



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

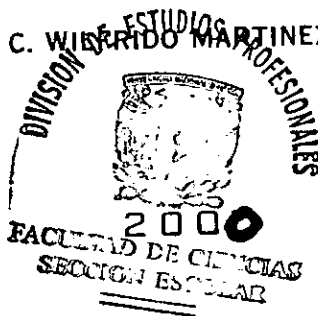
SOFTWARE INTERACTIVO
AUXILIAR DE CALCULO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A:
ESTEBAN RUBEN HURTADO CRUZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. WILFRIDO MARTINEZ TORRES



287100



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

SOFTWARE INTERACTIVO AUXILIAR DE CALCULO

realizado por ESTEBAN RUBEN HURTADO CRUZ

con número de cuenta 9251976-3 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

M. en C. WILFRIDO MARTINEZ TORRES

Wilfrido Martínez Torres

Propietario

MAT. JUANA MARIA LINARES ALTAMIRANO

Juana María Linares Altamirano

Propietario

FIS. MAT. HECTOR DE JESUS ARGUETA VILLAMAR

Hector de Jesús Argueta Villamar

Suplente

DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

Javier Páez Cardenas

Suplente

DR. CARLOS HERNANDEZ GARCIA DIEGO

Carlos Hernández García Diego

Hector Méndez Lango
Consejo Departamental de Matemáticas

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

Dedico esta tesis

A mi querida esposa Biol. Leticia Martínez Aguilar por apoyarme, impulsarme y por estar conmigo en las buenas y en las malas (Gracias mi vida).

A mi querido hijo Rubén Eduardo Hurtado Martínez por que llevo a darle felicidad a mi vida (te amo hijo).

A mis padres los Sres. Rubén Hurtado Angeles y Guadalupe Cruz de Hurtado que me enseñaron a luchar con todo mi corazón por mis metas y por darme tanto cariño y tanto amor (los quiero mucho).

A la memoria de mi querido hermano Ernesto Lemus Cruz que ya no esta aquí para compartir conmigo este momento muy importante de mi vida.

A la memoria de mi querida Abuelita María Clea Angeles Segovia a quien nunca voy a olvidar.

A mis segundos padres Demetrio Angeles Segovia y Carmen Mendiola.

A mi querida hermana la señorita C.P. Nora Claudia Hurtado Cruz por su incondicional apoyo que me ha brindado toda mi vida (Sin tu ayuda nunca lo hubiera logrado) Gracias.

A mis Hermanos Araceli, Diana, Mauricio, Omar, José Luis por compartir conmigo todos esos momentos difíciles.

A todos mis familiares, amigos y personas que han estado cerca de mi.

Finalmente todo mi agradecimiento a mi padre Jesús por que solo el sabe todo el trabajo que me costo mi carrera y por permitirme la vida para alcanzar esta preciada meta (No tengo palabras señor).

Quiero agradecer

Al M. En C. Wilfrido Martínez Torres por su infinita paciencia y apoyo en la revisión exhaustiva y detallada de este trabajo.

Al M. en C. Hector de Jesús Argueta Villamar y la M. en C. Juanita Linares Altamirano por todo el apoyo que me han brindado en todos los aspectos gracias.

Al Dr. Javier Paez Cárdenas por sus valiosos comentarios y sugerencias hacia este trabajo.

Al Dr. Carlos Hernandez Garciadiego por los valiosos comentarios hacia este trabajo.

A la DGSCA (Dirección General de Servicios de Computo Académico) por el apoyo económico brindado a este trabajo.

Al IMATE (Instituto de Matemáticas de la UNAM) por el apoyo económico brindado a este trabajo.

CONTENIDO

I. INTRODUCCION E INSTALACIÓN DEL PROGRAMA

1.1. ¿Qué es Software Interactivo Auxiliar de Calculo?.....	1
1.2. Requerimientos de Instalación	1
1.3. Instalación.....	1

11. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

11.1. GENERALIDADES DEL PROGRAMA

11.1.1. Opciones de la Pantalla de Inicio del Programa.....	2
11.1.2. Opciones del Menú Principal del Programa	3
11.1.3. Opciones de Hots Spots (Área caliente) y Arrastre de Objetos.....	4
11.1.4. Opciones de Hipertexto.....	5

11.2. PANTALLA DE PRESENTACIÓN DEL PROGRAMA

11.2.1. Botón Nota Importante de la Pantalla de Presentación del Programa.....	6
11.2.2. Hot Spot en la Pantalla Nota Importante.....	7
11.2.3. Botón Continuar en la Pantalla Nota importante.....	8
11.2.4. Hot Spot Datos del Autor en la Pantalla de Presentación del Programa.....	9
11.2.5. Botón Continuar en la Pantalla de Presentación del Programa.....	10

11.3. ESQUEMA TEMÁTICO GENERAL DEL PROGRAMA

11.3.1. Pantalla del Esquema Temático General del Programa.....	11
---	----

11.4. PANTALLA DEL MENÚ PRINCIPAL DEL PROGRAMA

11.4.1. Botón Continuidad acceso al Menú Principal del Programa.....	12
--	----

11.5. PANTALLA DEL MENÚ MAS SOBRE LA DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

11.5.1. Botón Mas Sobre la Definición de Continuidad.....	13
11.5.2. Botón Expresiones Equivalentes de Continuidad.....	14
11.5.3. Botón de Paginación en la Pantalla Expresiones Equivalentes de Continuidad.....	15
11.5.4. Botón Regresar en la Pantalla Expresiones Equivalentes de Continuidad.....	16
11.5.5. Botón Ejemplos en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad.....	17
11.5.6. Botón Ejemplo $f(x)=\text{Sen}(x)$ Función Seno de x	18
11.5.7. Hot Spot en la Pantalla Ejemplo $f(x) = \text{Sen}(x)$	19
11.5.8. Botón Regresar en la Pantalla $f(x) = \text{Sen}(x)$	20
11.5.9. Botón Regresar en la Pantalla del Menú Ejemplos.....	21
11.5.10. Botón Ejercicios en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad.....	22
11.5.11. Botón Solución en la Pantalla del Ejercicio 1.....	23
11.5.12. Botón Menú Anterior en la Pantalla Ejercicio 1.....	24
11.5.13. Botón Problemas en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad.....	25
11.5.14. Hot Text en la Pantalla Problemas.....	26
11.5.15. Botón Menú Anterior en la Pantalla Problemas.....	27
11.5.16. Botón Negación de la Definición de Continuidad.....	28
11.5.17. Hot Spot en la Pantalla Negación de La Definición de Continuidad.....	29
11.5.18. Botón Ejemplos en la Pantalla Negación de La Definición de Continuidad.....	30
11.5.19. Botón Demostración Ejemplo 1.....	31
11.5.20. Botón Regresar en la Pantalla del Ejemplo 1.....	32
11.5.21. Botón Regresar en la Pantalla de Ejemplos.....	33

11.5.22. Botón Ejercicios en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad.....	34
11.5.23. Botón Solución en la Pantalla Ejercicio 1.....	35
11.5.24. Botón Menú Anterior en la Pantalla Ejercicio 1.....	36
11.5.25. Botón Problemas en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad.....	37
11.5.26. Hot Text en la Pantalla Problemas.....	38
11.5.27. Botón Menú Anterior en la Pantalla Problemas.....	39
11.5.28. Botón Demostración en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad.....	40
11.5.29. Botón Regresar en la Pantalla Demostración.....	41
11.5.30. Botón Menú Anterior en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad.....	42
11.5.31. Botón Notas Históricas.....	43

I. INTRODUCCION

1.1. ¿ QUE ES SOFTWARE INTERACTIVO AUXILIAR DE CALCULO?

SOFTWARE INTERACTIVO AUXILIAR DE CALCULO es un programa para computadoras PC-compatibles, que sirve principalmente como una herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de **CONTINUIDAD** funciones reales de una variable real.

El programa, trata de abordar los aspectos formal, geométrico e histórico del concepto de continuidad de funciones de variable real, a través, del uso de herramientas multimedia, tales como Hipertexto, Arrastre de Objetos y Areas Calientes (Ventanas auxiliares que se activan al situar el cursor del Mouse en un área determinada).

1.2. INSTALACION

II.1. REQUERIMIENTOS

Requerimientos de hardware y software (equipo y programas) para usar el programa **SOFTWARE INTERACTIVO AUXILIAR DE CALCULO**

Computadora

IBM PC, POWER MAC

Sistema Operativo

Windows 95/98

Adaptador y Monitor compatible con uno de los siguientes

SVGA, Plug and Play

Memoria Ram

8 MB

Unidades de Disco

Disco duro

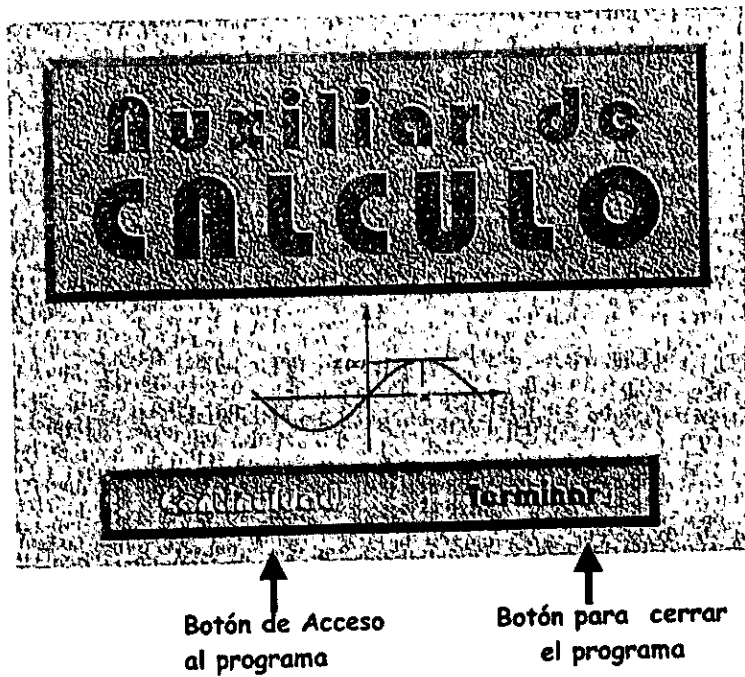
I.3. INSTALACION EL PROGRAMA CONTINUIDAD Y FUENTES

1. Insertar el CD de instalación
2. Ejecutar el programa **Instalar**
3. En la caja de dialogo que aparece dar la carpeta donde se desea instalar el programa por ejemplo en C:/ enseguida dar click en finish
4. Una vez instalado el programa, Instalar las fuentes de Math Type ejecutando el archivo Wintruetype que se encuentra en la carpeta donde se instalo el programa.

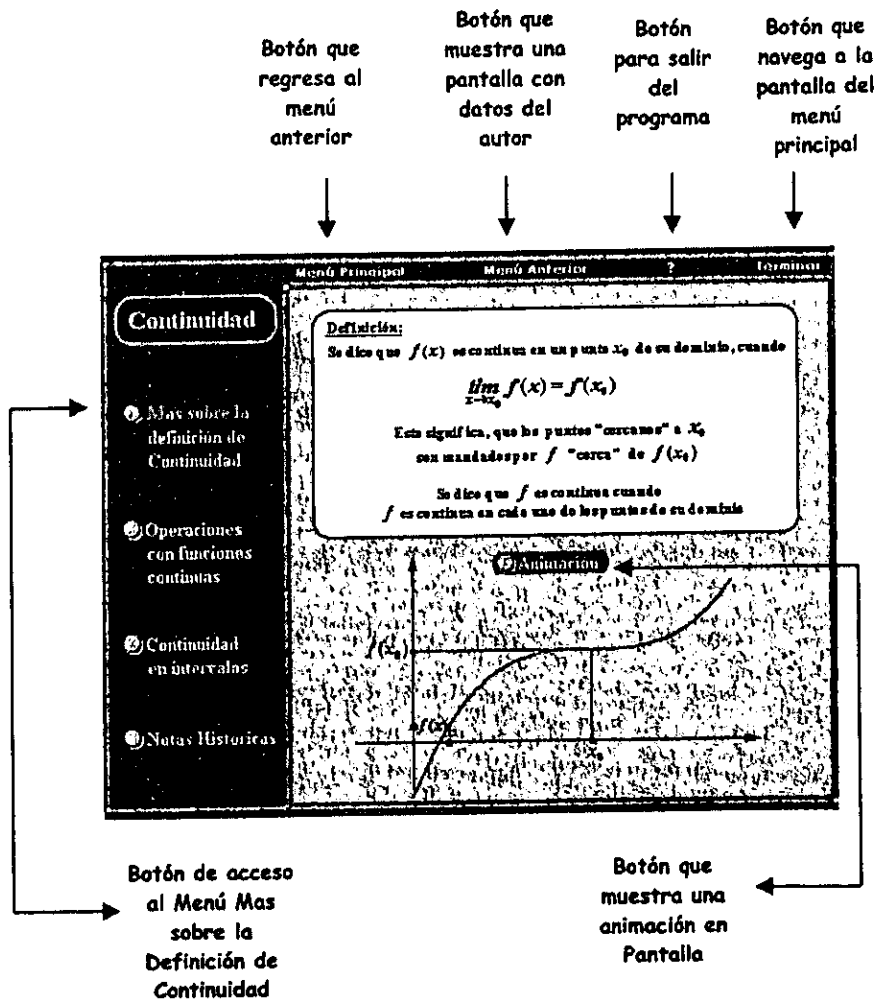
11. DESCRIPCION DEL PROGRAMA

11.1. GENERALIDADES DEL PROGRAMA

11.1.1.-Opciones en la Pantalla de Inicio del programa. En la pantalla de inicio del programa, se tienen las siguientes opciones



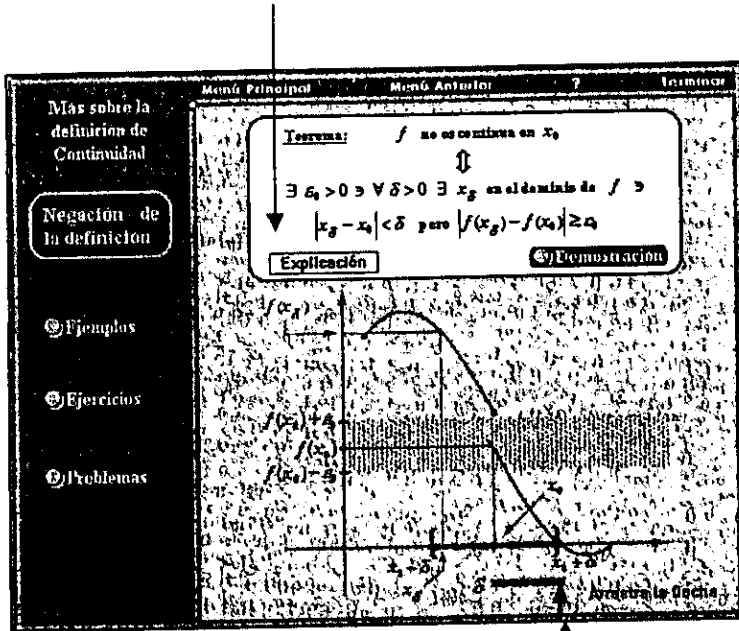
11.1.2. Opciones en el Menú Principal del Programa. En pantalla se presentan, diferentes opciones de navegación a través de botones de acción. Como se muestra abajo



11.2.3. Opciones de Hots Spots (Area Caliente) y Arrastre de Objetos. En algunas pantallas aparecen áreas limitadas por un rectángulo en color rojo, en el que al situar el puntero del Mouse, muestra información adicional de algún gráfico o de algún concepto.

También en algunas pantallas se tiene la opción de arrastre de objetos, donde al arrastrar un objeto en pantalla, se muestra información gráfica del concepto.

Hot Spot (Area caliente). Esta área se activa al situar sobre ella el puntero del Mouse



Objeto en pantalla que se puede arrastrar con un click sostenido del Mouse, que muestra información gráfica del concepto

11.1.4. Opciones de Hipertexto. En algunas pantallas aparecen textos en color rojo, que al dar click sobre ellos, muestran información adicional.

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

1. ¿ Para cuales λ existe una función continua F de todo \mathbb{R} tal que $F(x) = \lambda f(x) \forall x \in \text{Dom } f$?

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solución (i)

$F(x) = x + 2 \quad \forall x$

5

2 4


Remove Solución

Texto que al dar click en el, se muestra información adicional

11.2. PANTALLAS DE PRESENTACIÓN DEL PROGRAMA

Al correr el programa, aparece la siguiente pantalla, que muestra el título del trabajo, autor e instituciones que apoyaron el desarrollo del trabajo de tesis.

Al oprimir el botón Nota importante aparece en la pantalla el siguiente recuadro




Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota Importante Continuar

Nota:
Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, el autor recibió apoyo de la Dirección General de Servicios de Computación Académica de la UNAM.
Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, el autor y el director de tesis están recibiendo apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

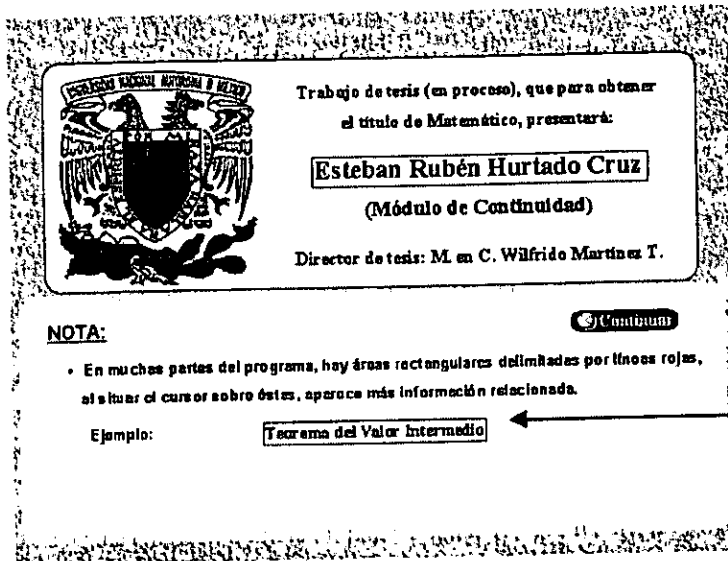
Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

NOTA: Continuar

- En muchas partes del programa, hay áreas rectangulares delimitadas por líneas rojas. Al situar el cursor sobre éstas, aparece más información relacionada.

Ejemplo: **Teorema del Valor Intermedio**

11.2.2. Hot Spot en la Pantalla Nota Importante



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

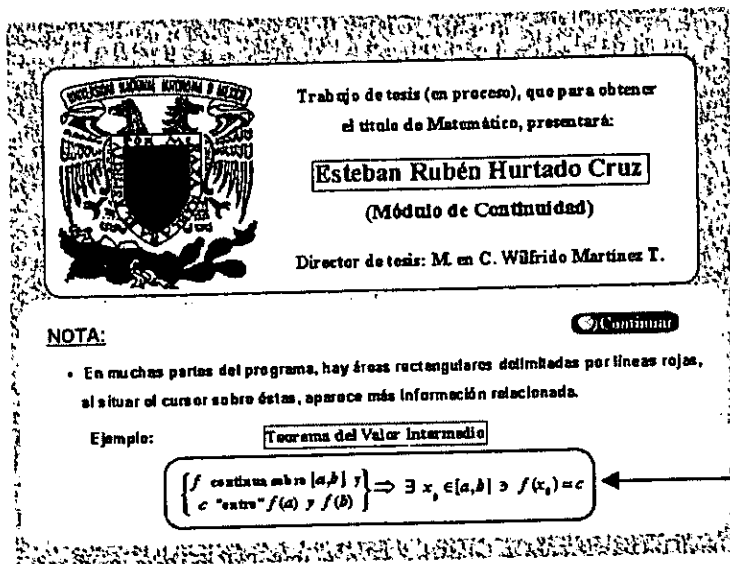
Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

NOTA: (Continuar)

- En muchas partes del programa, hay áreas rectangulares delimitadas por líneas rojas, al situar el cursor sobre éstas, aparece más información relacionada.

Ejemplo: Teorema del Valor Intermedio

Al pasar el cursor por el área limitada por el rectángulo (rojo) aparece el siguiente recuadro



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.


NOTA: (Continuar)

- En muchas partes del programa, hay áreas rectangulares delimitadas por líneas rojas, al situar el cursor sobre éstas, aparece más información relacionada.

Ejemplo: Teorema del Valor Intermedio

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua sobre } [a,b] \text{ y} \\ c \text{ "entre" } f(a) \text{ y } f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = c$$

11.2.3. Botón Continuar en la Pantalla Nota Importante



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemática, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

NOTA:


- En muchas partes del programa, hay áreas rectangulares delimitadas por líneas rojas, al situar el cursor sobre éstas, aparece más información relacionada.

Ejemplo:

Teorema del Valor Intermedio

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \text{ y} \\ c \text{ "entre"} f(a) \text{ y } f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = c$$

Al oprimir el botón de Continuar se pasa a la pantalla de inicio del programa



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemática, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

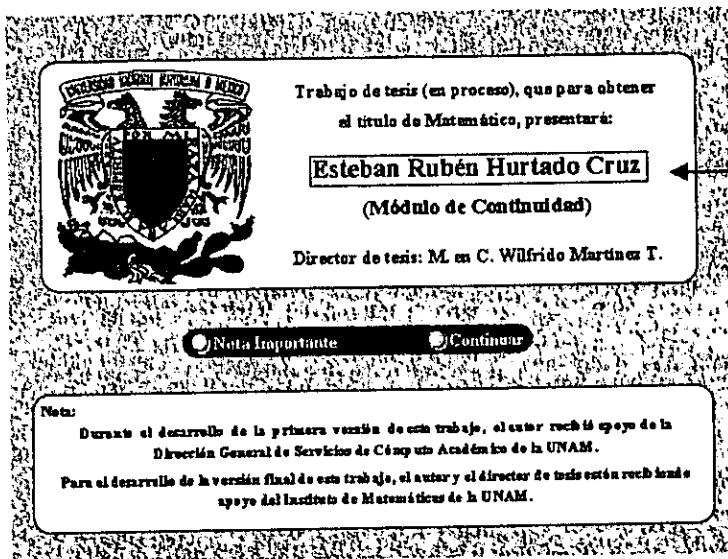
Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota:

Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, el autor recibió apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.

Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, el autor y el director de tesis están recibiendo apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

11.2.4. Hot Spots Datos del Autor en la Pantalla de Presentación del Programa



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota Importante Continuar

Nota:
Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, el autor recibió apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.
Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, el autor y el director de tesis están recibiendo apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Al pasar el cursor por el rectángulo (rojo), aparecen en la pantalla datos del autor



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)


Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota Importante Continuar

Nota:
Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, el autor recibió apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.
Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, el autor y el director de tesis están recibiendo apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Esteban Rubén Hurtado Cruz
Mail: ruben24@matmeda.com

11.2.5. Botón Continuar en la Pantalla de Presentación del Programa



Trabajo de tesis (en proceso), que para obtener el título de Matemático, presentará:

Esteban Rubén Hurtado Cruz
(Módulo de Continuidad)


Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota Importante Continuar

Nota:
Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, el autor recibió apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.
Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, el autor y el director de tesis están recibiendo apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

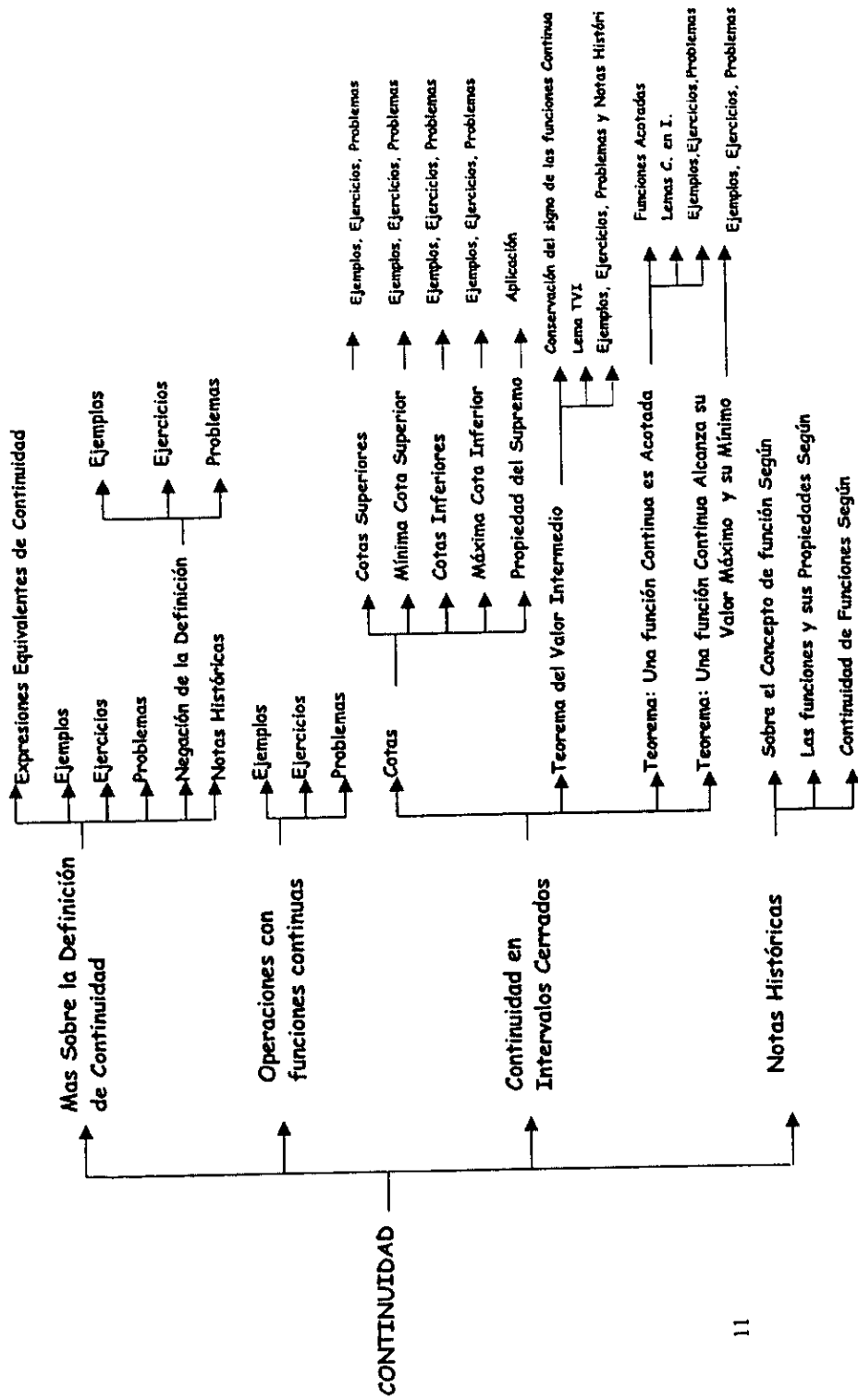
Al oprimir el botón de Continuar, se pasa a la pantalla del Menú principal

Auxiliar de CALCULO



Continuidad Teoría

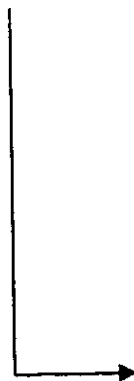
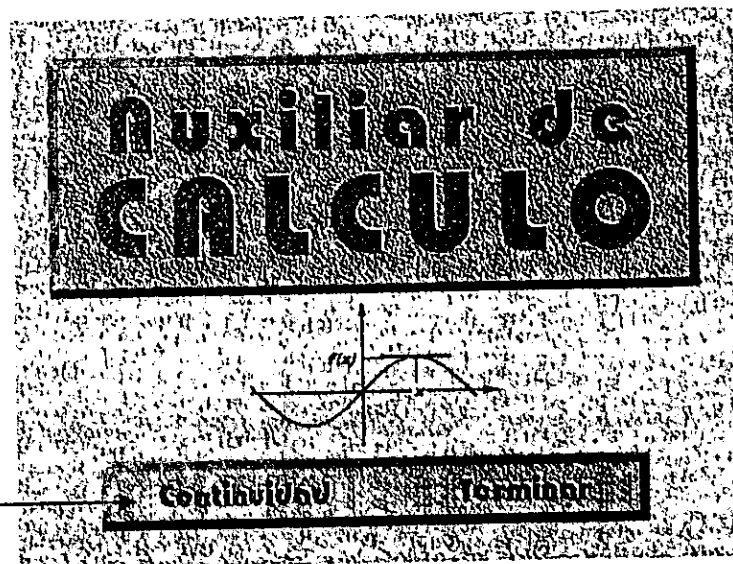
11.3. ESTRUCTURA TEMATICA DEL PROGRAMA



11.4. PANTALLA DEL MENU PRINCIPAL DEL PROGRAMA

11.4.1. Botón Continuidad acceso al Menú Principal del Programa

Al oprimir el botón de Continuidad se pasa a la pantalla del Menú Principal



A screenshot of the "Continuidad" menu screen. The screen is divided into two main sections. On the left is a dark sidebar with a menu. On the right is a white area with text and a graph.

Continuidad

- 1 Mas sobre la definicion de Continuidad
- 2 Operaciones con funciones continuas
- 3 Continuidad en intervalos
- 4 Notas Historicas

Definición:
Se dice que $f(x)$ es continua en un punto x_0 de su dominio, cuando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto significa, que los puntos "cerca" a x_0 son mapeados por f "cerca" de $f(x_0)$.

Se dice que f es continua cuando f es continua en cada uno de los puntos de su dominio.

Animación

A graph showing a continuous function $f(x)$ on a coordinate system. A point x_0 is marked on the x-axis, and its corresponding value $f(x_0)$ is marked on the y-axis. A vertical line connects x_0 to the curve, and a horizontal line connects $f(x_0)$ to the curve.

Nota aclaratoria. La manera en la que se navega a través de los contenidos de los temas del menú principal es muy semejante. Por lo que en este manual descriptivo solo se mostrara la navegación de los temas del menú Mas sobre la definición de continuidad

11.5. PANTALLA DEL MENU MAS SOBRE LA DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD.

11.5.1. Botón Mas Sobre la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón Mas sobre la definición de continuidad se pasa a la siguiente pantalla

Continuidad

- Mas sobre la definición de Continuidad
- Operaciones con funciones continuas
- Continuidad en intervalos
- Notas Históricas

Definición:
Se dice que $f(x)$ se aproxima en un punto x_0 , si se demuestran, cuando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto significa, que los puntos "curvas" a x_0 son mandados por f "cerca" de $f(x_0)$

Se dice que f se aproxima cuando f se aproxima en cada uno de los puntos de su dominio

Animación

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Históricas

Continuamos con, si que f se aproxima en x_0 , significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Arroja la Racha

11.5.2. Botón Expresiones Equivalentes de Continuidad

Opción de arrastrar con el puntero del Mouse un objeto en este caso la flecha, que al arrastrarse muestra una descripción geométrica de la definición de continuidad

Al oprimir el botón Expresiones equivalentes de continuidad pasamos a la siguiente pantalla

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Históricas

Geoméricamente, el que f sea continua en x_0 significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 Hay intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Arrastra la flecha

Más sobre la definición de Continuidad

Expresiones equivalentes de Continuidad

Regresar

Expresión 1 de 5 f es continua en x_0

\Leftrightarrow

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

11.5.3. Botón de Paginación en la Pantalla Expresiones Equivalentes de Continuidad

Al oprimir el botón flecha se pasa a otra pagina en la misma pantalla. En total son 5 paginas.

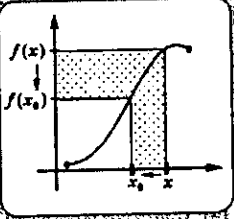
Más sobre la definición de Continuidad

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Expresiones equivalentes de Continuidad Regresar

Expresión 1 de 5 f es continua en x_0

↔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$


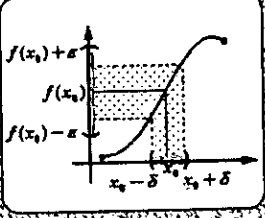
Más sobre la definición de Continuidad

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Expresiones equivalentes de Continuidad Regresar

Expresión 3 de 5 f es continua en x_0

↔

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni (x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$


11.5.4. Botón Regresar en la Pantalla Expresiones Equivalentes de Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Expresiones equivalentes de Continuidad **Regresar**

Expresión 3 de 5 f continua en x_0

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni (x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Al oprimir el botón regresar se pasa a la pantalla del menú Mas sobre la Definición de Continuidad

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- 1 Expresiones equivalentes de continuidad
- 2 Ejemplos
- 3 Ejercicios
- 4 Problemas
- 5 Negación de la definición
- 6 Notas Históricas

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Geométricamente, si que f sea continua en x_0 significa que :

\forall interval $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

11.5.5. Botón Ejemplos en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón de Ejemplos pasamos a la pantalla

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- **Ejemplos**
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Historicas

Geométricamente, el que f sea continua en x_0 significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \Rightarrow
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Arrastra la flecha

Más sobre la definición de función continua

Ejemplos

Regresar

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = mx + b$
- $f(x) = x^2 + 20$
- $f(x) = 1/x$

11.5.6. Botón Ejemplo $f(x) = \text{Sen}(x)$ Función Seno de x

Más sobre la definición de función continua

Menú Principal Menú Anterior ? Regresar

Ejemplos

<input type="radio"/> $f(x) = e$	<input type="radio"/> $f(x) = x$	<input checked="" type="radio"/> $f(x) = \text{Sen}(x)$
<input type="radio"/> $f(x) = \ln(x)$	<input type="radio"/> $f(x) = x^2 - 2$	<input type="radio"/> $f(x) = 1/x$

Al oprimir el botón de $f(x) = \text{seno}(x)$ se pasa a la siguiente pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Regresar

Ejemplos La función: $f(x) = \text{sen}(x) \forall x \in \mathbb{R}$, es continua.

Demostración:

Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$, sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \epsilon$. Entonces:

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| \leq |\cos(\frac{x+x_0}{2})| \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = \frac{|x-x_0|}{2}$$

Si $|x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \text{sen}(x) - \text{sen}(x_0) \right| < \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

$\Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \epsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Por lo tanto se cumple:

$\therefore f$ es continua sobre \mathbb{R}

11.5.7. Hot Spot en la Pantalla Ejemplo $f(x) = \text{Sen}(x)$

Al situar el cursor sobre esta área se muestra información adicional

Ejemplos Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

La función: $f(x) = \text{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ es continua. Regresar

Demostración:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \epsilon$. Tenemos que:

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| \leq 2 \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|$$

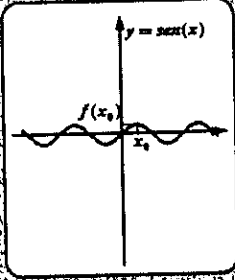
Si $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| \leq |x-x_0| < \delta = \epsilon$

$$\Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

f es continua en x_0 .

$\therefore f$ es continua sobre \mathbb{R}



Ejemplos Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

La función: $f(x) = \text{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ es continua. Regresar

Demostración:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \epsilon$. Tenemos que:

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| \leq 2 \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|$$

Ya que $|\cos(x)| \leq 1$

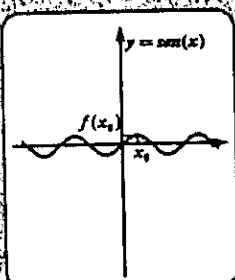
Si $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| \leq |x-x_0| < \delta = \epsilon$

$$\Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$


f es continua en x_0 .

$\therefore f$ es continua sobre \mathbb{R}



11.5.8. Botón Regresar en la Pantalla $f(x) = \text{Sen}(x)$

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplos La función: $f(x) = \text{sen}(x) \forall x \in \mathbb{R}$ es continua. 

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| = \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Ta que $|\cos(x)| \leq 1$

$$\leq \left| \text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| = \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = \frac{|x-x_0|}{2}$$

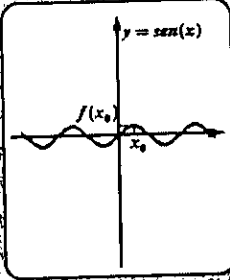
Si $|x-x_0| < \delta \rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \frac{\delta}{2} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

$$\Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

f es continua en x_0


$\therefore f$ es continua sobre \mathbb{R}

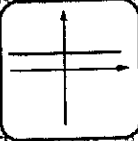
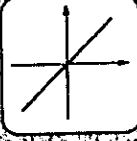

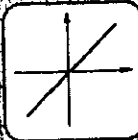




Al oprimir el botón de regresar se pasa a la pantalla del menú Ejemplos

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de función continua

Ejemplos 

 $f(x) = c$	 $f(x) = x$	 $f(x) = \text{Sen}(x)$
 $f(x) = mx + b$	 $f(x) = x^2 - 20$	 $f(x) = 1/x$

11.5.9. Botón Regresar en la Pantalla del Menú Ejemplos

Más sobre la definición de función continua

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplos Regresar

$f(x) = c$ $f(x) = x$ $f(x) = \sin(x)$
 $f(x) = mx + b$ $f(x) = x^2$ $f(x) = 1/x$

Al oprimir el botón de regresar se pasa a la pantalla del menú Más sobre la Definición de Continuidad

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Geométricamente, el que f sea continua en x_0 significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 Existe intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Arrastrable
Hecha

11.5.10. Botón Ejercicios en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón de Ejercicios se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Historicas

Geométricamente, si que f sea continua en x_0 , significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de función continua

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4

Encuentra el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Sugerencia Sugerencia 2 Gráfica Solución

?

11.5.11. Botón Solución en la Pantalla de Ejercicio 1

Más sobre la definición de función continua

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4

Encuentra el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Sugerencia Sugerencia 2 Gráfica Solución

?

Al oprimir el botón Solución se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de función continua

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4

Encuentra el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Sugerencia Sugerencia 2 Gráfica Solución

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x^2 = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (c - x^2) = c - \frac{1}{4}$$

$$\therefore f \text{ es continua en } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = c - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(c = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \right)$$

11.5.12. Botón Menú Anterior en la Pantalla de Ejercicio 1

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de función continua

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4

Encuentra el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Sugerencia Sugerencia 2 Gráfica Solución

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x^2 = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (c - x^2) = c - \frac{1}{4}$$

$$\therefore f \text{ es continua en } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = c - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(c = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \right)$$

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas históricas

Geométricamente, si que f sea continua en x_0 , significa que:

∃ interval $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 ∃ un interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \Rightarrow
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Atiende la flecha

11.5.13. Botón Problemas en la Pantalla del Menú Mas Sobre la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón de Problemas se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Históricas

Geométricamente, si una f sea continua en x_0 significa que :

\forall interval $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Arrastra la flecha

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

- 1.-¿ Para cuales

1.-¿ Para cuales de las siguientes funciones f existe una función continua F de dominio \mathbb{R} tal que $F(x) = f(x) \forall x \in \text{Dom } f$?

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2}$

(c) $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (función constante)

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (en \mathbb{R} se define $\frac{1}{0}$ como ∞)

11.5.14. Hot Text en la Pantalla Problemas

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

1.-2 Para cuales ✓

1.-2 Para cuales de las siguientes funciones f existe una función continua F de dominio \mathbb{R} tal que $F(x) = f(x) \forall x \in \text{Dom } f$?

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = 0, \forall x$ racionales

(iv) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ (función inversa)

Al oprimir la palabra Solución se pasa a la siguiente pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

1.-2 Para cuales ✓

1.-2 Para cuales de las siguientes funciones f existe una función continua F de dominio \mathbb{R} tal que $F(x) = f(x) \forall x \in \text{Dom } f$?

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = 0, \forall x$ racionales

(iv) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ (función inversa)

Solución de (i)

$F(x) = x + 2 \forall x$

Remover Solución

11.5.15. Botón Menú Anterior en la Pantalla Problemas

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

1.-¿ Para cuáles

1.-¿ Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F de dominio \mathbb{R} tal que $F(x) = f(x) \forall x \in \text{Dom } f$?

(i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$

(iii) $f(x) = 0$, si x es racional

Solución de (i)

$F(x) = x+2 \forall x$

Remover Solución

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

Expresiones equivalentes de continuidad

Ejemplos

Ejercicios

Problemas

Negación de la definición

Notas Históricas

Geoméricamente, el que f sea continua en x_0 significa que :

\forall intervalos $(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),

\exists un intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \implies

$f(D_f \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) \subset (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$

Arreglar la figura

11.5.16. Botón Negación de la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón Negación de la Definición se pasa a la siguiente pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Ayuda

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Históricas

Geométricamente, que f sea continua en x_0 significa que:

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \Rightarrow
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Menú Principal Menú Anterior ? Ayuda

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas

Teorema: f no es continua en x_0
 \Leftrightarrow
 $\exists \epsilon_0 > 0 \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \Rightarrow$
 $|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación **Demostración**

11.5.17. Hot Spot en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Al pasar el cursor del Mouse sobre esta área, se muestra información adicional

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

Teorema: f no es continua en x_0

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \text{ en el dominio de } f \ni |x_\delta - x_0| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$$

Explicación Demostración

$f(x)$

$f(x_0) + \epsilon_0$

$f(x_0)$

$f(x_0) - \epsilon_0$

δ Arrastra la flecha

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

Este significa que:

Existe un real positivo ϵ_0 para el cual existen puntos tan "cerca" a x_0 como se quiera cuyos "saltos" bajo f sean "altísimos" de $f(x_0)$ (a una distancia menor que δ).

Teorema: f no es continua en x_0

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \text{ en el dominio de } f \ni |x_\delta - x_0| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$$

Explicación Demostración

$f(x)$

$f(x_0) + \epsilon_0$

$f(x_0)$

$f(x_0) - \epsilon_0$

11.5.18. Botón Ejemplos en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón de Ejemplos se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

Ejemplos
 Ejercicios
 Problemas

Teorema: f no es continua en x_0
 \iff
 $\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \ni$
 $|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Arrastra la flecha

Al arrastrar esta flecha se muestra información adicional

Negación de la definición

EJEMPLOS

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es discontinua en 0

$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es discontinua en 0

11.5.19. Botón Demostración Ejemplo 1

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Regresar de la definición **EJEMPLOS** Regresar

$y = f(x)$

$y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en 0

Demostración

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en 0

Demostración

Al oprimir el botón de Demostración del ejemplo 1 se pasa a la siguiente pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Demostración $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ no es continua en $x_0 = 0$ Regresar

Demostración:

Sea $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$

Entonces:

$\forall \delta > 0: \exists x_0 = \frac{\delta}{2}$ falso que

$|x_0 - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ pero $|f(x_0) - f(0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$

$\therefore f$ no es continua en $x_0 = 0$

$y = f(x)$

x_0

f no es continua en $x_0 = 0$

11.5.20. Botón Regresar en la Pantalla del Ejemplo 1

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Demostración

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ no es continua en } x_0 = 0$$

Regresar

Demostración

Sea $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$

Entonces:

$$\forall \delta > 0 \exists x_0 = \frac{\delta}{2} \text{ tal que}$$

$$|x_0 - x_0| = |x_0 - 0| = |x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$|f(x_0) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geq \epsilon$$

$\therefore f$ no es continua en $x_0 = 0$

f no es continua en $x_0 = 0$

Al oprimir el botón de regresar se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Negación de la definición

EJEMPLOS

Regresar

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ no es continua en } 0$$

Demostración

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ no es continua en } 0$$

Demostración

11.5.21. Botón Regresar en la Pantalla de Ejemplos

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Negación de la definición **EJEMPLOS** Regresar

$y = f(x)$

$y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es discontinua en 0

Demostración

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en 0

Demostración

Al oprimir el botón Regresar, se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas

Teorema: f no es continua en x_0

⇕

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \ni$

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación Demostración

Atornavillo Rojo

11.5.22. Botón Ejercicios en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón de Ejercicios se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas

Menú Principal Menú Anterior ? (continúa)

Teorema: f no es continua en x_0

\Downarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \ni$

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación Demostración

Apriete la flecha.

Negación de la definición

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2

Menú Principal Menú Anterior ? (continúa)

Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Demuestre que f no es continua en $x_0 = 0$

Sugerencia Gráfica Solución

11.5.23. Botón Solución en la Pantalla del Ejercicio1

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Negación de la definición

Ejercicios

Ejercicio 1 ✓

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Demuestre que f no es continua en $x_0 = 0$

Sugerencia Gráfica Solución

Al oprimir el botón Solución se pasa a la siguiente pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Negación de la definición

Ejercicios

Ejercicio 1 ✓

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Demuestre que f no es continua en $x_0 = 0$

Sugerencia Gráfica Solución

Sea $\epsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$

Buscamos que $\forall \delta > 0$ $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ cumple que

$$|x_\delta - x_0| = \left| \frac{\delta}{2} - 0 \right| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{y}$$

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \left| \frac{\delta}{2} - (-1) \right| = \frac{\delta}{2} + 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon_0$$

$\therefore f$ no es continua en $x_0 = 0$

$y = f(x)$

11.5.24. Botón Menú Anterior en la Pantalla del Ejercicio1

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior Terminar

Negación de la definición

Ejercicios

● Ejercicio 1 ✓

● Ejercicio 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Demuestre que f no es continua en $x_0 = 0$

Sugerencia Gráfica Solución

Sea $\epsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$,

encuentre que $\forall \delta > 0$ $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ cumple que

$$|x_\delta - x_0| = \left| \frac{\delta}{2} - 0 \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| = \left| \frac{\delta}{2} - (-1) \right| = \frac{\delta}{2} + 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon_0$$

$\therefore f$ no es continua en $x_0 = 0$

$y = f(x)$

Menú Principal Menú Anterior Terminar

Mas sobre la definicion de Continuidad

Negacion de la definicion

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

Teorema: f no es continua en x_0

\iff

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de f :

$$|x_\delta - x_0| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$$

$f(x_\delta)$

$f(x_0) + \epsilon_0$

$f(x_0) - \epsilon_0$

x_δ δ

Atención la flecha

11.5.25. Botón Problemas en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ?

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

Teorema: f no es continua en x_0

\Downarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de f \rightarrow

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación Demostración

Activa la flecha

Menú Principal Menú Anterior ?

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

● 1.-(a) Hallar... ✓

● 2.-Dar un...

● 3.-Para todo...

1.-(a) Hallar una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$. cal

(b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ cal
pero continua en todos los demás puntos

(c) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ cal
y en 0 , pero que sea continua en todos los demás puntos

11.5.26. Hot Text en la Pantalla de Problemas

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

1. (a) Hallar... ✓
 2. Dar un...
 3. Para todo...

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

1.- (a) Hallar una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$. sol
 (b) Hallar una función f que sea discontinua en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
 pero continua en todos los demás puntos
 (c) Hallar una función f que sea discontinua en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
 y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos

Al oprimir el
 Texto Sol
 se pasa a la
 pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

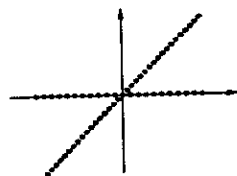
Problemas

1. (a) Hallar... ✓
 2. Dar un...
 3. Para todo...

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

1.- (a) Hallar una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$. sol
 (b) Hallar una función f que sea discontinua en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
 pero continua en todos los demás puntos
 (c) Hallar una función f que sea discontinua en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
 y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos

Solución de (a)
 Píngase $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$



Remover Solución

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA.

11.5.27. Botón Menú Anterior en la Pantalla de Problemas

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Problemas

- 1. (a) Hallar... ✓
- 2. Dar un...
- 3. Para todo...

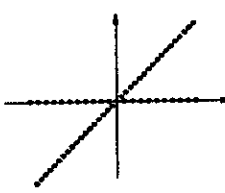
1. (a) Hallar una función f que no sea continua en ningún $a \in \mathbb{U}$. sol

(b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
y sea continua en todos los demás puntos

(c) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sol
y en 0 , pero que sea continua en todos los demás puntos

Solución de (a)

Por ejemplo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$



Remove Solución

Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas

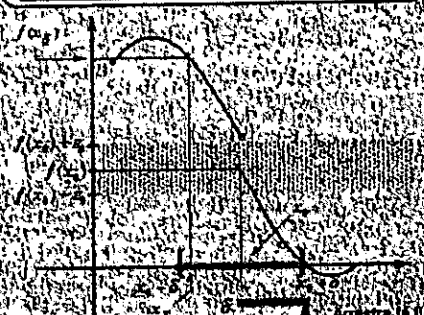
Teorema: f no es continua en x_0

\Downarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de f >

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación
 Demostración



11.5.28. Botón Demostración en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

Teorema: f no es continua en x_0

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \text{ en el dominio de } f \exists |x_\delta - x_0| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$$

Explicación Demostración

Al oprimir el botón Demostración se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

Teorema: f no es continua en x_0

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \text{ en el dominio de } f \exists |x_\delta - x_0| < \delta \text{ pero } |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$$

Regresar

Demostración:

\neg (continua en x_0) $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

por lo tanto:

f no es continua en $x_0 \Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f, |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f, |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f, |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f, |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

11.5.29. Botón Regresar en la Pantalla de Demostración

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Teorema: f no es continua en x_0 .

\Downarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \Rightarrow$

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Regresar

Demostración:

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$

por lo tanto

f no es continua en $x_0 \Leftrightarrow \neg (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \exists \text{ tal que } (\forall \delta > 0 \exists |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \text{ tal que } (|x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f \text{ tal que } (|x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0)$

$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D_f \text{ tal que } (|x_\delta - x_0| < \delta \wedge \forall \epsilon > 0 |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon)$

Al oprimir el botón Regresar se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

Teorema: f no es continua en x_0 .

\Downarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \exists \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \Rightarrow$

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación Demostración

Arriba de la flecha

11.5.30. Botón Menú Anterior en la Pantalla Negación de la Definición de Continuidad

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Continuidad

Negación de la definición

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

Teorema: f no es continua en x_0

\Leftrightarrow

$\exists \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0 \exists x_\delta$ en el dominio de $f \ni$

$|x_\delta - x_0| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$

Explicación ● Demostración

Atrás la flecha

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

● Expresiones equivalentes de continuidad

● Ejemplos

● Ejercicios

● Problemas

● Negación de la definición

● Notas Históricas

Geométricamente, el que f sea continua en x_0 significa que :

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),

\exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni

$f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Atrás la flecha

11.5.31. Botón Notas Históricas

Al oprimir el botón Notas Históricas se pasa a la pantalla

Continuidad

Más sobre la definición de Continuidad

- Expresiones equivalentes de continuidad
- Ejemplos
- Ejercicios
- Problemas
- Negación de la definición
- Notas Históricas**

Geométricamente, el que f sea continua en x_0 significa que:

\forall intervalo $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ en el eje de las y 's (con $\epsilon > 0$),
 \exists un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el eje de las x 's (con $\delta > 0$) \ni
 $f(D_f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Notas Históricas

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

La definición:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

es introducida por primera vez, a comienzos del siglo XIX por Cauchy, y es la que se adopta ahora en general en el análisis matemático contemporáneo.

Cauchy en su *Cours d'analyse algébrique* dice: "Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , et supposons que, pour chaque valeur de ϵ que se rencontre entre 2 limites (certaines) données, cette fonction prenne constamment un valeur finale y unique.

Si, en commençant avec un valeur de x comprise entre deux limites, on assigne à la variable x un accroissement infiniment petit, la fonction même prendra comme accroissement la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ el cual dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x ."