UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

METODO DE MULTIGRUPOS EN EL TRATAMIENTO DE LA ECUACION DE BOLTZMANN UNIDIMENSIONAL PARA EL TRANSPORTE DE NEUTRONES EN UN MEDIO HOMOGENEO, ISOTROPICO Y MULTIPLICATIVO.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

FERMIN CASTILLO MEJIA

MEXICO, D. F. 1990

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Pag.

INTRODUCCION 1

Capitulo 1

LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES 4

1.1 Definición y Notación 6

1.2 Sección Transversal Eficaz Macroscópica 8

1.3 Sección Diferencial y Función de Transferencia 10

1.4 La Ecuación de Transporte de Neutrones.....16

1.5 La Ecuación de Transporte de Neutrones Simplificada.....22

1.6 Condiciones a la Frontera.....25

1.7 La Ecuación de Transporte de Neutrones Simplificada 26
en Geometria Plana.

Capítulo 2

TRATAMIENTO DE LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES...31
POR EL METODO DE MULTIGRUPO.

2.1 El Término de Transferencia por Interacción.....33

2.2 La Solución General a la Ecuación de Transporte 37
de Neutrones Simplificada.

2.3 El Método de Multigrupos.....40

2.4 Desarrollo de la Función $\psi_i(B,\mu)$ en Polinomios de 46
Legendre.

2.5 La Ecuación Característica.....53

2.6 La Solución General para el i-ésimo Grupo de Energía.... 59
2.7 El Flujo de Neutrones y la Corriente de Neutrones..... 66
2.8 Condiciones a la Frontera..... 70
2.9 Métodos Iterativos para Obtener las Soluciones a las.... 78
Ecuaciones de Multigrupo.
2.10 Constantes de Grupo..... 81

Capítulo 3

RESULTADOS Y CONCLUSIONES..... 86

APENDICE A: 90

Propiedades Generales de los Polinomios de Legendre

REFERENCIAS..... 96

INTRODUCCION

La física de los reactores nucleares ha tenido un gran avance en los diversos campos de investigación teórica, experimental y tecnológica, con el objeto de desarrollar sistemas capaces de proporcionar energía suficiente para propósitos prácticos. En particular, la comprensión del comportamiento de los reactores nucleares ha sido de gran importancia en los últimos años. No obstante lo complejo de los reactores nucleares, se ha podido estructurar una teoría lo suficientemente completa como para diseñarlos y controlarlos. Sin embargo, esta teoría por lo general se basa en métodos aproximados y en la actualidad la búsqueda de soluciones analíticas para muchos casos todavía es un problema importante. El enfoque basado en la ecuación de Boltzmann o ecuación de transporte, la cual sólo ha sido resuelta analíticamente en casos simples y mediante el uso de métodos aproximados en casos más complejos, ha proporcionado gran cantidad de información.

El objetivo fundamental de este trabajo es el de tener una iniciación en el estudio de la teoría de transporte para neutrones en reactores nucleares, mediante la discusión del método de multigrupos para una geometría simple. Para esto, se principia (Capítulo 1) por mencionar las características principales que intervienen en el transporte de neutrones, en forma general, dentro del sistema (Reactor Nuclear) y con base a ellas se deduce la ecuación de transporte de neutrones correspondiente. Además se mencionan las suposiciones adecuadas para obtener una forma simple

de dicha ecuación, que será la base de este trabajo.

En el capítulo 2 se presenta el tratamiento de la ecuación de transporte de neutrones simplificada, empezando por el tratamiento de la dependencia espacial mediante el método de separación de variable, el cual no es válido en general, pero que se puede emplear dada la forma de la ecuación. Posteriormente utilizamos el método de Multigrupos para el tratamiento de la variable energética. Este método consiste en dividir en un número finito de subintervalos (o grupos) el intervalo de energías de interés (por lo general comprendido entre 0.01 ev y 10 Mev) donde se supone que las secciones eficaces, en cada uno de los grupos, son funciones constantes de la energía, o un promedio pesado sobre ella, eliminándose de esta forma la dependencia energética y obteniendo como veremos más adelante un sistema de ecuaciones acopladas cada una de ellas a una sola energía (llamadas ecuaciones de multigrupo). Estas ecuaciones pueden resolverse empleando el método polinomial (polinomios de Legendre) que consiste en expresar la dependencia angular del flujo angular de neutrones, por un desarrollo en polinomios de Legendre. Con esto obtenemos una ecuación algegraica (llamada ecuación secular) cuyas soluciones nos dan los valores del parámetro de separación de la variable espacial.

Con lo anterior y con las expresiones del desarrollo en polinomios obtenemos las soluciones de cada una de las ecuaciones de Multigrupos, las cuales son semianalíticas y para calcularse es necesario el empleo de computadoras.

Al final del capítulo 2 se discuten las condiciones a la - - frontera que se emplean para el cálculo de parámetros involucra-- dos en las soluciones. También se definen las "constantes de grupo" y se discute brevemente su significado, en dónde se emplean y cómo se calculan.

En el capítulo 3 se mencionan los resultados y conclusiones obtenidos.

Por último se hace notar que debido a la simbología empleada para denotar a la sección transversal eficaz macroscópica hemos - convenido en denotar con Σ al símbolo de la sumatoria.

CAPITULO I

LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES

El conocimiento detallado de la población de neutrones en un reactor nuclear, es decir, del número de netrones existentes en cada punto del sistema para cada dirección, energía y tiempo, es uno de los problemas planteados en la física los reactores nucleares, ya que con ello es posible conocer el comportamiento de los mismos y las medidas que hay que tomar para su control y diseño para su empleo con diversos propósitos. El problema de determinar las características de la población de neutrones es en gran parte simplificado por el hecho de que en muchos casos de interés ésta es tan grande que los neutrones pueden ser tratados como un fluido. Entonces, justo como en un gas, podemos hablar de la densidad de neutrones en el espacio y no tener que enfrentar el problema de seguir el movimiento de cada neutrón individualmente. La descripción matemáticas de esta distribución de neutrones se basa en una ecuación de balance, la ecuación de transporte de neutrones, la cual no es más que una forma de la ecuación de Boltzmann empleada en la descripción de gases. Dicha ecuación de transporte es tan complicada que las soluciones que se pueden encontrar por medio de técnicas analíticas corresponden sólo a sistemas físicos simples (donde la forma de la ecuación es sencilla y fácil de resolver); no así en el caso de sistemas más complejos (reales) donde se hace necesario utilizar técnicas semianalíticas o numéricas.

En términos cuantitativos, se trata de obtener la función de distribución $N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ que recibe el nombre de densidad angular de neutrones y depende de las variables: espacial, angular, energética y temporal. La expresión $N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{r}\,d\bar{\Omega}dE$ representa el número de neutrones presentes en el instante t, en el elemento de volumen $d\bar{r}$ situado en el extremo del vector de posición $\bar{r}$, moviéndose dentro del ángulo sólido $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ y con energías comprendidas en dE alrededor de E (1,2).

La ecuación de transporte de neutrones expresa un balance del número de neutrones que en el instante t, tienen una energía entre E y E+dE, en un elemento de volumen $d\bar{r}$, moviéndose dentro del ángulo sólido $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$. Dicho balance expresa que la diferencia entre la producción específica de neutrones de la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ y su pérdida específica, es la variación temporal de la densidad angular de dicha clase, es decir:

$$\frac{\partial N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)}{\partial t} = \text{rápidez de producción} - \text{rápidez de pérdidas} \qquad 1.1$$

donde:

Rápidez de producción = Ingresos por interacciones + Fuentes Externas, por unidad de tiempo.

Rápidez de pérdidas = Desapariciones por interacciones + Fugas, por unidad de tiempo.

Entendiéndose por ingresos por interacciones a todos aquellos neutrones que estando en otras clases, por ejemplo $(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ pasan

a formar parte de la clase considerada al interaccionar con el medio. El término fuentes externas, como su nombre lo indica, es el que nos representa la contribución de neutrones de medios externos a la clase considerada. En las pérdidas se entiende por desapariciones por interacciones a aquellos neutrones que pasan de la clase considerada $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ a otras clases por medio de interacciones con el medio, cambiando con ello su dirección o energía o ambas y por lo tanto desapareciendo de la clase. El término de fugas considera a aquellos neutrones que salen del elemento de volumen $d\bar{r}$ situado en el extremo del vector de posición $\bar{r}$ y por lo tanto se fugan de la clase considerada (1,2).

1.1 DEFINICIONES Y NOTACION

El primer paso en la formulación de la ecuación de balance consiste en definir aquellas cantidades en términos de las cuales se describe la distribución de neutrones.

Supondremos que no hay fuerzas, ya que las que actúan, que son las fuerzas nucleares, son de muy corto alcance o intervienen sólo en las interacciones. Además se despreciarán las interacciones entre los neutrones, tomándose en cuenta sólo las interacciones de los neutrones con los núcleos del medio, ya que la densidad de neutrones ($\sim 10^{14}$) es menor que la densidad atómica ($\sim 10^{23}$). (1,2)

La integral de la densidad angular de neutrones sobre todas las direcciones (es decir, sobre todo ángulo sólido) es la densi-

dad de neutrones dependiente de la posición, energía y tiempo solamente, o sea:

$$\text{densidad de neutrones} = \int_{4\pi} N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega} = n(\bar{r},E,t) \qquad 1.2$$

donde $n(\bar{r},E,t)$ es el número esperado de neutrones en $\bar{r}$ con energía E al tiempo t, por unidad de volumen, por unidad de energía y unidad de tiempo.

Al producto de $\bar{V} = |v|\bar{\Omega}$, o sea la velocidad correspondiente a la energía E (2,4), por la densidad angular de neutrones se le llama corriente angular de neutrones o flujo vectorial de neutrones, esto es:

$$\text{flujo vectorial de neutrones} \equiv \bar{v}\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) \qquad 1.3$$

el cual es un vector que representa, el número de neutrones de la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ que atraviesan por unidad de tiempo la unidad de superficie normal a $\bar{\Omega}$. Su magnitud, i.e., $VN(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ es llamada el flujo angular y se representa por $\phi(\bar{r},\Omega,E,t)$ o sea (3,4):

$$\text{flujo angular} = VN(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) = \phi(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) \qquad 1.4$$

La integral del flujo vectorial de neutrones sobre todas las direcciones, es llamada la corriente de neutrones y se representa por $\bar{J}$ $(\bar{r},E,t)$, es decir: .

$$\int_{4\pi} \bar{v}N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega} = v \int_{4\pi} \bar{\Omega}\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega} \equiv \bar{J}(\bar{r},E,t) \qquad 1.5$$

1.2 SECCION TRANSVERSAL EFICAZ MACROSCOPICA

Anteriormente hemos hablado sobre las cantidades que involucran a la densidad angular de neutrones, ahora consideraremos los tipos de interacción que sufren los neutrones con el medio y las cantidades que las definen. Para ello supondremos que las interacciones de los neutrones con el medio son instantáneas. Entonces los efectos del movimiento de los neutrones pueden ser descritos específicamente por el camino libre medio entre interacciones, como una función de la velocidad del neutrón (1,2). Al inverso del camino libre medio se le llama sección transversal eficaz macroscópica $\Sigma_x(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ (3), la cual es la probabilidad de que un neutrón sufra una interacción particular, indicada por x, donde x representa los diferentes tipos de interacción que sufren los neutrones en el medio, las cuales pueden ser: Colisiones de dispersión elástica denotada por (n) e inelástica (n'), fisión (f), la reacción (n,γ) (γ) (llamada captura radiactiva), las reacciones (n,p) (p), (n,α) (α), etc. La suma de todas las secciones de las interacciones donde se absorbe el neutrón es llamada la sección de absorción, denotada por Σ_a, o sea (3)

$$\Sigma_a = \Sigma_f + \Sigma_\gamma + \Sigma_p + \Sigma_\alpha + \ldots$$

por lo que x nos denota las interacciones de dispersión elástica n, e inelástica n', fisión f, captura γ, absorción a, etc. i.e. x = n, n', f, γ, a,..., por unidad de longitud recorrida. De aquí en adelante a la sección eficaz transversal macroscópica le

llamaremos solo "sección" para simplificar. La sección se toma como función de $\bar{r}$ y E solamente, pero hay algunas situaciones, como en el caso de que haya una dirección preferente físicamente en el medio, por ejemplo la orientación de un cristal que determine la dependencia sobre $\bar{\Omega}$. Una variación de Σ_x con t surge al incluir la posibilidad de que alguna parte del medio cambie en el tiempo, o que se introduzca otro tipo de medios externamente, con lo que la sección dependerá del tiempo (4). Por estas razones, la sección que puede depender de $\bar{\Omega}$, t ó de ambas (1,3,4).

Si V es la rapidez, i.e. la magnitud de la velocidad de los neutrones, entonces $V\Sigma_x$ es la correspondiente probabilidad de interacción por unidad de tiempo. Por lo tanto, definimos la rapidez de interacción como el producto.

$$\Sigma_x(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)V(E)N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$$

esto es el número de interacciones del tipo x (con x = n,n',f,γ,α, ...etc.) hechas por neutrones de rapidez V y correspondiente energía E, en la posición $\bar{r}$, en la dirección $\bar{\Omega}$ y al tiempo t, por unidad de tiempo (4). El número total de interacciones se obtiene usando Σ_t, la sección total, la cual es la suma de todos los tipos de interacciones que pueden tener los neutrones. Esto es posible ya que las secciones de interacción son aditivas (i.e. $\Sigma_t = \Sigma_n + \Sigma_{n'} + \Sigma_f + \ldots$). Por lo tanto la rapidez de interacción total está dada por:

Rapidez de interacción total = $\Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)V(E)N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ 1.6

1.3 SECCION DIFERENCIAL Y FUNCION DE TRANSFERENCIA

En la teoría de transporte de neutrones, se requiere describir la probabilidad de que el neutrón que emerge de una interacción, tenga una dirección y energía específica. Para ello se define una sección llamada sección diferencial, la cual nos da la probabilidad de que los neutrones que, después de una interacción (del tipo: dispersión, fisión, (n,2n), etc. de las cuales emergen neutrones) de un neutrón que tenga la dirección $\bar{\Omega}'$ y la energía - E', con un núcleo emerjan en el intervalo $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ y con energía en dE alrededor de E (2,4). Esta sección se expresa en - general, para cualquier interacción x (con x = n, n', f, 2n, etc), como:

$$\text{Sección diferencial} = \Sigma_x(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\ f_x(r,\bar{\Omega}',\bar{E},\to\bar{\Omega},E,t) \qquad 1.7$$

donde $\Sigma_x(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ es la sección para una interacción del tipo - x para neutrones de energía E' y dirección $\bar{\Omega}'$, y $f_x(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)$ $d\Omega dE$, llamada probabilidad de transferencia, es la probabilidad - de que si un neutrón de dirección Ω' y energía E' tiene una interacción del tipo x, emerja de dicha interacción un neutrón en el intervalo de dirección $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ con energía en dE alre-- dedor de E (2,3,4).

La probabilidad de transferencia debe tomar en cuenta el número de neutrones que emergen de los diversos tipos de interacción, por lo que se debe normalizar para cada tipo de interacción, en la forma que en seguida se describe (2,4).

Como para interacciones de dispersión (ya sea elástica o inelástica), por cada neutrón que interacciona con el medio emerge sólo un neutrón, la integral de la probabilidad de transferencia para dispersión (elástica o inelástica) sobre todas las direcciones y energías de salida de los neutrones debe ser igual a la unidad. Es decir:

$$\iint f_n(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega}\, dE = 1 \qquad 1.8$$

Para la interacción (n,2n) el valor de la integral de la ecuación 1.8 deberá hacerse igual a dos. Para (n, γ), (n, α) y otras reacciones de las cuales no emergen neutrones, tendremos que f de hecho vale cero (2,4).

Para fisión tenemos:

$$\iint f_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E',\to\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega}\, dE = \bar{\nu}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t) \qquad 1.9$$

donde $\bar{\nu}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ es el número promedio de neutrones producidos por fisión en $\bar{r}$, causados por neutrones de energía E' y dirección $\bar{\Omega}'$; (2,4,6).

En eventos de fisión, en promedio, se produce más de un neutrón. Algunos de estos neutrones son emitidos inmediatamente (en intervalos de tiempo del orden de 10^{-8}seg o más cortos) (4,5,7) y son llamados neutrones inmediatos. Otros son emitidos con tiempo de retardo (del orden de segundos) y son llamados neutrones retardados. Estos neutrones retardados son emitidos después de la desexcitación de ciertos fragmentos de fisión (núcleos en los cuales se divide el núcleo original como resultado de la fisión) por

decaimiento beta, como por ejemplo $Br^{87} \xrightarrow{\beta} K_r^{87} \longrightarrow K_r^{86}$ (2,3,4). A los núcleos como el Br^{87} se les llama precursores de neutrones retardados. Así, un neutrón retardado es emitido por el núcleo hijo (en el caso del ejemplo es el K_r^{87}) el cual es producido por el decaimiento beta del fragmento de fisión correspondiente (en el ejemplo Br^{87}) (4,6).

Dada la gran carga eléctrica que poseen los precursores de neutrones retardados, pierden su energía cinética rápidamente y son detenidos en una distancia relativamente corta del punto de su formación por lo que es despreciable su migración antes de la emisión (1,5). Por lo tanto supondremos que los neutrones tanto inmediatos como retardados son emitidos en el mismo punto del espacio en el cual tuvo lugar la fisión (1,4,5).

Para propósitos prácticos es posible dividir a los precursores de neutrones retardados en seis grupos de precursores ficticios (3). En cada grupo los precursores decaen exponencialmente con una constante de decaimiento (λ_j) características, la cual nos determina la rápide: de emisión de neutrones de fisión retardados (3,4,5).

Entonces para describir el evento de fisión completamente se definen las siguientes cantidades: La constante de decaimiento λ_j del j-ésimo precursor. La fracción de neutrones de fisión β_j debido al decaimiento de los precursores del del j-ésimo grupo. La fracción total β de neutrones de fisión que son retardados, i.e.

$$\beta = \sum_{j=1}^{6} \beta_j \qquad 1.10$$

Por lo que respecta a la distribución de energía de los neutrones de fisión se definen los términos: $\chi_0(E)$, la función de distribución de energía de los neutrones inmediatos y $\chi_j(E)$ la función de distribución de energía de los neutrones retardados correspondientes al j-ésimo grupo, donde $\chi_0(E)dE$ y $\chi_j(E)dE$ (para $j = 1,2,\ldots,6$) son las fracciones de los neutrones emitidos con energía en dE alrededor de E. Ambas funciones de distribución están normalizadas a la unidad (2,4,6).

Por último, para poder incluir la producción de los neutrones retardados de una forma cuantitativa, se definen las concentraciones de precursores de neutrones retardados, denotadas por $K_j(\bar{r},t)$, tal que: $K_j(\bar{r},t)d\bar{r}$ es el número esperado de precursores del j-ésimo grupo, en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$ al tiempo t, los cuales decaen emitiendo un neutrón (4,6).

El producto de $\lambda_j \; \chi_j(E) \; K_j(\bar{r},t)d\bar{r} \; d\bar{\Omega} \; dE$ nos da el número de neutrones retardados emitidos por unidad de tiempo en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$, con dirección en $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ y con energía en dE alrededor de E por los precursores de neutrones retardados del j-ésimo grupo, los cuales se formaron por eventos de fisión en $d\bar{r}$. Entonces, la contribución al número promedio de neutrones producidos por fisión ($\bar{\nu}$) de todos los grupos en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$, en $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ y dE alrededor de E está dado por (1,4,6):

$$\int_i \lambda_i \; \chi_i(E) K_i(\bar{r},t) d\bar{r} \; d\bar{\Omega} \; dE \qquad 1.11$$

Regresando a la sección diferencial, tenemos que si $\Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ es la sección total, para todo tipo de interacciones, incluyendo aquellas para las cuales no emergen neutrones, entonces la sección diferencial total para la transferencia de neutrones de $\bar{\Omega}'$ y E' a $\bar{\Omega}$ y E, estará dada por (4,6):

$$\text{Sección diferencial total} = \Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\; f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t) \qquad 1.12$$

que puede ser expresada de una manera alternativa, considerando por separado las interacciones $x(x = n,n',f,2n,\gamma,\ldots etc)$ como:

$$\Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\; f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t) = \sum_x \Sigma_x(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\; f_x(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega}E,t) \qquad 1.13$$

con las f_x's normalizadas en la forma que se describió anteriormente.

Por otra parte, de las ecuaciones 1.12 y 1.13 se tiene que:

$$\iint f(\bar{r},\bar{\Omega}',E\to\bar{\Omega},E,t)d\bar{\Omega}dE = \frac{\Sigma_n(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t) + \Sigma_{n'} + \Sigma_\gamma + \ldots\ldots}{\Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)} \equiv C \qquad 1.14$$

donde C es el número promedio de neutrones que emergen por la interacción, en $\bar{r}$ con dirección $\bar{\Omega}$ y energía E debido a neutrones de dirección $\bar{\Omega}'$ y energía E' en $\bar{r}$ y al tiempo t (4.6). Es decir, la ecuación 1.14 define f y su normalización.

Ahora bien, la rápidez con que se transfieren por interacción neutrones de la clase $(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ a la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ está

dada por:

$$\Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\ f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)\ C\ V(E')\ N(r,\bar{\Omega}',E',t) \qquad 1.15$$

Integrando esta última expresión sobre todas las direcciones y energías iniciales del neutrón, obtenemos la rápidez total de transferencia de neutrones a la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$, es decir (4,6):

$$\int_{\bar{\Omega}}\int_{E'} \Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E,t)\ f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)C\ V(E')\ N(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)d\bar{\Omega}'dE' \qquad 1.16$$

Para interacciones de fisión, como ya vimos, se producen dos tipos de neutrones dentro de la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$: los inmediatos y los retardados. Sabemos que $\bar{\nu}(r,\bar{\Omega}',E',t)$ es el número total promedio de neutrones producidos por cada fisión en $\bar{r}$ al tiempo t, debido a neutrones de dirección Ω' y energía E', además, como β es la fracción de este total que proviene de todos los grupos de precursores, entonces $\beta\bar{\nu}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ nos representa el número de neutrones retardados creados por cada fisión en $\bar{r}$ debido a neutrones de dirección $\bar{\Omega}'$ y energía E' al tiempo t. Por lo tanto, $(1-\beta)\bar{\nu}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$ es el número esperado de neutrones inmediatos que resultan de cada fisión en $\bar{r}$ por neutrones de energía E' y dirección $\bar{\Omega}'$ al tiempo t. Por lo anterior, la rápidez de transferencia de neutrones inmediatos de fisión a la clase $(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$ está dada por:

$$\chi_o(E) \int_{\bar{\Omega}'}\int_{E'} \Sigma_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\ f_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)(1-\beta)\ \ \bar{\nu}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$$

$$V(E')\ N(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)d\bar{\Omega}'dE' \qquad 1.17$$

Esto nos representa el número total de neutrones inmediatos producidos en $d\bar{\Omega}dE$ por unidad de tiempo, por interacciones de fisión en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$, en $d\Omega'$ alrededor de $\bar{\Omega}'$ y dE alrededor de E' (7).

El término de fuentes externas, el cual denotaremos por $S(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$, nos representa el número de neutrones introducidos por unidad de volumen en el espacio alrededor de $\bar{r}$, por unidad de ángulo sólido alrededor de $\bar{\Omega}$ por unidad de energía alrededor de E y por unidad de tiempo (4,6).

Las fugas nos representan el escape de neutrones del elemento de volumen $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$, pero que continúan con la misma dirección $\bar{\Omega}$ y energía E por unidad de tiempo. Esto queda representado por la integral de la corriente angular de neutrones sobre la superficie que limita el volumen en consideración o sea:

$$\text{fugas} = \int_A \bar{J}(r,\bar{\Omega},E,t).\hat{n}dA \qquad 1.18$$

donde $\hat{n}$ es un vector unitario normal a la superficie del volumen considerado y A es la superficie que limita al volumen (4,6,7).

1.4 LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES

Con estas premisas es posible presentar a la ecuación de transporte de neutrones (ecuación de balance). Consideraremos el balance de neutrones en un elemento de volumen del espacio. Esto

es, el cambio en el tiempo de N, el número de neutrones con dirección $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$, energía dE alrededor de E y posición en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$.

Ahora bien, de acuerdo con las formas de interacción de los neutrones que se han descrito en este capítulo, la ecuación de balance, como la establecida en la expresión 1.1, es:

Rápidez del cambio con respecto al tiempo de

$\frac{\partial N}{\partial t}$ = [(a) el número de neutrones producidos por interacción

+ (b) el número de neutrones producidos por fuentes externas

- (c) el número de neutrones que desaparecen por interacción

- (d) el número neto de neutrones que se fugan a través de A]

Donde el término (a) representa los neutrones de cualquier dirección y energía que, por interacción en $d\bar{r}$ caen en $d\bar{\Omega}dE$. (b) representa el número de neutrones que aparecen en $d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$ debido a fuentes externas. (c) representa los neutrones que dejan $d\bar{\Omega}dE$ por cambios en $\bar{\Omega}$ y/o E debido a interacciones, ya sea que cambien a otra dirección y energía o que sean absorbidos. Finalmente, el término (d) se ocupa de aquellos neutrones que entran y/o salen de $d\bar{r}$ sin cambiar su dirección y energía.

Escribiendo los términos de este balance en lenguaje matemático y para toda la región ocupada por el sistema, lo cual implica integrar a todo el volumen, obtenemos:

$$(a) = \int_{vol} \int_{\Omega'} \int_{E'} \Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t).f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)c\ \nu(E')\ n(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)d\bar{\Omega}'dE'd\bar{r}d\bar{\Omega}dE$$

$$= \int_{vol} \int_{\bar{\Omega}'} \int_{E'} \Sigma'_t(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\ f'(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)c\ \nu(E')\ n(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)d\bar{\Omega}'dE'd\bar{r}\ d\bar{\Omega}dE$$

$$+ \int_{vol} \sum_{\ell} \chi_o^{\ell}(E) \int_{\bar{\Omega}'} \int_{E'} \Sigma_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\ f_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)\ (1-\beta)\bar{\nu}^{\ell}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)$$

$$\nu(E')\ n(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)d\bar{\Omega}'dE'd\bar{r}d\bar{\Omega}dE + \int_{vol} \sum_{\ell} \sum_{j} \lambda^{\ell}_{j}\chi^{\ell}_{j}(E)\ n^{\ell}(\bar{r},t)d\bar{r}d\bar{\Omega}dE \qquad 1.20$$

donde la prima (') en Σ_t, f y c nos indica que se incluyen todas las interacciones consideradas menos fisión, ya que esta se escribió explícitamente mostrando las partes debidas a neutrones rápidos y las debidas a neutrones retardados. La sumatoria sobre ℓ se debe a que existe la posibilidad de tener más de una clase de isótopo que pueda sufrir fisión en el denominado "combustible" y los distinguimos entonces por el superíndice ℓ.

$$(b) = \int_{vol} s(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{r}d\bar{\Omega}dE \qquad 1.21$$

nos representa a los neutrones que son producidos por fuentes externas. El término de pérdidas por interacción está dado por:

$$(c) \int_{vol} \Sigma_t(r,\Omega,Et)\ \nu(E)\ n(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{r}\ d\bar{\Omega}\ dE \qquad 1.22$$

y el término de fugas por:

$$(d) = \int_{A} \bar{J}(\bar{r},\bar{\Omega}E,t).\hat{n}\ dA\ d\bar{\Omega}\ dE \qquad 1.23$$

donde A es la superficie que limita al sistema. Ahora, usando el teorema de la divergencia, el cual transforma una integral de superficie en una integral de volumen, obtenemos:

$$\int_A J(\bar{r},\bar{\Omega},E,t).nda = \int_{vol} \nabla.J(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{r}$$

entonces:

$$(d) = \int_{vol} \nabla.J(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)d\bar{r}\, d\bar{\Omega}dE \qquad 1.23$$

pero:

$$\nabla.J(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) = \nabla.\{\bar{v}(E)\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\}$$

$$= \nabla\, \{v(E)\bar{\Omega}\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\}$$

$$= \nabla.\{\bar{\Omega}\, \phi(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\}$$

$$= \nabla.\bar{\Omega}\, \phi(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) + \bar{\Omega}.\nabla\phi(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)$$

donde $\nabla.\bar{\Omega} = 0$, por lo que:

$$\nabla.J(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) = \bar{\Omega}.\nabla\phi(\bar{r},\bar{\Omega},E,t) \qquad 1.24$$

Entonces, la ecuación de transporte de neutrones para el sistema queda expresada como sigue:

$$\int_{vol} \frac{\partial N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)}{\partial t}\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE = \int_{vol} \int_{\Omega'} \int_{E'} \Sigma_t'(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\, f'(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)\, c'v(E')\, N(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\, d\bar{\Omega}'\, dE'\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE$$

$$+ \int_{vol} \sum_{\ell} \chi_o^{\ell}(E) \int_{\Omega'} \int_{E'} \Sigma_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\, f_f(\bar{r},\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E,t)\, \nu^{\ell}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)(1-\beta^{\ell})\, V(E')\, N(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\, d\bar{\Omega}'\, dE'\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE$$

$$+ \sum_{\ell} \int_{vol} \sum_{j} \lambda_j^{\ell}\, \chi_j^{\ell}(E)\, k_j^{\ell}(\bar{r},t)\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE + \int_{vol} S(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE - \int_{vol} \Sigma_t(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\, v(E)\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t)\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE$$

$$- \int_{vol} \bar{\Omega}.\nabla\, (v(E)\, N(\bar{r},\bar{\Omega},E,t))\, d\bar{r}\, d\bar{\Omega}\, dE$$

Ahora estableceremos las relaciones de balance para los precursores de neutrones retardados de todos los grupos las cuales - nuevamente son una diferencia entre la producción y las pérdidas, que dan la variación temporal de las concentraciones de precursores, es decir:

$$\sum_{\ell} \int_{vol} \frac{\partial k_j^{\ell}(\bar{r},t)}{\partial t} d\bar{r}d\bar{\Omega}dE =$$

$$= \sum_{\ell} \int_{vol} \int_{\Omega'} \int_{E'} \Sigma_f^{\ell}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)\beta_j^{\ell}\bar{\nu}^{\ell}(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)N(\bar{r},\bar{\Omega}',E',t)v(E')d\bar{\Omega}'dE'd\bar{r}d\bar{\Omega}dE$$

$$- \sum_{\ell} \int_{vol} \lambda_j^{\ell} k_j^{\ell}(\bar{r},t)d\bar{r}d\bar{\Omega}dE \qquad 1.26$$

donde la producción está dada por el primer término de la derecha de la ecuación y nos representa el número total de neutrones retardados del j-ésimo grupo del ℓ-ésimo isótopo fisionable producido por unidad de tiempo en $d\bar{r}$ alrededor de $\bar{r}$, en $d\bar{\Omega}$ alrededor de $\bar{\Omega}$ y en dE alrededor de E por todas las fisiones a todas las energías y direcciones. Como suponemos que cada precursor de neutrones retardados eventualmente emite un neutrón retardado, entonces el número de neutrones retardados β_j^{ℓ} y el número de precursores por fisión será el mismo. Con esta suposición, el término en consideración se vuelve la rápidez de producción de los precursores de neutrones retardados del j-ésimo grupo del ℓ-ésimo isótopo fisionable. El segundo término de la derecha es la rápidez de decaimiento del j-ésimo precursor y nos representa las pérdidas de

precursores. Como ya mencionamos, la migración de los precurso-- res es despreciable, por lo que no tenemos que considerar el tér- mino de las fugas (4,7).

Las ecuaciones 1.25 y 1.26 son las que nos describen, en tér- minos lo más general posible, el transporte de neutrones en los - reactores nucleares. Sin embargo, la forma de estas ecuaciones - es demasiado general como para poder ser resueltas analíticamente. La solución analítica rigurosa de ellas es un problema sumamente complicado aún en ausencia de neutrones retardados y solamente se han obtenido soluciones rigurosas para sistemas muy simplificados.

En general para resolver las ecuaciones 1.25 y 1.26, se adop- tan simplificaciones que reflejen la naturaleza del problema par- ticular que se trate y se emplean métodos aproximados semianalíti cos o numéricos. Entre los métodos más importantes está el méto- do de Multigrupos en el cual se divide el intervalo de energía de interés (generalmente comprendido entre 0.01 ev y 10 Mev) en un - número finito de subintervalos o grupos de energía donde se supo- ne que las secciones involucradas en cada grupo son constantes o son promedios adecuados para el subintervalo.

1.5 LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES SIMPLIFICADA

En esta sección se discutirán brevemente las simplificacio-- nes que se harán a algunos de los términos que intervienen en las ecuaciones 1.25 y 1.26, para obtener una ecuación más sencilla a la que sea fácil aplicar el método de multigrupos.

La primera simplificación que se puede hacer es en la relación con la dependencia temporal de las cantidades que intervienen en las ecuaciones. Consideraremos que no existe variación temporal, por suponer que el sistema se encuentra en régimen constante. Es decir nos restringimos al caso independiente del tiempo. (4)

La segunda simplificación se refiere a los neutrones retardados, que sabemos son de gran importancia en el comportamiento cinético del sistema. Sin embargo, para simplificar las ecuaciones consideraremos que todos los neutrones son inmediatos, los tiempos de producción de los neutrones inmediatos son muy cortos en comparación con los tiempo de los neutrones retardados pero al estar considerando sólo régimen constante la simplificación no acarrea consecuencias serias en cuanto al comportamiento temporal; además, los fragmentos de fisión solo se desplazan distancias despreciables, por lo que los neutrones retardados se emiten en el mismo punto del espacio donde se emiten los inmediatos (3,5).

Con estas suposiciones, se simplifica enormemente la ecuación 1.25 y la ecuación 1.26 ya no tiene razón de ser.

Como ya mencionamos antes, la dependencia angular en la sección solo se presentará en casos como el de considerar direcciones físicamente preferentes, como por ejemplo, la orientación de un cristal. Supondremos que no existen direcciones preferentes físicamente en nuestro sistema, por lo que las secciones no ten-

drán dependencia angular (4). Por último, la variación espacial de las secciones se debe que estas pueden cambiar su valor de un punto a otro en medios inhomogéneos, por lo que haremos la suposición de que el medio es homogéneo, isotrópico y uniforme, es decir, no habra variación en las secciones con la posición.

Ahora, bien, al tomar en cuenta las suposiciones anteriores y que la integración sobre la variable espacial es siempre sobre todo el sistema, por lo que solo habrá que considerar la igualdad de los integrandos, las ecuaciones 1.25 y 1.26 (que desaparece) se transforman en la siguiente expresión:

$$\bar{\Omega}.\nabla N(\bar{r},\bar{\Omega},E)v(E) + \Sigma_t(E)v(E)N(\bar{r},\bar{\Omega},E) =$$

$$= \int_{\Omega'}\int_{E'} \Sigma_t(E')f(\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E)C\, N(\bar{r},\bar{\Omega}',E')\, v(E')d\bar{\Omega}'dE' + S(\bar{r},\bar{\Omega},E) \qquad 1.27$$

donde, Σ_t es la sección transversal macroscópica total, es decir, incluyendo fisión y c es el número promedio de neutrones que emergen por interacción y está definido por la expresión 1.14.

Podemos expresar a la ecuación 1.27 en términos del flujo angular, el cual está dado por la expresión 1.4 con lo que toma la forma:

$$\bar{\Omega}.\nabla\, \phi(\bar{r},\bar{\Omega},E) + \Sigma_t\, \phi(\bar{r},\bar{\Omega},E) = S(\bar{r},\bar{\Omega},E)$$

$$+ \int_{\bar{\Omega}'}\int_{E'} \Sigma_t\,(E')\, f(\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E)c\, \phi(\bar{r},\bar{\Omega}',E')d\bar{\Omega}'dE'$$

Resumiendo, la ecuación 1.27 (ó 1.28) representa el transporte de neutrones en un medio con las características siguientes: - homogéneo, isotrópico, uniforme, absorbedor, dispersor y multiplicativo que se encuentra en régimen constante. Esta es la ecuación simplificada que se resolverá por el método de multigrupos.

1.6 CONDICIONES A LA FRONTERA

La ecuación 1.28 es una ecuación integrodiferencial que describe el transporte de neutrones en el medio, es decir, en una región finita del espacio, en la cual las secciones son funciones - conocidas de la energía. Tal ecuación tiene un número infinito - de posibles soluciones en cualquier región del espacio y para determinar cuál de estas soluciones corresponde al problema físico que estemos considerando, es necesario especificar las condiciones apropiadas que debe cumplir al flujo angular (ó la densidad - angular de neutrones) en la frontera del medio. Sin embargo, independientemente del problema físico que se considere, las soluciones para la ecuación de transporte deben estar sujetas a las - siguientes condiciones (1,4,6):

$N(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ ó $\phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ real y no negativos para todo $\bar{r},\bar{\Omega},E$ y

$N(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ ó $\phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ continuo en r en la dirección $\bar{\Omega}$ 1.29

Cabe hacer notar que N ó ϕ no necesariamente son funciones - continuas de $\bar{\Omega}$ o E, pero sí necesariamente lo son de $\bar{r}$ en la dirección $\bar{\Omega}$, para cada E. Esto significa físicamente que un haz de

neutrones no puede desaparecer repentinamente al cruzar alguna interfase (8).

Cuando la interfase en cuestión separa un medio material del "vacío", es decir, que la interfase sea una "superficie libre" -- (el término superficie libre se utiliza para denotar a una superficie en la cual no entran neutrones al medio (1,4,6)) y en caso de que no haya fuentes externas, la condición matemática que se - debe imponer procede del hecho físico de que ningún neutrón ingresa al medio procedente del exterior, o sea, que no regresan al medio, una vez que han salido de él. La condición matemática es entonces, que para cualquier punto $\bar{r}_s$ de la superficie, se tendrá:

$$N(\bar{r}_s,\bar{\Omega},E) = 0, \qquad \hat{n}.\bar{\Omega}<0$$
$$\phi(\bar{r}_s,\bar{\Omega},E) = 0, \qquad \hat{n}.\bar{\Omega}<0 \qquad 1.30$$

siendo $\hat{n}$ un vector unitario normal a la superficie en cuestión.

Las condiciones anteriores deberán complementarse con las -- condiciones adecuadas al problema particular que se trate.

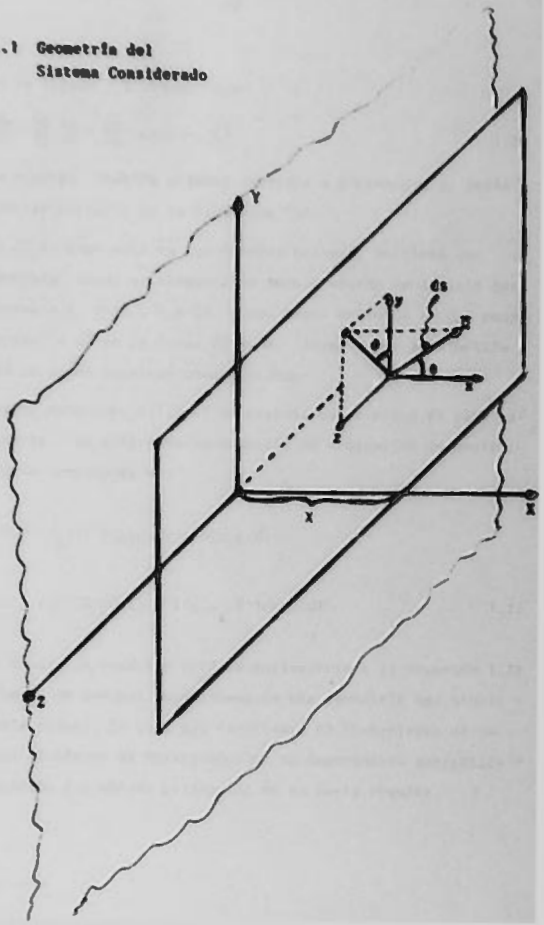
1.7 LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES SIMPLIFICADA EN "GEOTRIA PLANA"

Para resolver la ecuación de transporte de neutrones 1.28 es necesario tener expresiones para el término $\bar{\Omega}.\nabla\phi$ que aparece en - la parte correspondiente a fugas en la ecuación. Dicho término - nos representa la derivada direccional de ϕ en la dirección de $\bar{\Omega}$.

La expresión de $\bar{\Omega}.\nabla\phi$ puede ser derivada simplemente para sistemas de coordenadas rectangulares, esféricas o cilíndricas (4).- Para simplificar aun más la ecuación de transporte 1.28, a continuación desarrollaremos el término $\bar{\Omega}.\nabla\phi$ para una "geometría plana", en la cual el flujo angular es una función de x,θ,ϕ, y E.

El sistema considerado, además de tener las características antes señaladas presenta una geometría plana, entendiéndose por ello lo siguiente: se considera que las dimensiones en "y" y "z" son infinitas, y que además se tiene una fuente plana infinita sobre el plano "zy", por lo que la contribución neta de neutrones (o flujo de neutrones) en cualquier plano paralelo al plano "zy" dependerá solamente de la coordenada x, ya que en cualquier punto de dicho plano tendremos la misma contribución, debido a "y" y "z". Además, el flujo angular, que depende de la dirección que lleven los neutrones, dependerá para esta geometría sólo del angulo que forma la dirección con el eje x, es decir de θ, ya que se tendrá simetría con respecto a ϕ dado que las interacciones de los neutrones con el medio, en especial las dispersiones dependen sólo del ángulo θ, siendo independientes de ϕ. En la siguiente figura (1.1) se muestran los ángulos θ y ϕ, característicos de esta geometría.

Fig. 1.1 Geometría del Sistema Considerado



De la figura 1.1 tenemos que:

$$\Omega.\nabla\phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial\chi}\frac{\partial\chi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial\chi} = \cos\theta = \mu\ \frac{\partial\phi}{\partial\chi} \qquad 1.31$$

donde $\mu = \cos\theta$. También podemos expresar a μ como $\mu=\bar{\Omega}.\chi$, donde $\bar{\chi}$ es un vector unitario en la dirección "x".

Si $d\bar{\Omega}$ es expresado en coordenadas polares, se tiene que -- $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$, donde el elemento de ángulo sólido se definió para el intervalo θ, $\theta+d\theta$ y ϕ, $\phi+d\phi$. Como hemos definido $\mu=\cos\theta$ podemos expresar a $d\bar{\Omega}$ en la forma $d\bar{\Omega}=d\mu d\phi$. Además, por la simetría - en ϕ, $d\bar{\Omega}$ se puede expresar como $d\bar{\Omega}=-2\pi d\mu$.

Por lo anterior, $\phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ se transforma en $\phi(x,\mu,E)$ para esta geometría. En este caso la ecuación de transporte de neutrones 1.28 se transforma en:

$$\mu\ \frac{\partial\phi(\chi,\mu,E)}{\partial\chi} + \Sigma_t(E)\ \phi(\chi,\mu,E) = S(\chi,\mu,E)$$

$$+ \iint \Sigma_t(E')\ f(\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E)\ c\ \phi(\chi,\mu',E')d\bar{\Omega}'\ \ dE' \qquad 1.23$$

Es decir, la ecuación 1.32 es equivalente a la ecuación 1.28 con el hecho de que nos encontramos en una geometría mas simple - (geometría plana), lo cual nos facilitará el tratamiento de la -- misma por el método de Multigrupos en su dependencia energética y la aplicación del método polinomial en su parte angular.

Resumiendo, hasta aquí se ha hecho la deducción más general posible de la ecuación de transporte de neutrones para un reactor nuclear. Se ha manifestado la dificultad para resolverla en general, y cómo solo ha sido resuelta para sistemas simples. Posteriormente se han hecho las simplificaciones adecuadas para obtener una forma más sencilla de dicha ecuación, dada por la expresión 1.32, la cual será tratada en el capítulo siguiente, primeramente en su dependencia espacial por medio de separación de variables, en seguida por el Método de Multigrupos para el tratamiento de la dependencia energética y después haremos uso del método polinomial, con polinomios de Legendre, para analizar la variable angular.

CAPITULO 2

TRATAMIENTO DE LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES POR EL METODO DE MULTIGRUPOS

En el capítulo anterior se definieron las cantidades que caracterizan el transporte de neutrones en un sistema (reactor nuclear) y se dedujo la ecuación de transporte de neutrones correspondiente, la cual, bajo algunas simplificaciones, se transformó en una ecuación más sencilla (ec. 1.32) que será más fácil de analizar, como veremos, para obtener las soluciones.

En el presente capítulo se procederá al tratamiento de esta ecuación. Primeramente, consideraremos que la solución es una superposición de todas las soluciones parciales; después trataremos la dependencia espacial mediante la proposición de que las soluciones parciales son de variables separables (esta suposición no siempre es válida, pero en el caso de geometría plana se puede hacer por la forma de la ecuación), con ello obtendremos una ecuación independiente de la posición pero dependiente de un parámetro de separación, de la energía y del ángulo.

Posteriormente, la dependencia energética será tratada mediante el método de Multigrupos, el cual consiste en dividir en un número finito de subintervalos (o grupos) al intervalo de energías de interés de los neutrones, que en este caso es el compren-

dido entre 0.01 ev y 10 Mev, la subdivisión del intervalo de energías se hace con la finalidad de considerar a las secciones en cada uno de los subintervalos (o grupos) como una función constante o una o una función promedio pesada de la energía. Al integrar la ecuación de transporte sobre cada uno de los grupos se obtienen las llamadas constantes de grupo (que explicaremos más adelante) y las llamadas ecuaciones de Multigrupos, la cuales forman un sistema de ecuaciones homogéneas acopladas, independientes de la energía (i.e. cada una de ellas nos representa un problema de una sola energía), con dependencia angular y del parámetro de separación de la parte espacial.

Cada una de estas ecuaciones de una sola energía es tratada por medio del método polinomial, al desarrollar la parte angular en polinomios de Legendre y trabajar con los coeficientes del desarrollo, lo cual conduce a una ecuación algebraica (llamada ecuación secular o característica) del parámetro de separación, cuyas soluciones nos darán los valores de dicho parámetro.

Dado que tenemos un sistema, tendremos que considerar las condiciones a la frontera adecuada al mismo, y que se utilizan para calcular los constantes de la superposición para obtener la solución general.

Al final del capítulo vemos como se definen las llamadas constantes de grupo y mencionamos algunos métodos y formas de calcularlas.

2.1 EL TERMINO DE TRANSFERENCIA POR INTERACCION

Antes de proceder con el tratamiento que se acaba de indicar es de interés examinar el término correspondiente a la transferencia de neutrones por interacción, de la clase (x,μ',E') a la clase considerada (x,μ,E). Como se mencionó anteriormente en interacciones de neutrones con el medio las direcciones de entrada $\bar{\Omega}'$ y de salida $\bar{\Omega}$ de los neutrones dependen únicamente del ángulo que hay entre estas dos direcciones, llamado ángulo de intersección y denotado por $\mu_o=\bar{\Omega}'\cdot\bar{\Omega}'$. Sin embargo, este cambio de dirección puede estar relacionado con el cambio en la energía de los neutrones, por lo que el término de transferencia se puede expresar en forma general, de la manera siguiente (1,3,4):

$$\Sigma_t(E')\ f(\bar{\Omega}',E'\to\bar{\Omega},E) = \Sigma_t(E')\ f(\mu_o,E'\to E) \qquad 2.1$$

Con lo que la ecuación 1.28 se transforma en:

$$\mu\ \frac{\partial\phi(\underline{x},\mu,E)}{\partial x} + \Sigma_t(E)\ \phi(x,\mu,E) = S(x,\mu,E) \qquad 2.2$$

$$+ \int_{\Omega'}\int_{E'} \Sigma_t(E')\ f(\mu_o,E'\to E)\ c\ \phi(\underline{x},\mu',E')d\bar{\Omega}'dE'$$

Para cambiar la dependencia en μ_o a una dependencia μ ó μ', se desarrolla el término $\Sigma_t(E')\ c\ f(\mu_o,E'\to E)$ en una serie de polinomios de Legendre (1,4,5), i.e.:

$$\Sigma_t(E')c\ f(\mu_o,E'\to E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi}\ c\ \Sigma_n(E'\to E)P_n(\mu_o) \qquad 2.3$$

donde los coeficientes del desarrollo anterior están dados por:

$$c\ \Sigma_n(E'\to E) = 2\pi\int_{\mu_o} \Sigma(E')c\ f(\mu_o,E'\to E)P_n(\mu_o)d_{\mu o} \qquad 2.4$$

Sustituyendo la expresión 2.3 en la ecuación 2.2 obtenemos:

$$\mu\ \frac{\partial\phi(\chi,\mu,E)}{\partial\chi} + \Sigma_t(E)\ \phi(\chi,\mu,E) = S(\chi,\mu,E) \qquad 2.5$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\Omega'}\int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E)P_n(\mu_o)\phi(\mu',\chi,E')d\Omega' dE'$$

Haciendo uso del Teorema de Adición para los polinomios de Legendre (14,17), i.e.:

$$P_n(\mu_o) = P_n(\mu)\ P_n(\mu') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\ P_n^m(\mu)\ P_n^m(\mu')$$

$$\text{Cos } m(\theta-\theta') \qquad 2.6$$

en el término de transferencia por interacción, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\Omega'} \int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E)\, P_n(\mu_0)\, \Phi(\chi,\mu',E')\, d\Omega'\, dE' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\Omega'} \int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E)\Big(P_n(\mu)\, P_n(\mu')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, P_n^m(\mu)\, P_n^m(\mu')\, \cos m\,(\theta-\theta')\Big)\Phi(\chi,\mu',E')\, d\Omega'\, dE'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E)\, dE' \Big(\int_{\Omega'} P_n(\mu)\, P_n(\mu')\, \Phi(\chi,\mu',E')\, d\Omega'$$

$$+ \int_{\Omega'} \Phi(\chi,\mu',E')\, 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, P_n^m(\mu)\, P_n^m(\mu')\, \cos m\,(\theta-\theta')\, d\Omega'\Big)$$

Pero:

$d\Omega = \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\vartheta = -d\mu d\vartheta$ ya que $\mu = \cos\theta$

Por lo que:

$$2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{\Omega} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu')\cos m(\vartheta-\vartheta')\phi(\chi,\mu',E')d\Omega' = \qquad 2.7$$

$$= 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{\mu'}\int_{\phi'} P_n^m(\mu)\, P_n^m(\mu')\,\text{Cos}\, m(\phi-\phi')\,\phi(\chi,\mu',E')\, d\mu' d\phi' = 0$$

entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\int_{\Omega'}\int_{E'} c\,\Sigma_n(E'\to E)\, P_n(\mu_o)\,\phi(\chi,\mu',E')d\Omega'\, dE'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\int_{E'} c\,\Sigma_n(E'\to E)\;\; P_n(\mu)\int_{\Omega'} P_n(\mu')\,\phi(\chi,\mu',E')d\Omega'\, dE' \qquad 2.8$$

Con lo que la ecuación 2.5 queda expresada de la siguiente manera (4):

$$\mu\,\frac{\partial\phi(\chi,\mu,E)}{\partial\chi} + \Sigma_t(E)\,\phi(\chi,\mu,E) = S(\chi,\mu,E) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\; P_n(\mu)\int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E)\int_{\Omega'} P_n(\mu')\,\phi(\chi,\mu',E')d\Omega'\, dE' \qquad 2.9$$

Procederemos ahora con el tratamiento descrito al principio de este capítulo, aplicado a la ecuación 2.9.

2.2 LA SOLUCION GENERAL A LA ECUACION DE TRANSPORTE DE NEUTRONES SIMPLIFICADA

La ecuación de Boltzmann es una ecuación lineal; por lo tanto, podemos encontrar la solución general, $F(x,\mu,E)$, como una combinación lineal de todas las soluciones parciales, $f_k(x,\mu,E)$ (9,12,13), tal que

$$F(x,\mu,E) = \sum_k A_k f_k(x,\mu,E) \qquad 2.10$$

donde el índice k de la suma va sobre todas soluciones parciales y los coeficientes A_k de esta combinación se determinan de las condiciones a la frontera.

Cabe hacer notar las soluciones parciales para el caso que nos ocupa son las soluciones de una ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa. Entonces, restringiéndonos por lo pronto a la ecuación homogénea:

$$\mu \frac{\partial\phi(x,\mu,E)}{\partial x} + \Sigma_t(E)\,\phi(x,\mu,E) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\mu)$$

$$\int_{E'} c\,\Sigma_n(E'\to E) \int_{\Omega} \phi(x,\mu,E')\,P_n(\mu')d\Omega'\,dE = 0 \qquad 2.11$$

Entonces, proponemos como sulución general:

$$\phi(x,\mu,E) = \sum_{\ell} A_{\ell}\ \phi_{\ell}(x,\mu,E) \qquad 2.12$$

donde las funciones $\phi_{\ell}(x,\mu,E)$ son soluciones parciales de 2.11 y los coeficientes A_{ℓ} serán determinados mediante las condiciones a la frontera.

Dado que en lo que sigue trataremos sólamente con las soluciones parciales por simplicidad omitiremos el índice ℓ y solamente las denotaremos por $\phi(x,\mu,E)$.

Por la forma de la ecuación homogénea 2.12 se propone que su solución sea de variables separables, i.e. podremos considerar a la solución como un producto de funciones, una con dependencia solamente de x y la otra de las variables angular y energética, con lo cual podremos separar a la dependencia espacial mediante un parámetro de separación que llamaremos $(-\frac{1}{B})$ y que determinaremos más adelante. Esto es, se propone (4,9,12,13):

$$\phi(x,\mu,E) = e^{-\frac{x}{B}}\ \phi(B,\mu,E) \qquad 2.13$$

donde $\phi(B,\mu,E)$ denota la dependencia angular, energética y del parámetro de separación. La dependencia de x se ha tomado como $e^{-\frac{x}{B}}$ porque, como se indico en la pag. 26, debe ser real, no negativo y finito en todo el medio, es decir, al infinito el flujo debe irse a cero.

Sustituyendo la expresión 2.13 en la ecuación 2.12, tenemos:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \chi} \left(e^{-\frac{\chi}{\beta}} \phi(\beta,\mu,E)\right) + \Sigma(E)\, e^{-\frac{\chi}{\beta}} \phi(\beta,\mu,E) - \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} P_n(\mu) \int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E) \int_{\bar{\Omega}'} P_n(\mu')\, e^{-\frac{\chi}{\beta}} \phi(\beta,\mu',E)\, d\bar{\Omega}'\, dE' = 0$$

Con lo que:

$$\left(-\frac{\mu}{\beta} \phi(\beta,\mu,E) + \Sigma(E)\, \phi(\beta,\mu,E) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\mu)\right.$$

$$\int_{E'} c\Sigma(E'\to E) \int_{\bar{\Omega}'} P_n(\mu') \phi(\beta,\mu',E')\, d\bar{\Omega}'\, dE'\, e^{-\frac{\chi}{\beta}} = 0$$

como $e^{-\frac{\chi}{\beta}} \neq 0$ (ya que si fuera cero tendríamos que $\phi(\chi,\mu,E)$ sería idénticamente igual a cero y estaríamos con la solución trivial) se puede dividir entre ella. Entonces:

$$-\mu\phi(\beta,\mu,E) + \beta.\Sigma(E)\, \phi(\beta,\mu,E) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi}$$

$$P_n(\mu) \int_{E'} c\Sigma_n(E'\to E) \int_{\bar{\Omega}'} P_n(\mu')\, \phi(\beta,\mu',E')\, d\bar{\Omega}'\, dE' = 0 \qquad 2.14$$

La cual nos representa la ecuación de transporte de neutrones sin dependencia espacial explícitamente. Ya que nos hemos quitado la dependencia espacial, el siguiente paso, es el de tra

tar la dependencia energética mediante el método de Multigrupos, como veremos a continuación.

2.3 EL METODO DE MULTIGRUPOS

Para tratar la dependencia energética de la ecuación 2.14 haremos uso del método de multigrupos. El primer paso en el desarrollo de este método consiste en dividir el intervalo de energías de interés de los neutrones, i.e. $E_{min} \leq E \leq E_{max}$, en un número finito I de subintervalos de energías delimitados por las enrgías E_i, donde $i = 1,2,3,\ldots, I$, $E_{max} \equiv E_0$ y $E_{min} \equiv E_I$, cada subintervalo de energía es llamado un "grupo y el número del grupo está dado por el índice i para el límite de energía más bajo. La forma de numerarlos es tal que cuando i se incrementa la energía decrece, i.e. $E_i > E_{i+1}$, esta convención se ha hecho para que, si un neutrón, al ser generado por fisión en el grupo 1, puede entonces pasar, durante el transporte, del grupo 1 al grupo 2, del 2 al 3 y así sucesivamente y en general del i' al i con i >i'.

Siempre que sea posible, el intervalo de energías para un grupo es escogido en forma tal que la variación con la energía de las secciones en el grupo se conserve razonablemente constante, i.e. que tenga una variación muy pequeña. Como esto no es posible en muchos casos, por ejemplo en el caso de resonancias, se trata de aislar cada una en un intervalo de energía y se considera un valor constante de la sección, que será un promedio po

sado adecuado de la misma en ese intervalo. En esta forma se definen los I grupos para los cuales las secciones tendrán valores constantes.

El siguiente paso consiste en integrar la ecuación 2.14 sobre la energía, con lo cual se obtendrán I ecuaciones independientes de la energía, una para cada grupo. Entonces, considerando la integración sobre el i-ésimo grupo, esto es $E_i \leq E \leq E_{i-1}$, tenemos:

$$- \mu \int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(\beta,\mu,E)dE + \beta \int_{E_i}^{E_{i-1}} \Sigma(E)\ \phi(\beta,\mu,E)dE - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \qquad 2.15$$

$$P_n(\mu) \sum_j \int_{E_i}^{E_{i-1}} \int_{E'_j}^{E'_{j-1}} c\Sigma_n(E'\to E) \int_{\Omega'} P_n(\mu')\ \phi(\beta,\mu',E')d\Omega'\ dE'dE = 0$$

donde, en el último término, se ha sustituído:

$$\int_{E'} dE' = \sum_j \int_{E'_j}^{E'_{j-1}} dE' \qquad 2.16$$

ya que se debe considerar la transferencia de neutrones de cualquier grupo al i-ésimo.

Cambiando de notación, se puede escribir esta ecuación como:

$$- \mu\phi_i(\beta,\mu) + \beta\,\Sigma_i\,\phi_i(\beta,\mu) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi}\, P_n(\mu)$$

$$\int_{\Omega} c\Sigma_{nj\to i}\,\phi_j(\beta,\mu')\,P_n(\mu')d\Omega' = 0 \qquad 2.17$$

donde

ϕ_i , Σ_i y $c\Sigma_{nj\to i}$

se definen por:

$$\phi_i(\beta,\mu) \equiv \int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(\beta,\mu,E)dE \qquad 2.18$$

$$\Sigma_i \equiv \frac{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \Sigma(E)\,\phi(\beta,\mu,E)dE}{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(\beta,\mu,E)dE} \qquad 2.20$$

$$\Sigma_{nj\to i} \equiv \frac{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \int_{E'_j}^{E_{j-1}} c\Sigma_n(E'\to E)\,\phi(\beta,\mu',E')dE'dE}{\int_{E'_j}^{E'_{j-1}} \phi(\beta,\mu',E')dE'}$$

Las cantidades definidas por las expresiones 2.19 y 2.20 --

son las secciones de grupo, llamadas "constantes de grupo", como son conocidas comunmente. Las secciones definidas por 2.20 son conocidas como las "secciones de transferencia", ya que se refieren a la transferencia de neutrones del grupo j al grupo i, -- (incluyendo j = i) (4,8). Estas constantes de grupo nos siguen caracterizando la interacción entre los ahora grupos discretos - de neutrones y el medio donde se transportan. Cabe hacer notar que si la sección total fuera independiente de la energía, i.e. $\Sigma(E) = \Sigma$, entonces $\Sigma_{mj\to i}$ sería igual a Σ para todo valor de m.

Es importante observar que el conjunto de ecuaciónes 2.17 llamadas "ecuaciones de Multigrupos", están acopladas y son equivalentes a la ecuación de transporte 2.12. Sin embargo, involucran a las constantes de grupo y estas, de acuerdo a las expresiones 2.19 y 2.20, son funciones de $\phi(\beta,\mu,E)$ en los diferentes grupos y estas funciones no son conocidas. Es decir, para el conocimiento de las constantes de grupo es necesario tener una -- expresión para la función $\phi(\beta,\mu,E)$ i.e. conocer la dependencia - energética del flujo de neutrones. Entonces para resolver estas ecuaciones primeramente se hace una aproximación sobre la forma de la variación del flujo con la energía en los diferentes grupos y con ello se tienen valores estimados para las constantes - de grupo que después deberán refinarse a medida que se avanza en el cálculo, esto lo discutiremos más adelante (4,8).

Para proceder con el tratamiento del método de Multigrupos,

supondremos que las constantes de grupo son conocidas.

Las ecuaciones 2.17 son las ecuaciones de Multigrupos, las cuales forman un sistema de I ecuaciones homogéneas, acopladas y de primer orden que podemos escribir como:

$$-\mu\,\phi_i(\beta,\mu) + \beta\Sigma_i\phi_i(\beta,\mu) - \frac{\beta c}{2}\; M_i(\beta,\mu) = 0 \qquad 2.21$$

donde:

$$M_i(\beta,\mu) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_j \Sigma_{nj\to i} P_n(\mu) h_{nj}(\beta) \qquad 2.22$$

y

$$h_{nj}(\beta) \equiv \int_{-1}^{1} \phi_j(\beta,\mu')\, P_n(\mu')d\mu' \qquad 2.23$$

La función $M_i(\beta,\mu)$, como vemos de su definición, está dada en términos de la $\Sigma_{nj\to i}$, o sea las secciones de transferencia y de las $h_{nj}(\beta)$, o sea del flujo en el grupo j. Entonces, $M_i(\beta,\mu)$ representa la contribución de los demás grupos al grupo i.

Las ecuaciones 2.21 son un sistema de ecuaciones homogéneas que se pueden escribir de la forma siguiente:

$$(\beta\Sigma_i-\mu)\phi_i(\beta,\mu) = \frac{\beta c}{2}\; M_i(\beta,\mu) \qquad 2.24$$

$$\phi_i(\beta,\mu) = \frac{\frac{\beta c}{2}}{(\beta\Sigma_i-\mu)} \; M_i(\beta,\mu) = \phi_i(\beta,\mu)\; M_i(\beta,\mu) \qquad 2.25$$

donde:

$$(\beta\Sigma_i-\mu)\;\phi_i(\beta,\mu) = \frac{\beta c}{2} \qquad 2.26$$

La expresión 2.25 es una ecuación integral en $\phi_i(\beta,\mu)$ y ya que el Método de Multigrupos permite efectuar los cálculos mediante el uso de computadoras, es conveniente utilizar una técnica iterativa para resolverla. Dentro de esta técnica se puede partir suponiendo que $M_i(\beta,\mu)$ es inicialmente igual a uno, es decir, la contribución de los demás grupos al grupo i es igual a uno, lo cual implica encontrar las soluciones a la ecuación 2.26 que dependen de los valores adecuados de β, que se determinan de una ecuación característica, como se vera más adelante. Con esta primera aproximación para las ϕ_i'S se puede hacer la siguiente iteración que consiste en calcular las h_{nj} y con éstas las Mi(β,μ), sustituir estos valores en la ecuación 2.25 y encontrar una nueva aproximación para las ϕ_i'S. Este proceso iterativo se repite hasta que la relación de las ϕ_i'S obtenidas de dos interacciones sucesivas sea constante.

La expresión 2.26 forma un sistema de I ecuaciones acopladas homogéneas para las ϕ_i, y es semejante a la ecuación que surge en la determinación del flujo angular para un sistema con las mismas características que el que nos ocupa y transporte de neu-

trones monoenergéticos, que sufren dispersión isotrópica (9,13). Esta expresión se resuelve por diferentes métodos, entre los que se encuentran el método polinomial el cual será discutido en la siguiente sección utilizando polinomios de Legendre para con --- ello obtener los valores adecuados de β y las expresiones para - ϕ_i, con lo cual se podrá continuar con el método de Multigrupos para determinar las ϕ_i. El utilizar polinomios de Legendre es - congruente con la técnica que se está siguiendo en el método de Multigrupos.

2.4 DESARROLLO DE LA FUNCION $\phi_i(\beta,\mu)$ EN POLINOMIOS DE LEGENDRE

El método polinomial consiste en proponer que:

$$\phi_i(\beta,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} g_{ni}(\beta)\, P_n(\mu) \qquad 2.27$$

donde $P_n(\mu)$ son los polinomios de Legendre de grado n, tales que:

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\, P_m(\mu)d\mu = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{n,m} \qquad 2.28$$

y los coeficientes $g_{ni}(\beta)$ se deben determinar.

En el apéndice A se encuentra la información referente a -- los polinomios de Legendre que nos será de utilidad en este tratamiento. (Esta información fue tomada del libro: SPECIAL FUNC-- TIONS AND THEIR APPLICATIONS by N.N. LEBEDEV).

El desarrollo expresado en 2.27 será ahora sustituido en la ecuación 2.26 y el resultado multiplicado por $\frac{2n+1}{2}$ $P_n(\mu)$ e integrando sobre μ de -1 a 1 para hacer uso de la ortogonalidad de - los polinomios de Legendre, y así obtener:

$$-\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,g_{ni}(\beta)\,P_n(\mu)+\beta\Sigma_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,g_{ni}(\beta)\,P_n(\mu)=\frac{\beta c}{2}$$

Pero:

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x) \qquad 2.29$$

entonces:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\,g_{ni}(\beta)\,\{(n+1)\,P_{N+1}(\mu)+nP_{n-1}(\mu)\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,\beta\,\Sigma_i g_{ni}(\beta)\,P_n(\mu)=\frac{\beta c}{2} \qquad 2.30$$

Además:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\,g_{ni}(\beta)\{(n+1)\,\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_{n+1}(\mu)\,P\,(\mu)d\mu+n\,\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_{n-1}(\mu)$$

$$P_n(\mu)d\mu\}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\,\beta\Sigma_i g_{ni}(\beta)\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(\mu)\,P_n(\mu)d\mu=\frac{\beta c}{2}\int_{-1}^{1}P_n(\mu)d\mu$$

y por la relación 2.28, tenemos:

$$-(n+1)\, g_{n+1}(\beta) - n g_{n-1}(\beta) + (2n+1)\, \beta \Sigma g_n(\beta) = \frac{\beta c}{2}\, \delta_{n,0} \qquad 2.31$$

Se ha omitido el índice i por comodidad en la notación, pero es necesario recordar que tendremos la misma ecuación para cada uno de los grupos.

Esta última expresión implica un conjunto infinito de ecuaciones algebraícas en β para cada uno de los I grupos y por consiguiente un número infinito de soluciones. Para fines practicos se establece un límite superior, para este conjunto. Es decir, el conjunto de ecuaciones se trunca de la siguiente manera. Consideraremos las primeras N+1 ecuaciones de este conjunto, --- i.e. aquellas para las cuales n = 0,1,2, ..., N, esto involucra N+1 incógnitas, o sea g_n para n = 0,1,2, ..., N. El número de incógnitas será igual al número de ecuaciones suponiendo que:

$$g_{N+1}(\beta) = 0 \qquad 2.32$$

de este modo obtenemos la llamada aproximación P_N. Esto es, se trunca el desarrollo 2.27 después de N términos, haciendo $g_n = 0$ para n>N, lo que implica hacer también $g_{n+2}(\beta) = 0$. Físicamente la aproximación P_N significa que el flujo se puede representar adecuadamente por un número finito de terminos, pero se tendrá siempre un error que sera más pequeño mientras más alto sea el grado de aproximación. Además el hacer $g_{n+2}(\beta) = 0$ resulta soln

mente en agregar un término de fuente (Kofin) por lo que la condición 2.32 es suficiente y congruente con las condiciones a la frontera si se toma N impar como se vera en la pag. 68.

Ahora, reparametrizando las ecuaciones 2.31, definiendo - - $\beta\Sigma=\gamma$, obtendremos:

$$(n+1)\, g_{n+1}(\gamma) + n g_{n-1}(\gamma) - (2n+1)\gamma g_n(\gamma) = -\frac{\gamma c}{2L}\,\delta_{n,0} \qquad 2.33$$

donde las funciones $g_n(\gamma)$ deberían expresarse como $g_n(\frac{\gamma}{L})$ pero dado que lo que nos interesa es determinar los valores de β, con - determinar los valores γ los de β quedarían determinados, por lo que la notación y el tratamiento siguiente son congruentes.

Ahora, para tratar de obtener las soluciones a las ecuaciones 2.33, vemos que si $n = 0$, obtenemos:

$$g_1(\gamma) = g_0(\gamma) - \frac{\gamma c}{2L} \qquad 2.34$$

y para $n \geq 1$:

$$(n+1)g_{n+1}(\gamma) + n g_{n+1}(\gamma) - (2n+1)\, g_n(\gamma) = 0 \qquad 2.35$$

Como estamos en la aproximación P_N, el desarrollo 2.27 termina en el N-ésimo polinomio, cumpliéndose la condición 2.32, -- por lo que la última ecuación de 2.31 ó 2.33, queda como:

$$n g_{N-1}(\gamma) - (2N+1)\gamma g_N(\gamma) = 0 \qquad 2.36$$

La expresión 2.35 es una relación de recurrencia para las - g_n, la cual es semejante a la que cumplen los polinomios de Le-

gendre $P_n(x)$ y los polinomios $W_{n-1}(x)$, los cuales están definidos como sigue (14,15):

$$W_{n-1}(x) = P_n(x)\, Q_0(x) - Q_n(x) \qquad 2.37$$

$$W_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(\zeta)}{x - \zeta}\, d\zeta \qquad 2.38$$

donde $Q_n(x)$ son las funciones de Legendre de segunda especie --- (14,15,16). Los $W_{n-1}(x)$ son la parte no singular de $Q_n(x)$ - - - (14,16).

La función $W_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado n en x. Por lo tanto, las soluciones de 2.35 están dadas por:

$$g_n(\gamma)\ aP_n(\gamma) + bW_{n-1}(\gamma) \qquad 2.39$$

para $n = 0,1,2, \ldots ,N$

donde a y b son funciones de γ que dependen del grado de aproximación polinomial y que se determinan de la manera siguiente:

Para $n = 0$ tenemos de 2.39 que:

$$g_0(\gamma) = aP_0(\gamma) + bW_{-1}(\gamma) \qquad 2.40$$

$$= a$$

Cabe hacer notar que todos los $g_n(\gamma)$ con índice n negativo son iguales a cero ya que $P_{-\ell}(x)$ y $W_{-\ell}(x) = 0$ para todo $\ell \in Z^+$ -

gendre $P_n(x)$ y los polinomios $W_{n-1}(x)$, los cuales están definidos como sigue (14,15):

$$W_{n-1}(x) = P_n(x)\, Q_o(x) - Q_n(x) \qquad 2.37$$

$$W_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(\zeta)}{x - \zeta}\, d\zeta \qquad 2.38$$

donde $Q_n(x)$ son las funciones de Legendre de segunda especie --- (14,15,16). Los $W_{n-1}(x)$ son la parte no singular de $Q_n(x)$ - - - (14,16).

La función $W_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado n en x. Por lo tanto, las soluciones de 2.35 están dadas por:

$$g_n(\gamma)\ aP_n(\gamma) + bW_{n-1}(\gamma) \qquad 2.39$$

para $n = 0,1,2, \ldots ,N$

donde a y b son funciones de γ que dependen del grado de aproximación polinomial y que se determinan de la manera siguiente:

Para $n = 0$ tenemos de 2.39 que:

$$g_o(\gamma) = aP_o(\gamma) + bW_{-1}(\gamma) \qquad 2.40$$

$$= a$$

Cabe hacer notar que todos los $g_n(\gamma)$ con índice n negativo son iguales a cero ya que $P_{-\ell}(x)$ y $W_{-\ell}(x) = 0$ para todo $\ell \in Z^+$ -

(14,15,16).

Haciendo uso de 2.40 en la expresión 2.34, tenemos que:

$$\mathcal{E}_1(\gamma) = \gamma\mathcal{E}_0(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma} = a\gamma - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \qquad 2.41$$

Por otro lado, de la expresión 2.39 vemos que, para n = 1:

$$\mathcal{E}_1(\gamma) = aP_1(\gamma) + bM_0(\gamma) \qquad 2.42$$

$$= a\gamma + b$$

Comparando miembro a miembro las expresiones 2.41 y 2.42 resulta que:

$$b = -\frac{\gamma c}{2\Sigma} \qquad 2.43$$

De esta manera hemos determinado la función b en términos del parámetro γ (el cual está relacionado con β) y de las características del medio (a través de c y Σ).

Ahora, para determinar la función a es necesario recordar -- primeramente a la expresión 2.23 cuya condición inicial $h_0(\beta)$ es es la condición de normalización ya que, como sabemos la integral del flujo angular sobre todas las direcciones nos da el flujo de neutrones, que podemos considerar igual a uno, esto es:

$$h_0(\beta) = \int_{-1}^{1} \phi(\beta,\mu)d\mu = \int_{-1}^{1} M(\beta,\mu)\ \phi(\beta,\mu)d\mu = 1$$

De donde:

$$1 = \int_{-1}^{1} N(\gamma,\mu)\ \psi(\gamma,\mu)d\mu = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2}\ g_n(\gamma) \int_{-1}^{1} N(\gamma,\mu)P_n(\mu)d\mu = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ g_n(\gamma) \qquad 2.44$$

donde:

$$q_n = \int_{-1}^{1} N(\gamma,\mu)\ P_n(\mu)d\mu \qquad 2.45$$

Cabe hacer notar que aunque a primera aproximación se ha -- supuesto $N(\gamma,\mu)$ igual con uno, dentro de la técnica de iteración se deberán usar los valores de N que se vayan encontrando, por - lo cual se ha incluido $N(\gamma,\mu)$ dentro de 2.44 y 2.45.

La función a se obtiene al sustituir la expresión 2.39 en - la condición 2.44, con lo que se obtiene:

$$1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ g_n(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}(aP_n(\gamma) + bW_{n-1}(\gamma))$$

$$= a \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ P_n(\gamma) + b \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ W_{n-1}(\gamma)$$

de donde:

$$a \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ P_n(\gamma) = 1 - b \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n}\ W_{n-1}(\gamma)$$

entonces:

$$a = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} P_n(\gamma)} \{1 - b \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} W_{n-1}(\gamma)\} \qquad 2.46$$

y haciendo uso del resultado 2.43 obtenemos:

$$a = \frac{1}{F_N(\gamma)} \{1 + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} W_{n-1}(\gamma)\} \qquad 2.47$$

donde:

$$F_N(\gamma) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} P_n(\gamma) \qquad 2.48$$

Entonces, la expresión 2.39 queda expresada de la siguiente forma:

$$g_n(\gamma) = \frac{1}{F_N(\gamma)} \{ [1 + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} W_{n-1}(\gamma)] P_n(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \qquad 2.49$$

$$F_N(\gamma) W_{n-1}(\gamma)\}$$

donde $q_n(\gamma)$ y $F_N(\gamma)$ están dados por las expresiones 2.45 y 2.48 respectivamente.

Entonces hemos encontrado la expresión para las funciones a y b que dependen de γ, así como para las $g_n(\gamma)$ en términos de cantidades conocidas. Estas $g_n(\gamma)$ son los coeficientes del desarrollo en polinomios de Legendre de las funciones $\phi_i(\gamma,\mu)$. Sin embargo, aún nos falta conocer los valores del parámetro γ, el cual involucra al parámetro β de separación de la variable espacial. Dicho parámetro se determinará en la siguiente sección en la que llegaremos a obtener la ecuación cuyas soluciones nos dén los valores de γ. Esta ecuación es comunmente llamada ecuación característica o ecuación secular; aquí la llamaremos ecuación característica.

2.5 LA ECUACION CARACTERISTICA

Se le llama ecuación característica por ser la que nos dará los valores permisibles del parámetro γ y la podemos obtener usando la expresión 2.49 y la condición 2.32, es decir:

$$g_{N+1}(\gamma) = \frac{1}{F_N(\gamma)} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} M_{n-1}(\gamma) \right] P_{N+1}(\gamma) \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma c}{2\Sigma} F_N(\gamma) M_N(\gamma) \right\} = \frac{1}{F_N(\gamma)} \left\{ P_{N+1}(\gamma) + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \right.$$

$$\left. \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} M_{n-1}(\gamma) P_{N+1}(\gamma) \right\} - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} P_n(\gamma) M_N(\gamma) = 0$$

Entonces hemos encontrado la expresión para las funciones - a y b que dependen de γ, así como para las $g_n(\gamma)$ en términos de cantidades conocidas. Estas $g_n(\gamma)$ son los coeficientes del desarrollo en polinomios de Legendre de las funciones $\phi_i(\gamma,\mu)$. Sin embargo, aún nos falta conocer los valores del parámetro γ, el - cual involucra al parámetro β de separación de la variable espacial. Dicho parámetro se determinará en la siguiente sección en la que llegaremos a obtener la ecuación cuyas soluciones nos dén los valores de γ. Esta ecuación es comunmente llamada ecuación característica o ecuación secular; aquí la llamaremos ecuación - característica.

2.5 LA ECUACION CARACTERISTICA

Se le llama ecuación característica por ser la que nos dará los valores permisibles del parámetro γ y la podemos obtener - - usando la expresión 2.49 y la condición 2.32, es decir:

$$g_{N+1}(\gamma) = \frac{1}{F_N(\gamma)} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} W_{n-1}(\gamma) \right] P_{N+1}(\gamma) \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma c}{2\Sigma} F_N(\gamma) W_N(\gamma) \right\} = \frac{1}{F_N(\gamma)} \left\{ P_{N+1}(\gamma) + \frac{\gamma c}{2\Sigma} \right.$$

$$\left. \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} W_{n-1}(\gamma) P_{N+1}(\gamma) \right\} - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} P_n(\gamma) W_N(\gamma) = 0$$

que se puede escribir como:

$$\delta_{N+1}(\gamma) = \frac{1}{F_N(\gamma)} \left(P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \quad V_N(\gamma)\right) = 0 \qquad 2.50$$

donde:

$$V_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} \left(P_n(\gamma)\, W_N(\gamma) - P_{N+1}(\gamma)\, W_{n-1}(\gamma)\right) \qquad 2.51$$

La expresión 2.50 es la ecuación característica buscada y es una ecuación algebraíca para γ, de orden N+1. Ahora probaremos que el lado derecho de 2.51 es un polinomio de orden N. La suma puede ser llevada a cabo fácilmente usando la relación 2.37 para eliminar $W_{n-1}(\gamma)$ en la expresión 2.51, obteniéndose:

$$V_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} \left(P_n(\gamma)\left[P_{N+1}(\gamma)Q_0(\gamma) - Q_{N+1}(\gamma)\right] - P_{N+1}(\gamma)\left[P_N(\gamma)\right.\right.$$

$$\left.\left.Q_0(\gamma) - Q_N(\gamma)\right]\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} \; P_n(\gamma)P_{N+1}(\gamma)\; Q_0(\gamma)$$

$$- \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} \; P_n(\gamma)\; Q_{N+1}(\gamma) - \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} P_{N+1}(\gamma)\; P_N(\gamma)\; Q_0(\gamma) + \sum_{n=0}^{N}$$

$$\frac{q_n}{h_n} P_{N+1}(\gamma)\; Q_n(\gamma)$$

entonces:

$$V_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_n}{h_n} \{P_{N+1}(\gamma)\ Q_n(\gamma) - P_n(\gamma)\ Q_{N+1}(\gamma)\} \qquad 2.52$$

Haciendo uso de las fórmulas de Cristoffel-Darboux (14,16) podemos llevar al cabo la suma de la expresión anterior. Dichas fórmulas son:

$$\sum_{\ell=0}^{L} \frac{1}{h_\ell} P_\ell(x)\ P_\ell(y) = \frac{L+1}{x-y} \{P_{L+1}(x)\ P_L(y) - P_L(x)\ P_{L+1}(y)\}$$

$$2.53$$

$$\sum_{\ell=0}^{L} \frac{1}{h_\ell} P_\ell(x)\ Q_\ell(y) = \frac{1}{x-y} \{(L+1) \{P_{L+1}(x) Q_L(y) - P_L(x)\ Q_{L+1}(y)\} - 1\}$$

y recordando la expresión 2.45 para q_n, obtenemos:

$$V_N(\gamma) = P_{N+1}(\gamma) \int_{-1}^{1} M(\gamma,\mu) \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{h_n} P_n(\mu)\ Q_n(\gamma) d\mu - Q_{N+1}(\gamma)$$

$$\int_{-1}^{1} M(\gamma,\mu) \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{h_n} P_n(\mu)\ P_n(\gamma) d\mu \qquad 2.54$$

Entonces, haciendo uso de dichas fórmulas, tendremos:

$$V_N(\gamma) = P_{N+1}(\gamma) \int_{-1}^{1} M(\gamma,\mu) \frac{1}{\mu-\gamma} \{(N+1) \{P_{N+1}(\mu)\ Q_N(\gamma) - P_N(\mu)\ Q_{N+1}(\gamma)\}$$

$$-1)d\mu - Q_{N+1}(\gamma) \int_{-1}^{1} M(\gamma,\mu) \frac{N+1}{\mu-\gamma} [P_{N+1}(\mu) P_N(\gamma) - P_N(\mu)$$

$$P_{N+1}(\gamma)]d\mu = P_{N+1}(\gamma) (N+1)\{Q_N(\gamma) \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu)P_{N+1}(\mu)}{\mu-\gamma} d\mu$$

$$- Q_{N+1}(\gamma) \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu) P_N(\mu)}{\mu-\gamma} d\mu\} - P_{N+1}(\gamma) \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu)}{\mu-\gamma} d\mu$$

$$- Q_{N+1}(\gamma) (N+1) \{P_N(\gamma) \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu) P_{N+1}(\mu)}{\mu-\gamma} d\mu - P_{N+1}(\gamma)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu) P_N(\mu)}{\mu-\gamma} d\mu\}$$

es decir:

$$V_N(\gamma) = (N+1)[P_{N+1}(\gamma) Q_N(\gamma) - P_N(\gamma) Q_{N+1}(\gamma)]$$

$$\{ \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu) P_{N+1}(\mu)}{\mu-\gamma} d\mu - \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu) P_{N+1}(\gamma)}{\mu-\gamma} d\mu\} \qquad 2.55$$

La cual, si introducimos la relación (14,15,16):

$$P_{N+1}(\gamma) Q_N(\gamma) - P_N(\gamma) Q_{N+1}(\gamma) = \frac{1}{N+1} \qquad 2.56$$

queda como:

$$V_N(\gamma) = \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu)\ P_{N+1}(\mu)}{\mu-\gamma}\, d\mu - \int_{-1}^{1} \frac{M(\gamma,\mu)\ P_{N+1}\ (\gamma)}{\mu-\gamma}\, d\mu$$

de donde:

$$V_N(\gamma) = \int_{-1}^{1} M(\gamma,\mu) \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu}\, d\mu \qquad 2.57$$

Recordando la expresión 2.38, esto es:

$$W_m(\chi) = \int_{-1}^{1} \frac{P_{m+1}\ (\chi) - P_{m+1}\ (\zeta)}{\chi-\zeta}\, d\zeta$$

la cual define un polinomio de grado m, utilizando una función de peso igual a uno, vemos que es equivalente a la expresión 2.57 si se toma $M(\gamma,\mu)$ como función de peso. Anzaldo (10) demuestra que efectivamente éste es el caso y la expresión 2.57 define entonces un polinomio de grado N.

Esto nos permite escribir a la ecuación característica de una forma simple y cerrada, válida para cualquier orden de aproximación, de la siguiente forma:

$$P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}\ V_N\ (\gamma) = 0 \qquad 2.58$$

La cual es una ecuación algebraíca de grado N+1, cuyas raíces nos darán los valores permisibles de γ y, por lo tanto, los valores de β, el parámetro de separación de la parte espacial.

El análisis y las ecuaciones desarrolladas en las secciones 2.4 y 2.5 se reducen a las ecuaciones ya conocidas (9,12,13,17) para el caso de interacción isotrópica y una sola energía.

A partir de la expresión 2.58 podemos obtener los valores permisibles de γ y por lo tanto de β, con lo cual se determinarán las funciones ϕ_i completamente y con ellas la primera aproximación de las funciones ϕ_i para los diferentes grupos de energías.

2.6 LA SOLUCION GENERAL PARA EL i-ESIMO GRUPO DE ENERGIA

En esta sección, utilizaremos las soluciones de la ecuación 2.26, para obtener las soluciones $\phi_i(\beta,\mu)$ de las ecuaciones 2.25. Para ello, basta con plantear la solución general para la ecuación del i-ésimo grupo de energía, que plantearemos a continuación.

Como vimos en la sección 2.2, las soluciones parciales de la ecuación 2.11, recordando que $\gamma=\beta\Sigma$, estarán dadas por:

$$\phi_i^{(N)}(\ ,\ ) = e^{-\frac{\mu\Sigma}{\gamma}}\ \phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) \qquad 2.59$$

donde:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = N_i(\gamma,\mu)\ \psi_i^{(N)}(\gamma,\mu) \qquad 2.60$$

y

$$\psi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2}\ g_{ni}(\gamma)\ P_n(\mu) \qquad 2.61$$

El índice superior (N) indica el grado de aproximación en el desarrollo en polinomios de Legendre de la variable angular.

Los coeficientes $g_{ni}(\gamma)$ de la expresión 2.61 están dados por 2.49 y los valores del parámetro γ están dados por las raíces de la ecuación caracterísitca dada en la expresión 2.58 la cual es de grado N+1 por lo que habrá en general N+1 valores diferentes de γ.

Por simplicidad omitiremos el índice para los valores de γ.

Sustituyendo la expresión de $g_{ni}(\gamma)$ en la ecuación 2.61 se obtiene:

$$\psi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2}\ P_n(\mu)\ \left(a_i\ P_n(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}\ W_{n-1}(\gamma)\right) \qquad 2.62$$

$$= \sum_{n=0}^{N} g_o(\gamma)\ \frac{2n+1}{2}\ P_n(\mu)\ P_n(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma} \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2}\ P_n(\mu)\ W_{n-1}(\gamma)$$

donde $g_{oi}(\gamma) = a_i(\gamma)$, dada por 2.40.

Ahora, usando la relación 2.37 podemos eliminar $W_{n-1}(\gamma)$ y obtener:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = g_{oi}(\gamma) \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu)[P_n(\gamma)$$

$$Q_o(\gamma) - Q_n(\gamma) =$$

$$= (g_{oi} - \frac{\gamma c}{2\pi} Q_o(\gamma)) \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\gamma) + \frac{\gamma c}{2\pi} \sum_{n=0}^{N}$$

$$\frac{2n+1}{2} P_n(\mu) Q_n(\gamma) \qquad 2.63$$

Haciendo uso de las fórmulas de Christoffel Darboux dadas en 2.53, podemos evaluar las sumas de la expresión anterior, obteniendo:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = (g_{oi} - \frac{\gamma c}{2\pi} Q_o(\gamma)) \frac{N+1}{\mu-\gamma}[P_{N+1}(\mu) P_N(\gamma) - P_N(\mu) P_{N+1}(\gamma)]$$

$$+ \frac{\gamma c}{2\pi} [\frac{1}{\gamma-\mu} + \frac{N+1}{\mu-\gamma}[P_{N+1}(\mu) Q_N(\gamma) - P_N(\mu) Q_{N+1}(\gamma)$$

reacomodando términos:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{\gamma c}{2\Sigma}\frac{1}{\gamma-\mu} + g_o\frac{N+1}{\mu-\gamma}\{P_{N+1}(\mu)\,P_N(\gamma) - P_N(\mu)\,P_{N+1}(\gamma)\}$$

$$-\frac{\gamma c}{2\Sigma}Q_o(\gamma)\frac{N+1}{\mu-\gamma}\{P_{N+1}(\mu)\,P_N(\gamma) - P_N(\mu)\,P_{N+1}(\gamma)\}$$

$$+\frac{\gamma c}{2\Sigma}\frac{N+1}{\mu-\gamma}\{P_{N+1}(\mu)\,Q_N(\gamma) - P_N(\mu)\,Q_{N+1}(\gamma)\} \qquad 2.64$$

De donde:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{N+1}{\mu-\gamma}P_{N+1}(\mu)\{g_{oi}P_N(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}Q_o(\gamma)$$

$$P_N(\gamma) + \frac{\gamma c}{2\Sigma}Q_N(\gamma)\} - \frac{N+1}{\mu-\gamma}P_N(\mu)\{g_{oi}P_{N+1}(\gamma)$$

$$-\frac{\gamma c}{2\Sigma}Q_o(\gamma)P_{N+1}(\gamma) + \frac{\gamma c}{2\Sigma}Q_{N+1}(\gamma)\} + \frac{\gamma c}{2\Sigma}\frac{1}{\gamma-\mu}$$

$$= \frac{\gamma c}{2\Sigma}\frac{1}{\gamma-\mu} + \frac{N+1}{\mu-\gamma}P_{N+1}(\mu)\{g_{oi}P_N(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}$$

$$\{Q_o(\gamma)P_N(\gamma) + Q_N(\gamma)\}\} - \frac{N+1}{\mu-\gamma}P_N(\mu)\{g_{oi}$$

$$P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}\{Q_o(\gamma)P_{N+1}(\gamma) - Q_{N+1}(\gamma)\}\} \qquad 2.65$$

Es posible hacer una simplificación, si recordamos la expresión 2.37 y la condición:

$$g_{N+1}(\gamma) = g_0\, P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, W_N(\gamma) = 0$$

dada en 2.32. Entonces:

$$\psi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{N+1}{\mu-\gamma}\, P_{N+1}(\gamma)\, \{g_0\, P_N(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, W_{N-1}(\gamma)\}$$

$$\frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{1}{\gamma-\mu}$$

Pero de 2.66 tenemos:

$$g_0 = \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{W_N(\gamma)}{P_{N+1}(\gamma)}$$

Con lo que:

$$\psi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{N+1}{\mu-\gamma}\, P_{N+1}(\mu)\, \{\frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{W_N(\gamma)}{P_{N+1}(\gamma)}\, P_N(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma}$$

$$W_{N-1}(\gamma)\} + \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{1}{\gamma-\mu}$$

$$= \frac{N+1}{\mu-\gamma}\, \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)}\, \{P_N(\gamma)\, W_N(\gamma)$$

$$- P_{N+1}(\gamma)\, W_{N-1}(\gamma)\} + \frac{\gamma c}{2\Sigma}\, \frac{1}{\gamma-\mu}$$

Es posible hacer una última simplificación si utilizamos la siguiente relación (14,15,16):

$$P_N(\gamma)\, M_N(\gamma) - P_{N+1}(\gamma)\, M_{N-1}(\gamma) = \frac{1}{N+1} \qquad 2.70$$

obteniéndose:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{N+1}{\mu-\gamma}\,\frac{\gamma c}{2\Sigma}\,\frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)}\,\frac{1}{N+1} + \frac{\gamma c}{2\Sigma}\,\frac{1}{\gamma-\mu}$$

entonces:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{\gamma c}{2\Sigma}\,\frac{1}{\gamma-\mu}\left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)}\right] \qquad 2.71$$

Con este resultado, las ecuaciones 2.60 y 2.59 para el i-ésimo grupo de energía toman la siguiente forma:

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = M_i(\gamma,\mu)\,\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) \qquad 2.60$$

$$\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) = \frac{\gamma c}{2\Sigma}\,\frac{M_i(\gamma,\mu)}{\gamma-\mu}\left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)}\right] \qquad 2.72$$

y como:

$$\phi_i^{(N)}(\chi,\mu) = e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}}\,\phi_i^{(N)}(\gamma,\mu) \qquad 2.59$$

Entonces:

$$\phi_i^{(N)}(x,\mu) = e^{-\frac{x\Sigma}{\gamma}} \frac{\gamma c}{2\Sigma} \frac{M_i(\gamma,\mu)}{\gamma-\mu} \left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)} \right] \qquad 2.73$$

Recordando que esta expresión es válida para cada uno de -- los valores de γ, los cuales son N+1.

Finalmente, podemos encontrar la solución general de la - - ecuación de transporte de neutrones simplificada para el i-ésimo grupo de de energía, sumando todas las soluciones parciales obtenidas:

$$\phi_i(x,\mu) = \sum_{\ell=1}^{N+1} A_{\ell i}\, \phi_{\ell i}^{(N)}(x,\mu) \qquad 2.74$$

o sea:

$$\phi_i(x,\mu) = \sum_{\ell=1}^{N+1} A_{\ell i}\, e^{-\frac{x\Sigma}{\gamma_\ell}} \frac{\gamma_\ell c}{2\Sigma} \frac{M_i(\gamma_\ell,\mu)}{\gamma_\ell-\mu} \left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma)} \right] \qquad 2.75$$

donde los coeficientes $A_{\ell i}$ serán determinados de las condiciones a la frontera. Un ejemplo de ellos se muestra en la referencia 18.

La expresión 2.75 representa la solución para el i-ésimo -- grupo de energía. Sin embargo, esta solución se encuentra en términos de las funciones $M_i(\gamma,\mu)$ las cuales a su vez dependen de -

las ϕ_i por lo que se hace necesario emplear métodos iterativos para determinar la solución, a falta de soluciones analíticas. En la sección 2.9 se plantea una forma de resolver dichas ecuaciones.

Por otra parte, las soluciones sólo quedarán completamente determinadas por medio de las condiciones a la frontera adecuadas, las cuales se discutirán en la sección 2.8. Dado que estas condiciones se plantean sobre el flujo y la corriente de neutrones, en la siguiente sección se obtienen las expresiones para ellos.

2.7 EL FLUJO DE NEUTRONES Y LA CORRIENTE DE NEUTRONES

Antes de plantear las condiciones a la frontera adecuadas al tratamiento de la ecuación de transporte de neutrones para el caso considerado, obtendremos el flujo y la corriente de neutrones. Para ello, haremos uso de las soluciones obtenidas en las secciones anteriores. Entonces recordando las definiciones del flujo y la corriente dadas en el capítulo 1, tendremos:

$$\phi(\chi) = \int_{4\pi} \phi(\chi,\mu)d\Omega = 2\pi \int_{\mu} \phi(\chi,\mu)d\mu$$

y

$$J(\chi) = \int_{4\pi} \bar{V}N(\chi,\mu)d\Omega = \int_{4\pi} \Omega\phi(\chi,\mu)d\Omega = \hat{\chi}2\pi\int_{\mu}\mu\phi(\chi,\mu)d\mu$$

entonces:

$$\phi_i(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \phi_i(x,\mu)d\mu = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \int_{-1}^{1} \phi_i^{(N)}(x,\mu)d\mu \qquad 2.76$$

donde los coeficientes $A_{\ell i}$ serán determinados por medio de las - condiciones a la frontera. Sustituyendo la expresión para $\phi_i^{(N)}$ (2.73) en esta ecuación, tenemos:

$$\phi_i(x) = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i}\, e^{-\frac{x\Sigma}{\gamma}} \frac{\gamma c}{\Sigma\Sigma} \frac{1}{P_{N+1}(\gamma)} \int_{-1}^{1} M_i(\gamma,\mu) \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu} d\mu$$

$$= 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i}\, e^{-\frac{x\Sigma}{\gamma}} \frac{\gamma c}{\Sigma\Sigma} \frac{V_N(\gamma)}{P_{N+1}(\gamma)} \qquad 2.77$$

Pero:

$$P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{\Sigma\Sigma} V_N(\gamma) = 0$$

de donde:

$$V_N(\gamma) = \frac{2\Sigma}{\gamma c} P_{N+1}(\gamma) \qquad 2.78$$

Con lo que:

$$\phi_i(x) = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i}\, e^{-\frac{x\Sigma}{\gamma}} \qquad 2.79$$

donde las γ'S, como ya vimos, son las raíces de la ecuación característica 2.58.

Para el módulo de la corriente, tenemos que:

$$J_i(\chi) = 2\pi \int_{-1}^{1} \mu\phi_i(\chi,\mu)d\mu = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \int_{-1}^{1} \mu\phi_i^{(N)}(\chi,\mu)d\mu \qquad 2.80$$

$$= 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i}\, e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \frac{\gamma C}{2\Sigma} \frac{1}{P_{N+1}(\gamma)} \int_{-1}^{1} M_i(\gamma,\mu)\,\mu\, \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu}\, d\mu$$

Pero:

$$\mu \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu} = \frac{1}{\gamma-\mu}\{(\gamma-\mu)\, P_{N+1}(\mu) - (\gamma-\mu)\, P_{N+1}(\gamma)$$

$$+ \gamma[P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)]\}$$

$$= P_{N+1}(\mu) - P_{N+1}(\gamma) + \gamma \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu} \qquad 2.81$$

Entonces:

$$J_i(\chi) = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i}\, e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \frac{\gamma C}{2\Sigma} \frac{1}{P_{N+1}(\gamma)} \{\int_{-1}^{1} M_i(\gamma,\mu)\, P_{N+1}(\mu)d\mu \qquad 2.82$$

$$- \int_{-1}^{1} M_i(\gamma,\mu)\, P_{N+1}(\gamma)d\mu + \gamma \int_{-1}^{1} M_i(\gamma,\mu) \frac{P_{N+1}(\gamma) - P_{N+1}(\mu)}{\gamma-\mu}\, d\mu$$

$$= 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \; e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \; \frac{\gamma c}{2\Sigma} \frac{1}{P_{N+1}(\gamma)} \left(q_n - P_{N+1}(\gamma) \, M_i(\gamma) + \gamma \, V_N(\gamma) \right) \qquad 2.82$$

donde: q_n está dado por la expresión 2.46, V_N por la expresión - 2.57 y

$$M_i(\gamma) = \int_{-1}^{1} M_i(\gamma . \mu) d\mu \qquad 2.83$$

Además, de la expresión 2.78, tenemos:

$$\gamma \, V_N(\gamma) = \frac{2\Sigma}{c} \; P_{N+1}(\gamma)$$

Por lo que la expresión 2.78, queda como:

$$J_i(\chi) = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \; e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \; \frac{\gamma c}{2\Sigma} \left(\frac{q_n}{P_{N+1}(\gamma)} - M_i(\gamma) + \frac{2\Sigma}{c} \right)$$

ó

$$J_i(\chi) = 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \, e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \, \gamma + 2\pi \sum_{\ell} A_{\ell i} \, e^{-\frac{\chi\Sigma}{\gamma}} \; \frac{\gamma c}{2\Sigma} \left(\frac{q_n}{P_{N+1}(\gamma)} - M_i(\gamma) \right) \qquad 2.84$$

Obteniéndose así las expresiones para el flujo 2.79 y la corriente 2.84 de neutrones para el i-ésimo grupo de energía. En la siguiente sección se plantearán las condiciones a la frontera.

2.8 CONDICIONES A LA FRONTERA

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación 2.9 sirvieron para expresar las soluciones de la ecuación inhomogénea mediante el desarrollo 2.12 ó 2.75 en donde los coeficientes de tal desarrollo deben determinarse de las condiciones a la frontera, entre las cuales se encuentran la interfase entre dos medios ó entre un medio y el vacío.

El grado de la aproximación polinomial (P_N) elegido determinará el número de coeficientes distintos de cero, ya que, como vemos de la expresión 2.75, el número de coeficientes distintos de cero depende de los N+1 valores de γ. Cabe mencionar que si uno de los valores de γ es igual con cero la solución parcial correspondiente será idénticamente igual a cero, como puede verse de la expresión 2.73, por lo que no se tendrá una solución completa para el grado de aproximación polinomial usado. Este problema se evita si el grado de aproximación N es impar, por el siguiente razonamiento.

Las soluciones deben mostrar explícitamente la invariancia de la ecuación ante reflexiones, esto es, si $\Phi(\chi,\mu)$ es solución, también debe de serlo $\Phi(-\chi,-\mu)$, lo cual implica que las raíces de la ecuación característica deben aparecer por parejas simétricas respecto al cero, para cualquier grado de aproximación. Entonces si N es impar se tendrá $\frac{N+1}{2}$ raíces positivas no nulas y $\frac{N+1}{2}$ raíces negativas, y si N es par se tendrán $\frac{N}{2}$ raíces positivas, $\frac{N}{2}$ raíces negativas y una raíz nula. Entonces, - - - - - -

para asegurar la invariancia ante reflexiones y obtener una solución completa para el grado de aproximación polinomial usado, debe tomarse N impar, lo cual haremos en lo sucesivo.

Como se mencionó en la sección 1.6 del capítulo 1, independientemente del problema físico que se considere, las soluciones a la ecuación de transporte de neutrones simplificada deben de cumplir con las siguientes condiciones:

a) Que el flujo angular de neutrones $\phi_i(\chi,\mu)$ sea finito, real y no negativo para todo χ y μ.

b) Que en una interfase entre dos medios es necesario que la solución sea una función contínua de la posición (χ) para cualquier μ, lo cual establece la conservación del número de neutrones al cruzar la interfase (es decir, supondremos que no hay fuentes, ni sumideros en la interfase). Esta condición de continuidad de la solución se traduce en la continuidad de las funciones $\phi_i(\chi,\mu)$ definidas en 2.78, tal que:

$\phi_i(\chi,\mu)$ es una función contínua de χ para cualquier μ 2.85

Para el caso de aproximación polinomial con N impar, se obtienen N+1 soluciones distintas de cero, la continuidad se podrá satisfacer ajustando los N+1 coeficientes.

Consideraremos ahora la condición a la frontera adecuada para una interfase entre un medio y el vacío, llamada superficie -

libre (el término superficie libre se utiliza para denotar a una superficie en la cual no entran neutrones al medio provenientes del exterior (1,3,4)), que supondremos se encuentra en $\chi = 0$, con el medio ocupando el espacio $\chi > 0$; supondremos que este medio cumple con las características antes señaladas y que no contiene fuentes. La condición que se establece es entonces:

$$\phi_i(o,\mu) = 0 \qquad \text{para } \mu>0 \qquad 2.86$$

dado que no hay neutrones incidentes en la interfase provenientes del vacío.

Sin embargo, la condición 2.86 implica un número infinito las cuales no pueden ser satisfechas completamente por una aproximación de orden finito, ya que estamos empleando a la aproximación P_N con N impar. Dicha aproximación resulta en el hecho de que solo tengamos N+1 soluciones parciales, con lo que sólo podremos satisfacer $\frac{N+1}{2}$ condiciones. La reducción de la condición 2.86 a este número de condiciones pude hacerse de tres formas (1):

i) Escogiendo $\frac{N+1}{2}$ valores positivos ϕ_i y satisfaciendo 2.86 exactamente en esos puntos, i.e.:

$$\phi_i(0,\mu_j) = 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(N+1) \qquad 2.87$$

ii) Escogiendo $\frac{N+1}{2}$ funciones definidas entre $0 \leq \mu \leq 1$, las cuales llamaremos $\psi_j(\mu)$, que sean ortogonales a $\phi_i(0,\mu)$ en dichos intervalos, i.e.:

$$\int_0^1 \phi_i(0,\mu)\psi_i(\mu)d\mu \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(N+1) \qquad 2.88$$

iii) Reemplazando el vacío en $\chi<0$ por un medio que no sea dispersor ni multiplicativo ($c=0$) sino que sólo sea absorbedor (como si fuera un cuerpo negro) y considerando la superficie libre como una interfase donde las condiciones a la frontera estén dadas de la forma mencionada en 2.86.

Mark (22) demostro que iii) es equivalente a i) con las μ_j en 2.86 dadas por las raíces positivas de

$$P_{N+1}(\mu) = 0 \qquad 2.89$$

en la forma siguiente:

Para el medio "negro" ficticio (el cual nos está representando un medio que sea puramente absorbedor) en $\chi<0$, la expresión 2.40, con $c=0$, queda como:

$$g_{mi}(\gamma) = aP_n(\gamma) + b[P_n(\gamma)\, Q_o(\gamma) - Q_n(\gamma)] = aP_n(\gamma) + b\, W_{n-1}(\gamma)$$

pero como:

$$b = -\frac{\gamma c}{2\Sigma}$$

y c=0, tenemos:

$$g_{mi}(\gamma) = aP_m(\gamma) \qquad 2.90$$

y la ecuación característica 2.58

$$P_{N+1}(\gamma) - \frac{\gamma c}{2\Sigma} V_N(\gamma) = 0$$

se reduce a:

$$P_{N+1}(\gamma) = 0 \qquad 2.91$$

Como se trata de una aproximación de orden finito, es decir de orden N con N impar tenemos que se cumple 2.89, la cual es -- equivalente a 2.91 que tiene (N+1) raíces, de las cuales $\frac{1}{2}$ (N+1) son positivos y $\frac{1}{2}$ (N+1) negativas.

Además, como se deben cumplir las condiciones de continuidad en la interfase, tenemos que solo las $\frac{1}{2}$ (N+1) raíces positivas intervienen en la consideración de las condiciones a la frontera y en la determinación de las constantes $A_{\ell i}$, obteniéndose -

entonces que:

$$\phi_i(0,\mu_j) = 0 \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(N+1) \qquad 2.87$$

esto es, por el hecho de que debe de cumplirse la condición 2.86. Esto representa, la influencia del vacío ó del medio "negro" sobre el medio en consideración, que se refleja en la frontera entre ambos. La forma iii) por lo tanto conduce a las condiciones a la frontera 2.86 con las μ_j dadas por 2.89. Estas son conocidas como las condiciones a la frontera de Mark (22).

Esta condición, utilizando la expresión 2.75, se escribe de la siguiente forma:

$$\phi_i(0,\mu_i) = \sum_{\ell} A_{\ell i}\; e^{-\frac{X\Sigma}{\gamma}} \; \frac{\gamma c}{\Sigma\Sigma} \frac{M_i(\gamma,\mu_i)}{\gamma-\mu_j} \left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu_i)}{P_{N+1}(\gamma)}\right]$$

con $j = 1,2,\ldots,\frac{1}{2}(N+1)$

lo cual implica que:

$$\sum_{\ell} A_{\ell i} \frac{\gamma c}{\Sigma\Sigma} \frac{M_i(\gamma,\mu_j)}{\gamma-\mu_j} \left[1 - \frac{P_{N+1}(\mu_i)}{P_{N+1}(\gamma)}\right] = 0$$

donde los valores de μ están dados por la expresión 2.89. Esta expresión se transforma en un sistema de $\frac{N+1}{2}$ ecuaciones algebraí

cas para los coeficientes A_ℓ, ya que sólo se podrán determinar $\frac{N+1}{2}$ valores de ellos por el hecho de que sólo tendremos $\frac{N+1}{2}$ valores de μ, y de γ, esto es:

$$\sum_{\ell}^{\frac{N+1}{2}} A_{\ell i} \quad \frac{\gamma_\ell c}{\Sigma\Sigma} \frac{M_i(\gamma_\ell,\mu)}{\gamma_\ell - \mu} \quad [1 - \frac{P_{N+1}(\mu)}{P_{N+1}(\gamma_\ell)}] = 0$$

cuya solución nos determina el valor para cada uno de los $\frac{N+1}{2}$ coeficientes $A_{\ell i}$.

Ahora consideraremos la otra vía para determinar las condiciones a la frontera, esto es la condición *ii*).

Para que las condiciones 2.88 sean una aproximación satisfactoria a 2.86 se necesita que las funciones $\Gamma_i(\mu)$ sean $\frac{1}{2}$ (N+1) miembros de un conjunto completo de funciones ortogonales a $\phi_i(0,\mu)$ en el intervalo $0 \leq \mu \leq 1$. Es natural, en vista de la parte importante jugada por los polinomios de Legendre en el tratamiento seguido, seleccionar las $\Gamma_i(\mu)$ del conjunto de $P_n(\mu)$. En el intervalo $0 \leq \mu \leq 1$, los polinomios de Legendre de orden impar forman un conjunto completo y los de orden par también lo forman. Las alternativas de selección son, por lo tanto:

$$\Gamma_i(\mu) = P_{2j-1}(\mu) \qquad 2.92a$$

$$\Gamma_i(\mu) = P_{2j-2}(\mu) \qquad 2.92b$$

Recordando que la condición adecuada en la frontera entre un medio y el vacío es que no debe haber neutrones que entren al medio provenientes del vacío, i.e.:

$$\int_0^1 \phi_i(0,\mu)\mu d\mu = 0 \qquad 2.93$$

La integral 2.93 es la corriente proveniente del medio vacío.

Esta condición, sin embargo, esta incluida en 2.88 si se usa 2.92a, mientras que si se usa 2.92b, 2.93 no se cumplirá explícitamente. Por lo tanto, la selección adecuada para las Γ_j' S será en consecuencia, 2.92a y 2.88, obteniéndose:

$$\int_0^1 \phi_i(0,\mu)\, \Gamma_{2j-1}(\mu)d\mu = 0 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,\tfrac{2}{2}(N+1) \qquad 2.94$$

Estas son conocidas como las condiciones a la frontera de MARSHAK (23).

Una síntesis de como se calcularían los coeficientes del desarrollo 2.75 a partir de estas condiciones a la frontera para el problema en cuestión es el siguiente: una vez que se obtiene la expresión para el flujo (2.79), quedan por determinar las constantes A_i, lo cual se hace a partir de las condiciones a la frontera. En particular, si se trata de una superficie libre se

hace uso de la condición 2.88 ó 2.94 las cuales son $\frac{N+1}{2}$ condiciones, ya que estamos en la aproximación P_N. En ella se sustituye la expresión para $\phi_i(o,\mu)$ y se integra sobre μ entre 0 y 1 para todos los posibles valores de j, dando como resultado $\frac{N+1}{2}$ ecuaciones algebraícas para los coeficientes A_i, a partir de las cuales se determinan cada uno de los $\frac{N+1}{2}$ coeficientes. Un ejemplo detallado de este método se puede ver en la referencia 18.

Una vez establecidas las condiciones a la frontera adecuadas, en la siguiente sección se mostrará la forma de calcular el flujo para cada una de las I ecuaciones de multigrupo.

2.9 METODOS ITERATIVOS PARA OBTENER LAS SOLUCIONES A LAS ECUACIONES DE MULTIGRUPO

La expresión 2.75 es la solución correspondiente a la ecuación del i-ésimo grupo de energía. Ahora bien, para obtener las soluciones al conjunto de las I ecuaciones de multigrupo (2.21 ó 2.28) para el caso que estamos tratando, es necesario el uso de métodos numéricos iterativos, así como el empleo de computadoras para realizar estos cálculos.

Estos métodos generalmente consisten en suponer primeramente las dimensiones del sistema si la composición es dada o, recíprocamente, suponer la composición cuando las dimensiones son dadas, aunque esta especificación inicial del sistema no corresponde precisamente a un sistema crítico. Ahora, como segundo paso,

se hace una estimación inicial confiable del flujo angular de -- neutrones, denotado por $\phi_i^{\,o}(\chi,\mu)$ como primera aproximación y se sustituye en el término de fisión de la ecuación para el primer grupo del sistema de ecuaciones de multigrupo (2.17). La ecuación que se obtiene, no contiene término de transferencia de - - otros grupos menores (i.e. j>i) el grupo 1, ya que el grupo 1 - es el que corresponde a la energía más alta del intervalo de interés, donde supusimos que empezaban a contarse los subintervalos. Entonces la ecuación para el primer grupo se puede escribir de la siguiente forma:

$$-\mu\phi_1(\gamma,\mu) + \gamma\phi_1(\gamma,\mu) - \frac{\gamma}{\Sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\mu)\sum_{j=2}^{I} c'\Sigma'_{nj\to i}$$

$$\int_{\Omega}\phi_i(\gamma,\mu')\,P_n(\mu')d\Omega' = \frac{\gamma}{\Sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\mu)\sum_{j=1}^{I}\nu\Sigma_{fj}\int_{\Omega'}\phi_j^{\,o}(\gamma,\mu')\,P_n(\mu')d\Omega' \qquad 2.95$$

donde las primeras en c y $\Sigma_{nj\to i}$ nos indican que se toman en cuenta todas las interacciones menos fisión.

Esta es una ecuación inhomogénea, la cual se resuelve por - medio de una computadora usando alguna técnica numérica. Su solución deberá ser una función continua al cruzar las fronteras - en el sistema de tal forma que la continuidad del flujo y la corriente se cumplan. Con estos cálculos se obtiene la primera estimación de ϕ_1, denotada por ϕ_1'.

En seguida se emplea la ecuación para el segundo grupo, el cual ya tiene un término de transferencia debido a que hay neutrones que provienen del primer grupo. Entonces el flujo supuesto $\phi_i^{o}(\chi,\mu)$ se usa otra vez en la ecuación para el segundo grupo, además de que ϕ_1' se introduce para el flujo del primero. La solución de esta ecuación nuevamente se obtiene por medio de alguna técnica numérica y la computadora, dándose la estimación para el flujo del segundo grupo ϕ_2, denotado por ϕ_2'. Este procedimiento se continua hasta hacer la primera estimación de todos los flujos, es decir, para cada uno de los grupos de energías. Una vez obtenidas todas las primeras estimaciones, éstas se utilizan en vez del flujo supuesto ϕ_i^{o}; principiando de nuevo con la ecuación del primer grupo y repitiendo los cálculos nuevamente para obtener una segunda estimación del flujo ϕ_i^{2}, con los cuales se repite el proceso de una forma iterativa (8,24).

Las iteraciones se continúan cuantas veces sea necesario, hasta encontrar que la razón entre iteraciones sucesivas de cualquiera de los flujos de grupo, tienda a una constante. En otras palabras, al incrementarse el número de iteraciones la razón ϕ_i^{n+1}/ϕ_i^{n} toma un valor constante 4.25).

En los cálculos de multigrupos la exactitud se incrementa al incrementarse el número de los grupos, esto es debido al refinamiento que se hace del intervalo de energías de interés al considerarse más de cerca la variación en cada grupo.

En la parte inicial del diseño de un sistema, los cálculos que se llevan a cabo solamente utilizan pocos grupos; por ejemplo, con 50 grupos es suficiente para proporcionar información respecto a las propiedades generales del sistema (42,44). Los cálculos más elaborados se realizan al requerir mayor precisión, y donde mayores detalles son necesarios.

La necesidad de incrementar la precisión en el diseño de sistemas ha hecho posible el desarrollo de un gran número de programas de computadora para resolver las ecuaciones de multigrupo (26,27).

En cualquiera de los métodos iterativos es necesario estimar en forma adecuada las llamadas "constantes de grupo", que se discutirán en la siguiente sección.

2.10 CONSTANTE DE GRUPO

En la sección 2.3 se definieron las constantes de grupo por las expresiones 2.19 y 2.20, como

$$\Sigma_i \equiv \frac{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \Sigma(E)\phi(\beta,\mu,E)dE}{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(\beta,\mu,E)dE} \qquad 2.19$$

que representa el promedio de las secciones para el grupo y

$$c\Sigma_{nj\to i} = \frac{\int_{E_i}^{E_{i-1}} \int_{E_j}^{E_{j-1}} c\Sigma_n(E'\to E)\, \phi(\theta,\mu',E')\,dE'\,dE}{\int_{E_j}^{E_{j-1}} \phi(\theta,\mu',E')\,dE'} \qquad 2.20$$

que dá el número de neutrones transferidos del grupo j al grupo i.

Ahora, para completar este trabajo mencionaremos brevemente como se calculan dichas constantes (33,37).

Es necesario evaluar las constantes de grupo para cada uno de los grupos de energía para poder obtener las soluciones a las ecuaciones de multigrupo.

De las expresiones anteriores vemos que dichas constantes dependen de la variación de las secciones con la energía, así como de la dependencia energética del flujo de neutrones. Es decir, la evaluación de las constantes de grupo es un proceso iterativo ya que el flujo que se busca como solución de las ecuaciones de multigrupo es, al mismo tiempo, la función de peso involucrada en promediar las secciones para obtener dichas constantes.

Por lo anterior, el cálculo de las constantes involucra los siguientes pasos.

Primeramente es necesario conocer en la forma más exacta y precisa posible, las primeras estimaciones de las constantes. Para ello es necesario obtener los mejores conjuntos de valores

de las secciones individuales en el intervalo de energía de interés, para todos los nucleidos y tipos de reacciones que tengan relevancia para el problema bajo consideración; estos datos proceden de tabulaciones y curvas experimentales. Es conveniente, entonces, contar con un "banco de datos" lo más amplio posible para poder utilizarlo en diversos problemas. El banco de datos estará constituído por secciones microscópicas y diferenciales de los nucleidos que intervienen en los problemas a tratar. Datos y valores relacionados con las diferentes secciones se encuentran tabulados y graficados en la literatura (28,29,30,32).

Hay que hacer notar que la selección de los grupos de energía en un problema particular, dependen de la variación de las secciones con la energía, para los nucleidos que intervienen en el problema, por lo que es necesario que el banco de datos mencionado contenga información fina respecto a las regiones de energía donde se presentan variaciones abruptas, como por ejemplo, la región de resonancias. Entonces, un grupo puede involucrar una sola o varias de las resonancias y el valor de la sección en ese grupo se puede tomar como un promedio de la sección equivalente al área de las resonancias en 61. Cálculos elaborados para tratar las resonancias se pueden consultar en las referencias (38, 39, ..., 46).

Con base en los datos de las secciones se calculan las componentes requeridas del desarrollo en polinomios de Legendre, es

decir, las $\Sigma_n(E'\to E)$.

Una vez obtenidos los primeros valores de las constantes estos son datos en el proceso de obtener las soluciones a las ecuaciones de multigrupo, de donde se obtienen los primeros valores para el flujo, y estos son empleados como estimaciones en el cálculo de las constantes otra vez para dar lugar a nuevos valores de estas que se emplean de nuevo en el cálculo de las siguientes estimaciones de los flujos hasta llegar a la solución del problema.

El siguiente paso para obtener las primeras estimaciones de las constantes, consiste en hacer la mejor estimación posible de la dependencia energética del flujo angular de neutrones para cada grupo. Esta estimación, como ya mencionamos en la sección anterior, se toma de las soluciones a problemas más simples o de - hacer suposiciones sobre dicha dependencia; por ejemplo, se supone que la dependencia energética del flujo angular de neutrones es proporcional al espectro de fisión a energías $\geq$ 1 Mev, que el flujo varía como 1/E para energías entre 1 ev y 1 Mev, y que tiene una forma Maxwelliana por debajo de 1 ev. Las estimaciones - que se hagan deberán ser satisfactorias para el problema que se tenga (35, 41, 42, 44).

En el tercer paso se hace uso de los datos y las estimaciones del flujo angular para llevar a cabo los cálculo.

Para efectuar con precisión los cálculos mencionados es conveniente contar con programas de cómputo adecuados. Existen diversos programas desarrollados con este fin (34, 35, 36, 45) - - siendo este un campo que continúa desarrollándose en la actualidad.

CAPITULO 3

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el curso de este trabajo se presentó la deducción de la ecuación de transporte de neutrones para reactores nucleares en su forma más general posible, la cual involucra a los neutrones retardados y todas las formas de interacción de los neutrones -- con el medio. Posteriormente se particularizó para un sistema - y para geometría plana dando como resultado una ecuación más simple dependiente de la posición, la dirección y la energía.

Mediante el tratamiento por el método de Multigrupos se dedujeron las llamadas ecuaciones de multigrupo que forman un conjunto de l ecuaciones homogéneas acopladas de primer orden y monoenergéticas. Se definieron las llamadas constantes de grupo - las cuales contienen la información de la forma de interaccionar de los neutrones con el medio.

De las discusiones presentadas en el trabajo se pone de manifiesto el hecho de que la parte medular del método consiste en transformar la ecuación de transporte de neutrones simplificada dependiente de la energía en un sistema de ecuaciones monoenergéticas, cuyas soluciones son posbles por el empleo de diferentes métodos. También destacan como puntos importantes: la división del intervalo de energías de interés en subintervalos o grupos - de energía, y el considerar en cada uno de estos grupos que la -

variación de las secciones con la energía es constante o el tomar un promedio adecuado representativo de ellas. Estos dos puntos son de importancia ya que de ellos dependen en gran medida la exactitud y precisión de la solución.

Cabe mencionar que las constantes de grupo, tienen un significado físico importante, ya que están relacionadas con la forma de interaccionar de los neutrones con el medio en cada grupo y de cómo pasan de un grupo a otro. Además, hay que hacer notar el hecho de que la función de transferencia, la cual involucra las anisotropías, fue tratada en forma general y se desarrolló en términos de polinomios de Legendrre en su dependencia angular, conduciendo a expresiones que permitan ser tratadas mediante el método de Multigrupos y condujeron a una de las constantes de grupo llamada sección de transferencia.

Posteriormente se dedujo la ecuación algebraíca llamada ecuación característica cuyas raíces dan los valores permisibles del parámetro de separación de la parte espacial. Esto se logró al resolver la i-ésima ecuación de multigrupo mediante el desarrollo en polinomio de Legendre de la variable angular, obteniéndose además las expresiones para los coeficientes de tal desarrollo y una expresión de la solución a dicho grupo, en términos de parámetros y funciones conocidas.

Como se planteó la aproximación P_N, el grado de la ecuación característica es N+1 y las raíces de ésta determinan, median

te las condiciones a la frontera, los valores de los coeficientes en la suma de las soluciones parciales que da la solución general a la ecuación del i-ésimo grupo. Dadas las condiciones a la frontera que se planteron, las cuales fueron de la forma más general posible, fue necesario considerar N impar en la aproximación P_N ya que con ello se satisfacen dichas condiciones.

En la forma de obtener la solución a las ecuaciones de multigrupo se planteó la dificultad de resolverlas por medios analíticos, por lo que se ve la necesidad de utilizar técnicas numéricas iterativas y el uso de computadoras capaces de llevar al cabo dichos cálculos.

Por todo lo anterior se puede concluir que fue mostrado, para el problema considerado, que el Método de Multigrupos constituye un método semianalítico que proporciona en forma por demas directa la manera de tratar a la variable energética de la ecuación de transporte de neutrones simplificada, para obtener su solución mediante el empleo de métodos adicionales conocidos y de técnicas numéricas iterativas.

Por otro lado podemos concluir además que el Método de Multigrupos es susceptible de refinarse mediante el uso de otros métodos para tratar a las otras variables, el empleo de estimaciones del flujo más detalladas y al tener mejores estimaciones de las constantes de grupo.

Cabe hacer notar finalmente que es posible seguir implementando al Método de Multigrupos expuesto para su aplicación a problemas más generales, por ejemplo, para problemas con anisotropías determinadas y su aplicación al caso de otras geometrías.

APENDICE A

TABLA DE ALGUNAS RELACIONES PARA POLINOMIOS DE LEGENDRE

En este apéndice se incluye el material suficiente para el desarrollo de la variable angular por el método polinomial (polinomios de Legendre) expuesto en la sección 2.4 y 2.5. Debido a que lo que será expuesto aquí es de uso común, sólo se enunciarán dichas relaciones que en gran parte se encuentran en el libro: Special Function and their Aplications by N.N. LEBEDEV.

1.- El conjunto de polinomios de Legendre $P_n(\chi)$ es ortogonal en el intervalo $-1 \leq \chi \leq 1$, es decir:

$$\int_{-1}^{1} A(\chi)\, P_n(\chi)\, P_m(\chi) d\chi = 0 \qquad \text{A.1}$$

$n \neq m; \quad n, m = 0,1,2,\ldots$

si la función de peso $A(\chi) = 1$

Estos polinomios satisfacen las siguientes relaciones:

Relación de Ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n(\chi)\, P_m(\chi) d\chi = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{n,m} \qquad \text{A.2}$$

Expresión Explícita:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m} \qquad \text{A.3}$$

Valores particulares:

$$P_n(1) = 1 \qquad \text{A.4}$$

$$P_n(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{4^m} \binom{2m}{m} & \text{para } n = 2m \\ 0 & \text{para } n = 2m+1 \end{cases}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad \text{A.6}$$

$$P_0(x) = 1 \ , \quad P_1(x) = x \qquad \text{A.7}$$

Ecuación Diferencial:

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0 \qquad \text{A.8}$$

Relación de Recurrencia:

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \qquad \text{A.9}$$

Relación Diferencial:

$$(1-x^2)\, P_n'(x) = -\, nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) \qquad \text{A.10}$$

Función Generadora:

$$G(x,t) = (1-2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad \text{A.11}$$

Representación Integral Integral:

$$P_n(x) = \frac{2^{-n}}{2\pi i} \int \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\, dt \qquad \text{A.12}$$

Con el contorno encerrando al punto t = x.

Formula de Rodriguez:

$$P_n(x)\ \frac{1}{(-1)^n 2^2 n!}\ \frac{d^n}{dx^n}\ (1-x^2)^n \qquad \text{A.13}$$

II.- Las funciones de segunda especie, definidas por:

$$Q_n(x)\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\, dt \qquad \text{A.14}$$

Satisfaciendo la Formula de Recurrencia:

$$(n+1)\, Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x) - (2n+1)x\, Q_n(x) = 0 \qquad \text{A.15}$$

Y la Formula de Rodriguez:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\, P_n(x)\, L_n\, \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x) \qquad \text{A.16}$$

donde:

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{n}\, P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)}\, P_{n-3}(x)$$

$$+ \frac{2n-9}{5(n-2)}\, P_{n-5}(x) + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\, P_{m-1}(x)\, P_{n-m}(x) \qquad \text{A.17}$$

y

$$W_{-1}(x) = 0 \qquad \text{A.18}$$

III.- El Polinomio de Grado n-1:

$$W_{n-1}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{x - t}\, dt \qquad \text{A.19}$$

Satisface la Relación:

$$W_{n+1}(x) - \frac{2n+1}{n+1}\, x W_n(x) + \frac{n}{n+1}\, W_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{A.20}$$

IV.- A partir de la formula de recurrencia A.9 es facil -- ver que se satisface la formula de Chistoffel-Darboux:

$$\sum_{\ell=0}^{L} \frac{1}{h_\ell}\, P_\ell(x)\, P_\ell(y) = \frac{L+1}{x-y}\, [P_{L+1}(x)\, P_L(y) - P_L(x)\, P_{L+1}(y)] \qquad \text{A.21}$$

Además se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\sum_{\ell=0}^{L} \frac{1}{h_\ell}\, P_\ell(x)\, Q_\ell(y) = \frac{1}{x-y}\, \{(L+1)\, [P_{L+1}(x)\, Q_L(y) - P_L(x) Q_{L+1}(y)] - 1\} \qquad \text{A.22}$$

y

$$P_{N+1}(x)\, Q_N(x) - P_N(x)\, Q_{N+1}(x) = N+1 \qquad \text{A.23}$$

Para obtener a la primera, nótese que son válidas las relaciones:

$$P_n(x) \text{ y } Q_n(y) = \frac{P_n(x)}{\lambda_n}\, [Q_{n+1}(y) + C_n\, Q_{n-1}(y)]$$

$$n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$Q_n(y) x\, P_n(x) = \frac{Q_n(y)}{\lambda_n} \left[P_{n+1}(x) + C_n\, P_{n-1}(x) \right]$$

$$n = 1, 2, \ldots\ldots$$

donde:

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad y \quad C_n = \frac{h}{n+1} \qquad \text{A.24}$$

De las que, restándolas y rearreglando términos en forma -- adecuada tenemos:

$$(x-y) \frac{1}{h_n} P_n(x)\, Q_n(y) = \frac{1}{h_n \lambda_n} \left[P_{n+1}(x)\, Q_n(y) - P_n(x)\, Q_{n+1}(y) \right]$$

$$- N \left[P_n(x)\, Q_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)\, Q_n(y) \right]$$

y sumando sobre el indice n se obtiene:

$$(-y) \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{h_n} P_n(x)\, Q_n(y) = N + 1 \left[P_{N+1}(x)\, Q_N(y) - P_N(x)\, Q_{N+1}(y) \right]$$

Para demostrar la segunda basta hacer tender y a x.

REFERENCIAS

1.- DAVISON B. (1957) "Neutron Transport Theory".
Oxford University Press,
London.

2.- CASE K. M. and ZWEIFEL P.F. (1967) "Linear Transport Theory"
Addison-Wesley, Reading, Mass.
U.S.

3.- LAMARSH J.R. (1966) "Introduction to Nuclear Reactor Theory"
Addison Wesley, Publishing Company, Inc.
U.S.

4.- GLASSTONE S. and BELL I.G. (1970) "Nuclear Reactor Theory"
Van Nostrand Reinhold Company.
New York U.S.

5.- WEINBERG A.M. and WIGNER E.P. (1958). "The Physical Theory
of Neutron Chain Reactors".
The University of Chicago Press
Chicago Illinois U.S.

6.- ZWEIFEL P. (1973) "Reactor Physics"
Mc Graw Hill
U.S.

7.- ARCASU, LELLOUCHE and SHOTKIN (1971) "Mathematical Methods
in Nuclear Reactor Dynamics"
Academic Press
U.S.

8.- HENRY A.F. (1975) "Nuclear Reactor Analysis"
The Mit Press Cambridge Mass.
U.S.

9.- ANZALDO A.M. (1977) Tesis Profesional
Facultad de Ciencias-UNAM

10.- ANZALDO M.A. (1978) Tesis de Maestría
Facultad de Ciencias-UNAM

11.- VITELA E.J. (1978) Tesis Profesional
Facultad de Ciencias-UNAM

12.- CONKIE W.R. (1959) "Polynomial Approximation in Neutron -
Transport Theory"
Nucl. SC Engan. 6 p. 260-266.

13.- NONNENMACHER th. (1966) "Jacob, Polynomial Solution of the
one-dimensional and monoenergetic Boltz
mann Equiation"
Atom Kernenergie 11, heft 7/8 263-269.

14.- LUKE Y.L. (1975) "Mathematical Functions and their Aproxi-
mations"
Adademic Press Inc New York
N.Y.

15.- WHITTAKER E.T. and WATSON G.N. (1927) "A course of Modern
Analysis"
Cambridge at the University Press.

16.- SNEDDON N.I. (1955) "Funciones Especiales Aplicadas a la -
Física y Química"
University Mathematical Texts. Edito--
rial Dossat S.A.

17.- LEBEDEV N.N. (1972) "Special Functions and their Applications"
Dover Publications, Inc.
New York, U.S.

18.- W.R. CONKIE (1959) "An iterative Method in Neutron Transport
Theory"
Nucl. Scie. Engn. 6, Page. 267-271.

19.- H.S. ISBIN (1963) "Introduction Nuclear Reactor theory"
Reinhold
New York.

20.- YABUSHITA SHIN (1961) "Tschebyscheff Polynomial Approximation Method of he Neutron Transport - - Equation"
J. Math. Phys 2,N° 4, 543-49

21.- POMRANING G.C. and CLARK M. (1963) "Orthogonal Polynomial Angular Expansion of the Boltzmann - - Equation"
Nucl. Sci Eng. 17, 8-17.

22.- MARK J.C. (1944) "The Spherical Harmonic Method"
Report MT92 and Report MT97 (1945).

23.- MARSHAK R.E. (1947) "Theory of the Slowing Down of Neutron by Elastic Collisions with Atomic Nuclei"
Rev. Mod. Phys 19, 185

24.- FERZIGER J.H. and ZWEIFER P.F. (1966) "The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactor"
Pergamon Press, New York and the M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
U.S.

25.- MEGHREBLIAN R.V. and HOLMES D.K. (1960) "Reactor Analysis"
Mc Graw-Hill Book Company New York

26.- CHAVEZ I.G. (1979) Tesis Licenciatura
Facultad de Ciencias-UNAM

27.- EHRLICH R. and Hurwitz H. (1954) Nucleonics 12, (2), 23.

28.- HUGHES D.J. and HARVEY J.A. (1955) "Neutron Cross Section"
Report BNL-325, U.S. Gov't Printing - - Office. (1960), (1964) y (1965) BNL-400 (1962).

29.- HOWERTON, R.J. (1958, 1964) "Tabulated Neutron Cross Sections"
Report UCRL-5226, UCRL-5351, UCRL-14000

30.- THE COMPUTERIZER BIBLIOGRAPHIC INDEX OF NEUTRON CROSS - - SECTION DATA; EANDC-46 (1965).

31.- PONPANING G.C. (1964) "On the Energy Averaging of the Difusion Coefficient"
Nucl. Sci Eng 19, pag. 250.

32.- LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY REPORTS LA-2014 (1958) AND LA_-2424 (1960).

33.- BONDARENKO I.I. Editor (1964) "Group Constants for Nuclear Reactor Calculations"
Consultantes Bureau,
New York.

34.- O' SHEA D.M. (1968) "A code to Calculate Multigroup Cross Sections"A.N.L. 7318

35.- MAC DOUGALL J.D. (1968) "The Calculation of Neutron Spectra and Group Averaged Cross Sections Using the Computer Programmes Fresco And Nural"
AEEW - M - 843.

36.- ABAGYAN L.P. (1964) "Group Constant for Nuclear Reactor Calculations"
Consultants Bureau Enter Prises Inc,
New York.

37.- Ref. 24, Cap. IV.

38.- Ref. 3, Cap. VII.

39.- RAGO A.L. and HUMMEL H.H. ELMOE (1964) "An IBM 704 Program Treating Elastic Scattering Resonances in Fast Reactors"
Report. ANL 6805

40.- P.F. ZWEIFEL and G. BALL (1961): Procedings of the International Conference on Fast and Intermediate reactor, Vienna 1961.

41.- Ref. 4, Cap. IV

42.- Ref. 8, Cap. V

43.- Ref. 8, Cap. IV

44.- J. RAVIER and J.M. CHAUMONT (1967) "Presentation of the -- Multigroup Cross Section Set" Report ANL-7320

45.- Ref. 4, Cap. VIII

46.- S. PAHOR and J.K. SULTIS (1969) "Half Space Multigroup Transport Theory" J. Math. Phys. Vol. 10, N° 12 Pag. 2220-26

47.- Ref. 25, Cap. VII

48.- Ref. 25, Cap. VIII

49.- R.T. ACKROYD and J.M. BALL (1961): The Multigroup Albedo - Method" Report DEG 96(R)

50.- W.R. CONKIE (1959) "Velocity Dependent Neutron Transport - Theory" Nucl. Scie. Engn 7 Pag. 295-303

51.- R.J. BEDNARZ and J.R. MIKA (1963) "Energy-Dependent Boltzmann Equation in Plane Geometry" J. Math. Phys. Vol. 4, N° 9 Pag. 1285-1293

52.- W. KOFINK (1958) "Studies of the Spherical Harmonics Method in Neutron Transport Theory" Suplemento al Vol. IX Serie X del Nuovo Cimiento N° 2.

53.- J.R. (1961) "Neutron Transport With Anisotropic Scattering" Nucl. Scie. and Engn. 11 Pag. 415-427.

54.- E.A. AHIA and A.A. HARMS (1976) "A new Espansion for Highly Anisotropic Neutron-Nucleus Scattering" Nucl. Scie. Engn, 59 Pag. 319-325.

55.- INONU and P.F. ZWEIFEL Edited. (1967) "Developments in - -
Transport Theory"
Academic Press, N.Y.

56.- S. HARRIS (1971) "An Introduction to the Theory of the Boltz-
mann Equation"
Holt, Reimehart and Winston Inc.