UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISEÑO Y EVALUACIÓN DE CONCENTRADORES SOLARES CONSIDERANDO SUPERFICIES ARBITRARIAS Y DE TIPO FRESNEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MARTÍN JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MAXIMINO AVENDAÑO ALEJO

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Maximino Avendaño Alejo, por todas sus enseñanzas.

Agradezco al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, ICAT-UNAM (antes CCADET-UNAM), por permitirme trabajar en su laboratorio de Sistemas Ópticos y de igual modo por las facilidades brindadas en mi estancia.

Agradezco el apoyo económico recibido por parte del Instituto de Energías Renovables (IER-UNAM), a través del Centro Mexicano de Innovación en Energía Solar (CeMIE-Sol), en el marco de la Convocatoria 2013-02, del Fondo SECTORIAL CONACYT-SENER-SUSTENTABILIDAD ENERGÉTICA, dentro del Proyecto Estratégico No. 207450, Subproyecto P18: "Materiales selectivos y reflejantes para sistemas de conversión de energía solar en energía térmica", por medio del cual fue posible desarrollar la investigación y apoyar la formación de recursos humanos a nivel licenciatura.

Finalmente, agradezco el apoyo recibido durante la realización de este trabajo por parte de PAPIIT-DGAPA-UNAM bajo los proyectos #IN112316 e #IN112618.

Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema del diseño de superficies reflectoras arbitrarias, para aplicarse particularmente en concentradores solares. En primer lugar se consideró una cicloide de dos parámetros como superficie reflectora, de la cual se obtuvo la cáustica que encierra un área de concentración extendida, considerando un frente de onda plano incidiendo sobre la superficie. Después, con el antecedente del estudio de las superficies reflectoras cónicas se continuó con el diseño de superficies arbitrarias tipo Fresnel, que son representadas por funciones continuas a trozos. Para éstas se determinaron parámetros de eficiencia y funcionamiento. Para probar superficies de este tipo se diseñó un nuevo tipo de prueba por pantallas nulas que considera las discontinuidades del espejo y deforma en función de éstas los patrones de las pantallas que nos permiten realizar una evaluación cualitativa del espejo tipo Fresnel comercial.

Índice General

Índice General **ix**

Índice de Figuras **xi**

Índice de Tablas **xiii**

1 Introducción **1**

2 Trazo de rayos para superficies reflejantes arbitrarias **5**

2.1 Cáustica producida por una superficie reflejante cicloidal 7

2.1.1 Optimización de superficies cicloidales utilizando los parámetros de diseño 13

2.2 Diseño de espejos tipo Fresnel 17

2.2.1 Trazo exacto considerando rayos paralelos al eje óptico incidiendo sobre un espejo tipo Fresnel 23

2.2.2 Pérdidas de iluminación por obstrucción en un espejo tipo Fresnel . . 24

2.2.3 Construcción de distintos tipos de espejos Fresnel 29

3 Diseño de pruebas por pantallas nulas para un espejo tipo Fresnel **37**

3.1 Trazo exacto de rayos para un espejo tipo Fresnel considerando una fuente puntual 37

3.1.1 Pérdidas por obstrucción en iluminación en un espejo tipo Fresnel . . 42

3.2 Diseño de pantallas nulas para espejos tipo Fresnel de revolución 46

3.2.1 Diseño de pantallas nulas tipo Fresnel considerando anillos concéntricos 54

3.2.2 Diseño de pantallas nulas tipo Ronchi para un espejo Fresnel 57

4 Desarrollo de pruebas por pantallas nulas para espejos Fresnel 61
4.1 Pruebas preliminares 61
4.1.1 Prueba preliminar en la "Posición I" 64
4.1.2 Prueba preliminar en la "Posición II" 67
4.2 Pruebas nulas para espejos tipo Fresnel 71
4.2.1 Prueba tipo Fresnel por pantallas nulas considerando anillos concéntricos 71
4.2.2 Prueba tipo Fresnel por pantallas nulas considerando franjas rectas . . 73

5 Conclusiones y trabajo a futuro 75

Bibliografía 77

Índice de Figuras

1.1 Concentradores solares parabólicos en la planta solar de la UNAM. 1
1.2 Diseño de una lente tipo Fresnel. 3
1.3 Parámetros involucrados en la prueba de un espejo cóncavo mediante una pantalla nula cilíndrica. 4

2.1 Trazo de rayos para superficies cónicas considerando un frente de onda plano. 6
2.2 Construcción curva cicloidal. 7
2.3 Parámetros involucrados en el trazo exacto de rayos de una cicloide. 8
2.4 Trazo de rayos en cicloides con distintos parámetros. 10
2.5 Variación arbitraria del parámetro "a" de una cicloide. 11
2.6 Variación arbitraria del parámetro "b" de una cicloide. 12
2.7 Comparación entre zonas de concentración. 14
2.8 Variación del parámetro "a" como función de "b" de una cicloide. 15
2.9 Variación del parámetro "b" como función de "a" de una cicloide. 16
2.10 Parámetros de diseño de un espejo tipo Fresnel. 18
2.11 Parámetros de diseño de un espejo tipo Fresnel. 20
2.12 Alturas de rayos que corresponden a cada surco de un espejo tipo Fresnel. . . 22
2.13 Parámetros involucrados en el trazo exacto de rayos de un espejo tipo Fresnel. 24
2.14 Cálculo de la sombra en un espejo tipo Fresnel considerando frente plano. . . 25
2.15 Zonas de sombra e iluminación en un espejo tipo Fresnel. 28
2.16 Comparación espejos elipsoidales oblatos. 31
2.17 Comparación espejos esféricos. 32
2.18 Comparación espejos elípticos prolatos. 32
2.19 Comparación espejos parabólicos. 33
2.20 Comparación espejos hiperbólicos. 33

2.21 Comparación espejos hiperbólicos abiertos. 34
2.22 Comparación espejos cicloidales I. 34
2.23 Comparación espejos cicloidales II. 36

3.1 Trazo de rayos para espejos cicloidales con fuente puntual. 38
3.2 Parámetros trazo de rayos Fresnel considerando fuente puntual. 39
3.3 Intervalos angulares de evaluación de un espejo Fresnel. 41
3.4 Cálculo de la sombra con fuente puntual. 43
3.5 Trazo de rayos para espejos parabólicos. 45
3.6 Definición distancias de diseño. 47
3.7 Diagrama en 3D del arreglo. 48
3.8 Superficie Fresnel de revolución Ξ_i. 49
3.9 Diagrama plano de incidencia. 50
3.10 Diagrama del mapeo FC. 52
3.11 Diagrama de mapeo de anillos. 55
3.12 Definición de P_{ij} del patrón de anillos. 56
3.13 Desdoblamiento de la pantalla nula. 57
3.14 Diagrama de mapeo de franjas. 58
3.15 Definición de P_{ij} del patrón de franjas. 59
3.16 Desdoblamiento de la pantalla nula. 60

4.1 Arreglo experimental. 62
4.2 Posiciones del espejo Fresnel en prueba preliminar. 63
4.3 Pantallas nulas de anillos conéntricos. 64
4.4 Resultados para anillos concéntricos en la "Posición I". 65
4.5 Pantallas nulas de franjas verticales. 66
4.6 Resultados para franjas verticales en la "Posición I". 67
4.7 Resultados para anillos concéntricos en la "Posición II". 68
4.8 Resultados para franjas verticales en la "Posición II". 69
4.9 Vista en microscopio del espejo bajo prueba. 70
4.10 Pantallas nulas de anillos conéntricos versión Fresnel. 71
4.11 Resultados para anillos concéntricos prueba de Fresnel. 72
4.12 Pantallas nulas de franjas verticales versión Fresnel. 73
4.13 Resultados para franjas verticales prueba de Fresnel. 74

Índice de Tablas

2.1 Variación arbitraria del parámetro a_i fijando el parámetro $b = 2\,mm$ como constante. 11

2.2 Variación arbitraria del parámetro b_i fijando el parámetro $a = 1\,mm$ como constante. 12

2.3 Cálculo de a en función del parámetro b_i con distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija. . . . 16

2.4 Cálculo de b en función del parámetro a_i con distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija. . . . 17

Capítulo 1

Introducción

En aplicaciones en energía solar ha sido común el diseño de concentradores por reflexión [1–4], siendo las superficies parabólicas las de mayor implementación debido al tipo de concentración puntual que generan cuando incide un frente de onda plano, considerando que la posición de la fuente de luz está en infinito como lo es el Sol, también conocidos como sistemas ópticos formadores de imagen [5, 6]. Donde se han considerado receptores tubulares circulares colocados con su centro a la distancia focal del canal parabólico en cuestión como los que se observan en la Fig.1.1, en estos trabajos se han estudiado también los gradientes de calor sobre el receptor debidos a la concentración solar [3, 7–9].

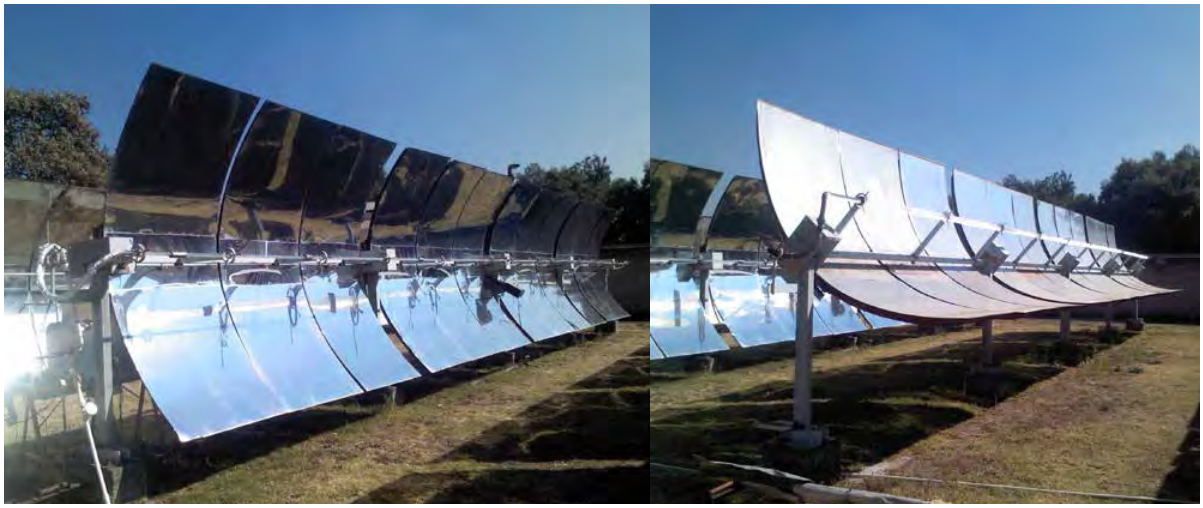


Fig. 1.1 Concentradores solares de canal parabólico en la planta solar de la UNAM, utilizados para la generación de vapor.

Sin embargo, esta misma ventaja que ha sido bien aprovechada de las parábolas es por otro lado una limitante en cuanto a sistemas de iluminación con formas arbitrarias también conocidos como sistemas ópticos no formadores de imagen, pues la condición impuesta para utilizar una región de concentración puntual puede restringir sus aplicaciones, por otro lado, si se pretende fabricar un canal de grandes dimensiones es complicado recubrir áreas de estos tipos, además de que construir una superficie parabólica de buena calidad resultó ser una labor complicada al igual que su producción en masa [1].

En este trabajo se proponen soluciones alternativas a este problema mediante la implementación de superficies arbitrarias con representación paramétrica dada, con la finalidad de estudiar formas alternativas de concentración a través de sus superficies cáusticas, las cuales se pueden definir como las envolventes a todos los rayos reflejados por la superficie [5, 6, 10–15]. Con esto se buscan explorar nuevas aplicaciones posibles, ya sea que las superficies sean más fáciles de maquinar o que la concentración de energía tenga propiedades distintas a las vistas en trabajos previos [3, 7–9].

La primera propuesta consiste en diseñar superficies cicloidales de dos parámetros cóncavas con parametrización definida [16], lo cual permite calcular sus zonas de concentración y definir sus propiedades geométricas. Como posible aplicación para una superficie de este tipo se requeriría un área de prueba en una planta de energía solar como la mostrada en la Fig.1.1.

Las superficies cóncavas que se han implementado en aplicaciones previas tienen como constante la construcción de un soporte para el espejo que puede variar entre un armazón metálico hasta una base liviana moldeada en fibra de vidrio que requiere igual de grandes entructuras a guisa de molde como los canales de la Fig.1.1. La solución que se propone para este problema práctico es la de diseñar, construir y evaluar espejos cuasi planos tipo Fresnel de formas arbitrarias.

En el caso de lentes tipo Fresnel se les puede definir como un arreglo ordenado de microprismas adyacentes cada uno con una inclinación determinada para desviar la luz incidente sobre el área de la lente [17–23]. Los tipos más comunes de lentes consisten en series de surcos anulares replicados en plásticos de calidad óptica con perfiles como se muestran en la Fig.1.2(a). Este tipo de lentes tiene importantes propiedades, si se considera una lente gruesa la cual se secciona y se colapsa se puede reducir entonces la cantidad de material necesario para su construcción [17]. Además en la literatura se dan ejemplos de lentes con superficies reflectivas, lo cual motiva la definición de un espejo tipo Fresnel como un arreglo equivalente calculado a partir de una superficie reflectora cóncava y compuesto por una aproximación de secciones

planas asociadas a la superficie original de diseño.
De forma análoga a las superficies cóncavas se obtendrá la representación paramétrica de un espejo tipo Fresnel para poder diseñar espejos concentradores, en este caso se puede reducir el tamaño de la estructura necesaria para construir el espejo con relación a las superficies cóncavas puesto que el espejo Fresnel se asemeja a un simple espejo plano, ya sea que se use una estructura de montura o sea moldeado.
Los avances en la implementación de superficies de forma arbitraria en los instrumentos ópticos han ido en crecimiento junto con la capacidad de construcción debida al avance tecnológico, sin embargo, un importante problema que persiste es la forma de evaluar las superficies bajo prueba [24–28], ya que es bien sabido que se pueden fabricar superficies tan buenas como se pueda medir su forma. En el caso del presente trabajo se plantea este problema para espejos tipo Fresnel.

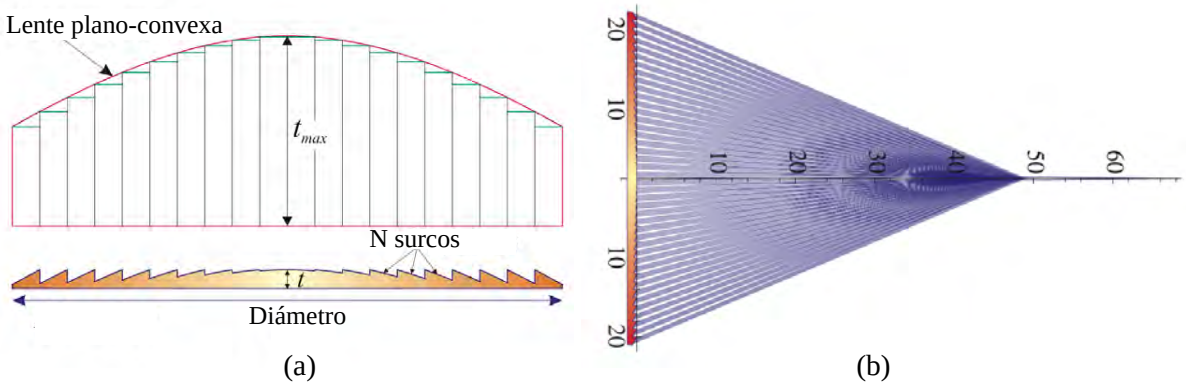


Fig. 1.2 Imágenes tomadas de la referencia [17]. (a) Diseño de una lente tipo Fresnel a partir de una superficie suave. (b) Trazo de rayos en una lente Fresnel diseñada a partir de un óvalo cartesiano.

Se proponen nuevos métodos basados en las pruebas por pantallas nulas, las cuales se clasifican en las pruebas geométricas que nos permiten medir la forma de una superficie sin tener contacto con ella. Se retoman las pruebas desarrolladas en trabajos previos aplicadas a superficies asféricas, implementando pruebas por pantallas nulas tipo Ronchi-Hartmann [25, 27, 29–36].
Precisamente en las referencias [24, 26], se desarrolló una prueba para un espejo cóncavo considerando una pantalla nula cilíndrica colocada paralela al eje óptico de la superficie bajo prueba, la pantalla nula fue calculada tal que permitiese observar una malla cuadrada en el sensor CCD considerando el arreglo de la Fig.1.3, donde el parámetro A significa la distancia de la apertura de la cámara al plano del sensor CCD con longitud d del lado menor, B es la

distancia de la apertura al vértice de la superficie, z_d es la distancia de la sagita evaluada en $D/2$ donde D es el diámetro del espejo bajo prueba, R es el radio del cilindro donde se coloca la pantalla nula. Para calcular los puntos en la pantalla cilíndrica P_3 correspondientes al patrón de la malla cuadrada, se realiza el trazo inverso de rayos donde P_1 es el punto sobre el sensor correspondiente a P_3 después de ser reflejado en P_2 por el espejo bajo prueba.

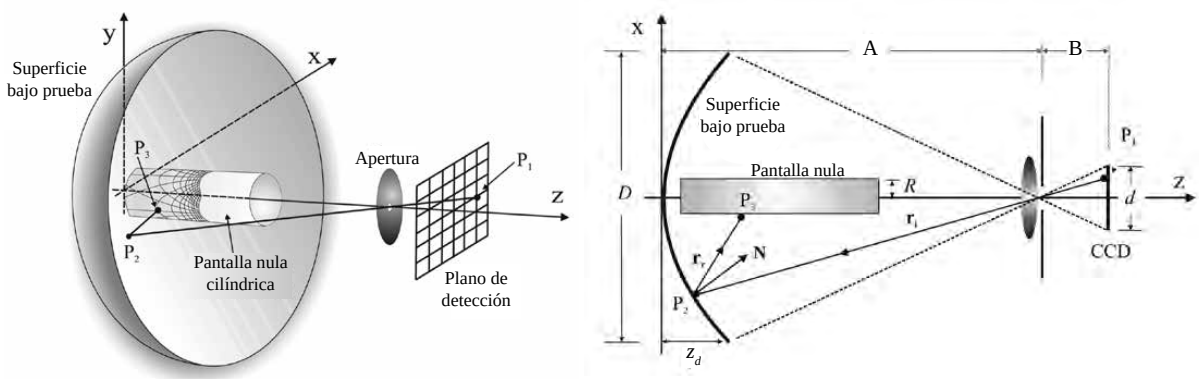


Fig. 1.3 Imágenes tomadas de la referencia [24]. Parámetros involucrados en la prueba de un espejo cóncavo mediante una pantalla nula cilíndrica.

En el presente trabajo se obtienen ecuaciones semejantes a las de trabajos previos para calcular una pantalla nula cilíndrica [24, 26], pero con la diferencia que se demuestran las condiciones necesarias para evaluar una superficie continua por regiones y se implementa este razonamiento en el desarrollo de pruebas cualitativas preliminares para un espejo tipo Fresnel.

Capítulo 2

Trazo de rayos para superficies reflejantes arbitrarias

En trabajos anteriores [5] se ha abordado el problema de la formación de cáusticas producidas por superficies reflejantes arbitrarias, y la obtención de sus ecuaciones utilizando el método de las envolventes para la familia de rayos reflejados dada en su forma paramétrica. Para simplificar este proceso se considerará un haz de rayos incidentes sobre un plano meridional de la superficie si ésta tiene simetría de revolución o una sección transversal si es de tipo canal, entonces la superficie puede ser representada por una curva bidimensional contenida en el plano de corte y con ecuación paramétrica $\mathbf{S}(\tau)$, como se observa en la Fig.2.1(a).
En el diseño de concentradores solares ha sido habitual el uso de espejos cónicos cóncavos, cuyo corte meridional se parametriza como se muestra en la Ec.(2.1) para los cuales se han estudiado las cáusticas formadas por un frente de onda plano incidente, siendo las superficies parabólicas las de uso más comercial, debido a que su cáustica es reducida a una imagen puntual teóricamente; es decir, toda la energía incidente es concentrada idealmente en un punto como se ve en la Fig.2.1(b).

$$\mathbf{S}(h) = \left\{ \frac{Ch^2}{1+\sqrt{1-(1+k)\,h^2C^2}}, h \right\}, \tag{2.1}$$

donde, $C = 1/R$ con R el radio de curvatura paraxial y el parámetro k se define como la constante de conicidad.
Como alternativa a esto, en este capítulo se considerará una superficie reflejante representada por una cicloide de dos parámetros para la cual se retomará el problema de la obtención de

la cáustica con la finalidad de diseñar concentradores con propiedades diferentes a las tradicionales.

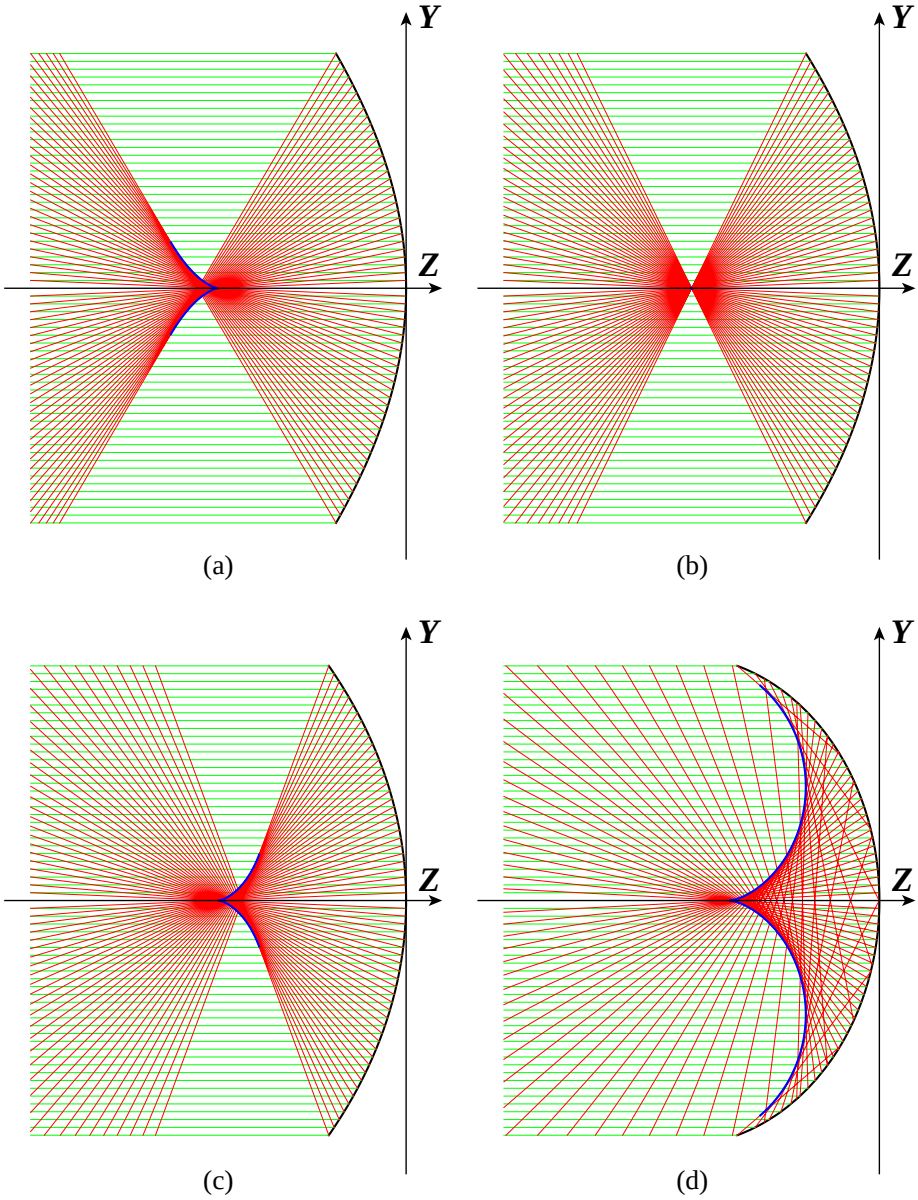


Fig. 2.1 Trazo de rayos considerando un frente de onda plano incidente, y la formación de su cáustica correspondiente. (a) Espejo hiperbólico. (b) Espejo parabólico. (c) Espejo elíptico prolato. (d) Espejo elíptico oblato

En la segunda parte de este capítulo se mostrará un método simple para el diseño de espejos tipo Fresnel equivalente al proceso de diseño de una lente Fresnel [17]. Se continuará con la

discusión en la implementación de superficies arbitrarias en posibles aplicaciones de energía solar pero buscando sustituir los espejos cóncavos por un adecuado equivalente en tipo Fresnel.

2.1 Cáustica producida por una superficie reflejante cicloidal

En esta sección se asumirá sin pérdida de generalidad que el haz de luz se propaga de izquierda a derecha proveniente de una fuente puntual colocada en infinito. Sea el plano de incidencia $\mathbf{Y}-\mathbf{Z}$ donde el eje coordenado $\mathbf{Z}$ es paralelo al eje óptico. Se tiene entonces un haz de rayos paralelos al eje óptico incidiendo sobre la superficie reflectora $\mathbf{S}$, la cual será representada por una cicloide de dos parámetros.

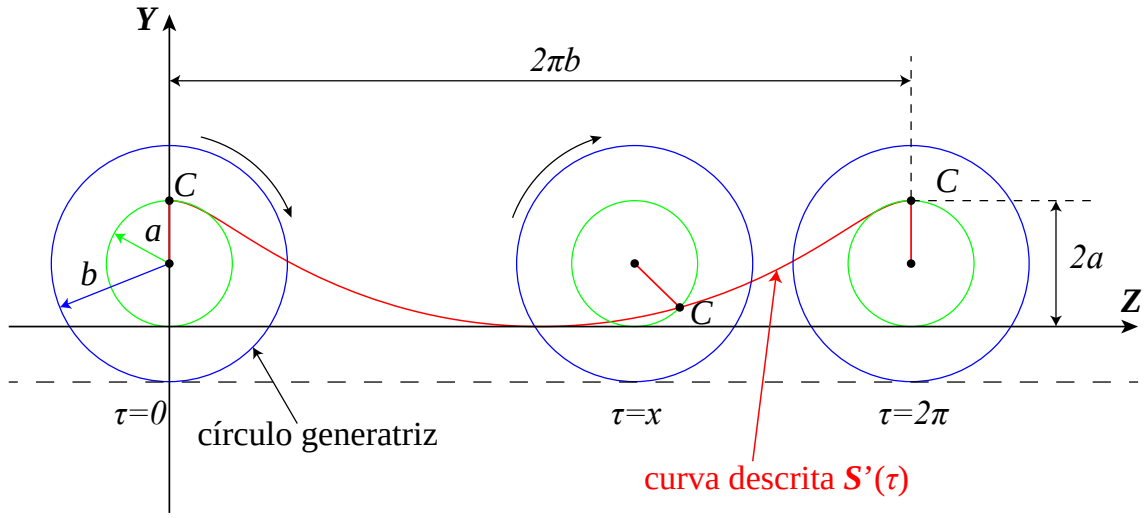


Fig. 2.2 Rodamiento sin deslizamiento del círculo azul de radio b sobre la línea punteada, en tanto el punto C fijo en el círculo verde de radio a genera la cicloide curtata.

En la Fig.2.2 se muestra la construcción de esta curva la cual queda definida como el lugar geométrico descrito por el punto C sobre el círculo de radio "a" concéntrico al círculo de radio "b" que rueda sin deslizarse a lo largo de la línea recta punteada, cuya ecuación paramétrica resulta

$$\mathbf{S}'(\tau) = \left[b\left(\tau - \left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{sen}\tau\right), a(1+\cos\tau)\right], \tag{2.2}$$

donde τ se puede interpretar como el parámetro de tiempo del desplazamiento a lo largo del eje $\mathbf{Z}$. En el ejemplo dado en Fig.2.2 se observa que $a < b$, por lo que a la curva generada se

le denominará cicloide curtata o alargada, en este trabajo se considerarán únicamente este tipo de cicloides las cuales son una variante de las presentadas en la literatura [16].
Para fines prácticos, la cicloide **S** que se empleará en el trazo exacto de rayos, bastará con rotar la cicloide presentada en Ec.(2.2) en un ángulo de -90° y posteriormente trasladarla una distancia πb a lo largo del eje **Y** obteniendo

$$\mathbf{S}(\tau) = [\mathscr{X}(\tau), \mathscr{Y}(\tau)] = \left[-a(1+\cos\tau), b\left(\tau - \pi - \left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{sen}\tau\right)\right], \tag{2.3}$$

la cual representa una curva simétrica respecto al eje **Z** con vértice en $\mathscr{O}$ como la que se muestra en la Fig.2.3(a)

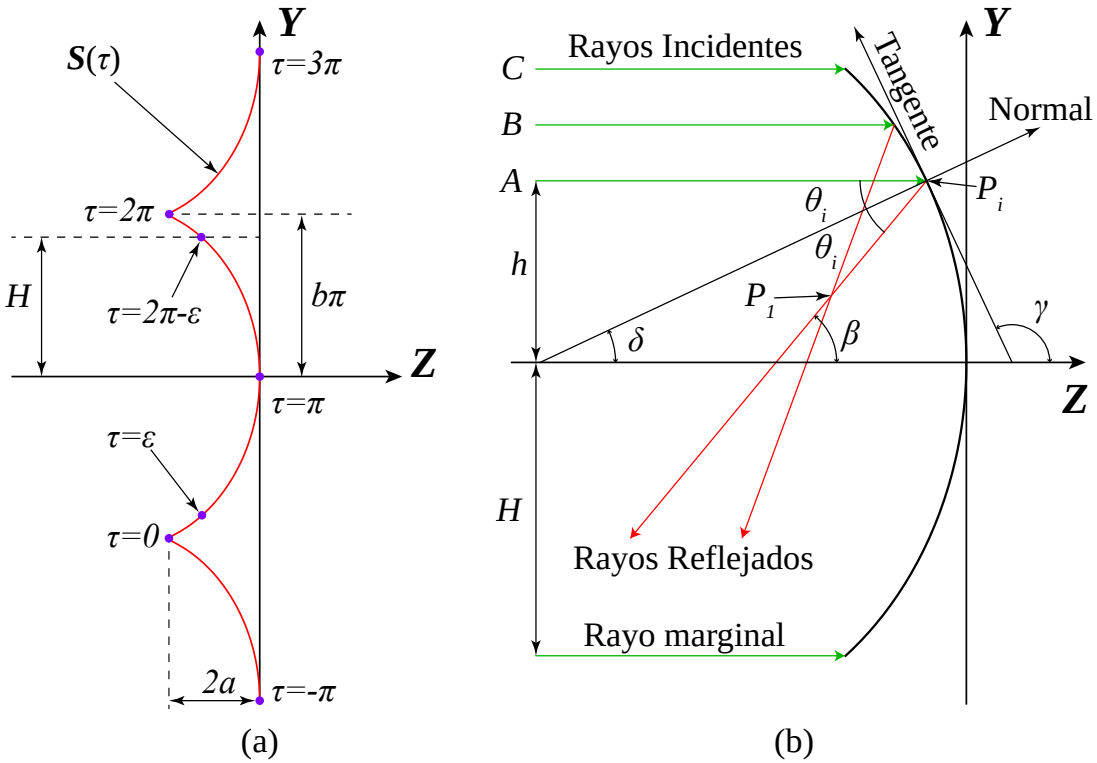


Fig. 2.3 (a) Gráfica sobre dos ciclos de la cicloide $\mathbf{S}(\tau)$, de la cual se considera únicamente la sección de la curva en el intervalo $\tau \in [2\pi - \varepsilon, \varepsilon]$, donde ε denota el parámetro de acotamiento y se calcula a partir de la Ec.(2.3) resolviendo la expresión $\mathscr{Y}(\varepsilon) = -H$. (b) Parámetros del trazo exacto considerando un haz de rayos paralelos incidiendo en el plano meridional de un espejo cicloidal.

Sea h la altura con respecto del eje óptico correspondiente al rayo que incide en el punto P_i sobre el espejo cicloidal con semidiámetro de apertura H, se tiene de la Ec.(2.3) que $\mathscr{Y}(\tau) = h$

de la cual sea t su solución, entonces ésta puede ser determinada numéricamente y nuevamente utilizando la Ec.(2.3) queda bien definido su correspondiente punto incidente P_i.

En la Fig.2.3(b) se observa que el punto P_1 representa la imagen formada por la intersección de los rayos reflejados A y B, en este sentido el rayo reflejado P_iP_1 es representativo de toda la familia de rayos reflejados, por lo que la envolvente está formada por todos estos puntos de intersección formando la cáustica por reflexión, también conocida como la catacáustica.

Para determinar la familia de rayos reflejados se debe evaluar $\tan\gamma$ para cada P_i incidente sobre el espejo, se tiene de la Ec.(2.3) que

$$\tan\gamma = \left[\frac{\partial\mathscr{Y}/\partial\tau}{\partial\mathscr{Z}/\partial\tau}\right]_{\tau\to t} = \left[\frac{\mathscr{Y}_\tau}{\mathscr{Z}_\tau}\right]_{\tau\to t} = \left[\frac{b-a\cos t}{a\,\mathrm{sen}\,t}\right], \tag{2.4}$$

donde, el subíndice τ en $\mathscr{Z}_\tau$ y $\mathscr{Y}_\tau$ denota la derivada de primer orden con respecto al parámetro τ. Nótese que la derivada se está evaluando para cada valor t por lo que la Ec.(2.4) queda en función de este parámetro.

De la Fig.2.3(b) se tiene que $\delta = \theta_i$ y $\beta = 2\theta_i$, donde θ_i es el ángulo de reflexión y β denota el ángulo entre el rayo reflejado P_iP_1 y el eje $\mathbf{Z}$. Pero los rayos tangentes con las normales se relacionan mediante la identidad $\tan\gamma\cdot\tan\delta = -1$, sustituyendo de Ec.(2.4) se tiene

$$\delta = \arctan\left[\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{a\cos t - b}\right]; \quad \beta = 2\arctan\left[\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{a\cos t - b}\right]. \tag{2.5}$$

Pero la familia de rayos reflejados P_iP_1 se puede escribir en función del ángulo β como

$$y\cos\beta - z\,\mathrm{sen}\,\beta = y_i\cos\beta - z_i\,\mathrm{sen}\,\beta, \tag{2.6}$$

por lo tanto, sustituyendo el valor para β de la Ec.(2.5) en Ec.(2.6) y haciendo un poco de álgebra se obtiene la ecuación paramétrica de la familia de los rayos reflejados

$$y = \left[\frac{a^2\,\mathrm{sen}\,2t - 2ab\,\mathrm{sen}\,t}{a^2\cos 2t - 2ab\cos t + b^2}\right](z + \{a\,(1+\cos t)\}) + b\left(t - \pi - \left(\frac{a}{b}\right)\mathrm{sen}\,t\right). \tag{2.7}$$

Para obtener la envolvente de esta familia de rayos reflejados, se deriva la Ec.(2.7) respecto de t, luego se resuelve para y y z, considerando la Ec.(2.7) y su correspondiente derivada,

finalmente se obtiene de esta forma

$$\mathscr{Z}_C(t) = \frac{(a\cos t - b)\left[a^2\cos 2t - 2ab\cos t + b^2\right]}{2a\,(a - b\cos t)} - a\,(1+\cos t),$$
$$\mathscr{Y}_C(t) = b\left(t - \pi - \left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{sen} t\right) + \frac{(a\cos t - b)^2\operatorname{sen} t}{(a - b\cos t)}, \tag{2.8}$$

reemplazando $z \to \mathscr{Z}_C$ y $y \to \mathscr{Y}_C$, donde el subíndice C significa la catacáustica. Así, la Ec.(2.8) proporciona las coordenadas en forma paramétrica de la cáustica producida por reflexión en un espejo cicloidal en un plano meridional.

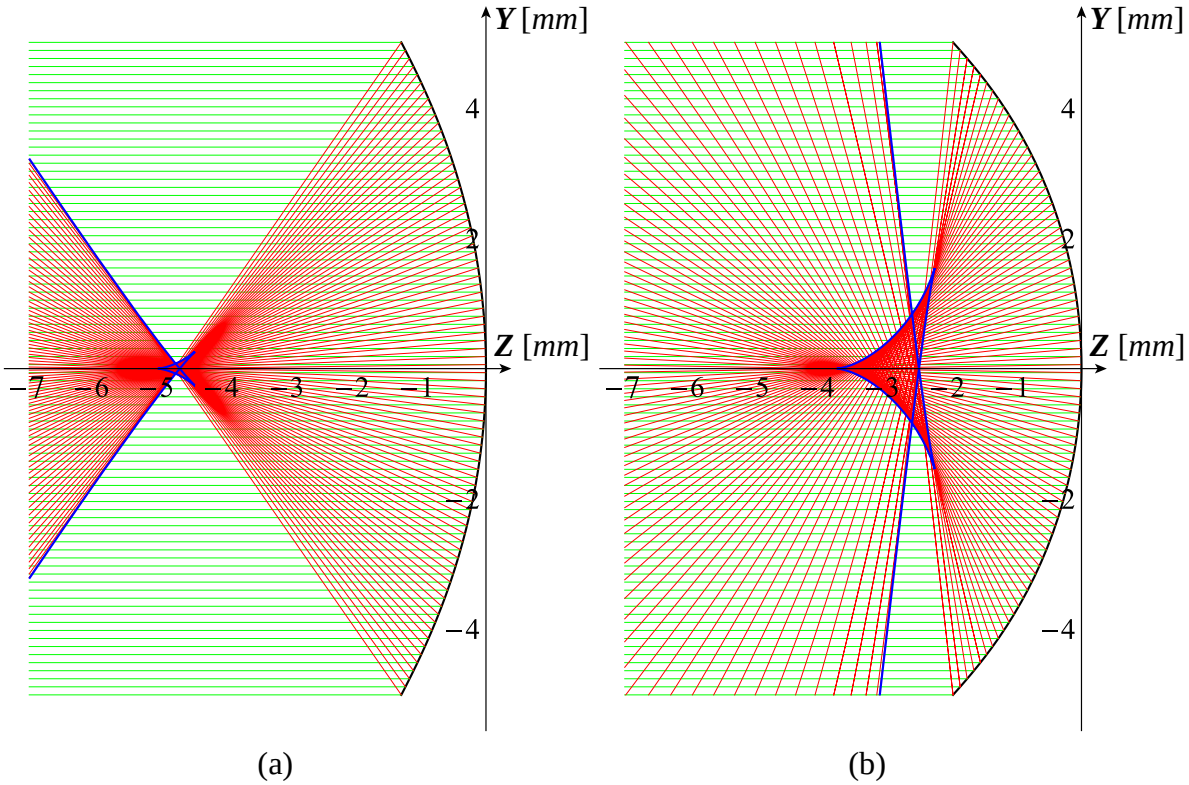


Fig. 2.4 (a) Trazo de rayos considerando una cicloide con parámetros $a = 1.05\,mm$, $b = 2.2\,mm$ y con parámetro de acotamiento $\varepsilon = 1.33\,rad$ para obtener un semidiámetro $H = 5\,mm$. (b) Cicloide con parámetros $a = 1.2\,mm$, $b = 1.76\,mm$ y con parámetro de acotamiento $\varepsilon = 0.78\,rad$ para la misma apertura que en (a).

En la Fig.2.5 se comparan las cáusticas generadas por distintos espejos cicloidales, fijando el valor del parámetro "b" y variando arbitrariamente "a" como se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Variación arbitraria del parámetro a_i fijando el parámetro $b = 2\,mm$ como constante.

Parámetro a_i	Valor de $a_i\,[mm]$	Parámetro de acotamiento $\varepsilon_i\,[rad]$	$F/\#$
a_1	0.85	0.99	0.48
a_2	0.90	1.03	0.47
a_3	0.95	1.05	0.46
a_4	1.00	1.08	0.45
a_5	1.10	1.14	0.44
a_6	1.25	1.23	0.42
a_7	1.50	1.38	0.41

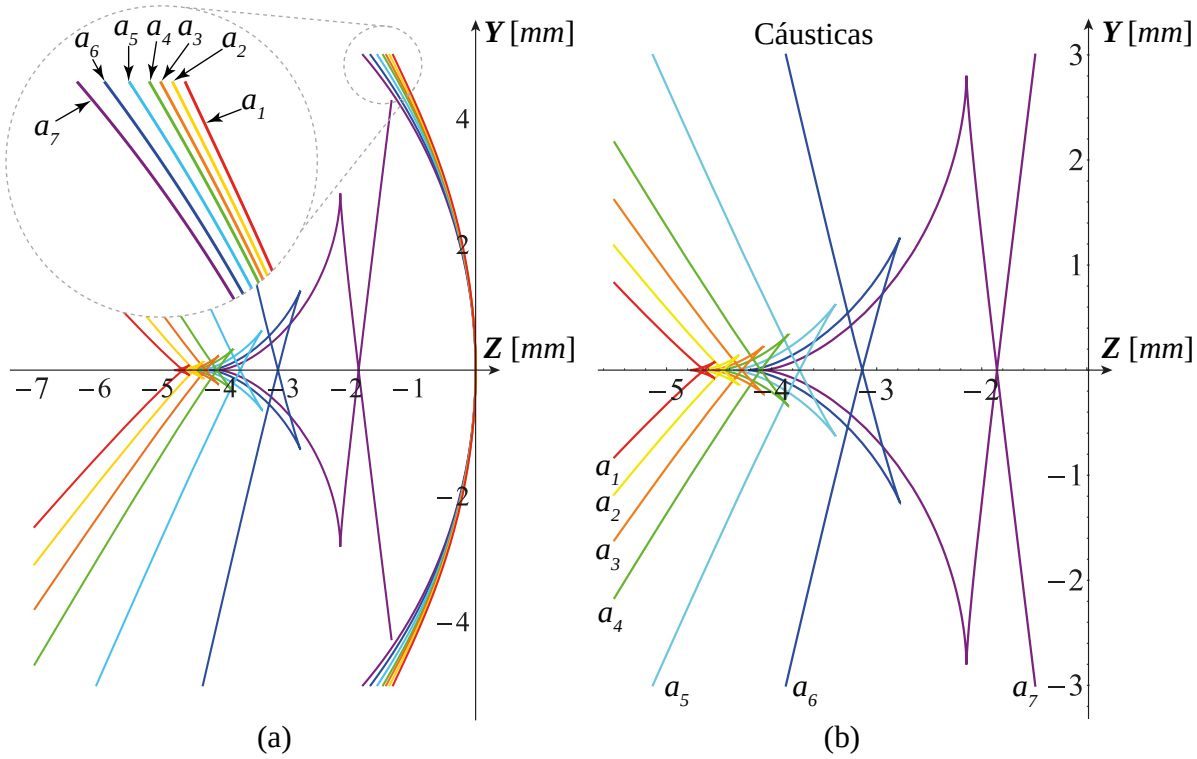


Fig. 2.5 (a) Cáusticas producidas por distintas cicloides, fijando el valor del parámetro $b = 2\,mm$ y variando el valor de a_i para calcular los parámetros de acotamiento ε_i tales que el semidiámetro de la apertura de las cicloides sea de $H = 5\,mm$. (b) Vista aumentada de las cáusticas resultantes en la región de la cúspide.

De manera análoga, se comparan las cáusticas formadas por distintos espejos cicloidales en la Fig.2.6, fijando en este caso el valor de "a" y variando arbitrariamente el parámetro "b" como se muestra en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Variación arbitraria del parámetro b_i fijando el parámetro $a = 1\,mm$ como constante.

Parámetro b_i	Valor de $b_i\,[mm]$	Parámetro de acotamiento $\varepsilon_i\,[rad]$	$F/\#$
b_1	1.50	-0.53	0.31
b_2	1.70	0.46	0.36
b_3	1.80	0.74	0.39
b_4	1.90	0.93	0.42
b_5	2.00	1.08	0.45
b_6	2.05	1.15	0.46
b_7	2.10	1.21	0.48

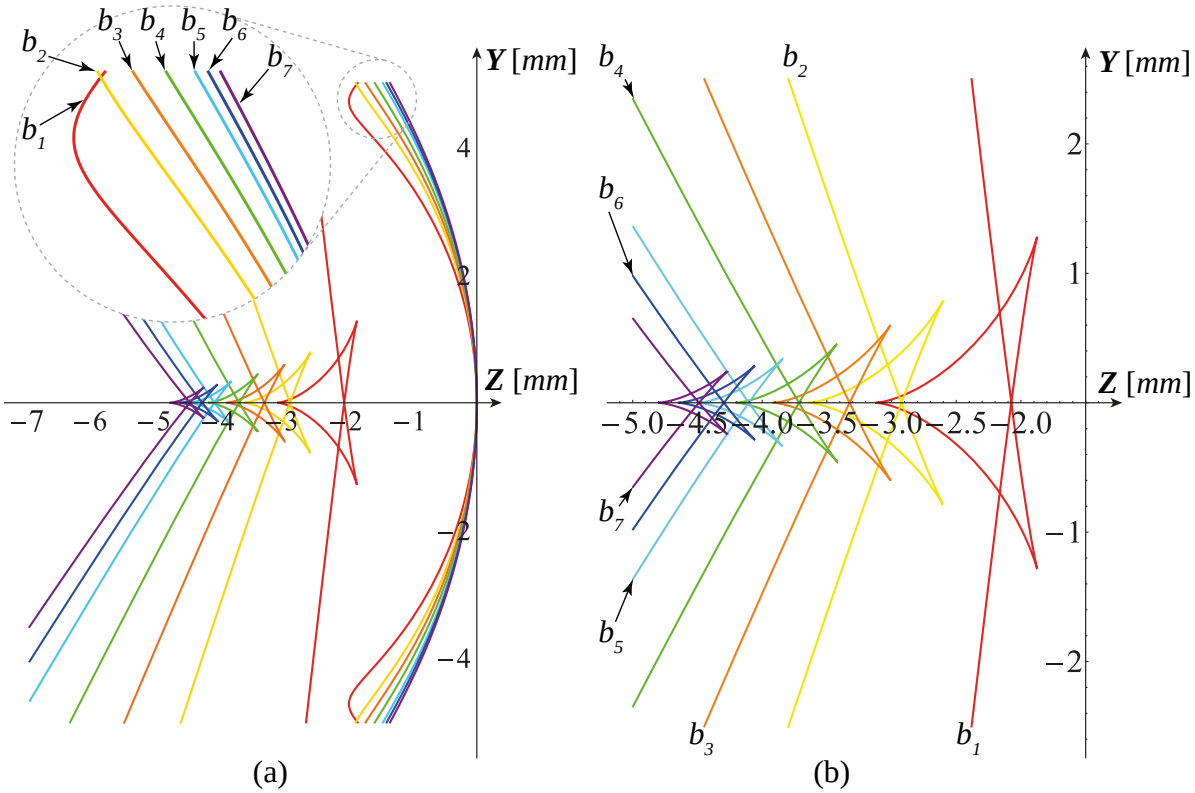


Fig. 2.6 (a) Cáusticas producidas por distintas cicloides, fijando el valor del parámetro $a = 1\,mm$ y variando el valor de b_i para calcular los parámetros de acotamiento ε_i tales que el semidiámetro de la apertura de las cicloides sea de $H = 5\,mm$. (b) Vista aumentada de las cáusticas resultantes en la región de la cúspide.

Por otro lado, se calculan las coordenadas de los centros de curvatura de la superfcie cicloidal

dadas en forma paramétrica como se muestra en [37]

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_{CC}(t) &= \frac{(b-a\cos t)\left[a^2-2ab\cos t+b^2\right]}{a\,(a-b\cos t)} - a\,(1+\cos t),\\ \mathscr{Y}_{CC}(t) &= b\left(t-\pi-\left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{sen} t\right)+\frac{\left(a^2-2ab\cos t+b^2\right)\operatorname{sen} t}{(a-b\cos t)}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Donde el subíndice CC denota el centro de curvatura. Finalmente, evaluando las Ec.(2.8) y Ec.(2.9) sobre el eje de simetría $\mathbf{Z}$, es decir, para $t=\pi$ se obtienen conjuntamente

$$(\mathscr{Z}_C(\pi),\mathscr{Y}_C(\pi)) = \left[-\frac{(a+b)^2}{2a},0\right];\quad (\mathscr{Z}_{CC}(\pi),\mathscr{Y}_{CC}(\pi)) = \left[-\frac{(a+b)^2}{a},0\right]. \tag{2.10}$$

Así, por Ec.(2.10) si se denota la distancia focal efectiva como f_c se tiene que

$$f_c = \mathscr{Z}_C(\pi) = -\frac{(a+b)^2}{2a} < 0, \tag{2.11}$$

por lo que la rapidez de un espejo cicloidal de dos parámetros se calcula mediante la expresión $F/\# = f_c/2H$, en la Tabla 2.1 y Tabla 2.2 se muestran los distintos números $F/\#$ para los espejos cicloidales. En tanto, el radio de curvatura paraxial denotado como R_c queda

$$R_c = \mathscr{Z}_{CC}(\pi) = -\frac{(a+b)^2}{a},$$

por lo tanto, como se observa en óptica paraxial se cumple para el espejo cicloidal de dos parámetros que la distancia focal efectiva es $f_c = R_c/2$.

2.1.1 Optimización de superficies cicloidales utilizando los parámetros de diseño

Como se observa en la Fig.2.1(b), el uso de un espejo parabólico para concentradores solares restringe su uso para zonas de concentración puntuales, por lo que si el problema exige una zona de concentración extendida como la que se muestra en la Fig.2.3(b) entonces el uso de alguna variante de la cicloide anteriormente discutida puede resultar adecuada; para esto se verá a continuación una forma de asignar valores para los parámetros "a" y "b" convenientes

para las dimensiones del sistema dado.

Considérese un sistema como el de la Fig.2.7, para el cual se debe determinar la superficie adecuada tal que concentre la luz producida por una fuente como la descrita en la sección anterior sobre una muestra sólida de dimensiones dadas y que está colocada a una distancia p del vértice del espejo sobre el eje **Z**. Entonces, si se elige un espejo parabólico con distancia focal f_c como ha sido habitual en el diseño de concentradores solares, se observa que la iluminación sobre la muestra no es total, debido a una obstrucción en la parte central.

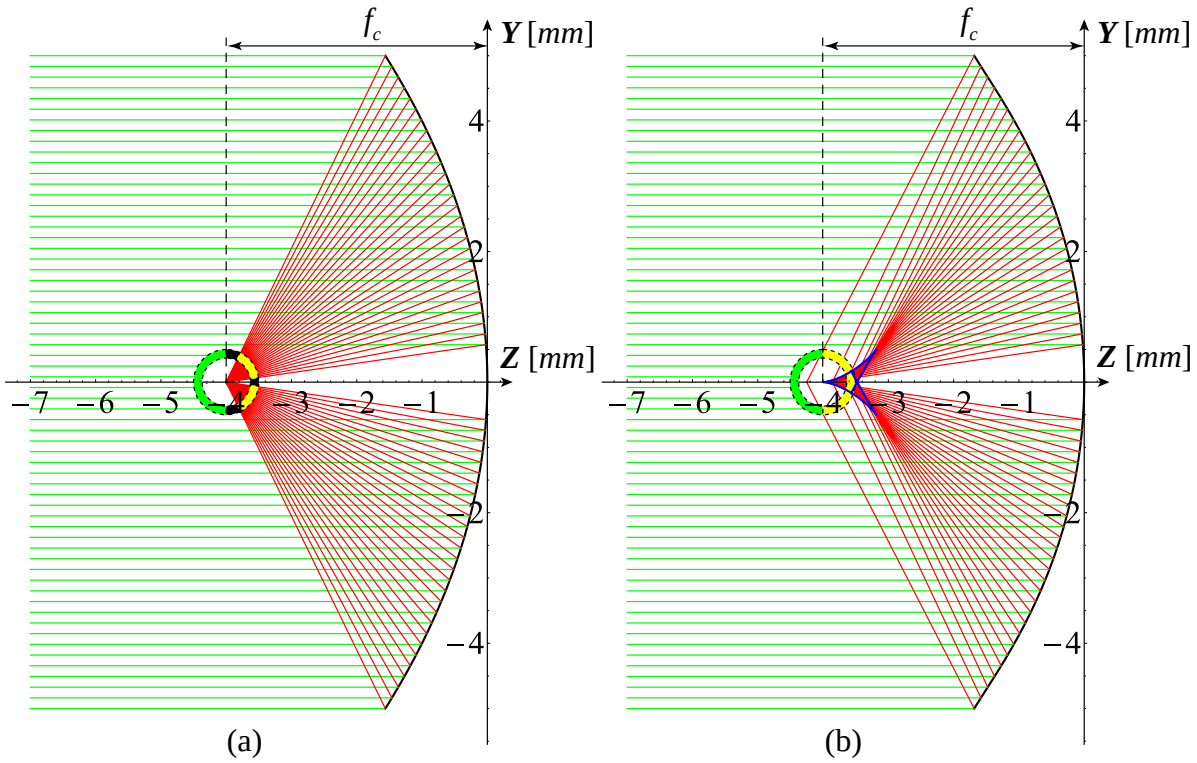


Fig. 2.7 (a) Se fija la distancia focal $f_c = -4\,mm$ de un espejo parabólico para iluminar una muestra sólida representada por el anillo punteado, como se observa existe una sección oscura que representa la zona no iluminada, la parte amarilla es la región iluminada por los rayos reflejados y la parte verde frontal es la parte iluminada por el haz incidente. (b) Usando la Ec.(2.13) se calcula para la misma distancia focal efectiva f_c y con $a = 0.98\,mm$ el parámetro $b(a) = 1.82\,mm$, se observa que la totalidad del círculo queda iluminada en este caso.

Por otro lado, si se considera un espejo cicloidal para el cual se fija la misma distancia focal f_c, se tiene entonces por la Ec.(2.10) que $f_c = \mathscr{Z}_C(\pi)$, a partir de esta ecuación se pueden calcular los parámetros adecuados "a" ó "b" para enfocar a la distancia f_c fijando "b" ó "a"

respectivamente

$$a = -(f_c + b) \pm \sqrt{f_c(f_c + 2b)}, \tag{2.12}$$

$$b = -a \pm \sqrt{-2af_c}. \tag{2.13}$$

Nótese que en la Ec.(2.13) aparece el término $-2af_c$ dentro de la raíz, sin embargo, de la Ec.(2.11) se tiene que $f_c < 0$ y del hecho que $a, b > 0$ se deduce que este término es siempre positivo, por lo que está bien definido.

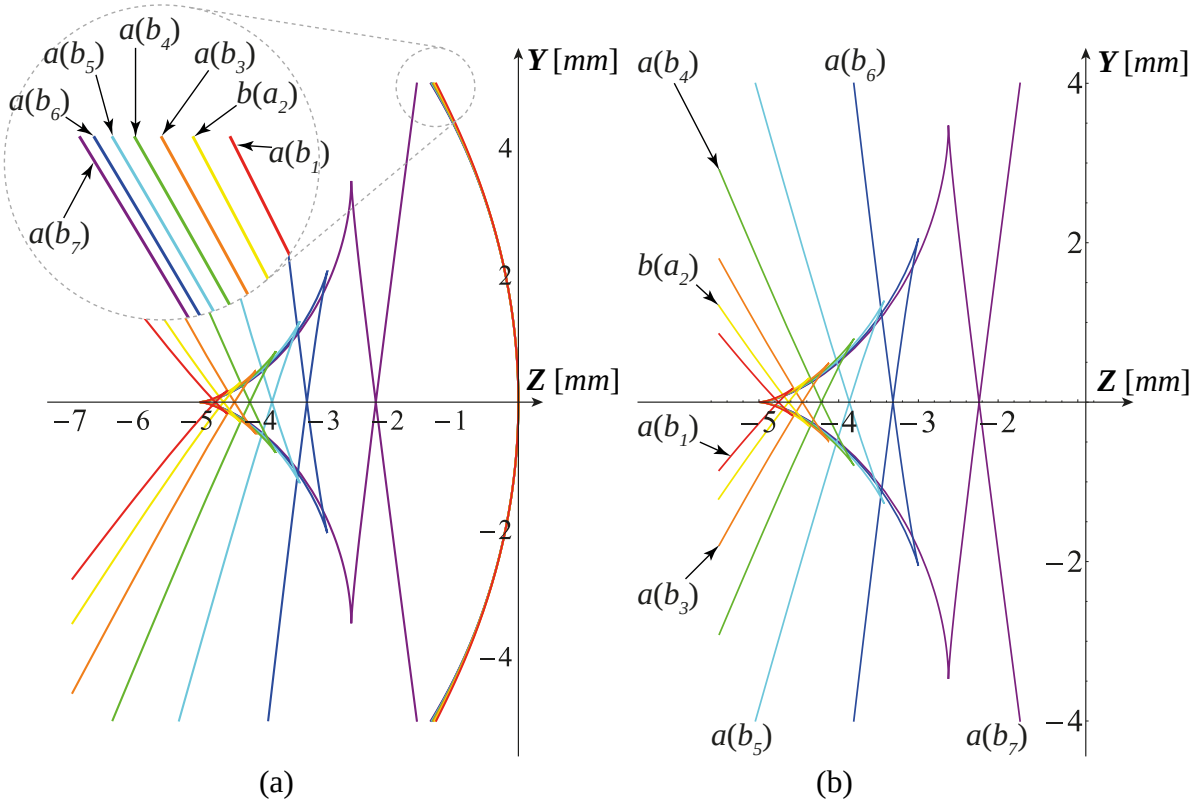


Fig. 2.8 (a) Cáusticas producidas por distintas cicloides, variando el parámetro b_i y considerando una distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija para calcular $a(b_i)$ y los parámetros de corte ε_i tales que el semidiámetro de apertura de las cicloides sea $H = 5\,mm$, quedando superficies con $F/\# = 0.5$. (b) Vista aumentada de las cáusticas resultantes en la región de la cúspide.

En la Fig.2.8 se comparan las cáusticas producidas por distintos espejos cicloidales con valores arbitrarios dados en la Tabla 2.4 para "b", asumiendo la solución positiva en la Ec.(2.12) y

fijando una distancia focal efectiva f_c predeterminada de diseño.

Tabla 2.3 Cálculo de a en función del parámetro b_i con distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija.

Parámetro b_i	Valor de $b_i\,[mm]$	Resultado $a\,(b_i)\,[mm]$	Parámetro de acotamiento $\varepsilon_i\,[rad]$
b_1	2.15	0.98	1.25
b_2	2.20	1.07	1.34
b_3	2.25	1.17	1.43
b_4	2.30	1.29	1.53
b_5	2.35	1.42	1.62
b_6	2.40	1.60	1.71
b_7	2.45	1.84	1.82

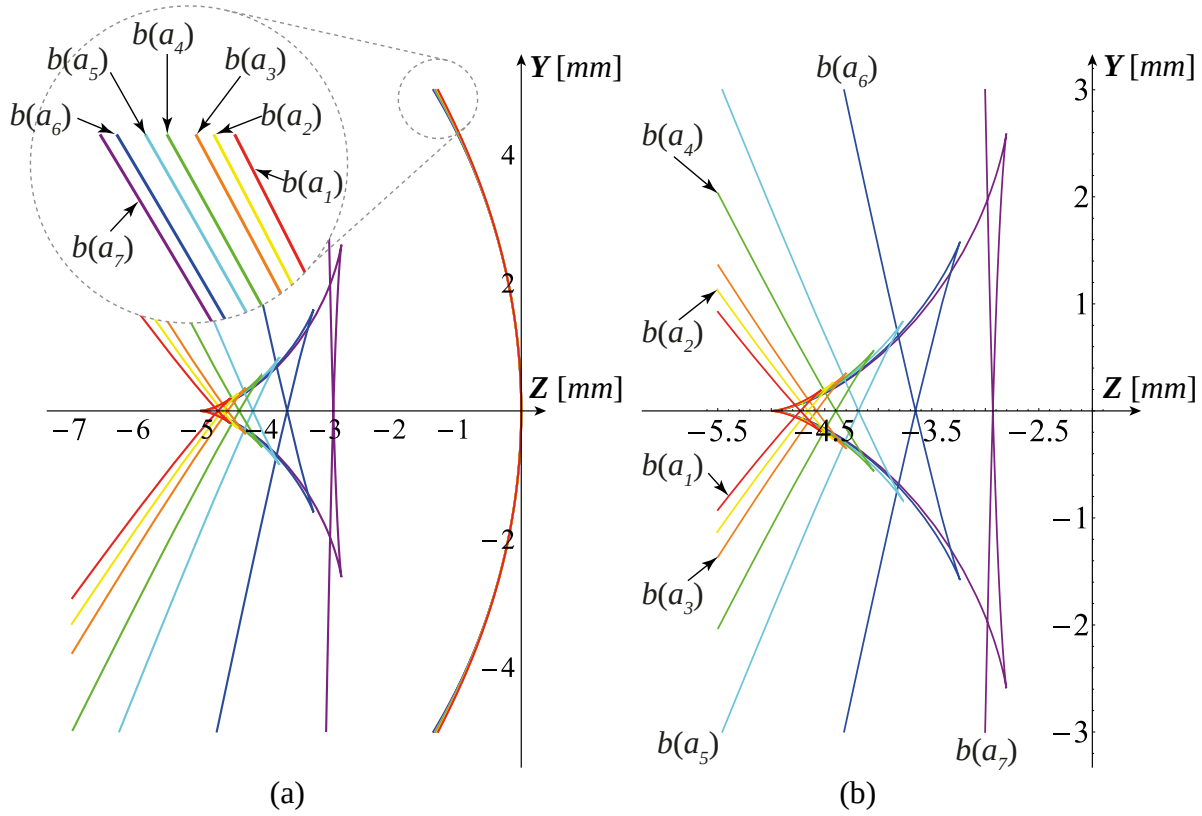


Fig. 2.9 (a) Cáusticas producidas por distintas cicloides, variando el parámetro a_i y considerando una distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija para calcular $b\,(a_i)$ y los parámetros de acotamiento ε_i tales que el semidiámetro de apertura de las cicloides sea $H = 5\,mm$, quedando superficies con $F/\# = 0.5$. (b) Vista aumentada de las cáusticas resultantes en la región de la cúspide.

Ahora se compararán en la Fig.2.9 las cáusticas producidas por espejos con valores arbitrarios dados en la Tabla 2.3 para "a", asumiendo la solución positiva en la Ec.(2.13) y fijando una distancia focal efectiva f_c de forma análoga al caso anterior.

Tabla 2.4 Cálculo de b en función del parámetro a_i con distancia focal $f_c = -5\,mm$ fija.

Parámetro a_i	Valor de $a_i\,[mm]$	Resultado $b\,(a_i)\,[mm]$	Parámetro de acotamiento $\varepsilon_i\,[rad]$
a_1	1.00	2.16	1.27
a_2	1.05	2.19	1.32
a_3	1.10	2.22	1.37
a_4	1.20	2.26	1.46
a_5	1.30	2.31	1.54
a_6	1.50	2.37	1.66
a_7	1.70	2.42	1.77

Entonces, como se observa en el ejemplo dado en la Fig.2.7, mientras la parábola está limitada a concentrar en un punto, debido a la sombra de la muestra existe un área en la cual no se aprovecha la iluminación. La cicloide calculada para el problema en cuestión logra iluminar la zona posterior de la muestra, esto manteniendo constante el número $F/\# = 0.4$ en ambos casos.

2.2 Diseño de espejos tipo Fresnel

Los espejos tipo Fresnel se pueden ver como un arreglo bien definido de pequeños prismas en un plano meridional por lo que tienen importantes propiedades. Su construcción puede hacerse seccionando el perfil de una superficie reflejante para después sustituirse por un conjunto de espejos planos equivalentes, comúnmente se coloca un borde de los espejos planos a un mismo nivel de elevación reduciendo así el grosor del espejo por sección respecto a su versión cóncava visto en un plano meridional.

En esta sección se considerarán únicamente curvas planas contenidas en el plano de incidencia $\mathbf{Y}-\mathbf{Z}$ tales que el eje $\mathbf{Z}$ es paralelo al eje óptico. Sea entonces $\mathbf{S}$ la curva que representa el perfil de una superficie reflectora arbitraria, definida en forma paramétrica como

$$\mathbf{S}(\tau) = [\mathscr{Z}(\tau), \mathscr{Y}(\tau)], \tag{2.14}$$

se dice que la Ec.(2.14) es una curva suave en $\mathbb{R}^2$ si tanto $\mathscr{Z}$ como $\mathscr{Y}$ tienen derivadas de todos los órdenes y con derivada de primer orden no nula, es decir, $\mathscr{Z}_\tau, \mathscr{Y}_\tau \neq 0$ para todo τ.
Se calcula entonces la función de longitud de arco para la curva suave parametrizada definida en la Ec.(2.14) sobre el intervalo $\tau \in [t_0, t_n]$ como se muestra en la Fig.2.10(a)

$$\mathscr{L}_{t_0}^{t_n} = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{(\mathscr{Z}_\tau(\tau))^2 + (\mathscr{Y}_\tau(\tau))^2}\, d\tau = L(t_n) - L(t_0), \tag{2.15}$$

donde por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que $L(\tau)$ es una función primitiva del integrando, es decir, su primera derivada respecto de τ es igual a la función del integrando.

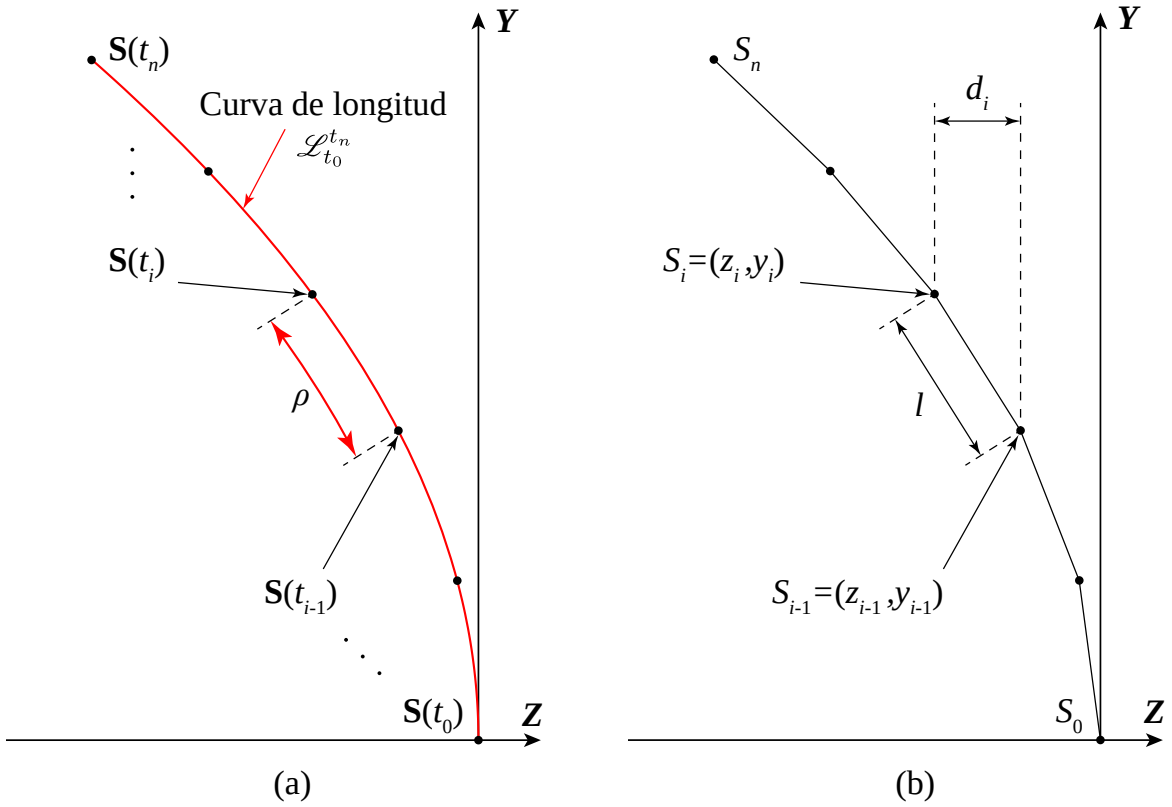


Fig. 2.10 (a) Una curva suave y continua con longitud $\mathscr{L}_{t_0}^{t_n}$ se secciona en los puntos $\mathbf{S}(t_i)$ equidistantes por una longitud de arco ρ. (b) Aproximación de la curva $\mathbf{S}$ mediante rectas secantes a la curva con pendientes m_i que unen los puntos contiguos de seccionamiento $S_i = \mathbf{S}(t_i)$.

A lo largo de este trabajo se considerarán sólo superficies tipo Fresnel generadas a partir de una curva $\mathbf{S}$ simétrica respecto el eje $\mathbf{Z}$ que es dividida en segmentos equidistantes con longitud de arco constante ρ, defínase $n \in \mathbb{N}$ como el número de secciones en que se divide la parte

positiva de la curva **S** como se muestra en la Fig.2.10(a), se genera entonces el conjunto de intervalos $\{[t_i, t_{i+1}]\}$ para $i = 0, \ldots, n-1$ tales que satisfacen la igualdad $\mathscr{L}_{t_i}^{t_{i+1}} = \rho$, entonces por la Ec.(2.15) se obtiene la expresión

$$\mathscr{L}_{t_0}^{t_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathscr{L}_{t_i}^{t_{i+1}} = n \times \rho \approx n \times l, \tag{2.16}$$

donde l representa la longitud de la recta secante en los puntos de corte adyacentes S_i y S_{i+1}, como se muestra en la Fig.2.10(b). De lo anterior se deduce que entre más fina sea la partición de intervalos entonces el valor l tenderá a ser constante para todos los surcos, es decir, que si $n \to \infty$ entonces $l \to \rho$.

Sin embargo, el conjunto de parámetros $\{t_i\}$ con $i = 0, \ldots, n$ que definen cada intervalo de la partición deben ser calculados, para esto se fija como constante el valor t_0 en la Ec.(2.15), entonces calculando la longitud de arco de **S** para el intervalo arbitrario $[t_0, t_k]$ con t_k el k-ésimo valor del conjunto $\{t_i\}$ se deduce a partir de la Ec.(2.16) que

$$\mathscr{L}_{t_0}^{t_k} = L(t_k) - L(t_0) = k \times \rho, \tag{2.17}$$

donde, por lo discutido anteriormente se sabe que $L(t_0)$ es un valor fijo, además sustituyendo el valor de ρ por definición en la Ec. (2.16) se tiene

$$L(t_k) = L(t_0) + \left(\frac{k}{n}\right)[L(t_n) - L(t_0)]. \tag{2.18}$$

Por lo tanto, si esta expresión se evalúa para los valores $k = 0, 1, \ldots, n$, se obtendrá un conjunto de $n+1$ ecuaciones con sus respectivas incógnitas t_k, las cuales se calculan para determinar los elementos el conjunto $\{t_i\}$. Nótese que si se resuelve la Ec.(2.18) para el caso en que $k = 0$ resulta

$$L(t_k) = L(t_0) \;\Rightarrow\; t_k = t_0,$$

por otro lado, en el caso en que $k = n$ se tiene que

$$L(t_k) = L(t_n) \;\Rightarrow\; t_k = t_n,$$

lo cual es cierto siempre que L sea una función inyectiva.

Así, los puntos de seccionamiento de **S** ilustrados en la Fig.2.10(a), se calculan sustituyendo

en la Ec.(2.14) los valores de la partición como sigue $\mathbf{S}(t_i)$ para $i = 1,\ldots,n$. Por lo tanto, la aproximación a la superficie $\mathbf{S}$ que se indica en la Ec.(2.16), se construye uniendo mediante segmentos de líneas rectas los puntos $S_i = (z_i, y_i)$ adyacentes siguiendo la relación $S_{i-1} \to S_i$ como se muestra en la Fig.2.10(b), por consiguiente cada segmento de recta queda definido por su pendiente dada en la forma

$$m_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}, \qquad (i = 1,\ldots,n). \tag{2.19}$$

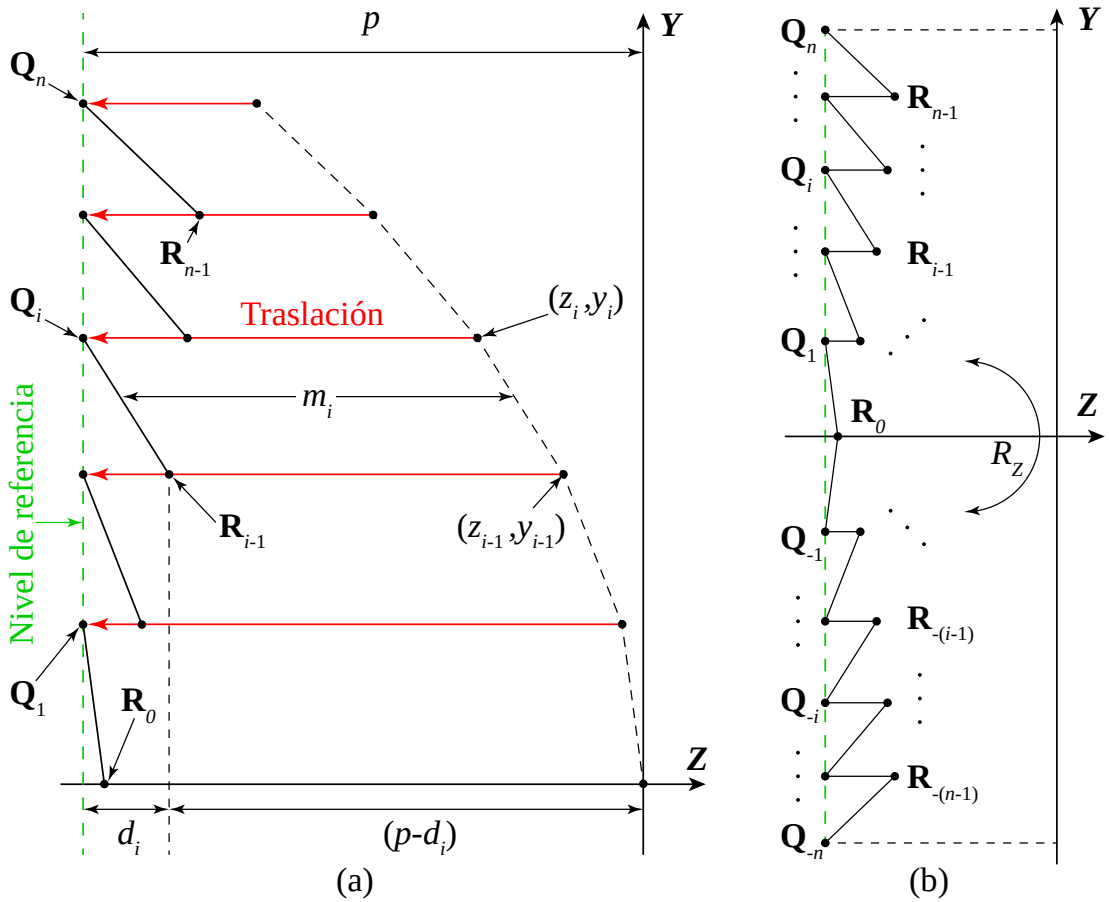


Fig. 2.11 (a) Las rectas de la aproximación a la curva $\mathbf{S}$ mostradas en la Fig.2.10(b) se trasladan a un mismo nivel $z = p$ generando los conjuntos de puntos $\mathbf{Q}_i$ y $\mathbf{R}_{i-1}$. (b) Reflexión respecto del eje $\mathbf{Z}$ para generar el espejo simétrico.

Pero para formar el perfil del espejo plano tipo Fresnel se debe trasladar cada segmento inclinado hasta el mismo plano representado por la línea recta vertical $z = p$ con $p \in \mathbb{R}$ como se

muestra en la Fig.2.11(a), es decir, se fija cada sección con pendiente m_i a su correspondiente punto $\mathbf{Q}_i$ que se calcula utilizando la siguiente expresión

$$\mathbf{Q}_i \equiv \left(Q_i^z, Q_i^y\right) = (p, y_i), \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.20}$$

donde Q_i^z, Q_i^y denotan las coordenadas en el sistema $\mathbf{Z}-\mathbf{Y}$, a partir de esta expresión y como consecuencia de la traslación de los segmentos de rectas se calculan los puntos $\mathbf{R}_i$ mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{R}_i \equiv \left(R_i^z, R_i^y\right) = (p + d_i, y_i), \qquad (i = 0, \ldots, n-1), \tag{2.21}$$

donde R_i^z, R_i^y denotan las coordenadas en $\mathbf{Z}-\mathbf{Y}$, $d_i = (z_i - z_{i+1})$ como se observa en la Fig.2.11(a).

Entonces los puntos calculados mediante las Ec.(2.20) y Ec.(2.21), resultan ser tales que al unirlos en una correspondencia $\mathbf{R}_{i-1} \to \mathbf{Q}_i$ con $i = 1, \ldots, n$ como se indica en la Fig.2.11(a), generan los segmentos de líneas rectas que definen los surcos de espejo tipo Fresnel, geométricamente se puede interpretar a cada punto $\mathbf{Q}_i$ como la cúspide del surco, en tanto su correspondiente $\mathbf{R}_i$ representa la profundidad máxima del mismo como si fuese maquilado a partir de una superficie plana.

Así, los segmentos resultantes de la correspondencia $\mathbf{R}_{i-1} \to \mathbf{Q}_i$ satisfacen la igualdad dada por la Ec.(2.19), se verifica este hecho para $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{Q_i^y - R_{i-1}^y}{Q_i^z - R_{i-1}^z} = \frac{y_i - y_{i-1}}{p - (p + d_{i-1})} = \frac{y_i - y_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} = m_i,$$

por lo tanto, cada segmento de recta puede ser representado por la ecuación cartesiana siguiente

$$Q_i^y - y = m_i \left(Q_i^z - z(y)\right), \tag{2.22}$$

con dominio $y \in \left[R_{i-1}^y, Q_i^y\right] \subseteq \mathbb{R}$, del cual se deduce que $z(y) \in \left[R_{i-1}^z, Q_i^z\right] \subseteq \mathbb{R}$.

En consecuencia, se puede definir al espejo Fresnel como una función en su forma paramétrica redefiniendo $y \to h$ como la variable de altura, entonces

$$\Sigma_i(h) = \left[\frac{1}{m_i}\left(h - Q_i^y\right) + Q_i^z, h\right] \qquad h \in \left(R_{i-1}^y, Q_i^y\right], \tag{2.23}$$

resulta en una función que es continua a trozos en cada intervalo semiabierto $\left(R_{i-1}^y, Q_i^y\right] \subseteq \mathbb{R}$,

compuesta por los segmentos de recta inclinados Σ_i en representación de la superficie reflejante de cada surco del espejo tipo Fresnel. Como se observa en la Fig.2.12, se definieron los puntos de discontinuidad $\mathbf{R}_{i-1}$ y se han representado por círculos blancos para asegurar que la Ec.(2.23) es una función escalonada como las que se presentan en [38].

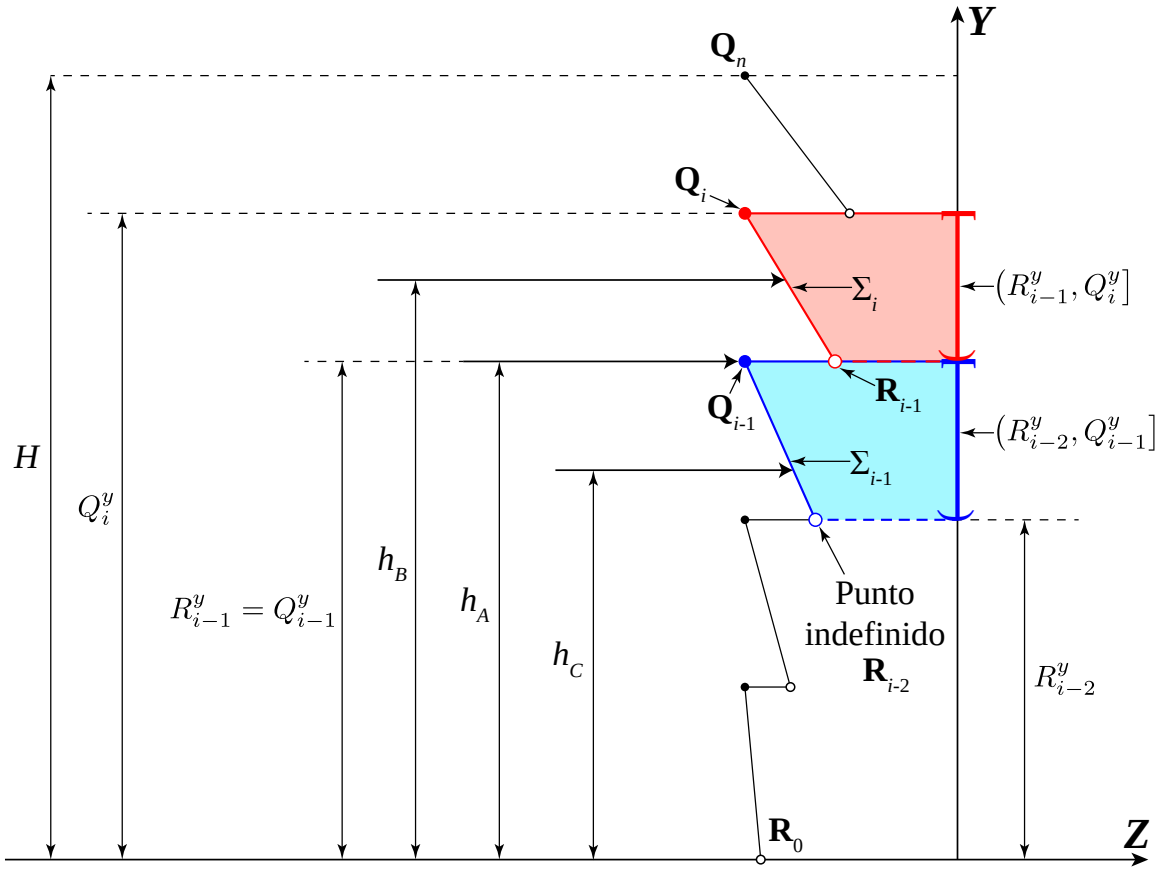


Fig. 2.12 Los puntos $\mathbf{R}_{i-1}$ son puntos de indeterminación de la función, por esta razón el rayo con altura $h_A = R^y_{i-1} = Q^y_{i-1}$ se evalúa en Σ_{i-1}. Por otro lado, $R^y_{i-1} < h_B \leq Q^y_i$ por lo que este rayo corresponde a Σ_i, en tanto $R^y_{i-2} < h_C \leq Q^y_{i-1}$ por lo que se evalúa en Σ_{i-1}.

La discusión anterior ha permitido construir los segmentos Σ_i de la parte positiva de la función, sin embargo, el espejo tipo Fresnel tiene simetría respecto el eje **Z**, para construir la parte negativa bastará con aplicar las siguientes reflexiones respecto del eje óptico como se indica

en la Fig.2.11(b)

$$
\begin{aligned}
R_z(\mathbf{Q}_i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i^z \\ Q_i^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_i^z \\ -Q_i^y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{Q}_{(-i)}, \\
R_z(\mathbf{R}_i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_i^z \\ R_i^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_i^z \\ -R_i^y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{R}_{(-i)},
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

por lo tanto, estos conjuntos representan los correspondientes puntos reflejados de $\mathbf{R}_i$ y $\mathbf{Q}_i$ que están en la parte negativa del eje $\mathbf{Y}$, entonces toda la construcción geométrica anterior es análoga para estos casos.

2.2.1 Trazo exacto considerando rayos paralelos al eje óptico incidiendo sobre un espejo tipo Fresnel

A lo largo de esta sección se estudiará el funcionamiento de un espejo tipo Fresnel, considerando un haz de luz proveniente de una fuente colocada en infinito, que sin pérdida de generalidad se propaga de izquierda a derecha paralelo al eje óptico y que incide sobre la superficie representada en el plano meridional $\mathbf{Z}-\mathbf{Y}$ por la Ec.(2.23).

Sea H la apertura de entrada del espejo, se tiene que h es la variable de altura del rayo, por lo que el dominio total de la Ec.(2.23) queda delimitado en el intervalo $h \in [-H, H]$.

Como se muestra en la Fig.2.13, considerése el punto F_i en el espejo sobre el cual incide el rayo A, de la Ec.(2.23) se deduce que es un rayo incidente sobre el surco Σ_i, y que es reflejado a un ángulo β_i, lo mismo sucede para cualquier rayo incidente en dicho surco, tal es el caso del rayo B.

De forma análoga a los espejos cóncavos, se calcula la tangente a la superficie en F_i mediante la Ec.(2.4) de donde $\tan\gamma_i = m_i$, por lo que $\tan\delta_i = -1/m_i$. De la Fig.2.13 se tienen $\delta_i = \theta_i$ y $\beta_i = 2\theta_i$, entonces $\beta_i = 2\delta_i$ obteniendo

$$
m_{ri} = \tan\beta_i = \left(\frac{2m_i}{1-m_i^2}\right), \tag{2.25}
$$

donde m_{ri} denota la pendiente del haz de rayos reflejados correspondientes al surco Σ_i. Finalmente, sustituyendo esta expresión en la Ec. (2.6) se llega a la ecuación del rayo reflejado.

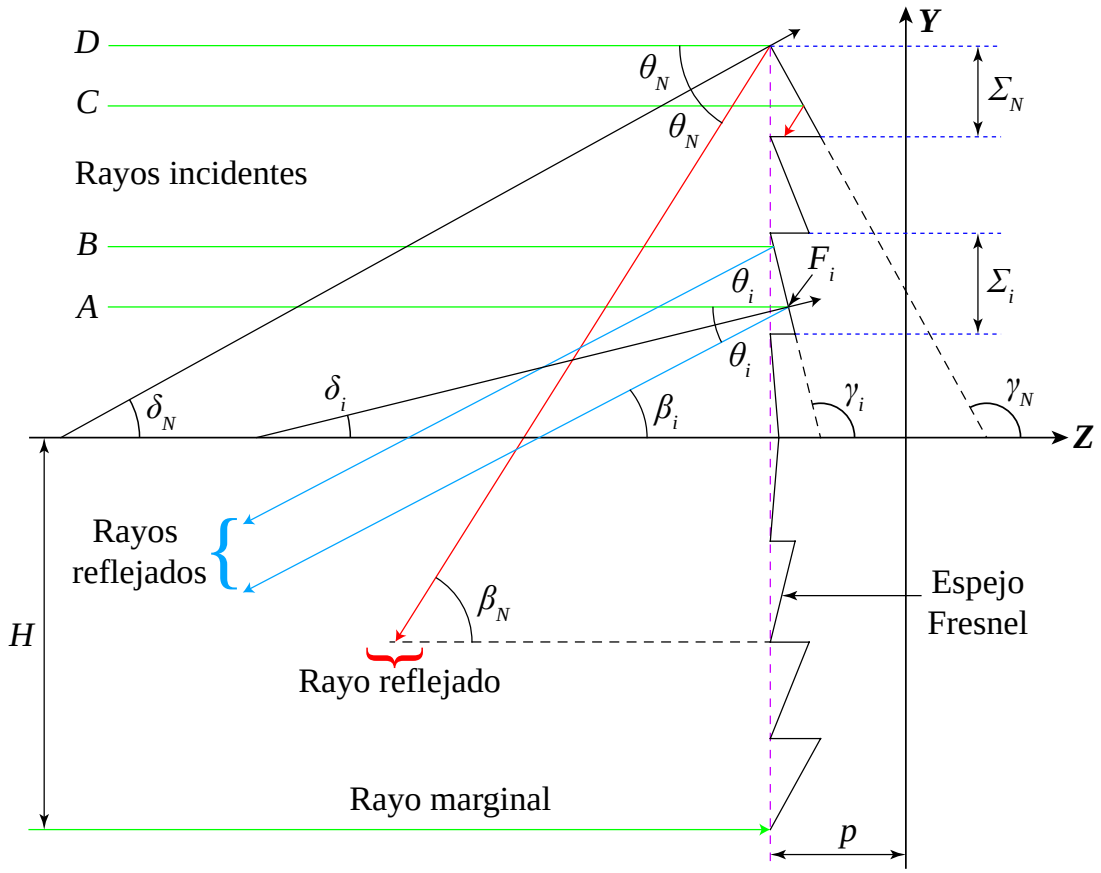


Fig. 2.13 Trazo exacto de rayos para un espejo tipo Fresnel, los rayos incidentes A y B corresponden al surco Σ_i y son reflejados a un mismo ángulo β_i. Lo mismo sucede en el caso particular de Σ_N, donde el rayo C es obstruido por la discontinuidad del espejo.

2.2.2 Pérdidas de iluminación por obstrucción en un espejo tipo Fresnel

Como se muestra en la Fig.2.13, la superficie del espejo tipo Fresnel tiene en cada unión de surcos una discontinuidad que genera una barrera interior, debido a esto existen rayos incidentes como C para los cuales su correspondiente rayo reflejado es obstruido por las paredes horizontales de los surcos, este fenómeno implica una reducción de la superficie útil del espejo, semejante a una reflexión total interna, en el caso de una lente refractora, lo que se manifiesta como pérdidas de energía en un sistema de iluminación, y en particular para un concentrador solar se verán como zonas oscuras.

Para tratar de cuantificar dichas pérdidas se definirá como h_{ci} la altura crítica del rayo para la

cual su correspondiente rayo reflejado incide exactamente en la cúspide de la barrera. Como se observa en la Fig.2.14, se tiene que para cada surco Σ_i corresponde una altura crítica h_{ci} que es la del rayo punteado.

Como se muestra en la Fig.2.14, se define la región de obstrucción de rayos reflejados en el surco Σ_i como el triángulo $\triangle F_c \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{Q}_{i-1}$ con altura máxima h_{si} la cual a su vez divide la región inicial en dos triángulos rectángulos con la misma altura.

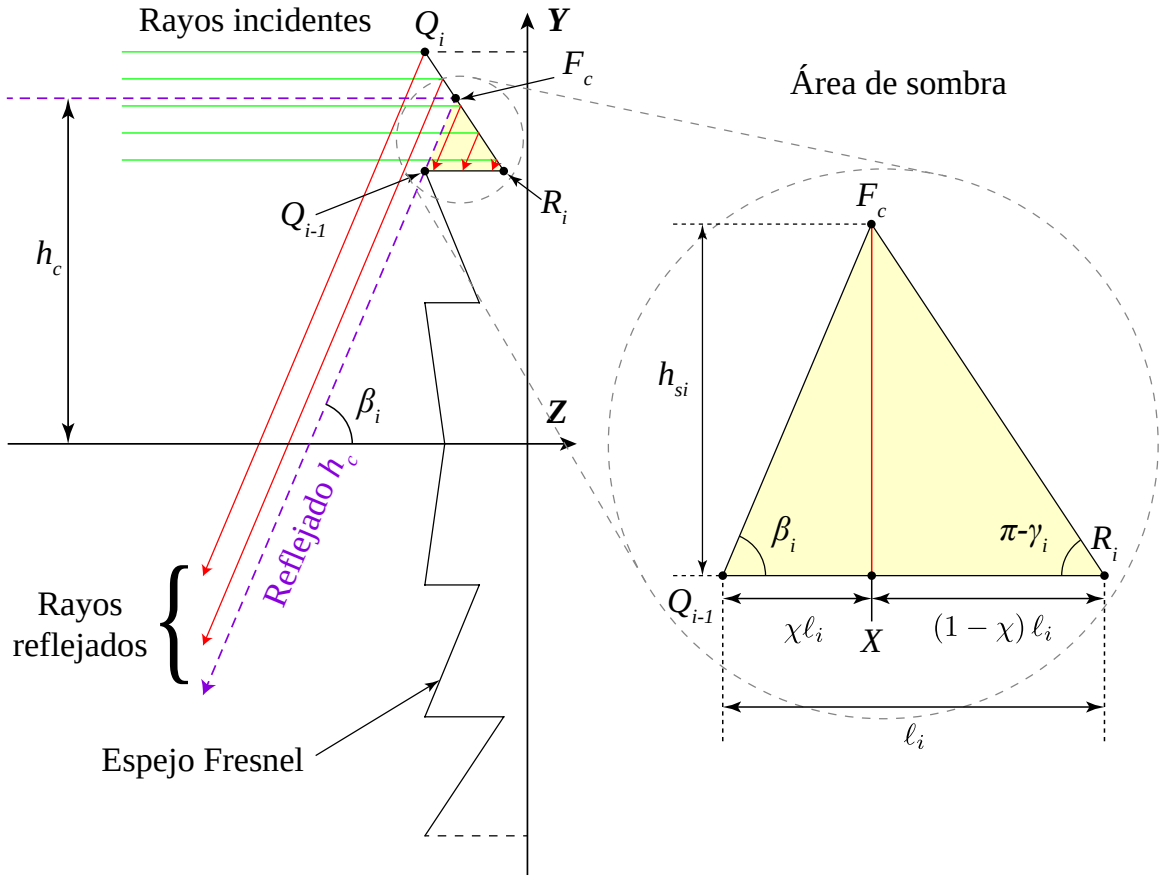


Fig. 2.14 Un haz de rayos paralelos incide en el surco Σ_i, se observa que los rayos que inciden para alturas $h < h_{ci}$ son obstruidos por la barrera inferior del surco del espejo. La vista aumentada del triángulo que se forma por el rayo reflejado de h_{ci} muestra los parámetros necesarios para calcular h_{si}.

Para calcular h_{si} considérese primero la base del triángulo $\triangle F_c R_i Q_{i-1}$, la cual se calcula mediante la expresión

$$\ell_i = \left| R_i^z - Q_{i-1}^z \right| = R_i^z - p, \tag{2.26}$$

pero la base de $\triangle F_c X Q_{i-1}$ que es una fracción del segmento ℓ_i se denotará como

$$\overline{X\mathbf{Q}_{i-1}} = \chi \ell_i,$$

a partir del hecho que $\ell_i = \overline{X\mathbf{Q}_{i-1}} + \overline{X\mathbf{R}_{i-1}}$ se calcula la base del triángulo $\triangle F_c X \mathbf{R}_{i-1}$ mediante la expresión

$$\overline{X\mathbf{R}_{i-1}} = (1-\chi)\,\ell_i,$$

por otro lado, como se muestra en la Fig.2.14 los ángulos opuestos al lado h_{si} corresponden a

$$\angle F_c \mathbf{Q}_{i-1} X = \beta_i, \quad \angle F_c \mathbf{R}_{i-1} X = \pi - \gamma_i,$$

para los triángulos rectángulos $\triangle F_c X \mathbf{Q}_{i-1}$ y $\triangle F_c \mathbf{R}_{i-1} X$ respectivamente, donde $\gamma_i = \arctan m_i$ y β_i se definió en la Ec.(2.25).

Por lo tanto, de lo expuesto en el párrafo anterior se deducen dos expresiones para calcular h_{si}, por un lado se tiene de $\triangle F_c X \mathbf{Q}_{i-1}$ que

$$\tan\beta_i = \left[\frac{h_{si}}{\chi \ell_i}\right] \;\Rightarrow\; h_{si} = \chi \ell_i \tan\beta_i,$$

por el otro, se tiene de $\triangle F_c \mathbf{R}_{i-1} X$ que

$$\tan(\pi - \gamma_i) = \left[\frac{h_{si}}{(1-\chi)\,\ell_i}\right] \;\Rightarrow\; h_{si} = -(1-\chi)\,\ell_i \tan\gamma_i,$$

igualando ambas expresiones se calcula el valor χ como función de los ángulos opuestos

$$\chi \ell_i \tan\beta_i = (\chi - 1)\,\ell_i \tan\gamma_i \;\Rightarrow\; \chi \ell_i = \left[\frac{\ell_i \tan\gamma_i}{\tan\gamma_i - \tan\beta_i}\right].$$

Nótese que en la expresión anterior no se dispuso del factor ℓ_i a pesar de que se podía simplificar aún más la ecuación, esto fue con el objetivo de redefinir $b_s \equiv \chi \ell_i$. Al sustituir los valores obtenidos en la sección anterior $\tan\gamma_i = m_i$ y $\tan\beta_i = m_{ri}$ y en términos de la nueva notación se tiene que

$$b_{si} = \left[\frac{\ell_i m_i}{m_i - m_{ri}}\right],$$

además, considerando la Ec.(2.25) y desarrollando apropiadamente el álgebra se llega a la

siguiente expresión

$$b_{si} = -\left(\frac{\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right)\left[\frac{\left(1-m_i^2\right)}{m_i}\right], \tag{2.27}$$

donde, como se muestra en la Fig.2.14, b_{si} es la longitud de la proyección ortogonal del punto F_c sobre la barrera interna del espejo, a la vez que representa la base de $\triangle F_c X \mathbf{Q}_{i-1}$.
Habiendo calculado y posteriormente redefinido $\chi\ell_i$, se retoma la igualdad

$$h_{si} = b_{si}\tan\beta_i,$$

en términos de la nueva notación y sustituyendo en esta expresión la Ec.(2.25) se obtiene

$$h_{si} = -\left(\frac{2\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right), \tag{2.28}$$

donde h_{si} representa la altura máxima de $\triangle F_c \mathbf{R}_{i-1}\mathbf{Q}_{i-1}$, por lo que se puede interpretar como la longitud de apertura del surco con reflexión totalmente obstruida por las barreras internas del espejo Fresnel.
Por lo tanto, sumando los valores dados por la Ec.(2.28) a su correspondiente R_{i-1}^y se obtienen las alturas críticas

$$h_{ci} = \begin{cases} R_{i-1}^y + h_{si} & \text{si} \quad i \neq 1 \\ \\ R_{i-1}^y & \text{si} \quad i = 1, \end{cases} \tag{2.29}$$

nótese que para $i = 1$ la altura crítica se define como $R_0^y = 0$ debido a que no existe barrera interna en los surcos centrales, por lo que $h_{si} = 0$ en esos casos, como se observa en la Fig.2.15.
En la Ec.(2.26) se mostró que el término ℓ_i es siempre positivo, además, por la concavidad de $\mathbf{S}$ se sabe que $m_i < 0$, entonces por la Ec.(2.28) se deduce que $h_{si} > 0$ resultando la siguiente desigualdad

$$0 \leq R_{i-1}^y \leq h_{ci} < Q_i^y,$$

de donde se tiene que

$$0 < \left(Q_i^y - R_{i-1}^y\right) = \left(Q_i^y - h_{ci}\right) + \left(h_{ci} - R_{i-1}^y\right),$$

así, se deduce la igualdad siguiente que es válida para todo i

$$H_i \equiv \left|Q_i^y - R_{i-1}^y\right| = \left|Q_i^y - h_{ci}\right| + \left|h_{ci} - R_{i-1}^y\right| \equiv H_{ei} + H_{pi}, \tag{2.30}$$

donde se definieron los valores H_{ei} como la apertura de luz eficientemente aprovechada por el surco y H_{pi} como la apertura que se refleja hacia la barrera del mismo, y por lo tanto que será obstruida, la suma de ambas resulta en la apertura total de entrada H_i para el surco Σ_i.

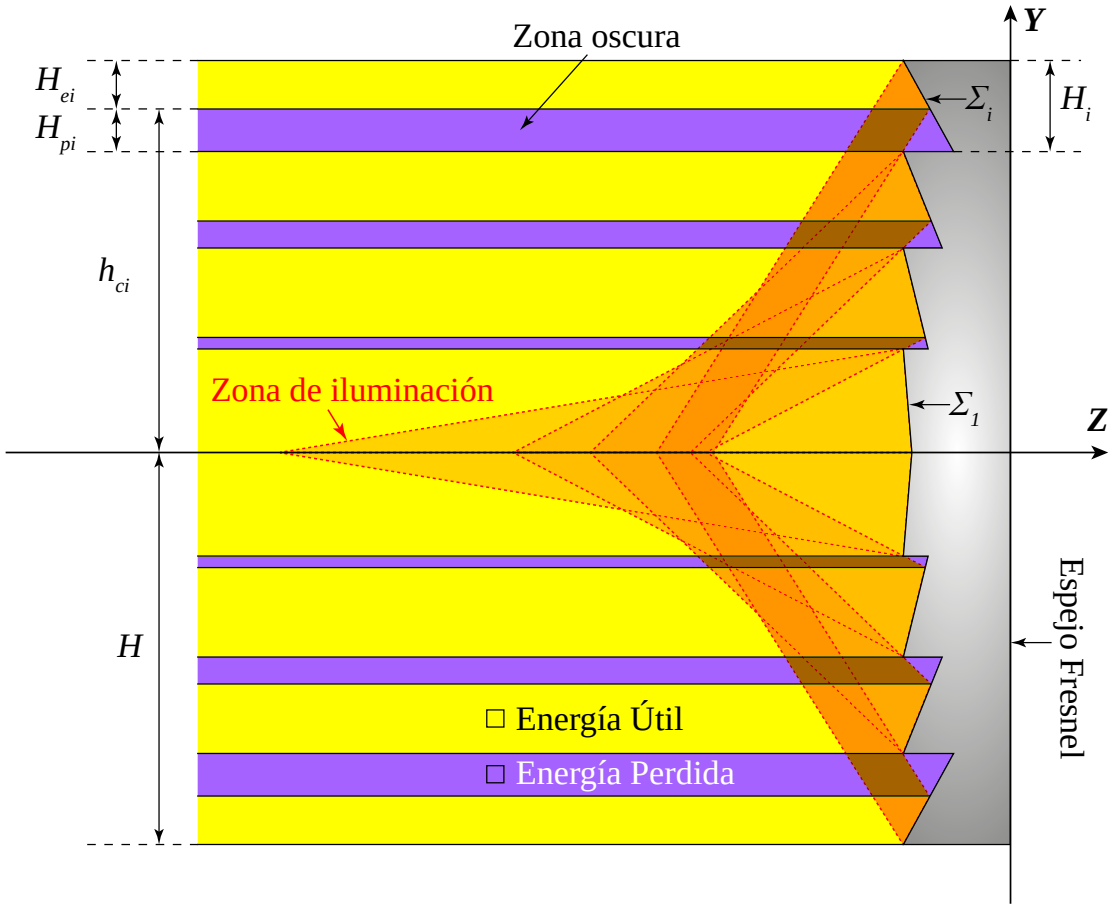


Fig. 2.15 Para cada surco Σ_i corresponde una altura crítica h_{ci} que delimita la zona H_{pi} que será completamente obstruida, las aperturas H_{ei} representan la iluminación óptima que generan las franjas anaranjadas. Para Σ_1 no existe obstrucción.

Considérese ahora la suma de todas estas aperturas definidas anteriormente, se tiene de la Ec.(2.30) que

$$H_T \equiv \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} H_{ei} + \sum_{i=1}^{n} H_{pi} \equiv H_e + H_p$$

entonces se divide la ecuación anterior entre H_T y se despeja H_e para obtener

$$\eta_f \equiv \left(\frac{H_e}{H_T}\right) = 1 - \left(\frac{H_p}{H_T}\right), \tag{2.31}$$

donde H_e es la longitud vertical de apertura total que es eficientemente aprovechada en el sentido que toda la luz que incide en estos intervalos es reflejada hacia el colector fuera del espejo, H_T es la longitud de apertura total vertical de la superficie tipo Fresnel, por lo tanto η_f puede ser interpretado como la eficiencia máxima ideal del espejo tipo Fresnel calculada únicamente a partir del diseño a incidencia normal considerando un plano meridional sin pérdidas adicionales a H_p que es la apertura total de reflexión sobre las barreras internas.

2.2.3 Construcción de distintos tipos de espejos Fresnel

En la sección anterior se ha presentado un método sencillo para el diseño de un espejo tipo Fresnel considerando una superficie cóncava y cómo representarlo gráficamente para su análisis, sin embargo el diseño a partir de un espejo cóncavo determina la complejidad de las ecuaciones resultantes debido a las parametrizaciones que la representan. A continuación, se hará la comparación entre espejos tipo Fresnel generados a partir de superficies cónicas y cicloidales de dos parámetros, para tener un punto de comparación se considerarán espejos con número $F/\# = 0.5$ en todos los casos.

Espejos tipo Fresnel considerando curvas cónicas

Considérese el plano meridional $\mathbf{Y} - \mathbf{Z}$ de una superficie reflectora cónica cóncava, con representación paramétrica dada por la Ec.(2.1), para la cual se calcula su longitud de arco mediante la Ec.(2.15) considerando el intervalo $h \in [h_0, h_k]$, obteniendo la expresión

$$\mathscr{L}_{h_0}^{h_k} = \int_{h_0}^{h_k} \sqrt{1 + \left(\frac{C^2 h^2}{1 - (1+k) C^2 h^2}\right)}\, dh, \tag{2.32}$$

Pero esta integral sólo tiene solución en términos de funciones elementales para los casos especiales en que $k = -1$, $k = 0$, pero en general no tiene solución analítica en términos

simples, entonces para calcular la longitud de arco se aproxima la función del integrando por su serie de Taylor y se calcula después la integral de la serie resultante.
Por el Teorema de Taylor [38], se tiene que para una función $f(x)$ de una sola variable definida en la vecindad $[a,x]$ y con derivadas $f_{(1)},\ldots,f_{(n+1)}$ definidas, se aproxima por su serie de Taylor de orden n mediante la expresión

$$f(x) = f(a) + f_{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f_{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathscr{O}^n. \tag{2.33}$$

Si en la serie de Taylor se considera $a = 0$, se obtiene un caso particular de ésta, que se llama serie de Maclaurin [37]. Denótese entonces la función del integrando en la Ec.(2.32) como $f(h)$, la cual es función continua de una variable y con derivadas de todos los órdenes definidas, se reescribe entonces como

$$f(h) = \sqrt{1 + \left(\frac{C^2h^2}{1-(1+k)C^2h^2}\right)} = \sqrt{\frac{1-kC^2h^2}{1-(1+k)C^2h^2}}, \tag{2.34}$$

aplicando la Ec.(2.33) a esta función se calcula la serie de Maclaurin a séptimo orden en la vecindad $[0,h]$, por lo tanto se obtiene

$$f(h) = 1 + C^2\frac{h^2}{2!} + 3C^4(4k+3)\frac{h^4}{4!} + 45C^6\left(8k^2+12k+5\right)\frac{h^6}{6!} + \mathscr{O}^7(h), \tag{2.35}$$

donde $C = 1/R$ como se definió en [5], entonces se sustituye esta serie en Ec.(2.32) para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{h_0}^{h_k} &\approx \left[h + C^2\frac{h^3}{3!} + 3C^4(4k+3)\frac{h^5}{5!} + 45C^6\left(8k^2+12k+5\right)\frac{h^7}{7!}\right]_{h_0}^{h_k} \\ &= F(h_k) - F(h_0),\end{aligned} \tag{2.36}$$

sustituyendo $h_0 = 0$ se tiene que $F(h_0) = 0$, entonces por la Ec.(2.18) se deducen las ecuaciones para obtener las alturas de corte h_k

$$F(h_k) = \left(\frac{k}{n}\right)F(H) \qquad (k = 0,\ldots,n), \tag{2.37}$$

donde se verifica el caso $k = 0$ para el cual $F(h_0) = 0$ de lo anterior $h_0 = 0$ y el caso $k = n$

donde $F(h_n) = F(H)$ por lo tanto $h_n = H$ que son las alturas de apertura de la parte positiva del espejo. Como se discutió en la sección anterior, las soluciones para la Ec.(2.37) generan los puntos de corte y a partir de éstos se construye la superficie del espejo tipo Fresnel cónico. Considérense ahora los dos casos especiales en que la Ec.(2.32) tiene soluciones en términos simples, para una superficie esférica se tiene que $k = 0$ por lo tanto

$$\mathscr{L}_{h_0}^{h_k} = \int_{h_0}^{h_k} \frac{1}{\sqrt{1-C^2h^2}}\,dh = \left[\frac{1}{C}\operatorname{arcsen}(Ch)\right]_{h_0}^{h_k} = F(h_k) - F(h_0), \tag{2.38}$$

para una superficie parábolica se tiene que $k = -1$, por lo que de la Ec.(2.32) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{h_0}^{h_k} = \int_{h_0}^{h_k} \sqrt{1+C^2h^2}\,dh &= \frac{1}{2}\left[h\sqrt{1+C^2h^2} + \frac{1}{C}\ln\left[Ch + \sqrt{C^2h^2+1}\right]\right]_{h_0}^{h_k} \\ &= F(h_k) - F(h_0),\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde la función primitiva F de las Ec.(2.38), Ec.(2.39) se puede sustituir en la Ec.(2.37) para construir los espejos Fresnel parabólicos y esféricos.

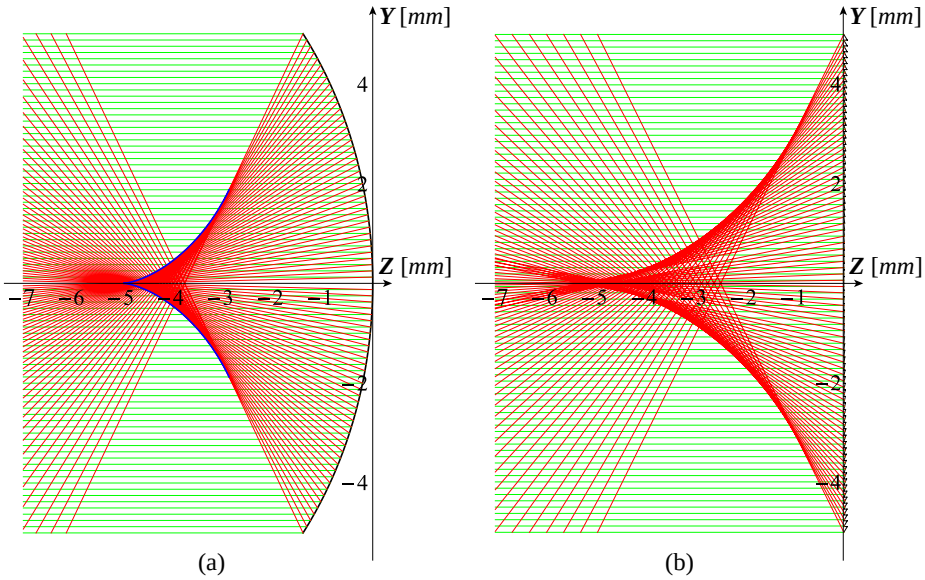


Fig. 2.16 (a) Trazo de rayos para un espejo elíptico oblato con $k = 0.5$, $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Construcción de la versión Fresnel del mismo espejo elíptico considerando una densidad de 8 surcos por mm, con una efectividad del $\eta_f = 81.96\%$.

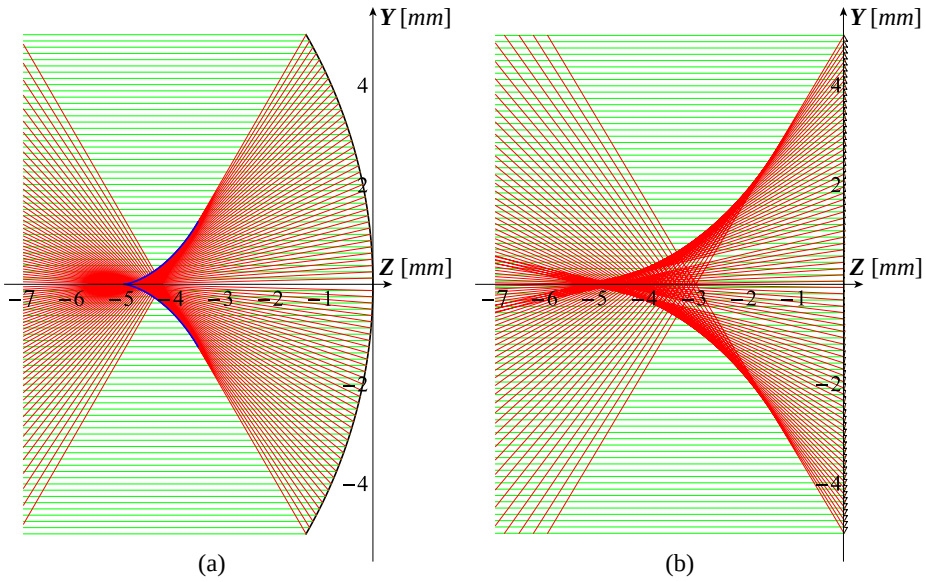


Fig. 2.17 (a) Trazo de rayos para un espejo esférico con $k = 0$, $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Diseño de la versión en Fresnel del mismo espejo esférico, con densidad de 8 surcos por mm, con una eficiencia ideal máxima de $\eta_f = 83.33\%$

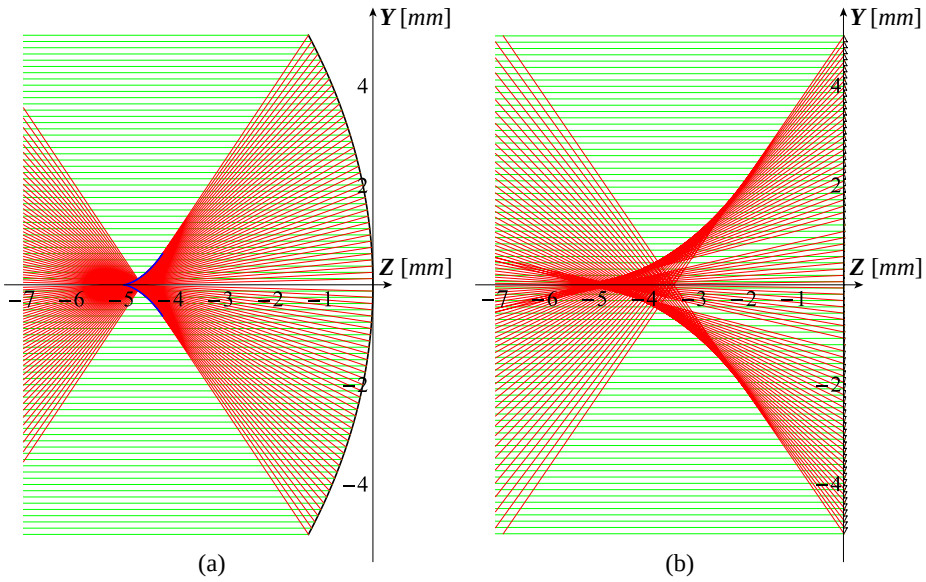


Fig. 2.18 (a) Trazo de rayos para un espejo elíptico prolato con constante de conicidad $k = -0.5$, radio de curvatura paraxial $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Versión en Fresnel del mismo espejo elíptico prolato con densidad de 8 surcos por mm y una eficiencia ideal máxima de $\eta_f = 84.48\%$.

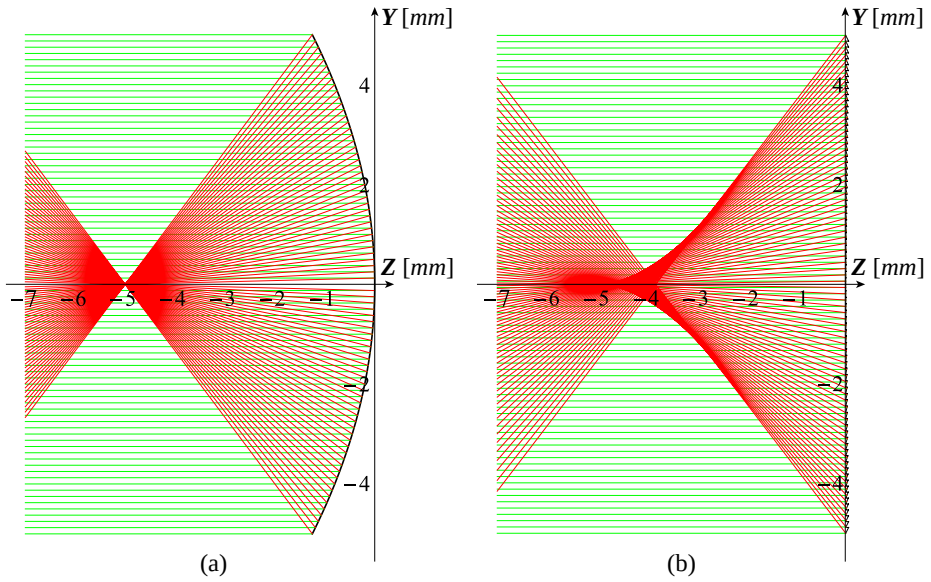


Fig. 2.19 (a) Trazo de rayos para un espejo parabólico con constante $k = -1$, radio de curvatura paraxial $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Diseño en Fresnel del mismo espejo parabólico, considerando una densidad de 8 surcos por mm y una eficiencia máxima ideal del $\eta_f = 85.46\%$.

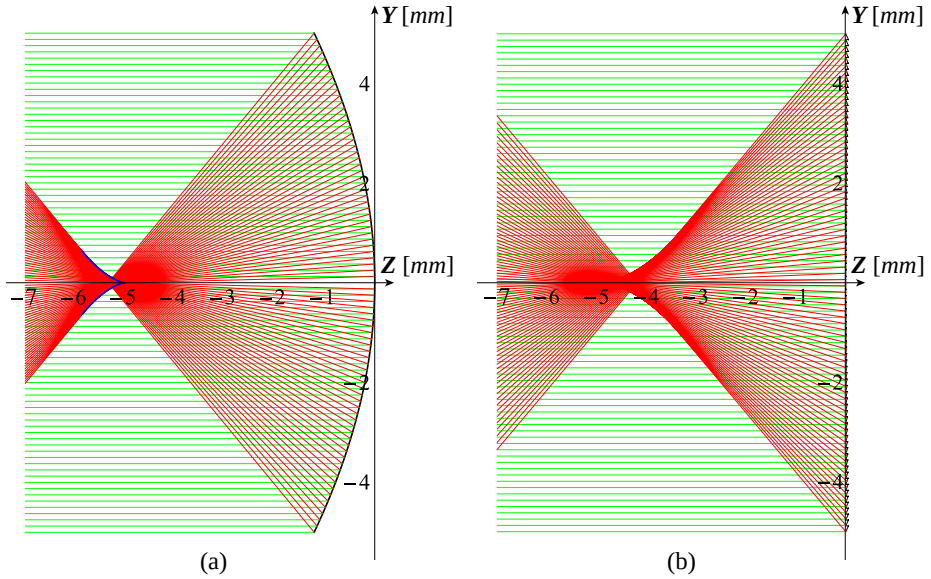


Fig. 2.20 (a) Trazo de rayos para un espejo hiperbólico con constante de conicidad $k = -1.5$, con radio de curvatura $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Diseño en Fresnel del mismo espejo hiperbólico considerando una densidad de 8 mm por surco con eficiencia máxima calculada de $\eta_f = 86.30\%$.

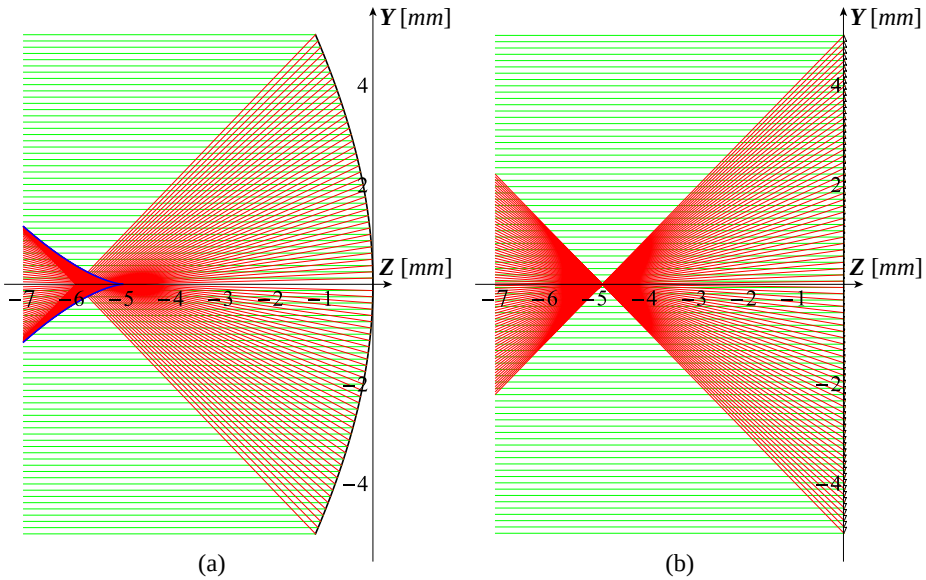


Fig. 2.21 (a) Trazo de rayos para un espejo hiperbólico con constante de conicidad $k = -2.5$ y radio de curvatura paraxial de $R = -10\,mm$ y apertura total de $10\,mm$. (b) Diseño para espejo tipo Fresnel del mismo espejo hiperbólico, con densidad de 8 surcos por mm y eficiencia de $\eta_f = 87.69\%$.

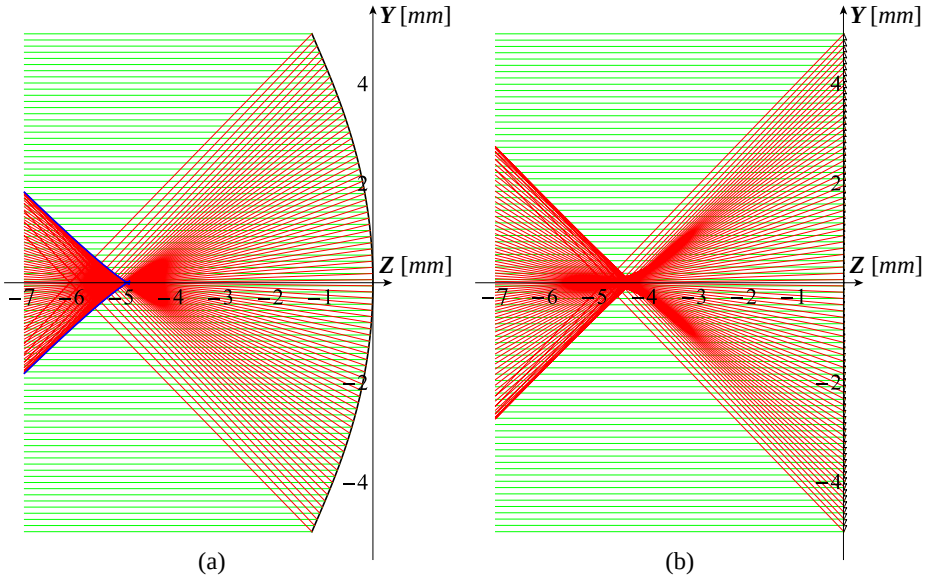


Fig. 2.22 (a) Trazo de rayos para un espejo cicloidal con parámetros $a = 0.8\,mm$, $b = 2.03\,mm$ tales que su distancia focal sea $f_c = -5\,mm$, con parámetro de acotamiento $\varepsilon = 1.01\,rad$ para un semidiámetro de apertura de $H = 5\,mm$. (b) Versión en Fresnel del mismo espejo cicloidal con eficiencia $\eta_f = 86.11\%$.

Espejos tipo Fresnel considerando cicloides de dos parámetros

En la primera sección de este capítulo se definió la representación paramétrica de la curva contenida en el plano meridional $\mathbf{Y}-\mathbf{Z}$ de la cicloide de dos parámetros en la Ec.(2.3), de forma análoga al caso de los espejos cónicos se calcula su longitud de arco mediante la Ec.(2.15) sobre el intervalo $\tau \in [t_0, t_k]$ obteniendo

$$\mathscr{L}_{t_0}^{t_k} = \int_{t_0}^{t_k} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + b^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right) \cos \tau\right)^2} \, d\tau. \tag{2.40}$$

Nuevamente esta integral no tiene solución en términos de funciones elementales, por lo cual se aproxima la función del integrando mediante su serie de Taylor, denótese el integrando como $g(\tau)$, entonces se reescribe la función como

$$g(\tau) = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + b^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right) \cos \tau\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \tau}, \tag{2.41}$$

que es una función continua en una variable con derivadas de todos los órdenes bien definidas, se aplica el Teorema de Taylor en la Ec.(2.33) para su expansión a quinto orden en la vecindad $[\pi, \tau]$, por lo tanto se obtiene

$$g(\tau) = (a+b) - \left[\frac{ab}{a+b}\right] \frac{(\tau-\pi)^2}{2!} + \left[\frac{a^3 b - a^2 b^2 + ab^3}{(a+b)^3}\right] \frac{(\tau-\pi)^4}{4!} + \mathscr{O}^5(\tau), \tag{2.42}$$

donde, si se sustituye $T = (\tau - \pi)$ se obtiene su expresión como serie de Maclaurin

$$g(\tau) = (a+b) - \left[\frac{ab}{a+b}\right] \frac{T^2}{2!} + \left[\frac{a^3 b - a^2 b^2 + ab^3}{(a+b)^3}\right] \frac{T^4}{4!} + \mathscr{O}^5(\tau), \tag{2.43}$$

se sustituye esta serie en la Ec. (2.40) para obtener la siguiente ecuación

$$\mathscr{L}_{t_0}^{t_k} \approx \left[[a+b]\,T - \left[\frac{ab}{a+b}\right] \frac{T^3}{3!} + \left[\frac{a^3 b - a^2 b^2 + ab^3}{(a+b)^3}\right] \frac{T^5}{5!}\right]_{t_0}^{t_k} = G(t_k) - G(t_0). \tag{2.44}$$

Esta función se evalúa sobre los extremos del intervalo $[\pi, 2\pi - \varepsilon]$ donde ε es el parámetro de acotamiento como se definió anteriormente, considerando $t_0 = \pi$ se obtiene que $G(t_0) = 0$, por

otro lado, si $t_n = 2\pi - \varepsilon$ por la Ec.(2.44)

$$G(2\pi - \varepsilon) = -[a+b](\varepsilon - \pi) + \left[\frac{ab}{a+b}\right]\frac{(\varepsilon-\pi)^3}{3!} - \left[\frac{a^3b - a^2b^2 + ab^3}{(a+b)^3}\right]\frac{(\varepsilon-\pi)^5}{5!}, \tag{2.45}$$

por la Ec.(2.45) se obtiene la identidad $G(2\pi - \varepsilon) = -G(\varepsilon)$ considerando lo anterior y sustituyendo en la Ec.(2.18) se deducen las ecuaciones para calcular los parámetros de corte t_k

$$G(t_k) = -\left(\frac{k}{n}\right)G(\varepsilon) \qquad (k = 0, \ldots, n), \tag{2.46}$$

donde se verifica el caso $k = 0$ para el cual $G(t_0) = 0$ de donde $t_0 = \pi$ y el caso $k = n$ para el que se obtiene $G(t_n) = -G(\varepsilon)$ de donde $t_n = 2\pi - \varepsilon$ que son los extremos del intervalo de la cicloide. Por lo tanto, las soluciones que se obtienen de la Ec.(2.46) son los parámetros de corte que se deben evaluar sobre la superficie para calcular los puntos de corte y diseñar el espejo cicloidal tipo Fresnel.

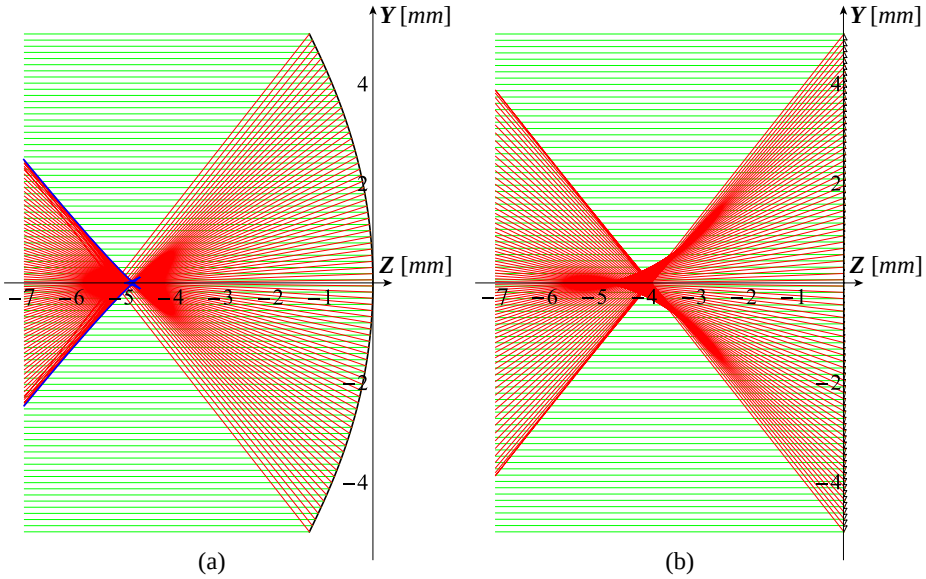


Fig. 2.23 (a) Trazo de rayos para un espejo cicloidal con parámetros $a = 0.93\,mm$, $b = 2.12\,mm$ tales que mantienen una distancia focal de $f_c = -5\,mm$, con parámetro de acotamiento $\varepsilon = 1.19\,rad$ para mantener un semidiámetro de apertura de $H = 5\,mm$. (b) Versión en Fresnel del mismo espejo cicloidal con eficiencia $\eta_f = 84.92\%$.

Capítulo 3

Diseño de pruebas por pantallas nulas para un espejo tipo Fresnel

En el capítulo anterior se obtuvo la forma paramétrica de un espejo tipo Fresnel que como se vio es una sucesión de rectas continuas definidas a trozos. En este capítulo se desarrollará una propuesta nueva para evaluar cualitativamente este tipo de superficies mediante pruebas por pantallas nulas por reflexión. En primera instancia se hará el trazo de rayos exacto considerando una fuente puntual que ilumina el espejo tipo Fresnel y a partir de este cálculo se diseñarán las pantallas nulas para evaluar espejos tipo Fresnel.
En trabajos anteriores [5] se ha obtenido el trazo exacto de rayos para espejos cónicos considerando una fuente puntual y calculado su superficie cáustica, en este trabajo se utilizará este conocimiento previo para desarrollar una prueba preliminar por pantallas nulas considerando que el espejo de Fresnel bajo prueba funciona igual que su forma cóncava. Después se hará el trazo exacto de rayos para una superficie de Fresnel y se propone un método más efectivo por pantallas nulas.

3.1 Trazo exacto de rayos para un espejo tipo Fresnel considerando una fuente puntual

Considérese el plano de incidencia $\mathbf{Y}-\mathbf{Z}$ donde el eje coordenado $\mathbf{Z}$ es paralelo al eje óptico. Sin pérdida de generalidad se asumirá que los rayos se propagan de izquierda a derecha provenientes de una fuente puntual colocada sobre el eje óptico a una distancia S_o considerando un

haz ideal que incide sobre el espejo tipo Fresnel, en otras palabras se considera un frente de onda esférico incidente.

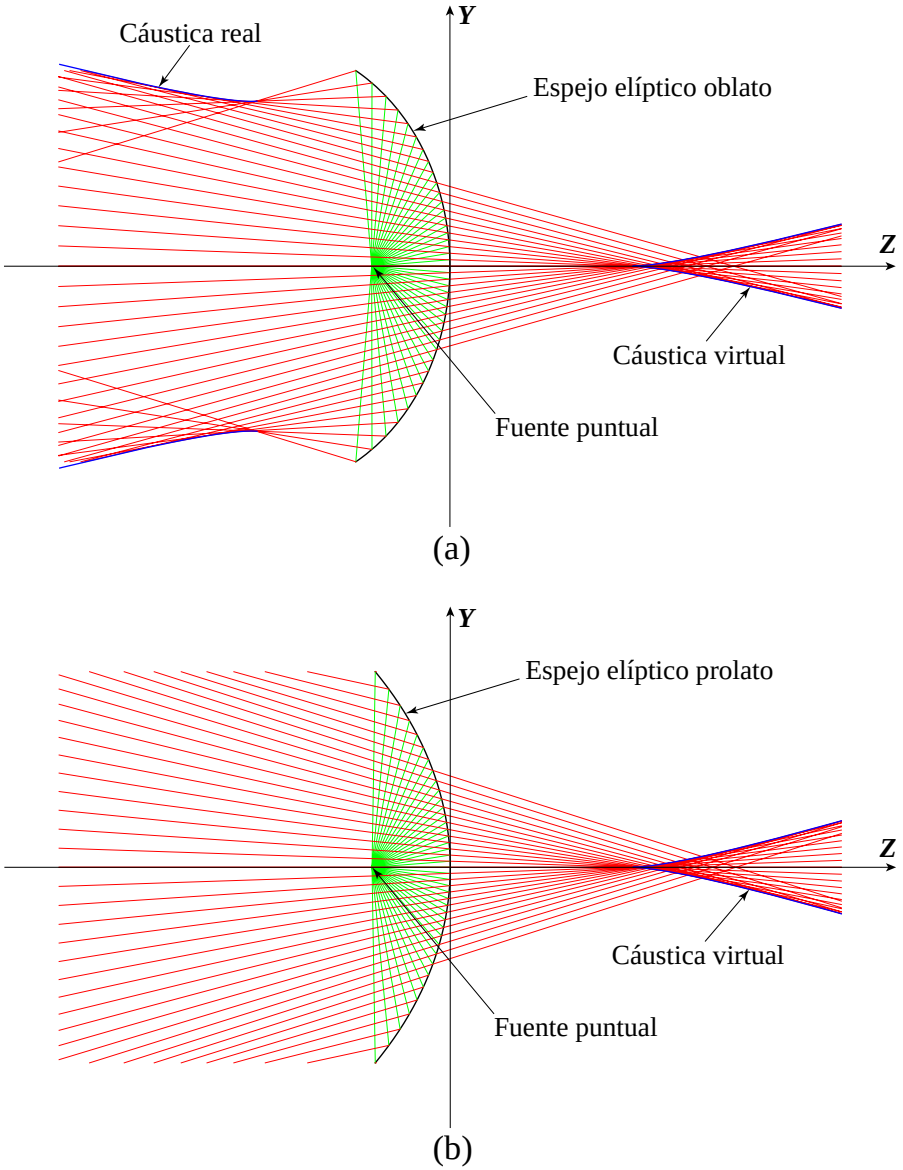


Fig. 3.1 (a) Trazo exacto de rayos considerando un espejo elíptico prolato con $k = 0.5$. (b) Trazo exacto de rayos considerando una fuente puntual para un espejo elíptico oblato con $k = -0.5$.

Sea $F_i = (z_+, y_+)$ el punto sobre el espejo en el cual incide el rayo S_oF_i. Para obtener sus coordenadas se considerará la ecuación del rayo incidente, que para el caso del espejo Fresnel

se puede representar como

$$y = \tan\alpha\,(z - S_o), \tag{3.1}$$

donde α es el ángulo de emisión de cada rayo proveniente de la fuente puntual.

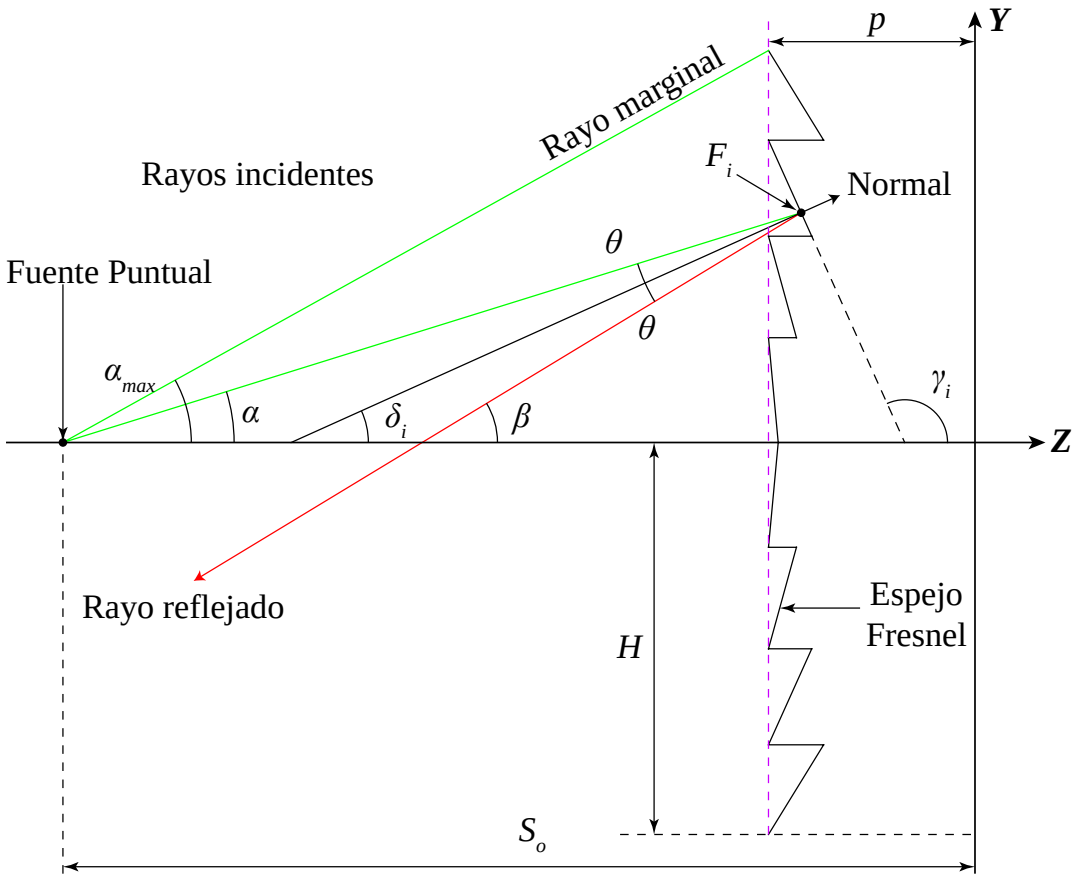


Fig. 3.2 Parámetros necesarios para el trazo exacto de rayos considerando una fuente puntual colocada a una distancia S_o cuyos rayos inciden sobre un espejo tipo Fresnel.

Considérese nuevamente H el semidiámetro de la apertura total de entrada del espejo centrado respecto del eje **Z**, entonces se calcula la apertura angular máxima a partir de la Ec.(3.1) como

$$\alpha_{max} = \arctan\left[\frac{H}{p - S_o}\right], \tag{3.2}$$

por lo tanto, los rayos marginales se obtienen evaluando α_{max} en la ecuación del rayo in-

cidente, por lo tanto la apertura de entrada angular total queda definida en el dominio $\alpha \in [-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$.

En el capítulo anterior se vio para el trazo de rayos con un frente de onda plano que la altura de rayo determinaba el surco Σ_i sobre el cual incidía un conjunto de rayos, en este caso es más complicado pues no sólo depende de la altura sino también de la inclinación del rayo, para resolver este problema considérese una nueva definición de altura de rayo como la intersección del rayo con la línea de referencia del Fresnel, a partir de la Ec.(3.1) se tiene

$$h = \tan\alpha\,(p - S_o), \tag{3.3}$$

donde p es como se definió en el capítulo anterior, el plano de elevación de la superficie Fresnel, además, partiendo del hecho que se tratará con espejos tipo Fresnel cuasiplanos, se tiene por razones físicas que $p \leq S_o$ ya que la fuente puntual no puede estar dentro del material del espejo, por lo que $0 \leq (p - S_o)$ para todos los casos.

Así, la Ec.(3.3) permite evaluar cada rayo incidente en su respectivo surco, es decir, nuevamente se tiene que si $h \in \left(R^y_{i-1}, Q^y_i\right]$ entonces el rayo se evalúa para Σ_i. Por lo tanto, se calculan los intervalos de partición de la entrada angular por surco mediante

$$\xi_{i-1} \equiv \arctan\left[\frac{R^y_{i-1}}{p - S_o}\right]; \quad \zeta_i \equiv \arctan\left[\frac{Q^y_i}{p - S_o}\right], \tag{3.4}$$

donde $\xi_{i-1}, \zeta_i \in \mathbb{R}$ son los extremos del intervalo semiabierto $(\xi_{i-1}, \zeta_i] \subseteq \mathbb{R}$, tal que si $\alpha \in (\xi_{i-1}, \zeta_i]$, entonces el rayo incidente con ángulo α corresponderá surco Σ_i del espejo Fresnel. Ahora el cálculo de las coordenadas de F_i se reduce a resolver para la intersección de dos rectas en un punto, el rayo incidente y su correspondiente surco, se tiene de la Ec.(3.1) y la ecuación del Fresnel que

$$\begin{aligned} z_+ &= \frac{S_o \tan\alpha - m_i Q^z_i + Q^z_i}{\tan\alpha - m_i}, \\ y_+ &= \frac{\tan\alpha\left[Q^y_i + m_i\left(S_o - Q^z_i\right)\right]}{\tan\alpha - m_i}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde tanto z_+ como y_+ son funciones de α característico de cada rayo, por lo cual en este caso no se tendrán haces con la misma pendiente de reflexión como en el caso del frente de onda plano, sino que se deberá calcular el ángulo de reflexión correspondiente a cada rayo.

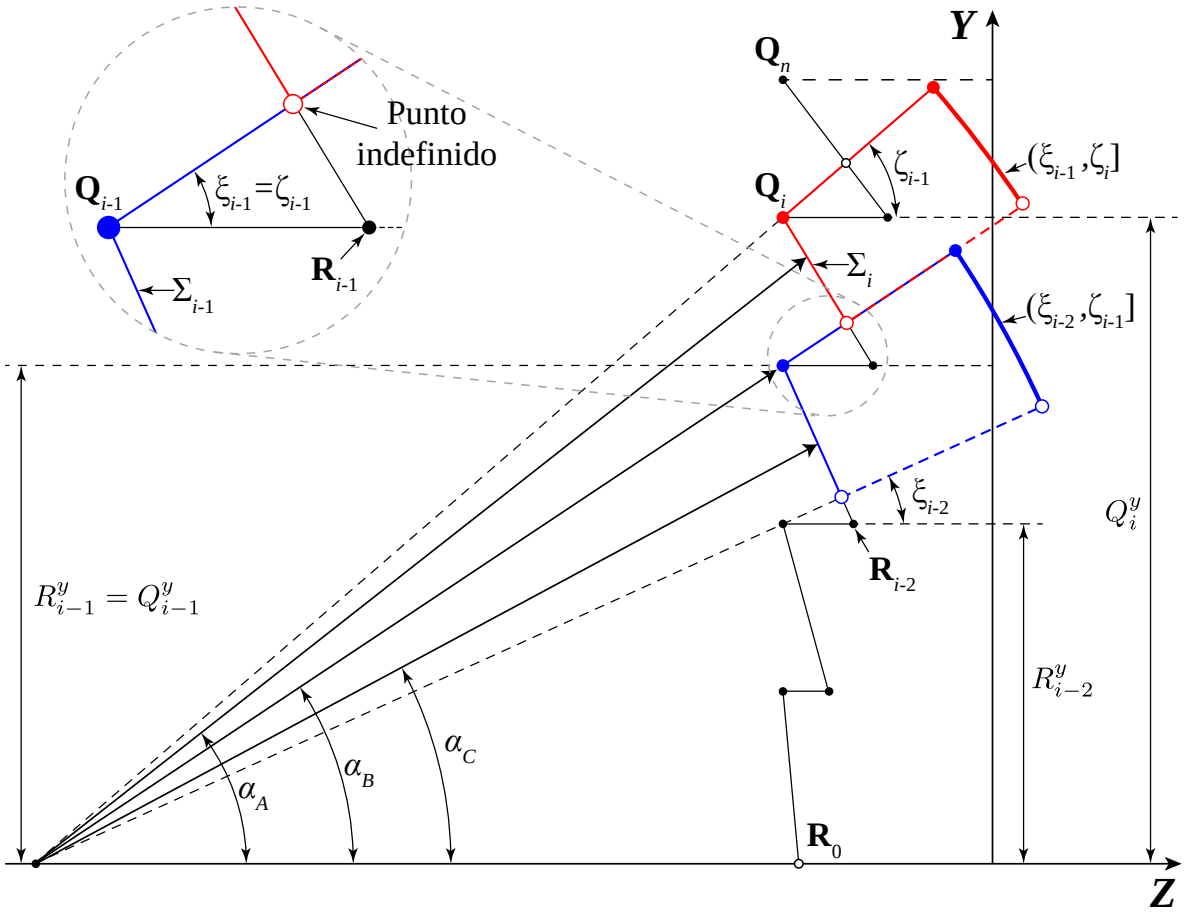


Fig. 3.3 Se observa que el rayo incidente con ángulo α_A tal que $\xi_{i-1} < \alpha_A \leq \zeta_i$ corresponde a la apertura del surco Σ_i, por otro lado $\alpha_B = \xi_{i-2} = \zeta_{i-1}$ por lo que corresponde al surco Σ_{i-1} al igual que $\xi_{i-2} < \alpha_C \leq \zeta_{i-1}$.

Como anteriormente se consideró, se tienen los ángulos característicos para cada surco $\tan\gamma_i = m_i$ de donde $\tan\delta_i = -1/m_i$. De la Fig.3.2, se observa que $\alpha + \theta + (\pi - \delta_i) = \pi$, por lo que $\delta_i = \alpha + \theta$, además se tiene que $\delta_i + \theta + (\pi - \beta) = \pi$, por lo tanto, $\beta = \delta_i + \theta$, sustituyendo el valor anterior de θ en esta expresión se obtiene finalmente que $\beta = 2\delta_i - \alpha$, como se puede observar, en este caso el ángulo β ya no depende únicamente del surco sobre el que incide el rayo sino que estará definido unívocamente para cada rayo que incide a un ángulo α, a partir de esta expresión se calcula la pendiente del rayo reflejado obteniendo

$$m_r = \tan\beta = \left(\frac{\left(1 - m_i^2\right)\tan\alpha - 2m_i}{\left(m_i^2 - 1\right) - 2m_i\tan\alpha}\right), \tag{3.6}$$

donde m_r se define como la pendiente del rayo reflejado correspondiente al rayo incidente a un ángulo α. Por otro lado, nótese que en el caso para el cual se coloca la fuente de luz en infinito, es decir si $S_o \to \infty$, se tendrá un haz de rayos incidentes con un ángulo de inclinación $\alpha \to 0$ por lo que si se evalúa en la Ec.(3.6) para este límite se tiene que

$$\lim_{\alpha\to 0} m_r = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\left(1-m_i^2\right)\tan\alpha - 2m_i}{\left(m_i^2-1\right)-2m_i\tan\alpha}\right] = \left(\frac{2m_i}{1-m_i^2}\right),$$

obteniendo de nuevo la expresión correspondiente al haz de rayos reflejados en la Ec.(2.25). Por lo tanto, se deduce la ecuación del rayo reflejado considerando el parámetro α correspondiente a cada rayo incidente.

3.1.1 Pérdidas por obstrucción en iluminación en un espejo tipo Fresnel

Como se discutió anteriormente, las discontinuidades del espejo tipo Fresnel provocan obstrucción de los rayos reflejados. Sin embargo, en el caso de la fuente puntual el cálculo se complica aún más pues lo que se desea es obtener la apertura angular específica del haz de rayos reflejados que libran las barreras internas del espejo.

Para cuantificar las pérdidas en los términos deseados se definirán como α_{ci} los ángulos de incidencia críticos para los cuales su correspondiente rayo reflejado incide exactamente en la cúspide de la barrera. Pero en este caso se tendrá que para cada surco Σ_i corresponderá un ángulo crítico α_{ci} en vez de una altura crítica h_{ci}.

Como se observa en la Fig.3.4, de forma análoga al capítulo anterior se obtiene la expresión para la base de $\triangle F_c D\mathbf{Q}_{i-1}$ como sigue

$$b_{si} = \left[\frac{\ell_i m_i}{m_i - m_r}\right],$$

con la diferencia de que en este caso depende del valor m_r dado por la Ec.(3.6) en vez de m_{ri} de la Ec.(2.25) ya que la pendiente del rayo reflejado es distinto para cada α, sustituyendo los valores indicados y desarrollando apropiadamente el álgebra se llega a la siguiente expresión

$$b_{si} = \left(\frac{\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right)\left[\frac{\left(1-m_i^2\right)+2m_i\tan\alpha_{ci}}{\tan\alpha_{ci}-m_i}\right], \tag{3.7}$$

donde se hizo el cambio de parámetro $\alpha \to \alpha_{ci}$ indicando que depende del ángulo crítico α_{ci}

correspondiente a cada Σ_i.

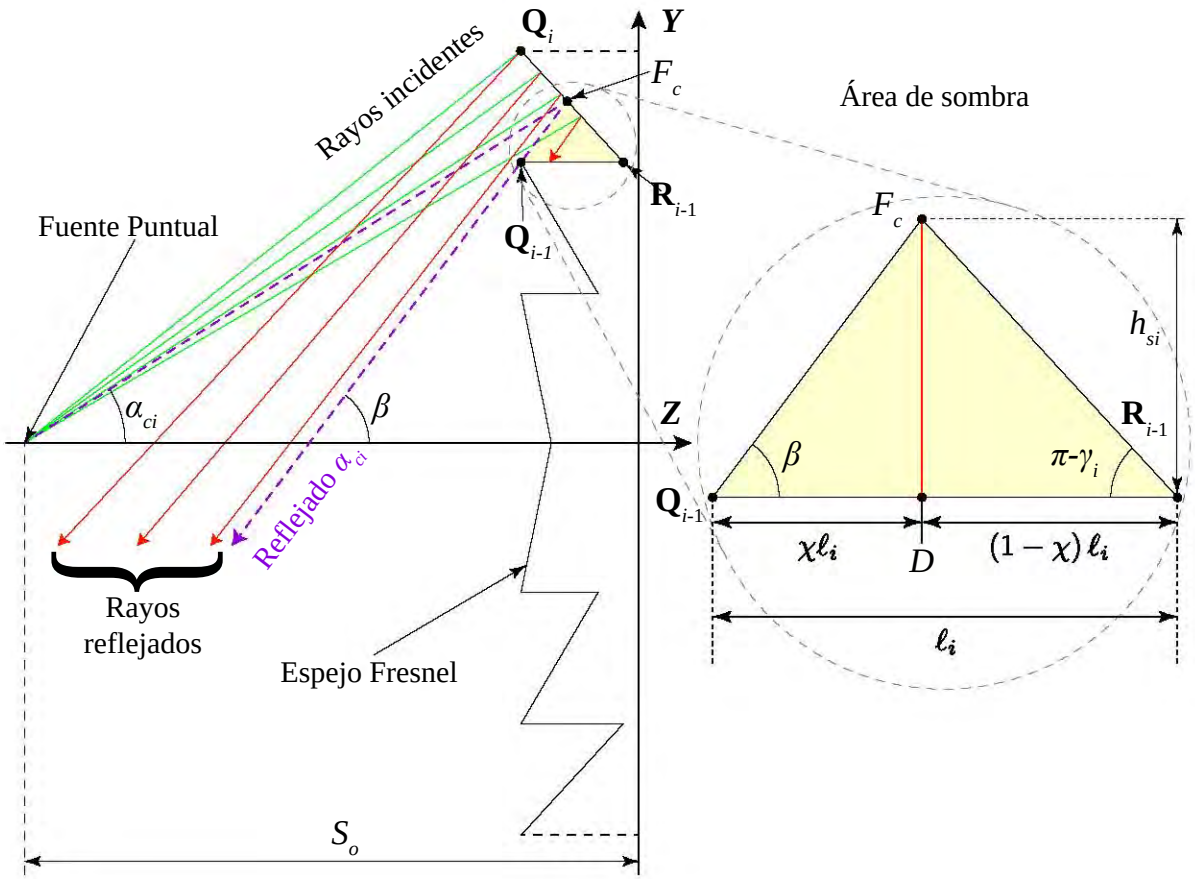


Fig. 3.4 Parámetros necesarios para calcular las zonas de pérdidas por obstrucción lateral de los surcos considerando una fuente puntual.

Considerando el punto con coordenadas $F_c = (z_+, y_+)$ como se ilustra en la Fig.3.4, se deduce que es el punto evaluado en α_{ci} para el cual su correspondiente rayo reflejado incide exactamente sobre la cúspide de la barrera interna, entonces resulta la expresión

$$b_{si} = \left|Q_{i-1}^z - z_+\right| = p - z_+$$

donde z_+ es función de α_{ci} como se indica en la Ec.(3.5), por lo tanto, para calcular el ángulo α_{ci} se sustituyen las ecuaciones correspondientes en la expresión anterior resultando

$$\left(\frac{S_o \tan\alpha_{ci} - m_i Q_i^z + Q_i^z}{\tan\alpha_{ci} - m_i} - p\right) = \left(\frac{\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right)\left[\frac{\left(1-m_i^2\right) + 2m_i \tan\alpha_{ci}}{\tan\alpha_{ci} - m_i}\right],$$

despejando α_{ci} de esta ecuación y simplificando adecuadamente se obtiene

$$\alpha_{ci} = \arctan\left[\frac{\ell_i m_i\left(1-m_i^2\right) - Q_i^y\left(1+m_i^2\right)}{(S_o - p)\left(m_i^2+1\right) - 2\ell_i m_i^2}\right], \tag{3.8}$$

finalmente, esta ecuación se resuelve para $i = 1, \ldots, n$ generando con esto los extremos interiores para las aperturas angulares útiles del espejo $\alpha \in (\alpha_{ci}, \zeta_i]$ en el sentido de que todos los rayos incidentes en este intervalo de ángulos son reflejados libremente fuera de las barreras interiores del espejo.

Por lo que, de forma análoga al caso para los rayos paralelos incidentes se retoma la Ec.(3.8) para definir la siguiente correspondencia

$$\alpha_{ci} = \begin{cases} \alpha_{ci} & \text{si} \quad i \neq 1, \\ \\ 0 & \text{si} \quad i = 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

donde de nuevo se considera el caso $i = 1$ que corresponde a los surcos centrales para los cuales $\alpha_{ci} \equiv 0$, es decir, no existe barrera interior por lo que no hay obstrucción de rayos reflejados.

Sea h_{si} la altura de $\triangle F_c D Q_{i-1}$ como se observa en la Fig.3.4, de lo anteriormente discutido se deduce que

$$h_{si} = b_{si} \tan\beta_{ci},$$

sustituyendo en esta expresión los valores indicados por la Ec.(3.6) en Ec.(3.7) se obtiene

$$h_{si} = \left(\frac{\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right)\left[\frac{\left(1-m_i^2\right)\tan\alpha_{ci} + 2m_i}{\tan\alpha_{ci} - m_i}\right], \tag{3.10}$$

pero esta ecuación resulta ser análoga a la Ec.(2.28), en el sentido que si se considera a la fuente puntual colocada en infinito, se tendrá un haz de rayos paralelos que inciden a un ángulo $\alpha_{ci} \to 0$, por lo que evaluando para este límite la Ec.(3.10) se tiene que

$$\lim_{\alpha\to 0} h_s = \lim_{\alpha\to 0}\left[\left(\frac{\ell_i m_i}{m_i^2+1}\right)\left[\frac{\left(1-m_i^2\right)\tan\alpha + 2m_i}{\tan\alpha - m_i}\right]\right] = -\left(\frac{2m_i\ell_i}{m_i^2+1}\right),$$

obteniendo nuevamente la Ec.(2.28).

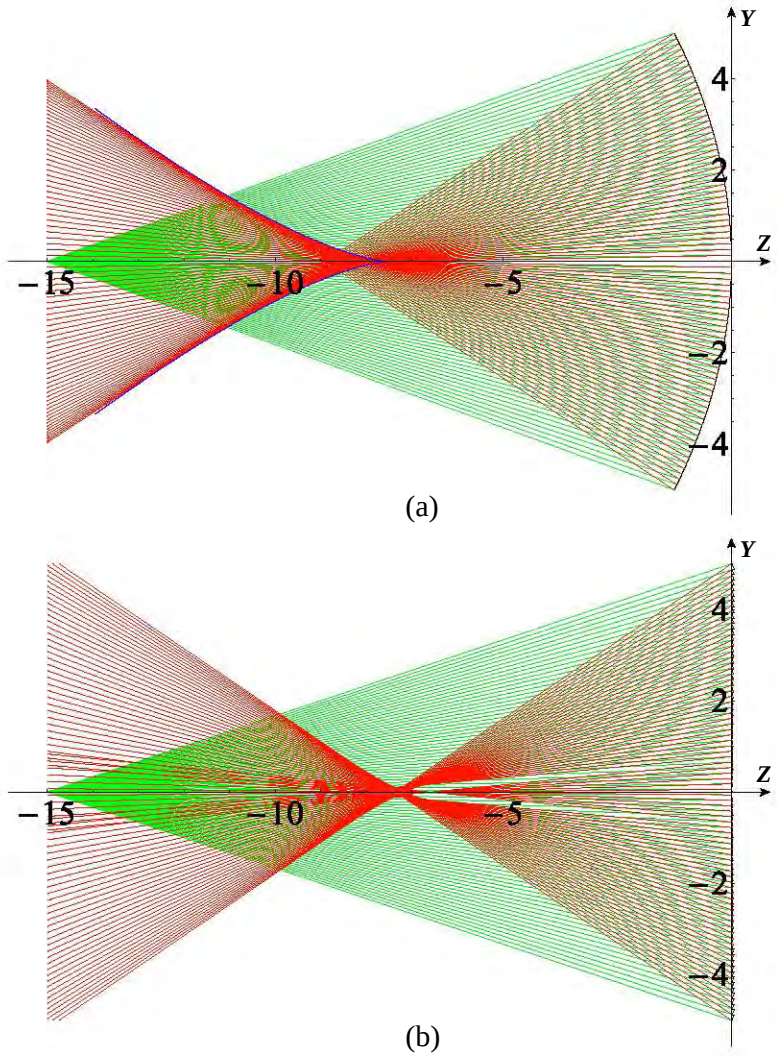


Fig. 3.5 a) Trazo exacto de rayos considerando una fuente puntual colocada a $S_o = -15$, incidiendo en un espejo parabólico con $R = -10$, $k = -1$. b) Trazo exacto para el mismo espejo parabólico en versión Fresnel.

En el caso de la fuente puntual se observa en la Fig.3.3, que la apertura angular de entrada de luz proveniente de la fuente para cada surco Σ_i es $\Delta_{\alpha i}$ tal que

$$\Delta_{\alpha i} \equiv |\zeta_i - \xi_{i-1}| = |\zeta_i - \alpha_{ci}| + |\alpha_{ci} - \xi_{i-1}| \equiv \Delta_{\alpha ei} + \Delta_{\alpha pi}, \tag{3.11}$$

donde se definieron los valores $\Delta_{\alpha ei}$ como la apertura angular de luz eficientemente reflejada

proveniente de una fuente puntual de luz y $\Delta_{\alpha pi}$ como la apertura angular que se refleja hacia la barrera del mismo espejo, la suma de ambas cantidades es la apertura angular Δ_i del surco Σ_i.
Considérese ahora la suma de todas las aperturas definidas anteriormente, se deduce un análogo a la apertura total del capítulo anterior como

$$\Delta_T \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{\alpha ei} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_{\alpha pi} \equiv \Delta_{\alpha e} + \Delta_{\alpha p}$$

entonces se obtiene una ecuación análoga para el caso de un espejo tipo Fresnel iluminado por una fuente puntual colocada sobre el eje óptico a una distancia S_o arbitraria

$$\eta_{\alpha f} \equiv \left(\frac{\Delta_{\alpha e}}{\Delta_T}\right) = 1 - \left(\frac{\Delta_{\alpha p}}{\Delta_T}\right), \tag{3.12}$$

donde $\eta_{\alpha f}$ puede ser interpretado como la eficiencia máxima ideal del espejo tipo Fresnel calculada únicamente a partir de la apertura angular útil.

3.2 Diseño de pantallas nulas para espejos tipo Fresnel de revolución

Para generar el algoritmo que describirá en general el cálculo de pantallas nulas para superficies tipo Fresnel con simetría de revolución, primero se supondrá un arreglo ordenado de puntos que describirán el patrón ideal, el cual se formará por reflexión a través del espejo bajo prueba proveniente de una pantalla cilíndrica colocada a lo largo del eje óptico, de forma análoga a lo presentado en [24, 26].
Considérese el plano de incidencia $\mathbf{Y}-\mathbf{Z}$, el cual es un plano de corte meridional del espejo tipo Fresnel con simetría de revolución cuya representación paramétrica Σ_k está dada por la Ec.(2.23). Como se observa en la Fig.3.6, el eje óptico del espejo es paralelo a $\mathbf{Z}$ y la línea de referencia del espejo plano $z = p$ coincide con el eje $\mathbf{Y}$ por lo que $p = 0$.
Como se muestra en la Fig.3.6, la distancia A representa la distancia focal efectiva de la lente acoplada a un sensor CCD, la cual nos premitirá obtener imágenes de las pantallas nulas proyectadas sobre el espejo bajo prueba que está colocado a una distancia B medida desde el diafragma de la cámara. El plano de detección representa el sensor cuadrado CCD con longitud ℓ_D por cada lado.

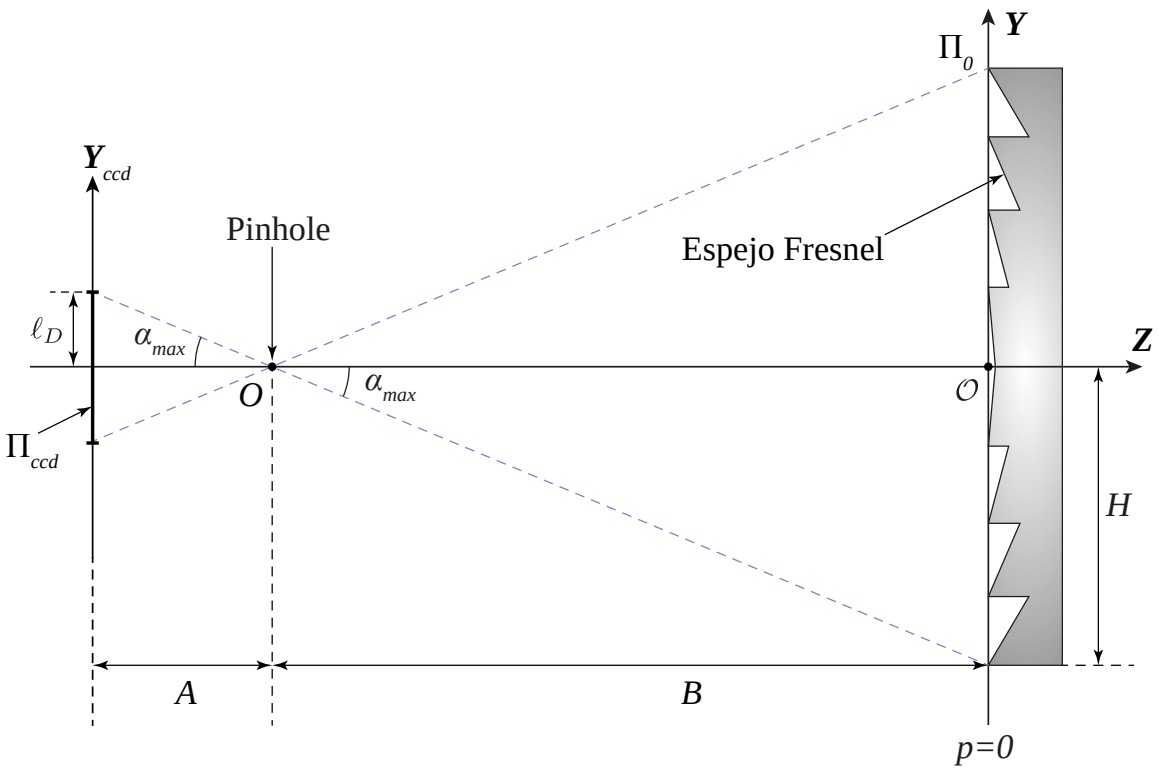


Fig. 3.6 Diagrama del cálculo de las distancias A y B de modo que al pasar los rayos marginales por O se observe en el plano Π_{ccd} la apertura total del espejo $2H$ en Π_0.

Entonces, para proyectar completamente el espejo tipo Fresnel de semidiámetro H sobre el sensor CCD, se sitúa el pinhole a una distancia B del espejo, de modo que los rayos marginales que cruzan por el pinhole incidan exactamente a una altura $\ell_D/2$ sobre el plano de detección, la distancia B se calcula por semejanza de triángulos resultando la siguiente ecuación

$$B = \frac{2AH}{\ell_D}. \tag{3.13}$$

Para calcular los puntos sobre la pantalla nula cilíndrica se hará el trazo inverso de rayos partiendo desde un punto arbitrario $P_{ij} = \left(x_{ij}, y_{ij}\right)$ que está en el plano de detección denotado como Π_{ccd} con sistema coordenado $\mathbf{X}_{ccd} - \mathbf{Y}_{ccd}$, como se muestra en la Fig.3.7. Para mapear el punto P_{ij} sobre el espejo bajo prueba se hace el cambio a coordenadas polares mediante las

expresiones

$$\phi_{ij} = \arctan\left(\frac{y_{ij}}{x_{ij}}\right);$$
$$r_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}, \tag{3.14}$$

quedando de la forma $P_{ij} = \left(r_{ij}\cos\phi_{ij}, r_{ij}\operatorname{sen} r_{ij}\right)$, con $0 < r_{ij}$ y $\phi_{ij} \in [0, 2\pi]$.

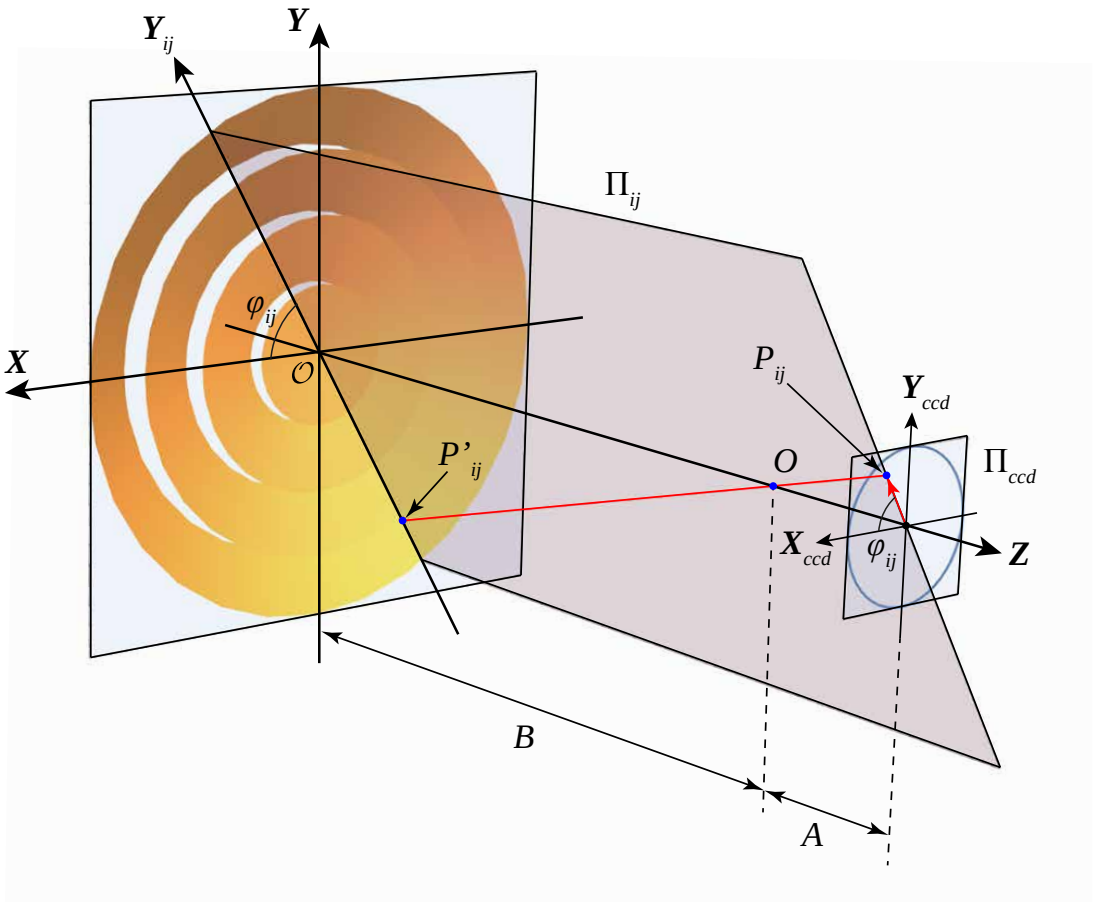


Fig. 3.7 Diagrama de los planos que definen las transformaciones del punto P_{ij} para hacerlo incidir en el espejo Fresnel en el corte meridional Π_{ij}.

La superficie de revolución que representa al espejo tipo Fresnel se construye rotando la fun-

ción definida por la Ec.(2.23) respecto el eje **Z**, obteniendo la siguiente expresión

$$\Xi_k(h,\theta) = \left[h\cos\theta, h\,\mathrm{sen}\,\theta, \frac{1}{m_k}\left(h - Q_k^y\right) + Q_k^z\right] \qquad h \in \left(R_{k-1}^y, Q_k^y\right], \tag{3.15}$$

como se muestra en la Fig.3.8, la gráfica de la Ec.(3.15) resulta en una sucesión de conos truncados denotados por Ξ_k para $k = 1,\ldots,n$.

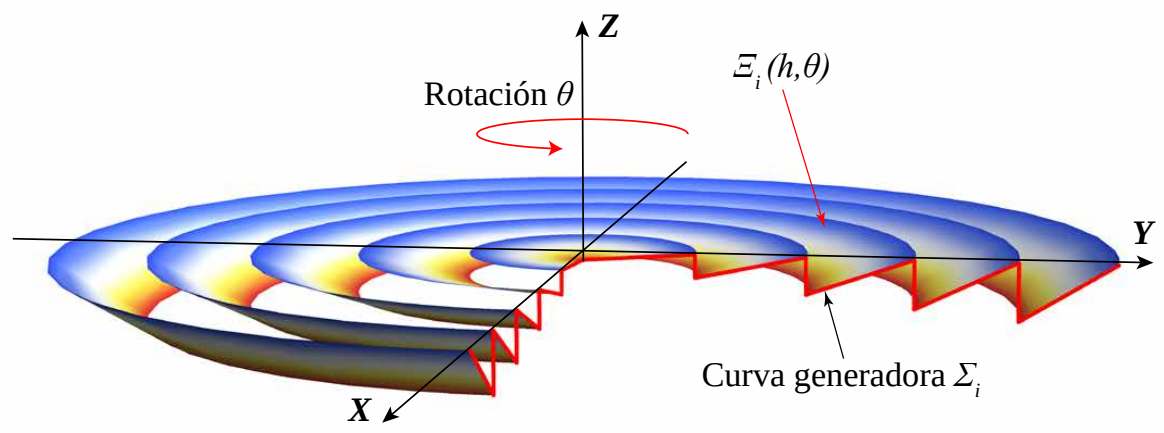


Fig. 3.8 Diagrama del espejo de revolución, con la curva generadora Σ_i que se rota respecto del eje **Z** a un ángulo θ.

Entonces se extiende un rayo desde P_{ij} que pasa por el pinhole denotado por O hasta hacerlo incidir sobre el espejo bajo prueba en el punto F_{ijk}. Como se ilustra en la Fig.3.7, este rayo queda contenido en el plano meridional Π_{ij} correspondiente al ángulo ϕ_{ij}, donde se pueden aplicar los criterios anteriormente desarrollados para calcular el punto de incidencia F_{ijk}.

En la Fig.3.9 se ilustra el plano Π_{ij}, donde el rayo $P_{ij}F_{ijk}$ que intersecta al eje **Z** en el punto O define un ángulo que se denotará como α_{ij}, el cual se puede calcular mediante la siguiente ecuación

$$\alpha_{ij} = \arctan\left[\frac{r_{ij}}{|A|}\right], \tag{3.16}$$

que es función del parámetro $0 < r_{ij}$, por lo que los valores de α_{ij} correspondientes a cada P_{ij}

están acotados por la expresión

$$0 < \alpha_{ij} \leq \arctan\left[\frac{\ell_D}{2\,|A|}\right] = \arctan\left[\frac{H}{|B|}\right], \tag{3.17}$$

donde la última igualdad se obtiene a partir de la Ec.(3.13).

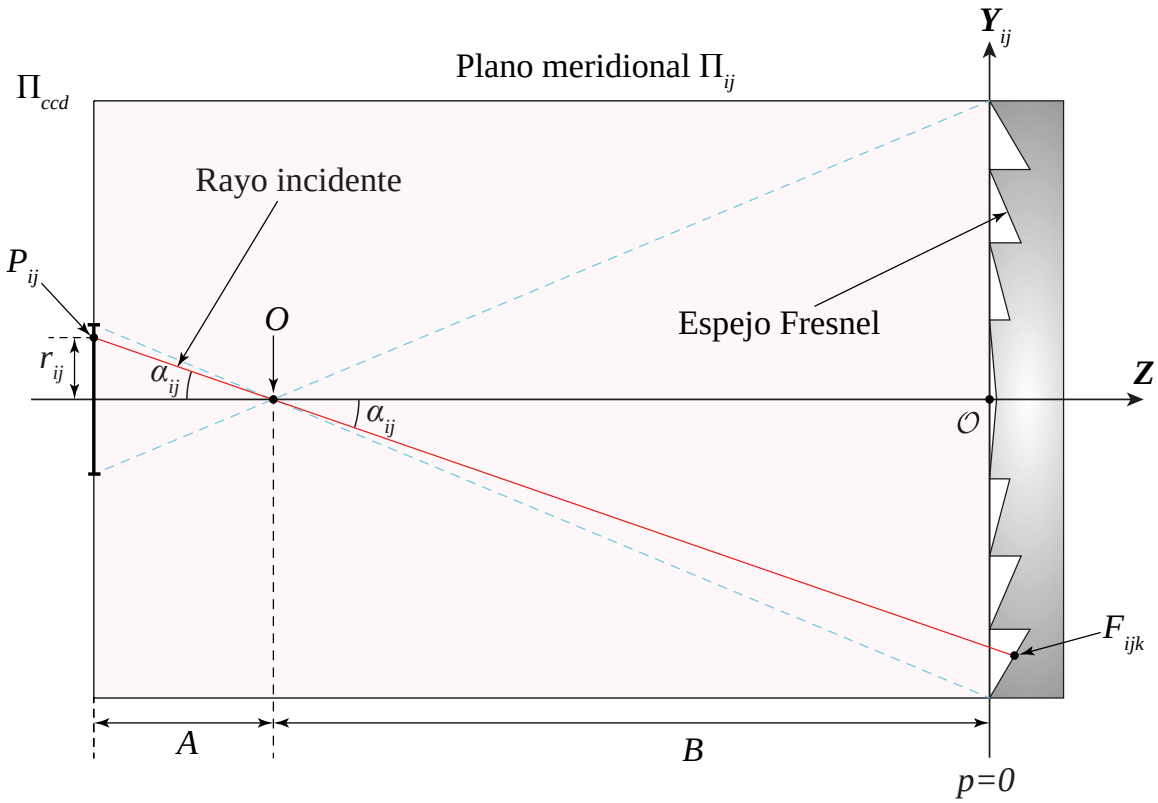


Fig. 3.9 Diagrama del plano meridional Π_{ij} sobre el que se define la incidencia del punto P_{ij} sobre el plano Π_0.

Considérese O como una fuente luminosa puntual como se observa en la Fig.3.10, colocada a una distancia $S_o = B$ del espejo, pero $p = 0$ entonces se tiene que $(p - S_o) = |B|$, sustituyendo en la Ec.(3.2) se deduce que

$$\alpha_{max} = \arctan\left[\frac{H}{|B|}\right].$$

Por lo tanto, considerando la Ec.(3.4) se sustituyen los parámetros del espejo bajo prueba dados por la Ec.(3.15) obteniendo

$$\xi_{k-1} = \arctan\left[\frac{R^y_{k-1}}{|B|}\right]; \quad \zeta_k = \arctan\left[\frac{Q^y_k}{|B|}\right],$$

tales que, si $\alpha_{ij} \in (\xi_{k-1}, \zeta_k]$ entonces el rayo proveniente del punto P_{ij} incide en el surco Σ_k. Por lo que se calculan las coordenadas del punto F_{ijk} incidente sobre el plano meridional Π_{ij} a partir de la Ec.(3.5) obteniendo

$$\begin{aligned} z_k\left(\alpha_{ij}\right) &= \frac{B\tan\alpha_{ij} - m_k Q^z_k + Q^y_k}{\tan\alpha_{ij} - m_k}, \\ y_k\left(\alpha_{ij}\right) &= \frac{\tan\alpha_{ij}\left[Q^y_k + m_k\left(B - Q^z_k\right)\right]}{\tan\alpha_{ij} - m_k}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde m_k es la pendiente del surco Σ_k, a partir de esta expresión se sustituyen en la Ec.(3.15) $h \to y_k$ y la coordenada en $\mathbf{Z}$ por z_k quedando por lo tanto definida la transformación $F : \Pi_{ccd} \to \Xi_k$ que como lo indica, mapea los elementos $P_{ij} \longmapsto F_{ijk}$, entonces

$$F_{ijk} = F\left(P_{ij}\right) = \left\{y_k\left(\alpha_{ij}\right)\cos\psi_{ij}, y_k\left(\alpha_{ij}\right)\operatorname{sen}\psi_{ij}, z_k\left(\alpha_{ij}\right)\right\}, \tag{3.19}$$

donde $\psi_{ij} = \phi_{ij} - \pi$, entonces se tendrá que $\psi_{ij} \in [-\pi, \pi]$ para cada F_{ijk}.

Ahora que se tiene bien definido F_{ijk}, se mapeará este punto sobre el cilindro con vértice sobre el eje $\mathbf{Z}$, cuyo corte meridional en Π_{ij} se muestra en la Fig.3.10 y con ecuación dada por

$$\mathscr{C} = \{r_{cil}\cos\theta, r_{cil}\operatorname{sen}\theta, z\}, \tag{3.20}$$

donde, r_{cil} es el radio del cilindro y $z \in [-\ell_{cil}, 0]$ con ℓ_{cil} la longitud del cilindro.

Entonces, haciendo uso de la correspondencia por surco de la Ec.(3.18) se calculan utilizando la Ec.(3.6) los correspondientes ángulos de reflexión β_{ijk} en cada F_{ijk}, a partir de esto se obtienen las pendientes en forma paramétrica de los rayos reflejados

$$m_{rk}\left(\alpha_{ij}\right) = \tan\beta_{ijk} = \left(\frac{\left(1 - m_k^2\right)\tan\alpha_{ij} - 2m_k}{\left(m_k^2 - 1\right) - 2m_k\tan\alpha_{ij}}\right). \tag{3.21}$$

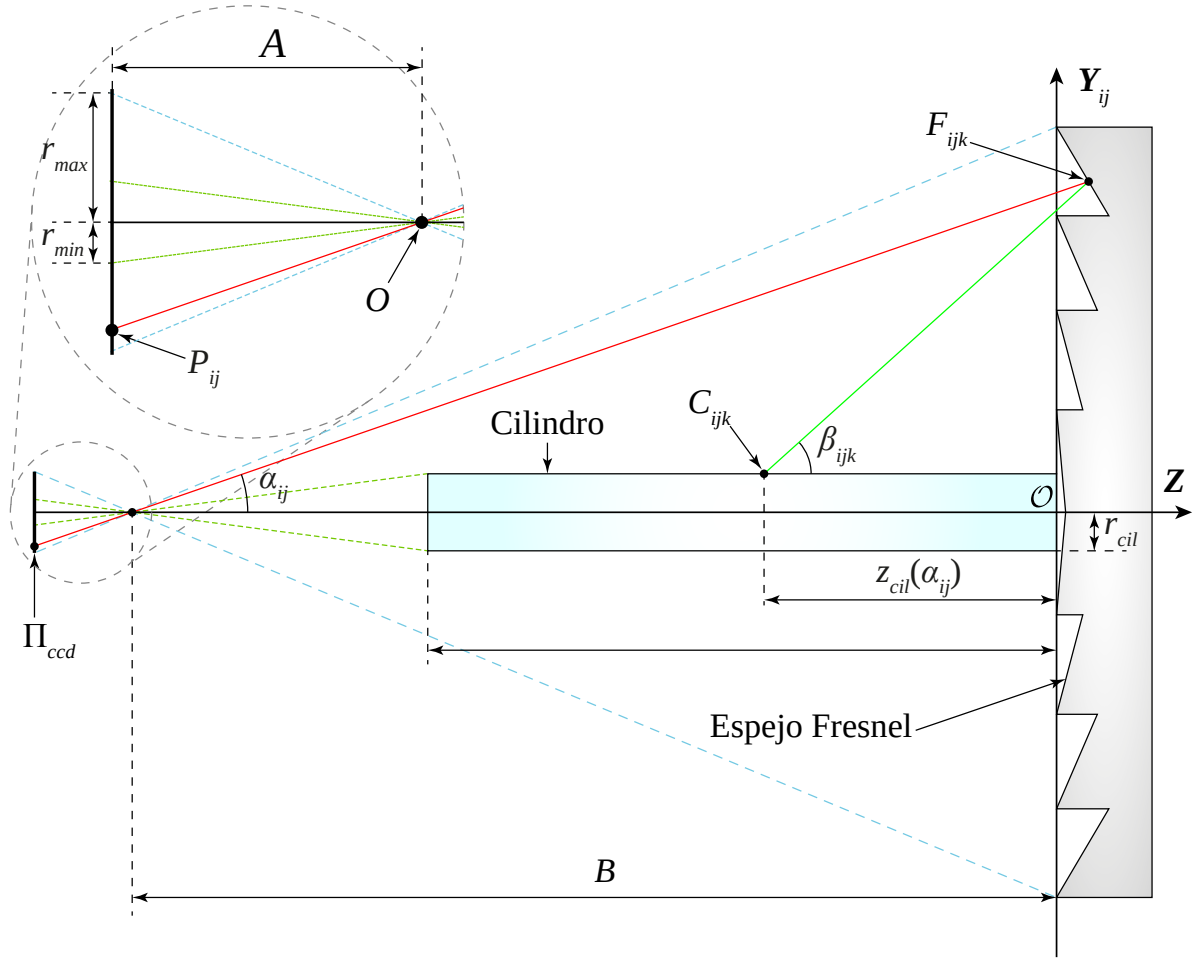


Fig. 3.10 Diagrama del mapeo F que transforma el punto P_{ij} sobre Π_{ccd} en F_{ijk} sobre el espejo. En consecuencia, C transforma F_{ijk} en C_{ijk} sobre el cilindro de la pantalla nula.

En la reflexión ya no hay inversión en los ángulos que determinan la posición del punto en la pantalla, por lo que el ángulo ψ_{ij} se conserva sobre la superficie del cilindro, entonces calculando la intersección del rayo reflejado con el cilindro se tiene sobre el plano Π_{ij}, como se muestra en la Fig.3.10, la siguiente ecuación

$$z_{cil}\left(\alpha_{ij}\right) = \frac{1}{m_{rk}\left(\alpha_{ij}\right)}\left[r_{cil} - y_k\left(\alpha_{ij}\right)\right] + z_k\left(\alpha_{ij}\right), \tag{3.22}$$

entonces, sustituyendo en la Ec.(3.20) $z \to z_{cil}\left(\alpha_{ij}\right)$ y $\theta \to \psi_{ij}$ correspondientes para los pun-

tos sobre el cilindro se define la nueva transformación $C : \Xi_k \to \mathscr{C}$

$$C\left(F_{ijk}\right) = C_{ijk} = \left\{r_{cil}\cos\psi_{ij}, r_{cil}\,\mathrm{sen}\,\psi_{ij}, z_{cil}\left(\alpha_{ij}\right)\right\}, \tag{3.23}$$

donde C_{ijk} son puntos sobre el cilindro cuya parametrización define los ángulos de incidencia en el sistema de Π_{ij} en el intervalo $\psi_{ij} \in [-\pi, \pi]$.

La correspondencia $F_{ijk} \longmapsto C_{ijk}$ existe sólo si el valor del ángulo de incidencia cumple con la condición $\alpha_{ij} \in (\alpha_{ck}, \zeta_k]$ donde α_{ck} es el ángulo crítico como se define en la Ec.(3.8), entonces sólo en estos casos se asegurará la existencia del punto de diseño de pantalla nula bajo la transformación C, en el otro caso los puntos imagen sobre el cilindro no existen y se descartarán esos datos.

Finalmente, para visualizar adecuadamente la pantalla resultante se debe transformar de un patrón dibujado sobre una superficie cilíndrica a un dibujo plano en Π_N con coordenadas $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$. Por lo tanto se considerará la siguiente transformación $N : \mathscr{C} \to \Pi_N$ con ecuación definida como

$$N\left(C_{ijk}\right) = N_{ijk} = \left\{r_{cil}\psi_{ij}, z_{cil}\left(\alpha_{ij}\right)\right\}, \tag{3.24}$$

donde la primera coordenada está asociada al recorrido de longitud de arco, por lo que del dominio definido para ψ_{ij} se tendrá que el patrón plano obtenido por este método deberá estar contenido en un rectángulo centrado en el origen del sistema coordenado $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$.

En conclusión, mediante el trazo inverso de rayos se han mapeado los puntos imagen P_{ij} sobre el plano de detección sobre sus correspondientes puntos objeto C_{ijk} que se encuentran sobre la pantalla nula.

Sin embargo, como se observa en la Fig.3.10, la parte superior del cilindro con la pantalla nula $\mathscr{C}$ crea obstrucción en la vista de la cámara, por lo que los puntos P_{ij} sobre el plano Π_{ccd} quedan restringidos en el área que se encuentra entre la circunferencia de radio $r_{max} = \ell_D/2$ y la circunferencia de radio r_{min}.

Para determinar el radio menor r_{min}, primero se debe calcular la altura máxima del cilindro denotada ℓ_{cil} por lo que el radio de la circunferencia que se observará en el CCD debida al cilindro con la pantalla será

$$r_{min} = \frac{r_{cil}}{|B - \ell_{cil}|}. \tag{3.25}$$

3.2.1 Diseño de pantallas nulas tipo Fresnel considerando anillos concéntricos

En esta sección el conjunto $\mathscr{P} = \{P_{ij}\}$ se compondrá de anillos concéntricos en el CCD delimitados por la región que existe entre las circunferencias de radio r_{min} y r_{max}.
Defínase entonces $a \in \mathbb{N}$ como el número de anillos oscuros que se observarán en el plano Π_{ccd}, cabe destacar que el patrón deseado será siempre tal que el primer anillo sea oscuro, el siguiente sea blanco y así sucesivamente hasta terminar siempre con uno oscuro, para esto se debe generar una partición en longitudes radiales como la siguiente

$$\Delta_r = \left[\frac{r_{max} - r_{min}}{m}\right],$$

donde $m \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2a - 1$, como se observa en la Fig.3.12, esta regla da la secuencia de radios $r_i = r_{min} + \Delta_r i$ con $i = 0, \ldots, m$.
El siguiente paso es generar las circunferencias de radio r_i, para esto se hará una aproximación mediante un polígono regular de n lados, adicionalmente se dividirá el intervalo de longitud de arco $[0, 2\pi]$ en n partes iguales, generando por lo tanto la longitud angular

$$\Delta_\phi = \left[\frac{2\pi}{n}\right],$$

entonces los ángulos en que se divide la circunferencia son $\phi_j = (j)\,\Delta_\phi$, de donde los vértices de estos polígonos quedarán definidos por los puntos

$$P_{ij} = \left(r_i \cos\phi_j, r_i \operatorname{sen}\phi_j\right),$$

como en la Fig.3.12(a), de los cuales, si se fija el subíndice i se generan los conjuntos

$$A_i = \left\{P_{ij} = r_i\left(\cos\phi_j, \operatorname{sen}\phi_j\right) \mid j = 0, \ldots, n\right\}, \tag{3.26}$$

donde A_i denota la i-ésima circunferencia generada por la rotación de 2π del radio r_i sobre el plano Π_{ccd}, como se muestra en la Fig.3.12(b).
Para construir los anillos del patrón se definirá una relación de correspondencia entre las circunferencias de la Ec.(3.26). Sea entonces A_i con i número natural impar, es decir $i = 1, \ldots, m$ donde m es siempre impar por definición de a, se le asignará la correspondencia $A_i \to A_{i-1}$ para generar el contorno de los anillos oscuros.

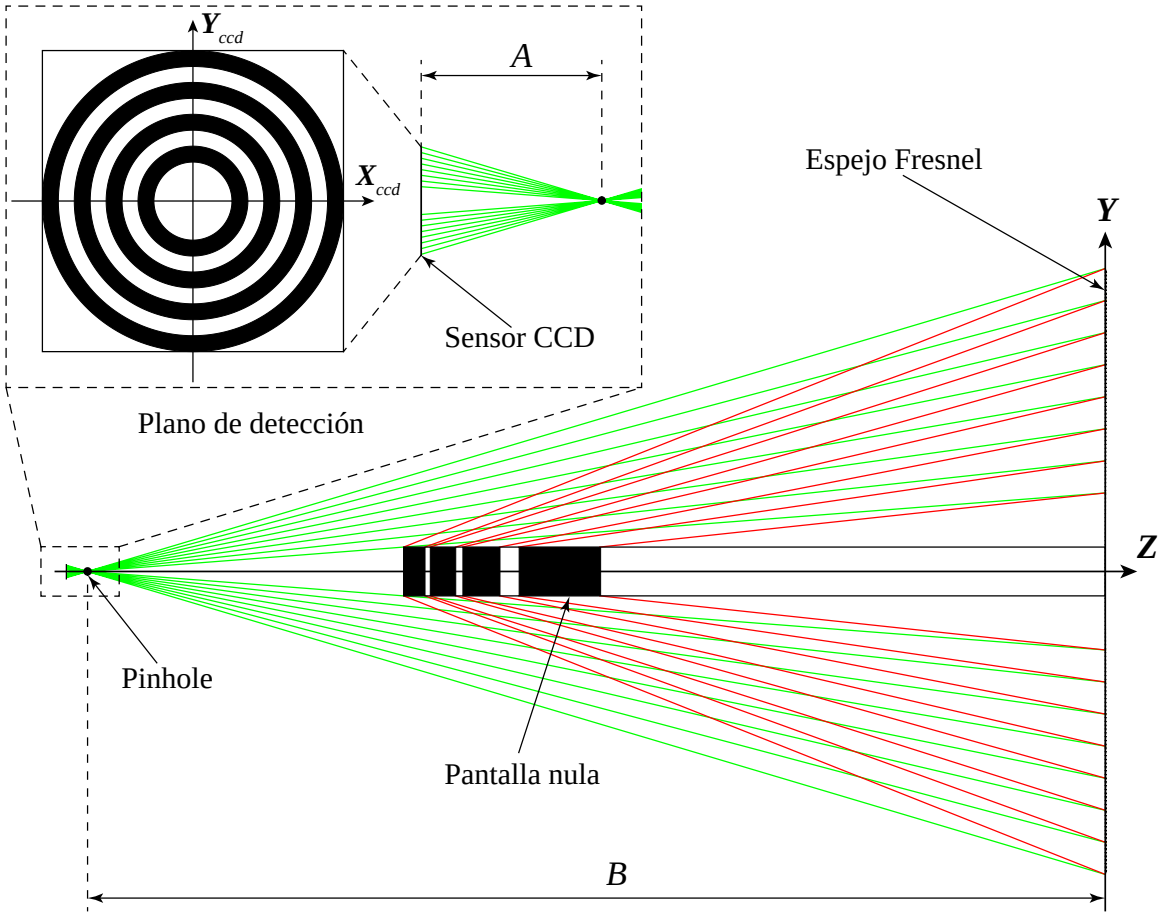


Fig. 3.11 Diagrama del patrón de anillos observado en el sensor CCD, proveniente de la pantalla nula cilíndrica por reflexión.

Habiendo definido un contorno cerrado se puede en consecuencia rellenar el área delimitada para obtener los anillos oscuros, los anillos blancos serán simplemente la región encerrada entre dos anillos oscuros que como se observa en la Fig.3.12(b), es siempre posible.
Se aplica la Ec.(3.16) para obtener los ángulos α_{ij} de incidencia sobre el espejo correspondiente a cada P_{ij} resultando la expresión

$$\alpha_i = \arctan\left[\frac{r_i}{|B|}\right],$$

de donde se deduce de la dependencia del subíndice i que el ángulo de incidencia es cons-tante para cada circunferencia A_i, además se deduce el intervalo de ángulos de incidencia por las Ec.(3.17) y Ec.(3.25) como $\alpha_i \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ donde

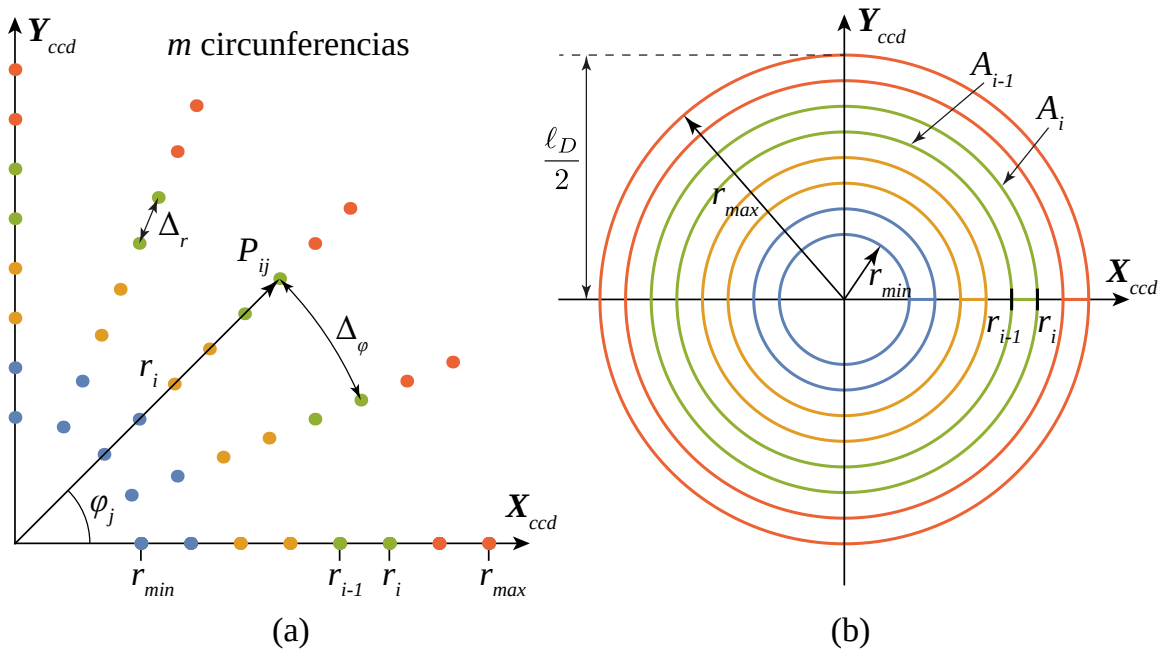


Fig. 3.12 (a) Cálculo de los puntos P_{ij} que definen el patrón de circunferencias en el primer cuadrante. (b) Diagrama completo del patrón ideal en el CCD, con las circunferencias A_i.

$$\alpha_{min} = \arctan\left[\frac{r_{min}}{|B|}\right], \quad \alpha_{max} = \arctan\left[\frac{H}{|B|}\right].$$

Finalmente, se visualiza la pantalla nula en el sistema $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$, aplicando la Ec.(3.24) considerando todas las restricciones para los ángulos α_i

$$N_{ijk}(\alpha_i) = \left\{r_{cil}\psi_j, z_{cil}(\alpha_i)\right\},$$

donde $\psi_j \in [-\pi, \pi]$, con $z_{cil}(\alpha_i)$ constante para cada subíndice i por lo que cada circunferencia A_i se transforma en una línea recta horizontal en la pantalla nula.

Por lo que cada anillo oscuro queda como un rectángulo oscuro en el arreglo de la Fig.3.13. En tanto, cada rectángulo blanco queda delimitado por dos oscuros como inicialmente se definieron los anillos.

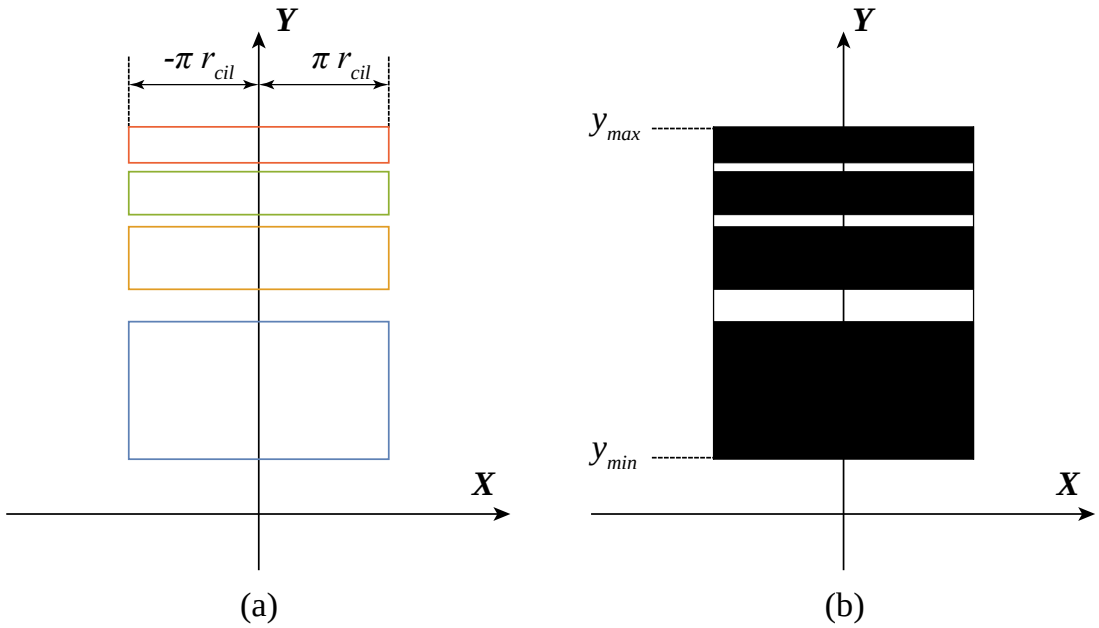


Fig. 3.13 (a) Diagrama de rectángulos que se forman después de desenrollar del cilindro la pantalla. (b) Alternancia entre rectángulos oscuros y blancos en la pantalla en el sistema $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$.

3.2.2 Diseño de pantallas nulas tipo Ronchi para un espejo Fresnel

Para esta sección el conjunto $\mathscr{P} = \{P_{ij}\}$ se compondrá de un arreglo uniforme de barras oscuras y blancas como el presentado en [39] formado por reflexión en el sensor CCD dentro de la región delimitada por las circunferencias de radios r_{min} y r_{max}.

Defínase $a \in \mathbb{N}$ como el número de franjas oscuras que se observarán en el plano Π_{ccd}, el patrón que se desea observar es un arreglo en donde la primera y la última franja son oscuras. Para esto se divide el lado del sensor CCD con longitud ℓ_D en $m = 2a-1$ segmentos con longitud

$$\Delta_x = \frac{\ell_D}{2a-1},$$

de donde se generan las distancias siguientes a lo largo del eje $\mathbf{X}_{ccd}$, para $i = 0, \ldots, m$,

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}m\right)\Delta_x.$$

Considerando "n" el número de puntos con que se formarán las rectas verticales que definirán las franjas, se definen los segmentos a lo largo del eje $\mathbf{Y}_{ccd}$ en que se divide la mitad del sensor

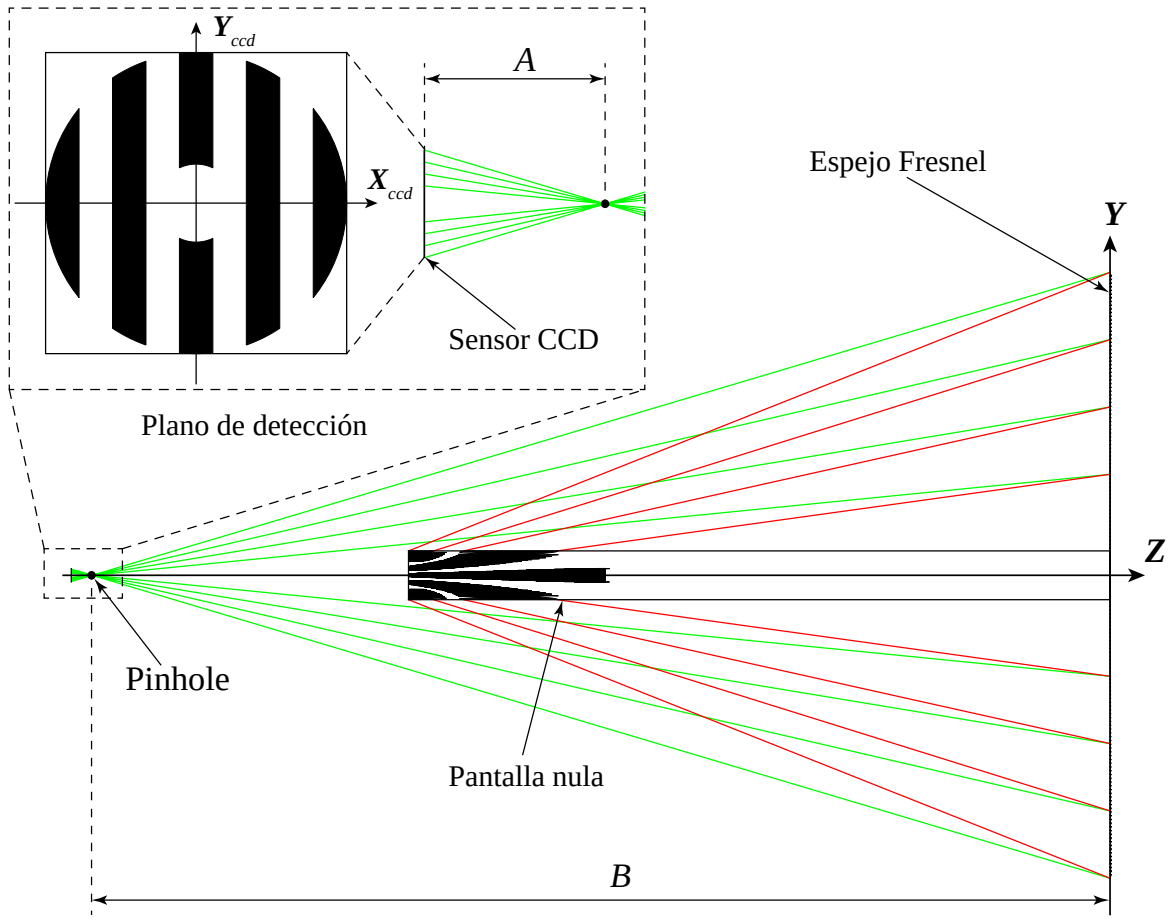


Fig. 3.14 Diagrama del patrón de franjas observado en el sensor CCD, proveniente de la pantalla nula cilíndrica por reflexión.

$$\Delta_y = \frac{\ell_D}{2n},$$

de donde se generan las distancias $y_j = \Delta_y(j)$, para $j = 0, \ldots, m$.

Cada punto del patrón se define como $P_{ij} = (x_i, y_j)$, para formar las rectas del patrón

$$L_i = \{P_{ij} = (x_i, y_j) \mid j = 0, \ldots, n\}, \tag{3.27}$$

de donde se pueden definir a partir de la Ec.(3.14) los radios $r_{ij} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2}$ y los ángulos $\phi_{ij} = \arctan(y_j/x_i)$.

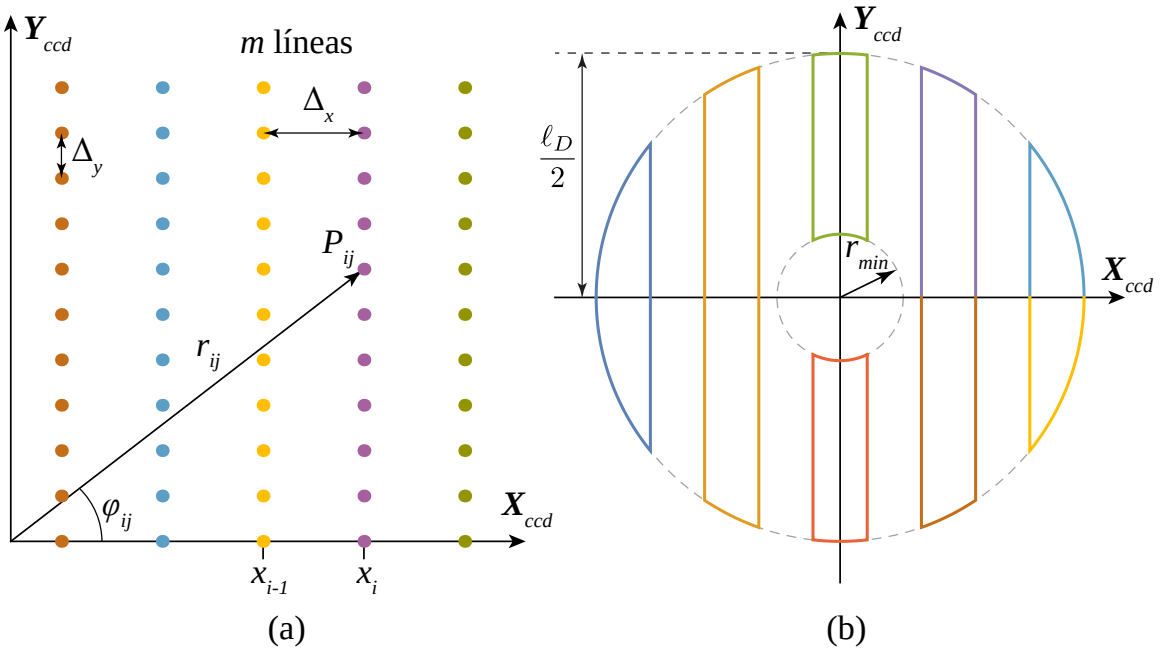


Fig. 3.15 (a) Cálculo de los puntos P_{ij} que definen el patrón de franjas en el primer cuadrante. (b) Diagrama completo del patrón ideal en el CCD, con las franjas.

Por simetría es suficiente considerar un cuarto del sensor CCD, por lo cual se ha seleccionado el primer cuadrante $x_i \geq 0, y_j \geq 0$ y después, mediante transformaciones apropiadas de rotación se pueden reflejar los puntos para cubrir todo el sensor.
Para construir las franjas oscuras se hace la distinción entre líneas de la Ec.(3.27), si $|y_i| \leq r_{min}$, se observa que estas líneas son intersectadas por la circunferencia mínima. Por lo que para construir las franjas oscuras se define la regla de correspondencia $L_i \rightarrow L_{i-1}$ y la franja se une por los segmentos de circunferencia que las intersecta.
Se aplica la Ec.(3.16) para obtener los ángulos α_{ij} de incidencia sobre el espejo correspondiente a cada P_{ij} resultando la expresión

$$\alpha_{ij} = \arctan\left[\frac{r_{ij}}{|B|}\right],$$

como en la sección anterior se tiene que $\alpha_{ij} \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$.

Finalmente, se visualiza la pantalla nula en el sistema $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$, que como se observa en la Fig.3.16(a) se compone de curvas discontinuas por lo que cuando se rellenan como polígonos

irregulares en la Fig.3.16(b) se producen franjas curveadas y distorsionadas respecto a las franjas producidas por espejos cónicos cóncavos como se verán en el capítulo siguiente.

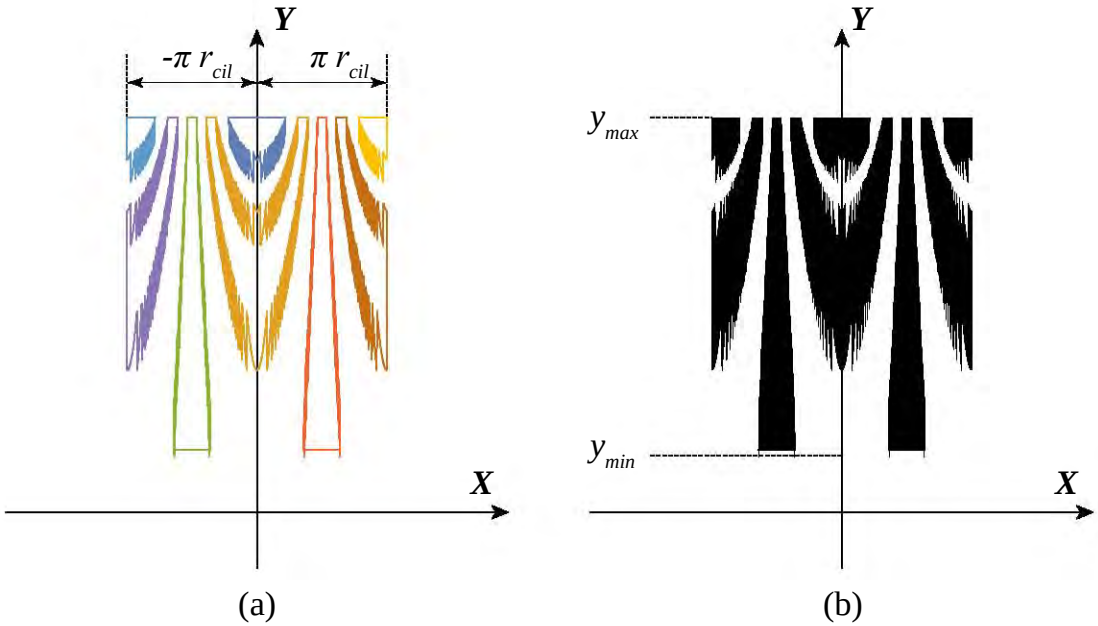


Fig. 3.16 (a) Diagrama de las curvas discontinuas que se forman después de desenrollar del cilindro la pantalla. (b) Alternancia entre franjas oscuras y blancas en la pantalla en el sistema $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$

Capítulo 4

Desarrollo de pruebas por pantallas nulas para espejos Fresnel

En el capítulo anterior se desarrolló la teoría para diseñar las pantallas nulas para ser implementadas en una prueba preliminar para evaluar espejos tipo Fresnel. En el presente capítulo se utilizará en primer lugar la correspondencia entre espejos cónicos cóncavos con sus versiones en Fresnel para implementar una prueba preliminar mediante el método de pantallas nulas diseñadas para espejos cóncavos tradicionales. Después se mostrarán los resultados de sustituir las pantallas anteriores por sus versiones exactas considerando las superficies tipo Fresnel. Que como se vio anteriormente, consideran todos los parámetros importantes de una superficie continua a trozos.

4.1 Pruebas preliminares

Para el desarrollo de este capítulo se realizaron las mediciones en el Laboratorio de Pruebas Ópticas del actual ICAT-UNAM, antes CCADET-UNAM. A lo largo de este capítulo, el montaje experimental contempló una cámara con sensor CCD cuadrado, de longitud $\ell_D = 4.762mm$ con una lente de distancia focal efectiva de $A = 8mm$, la cual fue colocada sobre un riel con movimiento en tres ejes para ajustar la distancia del diafragma de la cámara al espejo bajo prueba, el espejo Fresnel es de origen comercial y se desconocen todos sus parámetros de diseño, para iluminar uniformemente el experimento se utilizaron lámparas circulares de luz fría que se colocaron sobre unas monturas exteriores al espejo bajo prueba, por lo que la superficie

se considera con apertura igual al radio interno $H = 122mm$ de la lámpara. La pantalla es colocada sobre un cilindro de acrílico con radio externo $r_{cil} = 9.665mm$.

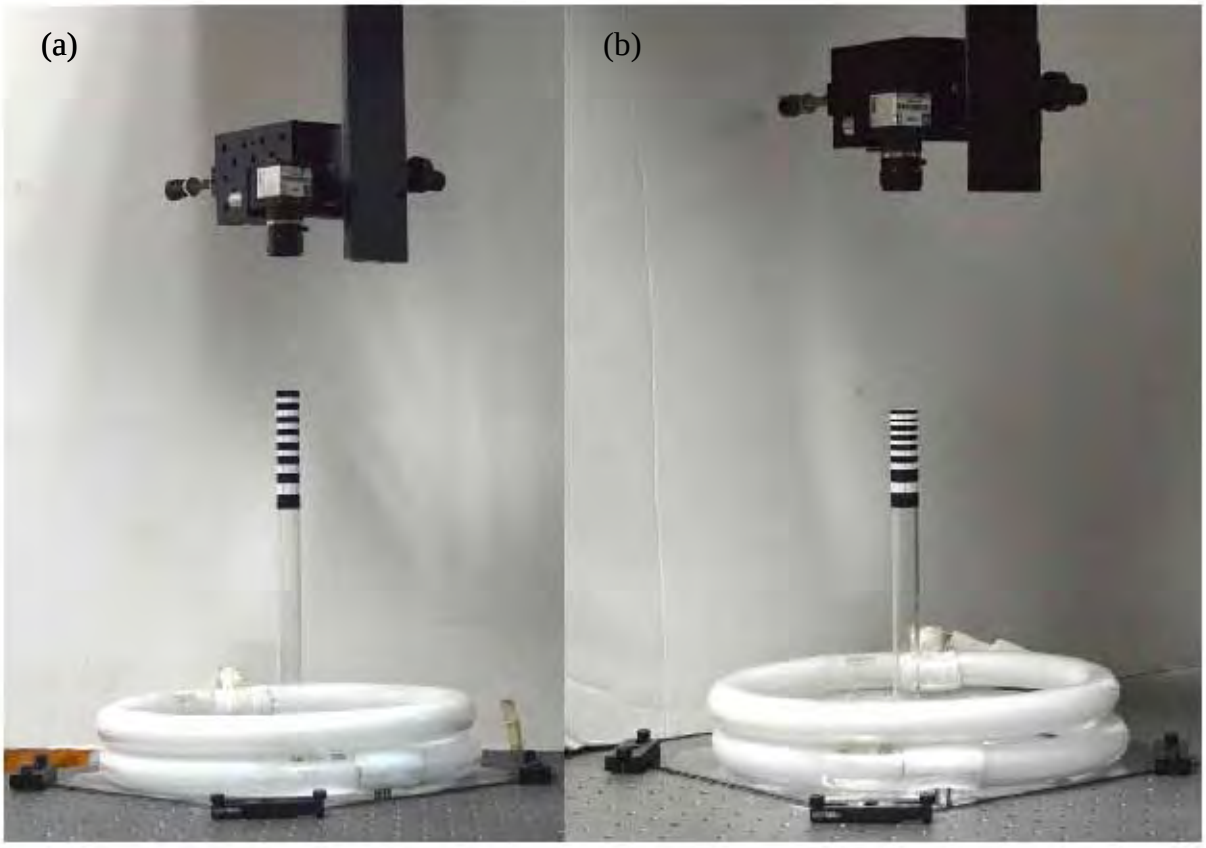


Fig. 4.1 (a) Arreglo experimental de la prueba preliminar, utilizando una pantalla calculada a partir de una superficie cónica. (b) Arreglo experimental para una prueba calculada para un espejo Fresnel.

En el primer capítulo se mostraron las equivalencias entre espejos cónicos cóncavos y sus respectivas transformaciones a espejos tipo Fresnel. Por lo que en esta sección se hará la suposición que si se sustituye en una prueba por pantallas nulas previamente diseñada para un espejo cónico cóncavo entonces funcionará para su versión Fresnel. El espejo que se desea evaluar es un espejo Fresnel comercial con un recubrimiento de acrílico que protege la superficie dentada.

Para determinar la distancia focal del espejo Fresnel se utilizó como fuente de luz al propio sol, para simular la iluminación representada en los anteriores trazos de rayos se cuidó que el espejo estuviese a incidencia normal. Entonces, utilizando una hoja de papel se determinó la zona para la cual el área de iluminación se reducía a un área mínima, esto quedó de manifiesto

ya que la hoja se quemaba de inmediato al llegar a tal distancia.

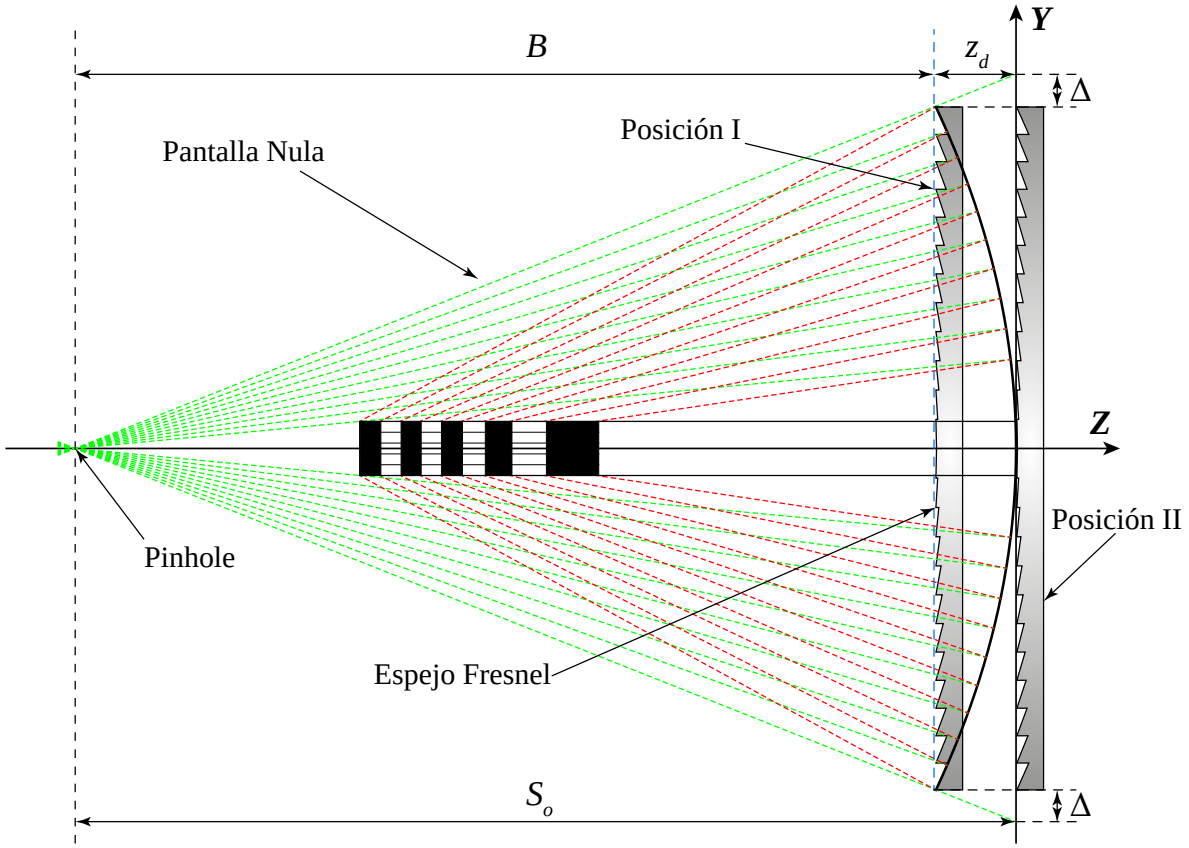


Fig. 4.2 Arreglo experimental de la prueba preliminar, el espejo Fresnel se coloca en la "Posición I" a la distancia B donde la apertura del espejo refleja la pantalla completa en el CCD pero no está en la posición de diseño, por otro lado, en la "Posición II" a la distancia S_o la apertura no es la adecuada.

Una vez hecho lo anterior se midió la distancia correspondiente usando un flexómetro, como resultado de esta medición se determinó que la distancia focal del espejo es de aproximadamente $f = 178mm$, por lo que se calcula el radio de curvatura paraxial definido en la Ec.(2.1) como $R = 2f$.

Sin embargo, para poder caracterizar el espejo adecuadamente se debe determinar también su constante de conicidad k como la que se definió en la Ec.(2.1). Ya que no se conocen los parámetros de diseño del espejo bajo prueba, se considerará premeditadamente que fue diseñado para ser utilizado como concentrador solar, se supone en primer lugar que fue construido a partir de una parábola o alguna variante de una hipérbola puesto que como se vio

anteriormente son las superficies con mayor eficiencia de concentración.
Para esto se implementó una prueba por pantallas nulas como la que se muestra en Fig.1.3 utilizando las expresiones previamente obtenidas para calcular una pantalla cilíndrica considerando un espejo cónico cóncavo, las pantallas nulas que se calcularán corresponden a una prueba tipo Ronchi-Hartmann considerando patrones de anillos y franjas rectas.

4.1.1 Prueba preliminar en la "Posición I"

Para implementar una prueba nula que fue diseñada en principio para un espejo cónico cóncavo a un espejo Fresnel plano, surge el primer problema que es la distancia a la cual será evaluado el espejo Fresnel. Esta problemática viene fundamentada del hecho que como se observa en la Fig.4.2 el vértice del espejo cóncavo yace en el origen del sistema de referencia a una distancia $S_o = B + z_d$ del diafragma de la cámara, en tanto el semidiámetro H de apertura total del espejo cóncavo está elevado una altura z_d.

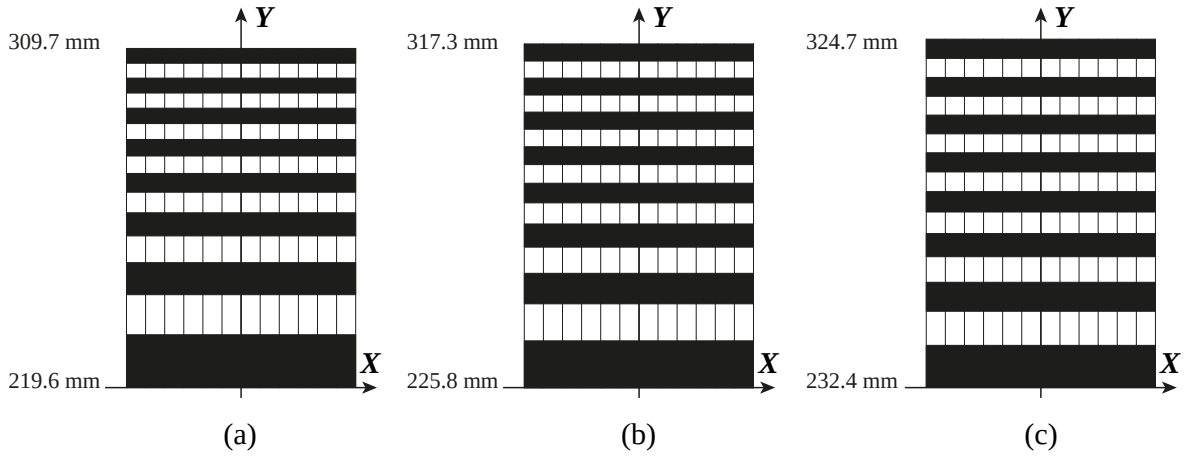


Fig. 4.3 (a) Pantalla para la parábola $k = -1$. (b) Hipérbola con $k = -1.25$. (c) Hipérbola con $k = -1.5$

Por lo cual, se realizará la primera prueba preliminar colocando el espejo Fresnel plano a la distancia B del pinhole denominando a esto como la "Posición I" que es donde coincide el semidiámetro H de apertura del espejo Fresnel con el espejo cóncavo.
Se implementó entonces la primera prueba considerando un arreglo de 8 anillos oscuros concéntricos a los cuales se añadieron líneas radiales para su mejor alineación, utilizando las constantes de conicidad $k = -1$ y $k = -1.5$.

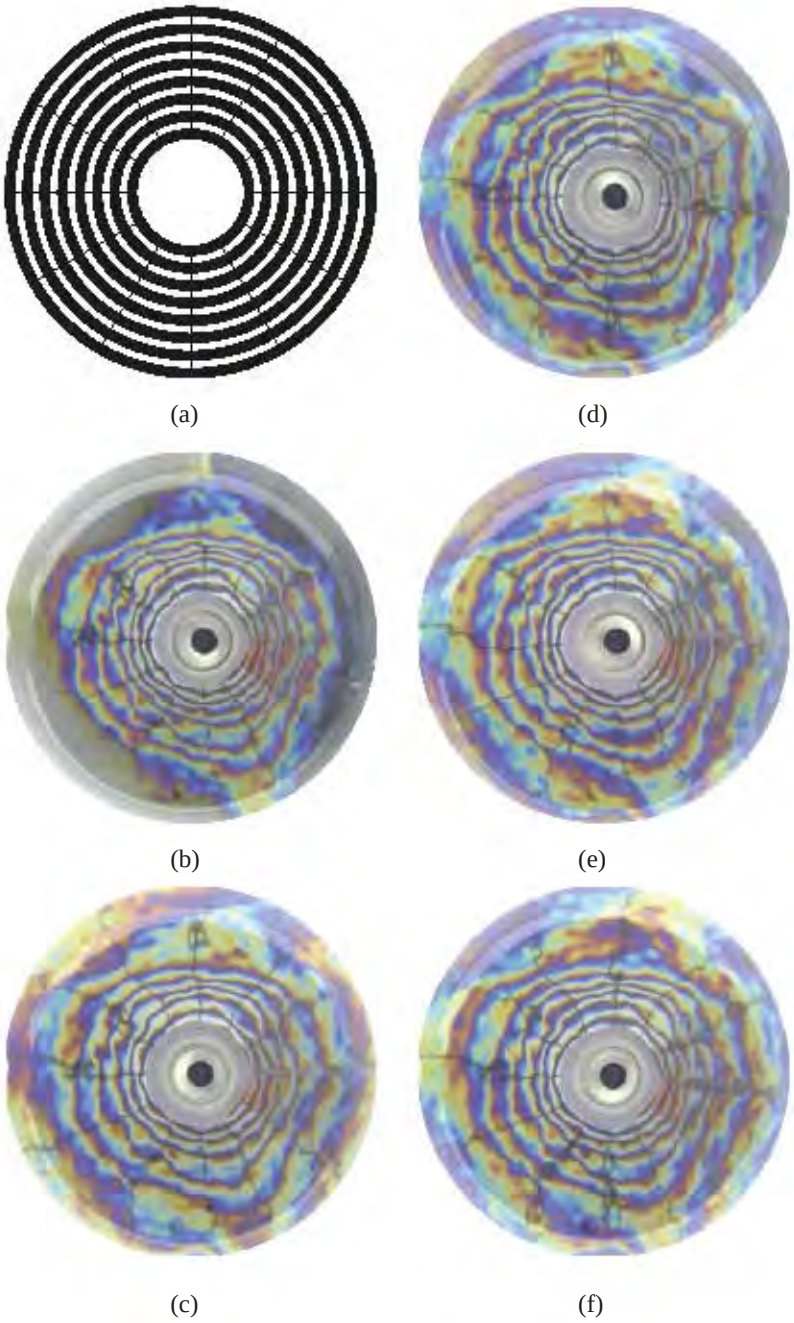


Fig. 4.4 (a) Patrón ideal de 8 anillos oscuros concéntricos con líneas radiales. (b) Imagen para pantalla con $k = -1$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.5$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (e) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (f) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

Se observa en la Fig.4.4(b) el resultado para $k = -1$ que es el caso de la parábola, donde el patrón observado difiere mucho del ideal ya que en principio no cubre toda el área de prueba del CCD, además que los anillos se observan muy irregularmente espaciados y sólo se observan 7 anillos oscuros en total, con el anillo oscuro interno oculto por la imagen del cilindro. En tanto en la Fig.4.4(c), para $k = -1.5$ se observan únicamente 6 anillos, en este caso uno oculto tras la imagen del cilindro y el otro anillo faltante queda fuera del plano de observación.

Para hacer más densa la prueba, se implementaron las pantallas considerando constantes de conicidad intermedias $k = -1.2$, $k = -1.25$ y $k = -1.3$. Los resultados se muestran en las Fig.4.4(d)(e)(f), con patrones que se ajustan mejor al tamaño del sensor, para los casos en que $k = -1.2$ y $k = -1.25$ se observan 7 anillos con el anillo interior obstruído y en el caso en que $k = -1.3$ el patrón está ligeramente fuera del área del sensor por lo que se observan 7 anillos con el exterior apenas visible, sin embargo, los cinco casos que se han observado comparten el inconveniente que no son patrones de anillos del mismo grosor, pues en todos parece que los anillos aumentan de grosor entre más de alejan del centro.

Por otro lado, habiendo observado que las constantes de conicidad $k = -1.2$, $k = -1.25$ y $k = -1.3$ en la prueba de los anillos concéntricos arrojaron patrones que parecen ajustarse mejor a las dimensiones del sensor, se implementó la prueba tipo Ronchi-Hartmann para observar un patrón ideal de 9 franjas oscuras igualmente espaciadas.

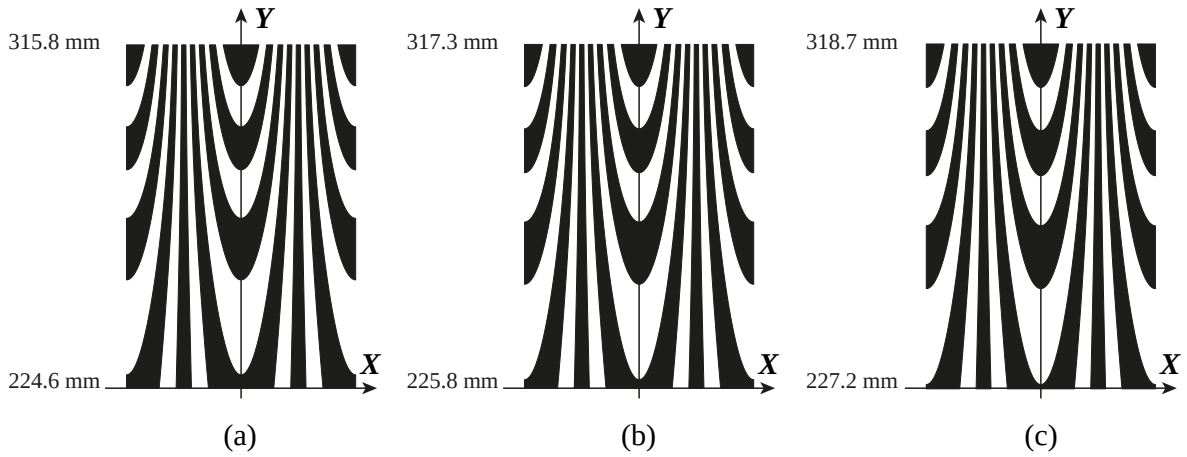


Fig. 4.5 (a) Pantalla para la parábola $k = -1$. (b) Hipérbola con $k = -1.25$. (c) Hipérbola con $k = -1.5$

Como se puede observar en los resultados presentados en la Fig.4.6, las tres pruebas arrojaron resultados similares en los que se pueden observar patrones completos que se ajustan

a las dimensiones del sensor, sin embargo, existe una evidente deformación tipo corset que incrementa conforme la constante de conicidad se hace más negativa.

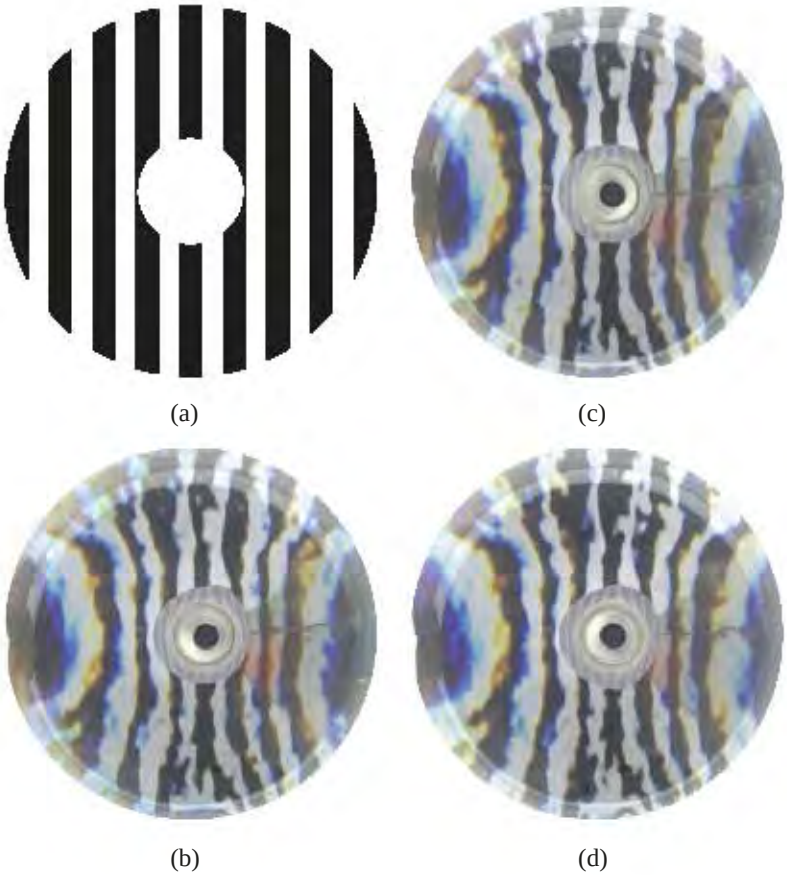


Fig. 4.6 (a) Patrón ideal de 9 franjas oscuras igualmente espaciadas. (b) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

4.1.2 Prueba preliminar en la "Posición II"

Las mismas pruebas calculadas para espejos cónicos cóncavos presentadas anteriormente serán implementadas en esta sección pero ahora en la llamada "Posición II", que como se observa en la Fig.4.2 es tal que la distancia del espejo plano Fresnel se encuentra a la distancia S_o medida desde el pinhole, por lo que en este caso coincide el vértice de la superficie cónica con el centro del espejo Fresnel.

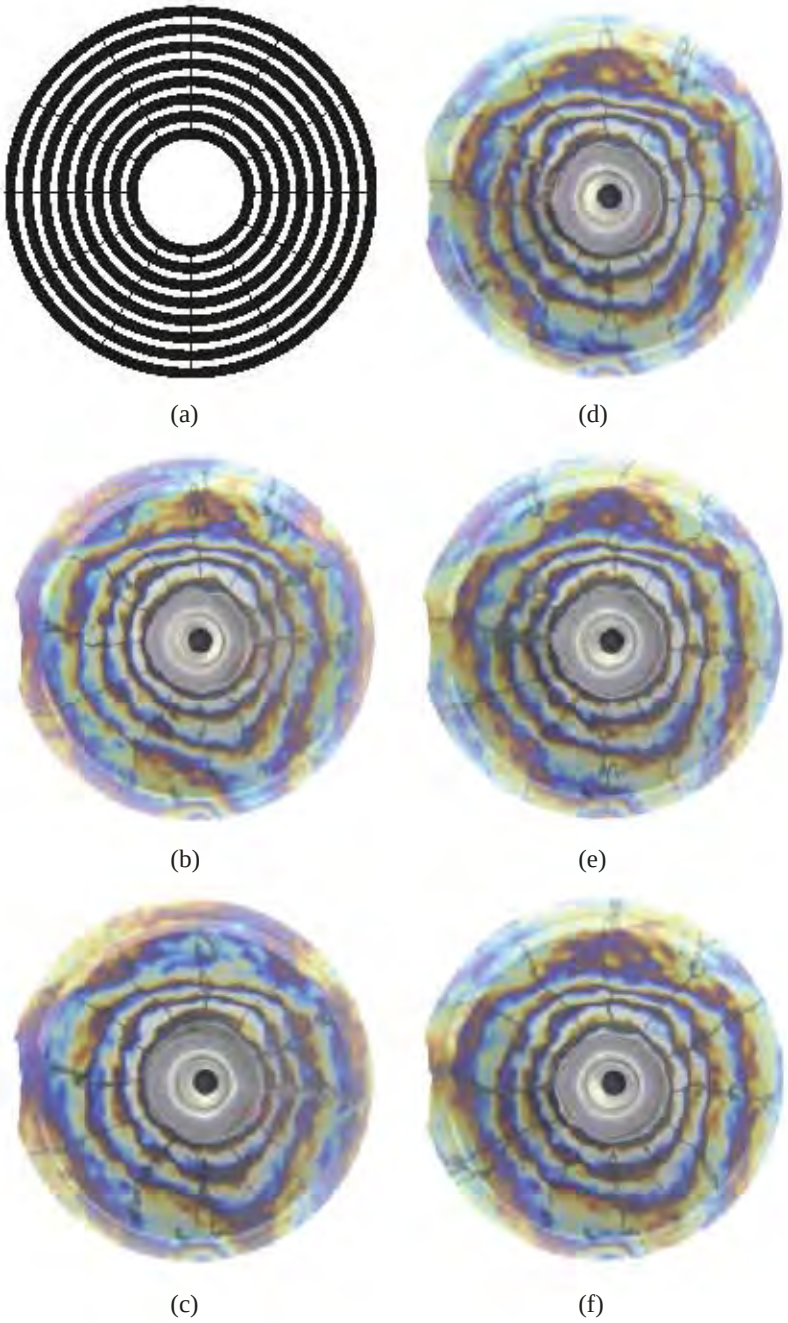


Fig. 4.7 (a) Patrón ideal de 8 anillos oscuros concéntricos con líneas radiales. (b) Imagen para pantalla con $k = -1$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.5$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (e) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (f) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

Implementando la prueba del arreglo ideal de 8 anillos oscuros concéntricos igualmente espaciados con líneas radiales, se observa en la Fig.4.7(b) el caso de la parábola $k = -1$ que el patrón observado sólo consta de 5 anillos oscuros con los anillos exterior e interior mucho más gruesos que el resto, por otro lado en la Fig.4.7(c) para el caso de $k = -1.5$ se observa un efecto similar pero el patrón consta de 4 anillos oscuros únicamente.

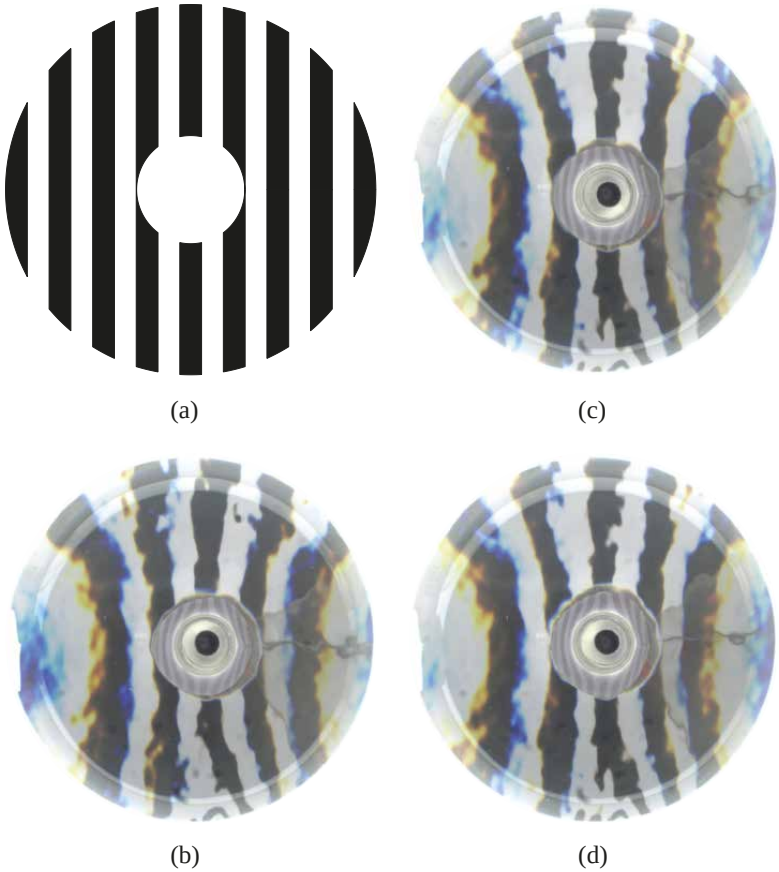


Fig. 4.8 (a) Patrón ideal de 9 franjas oscuras igualmente espaciadas. (b) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

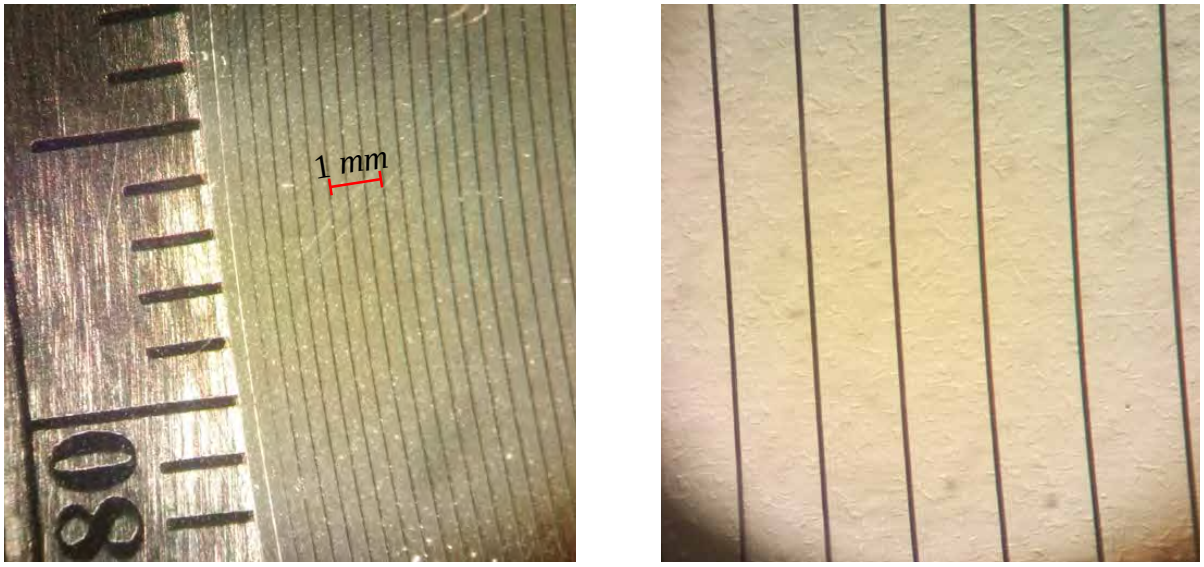
Para las constantes de conicidad intermedias presentadas en las Fig.4.7(d)(e)(f), $k = -1.2$, $k = -1.25$ y $k = -1.3$. En los tres casos se observan patrones de 4 anillos oscuros que si bien siguen aumentando de grosor conforme se alejan del centro del espejo, no hay anillos con grosores tan pronunciadamente mayores respecto del resto como en los casos $k = -1$ y $k = -1.5$. Otro aspecto a notar, es que el borde interior de la pantalla aumenta su radio conforme es más negativo el valor de k, hasta el punto que en el caso $k = -1.5$ es mucho

mayor que la imagen del cilindro.

Por otro lado, implementando ahora en la "Posición II" la prueba con las 9 franjas oscuras igualmente espaciadas, para las constantes de conicidad $k = -1.2$, $k = -1.25$ y $k = -1.3$. Al igual que en la prueba de anillos, como se presenta en la Fig.4.8 el patrón aparece incompleto observando 7 franjas oscuras con las de los extremos apenas perceptibles, notando además que la deformación de corset es menos evidente y permanece casi igual en los tres casos.

Como se observó, existeron dificultades en la prueba preliminar, debido a que al ajustar el espejo Fresnel en la "Posición I" se observaron patrones completos pero con irregularidades importantes. Por otro lado, en la "Posición II" se observan patrones más uniformes pero incompletos, esto se explica por simple geometría ya que en la parte central es donde menos difieren los espejos cóncavos de su versión Fresnel, pero al no estar en la posición adecuada para observar completamente la superficie del espejo en el CCD sólo se observa la parte central.

A pesar de las complicaciones que generó esta configuración se pudo deducir un hecho importante y es que el espejo en cuestión resulta no ser una parábola, sin embargo, esta prueba que en principio se pensaba aplicar concluyentemente resultó ser insuficiente. De aquí surge la necesidad de desarrollar una prueba con más detalle y aplicarla, por lo que en lo siguiente se hará uso de todas las herramientas antes construidas.



(a) (b)

Fig. 4.9 (a) Vista aumentada 4.6x de la superficie de espejo Fresnel. (b) Vista aumentada 18x.

4.2 Pruebas nulas para espejos tipo Fresnel

En la presente sección se harán las siguientes consideraciones, la primera es que aún queda la incógnita sobre cómo corregir los efectos de la refracción en la placa de acrílico que recubre el espejo y esto es porque se desconoce el material de que está hecho y su grosor. Otra es que como se ha venido discutiendo, un parámetro importante de un espejo Fresnel es el número de surcos que tiene, para determinar este dato se estudió a detalle la superficie del espejo Fresnel comercial bajo prueba, utilizando un Microscopio Estereoscópico Modelo YZ-6 se observaron distintas secciones del espejo, determinando que tiene una densidad aproximada de $3surcos/mm$ como se ilustra en la Fig.4.9(a), es decir, el espejo tiene aproximadamente $n = 366surcos$ a lo largo del semidiámetro $H = 122mm$ de la apertura visible de espejo.

4.2.1 Prueba tipo Fresnel por pantallas nulas considerando anillos concéntricos

Se considera el mismo patrón de 8 anillos oscuros concéntricos con líneas radiales considerado en las pruebas preliminares, implementado a las mismas constantes de conicidad. Pero cuando se calcula su pantalla nula asumiendo los parámetros anteriormente obtenidos se observa que el tamaño de la pantalla se redujo considerablemente como se observa en la Fig.4.10 para una prueba tipo Fresnel en comparación con la prueba para espejos cóncavos Fig.4.3.

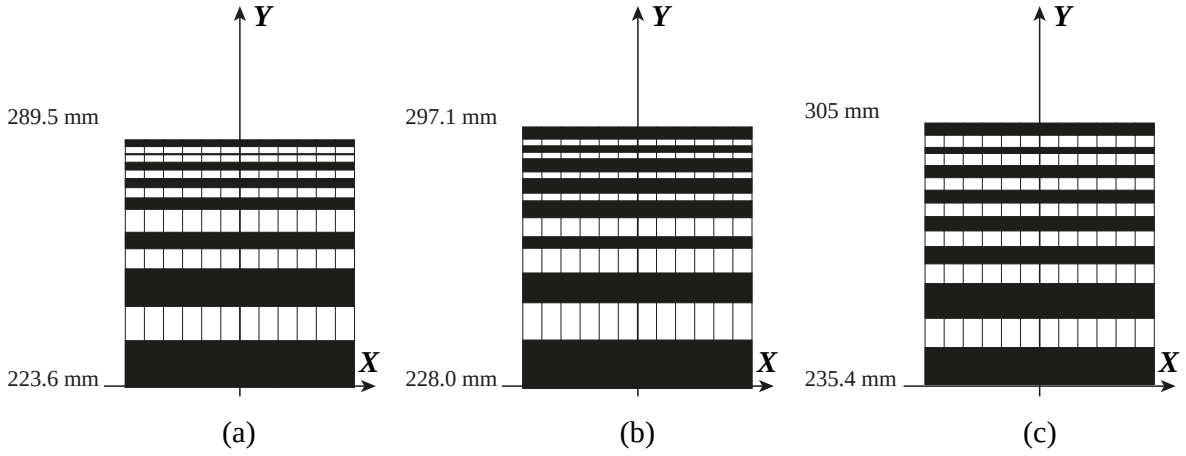


Fig. 4.10 (a) Pantalla para la parábola Fresnel $k = -1$. (b) Hipérbola Fresnel con $k = -1.25$. (c) Hipérbola Fresnel con $k = -1.5$

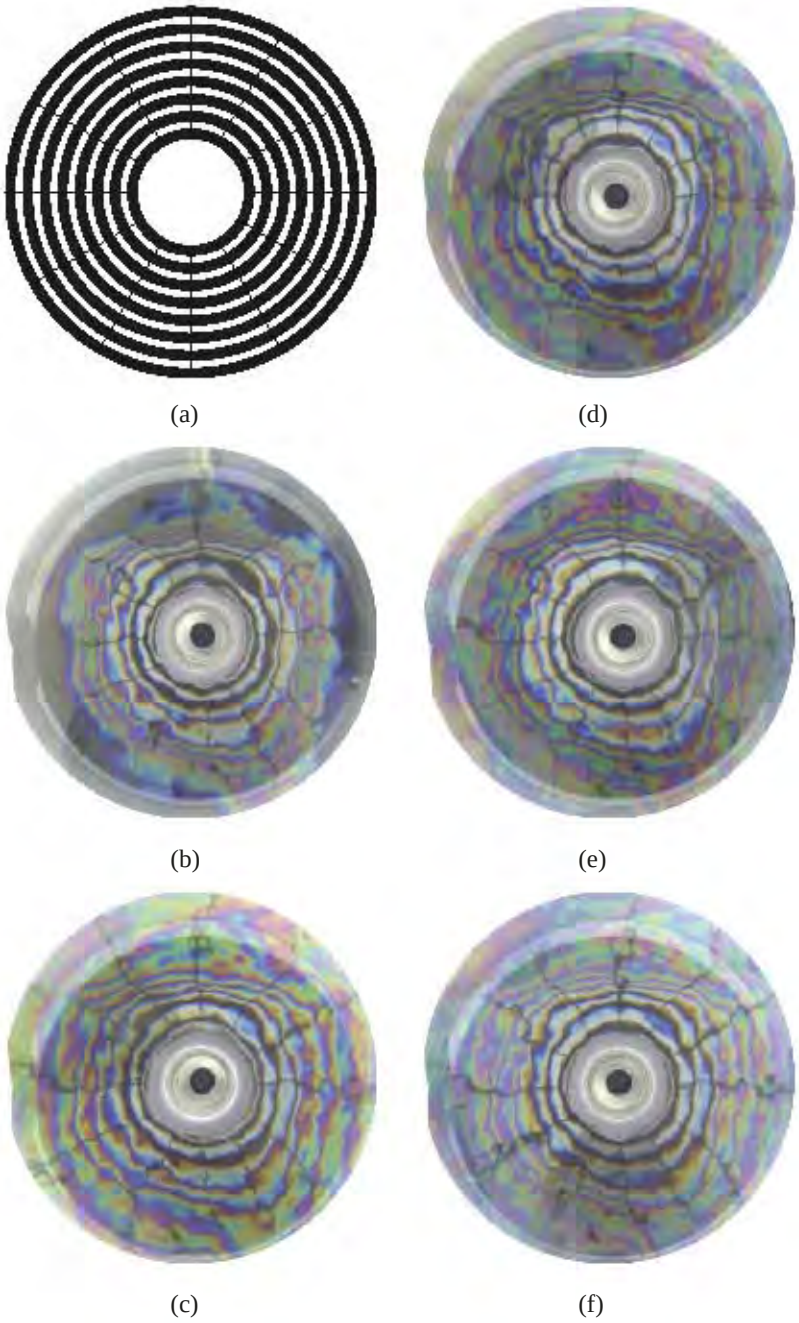


Fig. 4.11 (a) Patrón ideal de 8 anillos oscuros concéntricos con líneas radiales. (b) Imagen para pantalla con $k = -1$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.5$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (e) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (f) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

Entonces, como se observa en la Fig.4.11(b) el resultado obtenido para la prueba con $k = -1$ el patrón reflejado cubre un área circular mucho menor del patrón ideal por lo que se descarta que el espejo sea un Fresnel parabólico. Por otro lado, en los casos $k = -1.3$ y $k = -1.5$ mostrados en las Fig.4.11(f)(c) sólo se observan 7 y 6 anillos del patrón respectivamente por lo que las imágenes rebasan las dimensiones del sensor. Finalmente, en los casos para $k = -1.2$ y $k = -1.25$ mostrados en las Fig.4.11(d)(e) se observan patrones de anillos más uniformes y siguiendo las líneas radiales se cuentan los 8 anillos aunque no son tan claros sobre toda la circunferencia.

En general, los patrones observados en las pruebas calculadas para espejos tipo Fresnel resultaron más uniformes, especialmente en los casos para las constantes de conicidad $k = -1.2$ y $k = -1.25$, por lo que se podría concluir que si bien los patrones no son tan exactos se aproximan bastante a la forma del espejo bajo prueba.

4.2.2 Prueba tipo Fresnel por pantallas nulas considerando franjas rectas

A partir de lo mostrado anteriormente, se diseñaron pantallas nulas con 9 franjas mostradas anteriormente pero en su versión Fresnel que como se observa en la Fig.4.12 se reducen también las dimensiones de las pantallas en comparación con las mostradas en la Fig.4.5.

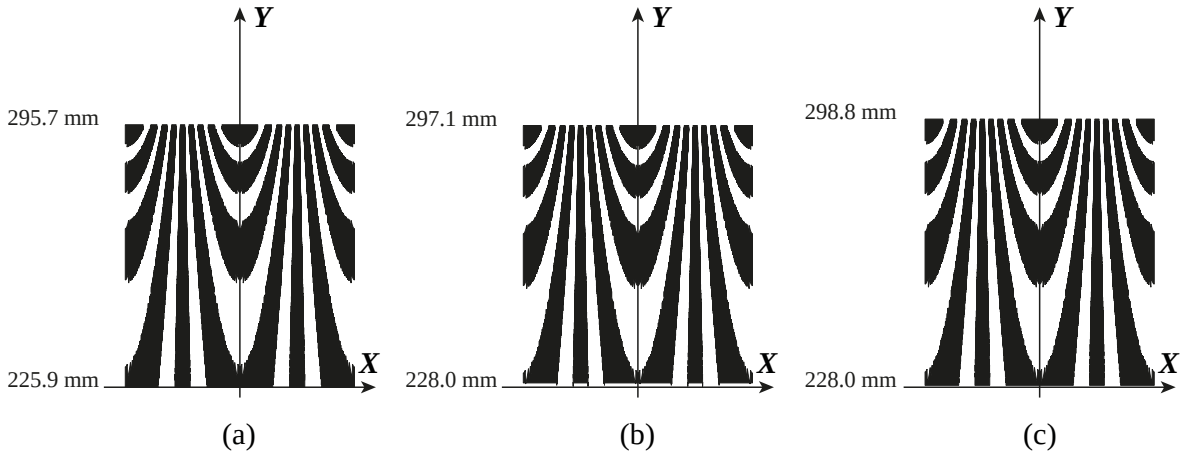


Fig. 4.12 (a) Pantalla para la parábola $k = -1$. (b) Hipérbola con $k = -1.25$. (c) Hipérbola con $k = -1.5$

Los patrones obtenidos para $k = -1.2$ y $k = -1.25$ se observan uniformes en cuanto al

grosor relativo entre cada franja y se obtuvieron las 9 franjas oscuras como se observan en la Fig.4.13(b)(c). Por otro lado, como se observa en la Fig.4.13(d) para el caso $k = -1.3$ son casi impercetibles las franjas de las orillas por lo que queda descartada esta superficie.
En conclusión, la superficie puede ser aproximada como un Fresnel cónico con constante de conicidad dentro del intervalo $k = -1.2$ y $k = -1.25$, sin embargo, el espejo no es de la calidad suficiente para asegurar su valor exacto pues no se ha modelado el efecto que tiene la capa refractora en los patrones observados.

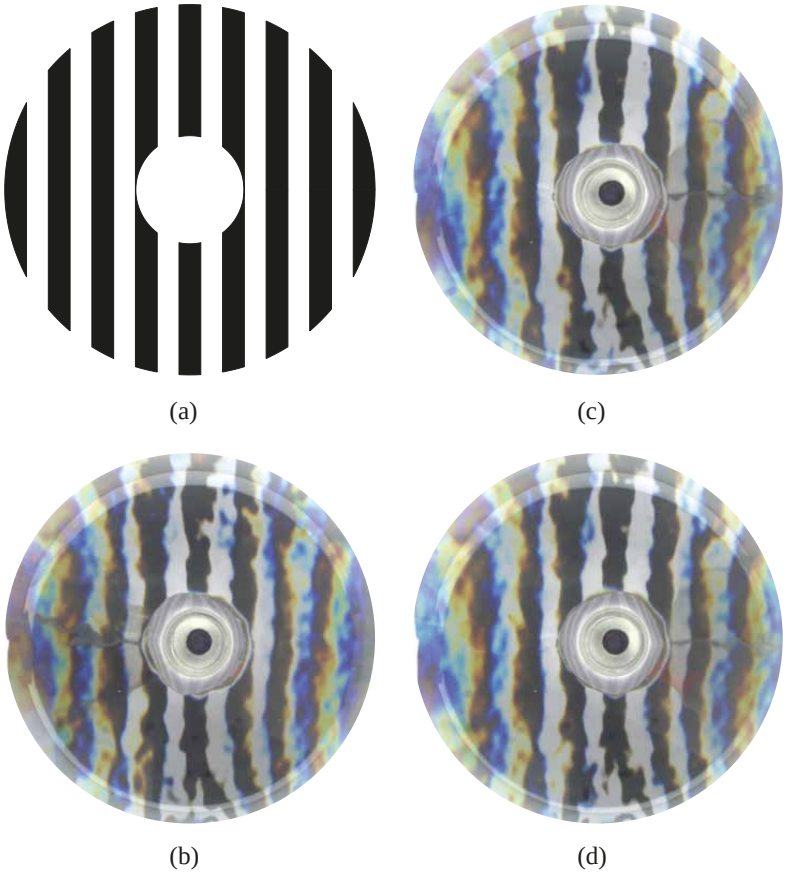


Fig. 4.13 (a) Patrón ideal de 9 franjas oscuras igualmente espaciadas. (b) Imagen para pantalla con $k = -1.2$. (c) Imagen para pantalla con $k = -1.25$. (d) Imagen para pantalla con $k = -1.3$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En el presente trabajo se discutieron formas alternativas para diseñar concentradores solares, esto fue considerando superficies cicloidales curtatas que como se observó tienen áreas de concentración extendidas, por lo que si se varían adecuadamente sus parámetros se pueden iluminar objetos que con superficies parabólicas no sería posible.
Siguiendo la misma motivación para aplicar superficies arbitrarias en el diseño de concentradores solares, se definió una función continua a trozos que es el resultado de la transformación de una curva suave a un conjunto de surcos planos. De este tipo de superficies se observa que si se construyen correctamente considerando las zonas de obstrucción del mismo espejo, se pueden llegar a diseñar concentradores tipo Fresnel con eficiencias máximas aceptables.
Por otro lado, la apropiada definición de espejos tipo Fresnel dio paso al trazo exacto de rayos considerando una fuente puntual, por lo que a partir de este resultado se logró diseñar una prueba por pantallas nulas que contemplara todos los aspectos determinantes en una superficie de este tipo, como las zonas de obstrucción o la distancia de apertura y diseño de la prueba, que como se observó en la sección anterior fue indispensable para proponer una nueva implementación a este tipo de pruebas.
Como trabajo a futuro se contempla la idea principal de comenzar a fabricar espejos Fresnel de parámetros conocidos para aplicar en ellos las pruebas descritas en este texto, ya que como se observó en la presentación de resultados se tuvieron que suponer muchos parámetros para comenzar a hacer las mediciones.
Por otro lado, en cuanto al diseño de superficies arbitrarias se prentende encontrar una función continua que logre describir por completo un espejo Fresnel, con esto se podría hacer un análisis más detallado de estas superficies y el diseño de pruebas resultaría ser menos complicado.

Bibliografía

[1] R. Almanza, A. Lentz, and G. Jiménez, "Receiver behavior in direct steam generation with parabolic toughs," **61**, 275–278 (1998).

[2] V. Flores and R. Almanza, "Direct steam generation in parabolic trough concentrators with bimetallic receivers," **29**, 645–651 (2004).

[3] R. Almanza, G. Jiménez, A. Lentz, A. Valdés, and A. Soria, "DSG Under Two-Phase and Stratified Flow in a Steel Receiver of a Parabolic Trough Collector," **124** (2002).

[4] E. Zarza, L. Valenzuela, K. Hennecke, M. Eck, and M. Eickhoff, "The DISS Project: Direct Steam Generation in Parabolic Trough Systems - Operation and Maintenance Experience and Update on Project Status," **124**, 126–133 (2002).

[5] S. Maca-García, M. Avendaño-Alejo, and L. Castañeda, "Caustics in a meridional plane produced by concave conic mirrors," J. Opt. Soc. Am. A **29**(9), 1977–1985 (2012). URL http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-9-1977.

[6] M. Avendaño-Alejo, "Caustic and wavefronts produced by arbitrary reflecting surfaces," in *Frontiers in Optics 2016*, p. JTh2A.28 (Optical Society of America, 2016). URL http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=FiO-2016-JTh2A.28.

[7] R. Pederson and E. K. May, "Flow instability during direct steam generation in a line-focus solar-collector system," **83**, 20,404 (1982).

[8] O. Goebel and K. Hennecke, "Investigation of Thermohydraulic in Parabolic Trough Absorber Tube with Direct Steam Generation (DSG)," in *Solar Thermal Concentrating Technologies*, M. Becker and M. Böhmer, eds., vol. 2, pp. 787–813 (8th International Symposium, 1997).

[9] O. Goebel, "Modelling of Two Phase Stratified and Annular Flow in Heated Horizontal Tubes," pp. 303–310, International Engineering Foundation 3rd Conference (Taylor and Francis, 1997).

[10] O. N. Stavroudis, *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics, The K-function and its Ramifications* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006).

[11] D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, "Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface," J. Opt. Soc. Am. A **25**(9), 2370–2382 (2008).

[12] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, "Refracting the k-function: Stavroudis's solution to the eikonal equation for multielement optical systems," J. Opt. Soc. Am. A **28**(6), 1312–1321 (2011).

[13] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, and L. Castañeda, "Caustics in a meridional plane produced by plano-convex conic lenses," J. Opt. Soc. Am. A **28**(12), 2619–2628 (2011).

[14] J. Castro-Ramos, M. Marciano-Melchor, M. Marcelino-Aranda, E. Román-Hernández, J. G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, R. Suárez-Xique, and J. M. Zárate-Paz, "Wavefronts, caustics, and ronchigrams of a spherical wave reflected by a spherical mirror," J. Opt. Soc. Am. A **30**(2), 177–188 (2013).

[15] M. Avendaño-Alejo, "Caustics in a meridional plane produced by plano-convex aspheric lenses," J. Opt. Soc. Am. A **30**(3), 501–508 (2013).

[16] M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and I. Moreno, "Exact wavefronts and caustic surfaces produced by planar ripple lenses," Opt. Express **23**(17), 21,637–21,649 (2015). URL http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-23-17-21637.

[17] M. Avendaño-Alejo, "Design of Fresnel Lenses by Using Arbitrary Surfaces," in *Latin America Optics and Photonics Conference*, p. LTh3C.1 (Optical Society of America, 2016). URL http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=LAOP-2016-LTh3C.1.

[18] D. F. Vanderwerf, "Approximating the Fresnel lens," Electro-ptical Systems Design **14**, 47–51 (1982).

[19] D. F. Vanderwerf, "Ghost-image analysis of Fresnel lens doublet," (1990). URL https://doi.org/10.1117/12.22674.

[20] Y. A. Dudnikov, "The design of a large-diameter Fresnel condenser from Fresnel lenses," Sov. J. Opt. Technol. **45**(5), 451–454 (1975).

[21] S. Shanmugam, "Design of a linear Fresnel lens system for solar photovoltaic electrical power source," (2001). URL https://doi.org/10.1117/12.444226.

[22] E. Lorenzo and A. Luque, "Fresnel lens analysis for solar energy applications," Appl. Opt. **20**(17), 2941–2945 (1981).

[23] R. Leutz, A. Suzuki, A. Akisawa, and T. Kashiwagi, "Design of a nonimaging Fresnel lens for solar concentrators," **65**, 379–387 (1999).

[24] M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, "Testing fast aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen," Appl. Opt. **47**(6), 849–859 (2008). URL http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-47-6-849.

[25] M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, and F. Granados-Agustín, "Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources," Appl. Opt. **43**(34), 6255–6264 (2004). URL http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-43-34-6255.

[26] R. Díaz-Uribe, R. Bolado-Gómez, M. Campos-García, and M. Avendaño-Alejo, "Medium precision optical testing of a fast concave elliptical mirror by a cylindrical null screen," (2006). URL https://doi.org/10.1117/12.668118.

[27] R. Díaz-Uribe, "Medium-precision null-screen testing of off-axis parabolic mirrors for segmented primary telescope optics: the Large Millimeter Telescope," Appl. Opt. **39**(16), 2790–2804 (2000).

[28] M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, "Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens," Appl. Opt. **45**(12), 2607–2614 (2006).

[29] D. Malacara and A. Cornejo, "Null Ronchi Test for Aspherical Surfaces," Appl. Opt. **13**(8), 1778–1780 (1974).

[30] D. M.-H. Juan Manuel Lopez-Ramirez, Daniel Malacara-Doblado, "New simple geometrical test for aspheric lenses and mirrors," Optical Engineering **39**, 39 – 39 – 6 (2000).

[31] M. Avendaño-Alejo, V. I. Moreno-Oliva, M. Campos-García, and R. Díaz-Uribe, "Quantitative evaluation of an off-axis parabolic mirror by using a tilted null screen," Appl. Opt. **48**(5), 1008–1015 (2009).

[32] M. Avendaño-Alejo, G. Santiago-Castillo, M. Campos-García, I. Moreno-Oliva, and R. Díaz-Uribe, "Null Ronchi-Hartmann test for an aspheric concave mirror," (2013).

[33] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodriguez, and O. Cardona-Nunez, "Null Hartmann and Ronchi-Hartmann tests," Appl. Opt. **29**(31), 4618–4621 (1990).

[34] A. Cornejo-Rodriguez, H. J. Caulfield, and W. Friday, "Testing of optical surfaces: a bibliography," Appl. Opt. **20**(24), 4148–4148 (1981).

[35] G. Castillo-Santiago, D. Castán-Ricaño, M. Avendaño-Alejo, L. Castañeda, and R. Díaz-Uribe, "Design of Hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a CCD sensor inside the caustic," Opt. Express **24**(17), 19,405–19,416 (2016).

[36] D. Castán-Ricaño, F. S. Granados-Agustín, E. Percino-Zacarías, and A. Cornejo-Rodríguez, "Evaluation of a plano-convex aspherical lens using a point diffraction interferometer." in *Optical Design and Fabrication 2017 (Freeform, IODC, OFT)*, p. JTu5A.30 (Optical Society of America, 2017).

[37] N. Piskunov, *Cálculo Diferencial e Integral*, tercera ed. (Mir Moscú, 1977).

[38] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, segunda ed. (Reverté, S.A., México, D.F., 1996).

[39] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, N. Qureshi, L. Castañeda, and C. L. Ordóñez-Romero, "Null Ronchi-Hartmann test for a lens," Opt. Express **18**(20), 21,131–21,137 (2010). URL http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-20-21131.