidimensional. También deduciremos algunas consecuencias de las llamadas Transformaciones "1" definidas en la Sección 2c. del Capítulo I, que nos permitirán construir explícitamente lagrangianos s-equivalentes si suponemos conocido un lagrangiano (L) para el sistema mecánico en cuestión.

Mostraremos también, de una manera clara, que la equivalencia de lagrangianos ante transformaciones de "norma", mencionadas en la Sección 2b. del Capítulo I, resulta ser un caso particular de S-Equivalencia.

Asimismo, propondremos una manera de escribir el Teorema "Tradicional" de equivalencia,

que dice: "Dos lagrangianos son equivalentes si y sólo si difieren por la derivada total de alguna función de las coordenadas y el tiempo" , para disminuir a un mínimo las inexactitudes - propias del lenguaje y darle así, a este Teorema "Tradicional" , un carácter más formal.

Cabe recordar que en todo lo que sigue, usaremos la notación y convenciones esbozadas en los puntos 3. y 4. de la sección correspondiente al principio de este trabajo.

2.- Teorema de S-Equivalencia Multidimensional.

Basándonos en el teorema unidimensional, expuesto en el capítulo anterior, lo reescribimos ahora para sistemas mecánicos con n grados de libertad. Es precisamente en esta "reescritura" donde radica la naturalidad de la generalización que estamos proponiendo. La definición de "subordinación" de lagrangianos se modifica simplemente así :

Sean $L(q_1 , \dot{q}_1 , t)$ y $L'(q_1 , \dot{q}_1 , t)$ dos lagrangianos para un sistema mecánico con n grados de libertad. Supongamos que los determinantes de los "tensores de masa" $\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}\right| \equiv |W_{rs}|$ y $\left|\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}\right| \equiv |W'_{rs}|$, son distintos de cero e infinito en alguna región R del espacio ($q_1 , \dot{q}_1 , t$).

Llamamos a L' subordinado a L en R si

$$\left\{L_s \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0\right\} \Rightarrow \left\{L'_r \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0\right\} , \quad (\text{III.2.1})$$

para toda s, r $\in \{1,2,\ldots,n\}$.

Con esta definición, enunciamos el teorema general:

Teorema :

Si L' es subordinado a L en R, entonces L es subordinado a L' en R, esto es, L y L' son s-equivalentes.

Además :

Existe Λ , matriz (n x n), no singular, tal que:

$$L'_r = \Lambda_r{}^s L_s \quad , \qquad \text{(III.2.2)}$$

y también las cantidades * :

$tr\,\Lambda^m$; $m = 1,2,\ldots,n$; son constantes de movimiento.

Antes de proceder a la demostración del teorema, observemos lo siguiente: El único requerimiento formal sobre la matriz Λ es que sea no singular, esto es, se pide que Λ tenga inversa. Esto permite cierta libertad sobre el carácter de los elementos de Λ , pues podemos esperar no sólo que se trate de una matriz numérica, con lo cual L'_r serían combinaciones lineales de las cantidades L_s con coeficientes numéri

---

(*) Denotemos con Λ^m a la potencia m-ésima de Λ .

cos, sino que Λ tenga como elementos cantidades dinámicas, i.e., cantidades que dependen de q, $\dot{q}$, y t en general, lo cual da al problema un interés especial, pues aunque L'_ρ siguen siendo combinaciones lineales de las cantidades L_σ, ahora los coeficientes de cada combinación son cantidades dinámicas que contienen información del sistema mecánico en cuestión, e.g., estos coeficientes pueden ser constantes de movimiento.

Procedamos ahora a demostrar el teorema general, dividiéndolo para ello en dos partes. Primero demostraremos que si L' es subordinado a L, entonces L es subordinado a L', i.e., L y L' son s-equivalentes; veamos:

Las ecuaciones de Euler - Lagrange para L son :

$$W_{s\sigma}\ddot{q}^\sigma + V_{s\sigma}\dot{q}^\sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} = 0 \quad , \qquad \text{(III.2.3)}$$

de donde:

$$-W_{s\sigma}\ddot{q}^\sigma = V_{s\sigma}\dot{q}^\sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} \quad . \qquad \text{(III.2.4)}$$

Similarmente, para L' tenemos :

$$-W'_{r\rho}\ddot{q}^\rho = V'_{r\rho}\dot{q}^\rho + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} \quad . \qquad \text{(III.2.5)}$$

Como $\det\left(W'_{rp}\right) \neq 0$, $\left(W'_{rp}\right)$ tiene inversa; sea $\left(U'^{tr}\right)$ esta inversa, entonces podemos despejar $-\ddot{q}^t$ de (III.2.5), así :

$$-\ddot{q}^t = U'^{tr}\left[V'_{rp}\dot{q}^p + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] \quad . \qquad (III.2.6)$$

Por hipótesis, la ecuación (III.2.4) implica a la ecuación (III.2.6), entonces podemos sustituir esta última relación en (III.2.4) y obtenemos :

$$W_{st}U'^{tr}\left[V'_{rp}\dot{q}^p + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] =$$

$$= V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} \quad . \qquad (III.2.7)$$

Con ello podemos escribir :

$$L_s = W_{st}\ddot{q}^t + V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} =$$

$$= W_{st}\ddot{q}^t + W_{st}U'^{tr}\left[V'_{rp}\dot{q}^p + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] ;$$

pero $\ddot{q}^t = \delta_r{}^t\ddot{q}^r = U'^{tr}W'_{rf}\ddot{q}^f$, que al sustituir en el primer término de la última expresión nos da:

$$L_s = W_{st}U'^{tr}W'_{rp}\ddot{q}^f + W_{st}U'^{tr}\left[V'_{rp}\dot{q}^p + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] ,$$

donde podemos factorizar la cantidad $W_{st}U'^{tr}$ así :

$$L_s = W_{st}U'^{tr}\left[W'_{rp}\ddot{q}^p + V'_{rp}\dot{q}^p + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^p \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] .$$

además, la expresión entre corchetes es simplemente L'_r , entonces :

$$L_s = W_{st}\, U'^{tr}\, L'_r \quad . \qquad (\text{III.2.8})$$

Como $\det(W_{st})$, $\det(U'^{tr})$ son distintos de cero e infinito, entonces $\det(W_{st}\, U'^{tr})$ es distinto de cero e infinito, por tanto :

$$\{L'_r = 0\} \Rightarrow \{L_s = 0\} \quad , \qquad (\text{III.2.9})$$

luego L es subordinado a L'. Como por hipótesis L' es subordinado a L, se tiene que L y L' son s-equivalentes en $\mathbb{R}$.

Pasemos a demostrar ahora que si se tienen dos lagrangianos L y L' , s-equivalentes, entonces existe Λ , matriz (n x n), no singular, tal que :

$$L'_r = \Lambda_r^{\ s}\, L_s \quad ,$$

y que además, las cantidades $\operatorname{tr} \Lambda^m$, $m = 1, \ldots, n$, son constantes de movimiento.

Hemos visto que $\det(W_{st}\, U'^{tr}) \neq 0$, luego WU' tiene inverso; sea $W'U$ este inverso, cuyos elementos son $W'_{rp}\, U^{ps}$. Multiplicando la identi-

dad * (III.2.8) por la izquierda por esta cantidad, se tiene:

$$W'_{rf} U^{fs} L_s = (W'_{rp} U^{ps})(W_{st} U'^{tv}) L'_v = \delta_r^{\ v} L'_v = L'_r$$

o bien :

$$L'_r = W'_{rp} U^{ps} L_s \quad . \qquad \text{(III.2.10)}$$

Comparando esta identidad con (III.2.2) del - teorema, tenemos que :

$$\Lambda_r^{\ s} = W'_{rf} U^{fs} \quad , \qquad \text{(III.2.11)}$$

es decir, la matriz buscada está dada por el producto de matrices :

$$\Lambda = W' U \quad , \qquad \text{(III.2.11a)}$$

que es obviamente no singular, puesto que - - $\det(W'_{rp})$ y $\det(U^{ps})$ son distintos de cero e infinito, por hipótesis.

Hemos construído entonces la matriz Λ, que nos permite relacionar los *vectores de Euler-

(*) Cambiamos el índice mudo "r" por el índice "v" en (III.2.8) para evitar repeticiones innecesarias de índices.

Lagrange' • asociados a los lagrangianos L y L', que son s-equivlentes.

Para demostrar que las trazas de las potencias de Λ son constantes de movimiento, demostraremos que

$$\frac{d}{dt}\left(tr\,\Lambda^m\right) = 0 \qquad , \quad m = 1,2,\ldots,n.$$

Escribamos la identidad (III.2.2) en forma explícita:

$$L'_r \equiv W'_{rt}\ddot{q}^t + V'_{rt}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} \equiv$$

$$\equiv \Lambda_r{}^s\left[W_{st}\ddot{q}^t + V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right] \equiv \Lambda_r{}^s L_s \,.$$

Precisamente por ser identidad, y como en los términos que contienen aceleraciones, éstas aparecen en forma lineal, y además tanto W_{st} como el resto de los términos de la expresión no son funciones de $\ddot{q}$, la identidad se "desdobla" en dos identidades.

(•) Se conoce como "vector de Euler-Lagrange" a la colección de los miembros izquierdos de las ecuaciones de movimiento, dispuesta en forma de vector columna, en este caso.

De los términos con aceleraciones tenemos:

$$W'_{rt} = \Lambda_r^{\ s} W_{st} \quad , \qquad \text{(III.2.12)}$$

de los demás términos tenemos :

$$V'_{rt}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r} = \Lambda_r^{\ s}\left[V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right]. \quad \text{(III.2.7a)}$$

Nota: Compárese esta última identidad (III.2.7a) con la identidad (III.2.7).

Como (III.2.7a) es identidad, podemos derivar parcialmente ambos miembros de esta expresión respecto a $\dot{q}^u$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\left[V'_{rt}\dot{q}^t + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L'}{\partial q^r}\right] = \frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^u}\left[V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right] +$$

$$+ \Lambda_r^{\ s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\left[V_{st}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right] ,$$

y efectuando la derivación de cada término :

$$\frac{\partial V'_{rt}}{\partial \dot{q}^u}\dot{q}^t + V'_{rt}\delta^t_{\ u} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} - V'_{ur} =$$

$$= \frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^u}\left[-V_{st}\dot{q}^t\right] + \Lambda_r^{\ s}\left[\frac{\partial V_{st}}{\partial \dot{q}^u}\dot{q}^t + V_{st}\delta^t_{\ u} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - V_{us}\right], \quad \text{(III.2.13)}$$

donde se ha utilizado la ecuación de movimiento obtenida de L (III.2.4) para reescribir el primer término del segundo miembro, con lo cual la identidad deja de serlo para transformarse en

una ecuación. Además podemos hacer los siguientes intercambios :

$$\cdot \frac{\partial V'_{rs}}{\partial \dot{q}^u} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial q^t} = \frac{\partial}{\partial q^t}\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^r} = \frac{\partial}{\partial q^t} W'_{ur} \ ,$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^r} = \frac{\partial}{\partial t} W'_{ur} \ ,$$

$$\cdot \frac{\partial V_{rs}}{\partial \dot{q}^u} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial}{\partial q^t}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial}{\partial q^t} W_{us} \ ,$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^u}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial}{\partial t} W_{us} \ .$$

Sustituyendo estos resultados en (III.2.13) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial q^t}\left(W'_{sr}\right)\dot{q}^t_s + \frac{\partial}{\partial t}\left(W'_{sr}\right) + V'_{rs} - V'_{sr} =$$

$$= -\frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial q^t} W_{st}\dot{q}^t + \Lambda_r{}^s\left[\frac{\partial}{\partial q^t}\left(W_{us}\right)\dot{q}^t_u + \frac{\partial}{\partial t}\left(W_{us}\right) + V_{su} - V_{us}\right] \ . \quad (\text{III.2.14})$$

Como las matrices W , W' son simétricas, tenemos que $W'_{sr} = W'_{rs}$ y $W_{us} = W_{su}$; usando la expresión (III.2.12) tenemos:

$$W'_{rs} = \Lambda_r{}^u W_{su} \ . \qquad (\text{III.2.12a})$$

Por otro lado, los términos $(V'_{rs} - V'_{sr})$ y $(V_{su} - V_{us})$ son elementos de sendas matrices antisimétricas que denominamos con la letra "T" , esto es :

$$T'_{ru} = V'_{ru} - V'_{ur} = -T'_{ur} \quad ,$$

$$T_{su} = V_{su} - V_{us} = -T_{us} \quad . \qquad (\text{III.2.15})$$

Con las expresiones (III.2.12a) y (III.2.15) reescribimos (III.2.14) así :

$$\frac{\partial}{\partial q^t}\left(\Lambda_r^{\ s} W_{su}\right)\dot{q}^t + \frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_r^{\ s} W_{su}\right) + T'_{ru} =$$

$$= -\frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^t} W_{st}\ddot{q}^t + \Lambda_r^{\ s}\left[\frac{\partial}{\partial q^t}\left(W_{su}\right)\dot{q}^t + \frac{\partial}{\partial t}\left(W_{su}\right) + T_{su}\right] \quad ,$$

efectuando las derivaciones parciales en el - - miembro izquierdo, obtenemos :

$$\frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial q^t} W_{su}\dot{q}^t + \Lambda_r^{\ s}\frac{\partial}{\partial q^t}\left(W_{su}\right)\dot{q}^t + \frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial t}\left(W_{su}\right) + \Lambda_r^{\ s}\frac{\partial}{\partial t}\left(W_{su}\right) + T'_{ru} =$$

$$= -\frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^u} W_{st}\ddot{q}^t + \Lambda_r^{\ s}\frac{\partial}{\partial q^t}\left(W_{su}\right)\dot{q}^t + \Lambda_r^{\ s}\frac{\partial}{\partial t}\left(W_{su}\right) + \Lambda_r^{\ s} T_{su} \quad ,$$

cancelando los términos correspondientes y reagrupando los términos restantes, queda finalmente :

$$\frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^u} W_{st}\ddot{q}^t + \frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial q^t} W_{su}\dot{q}^t + \frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial t} W_{su} =$$

$$= \Lambda_r^{\ s} T_{su} - T'_{ru} \; . \qquad (\text{III.2.16})$$

Para poder escribir este último resultado , - - (III.2.16) en forma compacta, demostraremos que la expresión $\frac{\partial \Lambda_r^{\ s}}{\partial \dot{q}^u} W_{st}$ del primer término del - miembro izquierdo, se puede escribir también co

no $\frac{\partial \Lambda^1_r}{\partial \dot{q}^t} W_{su}$, con lo cual el miembro izquierdo resulta ser la derivada total de Λ respecto al tiempo, multiplicada por los elementos de la matriz (W_{su}), veamos:

De la ecuación (III.2.11) obtenemos que :

$$\Lambda_r{}^s W_{st} = W'_{rt} \quad , \qquad \text{(III.2.17a)}$$

asimismo :

$$\Lambda_r{}^s W_{su} = W'_{ru} \quad . \qquad \text{(III.2.17b)}$$

Derivamos parcialmente (III.2.17a) respecto a $\dot{q}^u$, recordando que $W'_{rt} \equiv \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t}$ y obtenemos:

$$\frac{\partial W'_{rt}}{\partial \dot{q}^u} \equiv \frac{\partial^3 L'}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t} \equiv \frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}^u} W_{st} + \Lambda_r{}^s \frac{\partial W_{st}}{\partial \dot{q}^u} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}^u} W_{st} + \Lambda_r{}^s \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^t} \quad ,$$

es decir:

$$\frac{\partial^3 L'}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t} = \frac{\partial \Lambda^s_r}{\partial \dot{q}^u} W_{st} + \Lambda_r{}^s \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^u \partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^t} \quad . \qquad \text{(III.2.18a)}$$

De manera similar, derivando (III.2.17b) respecto a $\dot{q}^t$, tenemos :

$$\frac{\partial W_{rs}}{\partial \dot{q}^t} = \frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^t \partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^t} W_{\alpha s} + \Lambda_r^{\alpha} \frac{\partial W_{\alpha s}}{\partial \dot{q}^t} =$$

$$= \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^t} W_{\alpha s} + \Lambda_r^{\alpha} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^t \partial \dot{q}^{\alpha} \partial \dot{q}^{\beta}} \quad ,$$

es decir:

$$\frac{\partial^3 L'}{\partial \dot{q}^t \partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^t} W_{\alpha s} + \Lambda_r^{\alpha} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^t \partial \dot{q}^{\alpha} \partial \dot{q}^{\beta}} \quad . \qquad \text{(III.2.18b)}$$

Comparando (III.2.18a) con (III.2.18b), recordando que las parciales respecto a las $\dot{q}$ conmutan, se tiene inmediatamente que :

$$\frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^s} W_{\alpha t} = \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^t} W_{\alpha s} \quad . \qquad \text{(III.2.19)}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión -- (III.2.16) , obtenemos :

$$\left[\frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial \dot{q}^t} \dot{q}^t + \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial q^t} \dot{q}^t + \frac{\partial \Lambda_r^{\alpha}}{\partial t} \right] W_{\alpha s} = \Lambda_r^{\alpha} T_{\alpha s} - T'_{rs} \quad ,$$

donde claramente la cantidad entre corchetes es la derivada total respecto al tiempo de los elementos de la matriz Λ , entonces :

$$\frac{d \Lambda_r^{\alpha}}{dt} W_{\alpha s} = \Lambda_r^{\alpha} T_{\alpha s} - T'_{rs} \quad .$$

Multiplicando esta última ecuación por la derecha por el inverso de W , cuyos elementos son $W^{\alpha\beta}$, obtenemos :

$$\frac{d\Lambda_r^1}{dt} = \Lambda_r^{r-1} T_{r-1} U^{r-1} - T'_{rr} U^{rr} \quad . \quad (\text{III.2.20})$$

Podemos escribir esta ecuación en términos de las matrices mismas y no de sus elementos, directamente así :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda T U - T' U \quad . \quad (\text{III.2.21})$$

Ahora bien, la derivada de la potencia n-ésima de Λ_r respecto al tiempo es :

$$\frac{d\Lambda^n}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \Lambda^{n-r} \frac{d\Lambda}{dt} \Lambda^{r-1} \quad ; \quad (\text{III.2.22})$$

usando (III.2.21) en (III.2.22) obtenemos :

$$\frac{d\Lambda^n}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \Lambda^{n-r} \left[\Lambda T U - T' U \right] \Lambda^{r-1} \quad ; \quad (\text{III.2.22a})$$

tomando la traza de (III.2.22a) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(tr \Lambda^n) = \sum_{r=1}^{n} tr \left\{ \Lambda^{n-r} \left[\Lambda T U - T' U \right] \Lambda^{r-1} \right\} ,$$

que, gracias a un conocido resultado del álgebra de matrices, podemos reescribir así :

$$\frac{d}{dt}(tr \Lambda^n) = \sum_{r=1}^{n} tr \left\{ \Lambda^{r-1} \Lambda^{n-r} \left[\Lambda T U - T' U \right] \right\} = \sum_{r=1}^{n} tr \left\{ \Lambda^{n-1} \left[\Lambda T U - T' U \right] \right\} =$$

$$= n\, tr \left[\Lambda^{n-1} T U - \Lambda^{n-1} T' U \right] = n \left[tr \left(U \Lambda^{n-1} T \right) - tr \left(U \Lambda^{n-1} T' \right) \right]$$

esto es:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{tr}\,\Lambda^{m}) = m\left[\mathrm{tr}(U\Lambda^{m}T) - \mathrm{tr}(U\Lambda^{m-1}T')\right] . \qquad \text{(III.2.23)}$$

Pero $\Lambda = W'U$ (cf. ec. III.2.11a), entonces, si k es un entero positivo, tenemos :

$$U\Lambda^{k} = U\underbrace{(W'U)(W'U)\cdots(W'U)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{(UW')(UW')\cdots(UW')}_{k\text{-veces}}U ,$$

gracias a que el producto de matrices es asociativo, entonces, como U y W' son simétricas, se tiene que :

$$(U\Lambda^{k})^{T} = U^{T}(UW')^{T}\cdots(UW')^{T} = U(W'U)\cdots(W'U) = U\Lambda^{k} ,$$

es decir, $U\Lambda^{k}$ es una matriz simétrica * . Usando este resultado en la ecuación (III.2.23), y como T y T' son antisimétricas (cf. ec. III.2.15), se tiene que $\mathrm{tr}(U\Lambda^{m}T) = \mathrm{tr}(U\Lambda^{m-1}T') = 0$, entonces :

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{tr}\,\Lambda^{m}) = 0 \quad , \qquad \text{(III.2.24)}$$

esto es, las cantidades $\mathrm{tr}\,\Lambda^{m}$, $m = 1,2,\ldots,n$,

---

(*) En particular, $U\Lambda^{m}$ y $U\Lambda^{m-1}$ son simétricas.

son constantes de movimiento (*) , con lo cual queda demostrado el teorema general.

Resumiendo, si tenemos dos lagrangianos L y L' , s-equivalentes, siempre podremos construir una matriz Λ, (n x n), no singular, que nos permita relacionar los miembros izquierdos de las ecuaciones de Euler-Lagrange L_s , L'_r , obtenidas de L y L' , respectivamente, así :

$$L'_r = \Lambda_r^{\ s} L_s \quad .$$

Además la matriz Λ tiene la propiedad de que

$$\frac{d}{dt}(tr\Lambda^m) = 0 \qquad , \quad m = 1,2,\ldots,n \ .$$

Observación: De todo lo anteriormente dicho, no podemos asegurar que las n constantes, $tr\Lambda^m$, son independientes, es decir, se puede dar el caso en que algunas de ellas, o todas, estén relacionadas entre sí.

(*) En general, m es un entero positivo cualquiera, pero gracias al Teorema de Cayley-Hamilton, basta considerar m = 1,...,n, pues este teorema muestra que las trazas de las potencias Λ^{n+1} , Λ^{n+2},..., de una matriz n x n , se pueden expresar como funciones de las trazas de Λ , Λ^2,.., Λ^n.

3.- Lagrangianos S-Equivalentes ante Transformaciones "l".

Las transformaciones "l" fueron introducidas en la Sección 2o. del Capítulo I de este trabajo; deduciremos ahora algunas propiedades interesantes y útiles de estas transformaciones cuando los lagrangianos involucrados en la transformación son s-equivalentes.

3a. El "Lagrangianito" l .

Habíamos visto (Sección 2o. Cap. I) que un lagrangiano $L'(q,\dot{q},t)$ se obtiene de otro lagrangiano $L(q,\dot{q},t)$ mediante una transformación "l" , cuando se puede escribir de la forma :

$$L'(q,\dot{q},t) = \varphi\, L(q,\dot{q},t) + l(q,\dot{q},t) \quad , \quad (\text{I.2.10})$$

donde $\varphi \neq 0$ es una constante numérica ; de aquí obtenemos trivialmente que :

$$L'(q,\dot{q},t) - \varphi\, L(q,\dot{q},t) = l(q,\dot{q},t) \ . \quad (\text{III.3.1})$$

Ahora bien, la derivada lagrangiana es un *operador* lineal, luego, aplicándola a la re-

lación (III.3.1) obtenemos:

$$L'_r - \beta L_r \equiv l_r \quad . \qquad (\text{III.3.2})$$

Si pedimos que $L'(q,\dot{q},t)$ y $L(q,\dot{q},t)$ sean s-equivalentes, entonces, gracias al teorema demostrado en la sección anterior, tenemos :

$$L'_r \equiv \Lambda_r^{\ s} L_s \quad , \qquad (\text{III.2.2})$$

de modo que podemos reescribir la identidad - (III.3.2) así :

$$(\Lambda_r^{\ s} - \beta \delta_r^{\ s}) L_s \equiv l_r \quad . \qquad (\text{III.3.3})$$

Definimos la matriz Ω , n x n , como :

$$\Omega \equiv \Lambda - \beta I \quad , \qquad (\text{III.3.4})$$

donde I es la matriz identidad, con lo cual :

$$l_r \equiv \Omega_r^{\ s} L_s \quad . \qquad (\text{III.3.5})$$

Aquí debemos hacer la siguiente observación importante: Hemos supuesto desde un - principio que Λ es no singular, es decir, - $\det \Lambda \neq 0$, pero esto no nos permite decir lo mismo de la matriz Ω definida en (III.3.4) , i.e., se puede dar el caso en que $\det \Omega = 0$.

En consecuencia, de la relación (III.3.5) , sólo podemos asegurar que l es "subordinado" a L, i.e., $\{L_s = 0\} \Rightarrow \{l_r = 0\}$ para toda $r,s \in \{1,2,\ldots,n\}$, pero en general, L no es "subordinado" a l , i.e., $\{l_r = 0\} \not\Rightarrow \{L_s = 0\}$. En otras palabras, l y L no son s-equivalentes en general, pues aunque las ecuaciones de movimiento asociadas con l están contenidas en las ecuaciones de movimiento asociadas con L, las ecuaciones de movimiento obtenidas de L no necesariamente estarán contenidas en las ecuaciones de movimiento obtenidas de l .

De ahí la denominación de l como un "lagrangianito" , pues l es un lagrangiano "más chico" que L en el sentido explicado arriba. Una manera de visualizar la existencia de estos lagrangianos "más chicos" es la siguiente, supongamos que existe un lagrangiano $L(q_i , \dot{q}_i , t)$ tal que se pueda escribir de la forma :

$$L(q_i , \dot{q}_i , t) = L^1(q_j, \dot{q}_j, t) + L^2(q_k, \dot{q}_k, t) , \quad (III.3.6)$$

en donde pedimos además, si denotamos con C_n al conjunto de coordenadas q_n , que :

$$C_j \cap C_k = \phi \ , \qquad C_j \cup C_k = C_i \ , \qquad (\text{III.3.7})$$

donde ϕ es el conjunto vacío. Entonces L^1 y L^2 son "lagrangianitos" respecto a L en el sentido ya descrito. Un ejemplo claro y explícito de esto es el oscilador armónico bidimensional ($\omega = 1$), en cuyo caso :

$$L(q_1,\dot{q}_1,t) = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \ , \quad (\text{III.3.8})$$

Si llamamos $L^1 = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - q_1^2)$; $L^2 = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 - q_2^2)$, podemos reescribir (III.3.8) en la forma -- (III.3.6) y, obviamente, L^1 y L^2 son lagrangianos "más chicos" que L.

Para concluir, 1, de la ecuación (III.3.1), es entonces un "lagrangianito" que nos permitirá construir lagrangianos s-equivalentes * con L , sin ser él mismo, necesariamente, un lagrangiano s-equivalente con L.

(*) Es claro que en todo lo anterior y lo que sigue, estamos suponiendo <u>conocido</u> el lagrangiano L para el sistema mecánico en cuestión.

3b. Las Ecuaciones Diferenciales para "L".

Escribamos explícitamente la identidad (III.3.5) en todo su esplendor :

$$L_r \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r} \equiv \Omega_{rs}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right] \equiv \Omega_{rs}\, L_s \quad ,$$

desarrollando las derivadas totales respecto al tiempo :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t}\ddot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial q^t}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^r} \equiv$$

$$\equiv \Omega_{rs}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^t}\ddot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial q^t}\dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s}\right] . \quad (III.3.5a)$$

Aquí podemos usar el mismo argumento que utilizamos para obtener las expresiones (III.2.12) y (III.2.7a) , es decir, como las aceleraciones ($\ddot{q}^t$) aparecen en forma lineal en los términos - que las contienen y tanto los coeficientes de las $\ddot{q}$, como el resto de los términos de la expresión anterior no son funciones de $\ddot{q}$, entonces la identidad se "desdobla" en dos identidades, una a partir de los términos con aceleraciones y otra a - partir de los demás términos de la expresión, esto es :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t} \equiv \Omega_r{}^s \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^t} \quad , \qquad \text{(III.3.9a)}$$

y también :

$$\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \dot{q}^r \partial q^t} \dot{q}^t + \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial l}{\partial q^r} \equiv \Omega_r{}^s \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial q^t} \dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^s} \right] . \quad \text{(III.3.9b)}$$

De modo que tenemos dos conjuntos de ecuaciones diferenciales acopladas para l y Ω de las - cuales, al ser integradas, obtendremos, en prin cipio, el "lagrangianito" l y los elementos de la matriz Ω . Finalmente, introduciendo l en la expresión (III.3.1), obtendremos el lagrangiano L' que es s-equivalente con el lagrangiano L, el cual, repetimos, hemos supuesto como conocido.

Observación: En este trabajo no nos hemos propuesto ofrecer una solución general del sistema de ecuaciones formado por (III.3.9a,b) , si es que se puede hablar de una solución general del sistema, sin embargo sí se ha solucionado para algunos casos particulares, como se hará evidente con los ejemplos bidimensionales y tridimensional tratados con detalle en el Capítulo IV.

4.- El Teorema "Tradicional" de Equivalencia.

4a. Presentación usual en los textos.

En algunos libros de texto, e.g., [1,3] se hace mención al teorema que hemos denominado Teorema "Tradicional" de equivalencia esbozado en la Introducción de este capítulo, de hecho, en uno de estos textos [1] se expone de una manera "casi" libre de problemas de lenguaje, diciendo, a la letra :

"Sean $L(q,\dot{q},t)$ y $L'(q,\dot{q},t)$ dos lagrangianos tales que las ecuaciones de movimiento obtenidas de L son exactamente las mismas que aquellas obtenidas de L'. Entonces, L y L' difieren por la derivada total (formal) respecto al tiempo de alguna función de la forma $\phi(q,t)$."

Aun así, el enunciado se presta a confusión, pues en él no queda del todo claro lo que significa que las ecuaciones de movimiento sean "exactamente las mismas" para ambos lagrangianos, sobre todo en el caso multidimensional. Este problema se hará evidente en el siguiente ejemplo sencillo.

Consideremos un oscilador armónico bidimensional isotrópico ($\omega = 1$) ; el lagrangiano usual de este sistema es :

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \qquad \text{(III.4.1)}$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de L son:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \quad , \\ L_2 &\equiv \ddot{q}_2 + q_2 = 0 \quad . \end{aligned} \qquad \text{(III.4.2)}$$

Consideremos ahora el lagrangiano dado por * :

$$L' = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1 q_2 \quad . \qquad \text{(III.4.3)}$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de L' son:

$$\begin{aligned} L'_1 &\equiv L_2 \equiv \ddot{q}_2 + q_2 = 0 \quad , \\ L'_2 &\equiv L_1 \equiv \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \quad . \end{aligned} \qquad \text{(III.4.4)}$$

Vemos pues que con L y L' obtenemos "exactamente las mismas" ecuaciones de movimiento, sólo que intercambiadas (para q_1 y q_2) en el caso de L'; sin embargo, la diferencia de L' y L :

(*) Este lagrangiano fue obtenido por Gelman y Saletan [11], pág. 62; aunque también se obtiene fácilmente resolviendo las ecuaciones (III.3.9a,b) con $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y L dado en (III.4.1), descartando los términos $\dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1 = \frac{d}{dt}(q_1 q_2)$, que aparecen al obtener λ , y usando la relación (III.3.1).

$$l \equiv L' - L = -\tfrac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \tfrac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad , \quad \text{(III.4.5)}$$

no es la derivada total de alguna función de la forma $\phi(q_1,t)$; si lo fuera, las derivadas lagrangianas de l deberían ser idénticamente nulas, lo cual no sucede pues :

$$\begin{aligned} l_1 &\equiv L_2 - L_1 \equiv (\ddot{q}_2 + q_2) - (\ddot{q}_1 + q_1) \neq 0 \ , \\ l_2 &\equiv L_1 - L_2 \equiv (\ddot{q}_1 + q_1) - (\ddot{q}_2 + q_2) \neq 0 \ . \end{aligned} \qquad \text{(III.4.6)}$$

l_1 y l_2 se anulan, mas no idénticamente, en virtud de las ecuaciones de movimiento (III.4.2) ó (III.4.4) .

Del ejemplo es claro entonces que, el que las ecuaciones de movimiento para L y L' - sean "exactamente las mismas" (para que el - teorema sea válido) debe ser interpretado en el sentido de que la identidad :

$$L'_r \equiv L_r \quad , \qquad \text{(III.4.7)}$$

debe cumplirse para <u>cada</u> coordenada (q^r) del sistema mecánico en cuestión.

3b. Reinterpretación del Teorema "Tradicional" en términos de S-Equivalencia.

Con todo lo visto hasta ahora en este trabajo, es fácil darse cuenta de la íntima relación del Teorema "Tradicional" y las transformaciones de "norma" (Sección 2b. Cap. I y sección anterior) con el Teorema de S-Equivalencia y las transformaciones "1". Evidentemente, una transformación de "norma" es un caso particular de transformación "1" , cuando $l = -\frac{dF}{dt}$, con $F = F(q_i, t)$, en cuyo caso, la derivada lagrangiana de l respecto a la coordenada q^r , l_r , es idénticamente nula. Recordemos la identidad (III.2.2) :

$$L'_r \equiv \Lambda_r^{\ s} L_s \quad , \qquad \text{(III.2.2)}$$

y la identidad (III.3.3) :

$$l_r \equiv (\Lambda_r^{\ s} - \rho \delta_r^{\ s}) L_s \quad , \qquad \text{(III.3.3)}$$

donde escogemos $\rho = 1$ para que de L' y de L se obtengan "exactamente las mismas" ecuaciones de movimiento en el sentido explicado al final de la sección anterior, entonces :

$$l_r \equiv (\Lambda_r^{\ s} - \delta_r^{\ s}) L_s \quad . \qquad \text{(III.3.3a)}$$

Como $l_r = \left(-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^r}\right) \equiv 0$, de (III.3.3a) tenemos:

$$\Lambda_r{}^s \equiv \delta_r{}^s \qquad , \qquad \text{(III.4.8)}$$

y sustituyendo en (III.2.2) obtenemos :

$$L'_r \equiv \delta_r{}^s L_s \equiv L_r \quad ,$$

que es la expresión (III.4.7) , válida para cada coordenada (q^r) . Vemos entonces, que el - Teorema "Tradicional" es un caso particular del Teorema de S-Equivalencia, cuando Λ es la matriz identidad.

4o. Reformulación del Teorema "Tradicional".

Podemos, ahora sí, enunciar el Teorema "Tradicional" de equivalencia de una manera muy simple que además está completamente libre de posibles ambigüedades con el lenguaje de la siguiente manera :

Teorema : Dos lagrangianos, $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ y $L'(q_i, \dot{q}_i, t)$, son tales que :

$L_r \equiv L'_r$, (para cada coordenada q^r)

si y sólo si existe $\Psi(q_i, t)$ tal que :

$$L - L' \equiv \frac{d\Psi}{dt} .$$

Con esto damos por terminado el presente capítulo y pasamos ahora a la aplicación del Teorema de S-Equivalencia y las transformaciones "1" para la construcción explícita de lagrangianos s-equivalentes en dos y tres dimensiones.

CONSTRUCCION DE LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES.

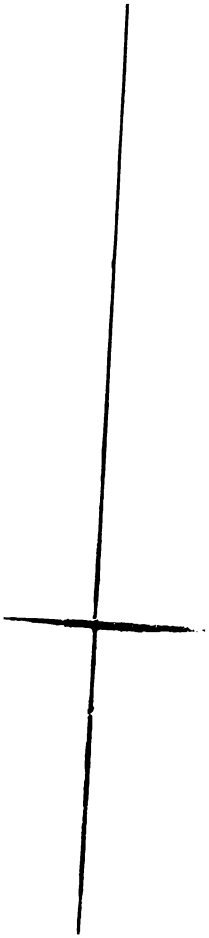
1.- Introducción.

A continuación, construiremos con ayuda de la teoría desarrollada en los capítulos precedentes, tres ejemplos de lagrangianos s-equivalentes, dos para el oscilador armónico bidimensional isotrópico y otro para el mismo sistema, pero tridimensional.

Los ejemplos son tales que la matriz $\Omega\,(\equiv \Lambda - \varphi\, I)$, definida en la expresión (III.3.4.) no es una matriz numérica, sino que sus elementos son cantidades dinámicas (*); además se verá en los ejemplos bidimensionales que, como en el caso unidimensional, al relajar la condición $\det(W'_{rs}) \neq 0$, seguiremos teniendo s-equivalencia.

El proceso empleado para la construcción de lagrangianos s-equivalentes, en rasgos generales, es el siguiente:
Buscamos solucionar las ecuaciones (III.3.9a,b) para 1 y Ω, teniendo como información adi-

(*) En los tres ejemplos, todos los elementos de Ω serán constantes de movimiento.



2.- Oscilador Armónico Bidimensional Isotrópico.
(Dos ejemplos)

Como ya hemos visto, el lagrangiano usual asociado a este sistema, escogiendo por simplicidad $\omega=1$, está dado por :

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad . \qquad (IV.2.1)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a L son entonces :

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \quad , \\ L_2 &\equiv \ddot{q}_2 + q_2 = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (IV.2.1a)$$

A partir de (IV.2.1) construiremos ahora otro lagrangiano L' , s-equivalente a L. Esto se logrará resolviendo las ecuaciones (III.3.9a,b) . De la expresión (IV.2.1) obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^t} = \delta_{st} \quad , && (a) \\ &\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial q^t} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^s \partial t} = 0 \quad , && (b) \qquad (IV.2.2) \\ &\cdot \frac{\partial L}{\partial q^s} = -q_s \quad . && (c) \end{aligned}$$

Con estas relaciones (IV.2.2), las ecuaciones (III.3.9) quedan :

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t} = \Omega_{rt} \quad , \qquad \text{(III.3.9a')}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^t} \dot{q}^t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^r} = \Omega_r{}^s q_s \ . \qquad \text{(III.3.9b')}$$

De la relación (III.3.9a') es claro que Ω es una matriz simétrica, en este caso; por otro lado, tenemos que $\mathrm{tr}\Omega$ y $\mathrm{tr}\,\Omega^2$ son constantes de movimiento, entonces, proponemos que la matriz Ω tenga la forma :

$$\Omega = \begin{pmatrix} E & C \\ C & E \end{pmatrix} \quad . \qquad \text{(IV.2.3)}$$

donde $E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$ es la energía total del oscilador y C es una cantidad aún por determinar ; con esta elección de Ω , tenemos que la condición $\mathrm{tr}\Omega$ = constante, se cumple inmediatamente, pues $\mathrm{tr}\Omega = 2E$ y la energía es conservada en este caso ; además $\mathrm{tr}\,\Omega^2 = 2(E^2 + C^2)$ = constante implica que C es una constante en el tiempo ; usaremos este hecho posteriormente para determinar C en forma explícita.

Con Ω dada en (IV.2.3) podemos escribir explícitamente las ecuaciones (III.3.9a',b') así:

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^1 + \dot{q}_1^1 + q_1^1 + q_1^1\right) \quad , \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^1 + \dot{q}_1^1 + q_1^1 + q_2^1\right) \quad , \text{(b)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} = C \quad , \text{(c)} \quad \text{(IV.2.4)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = E q_1 + C q_2 \quad , \text{(d)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = C q_1 + E q_2 \quad . \text{(e)}$$

Una solución de estas ecuaciones es :

$$C = \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 q_2$$

$$1 = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) +$$

$$+ q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) \quad .$$

Esta solución será obtenida explícitamente a - continuación.

.....

Integrando la ecuación (IV.2.4a) obtenemos:

$$\cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^1 + \dot{q}_1^1 + q_1^1 + q_1^1)\dot{q}_1 - \frac{1}{6}\dot{q}_1^3 + f_1(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) \quad ,$$

luego,

$$\cdot L^{(4)} = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_1^4 + q_1^4 + q_1^4)\dot{q}_1^4 - \frac{5}{24}\dot{q}_1^4 + f_1\dot{q}_1 + g_1(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) \quad . \qquad \text{(IV.2.5a)}$$

Similarmente, integrando (IV.2.4b) obtenemos:

$$\cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^1_{11}+\dot{q}^1_{12}+\dot{q}^1_{21}+\dot{q}^1_{22}\right)\dot{q}_{12} - \frac{1}{3}\dot{q}^3_1 + f_2\left(q_{11}, q_{12}, \dot{q}_{11}, t\right),$$

luego * ,

$$\cdot L^{(2)} = \frac{1}{4}\left(\dot{q}^2_{11}+\dot{q}^2_{12}+\dot{q}^2_{21}+\dot{q}^2_{22}\right)\dot{q}^2_{12} - \frac{c}{2\dot{q}_2}\dot{q}^4_{12} + \frac{1}{2}f_2\dot{q}^2_{12} + g_2\left(q_{11}, q_{12}, \dot{q}_{11}, t\right). \quad \text{(IV.2.5b)}$$

Ahora, usando (IV.2.5a) en (IV.2.4c) obtenemos:

$$\cdot \frac{\partial^2 L^{(1)}}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^2} = \dot{q}_{11}\dot{q}_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}^2_{12}} = C \quad ; \qquad \text{(IV.2.6a)}$$

usando (IV.2.5b) en (IV.2.4c) obtenemos :

$$\cdot \frac{\partial^2 L^{(2)}}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^2} = \dot{q}_{11}\dot{q}_{12} + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}^1_{21}} = C \quad . \qquad \text{(IV.2.6b)}$$

Combinando (IV.2.6a) con (IV.2.6b) resulta que:

$$\cdot \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}^2} = \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}^1} \quad . \qquad \text{(IV.2.6c)}$$

Ahora bien, C es constante en el tiempo, entonces, de las ecuaciones (IV.2.6a) y (IV.2.6b) tenemos :

$$\cdot \frac{d}{dt}\left[\dot{q}_{12}\dot{q}_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}^2}\right] = \frac{d}{dt}\left[\dot{q}_{11}\dot{q}_{12} + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}^1}\right] = 0 \quad ,$$

(*) Aunque $L^{(2)} \equiv L^{(2)} \equiv L$, se introduce esta notación para simplificar la identificación de estas funciones en el desarrollo de los cálculos.

es decir

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \ddot{q}_1\dot{q}_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1}\right) = \dot{q}_1\ddot{q}_1 + \ddot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0 \ ;$$

pero, usando las ecuaciones de movimiento para L_1 (IV.2.1a), tenemos que $\ddot{q}_1 = -q_1$ y $\ddot{q}_2 = -q_2$, luego :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1}\right) = \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(q_1 q_2) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1}\right) = \dot{q}_2 q_2 + q_1 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(q_2 q_1) \quad .$$

Integrando estas dos ecuaciones :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} = q_1 q_2 + c_1(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) \quad ,$$

porque $f_1 = f_1(q_1, q_2, \dot{q}_2, t)$;

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} = q_1 q_2 + c_2(q_2, q_2, \dot{q}_1, t) \quad ,$$

porque $f_2 = f_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, t)$; y donde $\dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0$, además, en virtud de (IV.2.oo), tenemos que $c_1 = c_2 = K(q_1, q_2, t)$, esto es, la dependencia de c_1 en $\dot{q}_2$ y la dependencia de c_2 en $\dot{q}_1$ deben desaparecer, luego :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} = q_1 q_2 + K(q_1, q_2, t) \quad . \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Ahora, con (IV.2.6a) ó (IV.2.6b) y (IV.2.7) , obtenemos :

$$C = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1q_2 + K(q_1,q_2,t) \quad . \qquad \text{(IV.2.6d)}$$

Ahora bien, integrando (IV.2.7) para f_1 y para f_2 , obtenemos * :

$$f_1 = q_1q_2\dot{q}_2 + K(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_2 + h_1(q_1,q_2,t) \quad , \qquad \text{(IV.2.8a)}$$

$$f_2 = q_1q_2\dot{q}_1 + K(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_1 + h_2(q_1,q_2,t) \quad . \qquad \text{(IV.2.8b)}$$

Sustituímos ahora (IV.2.8a) en (IV.2.5a) y - (IV.2.8b) en (IV.2.5b) y se tiene :

$$\mathcal{L}^{(1)} = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}q_1^2q_2^2 - \frac{g}{2R}\dot{q}_1^4 + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\ + K(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + h_1(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_1 + g_1(q_1,q_2,\dot{q}_2,t) \,, \qquad \text{(IV.2.9a)}$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}q_1^2q_2^2 - \frac{g}{2R}\dot{q}_2^4 + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\ + K(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + h_2(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_2 + g_2(q_1,q_2,\dot{q}_1,t) \,. \qquad \text{(IV.2.9b)}$$

Pero como $\mathcal{L}^{(1)} \equiv \mathcal{L}^{(2)}$, tenemos que $\mathcal{L}^{(1)} - \mathcal{L}^{(2)} \equiv 0$, luego :

(*) En (IV.2.8a), h_1 no puede depender de $\dot{q}_1$ porque $f_1 = f_1(q_1,q_2,\dot{q}_2,t)$, además no puede depender de $\dot{q}_2$ porque la integración parcial es respecto a $\dot{q}_2$. Un argumento similar se aplica a h_2 de (IV.2.8b).

$$0 \equiv \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_1^2 - \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2^2 - \tfrac{\varepsilon}{2M}(\dot{q}_1^4 - \dot{q}_2^4) +$$

$$+ h_1(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_1 - h_2(q_1,q_2,t)\,\dot{q}_2 + \mathcal{E}_1(q_1,q_2,\dot{q}_2,t) -$$

$$- \mathcal{E}_2(q_1,q_2,\dot{q}_1,t) \quad . \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Entonces, podemos "separar variables" así :

$$\mathcal{E}_1 - \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2^2 + \tfrac{\varepsilon}{2M}\dot{q}_2^4 - h_2\,\dot{q}_2 \equiv$$

$$\equiv \mathcal{E}_2 - \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_1^2 + \tfrac{\varepsilon}{2M}\dot{q}_1^4 - h_1\,\dot{q}_1 \quad , \qquad \text{(IV.2.11)}$$

donde el miembro izquierdo no depende de $\dot{q}_1$ mientras que el derecho no depende de $\dot{q}_2$, luego ambos miembros deben ser iguales a una función que no depende de $\dot{q}_1$ ni de $\dot{q}_2$, que llamamos $G = G(q_1,q_2,t)$, con lo cual escribimos, por ejemplo, del primer miembro de (IV.2.11) :

$$\mathcal{E}_1 - \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2^2 + \tfrac{\varepsilon}{2M}\dot{q}_2^4 - h_2\,\dot{q}_2 \equiv$$

$$\equiv G(q_1,q_2,t) \quad , \qquad \text{(IV.2.11a)}$$

de donde :

$$\mathcal{E}_1 \equiv \tfrac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2^2 - \tfrac{\varepsilon}{2M}\dot{q}_2^4 + h_2\dot{q}_2 + G \quad . \qquad \text{(IV.2.12)}$$

Sustituímos (IV.2.12) en (IV.2.9a) , y escribimos $\mathcal{L}^m \equiv \mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \tfrac{1}{2} q_1^2 \dot{q}_2^2 -$$

$$- \tfrac{\varepsilon}{2\pi}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + K \dot{q}_1 \dot{q}_2 + h_1 \dot{q}_1 + h_2 \dot{q}_2 + G \ ,$$

que, agrupando términos, se puede escribir :

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2\pi}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + \tfrac{1}{2} q_1^2 \dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) +$$

$$+ q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + K \dot{q}_1 \dot{q}_2 + h_1 \dot{q}_1 + h_2 \dot{q}_2 + G \ ; \qquad \text{(IV.2.13)}$$

recordando que K, h_1, h_2, G pueden ser, en principio, funciones de q_1, q_2, t.

Ahora usaremos las ecuaciones (IV.2.4d) y (IV.2.4e) , con $\mathcal{L}$ dado en la ecuación (IV.2.13), para determinar el carácter de las funciones K, h_1, h_2, G .

Las expresiones que necesitamos son:

$$\cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tfrac{1}{2} q_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial K}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 +$$

$$+ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \dot{q}_2 + \frac{\partial G}{\partial q_1} \ , \qquad \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tfrac{1}{2} q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial K}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \dot{q}_1 +$$

$$+ \frac{\partial h_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial G}{\partial q_2} \ , \qquad \text{(b)}$$

(IV.2.14)

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial q^1} \dot{q}_1 = q_1 \dot{q}_1^1 + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial k}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{\partial h_1}{\partial q^1} \dot{q}_1 \quad , \qquad (c)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial q^1} \dot{q}_1 = q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_1^2 + \frac{\partial K}{\partial q^1} \dot{q}_1^1 + \frac{\partial h_2}{\partial q^1} \dot{q}_1 \quad , \qquad (d)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial q^2} \dot{q}_2 = q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_2^1 + \frac{\partial K}{\partial q_2} \dot{q}_2^1 + \frac{\partial h_1}{\partial q^2} \dot{q}_2 \quad , \qquad (e)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial q_2} \dot{q}_2 = q_2 \dot{q}_2^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial K}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dot{q}_2 + \frac{\partial h_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 \quad , \qquad (f) \qquad (IV.2.14)$$

$$\cdot \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial t} \dot{q}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \dot{q}_2 + \frac{\partial G}{\partial t} \quad ,$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} \dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad , \qquad (g)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial t} = \frac{\partial K}{\partial t} \dot{q}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad . \qquad (h)$$

Trabajaremos primero con la ecuación (IV.2.4d) . Escribamos el miembro izquierdo de esta expresión con ayuda de las expresiones - (IV.2.14a,c,e,g) :

$$\cdot q_1 \dot{q}_1^2 - q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial K}{\partial q^1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial q^1} \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_2^1 + \frac{\partial K}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial K}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{2} q_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{\partial K}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 - \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \dot{q}_2 - \frac{\partial L}{\partial q^1} \equiv E q_1 + C q_2$$

que reagrupando y cancelando términos correspondientes queda :

$$-\tfrac{1}{2}q_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\ddot{q}_1^1+\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^1}\ddot{q}_2+\frac{\partial L}{\partial t}\dot{q}_1+\frac{\partial L_1}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial L_1}{\partial q^1}\dot{q}_2-\frac{\partial G}{\partial q^1}\equiv E q_1+C q_2 \quad ; \qquad \text{(IV.2.15)}$$

desarrollamos ahora el miembro derecho de (IV. 2.15) con ayuda de la relación (IV.2.6d) y recordando que $E=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2+q_2^2)$:

$$Eq_1+Cq_2=\tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\,q_1+\tfrac{1}{2}q_1^3+\tfrac{1}{2}q_1q_2^2+q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+Kq_2 \ .$$

Sustituyendo en (IV.2.15) tenemos, después de - cancelar y reagrupar términos correspondientes :

$$-\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2+\left(\frac{\partial L_1}{\partial q_2}-\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^1}+\frac{\partial K}{\partial t}\right)\dot{q}_2+\frac{\partial L_1}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q^1}\equiv$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}q_1^3+\tfrac{1}{2}q_1q_2^2+Kq_2 \quad ; \qquad \text{(IV.2.16)}$$

que por ser identidad nos da finalmente :

$$-\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}\equiv 0 \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^2}-\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^1}\equiv-\frac{\partial K}{\partial t} \quad ; \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.17)}$$

$$-\frac{\partial L_1}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q^1}\equiv\tfrac{1}{2}q_1^3+\tfrac{1}{2}q_1q_2^2+Kq_2 \ . \qquad \text{(c)}$$

Ahora trabajamos con la ecuación (IV.2. 4a). El miembro izquierdo de esta ecuación es, con ayuda de (IV.2.14b,d,f,h) :

$$\cdot q_1\dot{q}_1\ddot{q}_1 + q_1\dot{q}_1^2 + \frac{\partial k}{\partial q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial h_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\partial k}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\partial h_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial h}{\partial t}\dot{q}_1 +$$

$$+ \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{1}{2}q_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{\partial k}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{\partial h_2}{\partial q_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial h_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 - \frac{\partial q}{\partial q_1} = C q_1 + E q_2$$

que reagrupando y cancelando términos correspondientes, queda :

$$\cdot\frac{1}{2}q_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\partial k}{\partial q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial h_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial k}{\partial t}\dot{q}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} -$$

$$- \frac{\partial h_1}{\partial q_2}\dot{q}_1 - \frac{\partial q}{\partial q_2} \equiv C q_1 + E q_2 \quad ; \qquad \text{(IV.2.18)}$$

desarrollamos ahora el miembro derecho de (IV.2.16) con ayuda de (IV.2.6d) :

$$Cq_1 + Eq_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\, q_2 + \frac{1}{2}q_2^3 + \frac{3}{2}q_1^2 q_2 + q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + Kq_1 \cdot$$

Sustituyendo en (IV.2.18), después de cancelar y reagrupar términos correspondientes :

$$\cdot\frac{\partial k}{\partial q_2}\dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial k}{\partial t}\right)\dot{q}_1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial q_2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}q_2^3 + \frac{3}{2}q_1^2 q_2 + K q_1 \quad , \qquad \text{(IV.2.19)}$$

que por ser identidad nos da finalmente :

$$\cdot\frac{\partial k}{\partial q_2} \equiv 0 \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\cdot\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \equiv -\frac{\partial k}{\partial t} \quad , \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.20)}$$

$$\cdot\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial q_2} = \frac{1}{2}q_2^3 + \frac{3}{2}q_1^2 q_2 + K q_1 \quad . \qquad \text{(c)}$$

Entonces, de las ecuaciones (IV.2.17a) y (IV.2.20a) es claro que K no depende de q_1 ni de q_2 . También, de las ecuaciones (IV.2.17b) y (IV.2.20b) tenemos que :

$$\cdot \frac{\partial h_1}{\partial \dot{q}^2} - \frac{\partial h_2}{\partial \dot{q}^1} \equiv \frac{\partial h_2}{\partial q^1} - \frac{\partial h_1}{\partial q^2} \equiv - \frac{\partial k}{\partial t} \equiv 0 \ ,$$

luego K tampoco depende del tiempo, es decir, - K es sólo una constante numérica arbitraria * ; además, este mismo resultado nos dice que : $\frac{\partial h_1}{\partial \dot{q}^2} \equiv \frac{\partial h_2}{\partial \dot{q}^1}$, esto es, existe una función - $f = f(q_1, q_2, t)$ tal que $h_1 = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}$ y $h_2 \equiv \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}$, con - lo cual podemos escribir :

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial t} &\equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \ , \qquad \text{(a)} \\ \cdot \frac{\partial h_2}{\partial t} &\equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \ . \qquad \text{(b)} \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.21)}$$

Usando estos resultados en (IV.2.17c) y (IV.2.20c) , obtenemos :

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1}\left[\frac{\partial f}{\partial t} - G\right] \equiv \frac{1}{2} q_1^3 + \frac{3}{2} q_1 q_2^2 + k q_2 \ ,$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} - G\right] \equiv \frac{1}{2} q_2^3 + \frac{3}{2} q_2 q_1^2 + k q_1 \ ;$$

(*) Con este resultado y la relación (IV.2.6d), i.e., $C = \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 q_2 + K$, resulta inmediato que C es constante de movimiento, pues $\dot{C} = \dot{q}_2(\ddot{q}_1 + q_1) + \dot{q}_1(\ddot{q}_2 + q_2$ que es cero en virtud de las ecuaciones de movimiento (IV.2.1a).

que se pueden integrar fácilmente, dando como resultado :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - G = \frac{1}{\beta} q_1^4 + \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2 + K q_1 q_2 + F_1(q_2,t) \quad , \qquad (a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - G = \frac{1}{\beta} q_2^4 + \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2 + K q_1 q_2 + F_2(q_1,t) \quad , \qquad (b) \qquad (IV.2.$$

respectivamente. Como (IV.2.22a,b) son exactamente la misma función, podemos conocer el carácter de F_1 y F_2 igualando estas dos expresiones y haciendo una "separación de variables", así :

$$-\frac{1}{\beta} q_1^4 + F_1(q_2,t) = \frac{1}{\beta} q_2^4 + F_2(q_1,t) \quad ,$$

entonces:

$$-\frac{1}{\beta} q_1^4 - F_2(q_1,t) = \frac{1}{\beta} q_2^4 - F_1(q_2,t) = A(t) \quad ,$$

donde A(t) es una función que sólo depende del tiempo; entonces:

$$F_1(q_2,t) = \frac{1}{\beta} q_2^4 - A(t) \quad , \qquad (a)$$

$$F_2(q_1,t) = \frac{1}{\beta} q_1^4 - A(t) \quad . \qquad (b) \qquad (IV.2.23)$$

Sustituyendo (IV.2.23a) ó (IV.2.23b) en (IV.2.22a) ó (IV.2.22b), se tiene finalmente :

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - G = \frac{1}{\beta}(q_1^4 - q_2^4) + \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2 + K q_1 q_2 - A(t) \quad ,$$

de donde :

$$0 = -\tfrac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) - \tfrac{3}{4}q_1^2q_2^2 - Kq_1q_2 + A(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad . \quad (IV.2.24)$$

Sustituyendo (IV.2.24) en la expresión que tenía-mos para $\mathcal{L}$:(IV.2.13), y recordando que $h_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1}$, $h_2 = \frac{\partial f}{\partial q_2}$, resulta :

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \tfrac{1}{4}\dot{q}_1^2q_2^2 + \tfrac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) +$$

$$+ q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \tfrac{3}{4}q_1^2q_2^2 - \tfrac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) + K(\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial t} + A(t) \quad ;$$

pero, como $f = f(q_1, q_2, t)$, entonces, $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial t}$; luego los últimos cuatro términos de $\mathcal{L}$ tienen de-rivada lagrangiana idénticamente nula (cf. Sección 4, Capítulo III), entonces estos términos son irre-levantes al calcular las ecuaciones de movimiento asociadas a $\mathcal{L}$; por otro lado, el término $-K(\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2)$ no es más que el lagrangiano que - tratamos en el ejemplo expuesto en la Sección 4a. del Capítulo III, y prescindiremos de él en este ejemplo. Con todo lo anterior, escribimos finalmen-te un "lagrangianito" $\mathcal{L}$ así :

.....

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4+\dot{q}_2^4) + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) +$$

$$+ q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{3}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{6}(q_1^4+q_2^4) \quad . \qquad \text{(IV.2.25)}$$

Al calcular la derivada lagrangiana de $\mathcal{L}$ respecto a q_1 y q_2, obtenemos que las ecuaciones de movimiento asociadas con $\mathcal{L}$, son respectivamente :

$$\mathcal{L}_1 = \left[\tfrac{1}{3}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2+q_2^2)\right](\ddot{q}_1+q_1) + \quad (\ \dot{q}_1\dot{q}_2+q_1q_2\ )\ (\ddot{q}_2+q_2) = 0, \ \text{(a)}$$

$$\mathcal{L}_2 = \quad (\ \dot{q}_1\dot{q}_2+q_1q_2\ )\ (\ddot{q}_1+q_1) + \left[\tfrac{1}{3}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2+q_2^2)\right](\ddot{q}_2+q_2) = 0; \ \text{(b)}$$

(IV.2.26)

escribiendo $E = \frac{1}{3}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2+q_2^2)$ y $C = \dot{q}_1\dot{q}_2+q_1q_2$, podemos reescribir las ecuaciones (IV.2.26) en forma compacta así :

$$\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1\\ \mathcal{L}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & C\\ C & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad . \qquad \text{(IV.2.27)}$$

De esta relación es claro que si $L_r = 0$, $r = 1,2$, entonces $\mathcal{L}_s = 0$, $s = 1,2$, es decir, $\mathcal{L}$ es subordinado a L. Ahora, el determinante de la matriz

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix}E & C\\ C & E\end{pmatrix}$$ es :

$$\det.\Omega = E^2 - C^2 = (E-C)(E+C) \quad ; \qquad \text{(IV.2.28)}$$

pero esta cantidad es siempre mayor o igual que cero. Para visualizar claramente esto, definamos los vectores :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_i \ , \ q_i) \ , \ i = 1,2 \quad ; \qquad \text{(IV.2.29)}$$

es claro que:

$$\vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2) = E \quad , \quad \text{(a)}$$
$$2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2 = C \quad , \quad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.30)}$$

entonces :

$$(E-C)(E+C) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^2(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)^2 \geq 0 \quad ; \qquad \text{(IV.2.31)}$$

usando este resultado en (IV.2.28) tenemos que:

$$\det.\Omega = (E-C)(E+C) \geq 0 \ . \qquad \text{(IV.2.28a)}$$

Aquí se nos presenta el mismo problema (aparente) que teníamos cuando se trató el ejemplo unidimensional de s-equivalencia (Sección 3.Capítulo II), veamos; si $\det\Omega > 0$, Ω tiene inversa, por lo cual se puede asegurar que L es subordinado a $\mathcal{L}$ y por tanto, como teníamos que $\mathcal{L}$ es subordinado a L, $\mathcal{L}$ y L son s-equivalentes.

Ahora bien, si $\det\Omega = 0$, tenemos dos posibilidades, según (IV.2.28): $E = C$ y/o $E = -C$, o bien, según (IV.2.31): $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ y/o $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$.

Si $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, entonces $q_1 = q_2$ y $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ y tanto (IV.2.26a) como (IV.2.26b) se escriban como:

$$2(\dot{q}_1^2 + q_1^2)(\ddot{q}_1 + q_1) = 0 \quad ,$$

cuyas soluciones son $\ddot{q}_1 + q_1 = 0$, o $\dot{q}_1 = q_1 = 0$, que son soluciones particulares de (IV.2.1a), para el caso de un oscilador unidimensional o en reposo.

Ahora, si $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$, entonces $q_1 = -q_2$ y $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$, y las ecuaciones (IV.2.26) se transforman en:

$$2(\dot{q}_1^2 + q_1^2)(\ddot{q}_1 + q_1) = 0 \quad ,$$

y las soluciones constituyen casos particulares de (IV.2.1a) para un oscilador unidimensional - (oscilando en dirección ortogonal al anterior) o en reposo.

Por último, si $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ y $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$, entonces $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = 0$, luego $q_1 = q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, es decir, un oscilador en reposo.

Ahora, si consideramos la relación - - (III.3.1) , i.e., $L' = \rho L + \lambda$, ($\rho > 0$), las ecuaciones de movimiento son :

$$\begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E+\rho & C \\ C & E+\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y el determinante de la matriz Λ es :

$$\det \Lambda = (E+\rho)^2 - C^2 = (E^2 - C^2) + 2\rho E + \rho^2 > 0 ,$$

con lo cual tendremos s-equivalencia ya que Λ tiene inversa.

Con esta discusión damos por concluído este ejemplo y pasamos ahora a nuestro segundo ejemplo bidimensional. Trataremos también con el oscilador armónico isotrópico ($\omega=1$), pero ahora proponemos que la matriz $\mathcal{L}$ está dada por:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} C & E \\ E & C \end{pmatrix} \qquad , \qquad \text{(IV.2.33)}$$

donde E y C son las mismas cantidades del ejemplo anterior.

Con (IV.2.33) y L dado en (IV.2.1), las ecuaciones (III.3.9a,b) quedan explícitamente - así :

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} = \dot{q}_1 \dot{q}_1 + q_1 q_1 \quad , \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 \dot{q}_1 + q_1 q_1 \quad , \text{(b)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right) \quad , \text{(c)} \quad \text{(IV.2.34)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = C q_1 + E q_2 \quad , \text{(d)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = E q_1 + C q_2 \quad , \text{(e)}$$

Una solución de estas ecuaciones es :

$$\cdot \mathcal{L} = \frac{1}{6} \dot{q}_1 \dot{q}_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \tfrac{1}{2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 (q_1^2 + q_2^2) + \tfrac{1}{2} q_1 q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) -$$

$$- \tfrac{1}{2} q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2) \quad .$$

que obtendremos detalladamente a continuación.

.....

Integrando (IV.2.34a) se tiene:

$$\cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + q_1 q_2 \dot{q}_1 + f_1(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) \quad , \qquad \text{(IV.2.35a)}$$

luego:

$$\cdot \mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{6} \dot{q}_1^3 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} q_1 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 f_1 + g_2(q_1, q_2, \dot{q}_2, t) \quad . \quad \text{(IV.2.35b)}$$

Similarmente, integrando (IV.2.34b) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2^2 + q_1 q_2 \dot{q}_2 + f_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, t) \quad , \qquad \text{(IV.2.35c)}$$

luego :

$$L^{(4)} = \frac{1}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2^3 + \frac{1}{2}q_1 q_2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2 f_2 + g_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, t) \, . \qquad \text{(IV.2.35d)}$$

Ahora, de (IV.2.35a) y (IV.2.34c) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right) \quad ,$$

esto es,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) \quad ,$$

de donde:

$$f_1 = \frac{1}{6}\dot{q}_2^3 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_2 + h_1(q_1, q_2, t) \, . \qquad \text{(IV.2.36a)}$$

Similarmente, de (IV.2.35c) y (IV.2.34c) obtenemos :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right) \quad ,$$

luego,

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) \quad ,$$

de donde:

$$f_2 = \frac{1}{6}\dot{q}_1^3 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)\,\dot{q}_1 + h_2(q_1, q_2, t) \, . \qquad \text{(IV.2.36b)}$$

Sustituyendo (IV.2.36a,b) en (IV.2.35b,d) respectivamente, obtenemos :

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{6}\dot{q}_1^3\dot{q}_2 + \frac{1}{6}\dot{q}_2^3\dot{q}_1 + \tfrac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1h_1 + \varepsilon_2 \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2^3 + \frac{1}{6}\dot{q}_2\dot{q}_1^3 + \tfrac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_2h_2 + \varepsilon_1 \quad . \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.37)}$$

Ahora, como $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(2)}$, de las ecuaciones (IV.2.37) obtenemos :

$$\tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1h_1 - \varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_2h_2 - \varepsilon_2 \quad , \qquad \text{(IV.2.37c)}$$

donde se ha hecho una "separación de variables" con las velocidades ($\dot{q}$) , es decir, el miembro izquierdo de (IV.2.37c) contiene sólo términos con $\dot{q}_1$, mientras que el miembro derecho sólo contiene términos con $\dot{q}_2$, entonces, cada miembro es igual a la misma función, que llamaremos $G = G(q_1,q_2,t)$, con lo cual tenemos, por ejemplo:

$$\tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_2h_2 - \varepsilon_2 = G(q_1,q_2,t) \quad ,$$

de donde,

$$\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_2h_2 - G(q_1,q_2,t) \quad . \qquad \text{(IV.2.38)}$$

Sustituyendo (IV.2.38) en (IV.2.37a) y escribiendo $\mathcal{L}^{(n)} \equiv \mathcal{L}$ tenemos :

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + \tfrac{1}{4}\dot{q}_1\dot{q}_2(q_1^2+q_2^2) + \tfrac{1}{4}q_1q_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + \\ + \dot{q}_1 h_1 + \dot{q}_2 h_2 - G \quad , \qquad \text{(IV.2.39)}$$

donde h_1 , h_2 , G son funciones de q_1 , q_2 , t , cuyas características determinaremos a continuación, con ayuda de las ecuaciones (IV.2.34d,e). Calculamos primero todos los términos que necesitamos para escribir las ecuaciones mencionadas, - con $\mathcal{L}$ dado en (IV.2.39) :

$$\cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_2(\tfrac{1}{3}\dot{q}_1^2 - \tfrac{1}{4}\dot{q}_2^2) + \dot{q}_1\frac{\partial h_1}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial G}{\partial q_1} \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_1(\tfrac{1}{3}\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{4}\dot{q}_1^2) + \dot{q}_1\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \dot{q}_2\frac{\partial h_2}{\partial q_2} - \frac{\partial G}{\partial q_2} \quad , \qquad \text{(b)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1}\dot{q}_1 \equiv \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \quad , \qquad \text{(c)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1}\dot{q}_1 \equiv \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1\frac{\partial h_2}{\partial q_1} \quad , \qquad \text{(d)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial q_2}\dot{q}_2 \equiv \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2\frac{\partial h_2}{\partial q_2} \quad , \qquad \text{(e)} \qquad \text{(IV.2.40)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2}\dot{q}_2 \equiv \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \quad , \qquad \text{(f)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1 \partial t} \equiv \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad , \qquad \text{(g)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2 \partial t} \equiv \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad , \qquad \text{(h)}$$

De la ecuación (IV.2.34d) , usando (IV.2.40a,c,e,g) y el valor de $\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$ calculado en el ejemplo -

anterior, encontramos que :

$$\dot{q}_2\left(\frac{\partial h_1}{\partial q^2}-\frac{\partial h_2}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q^1}=\frac{3}{2}q_2q_1^2+\frac{1}{2}q_2^3 \quad , \qquad \text{(IV.2.41)}$$

que por ser identidad nos da :

$$\frac{\partial h_1}{\partial q^2}-\frac{\partial h_2}{\partial q^1}=0 \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q^1}=\frac{3}{2}q_2q_1^2+\frac{1}{2}q_2^3 \quad . \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.42)}$$

Similarmente, con la ecuación (IV.2.34e), usando (IV.2.40b,d,f,h) , y el valor de $Eq_1 + Cq_2$ calculado en el ejemplo anterior, encontramos :

$$\dot{q}_1\left(\frac{\partial h_2}{\partial q^1}-\frac{\partial h_1}{\partial q^2}\right)+\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q^2}=\frac{3}{2}q_1q_2^2+\frac{1}{2}q_1^3 \quad , \qquad \text{(IV.2.43)}$$

que por ser identidad nos da :

$$\frac{\partial h_2}{\partial q^1}-\frac{\partial h_1}{\partial q^2}=0 \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q^2}=\frac{3}{2}q_1q_2^2+\frac{1}{2}q_1^3 \quad . \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.44)}$$

Entonces, vemos que las expresiones (IV.2.42a) y (IV.2.44a) son exactamente las mismas, i.e., $\frac{\partial h_1}{\partial q^2}=\frac{\partial h_2}{\partial q^1}$, lo que implica que existe alguna función, que llamamos $f=f(q_1,q_2,t)$, tal que $h_1=\partial f/\partial q^1$ y $h_2=\partial f/\partial q^2$, con lo cual podemos escribir :

$$\cdot \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) , \qquad \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) ; \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.45)}$$

con lo que podemos reescribir las expresiones (IV.2.42b) y (IV.2.44b) así :

$$\cdot \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + G\right] \equiv \frac{3}{2} q_2 q_1^2 + \dot{q}_2^3 \quad ,$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + G\right] \equiv \frac{3}{2} q_1 q_2^2 + \dot{q}_1^3 \quad ;$$

que se integran fácilmente respecto a q_1 y q_2 , dando como resultado :

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial t} + G \equiv \dot{q}_2 q_1^3 + \dot{q}_2^3 q_1 + P_1(q_2, t) \quad , \text{(a)}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial t} + G \equiv \dot{q}_1 q_2^3 + \dot{q}_1^3 q_2 + P_2(q_1, t) \quad , \text{(b)} \qquad \text{(IV.2.46)}$$

respectivamente. Como (IV.2.46a,b) son exactamente la misma función, resulta que :

$$P_1(q_2, t) \equiv P_2(q_1, t) \equiv A(t) \quad ,$$

es decir, no hay dependencia de P_1 en q_2 ni de P_2 en q_1 , entonces ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + G \equiv \dot{q}_1 q_2^3 + \dot{q}_2 q_1^3 + A(t) \quad ,$$

o bien :

$$G \equiv \dot{q}_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2) - \frac{\partial f}{\partial t} + A(t) \, . \qquad \text{(IV.2.47)}$$

Sustituyendo (IV.2.47) en la expresión para $\mathcal{L}$, i.e., (IV.2.39) y recordando que $h_1 \equiv \partial f/\partial q_1$ y $h_2 \equiv \partial f/\partial q_2$, obtenemos :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c}\dot{q}_1\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2(q_1^2+q_2^2) + \frac{1}{2}q_1q_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) -$$

$$- \frac{1}{2}q_1q_2(q_1^2+q_2^2) + \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial t} - A(t) \quad ,$$

donde los últimos cuatro términos se pueden re-escribir como :

$$\frac{df}{dt} - A(t) \quad ,$$

que resultan irrelevantes al calcular las derivadas lagrangianas asociadas con $\mathcal{L}$, de modo que nuestro "lagrangianito" es finalmente :

.....

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c}\dot{q}_1\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2(q_1^2 + q_2^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}q_1q_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}q_1q_2(q_1^2 + q_2^2) \quad . \qquad \text{(IV.2.48)}$$

Al calcular la derivada lagrangiana de $\mathcal{L}$ respecto a q_1 y q_2, obtenemos las ecuaciones de movimiento asociadas con $\mathcal{L}$, que son, respectivamente :

$$\mathcal{L}_1 \equiv \left(\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2 \right)\left(\ddot{q}_1 + q_1\right) + \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right)\left(\ddot{q}_2 + q_2\right) = 0 \ , \quad \text{(a)}$$

$$\mathcal{L}_2 \equiv \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right)\left(\ddot{q}_1 + q_1\right) + \left(\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2 \right)\left(\ddot{q}_2 + q_2\right) = 0 \ ; \quad \text{(b)}$$

(IV.2.49)

escribiendo $E = \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right)$ y $C = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2$, podemos reescribir las ecuaciones (IV.2.49) en - forma compacta así :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C & E \\ E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \qquad \text{(IV.2.50)}$$

Usando argumentos similares a aquellos usados al final de nuestro primer ejemplo, da- da la similitud de las matrices $\mathcal{M}$ empleadas en ambos ejemplos, concluímos que aquí también se tiene σ-equivalencia, aún en el caso en que el determinante de la matriz $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} C & E \\ E & C \end{pmatrix}$ sea nulo.

Pasemos ahora al ejemplo tridimensional, que será también un oscilador armónico isotrópi co ($\omega = 1$).

3.- Oscilador Armónico Tridimensional Isotrópico.

El proceso empleado en los dos casos anteriores es perfectamente válido para el caso tridimensional, aunque los cálculos se hacen aún más largos que los anteriores. Otra manera de construir el lagrangiano s-equivalente con el lagrangiano usual de oscilador armónico tridimensional * se tiene aprovechando la simetría de la expresión bidimensional para el lagrangiano dado en la ecuación (IV.2.25) , respecto a las coordenadas (q_1,q_2) y las velocidades $(\dot{q}_1,\dot{q}_2)$.

Veremos a continuación que "simetrizando" esta expresión (IV.2.25) para la tercera coordenada (q_3) se obtiene el lagrangianito tridimensional que nos permitirá a su vez construir el lagrangiano s-equivalente buscado.

El lagrangiano "usual" asociado al oscilador armónico tridimensional ($\omega=1$) es :

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) - \tfrac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+q_3^2) \quad ; \qquad (IV.3.1)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a él son entonces :

(*) Ver expresión (IV.3.1).

$$L_i \equiv \ddot{q}_i + q_i = 0 \quad ; \quad i=1,2,3. \qquad (IV.3.2)$$

Ahora, en analogía con el problema bidimensional, podemos esperar que la matriz Ω tenga la forma :

$$\Omega = \begin{pmatrix} E & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & E & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & E \end{pmatrix} \quad , \qquad (IV.3.3)$$

donde E es la energía total del oscilador : $E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)$ y las cantidades C_{ij} son constantes de la forma :

$$C_{ij} = \dot{q}_i\dot{q}_j + q_iq_j \quad , \; i\neq j \; ; \; i,j=1,2,3. \qquad (IV.3.4)$$

Transcribimos ahora la expresión (IV.2.25) para el lagrangianito bidimensional:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4+\dot{q}_2^4) + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + \\ + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{3}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{8}(q_1^4+q_2^4) \quad , \qquad (IV.2.25)$$

y "agregamos" los términos necesarios para que el lagrangiano tridimensional tenga esencialmente las mismas características (de forma y simetría) que el bidimensional * , obteniéndose entonces :

(*) Por supuesto se debe tener un lagrangiano tal que si se hace $\dot{q}_3 = q_3 = 0$, la expresión se reduzca al caso bidimensional.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4+\dot{q}_2^4+\dot{q}_3^4) + \tfrac{1}{8}(\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2+\dot{q}_1^2\dot{q}_3^2+\dot{q}_2^2\dot{q}_3^2) + \tfrac{1}{8}(q_1^2+q_2^2+q_3^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) +$$

$$+ q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1q_3\dot{q}_1\dot{q}_3 + q_2q_3\dot{q}_2\dot{q}_3 - \tfrac{3}{4}(q_1^2q_2^2+q_1^2q_3^2+q_2^2q_3^2) -$$

$$- \tfrac{1}{8}(q_1^4+q_2^4+q_3^4) \quad . \qquad \text{(IV.3.5)}$$

Calculando las ecuaciones de movimiento asociadas a este "lagrangianito", obtenemos:

$$\mathcal{L}_1 \equiv E\,(\ddot{q}_1+q_1) + C_{12}(\ddot{q}_2+q_2) + C_{13}(\ddot{q}_3+q_3) = 0 \ ,(a)$$

$$\mathcal{L}_2 \equiv C_{21}(\ddot{q}_1+q_1) + E\,(\ddot{q}_2+q_2) + C_{23}(\ddot{q}_3+q_3) = 0 \ ,(b) \quad \text{(IV.3.6)}$$

$$\mathcal{L}_3 \equiv C_{31}(\ddot{q}_1+q_1) + C_{32}(\ddot{q}_2+q_2) + E\,(\ddot{q}_3+q_3) = 0 \ ;(c)$$

que podemos reescribir en forma "compacta" así:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1\\ \mathcal{L}_2\\ \mathcal{L}_3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}E & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & E & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \ ; \qquad \text{(IV.3.7)}$$

con E la energía total del oscilador y C_{ij} definidos en (IV.3.4). En efecto, vemos que la matriz involucrada en (IV.3.7) es la misma que la expresada en (IV.3.3), como habíamos esperado.

Veremos ahora que sustituyendo $\mathcal{L}$ dado por (IV.3.5) en la relación (1.2.10), es decir: $L' = \varphi L + \mathcal{L}$, con $\varphi > 0$, se obtiene una "familia" de lagrangianos "equivalentes" con L. Para ver

---

(*) "parametrizado" con el factor φ.

esto claramente, mostraremos que $\det \Omega > 0$, - con lo cual, $\det \Lambda > 0$, es decir, Λ es invertible y se tiene s-equivalencia.

Introducimos, como en el caso bidimensional, los vectores :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}}(\dot{q}_i \, , \, q_i) \quad , \quad i=1,2,3, \tag{IV.3.8}$$

con lo cual, es fácil ver que :

$$\begin{aligned} E &= \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \vec{u}_3^2 \quad . && \text{(a)} \\ c_{ij} &= 2\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \quad . && \text{(b)} \end{aligned} \tag{IV.3.9}$$

Escribamos ahora el determinante de Ω en términos de estas últimas cantidades * :

$$\det \Omega = \begin{vmatrix} E & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & E & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & E \end{vmatrix} = E^3 \begin{vmatrix} 1 & c_{12}/E & c_{13}/E \\ c_{21}/E & 1 & c_{23}/E \\ c_{31}/E & c_{32}/E & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det \Omega = E^3 \begin{vmatrix} 1 & 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2/E & 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3/E \\ 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2/E & 1 & 2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3/E \\ 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3/E & 2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3/E & 1 \end{vmatrix} . \tag{IV.3.10}$$

(*) Esto es siempre posible si $E \neq 0$. Si $E=0$, entonces $\vec{u}_i = 0$, $\forall$ i y se tiene el oscilador en reposo.

Mostramos ahora que cada "elemento" del determinante (IV.3.10) se puede escribir como un producto escalar de vectores unitarios, con lo cual, $-\det\Omega$ resulta ser el cuadrado de un triple producto escalar (producto caja) multiplicado por $-E^3$. Para lograr esto, mostraremos primero que las cantidades $2\hat{u}_i\cdot\hat{u}_j/E$ están acotadas así :

$$-1 \leq 2\hat{u}_i\cdot\hat{u}_j/E \leq 1 \quad , \tag{IV.3.11}$$

lo cual implica que existen ciertos vectores unitarios, $\hat{v}_i$, tales que :

$$\begin{aligned} &\hat{v}_i\cdot\hat{v}_j = \cos\theta_{ij} = 2\hat{u}_i\cdot\hat{u}_j/E \quad , && \text{(a)} \\ &\hat{v}_i\cdot\hat{v}_i = 1 \quad , \; i=1,2,3 \quad , && \text{(b)} \end{aligned} \tag{IV.3.12}$$

donde θ_{ij} es el ángulo entre los vectores $\hat{v}_i$, $\hat{v}_j$.

Consideremos la expresión :

$$(\vec{u}_i - \vec{u}_j)^2 + \hat{u}_k^2 \geq 0 \quad , \tag{IV.3.13a}$$

donde $i\neq j\neq k\neq i$; $i,j,k=1,2,3$. La desigualdad es obviamente válida, pues se trata de una suma de cuadrados. Desarrollando el primer cuadrado y reacomodando términos, tenemos :

$$E = \hat{u}_i^2 + \hat{u}_j^2 + \hat{u}_k^2 \geq 2\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \quad ,$$

de donde se obtiene inmediatamente que :

$$1 \geq 2\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j / E \quad . \qquad \text{(IV.3.14a)}$$

Ahora consideremos la desigualdad :

$$-(\hat{u}_i + \hat{u}_j)^2 - \hat{u}_k^2 \leq 0 \quad , \qquad \text{(IV.3.13b)}$$

que también es obviamente válida. Desarrollando el primer cuadrado y reagrupando obtenemos :

$$-E \leq 2\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \quad ,$$

de donde,

$$-1 \leq 2\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j / E \quad . \qquad \text{(IV.3.14b)}$$

Combinando los resultados (IV.3.14a,b) obtenemos de inmediato la expresión (IV.3.11). Entonces, las expresiones (IV.3.12) son válidas y con ellas podemos reescribir (IV.3.10) así :

$$\det \mathcal{A} = E^3 \begin{vmatrix} \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_1 & \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 & \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_3 \\ \hat{v}_2 \cdot \hat{v}_1 & \hat{v}_2 \cdot \hat{v}_2 & \hat{v}_2 \cdot \hat{v}_3 \\ \hat{v}_3 \cdot \hat{v}_1 & \hat{v}_3 \cdot \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \cdot \hat{v}_3 \end{vmatrix} = E^3 \left[\hat{v}_1 x \hat{v}_2 \cdot \hat{v}_3 \right]^2 \geq 0 \quad , \qquad \text{(IV.3.15)}$$

puesto que lo encerrado es positivo o cero.

Ahora bien, la matriz Λ definida en la expresión (III.3.4) en términos de Ω , es : $\Lambda = \Omega + \rho I$; y con (IV.3.3) tenemos :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} E+\rho & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & E+\rho & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & E+\rho \end{pmatrix} \quad ; \qquad \text{(IV.3.16)}$$

mostramos ahora que si $\rho > 0$, entonces $\det\Lambda > 0$, con lo cual $L' = \rho L + \lambda$, serán lagrangianos s-equivalentes a L.

Calculemos entonces el determinante de Λ :

$$\det\Lambda = (E+\rho)\begin{vmatrix} E+\rho & C_{23} \\ C_{23} & E+\rho \end{vmatrix} - C_{12}\begin{vmatrix} C_{12} & C_{23} \\ C_{13} & E+\rho \end{vmatrix} + C_{13}\begin{vmatrix} C_{12} & E+\rho \\ C_{13} & C_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= (E+\rho)\left[(E+\rho)^2 - C_{23}^2\right] - C_{12}\left[C_{12}(E+\rho) - C_{13}C_{23}\right] + C_{13}\left[C_{12}C_{23} - C_{13}(E+\rho)\right]$$

$$= (E+\rho)^3 - C_{23}^2(E+\rho) - C_{12}^2(E+\rho) - C_{13}^2(E+\rho) + 2C_{12}C_{13}C_{23} =$$

$$= E^3 - (C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2)E + 2C_{12}C_{13}C_{23} + \left[(E^2 + 2E\rho + \rho^2) - (C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2)\right]\rho$$

$$= \det\Omega + \left[(E^2 + \rho^2) + E^2 - (C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2)\right]\rho \quad .$$

Ahora, en virtud de (IV.3.11) y recordando (IV.3.9b) tenemos que $E^2 \geq c_{1j} \geq C_{1j}^2$, entonces, $E^2 \geq C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2$, es decir,

$\mathfrak{K}^2 - (c_{12}^2+c_{13}^2+c_{23}^2) \geq 0$; además, si $\rho>0$, entonces $\mathfrak{K}\rho + \rho^2 > 0$, y recordando (IV.3.15), $\det\Omega \geq 0$, luego, finalmente :

$$\det\Lambda \geq 0 \quad ; \qquad \text{(IV.3.17)}$$

esto es, Λ es invertible y $L' = \rho L + \lambda$, $\rho > 0$, son lagrangianos s-equivalentes a L. Con lo cual concluímos este tercer ejemplo.

CONCLUSIONES.

Hemos demostrado que se puede definir un nuevo tipo de equivalencia entre funciones lagrangianas; equivalencia a nivel del conjunto de soluciones de las ecuaciones de movimiento, que es, en cierto sentido, una equivalencia más general que las que se habían estudiado antes. Obtuvimos además un teorema cuyas premisas se pueden utilizar para la construcción de lagrangianos s-equivalentes y para la obtención de constantes de movimiento del sistema mecánico en cuestión, cosa que hicimos explícitamente al tratar el ejemplo de oscilador armónico bidimensional y tridimensional.

Ahora bien, quedan aún muchos puntos por discutir e investigar relacionados con el problema aquí tratado. Entre los más inmediatos podríamos citar el problema (matemático) de resolver en forma general las ecuaciones diferenciales (III.3.9), si es que se puede hallar de una solución general; aunque por el momento, resulta importante notar que estas ecua

ciones se puedan solucionar para casos particulares como lo hemos visto en el Capítulo IV. Está también el problema de construir más ejemplos explícitos de lagrangianos s-equivalentes, que nos puedan dar una visión más clara de las consecuencias, dificultades y ventajas que pueda tener la Teoría de S-Equivalencia.

Otro punto importante que evidentemente requiere ser tratado es el paso a la Teoría Hamiltoniana para lagrangianos s-equivalentes, en particular, el paso de un lagrangiano a otro s-equivalente, da origen a transformaciones no canónicas, en general, en la Teoría Hamiltoniana.

Además, es posible que la s-equivalencia, a nivel clásico, tenga serias consecuencias sobre los formalismos que se conocen para efectuar el "paso cuántico" y también sobre la equivalencia de representaciones en Mecánica Cuántica. Es posible que en el caso de la transición a la Mecánica Cuántica, distintos lagrangianos s-equivalentes tengan distintos comportamientos dependiendo del hecho de que la -

matriz W sea o no invertible. Esta característica, en caso de ser relevante, puede originar otra subclasificación de lagrangianos s-equivalentes de acuerdo a la invertibilidad de W.

Otro punto sobre el cual posiblemente nos pueda ofrecer alguna información la s-equivalencia, es el problema de caracterización de "lagrangianos físicos" a diferencia de los "lagrangianos matemáticos".

Finalmente, queda el problema de ampliar los actuales resultados a otras teorías más problemáticas que la Mecánica Clásica, como son las Teorías de Campo y Teorías de Norma; pero, enfatizamos, todos estos puntos constituyen, por ahora, materia virgen para futuras investigaciones.

REFERENCIAS.

1.- Saletan, E.J., Cromer, A.H.; Theoretical Mechanics ; John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.

2.- Goldstein, H. ; Classical Mechanics ; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1950.

3.- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.; Mecánica (Volumen I del Curso de Física Teórica) ; Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1970.

4.- Lanczos, C.; The Variational Principles of Mechanics ; University of Toronto Press, Toronto, 1970.

5.- Sudarshan, E.C.G., Mukunda, N.; Classical Dynamics: A Modern Perspective ; John Wiley and Sons, New York, 1974.

6.- Currie, D.G., Saletan, E.J.; q-Equivalent Particle Hamiltonians.I. , J. Math. Phys., 7, N6, (junio 1966) , p. 967.

7.- Santilli, R.M.; Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Lagrangian in Field Theory.I.II.III. , Annals of Physics,

Vol. 103, p.354, (1977) ; Vol. 103, p.409, (1977) ; Vol. 105, p.227, (1977).

8.- Bolza, Oskar ; Lectures on the Calculus of Variations ; Dover, New York, 1961.

9.- Douglas, J.; Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations ; Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 50, p. 71, 1941.

10.- Mojsan, S., Marleston, H.; en preparación.

11.- Gelman, Y., Saletan, E.J.; a-Equivalent Particle Hamiltonians.II. ; Il Nuovo Cimento, 18B , 21, (noviembre 1973), p.62.

Otras referencias relacionadas con el tema, pero que no están citadas directamente en el trabajo, son:

1.- Currie, D.G., Saletan, E.J.; Canonical Transformations and Quadratic Hamiltonians ; Il Nuovo Cimento, 9B , 21, (mayo 1972), p.143.

2.- Marmo, G., Simoni, A.; Q-Dynamical Systems and Constants of Motion ; Lettere al Nuovo Cimento, Vol. 15 , 7S, (febrero 1976), p.179.

3.- Seriot, J.; Invariance and Conservation Laws for Dynamical Systems with one Degree of Freedom ; J. Math. Phys., Vol. 19, 25, (mayo 1978), p.1049.