



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“LA MATRIZ DE DISPERSIÓN S PARA
EL MODELO SIMPLÉCTICO DE
LA MOLÉCULA NUCLEAR EN
UNA DIMENSIÓN”

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A :
ENRIQUE LOZANO OCHOA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

264073



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "La Matriz de Dispersión S para el Modelo Simpléctico de la Molécula Nuclear en una Dimensión"

realizado por LOZANO OCHOA ENRIQUE

con número de cuenta 8934383-2 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

Propietario

DR. ARTURO MENCHACA ROCHA

Propietario

DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

Suplente

DR. ROELOF BIJKER BIJKER

Suplente

DR. EFRAIN CHAVEZ LOMELI

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A mi madre Rosa Elena por el gran amor que sin límites me entrega.
A mi padre Roberto por su ejemplo que me enseñó lo que significa sacrificarse por amor.

A la familia Toda por ser mi refugio e inspiración

Agradesco

Al Dr. Hess sus enseñanzas, sus consejos y su paciencia.

A los Doctores Arturo Menchaca, Jorge Hirsch, Roelof Bijker y Efaín Chávez por las valiosas críticas que hicieron a esta tesis.

Un agradecimiento especial para el buen amigo Alfonso por su ayuda desinteresada.

A todas las personas que me brindan su amistad en los buenos y malos momentos.

Finalmente a ese concepto abstracto y encarnado que es el pueblo de México por hacer posible la educación pública y la investigación científica.

La Matriz de dispersión S para el Modelo
Simpléctico de la Molécula Nuclear en una
Dimensión

Enrique Lozano Ochoa

Director de tesis:

Dr. Peter Otto Hess Bechstedt

25 junio 1998

Contenido

Introducción	i
1 Conceptos Básicos de la Teoría de Dispersión	1
1.1 El Caso Clásico	2
1.2 El Caso Cuántico	7
1.2.1 Aproximación de Born	11
1.2.2 Teoría de la Dispersión por Ondas Parciales	14
1.2.3 Dispersión en un Campo Coulombiano	17
1.2.4 Aspectos Formales de la Teoría de la Dispersión	21
2 El Formalismo de la Matriz S	27
2.1 Un Ejemplo Unidimensional	27
2.2 Consideraciones Generales	30
2.2.1 El Formalismo de la Matriz R	34
3 Las Moléculas Nucleares y el Modelo Simpléctico en una Dimensión	43
3.1 Modelo Simpléctico del Núcleo en una Dimensión	44
3.1.1 Cálculo de los Elementos de Matriz del Hamiltoniano	47
3.1.2 Modelo Simpléctico de la Molécula Nuclear	48
4 Sección de Dispersión para el Modelo Simpléctico	55
4.1 El Modelo Simpléctico en una Dimensión	55
4.2 La Matriz S para una Base no Ortonormal	63
4.3 Cálculo de la Sección de Dispersión	66

Conclusiones	73
Ápndice	74
A Función Hipergeométrica Confluente	75
Referencias	79

Introducción

Aún cuando nuestra actual teoría de partículas elementales nos provee de un marco conceptual para entender las principales propiedades de la interacción nuclear, resulta insatisfactoria pues la mayoría de los problemas son prácticamente imposibles de resolver de primeros principios. Por este motivo en la física nuclear se han hecho muy diversos modelos, con la intención, de dar cuenta de la vasta fenomenología del núcleo atómico. Entre los modelos propuestos destacan los modelos colectivos y los modelos de capas que siguen en apariencia dos esquemas distintos para abordar el mismo problema.

En la presente tesis la atención estará centrada en un modelo de capas, es decir, la idea física esencial consiste en suponer un potencial promedio generado por los nucleones que constituyen el núcleo; y a su vez estos nucleones se mueven en el potencial promedio como si fueran partículas independientes.

El potencial promedio que de manera inmediata se sugiere es el oscilador armónico que posee una estructura algebraica bien conocida gracias al trabajo pionero desarrollado por Elliott ref. [1]. Con este trabajo se abrieron las puertas a los modelos algebraicos que describen los fenómenos colectivos que se presentan en el núcleo. Dentro de este tipo de modelos algebraicos encontramos el modelo simpléctico ref. [2]. Este modelo ha sido utilizado con éxito para describir iones pesados. Recientemente se hizo una extensión al modelo simpléctico del núcleo ref. [3] con la intención que incluya a un metaestado muy interesante que se presenta en la dispersión de iones pesados y que se conoce como moléculas nucleares. El trabajo que se presenta en esta tesis consiste

en un cálculo numérico para obtener la sección diferencial de dispersión para el modelo simpléctico de la molécula nuclear en una dimensión. Este modelo unidimensional surge debido a la gran complejidad que representa un cálculo numérico realista. Es importante mencionar que las características principales del modelo tridimensional se encuentran ya presentes en el caso unidimensional, por este motivo se espera que los resultados esenciales puedan ser apreciados en el caso unidimensional. El esquema que se sigue en esta tesis consiste en dos partes: la primera es una exposición de los elementos teóricos necesarios y la segunda es la aplicación de la teoría a nuestro problema en cuestión. En otras palabras, en el capítulo 1 se hace una revisión de la teoría de dispersión, y temas que nos serán de utilidad. En el segundo capítulo se presenta el formalismo de la matriz S (la cual nos permite calcular la sección eficaz), el tercero es una presentación del modelo y finalmente el cuarto capítulo es la aplicación del formalismo de la matriz S al modelo simpléctico de la molécula nuclear en una dimensión.

Capítulo 1

Conceptos Básicos de la Teoría de Dispersión

Este primer capítulo consiste en una revisión somera a las ideas fundamentales de la teoría de dispersión refs. [4], [5] y [6]. El capítulo está dividido en dos secciones; en la primera se presenta la teoría clásica de dispersión y en la segunda sección se presenta la teoría cuántica de la dispersión.

Dispersión

Se llama proceso de dispersión a la desviación de las partículas respecto de la dirección inicial del movimiento provocada por la interacción con un cierto sistema que se llama dispersor o blanco. La teoría de dispersión surge en la mecánica clásica como consecuencia de la imposibilidad experimental de llevar a cabo el programa de la mecánica newtoniana, es decir, la imposibilidad experimental de seguir en todo momento a cada una de las partículas incidentes. En las siguientes líneas se presentarán los fundamentos de la teoría clásica de la dispersión, posteriormente se introducirá la importante teoría cuántica de la dispersión.

1.1 El Caso Clásico

Como es costumbre se hará uso de las leyes de conservación del momento y la energía para obtener resultados muy generales que no dependen del tipo de interacción en cuestión.

Una hipótesis que se considerará válida es el principio de superposición, es decir, la interacción se puede entender como la dispersión del blanco con cada uno de los elementos del haz (los elementos del haz no interaccionan entre si, lo cual se consigue experimentalmente si tenemos un haz poco denso).

Se examinará el caso de una dispersión elástica, que se define como aquella dispersión, en la cual el estado interno del haz y del sistema dispersor no varía. De esta manera, cuando se aplique el principio de conservación de la energía no se tomará en cuenta la energía interna del haz, ni la energía interna del sistema dispersor.

Teniendo presente lo anterior consideremos dos partículas donde una, con masa m_1 , se encuentra en reposo en el sistema del laboratorio antes de la interacción, mientras que la otra con masa m_2 tiene una velocidad inicial \mathbf{v} . La lagrangiana de este sistema es por tanto:

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (1.1)$$

la distancia relativa se define como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (1.2)$$

y la coordenada centro de masa se define como:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1} m_i} \quad (1.3)$$

que en este caso $i = 1, 2..$

Si se coloca el origen en el centro de masas ($\mathbf{R}=\mathbf{0}$) y se sustituye (1.2) en (1.3) se tiene:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2 \mathbf{r}}{(m_2 + m_1)} \quad , \quad (1.4)$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{r}}{(m_2 + m_1)} \quad , \quad (1.5)$$

sustituyendo (1.4) y (1.5) en (1.1) se obtiene finalmente:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}) \quad , \quad (1.6)$$

donde m es la masa reducida $m = \frac{m_2 m_1}{m_2 + m_1}$.

Si se aplica una transformación de coordenadas galileanas entre el sistema de referencia del laboratorio y el sistema de referencia del centro de masa, y tomando en consideración las leyes de conservación del momento y la energía es fácil demostrar la siguiente relación entre los ángulos de dispersión:

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_{CM}}{\cos \theta_{CM} + m_2/m_1} \quad (1.7)$$

donde θ_{CM} es el ángulo con respecto al centro de masa del sistema y θ_L es el ángulo con respecto al laboratorio (ver figuras 1.1 y 1.2).

En la ecuación (1.7) se observa que si la partícula que estaba en reposo con respecto al laboratorio es mucho más pesada que la partícula incidente entonces $\theta_L \simeq \theta_{CM}$.

Es claro que en todos los demás casos $\theta_L \neq \theta_{CM}$ y se le puede transferir gran cantidad de energía y momento al blanco como es en la mayoría de los casos, por ejemplo si $m_2 = m_1$ la dispersión hacia atrás en el sistema centro de masa ($\theta_{cm} = 180^\circ$) es equivalente a una desviación de $\theta = 90^\circ$ en el laboratorio.

En las líneas siguientes se dará por entendido que nos encontramos en el sistema del centro de masa.

Con lo anterior el problema de dos partículas se transforma en el problema de la desviación de una partícula de masa m en un campo $U(\mathbf{r})$, situado en el centro de inercia de la partícula.

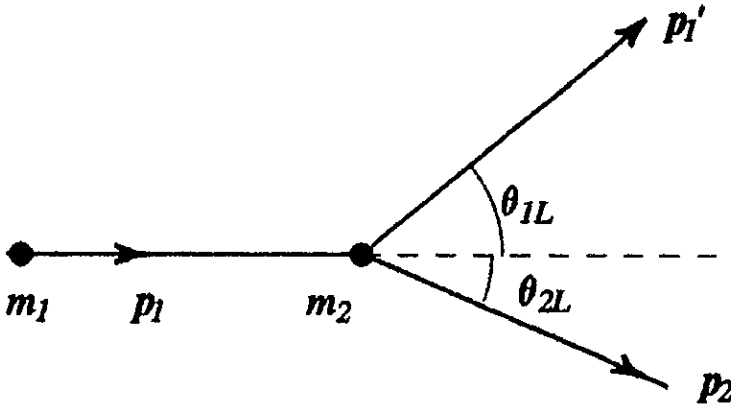


Figura 1.1: Dispersión elástica entre dos partículas observada desde el sistema del laboratorio.

Es sabido que en un campo central la trayectoria es simétrica respecto a la recta que une el centro con el punto de la órbita más próxima (fig. 1.3).

Es decir, las asíntotas de la órbita cortan dicha recta formando ángulos iguales. De la geometría de la figura 1.3 se tiene:

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad . \quad (1.8)$$

Por lo que se sabe del movimiento de una partícula en un campo central el ángulo φ_0 se determina por la siguiente expresión:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M}{r^2} \left[2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr \quad , \quad (1.9)$$

donde $r_{\min} \equiv$ es la distancia más próxima al centro y $M \equiv$ la magnitud del momento angular. Además r_{\min} posee la propiedad de ser la raíz de la expresión que se encuentra dentro del radical.

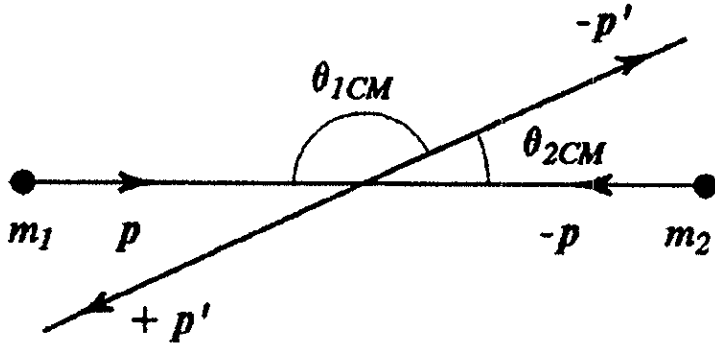


Figura 1.2: Dispersión elástica entre dos partículas observada desde el centro de masa del sistema.

Definiendo v_∞ como la velocidad de la partícula en el infinito y ρ como la distancia más próxima a la cual pasaría la partícula del centro si no existiera el campo de fuerza (ver fig. 1.3), a ρ se le conoce como el parámetro de impacto.

Con las definiciones anteriores, obtenemos las siguientes expresiones para las leyes de conservación de la energía y del momento orbital respectivamente:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad ; \quad M = m\rho v_\infty$$

por lo cual la ecuación (1.9) se escribe:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \left[1 - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr \quad (1.10)$$

De las ecuaciones (1.8) y (1.10) se puede conocer χ en función de ρ si la relación es biunívoca ρ en función de χ (cuando menos en un

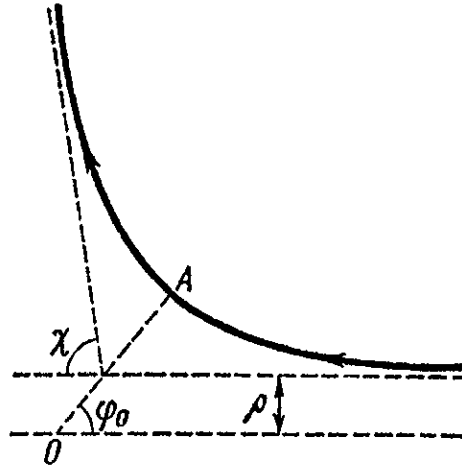


Figura 1.3: Trayectoria clásica de una partícula en un campo central.

pequeño intervalo de valores de χ y ρ).

Ahora se ve como este modelo clásico se relaciona con el experimento, donde se trabaja con un haz de partículas iguales que son preparadas con una velocidad v_∞ . Las partículas tienen distintos parámetros de impacto y por consiguiente, se dispersan formando ángulos χ distintos.

Sea dN el número de partículas que se dispersan en una unidad de tiempo formando los ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$. Se ha de notar que dN depende de la densidad del haz incidente, y esto no caracteriza el proceso de dispersión blanco-partícula incidente. Por lo cual conviene obtener el cociente de dN con n , donde n se define como el número de partículas que en la unidad de tiempo pasan por unidad de superficie de la sección transversal del haz (se supone que la sección transversal del aparato de medición es pequeña para garantizar la homogeneidad del haz). Este cociente tiene unidades de área y se le conoce como sección eficaz de dispersión $d\sigma = dN/n$, este cociente

depende por construcción del campo dispersor y a su vez es lo que se mide en el laboratorio.

Se supondrá una relación biunívoca entre ρ y χ , por lo cual, dentro del intervalo de ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$ solamente se dispersan aquellas partículas cuyo parámetro de impacto viene determinado por el intervalo entre $\rho(\chi)$ y $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. El número de estas partículas es igual al producto de n por el área del anillo comprendido entre las circunferencias cuyos radios son ρ y $\rho + d\rho$, es decir, $dN = 2\pi\rho d\rho \times n$. Por lo tanto, la sección eficaz es:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad . \quad (1.11)$$

Si tomamos en cuenta que $d\rho/d\chi$ puede ser negativa y $d\sigma$ es positiva escribimos la ec. (1.11) como:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \quad . \quad (1.12)$$

Se podría pensar que esta fórmula es muy particular ya que se refiere a un elemento de ángulo plano $d\chi$, esto se soluciona de inmediato pues el ángulo sólido comprendido entre los conos con ángulos de apertura χ y $\chi + d\chi$ es $d\Omega = 2\pi\text{sen}\chi d\chi$. Por lo tanto, la ec. (1.12) se escribe finalmente como:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\text{sen}(\chi)} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (1.13)$$

Recordando que estas expresiones se refieren al sistema del centro de masa y gracias a la ec. (1.7) es posible regresar al sistema del laboratorio.

1.2 El Caso Cuántico

El caso cuántico es esencialmente distinto al caso clásico, pues no existe el concepto de parámetro de choque (suponiendo que la velocidad del haz está determinada), por lo cual es necesario cambiar el

planteamiento del problema y aún cuando en algunas partes matemáticamente sea similar, conceptualmente son distintos, como se tendrá oportunidad de ver.

Generalmente la situación experimental de un proceso dispersivo consiste en un haz de partículas con momento y energía conocida, donde se puede despreciar las interacciones entre las partículas del haz. Este haz se hace incidir sobre un blanco con estructura conocida, como pueden ser: una placa monomolecular depositada sobre una base adecuada, un gas, un cristal, etc. Otra condición experimental, aunque no tan común como las anteriores, es tener al blanco inicialmente en reposo con respecto al sistema del laboratorio.

La dispersión de este flujo de partículas está caracterizado por la sección eficaz elemental σ diferencial. Esta magnitud se define como el cociente del número de partículas dN_{dis} dispersadas por unidad de tiempo en el ángulo sólido $d\Omega$ a la densidad de flujo J_{inc} de las partículas incidentes, es decir, la sección eficaz diferencial se define por la relación:

$$d\sigma = \frac{dN_{dis}(\theta, \phi)}{J_{inc}} \quad (1.14)$$

donde los ángulos θ y ϕ determinan la dirección del movimiento de las partículas dispersadas. El eje está dirigido en el sentido del movimiento de las partículas dispersadas, es decir, el eje z está dirigido en el sentido del movimiento de las partículas incidentes.

Es conveniente representar a $dN_{dis}(\theta, \phi)$ en la siguiente forma:

$$dN_{dis}(\theta, \phi) = J_{dis}(\theta, \phi) ds \quad (1.15)$$

donde $J_{dis}(\theta, \phi)$ es la densidad de flujo de partículas dispersadas a grandes distancias del centro dispersor, ds es un elemento de área perpendicular al vector de posición, vector cuyo origen coincide con el centro dispersor y forma los ángulos θ y ϕ respecto de los ejes de coordenadas adoptados. La magnitud ds está ligada con el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ por la igualdad:

$$ds = r^2 d\Omega \quad (1.16)$$

La sección eficaz diferencial se define por la fórmula:

$$d\sigma = \frac{J_{dis}}{J_{inc}} ds \quad (1.17)$$

En la teoría clásica se tiene una fórmula matemáticamente similar a la anterior, la diferencia reside en que J_{dis} y J_{inc} son las densidades del flujo de probabilidad.

Siendo congruentes con la elección del sistema de coordenadas, supongamos que mandamos nuestro haz en la dirección del eje z y colocamos el centro dispersor en el origen de coordenadas, en este caso, es de esperarse que la ecuación de Schrödinger en la región asintótica se escriba como la suma de una onda plana viajando en la dirección z y una onda pseudoesférica divergente y centrada en el origen

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.18)$$

Donde se espera que $f(\theta, \varphi)$ corresponda a la sección eficaz de dispersión. Para demostrar lo anterior se procederá de la siguiente manera. Escribiendo la ecuación de Schrödinger de la siguiente forma:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = \frac{2mU}{\hbar^2} \psi \quad (1.19)$$

donde $k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$; $m \equiv$ masa ; $E \equiv$ la energía, ambas cantidades de la partícula que se dispersa.

La solución de (1.19) se obtiene con la función de Green:

$$\psi = \psi_0 + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{k^2}{E} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV' \quad (1.20)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_0 = 0$$

donde ψ_0 evidentemente tiene la forma de una onda plana como e^{ikz} y $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') e^{ik \cdot (\mathbf{r}'' - \mathbf{r})} dV''}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.21)$$

Por lo cual la ec.(1.20) se escribe como:

$$\psi = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV'. \quad (1.22)$$

Hasta aquí la solución es exacta, ahora se escribirá la ec. (1.22) para la región asintótica. La región asintótica se define como aquellas \mathbf{r} tales que son mucho mayores que el radio R , donde R es la región de interacción, en otras palabras, R es la región en la cual la integral de la ec.(1.22) difiere apreciablemente de cero y da la contribución principal al valor de la integral. Sea pues:

$$R \ll |\mathbf{r}|$$

Tales condiciones siempre existen para una disminución suficientemente rápida del potencial U . Ahora se calculará de manera aproximada la integral que aparece en la ec. (1.22), para ello se define a \mathbf{r} tal que $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$.

Desarrollando en serie $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ a primer orden se obtiene:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = [(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2]^{\frac{1}{2}} = (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \approx r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}$$

La cual al sustituir en la ec. (1.22) y desarrollar se tiene:

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ik|\mathbf{r}|}}{2\pi\hbar^2 r} \int e^{-ik\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV' \quad (1.23)$$

donde $k = kr/r$ la dirección de k es la dirección de propagación de una onda esférica divergente.

Por comparación directa con (1.18) se obtiene:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV' \quad (1.24)$$

Según la ec. (1.24) la amplitud de dispersión se expresa en términos de la función de onda, la cual es casi siempre desconocida. Por este motivo se usan extensamente diversos métodos de aproximación aquí se abordará tan sólo la aproximación de Born y un método exacto conocido con el nombre de Corrimiento de Fases o de Onda Parciales.

1.2.1 Aproximación de Born

La hipótesis básica de este método consiste en considerar a la energía potencial de interacción pequeña, por lo que es posible considerarla como una pequeña perturbación con respecto al movimiento de la partícula libre. Esta hipótesis permite decir que el movimiento inicial de las partículas se ve poco alterado por la presencia de otra partícula. Si la energía potencial es una perturbación pequeña, se puede admitir que el movimiento inicial de la partícula cambia relativamente poco, y la ecuación (1.23) se puede resolver por aproximaciones sucesivas. Por ejemplo, a orden cero no hay energía potencial por lo que:

$$\psi_0 = e^{ikz} = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \quad (1.25)$$

donde $\mathbf{k}_0 = kn_0$ es el versor del eje z. La aproximación a primer orden se obtiene sustituyendo (1.25) en (1.23) con lo cual se obtiene:

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ik|\mathbf{r}|}}{2\pi\hbar^2 r} \int e^{ikz - ik \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') dV' \quad (1.26)$$

En estas aproximaciones la amplitud de dispersión es:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV' \quad (1.27)$$

Donde se ha introducido el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$$

$$|\mathbf{q}| = q |n - n_0| = 2q \text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{2mV}{\hbar^2} \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

Al vector \mathbf{q} se le conoce como vector de colisión.

Suponiendo que el potencial tiene una dependencia funcional $U(|\mathbf{r}|)$ por lo cual la ec. (1.27) se puede integrar respecto a los ángulos:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|) r'^2 dr' \int_0^\pi e^{iqr' \cos \theta'} \text{sen} \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|) \frac{\text{sen} q r'}{q r'} r'^2 dr \end{aligned}$$

y como:

$$d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

se tiene para la sección eficaz de dispersión en primer orden

$$d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$d\sigma = \frac{4m^2}{\hbar^4} \left| \int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|) \frac{\text{sen}qr'}{qr'} r'^2 dr' \right|^2 d\Omega \quad (1.28)$$

La ecuación anterior es conocida como aproximación de Born y es usada con frecuencia en la física nuclear (de hecho aquí tendremos la oportunidad de utilizarla).

Para valores pequeños del ángulo de dispersión $\text{sen}qr \approx qr$, por lo cual la ec.(1.28) se escribe como:

$$d\sigma = \frac{4m^2}{\hbar^4} \left| \int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|) r'^2 dr' \right|^2 d\Omega,$$

cuya interpretación física es que la sección eficaz resulta independiente de la velocidad de la partícula.

La ec.(1.28) se obtiene al aplicar la teoría de perturbaciones a primer orden. Por lo cual la teoría de perturbaciones indica la aplicabilidad de la ec. (1.28). Es decir, debe cumplirse

$$|\psi_1| \ll |\psi_0|$$

donde ψ_1 es la corrección en primer orden a la función de onda

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') dV' \right| \ll |e^{ikz}|$$

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikz'} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') dV' \right| \ll 1$$

Por las características del problema se puede garantizar que $\psi_1(r)$ disminuye cuando $|r|$ crece, por lo tanto, basta considerar que se cumpla en el origen de coordenadas:

$$|\psi_1(0)| = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ik|z+r'|}}{|\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') dV' \right| \ll 1 \quad (1.29)$$

Al considerar las condiciones extremas cuando $kR \ll 1$, donde R es radio de interacción efectivo y cuando $1 \ll kR$ se presentan dos casos.

El primero corresponde al caso:

$$E \ll \frac{\hbar^2}{mR^2}$$

que al ser sustituido en (1.29) se tiene $e^{ik|z+r'|} \approx 1$, por lo cual:

$$\frac{m}{\hbar^2} \left| \int \frac{U(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|} dV' \right| < \frac{m}{\hbar^2} \int \frac{|U(\mathbf{r}')|}{|\mathbf{r}'|} dV' \approx |U_0| R^2 \frac{m}{\hbar^2} \ll 1 \quad (1.30)$$

Donde U_0 es el valor medio de la energía de interacción en el radio R . Reescribiendo la ec. (1.30) se tiene:

$$|U_0| \ll \frac{\hbar^2}{R^2 m}$$

En el segundo caso cuando $kR \gg 1$ que corresponde a:

$$E \gg \frac{\hbar^2}{R^2 m}$$

En la región de aplicabilidad de la fórmula de Born el factor exponencial de (1.29) oscila muy rápidamente, lo que conduce a una disminución del valor de la integral. Esto permite determinar un valor aproximado de la ec. (1.29) si se procede de la siguiente manera:

$$|\psi_1(0)| = \frac{m}{2\pi\hbar^2} |U_0| \left| \int \frac{e^{ik(z+r')}}{|\mathbf{r}'|} dV' \right|$$

$$|\psi_1(0)| = \frac{m}{\hbar^2} |U_0| \left| \int_0^R \int_0^\pi \frac{e^{ikr'(1+\cos\vartheta)}}{|\mathbf{r}'|} \text{sen}\vartheta d\vartheta \mathbf{r}' dr' \right|$$

$$|\psi_1(0)| = \frac{m}{\hbar^2} |U_0| \left| \int_0^R \int_0^\pi (1 - e^{2ikr'}) d\mathbf{r}' \right| \approx \frac{m}{\hbar^2 k} |U_0| \ll 1 \quad (1.31)$$

Se ha omitido la integral de $e^{2ikr'}$, puesto que es una cantidad que oscila y es pequeña frente a la integral no oscilante. La última expresión de la ec. (1.31) se puede reescribir como:

$$\frac{R}{\hbar\nu} |U_0|.$$

De aquí que la aproximación de Born es válida para partículas que tengan una energía tanto mayor, cuando mayor sea el producto $U_0 R$ determinado por las propiedades del blanco.

1.2.2 Teoría de la Dispersión por Ondas Parciales

Este método cuando es aplicable da resultados exactos. Si bien se obtienen series infinitas que por lo general complican su manejo.

Admitiendo que el movimiento de la partícula dispersada está descrita por una función de onda esférica divergente y que el potencial tiene simetría esférica. Entonces el problema consiste en escribir la solución general de la ecuación Schrödinger en la forma de la ecuación (1.18). La solución general de la ec. de Schrödinger en un campo central (solución que no depende del ángulo φ) se puede escribir como:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (1.32)$$

Donde R_l son las soluciones a la ec. radial de Schrödinger. Cada término de la serie se le conoce como onda parcial l -enésima lejos del centro de fuerza, la forma asintótica de la ecuación radial R_l es:

$$R_l = B_l \frac{\text{sen}(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l)}{kr}$$

$$R_l = B_l \frac{\exp\left[i\left(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l\right)\right] - \exp\left[-i\left(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l\right)\right]}{2ikr}$$

Si $U(r) = 0 \forall r \implies \delta_l = 0 \forall l = 0$

Por lo cual, la ecuación (1.32) se escribe:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\exp \left[i \left(kr + \delta_l - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr + \delta_l - \frac{1}{2} \pi l \right) \right]}{2i kr} P_l(\cos \theta) \quad (1.33)$$

Encontraremos la relación que debe existir entre los desfases δ_l , los coeficientes C_l y $f(\theta)$ para poder igualar (1.18) y (1.32). La manera más fácil de hacerlo consiste en desarrollar (1.18) en términos de polinomios de Legendre y escribiéndolo por partes

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) G_l(r) \quad (1.34)$$

Determinando ahora las funciones $G_l(r)$. Para ello se utilizan las propiedades de ortonormalidad de polinomios de Legendre es decir multiplicando la ec. (1.34) por $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando de $-\pi$ a π con lo se obtiene:

$$\frac{1}{2i^l} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = G_l(r) \quad (1.35)$$

Integrando por partes el primer miembro se tiene:

$$G_l(r) = \frac{i^{-1}}{2i kr} e^{ikrx} P_l(x) \Big|_{x=-1}^{x=1} + \text{términos del orden de } r^{-2}$$

y como $P_l(x) = 1$ y $P_l(-1) = (-1)^l$ se obtiene finalmente para:

$$G_l(r) \text{ con } r \rightarrow \infty$$

$$G_l(r) = \frac{\text{sen}(kr - \frac{1}{2} \pi l)}{kr}$$

Por lo cual la ec.(1.34) para grandes distancias es:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) \frac{\text{sen}(kr - \frac{1}{2} \pi l)}{kr} \quad (1.36)$$

Ahora se escribirá con la misma idea a $f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l P_l(\cos \theta) \quad (1.37)$$

Si a la ec.(1.37) se multiplica por la onda esférica saliente y se le suma (1.36) se obtiene la función de onda. Imponiendo la igualdad entre las dos formas de escribir la función de onda se llega a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \left[i^l (2l+1) \frac{\exp[i(kr - \frac{1}{2}\pi l)] - \exp[-i(kr - \frac{1}{2}\pi l)]}{2ikr} + D_l \frac{e^{ikr}}{k} \right] P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\exp[i(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l)] - \exp[-i(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l)]}{2ikr} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Para que la ec. anterior se cumpla para todo valor de r es necesario que cada uno de los coeficientes de $P_l(\cos \theta)$ en cada miembro sean iguales. Imponiendo esta condición se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left[i^l (2l+1) \frac{\exp[i(kr - \frac{1}{2}\pi l)] - \exp[-i(kr - \frac{1}{2}\pi l)]}{2ikr} + D_l \frac{e^{ikr}}{k} \right] \\ &= C_l \frac{\exp[i(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l)] - \exp[-i(kr + \delta_l - \frac{1}{2}\pi l)]}{2ikr} \end{aligned}$$

Por la propiedad de ortogonalidad de las funciones exponenciales se puede afirmar que: si la relación anterior se cumpla para todo r los coeficientes de las exponenciales con el mismo argumento deben ser iguales, por lo cual:

$$C_l = i^l (2l+1) \exp(-i\delta_l)$$

$$C_l \exp(i\delta_l) = i^l (2l+1) + 2ik D_l \exp\left(\frac{1}{2}i\pi l\right)$$

Despejando de aquí D_l y sustituyéndolo en (1.37) se obtiene la expresión para la amplitud de dispersión:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(2i\delta_l) - 1] P_l(\cos \theta) \quad (1.38)$$

La sección diferencial de dispersión será:

$$d\sigma = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(2i\delta_l) - 1] P_l(\cos\theta) \right|^2 d\Omega \quad (1.39)$$

Realizando la integral y considerando las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se obtiene de manera inmediata:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.40)$$

De este modo se completa el esquema antes propuesto, el cual consiste en resolver la ecuación de Schrödinger en un campo de fuerza para una partícula, determinar la forma asintótica y por comparación, encontrar δ_l , y a partir de éste encontrar la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total de dispersión.

Para que la ec. (1.39) converja es necesario que $U(|\mathbf{r}|)$ disminuya en el infinito más rápidamente que r^{-n} donde $n \geq 2$. Además, la serie que da la ec. (1.40) diverge en $\theta = 0$, si U a grandes distancias tiene la forma r^{-n} donde $n \leq 3$. Cuando $\mathbf{r} \rightarrow 0$, $U(|\mathbf{r}|)$ debe crecer más lentamente que r^{-2} .

1.2.3 Dispersión en un Campo Coulombiano

Sea r la distancia mutua entre dos partículas de carga eléctrica Z_1e , Z_2e , respectivamente; el potencial electrostático de interacción de estas dos partículas es el potencial coulombiano

$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}.$$

Sean \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 las posiciones respectivas de estas dos partículas cuyas masas son m_1 y m_2 , estas partículas tienen asociados los operadores de momento \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Si su interacción es puramente coulombiana, su evolución esta gobernada por el Hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2m_2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}.$$

El estudio de este sistema se puede hacer en dos partes: la primera consiste en el estudio del centro de masas del centro del sistema, que consiste en la evolución de una onda plana y la segunda parte es el estudio del movimiento relativo entre las dos partículas. Con lo cual el Hamiltoniano: para el movimiento relativo se puede escribir como:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

donde \mathbf{P} es el momento de la pseudo partícula de masa μ , que no es otra cosa que la masa reducida del sistema.

De esta forma el problema del movimiento de dos partículas sujetas a un campo electrostático se transforma al de una sola pseudo partícula en un potencial central $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$. Los métodos anteriores no son aplicables directamente en este caso por el lento decrecimiento del potencial coulombiano. Pero aún siendo así se puede hacer un desarrollo asintótico de las soluciones estacionarias y poder identificar términos con la onda incidente y una onda dispersada como se muestra a continuación.

Después de hacer la reducción al centro de masas, la ecuación de Schrödinger del problema del choque de dos partículas en interacción coulombiana se escribe como:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

Donde E es la energía en el sistema centro de masa.

Sean:

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} = \frac{\mu^2 v^2}{\hbar^2}$$

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

Al hacer las sustituciones anteriores se obtiene:

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.41)$$

Esta ecuación posee una solución regular de la forma $e^{ikz}f(r-z)$; al hacer esta sustitución en (1.41) y definiendo $u = r - z$ se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \gamma k \right] F(u) = 0 \quad (1.42)$$

Si se hace el cambio de variable:

$$\nu = iku = ik(r - z)$$

la ecuación diferencial (1.42) adquiere la forma de:

$$\left[\nu \frac{d^2}{d\nu^2} + (1 - \nu) \frac{d}{d\nu} - i\gamma \right] f(\nu) = 0.$$

Esta ecuación diferencial es hipergeométrica confluyente y tiene por solución regular en el origen la serie hipergeométrica confluyente $F(-i\gamma | 1 | \nu)$ (ver apéndice A), de esta forma la ecuación de onda regular en el origen se escribe como:

$$\Psi = Ae^{ikz} F(-i\gamma | 1 | \nu)$$

$$\Psi = Ae^{ikz} F(-i\gamma | 1 | ik(r - z)).$$

De la teoría de la función hipergeométrica confluyente, su desarrollo asintótico se expresa como la suma de dos funciones respectivamente:

$$W_1(-i\gamma | 1 | iku)$$

$$W_2(i\gamma | 1 | iku)$$

Por lo cual la solución a la ecuación de Schrödinger en límite asintótico es:

$$\Psi = Ae^{ikz} [W_1(-i\gamma | 1 | iku) + W_2(i\gamma | 1 | iku)].$$

Definiendo:

$$\Psi_{inc} = Ae^{ikz} W_1(-i\gamma | 1 | iku)$$

$$\Psi_{dis} = Ae^{ikz} W_2(i\gamma | 1 | iku)$$

Con lo cual:

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{dis}$$

Calculando A se obtiene:

$$A = \Gamma(1 + i\gamma) \exp\left(-\frac{1}{2}\pi\gamma\right)$$

De esta forma se puede escribir explícitamente los desarrollos asintóticos de Ψ y

$$\Psi_{inc|_{r \rightarrow \infty}} \sim \exp i(kz + \gamma \ln k(r-z)) \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \dots\right]$$

$$\begin{aligned} \Psi_{dis|_{r \rightarrow \infty}} \sim & -\frac{\gamma}{k(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} \exp i(kr - \gamma k(r-z)) \times \\ & \times \left[1 + \frac{(1+i\gamma)}{ik(r-z)} + \dots\right] \end{aligned}$$

Como $z = r \cos\theta$, el primer término del desarrollo asintótico de Ψ_{dis} se escribe como:

$$\Psi_{dis|_{r \rightarrow \infty}} \sim \frac{1}{r} \exp[i(kr - \gamma \ln 2kr)] f(\theta)$$

Siendo:

$$f(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \exp\left[-i\gamma \ln\left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right]$$

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\gamma).$$

Es necesario aclarar el significado físico de las ecuaciones anteriores. Claramente Ψ representa la solución estacionaria a la interacción de una partícula cargada de impulso $\hbar k$ dirigido en el eje de las Z con otra partícula. Como ya se ha mencionado en el caso de un potencial que tienda a cero tan rápidamente como r^{-2} cuando $r \rightarrow \infty$, el estado estacionario se puede escribir como la suma de una onda plana incidente y una onda esférica emergente como en este caso el potencial no cumple con esta condición. A continuación se explica por qué se puede considerar a Ψ_{inc} como la onda incidente y a Ψ_{dis} como la onda dispersada y con esto calcular la sección de dispersión.

Notese que aún cuando $r \rightarrow \infty$ que tanto Ψ_{inc} como Ψ_{dis} no adquieren la forma de ondas planas y esféricas respectivamente, esto se debe al alcance infinito del potencial coulombiano.

Al Considerar primeramente a Ψ_{inc} , la cual es una función de densidad 1 y cuya densidad de corriente para valores negativos y muy grandes de z es igual a $v \equiv \frac{\hbar k}{m}$

$$J_i = \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi_{inc}^* (\nabla \Psi_{inc}) - \Psi_{inc} (\nabla \Psi_{inc})^* \right]$$

El término logarítmico de Ψ_{inc} introduce correcciones $\frac{1}{r}$ que cuando $r \rightarrow \infty$ se pueden despreciar. De manera completamente análoga, Ψ_{dis} aparece como una onda dispersada (excepto a lo largo del eje de las Z positivas donde deja de tener sentido la separación de la onda incidente y la onda dispersada), ya que J_{dis} calculada como:

$$J_d = \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi_{dis}^* (\nabla \Psi_{dis}) - \Psi_{dis} (\nabla \Psi_{dis})^* \right]$$

J_{dis} está dirigida radialmente y en el sentido de las r 's crecientes pudiéndose despreciar el factor $e^{\nu \gamma \ln 2kr}$ de sobre $\frac{1}{r}$ en el orden inferior. Con la aproximación anterior Ψ_{dis} es una onda dispersada con una densidad $\frac{|f_e(\theta)|^2}{r^2}$ y de densidad de corriente

$$v \frac{|f_e(\theta)|^2}{r^2}$$

Dividiendo la densidad de corriente dispersada en el ángulo sólido $\Omega + d\Omega$ por la densidad de corriente incidente se obtiene por definición la sección eficaz diferencial de difusión, la cual coincide con la expresión que se obtiene de la teoría clásica.

1.2.4 Aspectos Formales de la Teoría de la Dispersión

En líneas anteriores se ha considerado el caso de la dispersión elástica en la representación de coordenadas, ahora se procederá a presentar de manera breve una perspectiva más general de la teoría de la dispersión.

Sea H el hamiltoniano completo del sistema que en principio puede dar lugar a cualquier tipo de proceso como pueden ser un proceso elástico o inelástico. Supongamos que H se puede descomponer en dos partes

$$H = H_0 + V$$

donde los vectores propios y los valores propios de H_0 se consideran conocidos:

$$H_0 |\Phi_a\rangle = E_a |\Phi_a\rangle$$

Comunmente se considera H_0 como el hamiltoniano de las partículas libres; con lo cual en este caso V es el potencial dispersor. A continuación supondremos que a toda solución $|\Phi_a\rangle$ en el continuo le corresponde una solución $|\Psi_a\rangle$ del problema completo, también en el continuo y con la misma energía E_a . Lo cual significa desde un punto de vista físico que la energía no cambia cuando también está presente V , cosa que no siempre se cumple pero por simplicidad lo consideraremos de este modo obtenemos:

$$H |\Psi_a\rangle = E_a |\Psi_a\rangle.$$

Con las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$(E_a - H_0) |\Psi_a\rangle = (E_a - H_0) |\Phi_a\rangle + V |\Psi_a\rangle.$$

Si se aplica el operador inverso de $(E_a - H_0)$ que designamos por $(E_a - H_0)^{-1}$ se obtiene:

$$|\Psi_a\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{(E_a - H_0)} V |\Psi_a\rangle$$

Esta expresión está mal definida puesto que posee una singularidad en E_a . Podemos darle la vuelta a este problema reescribiendo los operadores $(E_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}$ que en el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$ se reduce al original y de esta manera ya se podrá escribir formalmente la ecuación anterior como:

$$|\Psi_a^\pm\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{(E_a - H_0 \pm i\epsilon)} V |\Psi_a\rangle$$

Esta expresión es conocida como ecuaciones de Lippmann-Schwinger. Es importante hacer notar que en el caso de una representación continua estas ecuaciones se transforman en ecuaciones integrales de Fredholm. Es decir, en la representación continua de ξ se tiene:

$$\Psi_a^\pm(\xi) = \langle \xi | \Psi_a^\pm \rangle \quad y \quad \varphi_a(\xi) = \langle \xi | \Phi_a \rangle$$

Con lo cual

$$\Psi_a^\pm(\xi) = \varphi_a(\xi) + \int K_a^\pm(\xi, \xi') \Psi_a^\pm(\xi') d\xi'$$

Donde K_a^\pm es por lo tanto

$$K_a^\pm(\xi, \xi') = \left\langle \xi \left| \frac{1}{(E_a - H_0 \pm i\epsilon)} V \right| \xi' \right\rangle$$

Definiendo al operador G_a^\pm como

$$G_a^\pm = \frac{1}{(E_a - H_0 \pm i\epsilon)}$$

Si se utilizan las identidades:

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A+B} B \frac{1}{A}$$

Con las cuales se pueden escribir las ecuaciones de Lippmann-Schwinger de manera más cómoda y abreviada:

$$|\Psi_a^\pm\rangle = \frac{1}{1 - G_a^\pm V} |\Psi_a\rangle$$

ya que el desarrollo en serie del denominador de esta ecuación proporciona un desarrollo de Born, análogo al usado previamente.

Es de esperar que el Hamiltoniano H posea tanto estados en el continuo como estados discretos o ligados $|\Psi_k^{lg}\rangle$; los estados entrantes (o los salientes) más los ligados forman un conjunto completo, es decir:

$$1 = \sum_a |\Psi_a^\pm\rangle \langle \Psi_a^\pm| + \sum_k |\Psi_k^{lg}\rangle \langle \Psi_k^{lg}|$$

en donde se puede escoger cualquiera de los dos signos.

Por otra parte, el proceso de dispersión se puede describir como la transformación de un estado entrante a uno saliente, el cual es realizado por el operador de dispersión S . Es decir:

$$|\Psi_{sal}\rangle = S |\Psi_{ent}\rangle$$

Se conectará ahora S con el operador de evolución, el cual por definición nos translada del estado inicial en el tiempo t_i al estado del sistema en el tiempo t :

$$|\Psi(t)\rangle = S(t, t_i) |\Psi(t_i)\rangle .$$

El estado entrante describe ahora al sistema antes de la interacción, mientras que el saliente corresponde al caso en que la interacción se ha realizado íntegramente; luego se podrá escribir:

$$|\Psi_{ent}\rangle = |\Psi(-\infty)\rangle; |\Psi_{sal}\rangle = |\Psi(\infty)\rangle$$

En virtud de las ecuaciones anteriores se tiene:

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} S(t_i, t)$$

De la unitariedad del operador de evolución, se sigue que el operador S es unitario.

Se supone ahora que el estado entrante es un estado dado de un conjunto completo $|n\rangle$; que será representado por $|\Psi_{ent}\rangle = |i\rangle$. Estrictamente el estado saliente se puede expresar en términos de este conjunto como:

$$|\Psi_{sal}\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$$

La amplitud de un estado $|f\rangle$ cualquiera en $|\Psi_{sal}\rangle$ es

$$\langle f | \Psi_{sal} \rangle \equiv a_f = \langle f | S | \Psi_{ent} \rangle = \langle f | S | i \rangle = S_{fi}$$

que muestra que el elemento fi de la matriz S es la amplitud del estado en el estado $|f\rangle$ dispersado a partir del estado entrante $|i\rangle$. Un resultado importante es: se puede expresar la matriz S en términos de los estados entrantes y salientes. Por ejemplo, considerando que la suma se extiende sobre todos los posibles estados, escribimos:

$$\begin{aligned} |\Psi_a\rangle &= \sum_b |\Psi_b^-\rangle \langle \Psi_b^- | \Psi_a^+ \rangle = \sum_b S_{ba} |\Psi_b^-\rangle \\ S_{fi} &= \langle f | S | i \rangle = \langle \Psi_f^- | \Psi_i^+ \rangle \end{aligned}$$

Apartir de los resultados anteriores, concretamente de la ecuación de Lippmann-Schwinger, se obtiene la siguiente expresión para S_{fi} :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i T_{fi} \delta(E_f - E_i)$$

donde la matriz T llamada de transición es:

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | V | \Psi_i^+ \rangle$$

Con un desarrollo perturbativo de esta expresión se obtiene:

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | V | \Phi_i \rangle + \langle \Phi_f | V \frac{1}{(E_i - H_0 \pm i\epsilon)} V | \Phi_i \rangle + \dots$$

Siguiendo los métodos usuales se calcula la probabilidad de la transmisión $i \rightarrow f$ por unidad de tiempo. Definiendo la densidad de estados finales en el continuo como $\rho(E_f)$ y apartir de la ecuación anterior que

$$W_{i,f} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{i,f}|^2 \rho(E_f) \quad E_i = E_f.$$

Como antes la sección diferencial del proceso (elástico o inelástico) se obtiene dividiendo la probabilidad por unidad de tiempo entre el flujo incidente.

Capítulo 2

El Formalismo de la Matriz S

El capítulo anterior terminó con una presentación formal de la matriz S. El objetivo del presente capítulo es mostrar explícitamente la construcción de la matriz S con el método de la matriz R. Para esto empezaremos con un ejemplo unidimensional que nos servirá como guía metodológica para el caso tridimensional. En el caso tridimensional derivamos una expresión explícita para la matriz S.

2.1 Un Ejemplo Unidimensional

Este ejemplo unidimensional lo presentó Bloch [8] en 1957 y consiste en la dispersión de una partícula de energía ε que está sometida a un potencial central $\mathbf{V}(r)$ con un radio de alcance finito $r = a$ que constituye la región interna:

$$0 \leq r \leq a$$

para esta región la función de onda satisface la ecuación de Schrödinger:

$$(\mathbf{H} - \varepsilon) \Psi(r) = 0 \tag{2.1}$$

y donde el operador hamiltoniano es:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \mathbf{V}(r)$$

Para la región exterior $R \leq r$ la función de onda se escribe como una combinación lineal de una función de onda entrante $\Psi^{(-)}$ y de una función

de onda saliente $\Psi^{(+)}$:

$$\Psi(r) = \Psi^{(-)}(r) - \Psi^{(+)}(r)$$

$$\Psi^{(-)}(r) = \frac{1}{r} \exp(-ikr) \quad (2.2)$$

$$\Psi^{(+)}(r) = \frac{1}{r} S \exp(ikr) \quad (2.3)$$

La amplitud de la onda entrante está determinada por el haz incidente. La amplitud S de la onda saliente permite el cálculo de la sección eficaz de dispersión, y ésta es la que nos interesa calcular. En este punto es importante recalcar la consistencia entre el operador \mathbf{H} y la función de onda escrita en la ecuación (2.3) puesto que el operador \mathbf{H} no es más que operador hamiltoniano de la ecuación radial para $l=0$ y la función de onda propuesta en (2.3) es el término $l=0$ en la descomposición de ondas parciales. El problema consiste esencialmente en resolver la ecuación de Schrödinger para la región interna y debe satisfacer la condición límite para $r = a$, y que la amplitud de la onda entrante es igual a la unidad. El operador \mathbf{H} restringido a la región interna, que aquí va a jugar un papel central, presenta una grave dificultad la cual es su no hermiticidad, esto es, si $\Psi_1(r)$ y $\Psi_2(r)$ son dos funciones de onda cualesquiera tenemos:

$$\int_0^a r^2 dr [\Psi_1^* (\mathbf{H}\Psi_2) - (\mathbf{H}\Psi_1)^* \Psi_2] = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[r\Psi_1^* \frac{d(r\Psi_2)}{dr} - \frac{d(r\Psi_1^*)}{dr} r\Psi_2 \right]_{r=a} \quad (2.4)$$

Esta dificultad bien puede evitarse si imponemos las condiciones de frontera adecuadas para nuestras funciones de onda Ψ y tomando sólo aquellas que, cuando se aplique el operador \mathbf{H} , satisfagan las condiciones a la frontera para $r = a$. Nosotros podemos, en efecto, imponer a todas nuestras funciones de onda que se anulen o que tengan una derivada logarítmica tal que, para $r = a$ anulen a la ec. (2.4). Este método, si bien es posible, no es natural en el caso que nos interesa puesto que no podemos conocer el valor de la derivada logarítmica de la función sin haber antes resuelto el problema.

Una manera de tener un operador $\tilde{\mathbf{H}}$ hermitico para este problema consiste en sumar un término de superficie que compense la expresión anterior:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \frac{\hbar^2}{2Ma} \delta(r-a) \frac{d}{dr} r,$$

con lo cual se verifica de inmediato

$$\int r^2 dr \left[\Psi_1^* \left(\tilde{\mathbf{H}} \Psi_2 \right) - \left(\tilde{\mathbf{H}} \Psi_1 \right)^* \Psi_2(r) \right] = 0. \quad (2.5)$$

Aún con su carácter singular el operador $\tilde{\mathbf{H}}$ tiene elementos de matriz que están bien definidos para funciones Ψ cualesquiera, esto es:

$$\int_0^a r^2 dr \left[\Psi_1^* \tilde{\mathbf{H}} \Psi_2 \right] = \int_0^a r^2 dr \left[\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d(r\Psi_1^*)}{dr} \frac{d(r\Psi_2)}{dr} + \Psi_1^* \mathbf{V} \Psi_2 \right]. \quad (2.6)$$

Hasta aquí tenemos un operador Hamiltoniano hermítico con elementos de matriz bien definidos. Ahora bien, si $\Psi(r)$ es una función continua y derivable, entonces $\tilde{\mathbf{H}} \Psi(r)$ es continua para $r < a$ y presenta una singularidad en $r = a$, dada por:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \delta(r-a) \left[\frac{d(r\Psi)}{dr} \right],$$

que en este caso se puede entender como la suma de dos funciones, una continua en el intervalo $[0, a)$ y otra función discontinua para $r = a$

$$f(r) + A\delta(r-a).$$

Con lo cual podemos escribir

$$\left(\varepsilon - \tilde{\mathbf{H}} \right) \Psi(r) = F(r)$$

donde el segundo miembro es de la forma

$$F(r) = f(r) + A\delta(r-a) \quad (2.7)$$

La función $f(r)$ es continua aún para $r = a$, este problema equivale a un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones a la frontera

$$\left(\varepsilon - \tilde{\mathbf{H}} \right) \Psi(r) = f(r)$$

para $r < a$ y

$$-\frac{\hbar^2}{2Ma} \left[\frac{d(r\Psi_2)}{dr} \right]_a = A$$

para $r=a$.

Hagamos una pequeña modificación al operador $\tilde{\mathbf{H}}$ para obtener una simplificación considerable en los cálculos futuros, definamos:

$$\hat{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{H} + \mathfrak{G}$$

Donde \mathfrak{S} está definido como:

$$\mathfrak{S} = \frac{\hbar^2}{2Ma} \delta(r-a) \left(\frac{d}{dr} - ik \right) r \quad (2.8)$$

\mathfrak{S} es el operador que contiene las condiciones a la frontera, que así definido posee la siguiente propiedad:

$$\mathfrak{S}\Psi^{(+)} = \frac{\hbar^2}{2Ma} \delta(r-a) \left(\frac{d}{dr} - ik \right) S \exp(ikr) = 0 \quad (2.9)$$

Esta propiedad explica la importancia que tiene el operador \mathfrak{S} pues se reduce a la ecuación de Schrödinger (2.1) para $r < a$ y para $r = R$ da la ecuación:

$$\mathfrak{S}\Psi(r) = \mathfrak{S}\Psi^{(-)}(r) \quad (2.10)$$

Si el operador $\varepsilon - \overset{\circ}{\mathbf{H}}$ tiene un inverso, tenemos para Ψ :

$$\Psi(r) = - \frac{1}{\varepsilon - \overset{\circ}{\mathbf{H}}} \mathfrak{S}\Psi^{(-)}(r)$$

Si utilizamos esta expresión para $r = a$, e igualamos con la función de onda, también evaluada en $r = a$, obtenemos inmediatamente la amplitud de la onda saliente:

$$\Psi^{(+)}(a) = \Psi^{(-)}(a) + \left[\frac{1}{\varepsilon - \overset{\circ}{\mathbf{H}}} \mathfrak{S}\Psi^{(-)} \right]_{r=a}$$

Esta expresión junto con la ec.(2.3) permite, en principio, el cálculo de la matriz S, con lo cual el problema está formalmente resuelto.

2.2 Consideraciones Generales

El problema de la dispersión de muchos cuerpos en el marco de la mecánica cuántica no relativista, consiste en la solución de la ecuación de Schrödinger sujeta a las condiciones de frontera asintóticas, esto es:

$$(\mathbf{H} - E) \Psi_k = 0 \quad (2.11)$$

donde:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{T} = - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\hbar^2}{2M_i} \nabla_{\mathbf{R}_i}^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \quad (2.13)$$

es decir \mathbf{T} es el operador asociado a la energía cinética y \mathbf{V} es la energía potencial. En el operador \mathbf{T} encontramos M_i que es la masa de la i -ésima partícula y \mathbf{R}_i es su vector de posición, M es la masa total y \mathbf{R} es el vector de posición del centro de masa. El potencial \mathbf{V} consistirá de una suma de funciones que dependen del desplazamiento relativo de las partículas y potenciales de muchos cuerpos, incluidos los potenciales de dos cuerpos. Todos los términos de \mathbf{V} que involucren a las partículas i, j deben decrecer, al menos tan rápido como $(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|)^{-1}$ en la región del espacio de configuración donde la separación de las partículas i, j es grande.

Las condiciones de frontera asintóticas están formuladas en términos de los conceptos de partición y canal. Una partición del sistema es la división de N partículas en n grupos o cúmulos. Para este propósito todas las particiones son consideradas como distinguibles, y las consecuencias de la simetrización del sistema pueden ser introducidas posteriormente en el análisis. En nuestro caso, como en la mayoría, sólo consideraremos dos particiones. Asociada con cada partición α tenemos un conjunto infinito de canales c, c', c'', \dots , cada uno correspondiente a un posible estado, producto de los estados internos de los dos cúmulos de partición α .

Sean $\mathbf{h}_\alpha^{(1)}$ y $\mathbf{h}_\alpha^{(2)}$ los hamiltonianos de los grados de libertad internos de los dos cúmulos de la partición α . Los estados de canal $\chi_{\alpha c}$ son definidos por los autovectores de $\mathbf{h}_\alpha^{(1)} + \mathbf{h}_\alpha^{(2)}$, es decir

$$\left(\mathbf{h}_\alpha^{(1)} + \mathbf{h}_\alpha^{(2)} - \varepsilon_{\alpha c} \right) \chi_{\alpha c} = 0 \quad (2.14)$$

Sea \mathbf{r}_α el desplazamiento relativo de los dos centros de masa de cada uno de los cúmulos para la partición α .

La región del espacio de configuraciones donde \mathbf{r}_α es relativamente grande, en comparación con las coordenadas internas de cada cúmulo y es llamada región asintótica para la partición α . En esta región del espacio de configuraciones el estado de dispersión de la función de onda Ψ_k puede ser expresado en términos de la partición α :

$$\Psi_k = \sum_{c \in \alpha} \chi_{\alpha c} u_{\alpha c}^{(k)}(\mathbf{r}_\alpha) \quad (\text{para } r_\alpha \text{ grande}) \quad (2.15)$$

donde los coeficientes de expansión, para el canal de movimiento relativo de las funciones de onda, necesariamente son las soluciones de:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_c} \nabla_{r_\alpha}^2 + \frac{Z_\alpha^{(1)} Z_\alpha^{(2)} e^2}{r_\alpha} - E_{\alpha c} \right] u_{\alpha c}^{(k)}(r_\alpha) = 0 \quad (2.16)$$

donde:

$$E_{\alpha c} = E - \varepsilon_{\alpha c} \quad (2.17)$$

Aquí m_c es la masa reducida para la partición α en el canal c , y $Z_\alpha^{(1)} e$, $Z_\alpha^{(2)} e$ son las cargas eléctricas. El índice k sirve como un recordatorio de que el espacio de Hilbert de un sistema de dispersión multicanal, para una energía dada, es m -veces degenerado: donde m es el número de canales abiertos. Para describir el sistema completamente, es necesario la determinación de un conjunto de m funciones de onda Ψ_1, \dots, Ψ_m .

Las condiciones asintóticas para la dispersión de la función de onda Ψ_k ahora pueden ser establecidas de manera precisa en términos del canal de movimiento relativo de las funciones de onda. Esto es, se requiere que para grandes valores de r_α la función de onda tenga la forma:

$$u_{\alpha c}^{(k)}(r_\alpha) = Y_{l_c}^{\mu c}(\theta_\alpha, \phi_\alpha) \left[\xi_{\alpha c}^{(-)}(r_\alpha) \delta_{ck} - \xi_{\alpha c}^{(+)}(r_\alpha) S_{ck} \right] \quad (2.18)$$

donde terminación $Y_{l_c}^{\mu c}(\theta_\alpha, \phi_\alpha)$ es el armónico esférico y para los canales abiertos $\xi_{\alpha c}^{(-)}(\xi_{\alpha c}^{(+)})$ dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha c}^{(\pm)}(r_\alpha) &= \left[\frac{m_c}{\hbar k_c} \right]^{\frac{1}{2}} i \exp(\pm i\sigma_c) \left[G_{l_c}(k_c r_c) \pm i F_{l_c}(k_c r_c) \right] r_\alpha^{-1} \\ &\sim \left[\frac{m_c}{\hbar k_c} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{r_\alpha} \exp \left[\pm \left\{ k_c r_c - \eta_c \ln 2k_c r_\alpha - \frac{1}{2} l_c \pi \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para canales cerrados ($E_{\alpha c} < 0$) asumimos:

$$\xi_{\alpha c}^{(+)}(r_\alpha) \sim \frac{1}{r_\alpha} \exp \left[-k_c r_c - \eta_c \ln 2k_c r_\alpha \right] \quad (2.20)$$

aquí hemos escrito:

$$k_c = \left(2m_c |E_{\alpha c}| / \hbar^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

$$\eta_c = Z_\alpha^{(1)} Z_\alpha^{(2)} e^2 m_c / \hbar^2 k_c \quad (2.22)$$

$$\sigma_c = \arg \Gamma(l_c + 1 + i\eta_c) \quad (2.23)$$

y S es la matriz de colisión (ó dispersión). Esto es evidente ya que Ψ_k representa el estado dispersivo con un flujo incidente unitario en canal k y únicamente el flujo saliente en todos los otros canales. Estos estados serán denotados por $\Psi_k^{(+)}$. Hemos supuesto implícitamente que el índice c incluye a los números cuánticos l_c y μ_c . Lo anterior nos es útil para compactar nuestra notación y redefinir los canales para que incluyan los armónicos esféricos. Adicionalmente, el armónico esférico es acoplado con los espines de los dos cúmulos para formar un autoestado de momento angular. De ahora en adelante entenderemos:

$$|c\rangle = (\chi_{\alpha c} \times Y_l)_{j_c}^{\mu_c} \equiv \left[\chi_{\alpha c, j_1}^{(1)} \times \chi_{\alpha c, j_2}^{(2)} \right]^{j_1 j_2} \times Y_{l_c}^{\mu_c} \quad (2.24)$$

Siguiendo la convención de Bloch [8] el ket $|c\rangle$ denota todas las funciones excepto r_α . De esta forma las ecs. (2.15), (2.16) y (2.18) se escriben:

$$\Psi_k^{(+)} = \sum_{c \in \alpha} |c\rangle w_{\alpha c}^{(k)}(r_c) \quad (\text{para } r_\alpha \text{ grande}) \quad (2.25)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_c} \left(\frac{1}{r_\alpha} \frac{d^2}{dr_\alpha^2} r_\alpha - \frac{l_c(l_c+1)}{r_\alpha^2} \right) + \frac{Z_\alpha^{(1)} Z_\alpha^{(2)} e^2}{r_\alpha} - E_{\alpha c} \right] w_{\alpha c}^{(k)}(r_\alpha) = 0 \quad (2.26)$$

$$w_{\alpha c}^{(k)}(r_\alpha) = \left[\xi_{\alpha c}^{(-)}(r_\alpha) \delta_{ck} - \xi_{\alpha c}^{(+)}(r_\alpha) S_{ck} \right] \quad (2.27)$$

es la función de onda para el canal radial.

La partición α de los estados asintóticos $|c\rangle w_{\alpha c}^{(k)}(r_c)$ son estados propios de la partición del hamiltoniano \mathbf{H}_α :

$$(\mathbf{H}_\alpha - E) |c\rangle w_{\alpha c}^{(k)}(r_c) = 0 \quad (2.28)$$

donde:

$$\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha^{(1)} + \mathbf{h}_\alpha^{(2)} - \frac{\hbar^2}{2m_c} \nabla_{r_\alpha}^2 + \frac{Z_\alpha^{(1)} Z_\alpha^{(2)} e^2}{r_\alpha} \quad (2.29)$$

la interacción residual de la partición α se define como

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{H} - \mathbf{H}_\alpha \quad (2.30)$$

y desaparece en la región asintótica de la partición α .

Las ecuaciones anteriores dejan en claro que la solución de la ecuación de Schrödinger para muchos cuerpos está caracterizada por la matriz de dispersión S, donde las condiciones a la frontera han sido impuestas. El objetivo de cualquier cálculo de una reacción nuclear está determinada por los elementos de matriz S_{ck} . La especificación completa de las funciones de onda en el espacio de configuraciones requiere una solución de las ecuaciones dinámicas para el sistema en la región interna, donde el corto alcance de la interacción es importante.

2.2.1 El Formalismo de la Matriz R

El formalismo de la matriz R propuesto por Lane y Tomas [11] nos sirve para definir de manera precisa las condiciones de frontera asintóticas, ya que en las líneas anteriores no queda claro que criterio se debe usar para especificar cuando la partición radial α puede ser considerada grande comparada con las coordenadas internas de cada cúmulo. Además, los canales $|c\rangle$ pertenecen a una partición y no son independientes del canal.

El método de la matriz R soluciona estos problemas y consiste en introducir un volumen finito en el espacio de configuraciones: este volumen es $3N-3$ dimensional para un sistema de N cuerpos. La hipersuperficie $3N-4$ dimensional que encierra este volumen es llamada la superficie de entrada del canal y el interior se conoce como región interna o simplemente de interacción. Las condiciones de frontera asintóticas constriñen a la función de onda dispersada a ser especificada en términos de un conjunto completo y ortogonal de superficies armónicas definidas en la superficie del espacio interno.

La superficie armónica del espacio interno está definida por la superficie de un poliedro $3N-4$ dimensional cuyas caras están definidas por $r_\alpha = a_\alpha$ para cada par de cúmulos de la partición α . En cada canal entrante se define un conjunto completo y ortogonal. El radio r_α del canal debe ser lo suficientemente grande para que se cumplan los requerimientos de los estados internos $|c\rangle$ es decir $r_\alpha = a_\alpha$ se imponen para que estén bien definidas las ecs. (2.14) y (2.24).

Podemos ver que este esquema de dividir el espacio en dos regiones trae consigo profundas consecuencias. Por ejemplo, cuando permitimos que todos los canales radiales sean lo suficientemente grandes podemos originar que to-

dos los canales entrantes vengan a formar parte de la región asintótica. En ese caso la parte no coulombiana del potencial residual es despreciable en la vecindad del canal entrante α . De esta manera, el concepto de región asintótica ha sido dotado con la precisión que antes le faltaba.

Una consecuencia positiva es que el espectro de los estados internos $|c\rangle$ es puramente discreto y las funciones de onda internas están todas normalizadas. No hay traslape entre las funciones de onda correspondientes a las diferentes particiones.

Habiendo hecho las especificaciones de las condiciones de frontera asintóticas, el siguiente paso es derivar las expresiones que determinen la dispersión de la función de onda.

Consideremos la siguiente igualdad:

$$\langle \Theta | \Delta | \Psi_k \rangle = \langle \Theta | \mathbf{H} - \mathbf{H}^\dagger | \Psi_k \rangle, \quad (2.31)$$

donde Θ es una función que es regular en el espacio interno, pero por lo demás es arbitraria. Las integraciones denotadas por los paréntesis angulares tiene por dominio la región de interacción.

Supondremos que este es el caso, salvo mención explícita. Si consideramos potenciales de interacción reales, la ecuación anterior se escribe:

$$\langle \Theta | \Delta | \Psi_k \rangle = \langle \Theta | \mathbf{T} - \mathbf{T}^\dagger | \Psi_k \rangle. \quad (2.32)$$

Con un simple cambio de escala, el operador de energía cinética \mathbf{T} puede ser transformado en un laplaciano 3N-3 dimensional. De esta manera podemos usar el teorema de Green para transformar la integral de volumen, en una integral sobre las superficies de los canales entrantes. El resultado se puede escribir de manera concisa usando un conjunto de superficies armónicas para las superficies de los canales internos.

$$\langle \Theta | \mathbf{H} - \mathbf{H}^\dagger | \Psi_k \rangle = \langle \Theta | \mathfrak{S}^\dagger(b_c^*) - \mathfrak{S}(b_c) | \Psi_k \rangle, \quad (2.33)$$

donde $\mathfrak{S}(b_c)$ es nuevamente el operador de condiciones a la frontera de Bloch:

$$\mathfrak{S}(b_c) = \sum_{\alpha} \sum_{c \in \alpha} |c\rangle \frac{\hbar^2}{2m_c a_{\alpha}} \delta(r - a) \left(\frac{\partial}{\partial r_c} r_c - b_c \right) \langle c| \quad (2.34)$$

con la constante arbitraria b_c que en general es compleja.

Dado que Θ es arbitraria y Ψ_k es una solución de la ecuación de Schrödinger la ec. (2.33) puede escribirse como:

$$(E - \mathbf{H}^\dagger) \Psi_k = \left\{ \mathfrak{S}^\dagger(b_c^*) - \mathfrak{S}(b_c) \right\} \Psi_k = \Delta \Psi_k. \quad (2.35)$$

Operando en ambos lados de esta ecuación con el operador de Green, que se define como el inverso izquierdo de $(E - \mathbf{H}^\dagger)$ o equivalentemente, el inverso derecho de $(E - \mathbf{H})$, es decir:

$$G(E - \mathbf{H}^\dagger) = (E - \mathbf{H})G = \mathbf{1} \quad (2.36)$$

de lo cual resulta:

$$\Psi_k = G \left\{ \mathfrak{S}^\dagger(b_c^*) - \mathfrak{S}(b_c) \right\} \Psi_k = G \Delta \Psi_k \quad (2.37)$$

Este resultado es la función de Green del problema y vincula la función de onda con su dispersión, ya que contiene el valor de la función de onda para cualquier punto en la región interna en función del valor que tome en la superficie y también en función del valor del gradiente en la superficie de la región interna.

Una alternativa para la ec. (2.37) fue dada originalmente por Bloch [8] y analizada con detalle por Lane y Robson [12] al agregar $\mathfrak{S}(b_c)\Psi_k$ en ambos lados de la ecuación de Schrödinger:

$$[\mathbf{H} + \mathfrak{S}(b_c) - E] \Psi_k = \mathfrak{S}(b_c) \Psi_k \quad (2.38)$$

Procediendo análogamente en ambos lados de la ecuación tenemos:

$$G^L(\mathbf{H} + \mathfrak{S}(b_c) - E) = (\mathbf{H}^\dagger + \mathfrak{S}^\dagger(b_c^*) - E) G^L = \mathbf{1} \quad (2.39)$$

con lo cual:

$$\Psi_k = G^L \mathfrak{S}(b_c) \Psi_k \quad (2.40)$$

Si el parámetro b_c es real, no hay necesidad de distinguir entre inverso izquierdo e inverso derecho. Tomando en cuenta lo anterior la ecuación (2.33) se escribe:

$$\mathbf{H} + \mathfrak{S}(b_c) = \mathbf{H}^\dagger + \mathfrak{S}^\dagger(b_c) \quad (2.41)$$

la distinción entre \mathbf{G} y $-\mathbf{G}^L$ es el término de superficie en la ec. (2.39). Esto es, imponer constricciones a \mathbf{G}^L para que cumpla una condición en la frontera del espacio interno análoga a la ec. (2.36) y que implica las dos siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{H}) \left(-\mathbf{G}^L \right) = \mathbf{1} \quad (2.42)$$

y

$$\mathfrak{S}(\mathbf{b}_c) \mathbf{G}^L = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Otra manera de entender este par de ecuaciones es imponer que el operador \mathbf{G} cumpla con la ec.(2.43) y \mathbf{b}_c sea real; este par de condiciones sobre \mathbf{G} resultaría en la ec.(2.40). El sistema de ecs.(2.42) y (2.43) que tiene que satisfacer el operador de Green nos muestra por que la función de Green juega el papel central en el formalismo de la matriz \mathbf{R} . De esta manera hemos trasladado el problema de resolver la ec. de Schrödinger por un problema de construir un conjunto de constricciones que tiene que satisfacer el operador de Green.

Supongamos que hemos construido \mathbf{G}^L ; ahora, ¿cómo utilizamos el operador para calcular Ψ_k ? No podemos hacer uso directo de la ec. (2.40), porque de las ecs. (2.24), (2.25) y (2.27) vimos que el desarrollo asintótico de ellas está parametrizado en función de la matriz de colisión \mathbf{S} . Además la ec.(2.40) nos indica la dinámica del sistema una vez construido \mathbf{G}^L . La manera como procederemos consiste en usar primero la ec. (2.40) y hacer uso del desarrollo asintótico de Ψ_k para calcular \mathbf{S} y después substituir nuevamente en la ec. (2.40) para obtener Ψ_k .

Proyectemos en ambos lados de la ec. (2.40) sobre los canales internos $|c\rangle$ e igualando la parte correspondiente a la región interna de la ec. (2.40) con la externa dada por la ec. (2.45) en $r_\alpha = a_\alpha$ para que $\Psi_k = \Psi_k^{(+)}$, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha c}^{(-)}(a_\alpha) \delta_{ck} - \xi_{\alpha c}^{(+)}(a_\alpha) S_{ck} = \sum_{\beta} \sum_{c' \in \beta} R_{cc'}^L(a_\alpha, a_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial a_c} a_\beta - b_{c'} \right) \times \\ \times \left[\xi_{\alpha c}^{(-)}(r_\alpha) \delta_{ck} - \xi_{\alpha c}^{(+)}(r_\alpha) U_{ck} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde la matriz \mathbf{R}^L tiene como elementos:

$$\begin{aligned}
 R_{cc'}^L(a_\alpha, a_\beta) &= \frac{\hbar^2 a_\beta}{2m_c} \sum_{j, j'} (c, a_\alpha | \phi_j \rangle \langle \tilde{\phi}_{j'} | c', a_\beta \rangle \\
 &\equiv \frac{\hbar^2 a_\beta}{2m_c} (c, a_\alpha | \mathbf{G}^L | c', a_\beta)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

y las cantidades $(c, a_\alpha | \phi_j \rangle$ son las funciones radiales para $r_\alpha = a_\alpha$ que corresponden a una base completa y que son regulares en el origen y en general son no ortogonales fuera de la región interna. La notación $(c, a_\alpha | \phi_j \rangle$ denota integración sobre todas las coordenadas, excepto sobre r_α .

$$(c, a_\alpha | \phi_j \rangle \equiv (c | \phi_j \rangle_{r_\alpha = a_\alpha} \tag{2.46}$$

Si nosotros multiplicamos por el factor $\left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_c}\right]^{\frac{1}{2}}$ la ec. (2.44), con la intención de hacer más simétrica la expresión de la matriz R nosotros obtenemos una nueva matriz que denotaremos por $\tilde{R}_{cc'}^L(a_\alpha, a_\beta)$ y la ec. (2.44) se escribe:

$$\begin{aligned}
 y_{\alpha c}^{(k)}(a_\alpha) &= \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_c}\right]^{\frac{1}{2}} (c, a_\alpha | \Psi_j \rangle \\
 &= \sum_{\beta} \sum_{c' \in \beta} \tilde{R}_{cc'}^L(a_\alpha, a_\beta) \times \left(a_\beta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial a_c} a_\beta^{\frac{1}{2}} - b_{c'}\right) y_{\beta c'}^{(k)}(a_\beta)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde:

$$\tilde{R}_{cc'}^L(a_\alpha, a_\beta) = \sum_{j, j'} \gamma_{jc}(\mathbf{G}^L)_{j, j'} \gamma_{j'c'} \tag{2.48}$$

$$\gamma_{jc} = \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_c}\right]^{\frac{1}{2}} (c, a_\alpha | \phi_j \rangle \tag{2.49}$$

es conocida como la amplitud del ancho reducido. Las funciones ϕ_j son miembros de una base completa y ortogonal.

En la teoría de Kapur y Peierls, el parámetro $b_{\tilde{c}}$ correspondientes a los canales abiertos son elegidos del siguiente modo:

$$b_{\tilde{c}} = \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \left[\frac{a_\alpha \xi_{\tilde{c}}^{(+)}(a_\alpha)}{\xi_{\tilde{c}}^{(+)}(a_\alpha)} \right] = U(k_{\tilde{c}} a_\alpha) + iP(k_{\tilde{c}} a_\alpha) \tag{2.50}$$

donde:

$$P(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) = (k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \left[G_{l_{\tilde{c}}}^2(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) + F_{l_{\tilde{c}}}^2(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

y

$$U(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) = \left[G_{l_{\tilde{c}}}(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \frac{\partial G_{l_{\tilde{c}}}(k_{\tilde{c}} a_{\alpha})}{\partial a_{\alpha}} + F_{l_{\tilde{c}}}(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \frac{\partial F_{l_{\tilde{c}}}(k_{\tilde{c}} a_{\alpha})}{\partial a_{\alpha}} \right] \times \\ \times P(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) k_{\tilde{c}}^{-1} \quad (2.52)$$

son conocidos como factor de penetración y factor fase, respectivamente.

Definamos

$$I_{\alpha \tilde{c}}(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) = \exp(+i\sigma_c) \left[G_{l_{\tilde{c}}}^2(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) - i F_{l_{\tilde{c}}}^2(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \right] = O_{\alpha \tilde{c}}^*(k_{\tilde{c}} a_{\alpha}) \quad (2.53)$$

suponiendo que Ψ_k satisface las condiciones asintóticas a la frontera tenemos para los canales abiertos:

$$\left(a_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial a_{\beta}} a_{\beta}^{\frac{1}{2}} - b_{\tilde{c}'} \right) y_{\beta \tilde{c}'}^{(k)}(a_{\beta}) \\ = i \left[\frac{\hbar^2 a_{\beta}}{2k_{\tilde{c}'}} \right]^{\frac{1}{2}} O_{\beta \tilde{c}'}^{-1}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta}) \delta_{k_{\tilde{c}'}} \left[O_{\beta \tilde{c}'}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta}) \frac{\partial I_{\beta \tilde{c}'}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta})}{\partial a_{\beta}} - \right. \\ \left. - I_{\beta \tilde{c}'}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta}) \frac{\partial O_{\beta \tilde{c}'}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta})}{\partial a_{\beta}} \right] \quad (2.54) \\ = i \left[\frac{\hbar^2 a_{\beta}}{2k_{\tilde{c}'}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(-2ik_{\tilde{c}'} \right) O_{\beta \tilde{c}'}^{-1}(k_{\tilde{c}'} a_{\beta}) \delta_{k_{\tilde{c}'}} ,$$

para los canales cerrados:

$$\left(a_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial a_{\beta}} a_{\beta}^{\frac{1}{2}} - b_{\tilde{c}'} \right) y_{\beta \tilde{c}'}^{(k)}(a_{\beta}) = 0 \quad (2.55)$$

Con lo cual la ec. (2.47) se escribe:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hbar}{2k_c a_\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} (I_{\alpha c} \delta_{ck} - O_{\alpha c} S_{ck}) &= \sum_{\beta} \sum_{\tilde{c}' \in \beta} \tilde{R}_{c\tilde{c}'}^L \left[\frac{\hbar}{2k_{\tilde{c}'} a_\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(-2ik_{\tilde{c}'} \right) O_{\beta \tilde{c}'}^{-1} (k_{\tilde{c}'} a_\beta) \delta_{\tilde{c}' k} \end{aligned} \quad (2.56)$$

y

$$S_{ck} = \left[\frac{I_{\alpha c}}{O_{\alpha k}} \right] \delta_{ck} + i \frac{(2k_c a_\alpha)^{\frac{1}{2}} (2k_k a_\alpha)^{\frac{1}{2}}}{O_{\alpha c} O_{\alpha k}} \tilde{R}_{ck} \quad (2.57)$$

Definiendo:

$$\left[\frac{I_{\alpha c}}{O_{\alpha k}} \right]^{\frac{1}{2}} = \exp(i\sigma_c) \left[\frac{(G_{l_c} - iF_{l_c})}{(G_{l_c} + iF_{l_c})} \right] = \exp [i(\sigma_c - \phi_c)] = \exp [i\Omega_c] \quad (2.58)$$

donde:

$$\phi_c = \arctan(G_{l_c}/F_{l_c}) \quad (2.59)$$

es conocido como el desfaseamiento de la esfera rígida, ya que éste es el desfaseamiento que produce una esfera infinitamente repulsiva de radio a_α . La ec.(2.47) puede ser escrita para los canales abiertos de la siguiente manera:

$$S_{\tilde{c}k} = \exp [i(\Omega_{\tilde{c}} + \Omega_k)] \left[\delta_{\tilde{c}k} + i \left[\frac{2k_{\tilde{c}} a_\alpha}{I_{\alpha \tilde{c}} O_{\alpha \tilde{c}}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \tilde{R}_{\tilde{c}k}^L \times \left[\frac{2k_k a_\beta}{I_{\beta k} O_{\beta k}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.60)$$

ahora definamos:

$$P_{\tilde{c}} = \frac{k_{\tilde{c}} a_\alpha}{I_{\alpha \tilde{c}} O_{\alpha \tilde{c}}} \quad (2.61)$$

Definamos la amplitud de la anchura parcial:

$$\Gamma_{\tilde{c}}^{\frac{1}{2}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \gamma_{\tilde{c}} \quad (2.62)$$

entonces:

$$S_{ck}^{\sim} = \exp \left[i(\Omega_c^{\sim} + \Omega_k) \right] \left[\delta_{ck}^{\sim} + i\Gamma_{jc}^{\frac{1}{2}} G_{jj'}^L \Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.63)$$

En la teoría de Kapur-Peierls se supone que la base de los estados $|\phi_j\rangle$ son autoestados del hamiltoniano total:

$$\mathbf{H} |\phi_j\rangle = \varepsilon_J |\phi_j\rangle \quad (2.64)$$

y obedece la siguiente condición de frontera:

$$\mathfrak{S}(\mathbf{b}_c) |\phi_j\rangle = 0 \quad (2.65)$$

donde el parámetro b_c está definido por las ecs. (2.50) y (2.55). En este caso, los valores propios de la energía son en general complejos. Para esta representación ortogonal el operador de Green está dado por:

$$\left(G^L \right)_{jj'} = \left\langle \tilde{\phi}_j | \mathbf{H} + \mathfrak{S}(\mathbf{b}_c) - \mathbf{E} | \phi_{j'} \right\rangle = (\varepsilon_J - E) \delta_{jj'} \quad (2.66)$$

donde $\tilde{\phi}_j$ es el complejo conjugado de ϕ_j , que es parte radial de la función de onda. Por lo cual escribimos la ec.(2.63) como:

$$S_{ck}^{\sim} = \exp \left[i(\Omega_c^{\sim} + \Omega_k) \right] \left[\delta_{ck}^{\sim} + i\Gamma_{jc}^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_J - E)^{-1} \Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.67)$$

Esta última ec. tiene la información física relevante disponible de manera inmediata y resulta de mucha utilidad para entender el comportamiento de los elementos de la matriz de dispersión por ejemplo: cuando $(\varepsilon_J - E) \approx 0$ entonces esperamos un gran aumento en el valor del elemento S_{ck}^{\sim} , es decir, se observa un crecimiento la sección eficaz (resonancia).

En el siguiente capítulo presentaremos el modelo al cual se le aplicará el formalismo de la matriz S presentado anteriormente.

Capítulo 3

Las Moléculas Nucleares y el Modelo Simpléctico en una Dimensión

Desde que Bromley [13] en 1960 descubriera una estructura resonante en la sección eficaz para el sistema de $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ se han encontrado muchas otras estructuras similares como por ejemplo en $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$, $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$, $^{16}\text{O} + ^{24}\text{Mg}$. A estas estructuras se les ha dado el nombre de moléculas nucleares, y en general, llamaremos molécula nuclear a un sistema que consiste de dos ó más núcleos enlazados a través de su superficie por un potencial cuasi molecular. Entre los modelos propuestos para las moléculas nucleares se encuentra “El modelo simpléctico de las moléculas nucleares” MSMN, elaborado por el Dr. Hess y colaboradores [3]. El MSMN es una extensión de “El modelo simpléctico para el núcleo” MSN [2] que incluye el fenómeno de las moléculas nucleares.

Este capítulo tiene por objetivo presentar brevemente el MSMN para el caso de una dimensión. Las siguientes líneas están basadas en los trabajos de Hess [15] y Benitez [14].

3.1 Modelo Simpléctico del Núcleo en una Dimensión

Repitiendo el esquema tridimensional empezaremos describiendo la interacción de un nucleón en un núcleo haciendo la aproximación de campo promedio. Este campo promedio será el del oscilador armónico y aún cuando existen otros potenciales que aproximan mejor el campo promedio (por ejemplo el potencial de Wood-Saxon) tomaremos el del oscilador armónico por sus propiedades matemáticas que nos permiten entre otras cosas, dividir el espacio de Hilbert de las funciones de onda en un cierto número de subespacios que el hamiltoniano no puede conectar y además permite separar las componentes del centro de masa de la función de onda de muchas partículas. Aunado todo esto a la sencillez que representa trabajar con el oscilador armónico. El Hamiltoniano del oscilador armónico para un sistema de A partículas en una dimensión es:

$$H_0 = \sum_{s=1}^{A-1} \left(\frac{1}{2m} P_s^2 + \frac{m\omega^2}{2} X_s^2 \right) \quad (3.1)$$

donde las coordenadas X_s y su momento conjugado P_s son las coordenadas de Jacobi y la s es el subíndice que identifica a las partículas, además en la ec.(3.1) ya se ha extraído el centro de masa y como estamos en el caso de una dimensión no existe la interacción espín órbita y el término $\sum l_s^2$ correspondiente al modelo tridimensional. Por lo general se escribe Hamiltoniano de la ec.(3.1) en términos de los operadores de creación y aniquilación de fonones de oscilación, que están definidos como:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (X_s - i \frac{P_s}{m\omega}) \\ \xi_s &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (X_s + i \frac{P_s}{m\omega}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Estos operadores cumplen con la siguiente regla de conmutación:

$$[\eta_i, \xi_j] = \delta_{i,j} \quad (3.3)$$

y la ω representa la frecuencia del oscilador, con lo anterior podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega \sum_{s=1}^{A-1} \left(\eta_s \xi_s + \frac{1}{2} \right). \quad (3.4)$$

Los niveles de energías de este Hamiltoniano están separados por intervalos constantes de $\hbar\omega$. Lo anterior nos invita a hacer el siguiente cambio de notación:

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega\mathbf{N} .$$

Los estados del oscilador armónico están por $| N \rangle$, donde N denota los autoestados del operador \mathbf{N} . Su expresión explícita es:

$$| N, N_0 \rangle = \mathcal{N}_{N_0, n} \sum_{s=1}^{A-1} (\eta_s \xi_s)^{\frac{N - N_0}{2}} | N \rangle . \quad (3.5)$$

donde hemos usado N_0 para denotar el número de cuántos del estado más bajo y cómo los estados se llenan de manera densa, partiendo del estado más bajo y tomando en cuenta los efectos del principio de exclusión de Pauli, colocaremos a lo más dos nucleones en cada nivel, de modo que si tenemos cuatro nucleones, colocaremos dos en la capa 0 (o estado base) y dos en la capa 1 (primer estado excitado) y por lo cual tendremos 4 cuántos de oscilación en el estado más bajo. Con lo cual tenemos $N_0 = 4 + \frac{1}{2}(4 - 1)$, donde el último término representa la energía del punto cero, el factor de normalización de la ec.(3.5) es:

$$\mathcal{N}_{N_0, n} = \sqrt{\frac{(N_0 - 1)!}{(N_0 + n - 1)! 4^n n!}} ,$$

este factor de normalización se calcula en ref.[14].

El paso siguiente consiste en introducir una interacción residual en el hamiltoniano. En tres dimensiones el ansatz usado para nucleones deformados es una interacción cuádrupolo-cuádrupolo. El principal argumento para esto es el hecho que en los núcleos deformados la interacción de largo alcance es la que domina y esto puede ser modelado por una interacción cuádrupolo-cuádrupolo. Por supuesto que para nuestro caso unidimensional no existe interacción cuádrupolo-cuádrupolo, pero podemos introducir una interacción equivalente, llamada interacción monopolar. Es importante tener cuidado ya que esta interacción es equivalente a la interacción monopolar en tres dimensiones. Escribamos pues el operador monopolar que usaremos:

$$\mu^2 \mathbf{Q} = \mu^2 \sum_{s=1}^{A-1} X_s^2 \quad (3.6)$$

donde $\mu = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ es la longitud del oscilador y el operador se escoje de modo que no tenga unidades. Tomando en consideración lo anterior, se propone para la molécula nuclear en una dimensión el siguiente Hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2}\chi(\mathbf{Q}^2 - (\mathbf{Q}^2)^{TE}) \quad (3.7)$$

donde χ es definido positivo y determina la intensidad de la interacción cuadrupolar. El signo menos indica que la interacción es atractiva y el factor $\frac{1}{2}$ es por conveniencia. Notemos que como χ es definido positivo y como \mathbf{Q} es proporcional al cuadrado de las coordenadas, la corrección de \mathbf{Q}^2 al oscilador armónico es de cuarto orden. El signo negativo en la interacción cuadrupolar produce un oscilador importante para grandes valores de χ por lo cual el potencial residual podría no ser físico. La razón por qué no sería físico es debido a que nosotros comenzamos pidiendo un campo promedio descrito por un oscilador armónico y la interacción \mathbf{Q}^2 debería ser solamente una corrección y no la parte dominante. Más aún, \mathbf{Q}^2 representa también un potencial promedio y para grandes valores de χ , éste produce un campo promedio que difiere bastante del oscilador armónico. En otras palabras, \mathbf{Q}^2 destruye el campo promedio que ha sido determinado con argumentos físicos. Es para solucionar este problema que introducimos otro operador $(\mathbf{Q}^2)^{TE}$ que tiene la propiedad de recuperar el campo promedio del oscilador armónico y aún manteniendo la contribución de la interacción cuadrupolar. Para lograr esto empecemos escribiendo \mathbf{Q} en términos de los operadores η_s y ξ_s con la ayuda de la ec.(3.2)

$$\mathbf{Q} = N + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

donde se ha definido:

$$\mathbf{B}^\dagger = \sum_s^{A-1} \eta_s \eta_s \quad \mathbf{B} = \sum_s^{A-1} \xi_s \xi_s \quad (3.9)$$

Ahora determinemos la contribución del promedio de \mathbf{Q}^2 , calculemos primero la contribución diagonal de la interacción 'cuadrupolar' con respecto al estado $|N, N_0\rangle$:

$$\frac{\langle N, N_0 | \mathbf{Q}^2 | N, N_0 \rangle}{\dim(N)} \quad (3.10)$$

donde \dim es la dimensión de la capa N como para el oscilador unidimensional es uno tenemos por resultado:

$$\frac{\langle N, N_0 | \mathbf{Q}^2 | N, N_0 \rangle}{\dim(N)} = (N_0 + 2n)(N_0 + n + 1) + 2n(N_0 + n - 1) \quad (3.11)$$

donde n es el número total de cuantos de excitación divididos entre dos. Definamos el operador $2\mathbf{n} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0$, donde \mathbf{N}_0 es un operador que actúa solamente en el estado $|N, N_0\rangle$. De esta manera definimos el operador TE 'trace equivalent part' como:

$$\left(\mathbf{Q}^2\right)^{TE} = (\mathbf{N}_0 + 2\mathbf{n})(\mathbf{N}_0 + \mathbf{n} + 1) + 2\mathbf{n}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{n} - 1) \quad (3.12)$$

Finalmente el Hamiltoniano de nuestro modelo simpléctico para el núcleo en una dimensión es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \hbar\omega\mathbf{N} - \frac{\chi}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left[(\mathbf{B}^\dagger)^2 + (\mathbf{B})^2 \right] + \left[\frac{1}{2}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{B} + \mathbf{B}^\dagger\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{B} + \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B} \right] - \right. \\ & \left. - 2\mathbf{n}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{n} - 1) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1.1 Cálculo de los Elementos de Matriz del Hamiltoniano

Los cálculos explícitos de los elementos de matriz del Hamiltoniano de MSN en una dimensión que aparece en la ec. (3.13) han sido realizados en ref.[14] y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle N', N_0 | \mathbf{H} | N, N_0 \rangle = & -\frac{\chi}{2} \sqrt{n(n-1)(N_0+n-1)(N_0+n-2)} \delta_{N', N-4} \\ & -\chi(N-1) \sqrt{n(N_0+n-1)} \delta_{N', N-2} + \hbar\omega \delta_{N', N} \\ & -\frac{\chi}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)(N_n+n)(N_0+n+1)} \delta_{N', N+4} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Con la intención de obtener el espectro del Hamiltoniano anterior y aclarar el comportamiento del sistema se ejemplifica ref.[14] para el caso de un sistema de diez nucleones (5 primeras capas ocupadas) y considerando 20 estados excitados, para diferentes valores del parámetro χ . Los resultados son se muestran en la fig.(3.1).

En esta figura podemos notar primeramente que cuando $\chi \approx 0$ los niveles de energía se encuentran equidistantes, como era de esperarse, y en la medida que aumenta el parámetro χ el cambio en los niveles de energía es

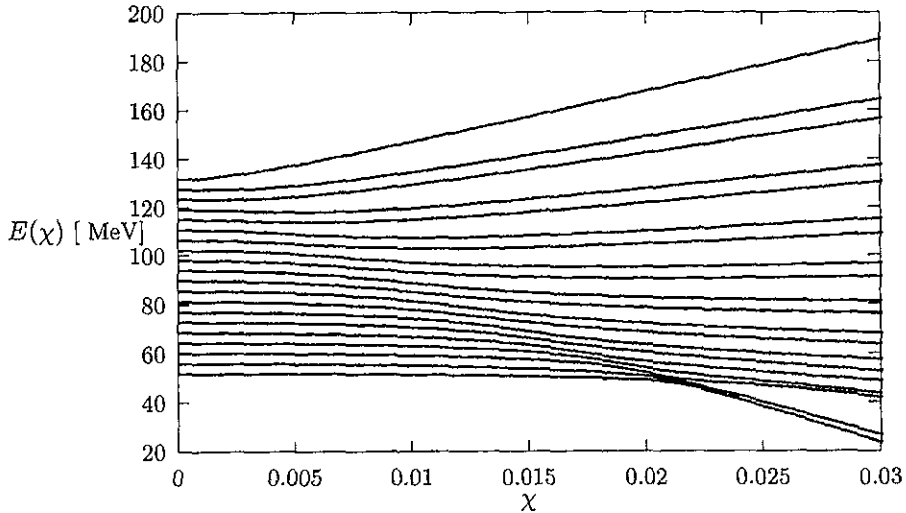


Figura 3.1: Espectro de energía para un sistema de 10 nucleones, considerando 20 estados excitados

pequeño. Cuando χ adquiere el valor 0.02 los niveles de energía experimentan variaciones muy marcadas.

Para entender este comportamiento es muy útil observar la fig. 3.2 en la cual se presenta el valor de expectación del número de cuantos de excitación.

Para valores pequeños de χ , el valor de expectación es muy próximo a 1 cuando $\chi < 0.02$. En este caso podemos decir que prácticamente no hay mezclas de los estados; pero para $\chi \geq 0.02$ el valor de expectación se ve incrementado de manera significativa, lo cual indica que existe una fuerte mezcla de estados y de esta forma aumenta el número de estados excitados que contribuyen al estado base. El valor constante que parece adquirir hacia el final proviene de considerar sólo 20 estados.

3.1.2 Modelo Simpléctico de la Molécula Nuclear

El modelo antes propuesto posee una estructura algebraica que fue discutida en la ELAF [15] y las conclusiones principales que son pertinentes mencionar aquí son:

- 1) Los operadores B^\dagger , B y N son cerrados bajo la operación de con-

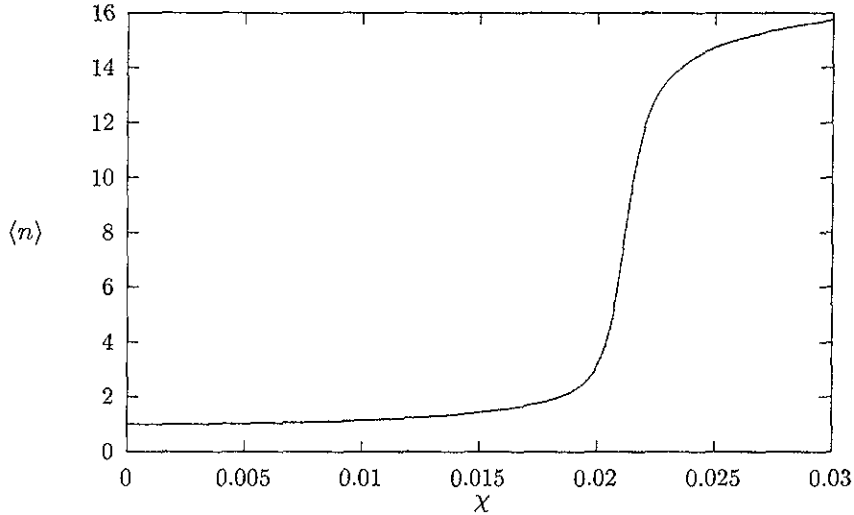


Figura 3.2: Variación del valor de expectación del número de cuantos de excitación, con respecto a χ para un sistema de 10 nucleones

mutación.

2) La estructura algebraica asociada es la del grupo simpléctico $Sp(2, R)$.

3) N es el generador del grupo de rotaciones $U(1)$ (en el caso tridimensional sería $SU(3)$ que además de estar formado por rotaciones es el grupo de simetría del hamiltoniano del oscilador armónico).

Ahora denotemos a O por un operador del álgebra simpléctica. Este operador estaría formado por tres operadores, también pertenecientes al álgebra simpléctica. Los dos primeros actuando (cada uno respectivamente), sobre un cúmulo y el tercer operador que describa el movimiento relativo de los núcleos. La manera explícita de realizar esto puede consultarse en las refs. [16] y [17] La expresión es:

$$O = O(1) + O(2) + O(r) \quad (3.15)$$

donde el argumento r se refiere a la coordenada radial. Es conveniente mencionar que ambos lados de la ec. (3.15) se pueden relacionar mediante una transformación ortogonal.

Cuando tenemos un sólo núcleo usamos un par de constantes: $\hbar\omega$ y χ , ambas son características de un núcleo en particular. Pero en el caso de dos núcleos interactuando, esto ya no puede ser así, debido a nuestras peticiones de principio; es decir, que cuando los dos núcleos estén sumamente lejos, en general tendrán cada uno un par de constantes distintas y cuando la distancia entre los núcleos tienda a cero el modelo tiene que colapsarse en el de un sólo núcleo, que por supuesto no puede tener el mismo par de constantes. Por lo anterior y apoyándonos en la expresión (3.15) proponemos unos nuevos operadores \mathbf{N} y $\chi\mathbf{Q}^2$ con la siguiente forma:

$$\hbar\omega\mathbf{N} \rightarrow \hbar\omega_1(r)\mathbf{N}(1) + \hbar\omega_2(r)\mathbf{N}(2) + \hbar\omega_{12}(r)\mathbf{N}(r) \quad (3.16)$$

$$\chi\mathbf{Q}^2 \rightarrow \chi_1(r)\mathbf{Q}^2(1) + \chi_2(r)\mathbf{Q}^2(2) + \chi_{12}(r)\mathbf{Q}^2(r) + \quad (3.17)$$

$$+ 2\chi_{12}(r)(\mathbf{Q}(1)\mathbf{Q}(2) + \mathbf{Q}(1)\mathbf{Q}(r) + \mathbf{Q}(2)\mathbf{Q}(r))$$

Aquí nuevamente la r que aparece en los términos de interacción es un parámetro de distancia relativa, es decir, los parámetros de interacción varían en función de la distancia. La propuesta de las ecs. (3.16) y (3.17) la podemos hacer viable, siempre y cuando los parámetros de interacción cumplan con las siguientes condiciones límites:

$$\hbar\omega_k(r) = \begin{cases} \hbar\omega_{k,0} & \text{para } r > sep \\ \hbar\omega & \text{para } r = 0 \end{cases}$$

$$\hbar\omega_{12}(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r > sep \\ \hbar\omega & \text{para } r = 0 \end{cases}$$

$$\chi_k(r) = \begin{cases} \chi_{k,0} & \text{para } r > sep \\ \chi & \text{para } r = 0 \end{cases}$$

$$\chi_{1,2}(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r > sep \\ \chi & \text{para } r = 0 \end{cases}$$

donde el índice $k = 1, 2$ se refiere al número de cúmulo, el índice "o" indica el valor cuando los núcleos están separados y los parámetros sin índice se refiere al valor de dicho parámetro cuando el sistema esta unido, y r_{sep} corresponde a la distancia de separación de los cúmulos que tomaremos como:

$$r_{sep} = r_0(A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}})$$

Para finalizar esta presentación discutiremos ahora la manera de cómo se ha elegido estos parámetros. Estos los dividiremos en dos grupos, los parámetros que se refieren a cada cúmulo por separado y los parámetros que describen la interacción entre los cúmulos. Empecemos con los segundos:

$$\hbar\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2)g(r)$$

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2)g(r) \tag{3.18}$$

donde se han tomado los promedios del valor del parámetro para cada cúmulo, la función $g(r)$, depende del parámetro de distancia r , tiene que valer 1 cuando la distancia relativa es cero y tomar el valor cero cuando los núcleos se han separado. Una propuesta para la función es ref. [17]:

$$g(r) = 1 - r/r_{sep} \tag{3.19}$$

nuevamente aquí hemos tomado $r_{sep} = r_0(A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}})$.

Es fácil extrapolar el operador $\chi N_0 n$ al caso de la molécula nuclear ref. [15] y [14] con tan sólo pedir que se cumplan las condiciones límites. Considerando lo arriba expuesto el hamiltoniano de la molécula nuclear toma la forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(1) + \mathbf{H}(2) + \mathbf{H}_{int} \tag{3.20}$$

Donde nuevamente los dos términos del lado derecho de ec. (3.20) corresponden a los hamiltonianos de los núcleos separados, el último término representa el hamiltoniano de interacción que tiene la forma:

$$\mathbf{H}_{int} = \mathbf{H}(1,2) + \mathbf{H}(1,r) + \mathbf{H}(2,r) + \mathbf{H}(r) + \mathbf{H}_{TE} . \tag{3.21}$$

Aquí también el último término tiene la misma forma que $\mathbf{H}(k)$, pero ahora con el índice r (con $\mathbf{B}_r = \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r$, etc.). El primer término describe la interacción del primero y segundo cúmulo que no envuelven al movimiento relativo de k -ésimo cúmulo con el movimiento relativo, el cuarto término se refiere exclusivamente al movimiento relativo. El último término da la contribución "T E" que no puede ser asimilado en los dos primeros términos de ec.(3.18). La forma explícita de los términos son ($k= 1,2$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(1, 2) &= -\chi_{12} \left\{ \frac{1}{4} \mathbf{B}^\dagger(1) \mathbf{B}(2)^\dagger + \frac{1}{4} (\mathbf{B}^\dagger(1) \mathbf{B}(2) + \mathbf{B}^\dagger(2) \mathbf{B}(1)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^\dagger(1) \mathbf{N}(2) + \mathbf{N}(2) \mathbf{B}(1) + \mathbf{B}^\dagger(2) \mathbf{N}(1) + \mathbf{N}(1) \mathbf{B}(2)) \right\} \\
\mathbf{H}(k, r) &= -\chi_{12} \left\{ \frac{1}{4} \mathbf{B}^\dagger(k) \mathbf{B}(r)^\dagger + \frac{1}{4} (\mathbf{B}^\dagger(k) \mathbf{B}(r) + \mathbf{B}^\dagger(r) \mathbf{B}(k)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^\dagger(k) \mathbf{N}(r) + \mathbf{N}(r) \mathbf{B}(k) + \mathbf{B}^\dagger(r) \mathbf{N}(k) + \mathbf{N}(k) \mathbf{B}(r)) \right\} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{TE} = -\chi_{12} \{ \mathbf{n} N_0 - \mathbf{n}(1) N_{0,1} - \mathbf{n}(2) N_{0,2} \}$$

Donde $\mathbf{n} = \mathbf{n}(1) + \mathbf{n}(2) + (\mathbf{n}(r) - 1/2)/2$ y N_0 se refieren respectivamente a las suma de las excitaciones de la segunda capa en el sistema unido y el número cuántico N_0 en el sistema unido. Los elementos de matriz se pueden calcular exactamente de la misma manera como se hizo previamente en el caso de un sólo núcleo. La base de estados están ahora dados por:

$$|\Psi\rangle = |N(1)\rangle |N(2)\rangle |N(r)\rangle \quad (3.23)$$

donde los estados del movimiento relativo corresponden al oscilador armónico en una dimensión.

En cada cúmulo, la antisimetría está automáticamente garantizada. Sin embargo, la antisimetría no se conserva en el sistema completo. Los estados bases de la ec.(3.23) deben ser totalmente antisimetrizados. No obstante, como para grandes distancias el traslape de las funciones de onda de los cúmulos es pequeño (como en el caso de las moléculas nucleares) el principio de Pauli no es fuertemente violado. Para grandes traslapes, es decir, especialmente cerca de $r=0$, deberíamos imponer la condición de Winder-muth ref.[16], que dice el número total de cuantos (para el primer núcleo, el segundo y el oscilador relativo) tiene que ser igual al número de cuantos de estados ocupados. Por supuesto que en el problema unidimensional esto es artificial ya que no existe el espín. Podemos tomar en consideración la violación del principio de Pauli proponer una elección apropiada de la dependencia de los parámetros de el modelo cómo función de la distancia relativa [14]. Para esto deberemos primero determinar como los parámetros básicos del modelo tienen que desarrollarse cómo una función en el parámetro de la distancia r . La siguiente discusión está basada en la dada en ref. [17], donde

el parámetro $\hbar\omega$ de un núcleo es una función del número de nucleones es determinado.

En las líneas anteriores se ha presentado a grandes rasgos el MSMN en una dimensión; para una revisión más detallada remitimos al lector a la ref. [14].

Capítulo 4

Sección de Dispersión para el Modelo Simpléctico

Apesar de la importancia fundamental de obtener el espectro de energía lo que realmente se mide en un experimento de colisión entre iones pesados es la sección eficaz diferencial, he aquí la importancia del cálculo de la sección eficaz diferencial para cualquier modelo. Por este motivo nos hemos propuesto calcular la sección eficaz diferencial para el Modelo Simpléctico de la Molécula Nuclear en una dimensión

En los capítulos anteriores se reunieron los elementos teóricos indispensables que nos permitirán calcular la matriz de dispersión para el modelo simpléctico de la molécula nuclear en el caso de una dimensión (momento angular cero). Antes de calcular la matriz de dispersión procederemos a estudiar el modelo propuesto para un conjunto de parámetros. Esto nos permitirá tener una comprensión más clara de modelo. Posteriormente veremos la forma en que se modifican los elementos de la matriz de dispersión, cuando la base de eigenfunciones del espacio interno no sea ortonormal. Finalmente utilizaremos un conjunto de parámetros y obtendremos los resultados de la sección de dispersión para el canal elástico $0 \rightarrow 0$.

4.1 El Modelo Simpléctico en una Dimensión

El modelo propuesto en el capítulo tres fue presentado de manera muy general, nuestro interés ahora consiste en ejemplificar el modelo para de esta manera conocerlo mejor. El ejemplo que se presenta en esta sección es tomado de la ref. [14] y lo incluimos con la intención de hacer este trabajo

lo más autocontenido posible.

Empecemos indicando que las unidades de medición que usaremos en los cálculos son las que comunmente se utilizan en la física nuclear, a saber, $mc^2 = 938 \text{ MeV}$, $\hbar c = 197 \text{ MeV} - \text{fm}$ y tomaremos $r_0 = 1.2 \text{ fm}$.

El modelo propuesto en el capítulo anterior está formado por diversos elementos. Veamos como se comportan estos diferentes elementos para un juego particular de parámetros.

Comencemos recordando la condición que se introdujo para no violar de manera flagrante el principio de Pauli, cuya característica era: en el límite cuando $r \rightarrow 0$ se aproxima a la condición de Wildermuth, el efecto de esta condición para el k -ésimo cúmulo es que su número de cuantos tiende a crecer cuando la distancia tiende a cero según la expresión:

$$N_k = \frac{R_k}{R_{k,0}} N_{k,0} \quad (4.1)$$

para el oscilador de la parte radial, el número de cuantos también cambia con la distancia entre los cúmulos de la siguiente manera:

$$N_r(r) = \left((\xi r)^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{mc^2}{2(\hbar c)^2} (\hbar \omega_{12}(r))^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} r + \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

donde se ha utilizado:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega_{12}}{2\hbar}} \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}}$$

Las figuras (4.1) y (4.2) nos muestran como varían $N_k(r) - N_{k,0}(r)$ y $N_r(r)$ con respecto a la distancia relativa de los cúmulos.

En la figura (4.1), se puede apreciar cómo para ambos cúmulos el número de cuantos tiende a aumentar al disminuir la distancia relativa.

En la figura (4.2) se observa que los cuantos del oscilador relativo tienen un mínimo entre la distancia relativa igual a cero y la distancia de separación. De esta forma podemos implementar $N_k(r)$ y $N_r(r)$ a la energía de estado base y ver que para ciertos valores de la distancia relativa la energía tiende a aumentar e interpretar esto como una consecuencia del principio de exclusión de Pauli. En la figura (4.3) se muestra la variación del parámetro χ_{12} según la ec. (3.18) para un sistema simétrico.

Se observa que para una distancia $r = r_{sep}$ el valor del parámetro χ_k es $\chi_k = \chi_{k,0} = 0.015$ y cuando decrece la distancia disminuye de un modo uniforme el valor de χ_k . Cuando $r = 0$ el valor del parámetro χ es: $\chi \approx$

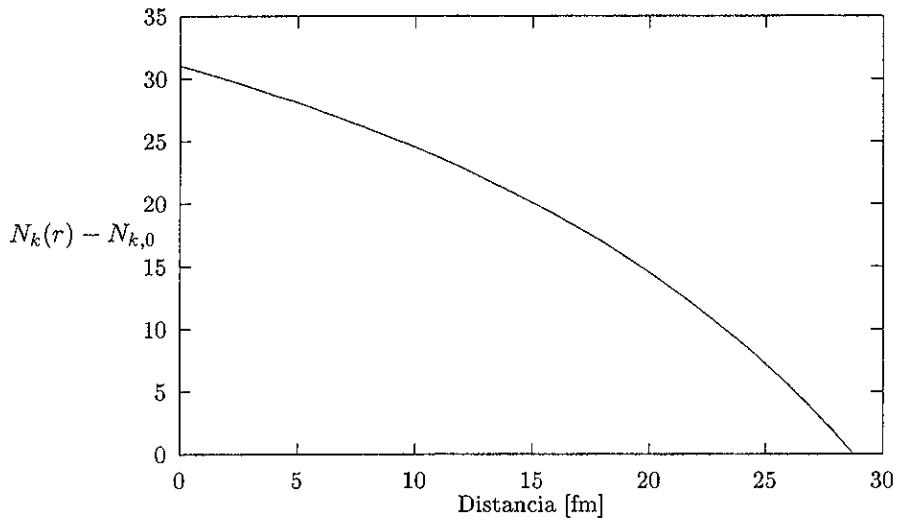


Figura 4.1: Variación del número de cuantos del k -ésimo cúmulo, con respecto a la distancia, para un sistema simétrico de 12 nucleones en cada cúmulo y con $\chi_{k,0} = 0.015$.

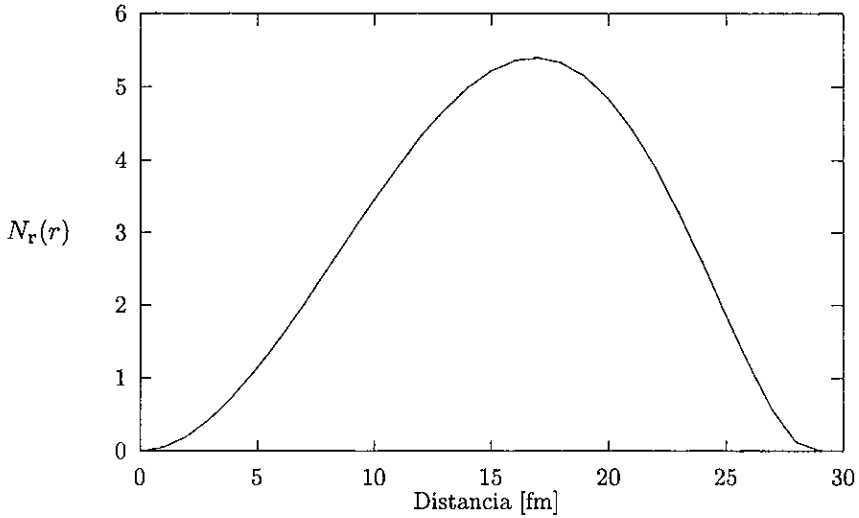


Figura 4.2: Variación del número de cuantos del oscilador relativo, con respecto a la distancia entre cúmulos para un sistema con 12 nucleones en cada cúmulo, con $\chi_{k,0} = 0.015$.

0.05, que por definición es el valor de la constante de acoplamiento para la interacción cuadrupolar del sistema unido. También se muestra que $\chi_{1,2}$ tiende a cero cuando la distancia relativa tiende a r_{sep} tal como era de esperarse.

Para este mismo sistema simétrico presentamos los parámetros $\hbar\omega_k$ fig.(4.4) y $\hbar\omega_{12}$ fig.(4.5), que están definidos por la ec. (3.18).

Después de ver el comportamiento de los parámetros del modelo pasamos ahora al cálculo de la energía del estado base de la molécula nuclear, para el sistema compuesto por 12 nucleones en cada cúmulo y un valor del parámetro $\chi = 0.05$.

En la fig. (4.6) se puede ver que la energía del estado base tiene un mínimo cerca del origen cuando el sistema se ha unido completamente. También se aprecia un mínimo cerca de la distancia de separación, que es originado por la atracción cuadrupolar. Para distancias menores que este mínimo local, se observa un incremento de la energía debido a que los nucleones empiezan a ocupar niveles más altos, pues el principio de exclusión

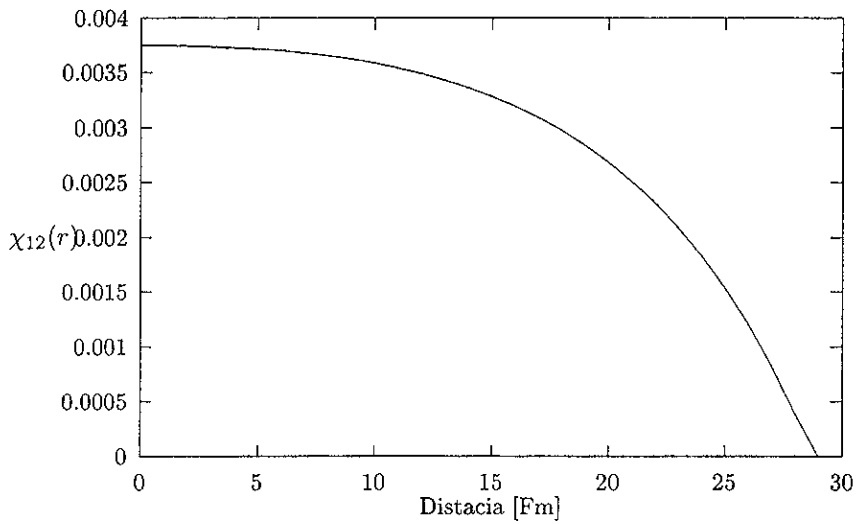


Figura 4.3: Variación de la interacción cuadrupolar del k -ésimo cúmulo, con respecto a la distancia relativa (para un sistema de 12 nucleones en cada cúmulo y $\chi_{k,0} = 0.015$).

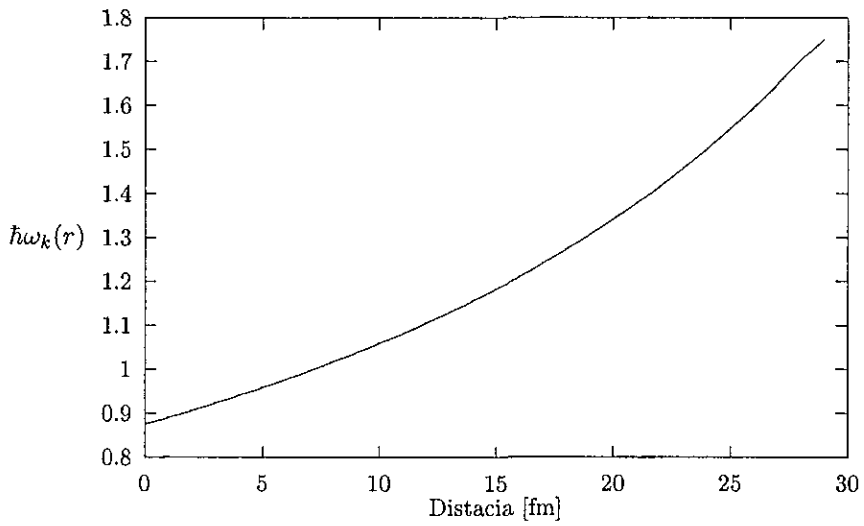


Figura 4.4: Variación del término $\hbar\omega_k$, con respecto a la distancia relativa (para un sistema de 12 nucleones en cada cúmulo y $\chi_{k,0} = 0.015$).

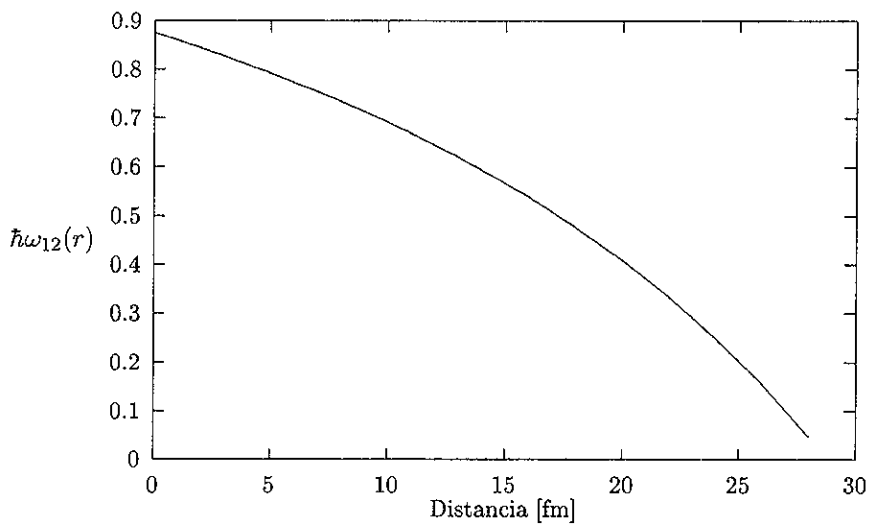


Figura 4.5: Variación del parámetro $\hbar\omega_{12}$, con respecto a la distancia relativa (para un sistema de 12 nucleones en cada cúmulo y $\chi_{k,0} = 0.015$).

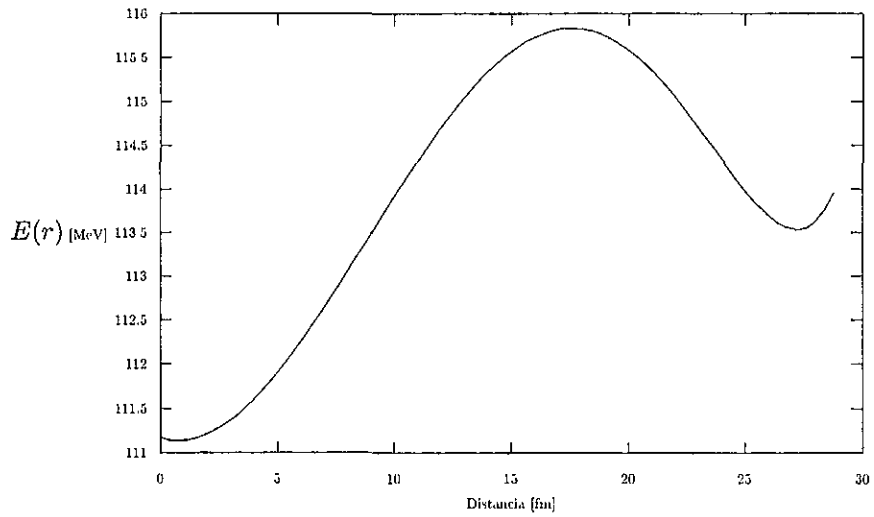


Figura 4.6: Variación de la energía del estado base, para un sistema de dos cúmulos con 12 nucleones cada uno y $\chi_{k,0} = 0.015$, con respecto a la distancia relativa entre ellos.

de Pauli les impide ocupar los mismos niveles, esta tendencia continúa hasta que la atracción nuclear domina nuevamente. En este punto se observa claramente que hay al menos un estado (el estado base) en el cual el sistema se comporta como una molécula unida por un potencial superficial, es decir, como una molécula nuclear.

4.2 La Matriz S para una Base no Ortonormal

En los experimentos de dispersión de iones pesados se observa que para grandes distancias la interacción predominante es la coulombiana y para distancias pequeñas la interacción dominante es la de origen nuclear. Es a partir de este hecho que en la teoría de Kapur-Peierls se divide al espacio en una región interna y una región externa. Además en dicha teoría se supone que el conjunto de funciones de onda $|c\rangle$ para el espacio interno forman una base ortonormal. En nuestro modelo tenemos un Hamiltoniano definido sobre todo el espacio, de manera tal que las eigenfunciones del Hamiltoniano son en principio ortogonales entre sí y pueden ser escritas como un conjunto ortonormal extendido sobre todo el espacio. Por lo tanto, para aplicar el formalismo de la matriz S a nuestro modelo tenemos en principio que ortonormalizar nuestra base de eigenfunciones, restringiéndolas al espacio interno. Para hacer lo anterior procederemos según Moshinsky-Seligman ref.[18].

Como nuestras funciones propias no son ortogonales en el espacio interno esperamos que en general:

$$\int_I \phi_{j'}^*(r) \phi_j(r) dr = [j' | j] \neq 0 \quad (4.3)$$

La integral anterior se extiende únicamente sobre el espacio interno que denotaremos con la letra I. Definamos la matriz M, como la matriz que está formada por estos productos escalares:

$$M = \left\| [j' | j] \right\| \quad (4.4)$$

Como las funciones son todas ellas una base para el espacio interno (y además linealmente independientes) los valores propios de (4.3) son reales y positivos, por lo cual la matriz M tiene una inversa que denotaremos como M^{-1}

$$M^{-1} \equiv \left\| (j' | j) \right\| \quad (4.5)$$

Ahora definamos el conjunto de los estados duales como:

$$\hat{\phi}_j^* (r) = \sum_{j'} \phi_j^* (r) (j' | j) \quad (4.6)$$

Donde nuevamente la I denota una integración sobre el espacio interno. Es inmediato demostrar:

$$\int_I \hat{\phi}_{j'}^* (r) \phi_j (r) dr = \delta_{j'j} \quad (4.7)$$

Identifiquemos al estado dual con un paréntesis cuadrado, definiéndolo por:

$$[\phi_j] = \sum_{j'} \hat{\phi}_{j'}^* (r) (j' | j) \quad (4.8)$$

Con esta notación la ecuación (4.7) se escribe como:

$$[\phi_{j'} | \phi_j] = \delta_{j'j} \quad (4.9)$$

De esta manera satisfacemos el requerimiento de una base ortonormal. Nos resta ahora ver como se escriben los elementos de la matriz S en términos de las funciones propias del Hamiltoniano simpléctico. Para hacer esto basta con cambiar los vectores duales $\langle \phi_{j'} |$ de todo el espacio, por los vectores duales del espacio interno $[\phi_j]$ definidos en la ec.(4.9).

Para obtener la matriz S partamos de la expresión (2.63) que nos da el elemento S_{ck}

$$S_{ck} = \exp \left[i(\Omega_{\tilde{c}} + \Omega_k) \right] \left[\delta_{ck} + i\Gamma_{\tilde{c}}^{\frac{1}{2}} G_{j'j}^L \Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.10)$$

donde se entiende una suma sobre los índices repetidos y cuyas partes constituyentes, según lo visto en el capítulo 2, son:

$$\Gamma_{\tilde{c}}^{\frac{1}{2}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \gamma_{\tilde{c}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_{\tilde{c}}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{c} | \phi_j \rangle_{r_\alpha = a_\alpha} \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \gamma_{j'k} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_k} \right]^{\frac{1}{2}} \langle \phi_{j'} | k \rangle_{r_\alpha = a_\alpha}. \quad (4.12)$$

Sumando la ec. (2.42) con la ec. (2.43) obtenemos para \mathbf{G}^L

$$(\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c)) \mathbf{G}^L = \mathbf{1} \quad (4.13)$$

Cambiando $\langle \phi_j |$ por $[\phi_j |$ tenemos:

$$\Gamma_{j\tilde{c}}^{\frac{1}{2}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \gamma_{j\tilde{c}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_{\tilde{c}}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{c} \mid \phi_j \right)_{r_\alpha = a_\alpha} \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \gamma_{j'k} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_k} \right]^{\frac{1}{2}} [\phi_{j'} | k]_{r_\alpha = a_\alpha} \quad (4.15)$$

utilizando la ec.(4.8) en la ec.(4.15) se escribe:

$$\Gamma_{j'k}^{\frac{1}{2}} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \gamma_{j'k} = (2P_k)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_k} \right]^{\frac{1}{2}} (j'' | j') \langle \phi_{j''} | k \rangle_{r_\alpha = a_\alpha} \quad (4.16)$$

donde nuevamente se entiende una suma sobre los índices repetidos. La ec.(4.13) la podemos considerar como la definición del operador \mathbf{G}^L y veamos ahora como cambiar la representación de la base ortonormal del espacio interno.

Tomemos el valor esperado de la ec.(4.13) para los estados $[\phi_{j'} |$ y $|\phi_j \rangle$ e introduzcamos un desarrollo de la unidad:

$$[\phi_{j'} | \mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c) | \phi_{j''} \rangle [\phi_{j''} | \mathbf{G}^L | \phi_j \rangle = [\phi_{j'} | \mathbf{1} | \phi_j \rangle. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, en la representación matricial el elemento de $j''j'$ de la matriz inversa de \mathbf{G}^L se escribe como:

$$\left(\mathbf{G}^L \right)_{j'j''}^{-1} = [\phi_{j'} | \mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c) | \phi_{j''} \rangle. \quad (4.18)$$

Utilizando la ec.(4.8) podemos escribir la ec.(4.18) como:

$$\left(\mathbf{G}^L \right)_{j'j''}^{-1} = \langle \phi_{j''} | \mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c) | \phi_{j''} \rangle (j''' | j'). \quad (4.19)$$

Donde se ha seguido la convención de Einstein. Escribiendo la ec.(4.19) en notación matricial y tomando la inversa tenemos:

$$\mathbf{G}^L = \mathbf{M} (\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c))^{-1} \quad (4.20)$$

Sustituyendo las ecs. (4.20) (4.16) y (4.14) en (4.10) llegamos ha la expresión para el elemento de matriz S_{ck}

$$S_{\tilde{c}k} = \exp \left[i(\Omega_{\tilde{c}} + \Omega_k) \right] \left[\delta_{\tilde{c}k} + i \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_{\tilde{c}}} \right] (2P_k)^{\frac{1}{2}} (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \left(\tilde{c} \left| \phi_j \right. \right)_{r_\alpha=a_\alpha} \left[j'' \mid j \right] G_{j''j'}^L (j''' \mid j') \left(\tilde{c} \left| \phi_{j''j} \right. \right)_{r_\alpha=a_\alpha} \right] \quad (4.21)$$

Aquí nuevamente se ha seguido la convención de suma de Einstein.

4.3 Cálculo de la Sección de Dispersión

Una manera de implementar un programa que realice los cálculos de la expresión (4.21) es sugerida por la misma ec.(4.21), y consiste en generar 3 subrutinas que calculen los diferentes componentes del elemento de matriz $S_{\tilde{c}k}$, para posteriormente reunirlos en el programa principal donde se lleven a cabo los cálculos de la ec. (4.21) (confróntese con las ecs.(2.60), (2.63) y (4.18)).

En otras palabras, una primera subrutina que consiste en el cálculo de la amplitud de la anchura parcial, definida por:

$$\Gamma_{j\tilde{c}}^{\frac{1}{2}} = (2P_{\tilde{c}})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\hbar^2 a_\alpha}{2m_{\tilde{c}}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{c} \left| \phi_j \right. \right)_{r_\alpha=a_\alpha} \quad (4.22)$$

donde

$$P(k_{\tilde{c}} a_\alpha) = \left(k_{\tilde{c}} a_\alpha \right) \left[G_{l_{\tilde{c}}}^2 \left(k_{\tilde{c}} a_\alpha \right) + F_{l_{\tilde{c}}}^2 \left(k_{\tilde{c}} a_\alpha \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.23)$$

aquí $G_{l_{\tilde{c}}}$ y $F_{l_{\tilde{c}}}$ son las funciones regular e irregular de Coulomb respectivamente, ambas para el canal entrante y evaluadas en $k_{\tilde{c}} a_\alpha$.

El último factor

$$f_{j\tilde{c}}(a_\alpha) = \left(\tilde{c} \left| \phi_j \right. \right)_{r_\alpha=a_\alpha},$$

es la componente radial de la eigenfuncion de onda evaluada en $r_\alpha = a_\alpha$. Pero como se dijo en el capítulo tres las eigenfunciones del movimiento relativo $|N(r)\rangle$ corresponden a un oscilador armónico con $l = 0$, por lo cual tenemos:

$$f_{jc}^{\sim}(a_{\alpha}) = |N(a_{\alpha})\rangle = \left[\frac{2(N)}{\Gamma(N+1)} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} L_N^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega a_{\alpha}^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} a_{\alpha}^2}$$

Donde los $L_N^{\frac{1}{2}}$ son los polinomios asociados de Laguerre de grado N .

Una segunda subrutina que calcule el operador de Green en su representación matricial, es decir, que realice el producto de las dos matrices siguientes:

$$\sum_{j''} [j'' | j] G_{j''j'}^L = \sum_{j''} [j'' | j] (\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c))_{j''j'}^{-1}.$$

Donde \mathbf{H} es el Hamiltoniano de la ec.(3.22), \mathbf{E} es la energía del centro de masa, $\mathfrak{S}(b_c)$ es el operador de Bloch definido por la ec.(2.34) y $[j'' | j]$ es el elemento de matriz j'' , j de la matriz de traslapes, el cual está definido por la ec.(4.3).

Finalmente una tercera subrutina, cuyos constituyentes son completamente análogos a la primera subrutina salvo que ahora hay que multiplicar por el elemento $(j''' | j')$ definido por la ec.(4.5) y recordar que se trata del canal saliente k .

$$f_{jc}^{\sim}(a_{\alpha}) = \sum_{j'''} (j''' | j') \langle \phi_{j'''} | k \rangle_{r_{\alpha}=a_{\alpha}}.$$

En esta tesis se siguió el esquema anterior y se desarrolló un programa en Fortran 77 para calcular los diferentes canales (todos ellos con momento angular cero).

Pero recordemos que nuestro objetivo es calcular la sección eficaz diferencial, por lo cual tenemos que conocer la relación entre S_{ck}^{\sim} y $d\sigma$, ésta relación ya fue presentada en el contexto de la teoría de la dispersión por ondas parciales en el capítulo uno (véase ecs.(1.38) y (1.39))

$$d\sigma = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(2i\delta_l) - 1] P_l(\cos\theta) \right|^2 d\Omega \quad (4.24)$$

puesto que $\exp(2i\delta_l)$ es el elemento de matriz S_{ck} como puede consultarse en la referencia [5]. Además, en nuestro caso estamos considerando $l = 0$ por lo cual la suma anterior consiste de un solo término.

En la tabla 1 que presentamos a continuación aparecen los datos usados en el programa para un sistema simétrico.

	<i>Cúmulo 1</i>	<i>Cúmulo 1</i>
$\hbar\omega$	8MeV	8MeV
número de nucleones	12	12
número de protones	6	6
momento angular	0	0
energía mínima en el centro de masa	0.01	0.01
energía máxima en el centro de masa	20MeV	20MeV
número máximo de cuantos de excitación	2	2
profundidad del pozo del oscilador relativo	0	0
valor del parámetro χ	0.05	0.05

El programa fue ejecutado en una estación de trabajo SPARC 1000 y el tiempo requerido para el cálculo numérico fue de 3 horas aproximadamente, es posible disminuir considerablemente el tiempo de cálculo, haciendo mejoras en la programación aún deficiente. El cálculo se realizó en precisión sencilla, concretamente en la inversión de la matriz compleja $(\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mathfrak{S}(b_c))$.

La prueba crucial para cerciorarnos que el programa funciona adecuadamente, es corroborar la unitariedad de la matriz S , ésta es una prueba bastante difícil por la cantidad y variedad de cálculos que se realizan. En la figura 4.7 se grafica $S^\dagger S$ en función de la energía y se observa que es aproximadamente uno. Los errores pueden alcanzar hasta una discrepancia del 1 por ciento. Podemos entender este error numérico si consideramos por ejemplo el caso cuando la energía del centro de masa es 15 MeV en donde $S^\dagger S$ no es unitaria los elementos de la matriz S al sumar sus normas tienden a sumar uno pero el error numérico es apreciable.

A continuación se presenta la sección diferencial de dispersión para el canal $0 \rightarrow 0$.

La figura 4.8 corresponde al canal $0 \rightarrow 0$, que está definido como el canal en el cual los dos núcleos entran y salen en su estado base, podemos ver en la sección eficaz cómo las resonancias son más amplias a medida que aumenta la energía y pequeñas absorciones debido a la estructura interna en 8 MeV y 12 MeV.

Los otros canales dan poca contribución y está contenida en el error numérico. La energía del estado para un cuanto está a 33 MeV y por lo tanto casi no figura.

En este modelo unidimensional es posible poner a la condición de frontera

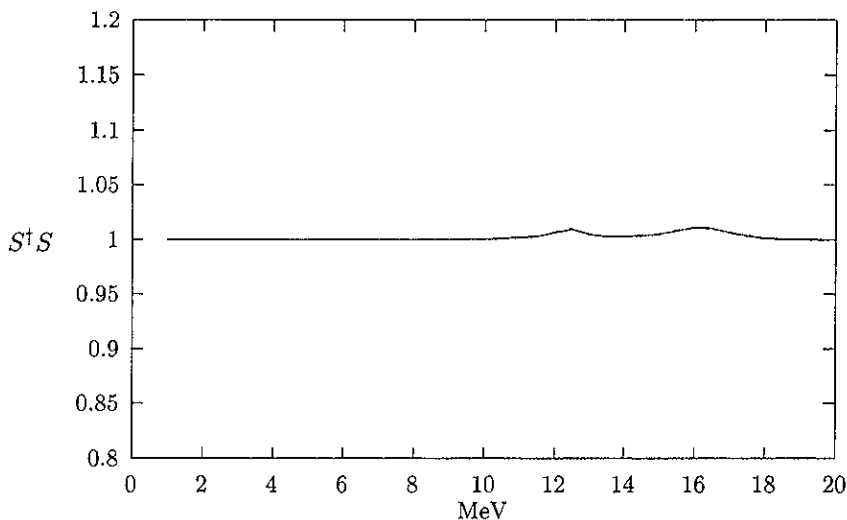


Figura 4.7: Valor de $S^\dagger S$ como función de la energía en MeV.

que separa el espacio interno del externo con cierta arbitrariedad. Esta arbitrariedad cambia de manera importante los valores de la sección eficaz aún cuando las propiedades generales que he procurado presentar se preservan. En el caso tridimensional ya no es posible separar de manera tan arbitraria el espacio interno del espacio externo, pues existen valores experimentales para la barrera de coulomb de los diferentes núcleos. Por otro lado, en este ejemplo unidimensional no fue necesario hacer la simetrización de las expresiones debido a que estamos trabajando con ondas S y la simetrización esta ya de manera implícita, en otras palabras, la simetrización ímplica hacer la siguiente transformación $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ y $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ que corresponde al intercambio de los núcleos idénticos. En este trabajo estamos usando ondas S que no dependen ni de θ ni de φ , por lo cual la simetrización está garantizada.

Finalmente presentamos las figuras 4.9, 4.10, 4.11 correspondientes a: la fase del proceso dispersivo total (fig. 4.9) el cual consta de la fase nuclear (que en el formalismo de la matriz R corresponde al de una esfera rígida (fig. 4.10)) y de la fase coulombiana (fig 4.11), ver ecs. (4.21), (2.58), (2.59).

En las figuras 4.9 y 4.10 se ve un brinco en la fase total y nuclear respectivamente. El brinco corresponde a un cambio máximo de la fase de

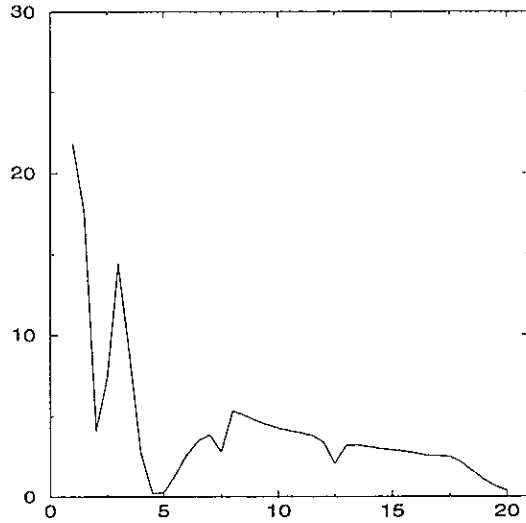


Figura 4.8: Sección eficaz diferencial de dispersión en barns como función de la energía en MeV para el canal $0 \rightarrow 0$.

dispersión, es decir un brinco en π radianes, el cual corresponde a una dispersión resonante en donde las condiciones de frontera en $r = a$ no así que la función radial tiene un valor máximo. La información de la fase nuclear da información sobre la estructura del potencial. En nuestro caso la información es incompleta. Se requiere información provenientes de otras fases de momento orbital distinto de cero.

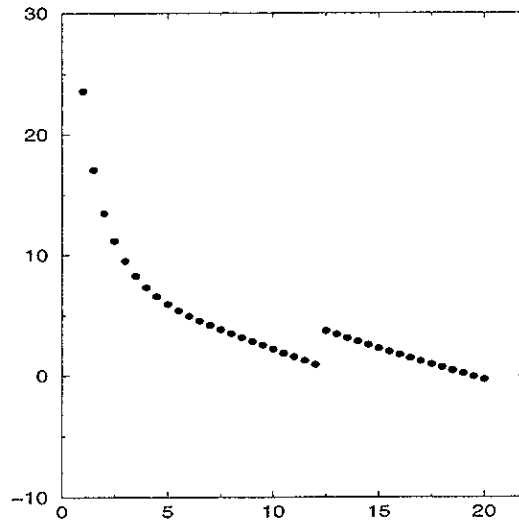


Figura 4.9: Desfasaje del proceso dispersivo como función de la energía en MeV.

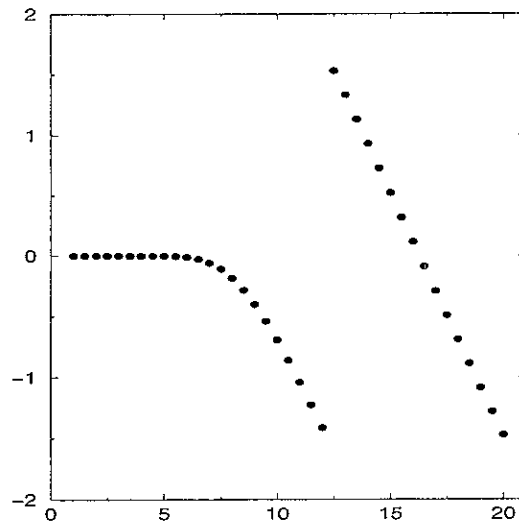


Figura 4.10: Desfasaje correspondiente a la parte nuclear en función de la energía dada en MeV.

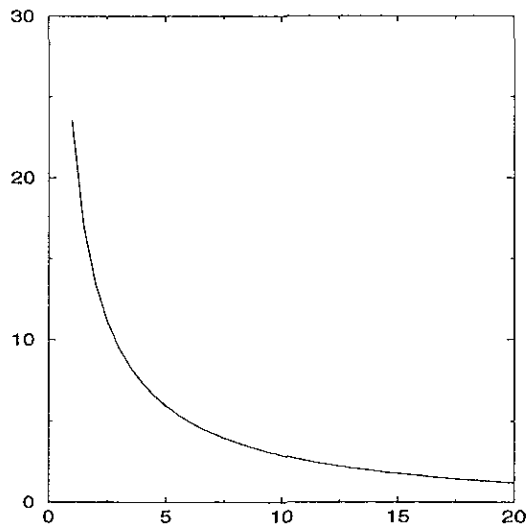


Figura 4.11: Desfase correspondiente a la parte coulombiana, como función de la energía en MeV.

Conclusiones

El trabajo llevado a cabo en esta tesis consistió esencialmente en realizar un programa en Fortran 77 en el cual se calcula la sección diferencial de dispersión para el modelo simpléctico de la molécula nuclear en una dimensión. Para hacerlo fue necesario un conocimiento claro de los principales tópicos que engloban al problema.

El primer tópico fue estudiar la teoría de dispersión en el capítulo uno. Empezando con la motivación histórica, y su conceptualización dentro del marco de la teoría clásica, ya que permite desarrollar una intuición física del problema. Después se abordó la teoría cuántica no relativista de la dispersión, es decir, se presentó la dispersión por ondas parciales, pues ésta nos permite enlazar la matriz S con la sección diferencial eficaz de dispersión. También se abordó la aproximación de Born por la importancia práctica que reviste en la física nuclear. Finalmente se hizo una presentación formal de la matriz S .

El objetivo del segundo tópico fue presentar un método para calcular la Matriz S , este método fue el de la matriz R . Comenzamos la presentación con un ejemplo sencillo que ilustró los aspectos esenciales del formalismo, que gracias a sus características se ajusta de manera casi inmediata a nuestras necesidades. Después se procedió a realizar una presentación bastante general del formalismo.

Como un tercer tópico (capítulo tres y primera parte del cuarto) fue presentado el modelo simpléctico del núcleo y de la molécula nuclear, ambos en el caso unidimensional, y se escribieron las expresiones explícitas que permiten el cálculo de los elementos de matriz del hamiltoniano. Estos modelos se ilustraron en un caso particular y su funcionamiento resultó satisfactorio, pues se encontraron estados ligados por potenciales superficiales que repre-

sentan a la molécula nuclear en una dimensión.

En el cuarto y último tópico (segunda parte del capítulo cuatro) se mostró una pequeña modificación al formalismo de la matriz S de tal manera que incluyera una base no ortonormal para el espacio interno. Se explicó a muy grandes rasgos en que consiste el programa en Fortran 77 que calcula la sección eficaz. Finalmente se presentaron los resultados del programa en Fortran 77 para la sección diferencial de dispersión del canal $0 \rightarrow 0$ y se mostró como la sección eficaz presenta unas resonancias acordes con lo esperado en el espectro, como son: las resonancias en los estados, el ensanchamiento de las anchuras conforme aumenta la energía y la semejanza con la sección de coulomb para el canal elástico si se toma en cuenta las absorciones por la estructura interna. Se comentó la fuerte dependencia que tiene la sección eficaz de las condiciones a la frontera. También se mostraron las fases de la parte nuclear (que en este caso es el de una esfera infinitamente rígida), el desfase de la parte coulombiana y el desfase total como una suma. La línea a seguir en este trabajo es hacer las modificaciones pertinentes al programa de manera tal que realice todos los cálculos en doble precisión de una manera óptima y poder garantizar nuestros resultados hasta la quinta o sexta cifra decimal.

Por lo anterior, podemos concluir que la presente tesis es un primer paso para un cálculo del modelo tridimensional. Es importante mencionar que por la manera en que se realizó el programa es posible implementar más tipos de Hamiltonianos provenientes de otros modelos.

Apéndice A

Función Hipergeométrica Confluente

Una función especial que usaremos frecuentemente en esta tesis es la conocida como la función hipergeométrica confluente, la cual es la solución más general a la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (b-z) \frac{d}{dz} - a \right] w(z) = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

donde a y b son constantes complejas, con la limitación de que $b \neq -n$ donde n es un entero no negativo (la razón de esto será evidente más adelante). Esta ecuación tiene un punto singular en cero y otro irregular en $z = \infty$.

Si proponemos una solución en serie de potencias obtenemos:

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} \quad , \quad (\text{A.2})$$

donde $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ y $a_0 = 1$. Esta es la llamada función de Kummer, la cual es convergente para todo valor de a, b y z y se reduce a un polinomio si $a = -n$.

Podemos introducir una nueva solución con una discontinuidad en el origen (es linealmente independiente de la anterior si $b \neq -n$) de la forma:

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi b} \left[\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right] \quad (\text{A.3})$$

la cual es una función multivaluada cuya rama principal se fija con $-\pi < \arg z \leq \pi$. Cuando $b = n+1$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ el miembro de la derecha debe ser reemplazado por su límite, con lo cual la expresión puede ser reescrita:

$$\begin{aligned}
U(a, n+1, z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n! \Gamma(a-n)} (M(a, n+1, z) \ln z \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} [\Psi(a+r) - \Psi(1+r) - \Psi(1+n+r)] \frac{(a)_r z^r}{(1+n)_r r!} \\
&+ \frac{(n-1)}{\Gamma(a)} z^{-n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(a-n)_r z^r}{(1-n)_r r!}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{A.5}$$

cabe aclarar que la última suma es cero si $n = 0$.

Cuando b no es un entero entonces la solución más general puede escribirse como una combinación lineal de $M(a, b, z)$ y $z^{1-b} M(1+a-b, z-b, z)$.

Algunas propiedades que son usadas en la tesis son

1) Desarrollos asintóticos:

Cuando $|z| \rightarrow 0$ se encuentra:

$$M(a, b, 0) = 1 \tag{A.6}$$

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + 0(|z|^{Re(b-2)}), \quad Re b \geq 2b \neq 2 \tag{A.7}$$

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + 0(|z|), \quad b = 2 \tag{A.8}$$

$$U(a, b, z) = -\frac{1}{\Gamma(a)} [\ln z + \Psi(a)] + 0(|z \ln z|), \quad b = 1 \tag{A.9}$$

limitándonos a los casos de mayor interés.

Cuando $|z| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
M(a, b, z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \exp[i\varepsilon\pi a] z^{-a} g(a, a-b+1, -z) \\
&+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \exp[z] z^{a-b} g(1-a, b-a, z)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

en donde

$$\varepsilon = 1 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

$$\varepsilon = -1 \text{ si } -\frac{3\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{2}$$

$$g(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! z^n}. \quad (\text{A.11})$$

Además, si $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ entonces

$$U(a, b, z) = z^{-a} g(a, a - b + 1, -z). \quad (\text{A.12})$$

Finalmente es importante mencionar las relaciones que guarda la función hipergeométrica confluyente con otras funciones especiales que se utilizarán en esta tesis.

$$M(-n, k + 1, z) = \frac{n!}{(k + 1)_n} L_n^k(z) \quad (\text{A.13})$$

$$M\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1, 2iz\right) = \Gamma(1 + v) \exp(iz) \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} j_v(z). \quad (\text{A.14})$$

Referencias

- [1] Elliott J. P., Roy. Soc. London A 245, 128, 562 (1958)
- [2] Draayer J.P., on "Algebraic Approaches To Nuclear Structure" ed. R.F. Casten "Contemporary Topics in Physics" Vol. 6 Harwood Academic Publishers (1993).
- [3] Hess O. P., Schmidt J., Scheid W., Ann. Phys. (N.Y) 240, 22 (1995)
- [4] Landau L. D., E. M. Lifshitz, Mechanics, (Pergamon Press, Oxford, 1997)
- [5] Levich B. G., Curso de física Teórica Vol.3 (Reverte, España 1983)
- [6] De La Peña L., Introducción a la mecánica cuántica (Fondo de Cultura Económica, México, 1991)
- [7] Greiner W., Park J., Scheid W., Nuclear Molecules, (Scientific World, Singapore, 1996)
- [8] Bloch C., Nuclear Phys. 4 503-528 North-Holland, Amsterdam (1957)
- [9] Maass R.: Diplomarbeit Thesis, Institut Für Theoretische Physik der Justus-Liebig-Universität Geissen (1985)
- [10] Barret R.F., Robson B.A., Tobjerman W. Rev. Mod. Phys., Vol. 55, No. 1 (1983)
- [11] Lane A.M. Tomas R.G., Rev. Mod. Phys. Vol. 30, No. 2, Part I (1958)
- [12] Lane A. M., Robson D., Phys. Rev. Vol. 185 No. 4 (1969)
- [13] Bromley D. A., Kucher J. A., Almqvist E., Phys. Rev. Lett., 4,365 (1960)

- [14] Benitez F., Tesis de Licenciatura, UNAM México (1997)
- [15] Latin-American School of Physics XXX ELAF (AIP press, New York. 1996)
- [16] Wildermuth K., Yang Y. C., A unified theory of the nucleus, (Academic press, New York, (1997))
- [17] Eisenberg J. M., Greiner W., Nuclear Theory I: Nuclear Model, 3rd edition (North-Holland, Amsterdam, 1987)
- [18] Moshinsky M., Seligman T. H., Ann Phys. 66 311-334 (1971)