UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

# DISPERSION Y EL CONCEPTO DE RETARDO TEMPORAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

FISICO

P R E S E N T A

JOSE LUIS JIMENEZ RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1972

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES

GRACIAS POR TODO GERMI

buscar, buscar, buscar....
y como premio a la insaciable búsqueda
la corrosiva duda que nos incita
a seguir buscando

INTRODUCCION i

CAPITULO I

I-1 Dispersión en Mecánica Clásica 1
I-2 El problema en una dimensión 9
I-3 Caso tridimensional 12
Conclusión 20

CAPITULO II

II-1 Dispersión en Mecánica Cuántica 21
II-2 Desarrollo en ondas parciales 29
II-3 Polos de Regge 35
II-4 Teoría formal de la dispersión 44
II-5 Retardo temporal 55
II-6 Otra forma de desarrollo para la amplitud de dispersión 64

CAPITULO III

III-1 Aproximación de Born 74
III-2 Aproximación de Eikonal 79
III-3 Aproximación de Blankenbecler 86

CAPITULO IV

IV-1 El problema en Mecánica Cuántica 93

CONCLUSION 104

APENDICE I 107

APENDICE II 113

BIBLIOGRAFIA 115

# INTRODUCCION

Los procesos de dispersión a altas energías son de gran interés en el estudio de partículas elementales, se encuentra que la amplitud de dispersión es una función suave de la energía, la cual si es suficientemente alta hace necesario un tratamiento cuántico - relativista; - pero dado el principio de incertidumbre, como el momento es muy grande la posición estará bien determinada, esto nos sugiere que un tratamiento clásico puede dar información sobre el proceso.

También se tiene que la amplitud de dispersión para altas energías está dominada por unos cuantos polos de Regge, los cuales a su vez tienen relación con el retardo temporal que la partícula sufre durante la colisión; si solo un polo de Regge contribuye y no depende de la energía se tiene entonces algo parecido a una constante de movimiento, por lo cual es interesante analizar y tratar de usar estas relaciones.

En este trabajo tratamos de resumir todo el material referente para el caso no relativista, tanto clásico como cuántico, haciendo hincapie en el concepto de retardo temporal, tratando con esto de tener lo mas claro posible los conceptos básicos iniciales para abordar el problema de la determinación de la familia de potenciales para los cuales el producto de la velocidad inicial de la partícula por el retardo temporal no dependa de la energía (tratamiento cuántico relativista) ya que esta cantidad está íntimamente relacionada con los polos de Regge que dominan la amplitud de dispersión. La solución de este problema requiere

# INTRODUCCION

Los procesos de dispersión a altas energías son de gran interés en el estudio de partículas elementales, se encuentra que la amplitud de dispersión es una función suave de la energía, la cual si es suficientemente alta hace necesario un tratamiento cuántico - relativista; - pero dado el principio de incertidumbre, como el momento es muy grande la posición estará bien determinada, esto nos sugiere que un tratamiento clásico puede dar información sobre el proceso.

También se tiene que la amplitud de dispersión para altas energías está dominada por unos cuantos polos de Regge, los cuales a su vez tienen relación con el retardo temporal que la partícula sufre durante la colisión; si solo un polo de Regge contribuye y no depende de la energía se tiene entonces algo parecido a una constante de movimiento, por lo cual es interesante analizar y tratar de usar estas relaciones.

En este trabajo tratamos de resumir todo el material referente para el caso no relativista, tanto clásico como cuántico, haciendo hincapie en el concepto de retardo temporal, tratando con esto de tener lo mas claro posible los conceptos básicos iniciales para abordar el problema de la determinación de la familia de potenciales para los cuales el producto de la velocidad inicial de la partícula por el retardo temporal no dependa de la energía (tratamiento cuántico relativista) ya que esta cantidad está íntimamente relacionada con los polos de Regge que dominan la amplitud de dispersión. La solución de este problema requiere

una labor extensa y muy complicada por ello en nuestro trabajo - solo trataremos de determinar clásica y cuánticamente los potenciales para los que el producto antes mencionado no depende de - la energía, para lo cual hemos dividido el trabajo de la siguiente manera.

En el primer capítulo tratamos en forma breve la dispersión en mecánica clásica e intentamos resolver el problema en una y tres dimensiones.

En el segundo capítulo además de la dispersión en mecánica cuántica y el desarrollo en ondas parciales tratamos el - concepto de retardo temporal, polos de Regge, un desarrollo de - la amplitud de dispersión adecuado para altas energías y la teoría formal de la dispersión en forma breve.

Las diferentes secciones del capítulo tercero nos -- sirven para anotar los resultados básicos de las aproximaciones- de Born, Eikonal y Blankenbecler, resultados que usaremos en el- cuarto y último capítulo donde tratamos de obtener el potencial- en mecánica cuántica análogo al clásico del primer capítulo.

También incluimos dos apéndices, uno sobre la relación entre la matriz S y la construcción de intervalos de tiempo arbitrarios, y el otro sobre la relación entre la duración de la colisión y el retardo temporal.

## CAPITULO I

### I-1 Dispersión en Mecánica Clásica

Uno de los intereses de la mecánica clásica es encontrar la trayectoria de una o varias partículas, las cuales están sujetas a fuerzas determinadas. Estamos interesados en encontrar la trayectoria de una partícula en un campo central, para lo cual y debido a su brevedad usaremos el método de Hamilton-Jacobi[1,2].

Consideremos la dispersión de una partícula de masa $m$ por un potencial $V$, central, es decir, que depende solo de la distancia $|\vec{r}|$ del origen del potencial a la posición de la partícula. El Hamiltoniano del sistema es:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(|\vec{r}|) \qquad \text{I-1}$$

Como la fuerza es central conviene expresar al ímpetu en coordenadas esféricas:

$$p^2 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \qquad \text{I-2}$$

Sea $S$ la función característica de Hamilton:

$$S(r,\theta,\phi) = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) \qquad \text{I-3}$$

Ya que el potencial no depende explícitamente del tiempo entonces se cumple que $\mathcal{H}$ tiene que ser igual a la energía total.

Usando el hecho de que, el gradiente de la función característica es igual al ímpetu, así como de (I-1)(I-2)(I-3), podemos escribir a la energía como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial S_3}{\partial \phi}\right)^2\right\} + V(|\bar{r}|) \qquad \text{I-4}$$

De la ecuación (I-3) separando variables podemos llegar a:

$$S_1 = \int \left[2m(\mathcal{E} - V(|\bar{r}|) - \alpha_2^2/r^2\right]^{1/2} dr \qquad \text{I-5}$$

$$S_2 = -\int \left[\alpha_2^2 - \alpha_3^2/\operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2} d\theta \qquad \text{I-6}$$

$$S_3 = \alpha_3 \phi \qquad \text{I-7}$$

donde $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ son constantes.

Eligiendo los ejes de tal manera que $\alpha_2 = 0$, es decir, restringiendo el movimiento a un plano, por (I-3) y (I-6) obtenemos:

$$S(r,\theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \qquad \text{I-8}$$

Definiendo al momento angular como $\alpha_2 = J$ y con ayuda de (I-7) y (I-8) tenemos:

$$S = \int \left[2m(\mathcal{E} - V(|\bar{r}|) - J^2/r^2\right]^{1/2} dr + J\theta \qquad \text{I-9}$$

El momento angular se puede escribir en términos del parámetro de impacto $b$ (ver fig. 1).

$$J = pb \qquad \text{I-10}$$

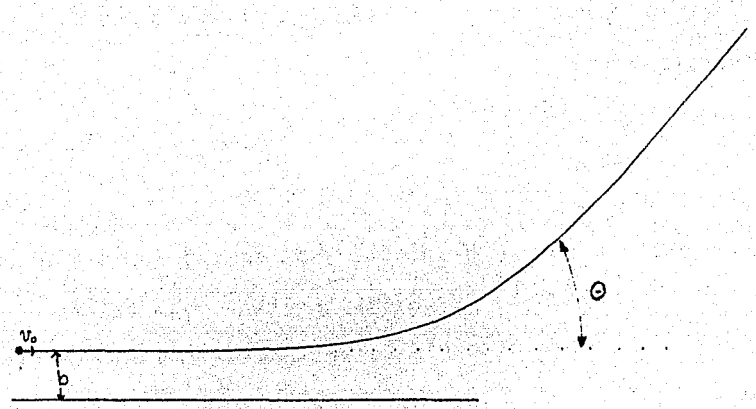



figura 1

La ecuación de la trayectoria se obtiene derivando (I-9) respecto a

$$\Theta = J \int r^{-2} \left[ 2m(\mathcal{E} - V(|\vec{r}|) - J^2/r^2 \right]^{1/2} dr + cte \qquad \text{I-11}$$

El ángulo $\Theta$ de dispersión está dado en términos de la coordenada $\theta$ par:

$$\Theta = \pi - 2\theta \qquad \text{I-12}$$

Los valores de $r$ para los cuales la expresión entre paréntesis se anula, es decir, cuando:

$$\mathcal{E} = J^2/2mr^2 + V(|\vec{r}|) \qquad \text{I-13}$$

$$\mathcal{E} = V_{ef} \qquad \text{I-14}$$

nos determinan los límites de integración, esto es, la región de

movimiento. La ecuación (I-13) significa que $\dot{\bar{r}} = 0$ , lo cual - podemos ver de (I-1) y (I-2) y usando el hecho que $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ ya - que entonces:

$$\mathcal{E} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{J^2}{2mr^2} + V(|\bar{r}|)$$

$$\mathcal{E} = V_{ef.} \quad \text{si} \quad p_r = m\dot{\bar{r}} = 0$$

Esto no significa que la partícula está en reposo ya que $\dot{\theta} \neq 0$.

La región de movimiento posible está entre los valores de $\bar{r}$ para los cuales (I-12) se cumple. Si son iguales solo nos dan el límite inferior $|\bar{r}|_{min}$ por lo cual $|\bar{r}| > |\bar{r}|_{min}$ que es el caso típico de dispersión en una región infinita; mientras que si son diferentes tendremos el movimiento limitado por esos valores, $|\bar{r}|_{min} \leq |\bar{r}| \leq |\bar{r}_{max}|$ . el movimiento está acotado en el interior de una corona circular de radios $|\bar{r}_{min}|$ y $|\bar{r}_{max}|$ .

En el tiempo en que $|\bar{r}|$ varía de $|\bar{r}_{min}|$ a $|r_{max}|$ el vector de posición gira un ángulo $\delta\theta$ dado por:

$$\delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J r^{-2} dr}{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(|\bar{r}|) - J^2 r^{-2}}} \qquad \text{I-15}$$

La curva es cerrada si $\delta\theta = 2\pi \frac{m}{n}$ siendo $m$ , $n$ enteros.
De la ecuación (I-11) podemos calcular $t$ como función de $r$ :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{J}{mr^2}$$

$$\frac{mr^2}{J} d\theta = dt$$

$$dt = \left[ \frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(|\bar{r}|) - J^2 r^{-2}}} \right] \qquad \text{I-16}$$

$$t = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(E - V(|\vec{r}|)\right) - J^2 r^{-2}}} \qquad \text{I-17}$$

Se ha encontrado $\theta$ (y por consiguiente $\Theta$ ) y $t$ como función de $r$ .

Es importante notar que el radicando en las ecuaciones (I-11), (I-17) cambia de signo en los puntos en que $r$ toma los valores límite, si el ángulo $\theta$ lo midiéramos a partir de $r_{min}$ los árcos de trayectoria a uno y otro lado de éste punto solo difieren en el signo lo cual nos indica que la trayectoria es simétrica respecto del punto

SECCION TRANSVERSAL DE DISPERSION

Por lo general en los problemas de dispersión se trata con varias partículas con igual masa y velocidad que incidensobre el potencial con diferentes parámetros de impacto debido a lo cual son dispersadas a ángulos diferentes (fig. 2)

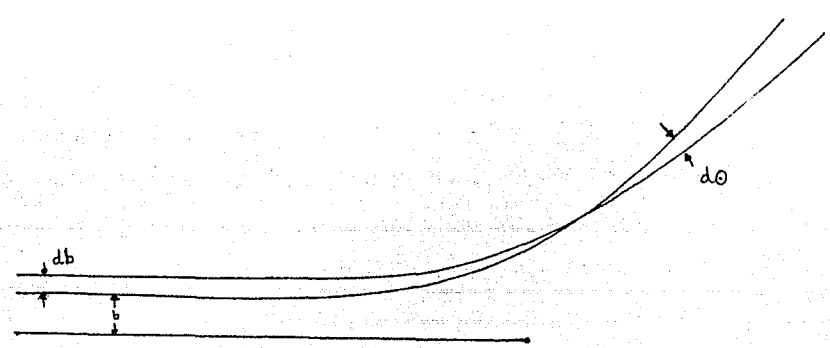



figura 2

Se define sección diferencial transversal de dispersión $d\sigma$ como el cociente entre el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo dentro del ángulo sólido $d\Omega$ , y el número de partículas incidente por unidad de tiempo

$$d\sigma = \frac{dN}{N} \qquad \text{I-18}$$

Este cociente tiene dimensiones de área siendo de gran importancia dado que es determinado completamente por la forma del potencial dispersor, y nos aporta información sobre el campo.

El número de partículas dispersadas está dado por:

$$\begin{aligned} dN &= 2\pi b\, db\, N \\ d\sigma &= 2\pi b\, db \\ d\sigma &= 2\pi b \frac{db}{d\theta} d\theta \end{aligned} \qquad \text{I-19}$$

y como

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ d\sigma &= \frac{b(\theta)}{\operatorname{sen}\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega \end{aligned} \qquad \text{I-20}$$

Debe notarse que si el potencial es de alcance infinito las partículas serán dispersadas para todo parámetro de impacto, lo cual implica una sección transversal infinita, también para dispersión hacia adelante ( $\theta = 0$ , $b = 0$ ) la sección transversal es infinita.

SINGULARIDADES[3,a,b]:

La existencia de una energía centrífuga cuando $J$ es diferente de cero, la cual tiende a infinito cuando $r$ tiende a cero, prohibe que la partícula colapse (caiga en el centro) aún para potenciales negativos, a menos que estos decrezcan más rápidamente que $1/r^2$ ya que el colapso ocurre cuando:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = \mathcal{E} - V_{ef} > 0 \qquad \text{I-21}$$

$$= \mathcal{E} - J^2/2mr^2 > 0$$

por lo tanto

$$(r^2 V)_{r\to 0} < -J^2/2m \qquad \text{I-22}$$

Si la fuerza es repulsiva, esto es, decrece monótonamente a cero (para $r > r_{min}$ $V(r) < V(r_{min})$ ) $\Theta$ varía entre cero y $\pi$ , cero cuando no es dispersada y $\pi$ cuando es rebotada por completo. Esto también lo podemos obtener a partir de la ecuación (II) como sigue:

$$\Theta = \pi - 2\theta$$

$$= \pi - 2\int r^{-2}\left[2m(\mathcal{E} - V(|\bar{r}|)) - J^2 r^{-2}\right]^{-1/2} dr$$

como:

$$J^2 = 2m\mathcal{E}b^2$$

$$\Theta = \pi - 2\int r^{-2}\left(1 - V/\mathcal{E} - b^2/r^2\right)^{-1/2} dr$$

Si:

$$x = r/b \qquad f = V/\mathcal{E}$$

$$\Theta = \pi - 2\int \frac{dx}{x\left([1-f]x^2-1\right)^{1/2}} \qquad \text{I-23}$$

$$\int \frac{dx}{x\left([1-f]x^2-1\right)^{1/2}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x\left(x^2-1\right)^{1/2}} = \pi/2$$

por lo que:

$$0 \leq \Theta \leq \pi \qquad \text{I-24}$$

Si el potencial no decrece monótonamente la integral puede crecer tanto como se quiera, esto significa que $\Theta$ puede ser tan grande como se desee lo cual nos dice que la partícula - daría varias vueltas alrededor del centro ya sea como un estado ligado al colapsar[3,ab].

## I-2 El problema en una dimensión

Si consideramos un potencial atractivo, esféricamente simétrico, de alcance finito sobre el cual incide una partícula con energía $\mathcal{E}$ (suponemos que el potencial es no singular en el origen) y queremos determinar de qué forma debe ser éste potencial para que la distancia característica $\Delta$ no dependa de la energía, siendo $\Delta$ :

$$\Delta = v_0 \tau \qquad \text{I-25}$$

donde $\tau = t - t_0$, $t_0$ es el tiempo que la partícula tarda en ir de un punto "a" a un punto "b" en ausencia del potencial y $t$ en presencia del potencial (figura 3) y $v_0$ es la velocidad de la partícula incidente.

figura 3

De la ecuación (I-17) tenemos para el tiempo $t$ , en una dimensión:

$$t = \int \frac{m\,dx}{\sqrt{2m(\mathcal{E} - V(x))}} \qquad \text{I-26}$$

ya que $r = x$ y $J = 0$ .

Como el potencial es atractivo, y depende en general de la energía $V = -f(x,E)$ , y debido a que $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_0^2$ , $v_0 = \sqrt{2\mathcal{E}/m}$;

substituyendo tenemos:

$$t = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{v_0^2\,(1 + f(x,\varepsilon)/\varepsilon)}} \qquad \text{I-27}$$

Por otro lado,

$$t_0 = \frac{\text{distancia de "a" a "b"}}{v_0} = \frac{d_{ab}}{v_0} \qquad \text{I-28}$$

$$\Delta = v_0 \left[ \int \frac{dx}{(v_0^2\,[1 + f(x,\varepsilon)/\varepsilon])^{1/2}} - \frac{d_{ab}}{v_0} \right]$$

$$\Delta = \int_a^b \frac{dx}{(1 + f(x,\varepsilon)/\varepsilon)^{1/2}} - d_{ab} \qquad \text{I-29}$$

De aquí vemos que si $f(x,\varepsilon)$ es de la forma $\varepsilon g(x)$ - donde $g(x)$ es una función arbitraria de $x$ , $\Delta$ no depende de la energía. Debe notarse que $\Delta$ es una constante debido a que- "a" y "b" son dos puntos fijos ya especificados y la integral es definida con límites determinados también por "a" y "b". Si el- dato experimental es $\Delta(x)$ esto es $\Delta$ para cualquier par de - puntos entonces:

$$\Delta(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - g(x)}} - \alpha(x) \qquad \text{I-30}$$

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - g(x)}} - \frac{d\alpha(x)}{dx} \qquad \text{I-31}$$

$$g(x) = \left[ \frac{d}{dx}\left(\Delta(x) + \alpha(x)\right)\right]^{-2} - 1 \qquad \text{I-32}$$

Esto se sigue cumpliendo si el potencial es en general de la forma $f(x,\varepsilon)$ y se tiene como dato experimental $\Delta(x\varepsilon)$

$$\delta(x,\varepsilon) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + f(x,\varepsilon)/\varepsilon}} \qquad \text{I-33}$$

en donde

$$f(x,\varepsilon) = \left[ \left( \frac{d\delta(x,\varepsilon)}{dx} \right)^{-2} - 1 \right] \qquad \text{I-34}$$

Hemos encontrado que la condición $\Delta = cte$ no restringe lo suficiente para poder determinar el potencial y solo obtenemos que es de la forma:

$$V(x,\varepsilon) = -\varepsilon\, g(x) \qquad \text{I-35}$$

donde $g(x)$ es completamente arbitraria con tal de que sea simétrica y de alcance finito.

Si el dato experimental es $\delta(x)$ o $\delta(x,\varepsilon)$ el método sigue siendo útil.

## I-3 Caso tridimensional

Ahora consideremos el caso en que la partícula incide con un cierto parámetro de impacto, al igual que antes deseamos encontrar el potencial para el cual la distancia propia $\Delta$ es independiente de la energía.

Para este caso $\Delta$ está definida como:

$$\Delta = v_0 \tau \cos \Theta / 2 \qquad \text{I-36}$$

Donde $\Theta$ es el ángulo de dispersión, $t_0$ el tiempo que tarda la partícula en ir del punto "a" al punto "b" en ausencia del potencial siguiendo la trayectoria (1) (ver figura 4) y $t$ en presencia del potencial (trayectoria punteada).

El retardo $\tau$ tiene dos contribuciones: una debida al potencial y otra geométrica debida exclusivamente a que las distancias recorridas con y sin potencial son diferentes en longitud.

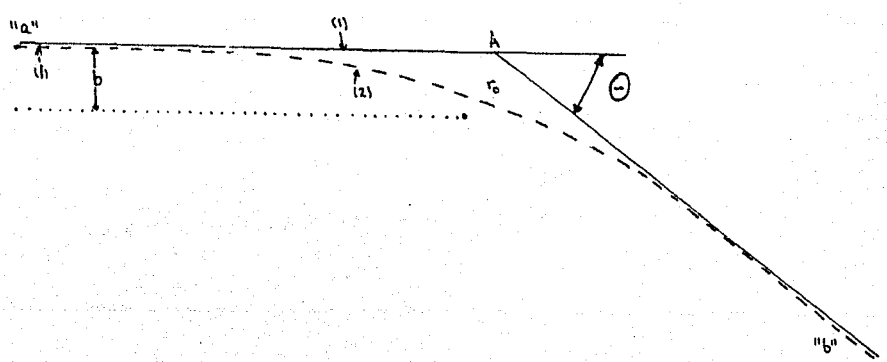



figura 4

De la ecuación (I-20) tenemos:

$$t = 2\int_{r_{min}}^{R} \frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\mathcal{E}-V)-J^2 r^{-2}}} \qquad \text{I-37}$$

donde $R$ es el radio vector del origen del potencial al punto - "a" (ó al punto "b" los suponemos equidistantes del origen) como- la trayectoria es simétrico respecto a $r_{min}$ entonces $\tau$ es dos veces $t$ definida en (1) vemos dos veces el tiempo que tarda en - ir la partícula de "a" al punto A sin estar presente el potencial como:

$$J^2 = 2m\mathcal{E}b^2$$

entonces

$$t = \int_{r_{min}}^{R} \frac{m\,dr}{\left[2m\mathcal{E}(1-V/\mathcal{E}-b^2/r^2)\right]^{1/2}} \qquad \text{I-38}$$

y

$$\Delta = 2v_0\cos\theta/2\left[\int_{r_{min}}^{R} \frac{m\,dr}{\left[2m\mathcal{E}(1-V/\mathcal{E}-b^2/r^2)\right]^{1/2}} - t_0\right] \qquad \text{I-39}$$

representa la distancia "a" A

substituyendo:

$$2m\mathcal{E} = m^2 v_0^2$$

en la ecuación anterior obtenemos:

$$\Delta = 2\cos\theta/2\left[\int_{r_{min}}^{R} \frac{dr}{\left[1-V/\mathcal{E}-b^2/r^2\right]^{1/2}} - d_{r_0A}\right] \qquad \text{I-40}$$

según (I-3) $r_{min}$ depende tanto de $b$ como de $\mathcal{E}$ , entonces las condiciones que sobre el potencial deben imponerse para que $\Delta$ sea independiente de la energía no se ven directamente como en el caso unidimensional.

En mecánica cuántica lo que se determina es la amplitud de dispersión, la cual está relacionada con la sección transversal de dispersión+ que a su vez se relaciona con el parámetro de impacto por:

$$b^2(\theta) = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \, d\theta \qquad \text{I-41}$$

lo cual sugiere que lo interesante para posteriormente compararcon el caso cuántico es, conociendo $b(\theta)$ determinar $\Delta$ independiente de la energía.

Supongamos que $\Delta$ es independiente de la energía, pero que depende en general de $b$ entonces encontraremos el potencial.

De la ecuación (I-40) tenemos:

$$\frac{\Delta(b)}{2\cos\Theta/2} - d_{r,A} = \int_{r_{min}}^{\pi} \frac{dr}{\sqrt{1 - V/\mathcal{E} - b^2/r^2}} \qquad \text{I-42}$$

Si efectuamos las transformaciones:

$$b^2 = 1/y \qquad r^2 = 1/xG \qquad G = 1 - V/\mathcal{E} \qquad \text{I-43 a,b,c}$$

---

+En mecánica clásica.

entonces

$$dr = -\frac{r^3 G^2}{r\frac{dG}{dr} + 2G} \qquad \text{I-44}$$

por lo cual es conveniente definir

$$g(x) = -\frac{r^3 G^{3/2}}{r\frac{dG}{dr} + 2G} \qquad \text{I-45}$$

y también:

$$\alpha(y) = \alpha_{\circ A} - \frac{\Delta(b)}{2\cos\Theta/2} \qquad \text{I-46}$$

substituyendo en (6) obtenemos

$$-\alpha(y) = \sqrt{y}\int g(x)\,(y-x)^{-1/2}\,dx \qquad \text{I-47}$$

para encontrar los límites debemos recordar que en $r_{min}$ $\dot{r}=0$ por lo cual

$$r_{min}\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E} - V(r_{min}\mathcal{E})\right)}$$

y de la conservación del momento angular

$$\dot{\theta} = \frac{v_\circ b}{r_{min}^2}$$

entonces

$$b = \frac{r_{min}}{v_\circ}\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E} - V)}$$

que podemos escribir como:

$$y = \frac{v_\circ^2}{r_{min}^2\,\frac{2}{m}(\mathcal{E} - V)} = x_\circ \qquad \text{I-48}$$

como hemos supuesto que el potencial es de alcance finito, si $d_{r_0A}$ es mayor que ese alcance entonces podemos considerar que, para el potencial, está en infinito esto es $r = R = \infty$, con lo cual $\chi = 0$, substituyendo:

$$-\frac{\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \int_y^0 g(\chi)\,(y-\chi)^{-1/2}\,d\chi$$

ó

$$f(y) = \int_0^y g(\chi)\,(y-\chi)^{-1/2}\,d\chi \qquad \text{I-49}$$

Tenemos entonces que $f(y)$ es la transformada de Euler de $g(\chi)$, invirtiendo[4] obtenemos:

$$g(\chi) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\chi}\int_0^\chi f(y)\,(\chi-y)^{-1/2}\,dy \qquad \text{I-50}$$

integrando por partes:

$$g(\chi) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\chi}\left[-2f(y)(\chi-y)\Big|_0^\chi + 2\int_0^\chi (\chi-y)^{1/2} f'(y)\,dy\right] \qquad \text{I-51}$$

valuando en $\chi$ el primer término vemos que se anula; aparentemente en cero el primer término se hace infinito debido a $f(y)$ (ver I-49) pero para $y=0$ $b=\infty$ con lo cual la integral (I-49) se hace cero, quedando $d_{r_0A} = \Delta$ lo que implica $\alpha(y)=0$, si $\alpha(y)\to 0$ más rápido que $\sqrt{y}$ cuando $y \to 0$, en consecuencia

$$g(\chi) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\chi}\int_0^\chi 2(\chi-y)^{1/2}\,df(y) \qquad \text{I-52}$$

de (I-44) y (I-45) tenemos:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{dr}{dx} \qquad \text{I-53}$$

y

$$\sqrt{G}\ \frac{dx}{dr} = \frac{-\left(r\frac{dG}{dr} + 2G\right)}{r^3\, G^{3/2}} \qquad \text{I-54}$$

que podemos expresar como:

$$\frac{dx}{dr} = -\left(\frac{1}{r^2 G}\frac{d\ln G}{dr} + \frac{2}{r^3 G}\right)$$

$$\text{I-55}$$

$$\frac{dx}{dr} = -\left(\frac{1}{r^2 G}\frac{d\ln G}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{2}{r^3 G}\right)$$

usando (I-53) podemos expresar (I-54) como:

$$-\frac{1}{g} = \frac{1}{r^2 G g}\ \frac{d\ln G}{dx} + \frac{2}{r^3\sqrt{G}}$$

efectuando la derivación y reagrupando términos:

$$\frac{dG}{dx} = -\left(r^2 G + \frac{2g\, G^{3/2}}{r}\right) \qquad \text{I-56}$$

$$= -\left(\frac{G}{x} + 2g\, x^{1/2} G^2\right)$$

es conveniente reescribirlo como

$$\frac{dG}{dx} + \frac{1}{x} G = -h(x) G^2 \qquad \text{I-57}$$

donde:

$$h(x) = 2g\, x^{1/2} \qquad \text{I-58}$$

si hacemos la substitución

$$G = \frac{1}{\nu} \qquad \text{I-59}$$

obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d\nu}{dx} + P(x)\nu = Q(x) \qquad \text{I-60}$$

siendo:

$$P(x) = \frac{1}{x}$$

$$Q(x) = -h(x)$$

la solución a (I-60) es:

$$\nu = \frac{1}{x}\left[-2\int_0^x x'^{3/2}\, g(x')\, dx'\right] \qquad \text{I-61}$$

podemos explicitar la integral un poco más, como sigue:

$$\int_0^x x'^{3/2} g(x')\, dx' = \int_0^x x'^{3/2} \frac{1}{\pi} \int_0^{f(x)} (x' - y(f))^{-1/2}\, df$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^x \int_0^{f(x)} \frac{df}{x'\sqrt{x'(x'-y)}}\, dx' \qquad \text{I-62}$$

integrando respecto a $x'$ después de invertir el orden de inte-- gración

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{f(x)} \frac{\sqrt{x - y(f)}}{(y+1)\sqrt{x}}\, df \qquad \text{I-63}$$

substituyendo en (I-59) obtenemos:

$$G = -\pi x \Big/ 2\int_0^{\xi(x)} \frac{\sqrt{x - y(\xi)}}{(y+1)\sqrt{x}}\, d\xi \qquad \text{I-64}$$

el límite $\xi(x)$ se puede determinar por medio de $x/y(\xi) = 1$ y calcular entonces $G$ en términos de $x$ para luego substituir en (I-43b) obteniéndose así $G$ como función de $r$, y por la ecuación (I-43c) obtenemos el potencial.

Para que podamos usar $x'$ como variable de integración $r^2(\varepsilon - V)$ debe ser una función monótona de lo contrario necesitamos dividir a la función en fracciones monótonas e invertir para cada una de ellas.

## CONCLUSION

Hemos encontrado la forma de determinar el potencial por medio de $\Delta$ pero no basta con ella sino que también necesitamos conocer $y(\ell)$ o lo que es lo mismo $\theta$, no obstante para energías muy altas podemos hacer $\theta/2 \simeq 0$ lo que implica $\cos\theta/2 = 1$, entonces nos bastará con conocer $\Delta$.

Si $\Delta$ depende de la energía podemos determinar con el mismo método el potencial si ahora en lugar de (I-43) hacemos:

$$r^2 = \frac{b^2}{\chi G} \qquad G(x,\mathcal{E}) = \mathcal{E} - V \qquad y = \frac{1}{\mathcal{E}}$$

con los cuales obtenemos:

$$\frac{\Delta(\mathcal{E})}{2\cos\theta/2} - d = \int_{r_{min}}^{R} \frac{dr}{\sqrt{Gy - G\chi}}$$

y procediendo en forma análoga obtenemos:

$$G = -\pi\chi \Big/ 2\int_0^{\ell(x)} \frac{\sqrt{\chi - y(\ell)}}{(y+1)\sqrt{\chi}}\, d\ell$$

podemos así determinar el potencial como antes siempre y cuando conozcamos $\theta$. De hecho si conocemos $b(\theta)$ únicamente[2,5] podemos encontrar el potencial, entonces una pregunta que surge es ¿que $b(\theta)$ nos dan $\Delta$ independiente de la energía?

Si suponemos $\Delta = cte$ y $\theta/2 \simeq 0$ podemos calcular sin mucha dificultad la integral que aparece en (I-64) pero dado que $\chi$ depende de $G$ en una forma complicada es difícil determinar $G$. Tenemos entonces que "en principio" dados $\Delta$ y $\theta$ podemos encontrar el potencial.

# CAPITULO II

## II-1 Dispersión en Mecánica Cuántica

En mecánica cuántica podemos considerar el problema de dispersión como si la interacción entre la partícula incidente y el dispersor fuese una perturbación que causa una transición de un determinado estado inicial a uno de los finales permisibles para la partícula, suponiendo que no es absorvida o aniquilada y que tampoco hay creación de otras.

Para calcular el número promedio de partículas dispersadas dentro de un determinado elemento de ángulo sólido, se calculó la probabilidad de transición a un cierto estado final.- Este es un enfoque dependiente del tiempo, pero también es posible un enfoque estacionario (como lo haremos posteriormente) considerando un haz de partículas que viajan en línea recta hasta que son dispersadas sin tomar en cuenta cuando se inició el movimiento y cuando la dispersión, para esto es necesario encontrar la solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, del problema con las condiciones a la frontera apropiadas.

La solución de la ecuación para nuestro sistema no nos da la trayectoria o el tiempo, como en mecánica clásica pero

si conocemos la función de onda en presencia del potencial y en-ausencia de éste, entonces podemos calcular un tiempo análogo a-la $\tau$ clásica[+], que, como veremos posteriormente, coincide con-el que obtenemos a partir de la amplitud de dispersión al deri--var su fase respecto de $k$ siendo $p=\hbar k$ .

Supongamos que un haz de partículas cuyo momento está alrededor de $k$ incide sobre nuestro dispersor, podemos considerar a las partículas como paquetes de onda con una posición-espacio temporal más o menos definida dado el principio de incertidumbre; que al interaccionar con el dispersor[++] salen en todas direcciones como una nube u onda esférica cuyo centro es el dispersor mismo. Es posible dar una descripción matemática completa para los paquetes de onda pero es más simple considerar el momento y la energía bien definidas con lo cual el tiempo y la posición quedarán exactamente indeterminados, ésto equivale a considerar que sobre el dispersor incide una onda plana y las partículas dispersadas son una onda esférica saliente. El uso de paquetes de onda no es apropiado para la descripción cuántica de un haz monocromático, pero tiene la ventaja de poderse comparar bajo ciertas condiciones con la dispersión clásica. Esto se puede hacer cuando la extensión inicial del paquete (antes de interaccionar con el potencial) es pequeña comparada con el alcance del potencial, y el paquete no se dispersa apreciablemente durante -la colisión ( $\Delta r_i \simeq \Delta r_f$ ). Para que la dispersión clásica pueda

---

[+]Apéndice II

[++]Consideramos el centro dispersor como un potencial.

usarse deben cumplirse las siguientes condiciones: a) que los parámetros estén especificados de manera única, esto es, $\frac{\Delta p}{\langle p\rangle} \ll 1$ , $\Delta r/\langle r\rangle \ll 1$, $\Delta\theta/\langle\theta\rangle \ll 1$ b) que la longitud de onda sea pequeña comparada con el cambio que sufre en esa longitud el potencial, -- c) $\theta \gg \hbar/mvb$ .

La distorsión que sufre el paquete durante la interacción, proviene de la dispersión de las ondas de deBroglie y decimos que es pequeña si:

$$\left|\frac{\langle r\rangle}{dr}\,\frac{dp}{\langle p\rangle}\right| \ll 1$$

$$\left|\frac{dp}{dr}\,\frac{\langle r\rangle}{\langle p\rangle}\right| \ll 1$$

y como $p^2 = 2m(E-V)$

$$\left|\frac{r_0}{2(E-V)}\,\frac{dV}{dr}\right| \ll 1$$

suponiendo $V(r) \neq E$ ; $V(r) = E$ (clásicamente) tiene lugar cuando el parámetro de impacto es muy pequeño.

Uno de los aspectos más significativos de la dispersión en mecánica cuántica, es el hecho de que se refiere a la parte contínua del espectro de energía para la partícula incidente. Si se elige en la forma usual, corresponderá a valores propios positivos de la ecuación de Schrödinger, y funciones propias para estados no acotados. A diferencia de cuando se trata con un espectro discreto, el cual se compara con el experimento, en dispersión la energía está dada, y lo que se predice y mide son las intensidades.

Si queremos que la colisión no dependa considerable-

mente de la forma del paquete se requiere que éste sea mucho mayor que la región de dispersión (fig. 5)

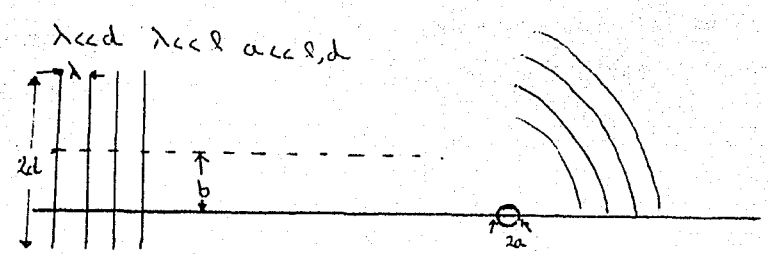



figura 5

El movimiento del centro del paquete está dado por:

$$\langle \bar{r} \rangle = \bar{b} + \bar{v}(t-t_0) \qquad t \ll t_0 \qquad \text{II-1}$$

es claro que si $b > d$ entonces se moverá siempre como una partícula libre, ya que no entra en la región de interacción, si la colisión tendrá lugar cuando $t \sim t_0 - \ell/v$ , más tarde el paquete se encontrará fuera de la zona sobre la cual el potencial actúa, y su centro se moverá nuevamente como partícula libre.

Si en lugar de un paquete, suponemos que sobre el dispersor incide una onda plana, entonces como resultado habrá una onda esférica debida a la dispersión y una onda plana transmitida, la intensidad de la onda esférica dependerá de la direc-

ción, tenemos entonces que la forma asintótica de la función de onda es:

$$\psi_k(\bar{r}) \longrightarrow e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} + f(\theta,\phi)\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \text{II-2}$$

donde $f(\theta,\phi)$ nos da la amplitud de la onda esférica en la dirección $\theta,\phi$ , ésta función de onda debe satisfacer la ecuación de Schrödinger.

En analogía con el caso clásico, cuando sobre el dispersor inciden un gran número de partículas idénticas con igual velocidad, es conveniente definir la sección transversal diferencial de dispersión $d\sigma$ , como el cociente del número de partículas dispersadas dentro del ángulo sólido $d\Omega$ por unidad de tiempo, entre el número de partículas incidentes por unidad de área por unidad de tiempo

$$d\sigma = \frac{dN}{N}\,d\Omega \qquad \text{II-3}$$

Para ver la relación que hay entre $\sigma$ y $f(\theta\,\phi)$ -- (que podemos escribir como $f(\Omega)$ ) consideremos la densidad de flujo para funciones de onda:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(r)\left(\nabla\psi(r)\right) - \left(\nabla\psi(r)\right)^*\psi(r)\right] \qquad \text{II-4}$$

de (1) y usando la expresión para $\nabla$ en coordenadas esféricas:

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left[\hat{r}\,k\,\frac{|f|^2}{r^2} + \hat{\theta}\,\mathrm{Im}\left(f^*\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\frac{1}{r^3}\right) + \hat{\phi}\left(f^*\,\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\frac{1}{r^3\sin\theta}\right]$$

cuando $r \to \infty$ , el flujo total dispersado dentro de $d\Omega$ es:

$$j\cdot\hat{r}\, r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m}|f|^2 d\Omega$$

el primer término de (II-1) $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ es una onda de densidad de corriente $\frac{\hbar k}{m}$ entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\Omega) \right| \qquad \text{II-5}$$

Lo anterior es aplicable si no se toma en cuenta la interferencia del haz incidente con el dispersado y el transmitido, y además el potencial es de alcance finito (o decrece más rápido que $1/r^2$ ), si esto no se cumple, la sección transversal es infinita, debido a que aún cuando la partícula está muy lejos es dispersada considerablemente.

Para entender esta aparente contradicción, consideremos un paquete de onda que siga la trayectoria clásica, ésta deberá cumplir las relaciones de incertidumbre

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$$

$$\Delta y \Delta p_y \sim \hbar$$

Con lo cual vemos que existe una probabilidad finita de que las partículas tengan componente transversal de momento lo que significa es que en realidad nunca podemos definir un haz unidireccional clásico. La dispersión para ángulos pequeños $\theta < \frac{\Delta p}{\langle p_z \rangle}$ donde $p^2 = p_x^2 + p_y^2$ no tiene sentido, para que el tratamiento clásico tenga validez el ángulo de dispersión debe cumplir

$$\theta \gg \frac{\langle \lambda \rangle}{2\pi b} \qquad \text{II-6}$$

Hemos visto la relación de $f(\Omega)$ con $\sigma$, ahora calcularemos $f(\Omega)$ para un potencial estático de alcance finito. Supongamos que las partículas inciden con energía $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \text{II-7}$$

entonces la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = \mathcal{E}\Psi \qquad \text{II-8}$$

la podemos escribir como:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = U(r)\Psi \qquad \text{II-9}$$

donde

$$U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \qquad \text{II-10}$$

La solución $\Psi(r)$ más general es:

$$\Psi(r) = \varphi(r) - \int G(r-r')\,U(r')\,\Psi(r')\,d^3r' \qquad \text{II-11}$$

donde $\varphi(r)$ es solución de la ecuación homogénea y $G$ es la función de Green del operador $\nabla^2 + k^2$ tal que:

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = -\delta(r) \qquad \text{II-12}$$

La función de Green que satisface las condiciones a la frontera es

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \qquad \text{II-13}$$

Tenemos entonces:

$$\psi_k(r) = e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, U(r')\, \psi_k(r')\, d^3\bar{r}' \qquad \text{II-14}$$

podemos elegir el sistema de referencia de tal forma que la dirección de incidencia sea $z$ por lo tanto:

$$\psi_k(r) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, U(r')\, \psi_k(r')\, d^3\bar{r}' \qquad \text{II-15}$$

al elegir como $z$ la dirección de incidencia eliminamos la degeneración de (II-8).

Ahora veremos que la solución (II-15) está de acuerdo con (II-2) para lo cual solo necesitamos escribir la forma asintótica de (II-15).

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = r - \bar{n}\cdot\bar{r} + \frac{1}{2r}(\bar{n}\times\bar{r}')^2 + \cdots$$

y si $r \to \infty$ entonces

$$|\bar{r}-\bar{r}'| \longrightarrow r - \frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}}{r}$$

substituyendo en (II-15):

$$\psi_k(r) \to e^{ikz} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{i\hat{k}r'}\, U(r')\, \psi_k(r')\, d^3r' \qquad \text{II-16}$$

donde $\hat{k} = k\bar{n}$ comparando con (II-2), vemos que:

$$f(\Omega) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\hat{k}r}\, U(r')\, \psi_k(r')\, d^3r' \qquad \text{II-17}$$

como $f(\Omega)$ solo depende de $\bar{k}$, $\hat{k}$ también podemos escribir:

$$f(\Omega) = f(\hat{k}, k) \qquad \text{II-18}$$

## II-2 Desarrollo en ondas parciales

Cuando el potencial es central la solución a la ecuación de Schrödinger es[6]

$$\Psi_k(r) = R_{\ell k}(r) Y_\ell^m(\theta\phi) \qquad \text{II-19}$$

si la dispersión es simétrica entonces:

$$\Psi_k(r) = R_{\ell k}(r) P_\ell(\theta) \qquad \text{II-20}$$

es conveniente expresar a $R_{\ell k}(r)$ como $u_{\ell k}(r)/r = R_{\ell k}(r)$ y entonces de la parte radial de la ecuación de Schrödinger tenemos:

$$\frac{d^2 u_{\ell k}(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r)\right) u_{\ell k}(r) = 0 \qquad \text{II-21}$$

En el origen $u_{\ell k} = 0$ , de donde $u_{\ell k}$ debe ir al menos como $r^{\ell+2}$ cuando $r \to 0$ . Si el potencial es de alcance finito, $U_k(r)$ para $r > a$ es cero y entonces la ec. (II-21) se reduce a:

$$\frac{d^2 u_{\ell k}(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) u_{\ell k}(r) = 0 \qquad \text{II-22}$$

cuya solución es:

$$u_{\ell k}(r) = A_\ell r j_\ell(kr) + B_\ell r n_\ell(kr) \qquad \text{II-23}$$

donde $j_\ell$ es el armónico esférico de Bessel de orden $\ell$ y $n_\ell$ de Newmann, para $kr \gg 1$

$$j_\ell(kr) \sim \frac{1}{kr} \operatorname{sen}(kr - \ell\pi/2) \qquad \text{II-24 a}$$

$$n_\ell(kr) \sim -\frac{1}{kr} \cos(kr - \ell\pi/2) \qquad \text{II-24 b}$$

y entonces $R_{\ell k}(r)$ es:

$$R_{\ell k}(r) \sim A_\ell \frac{\operatorname{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} - B_\ell \frac{\cos(kr - \ell\pi/2)}{kr} = C_\ell \frac{\operatorname{sen}(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)}{kr} \qquad \text{II-25}$$

donde:

$$C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2 \qquad \text{II-26a}$$

$$\operatorname{Tan} \delta_\ell = - B_\ell / A_\ell \qquad \text{II-26b}$$

si se elige $C_\ell = 1$

$$\int_0^{2\pi} u_{\ell k}(r)\, u_{\ell k'}(r)\, dr = \frac{\pi}{2k^2}\, \delta(k-k') \qquad \text{II-27}$$

Si el potencial es de alcance finito para $r > d$ ( $d$ alcance del potencial) tenemos la solución exacta, si no es de alcance finito pero decrece suficientemente rápido tenemos la solución asintótica

$$\psi_k(r) \longrightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\theta) \frac{\operatorname{sen}(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)}{kr} \qquad \text{II-28}$$

substituyendo en (II-2) y expresando la onda plana en términos de $j_\ell$ por medio de la relación de Bauer:

$$e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{II-29}$$

usando la forma asintótica para $j_\ell$

$$e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} i^{l}(2l+1)P_{l}(\cos\theta)\,\frac{\operatorname{sen}(kr-l\pi/2)}{kr} \qquad \text{II-30}$$

tenemos entonces de (II-2):

$$\sum i^{l}(2l+1)P_{l}(\cos\theta)\,\frac{\operatorname{sen}(kr-l\pi/2)}{kr}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\Omega)\sim\sum a_{l}P_{l}(\cos\theta)\,\frac{\operatorname{sen}(kr-l\pi/2+\delta_{l})}{kr} \qquad \text{II-31}$$

usando (II-17) y (II-28) y del hecho de que el potencial es central podemos expresar a la amplitud como:

$$f(\Omega)=-\frac{1}{4\pi}\sum\int e^{ikr'\cos\Theta}\,U(r')\,a_{l}P_{l}(\cos\theta)\,u_{lk}(r')\,r'\operatorname{sen}\theta'd\theta'd\varphi'dr' \qquad \text{II-32}$$

el ángulo $\Theta$ es el formado por $\bar{r}$ y $\bar{r}'$ . Usando la relación de Bauer podemos expresar la exponencial en la forma siguiente

$$e^{-ikr'\cos\Theta}=\sum i^{-l'}(2l'+1)\,j_{l'}(kr)\,P_{l'}(\cos\Theta) \qquad \text{II-33}$$

Tenemos así los polinomios de Legendre de orden $l$ y $l'$ dentro de la integral los cuales conviene expresar como:

$$P_{l'}(\cos\Theta)=\frac{4\pi}{(2l'+1)}\sum_{m=-l'}^{l'}Y_{l'}^{m*}\,Y_{l}^{m} \qquad \text{II-34}$$

$$P_{l}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\;Y_{l}^{0} \qquad \text{II-35}$$

La integral angular de (II-32) podemos calcularla gracias a las relaciones de ortonormalidad que satisfacen las $Y_{l}^{m}$ :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{l'}(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2l'+1}\, P_{l'}(\cos\theta)\, \delta_{ll'} \qquad \text{II-36}$$

substituyendo, obtenemos que la amplitud de dispersión es:

$$f(\Omega) = -\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, i^{-l}\, P_l(\cos\theta) \int_0^{\infty} j_l(kr')\, U(r')\, u_{lk}(r')\, r'dr' \qquad \text{II-37}$$

Es importante relacionar el defasamiento $\delta_l$ en términos del potencial y para ello debemos tener en cuenta que $r\, j_l(kr)$ satisface la ecuación (II-21) por lo cual:

$$\left[r\, j_l(kr)\right]'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\left[r\, j_l(kr)\right] = 0 \qquad \text{II-38}$$

multiplicando esta ecuación por $u_{lk}(r)$ y a (II-21) por $r\, j_l(kr)$ al restarlas:

$$\frac{d}{dr}\left[(r j_l)'\, u_{lk} - r\, j_l\, u'_{lk}\right] = -\, j_l\, U\, r\, u_{lk} \qquad \text{II-39}$$

integrando de cero a infinito

$$(r j_l)'\, u_{lk} - r\, j_l\, u'_{lk}\Big|_0^{\infty} = -\int_0^{\infty} j_l\, U\, u_{lk}\, r\, dr \qquad \text{II-40}$$

en cero el término de la izquierda es nulo, para calcularla en infinito podemos usar la forma asintótica (II-26) para $j_l(kr)$ de donde podemos escribir entonces:

$$\frac{1}{k}\left[\cos(kr - l\pi/2)\operatorname{sen}(kr - l\pi/2 + \delta_l) - \operatorname{sen}(kr - l\pi/2)\cos(kr - l\pi/2 + \delta_l)\right] = -\int_0^{\infty} j_l\, U\, u_{lk}\, r\, dr \qquad \text{II-41}$$

que se reduce a:

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,\delta_\ell = -\int_0^\infty j_\ell(kr)\,U\,u_{\ell k}\,r\,dr \qquad \text{II-42}$$

cuando $k^2 \gg |U|$

$$u_{\ell k}(r) = r\cos\delta_\ell\; j_\ell(kr) \qquad \text{II-43}$$

substituyendo en (II-42) tenemos para la fase:

$$\mathrm{Tan}\,\delta_\ell \approx -k\int_0^\infty \left(j_\ell(kr)\right)^2 U(r)\,r^2\,dr \qquad \text{II-44}$$

si usamos la forma asintótica para $j_\ell(kr)$ y tomamos en cuenta que solo tendrá valores apreciables cuando la fase es constante:

$$\mathrm{Tan}\,\delta_\ell \approx -\frac{1}{k}\int_0^\infty U(r)\,dr \qquad \text{II-45}$$

Si $\ell > kd$ ($d$ = alcance del potencial) podemos aproximar $j_\ell$ por:

$$j_\ell \sim \frac{2^\ell\,\ell!\,(kr)^\ell}{(2\ell+1)!} \qquad \text{II-46}$$

siempre y cuando $\hbar^2k^2$ sea pequeño comparado con $U$ ; entonces si $k$ es pequeña y $\ell > kd$

$$\mathrm{Tan}\,\delta_\ell \sim -\frac{2^{2\ell}\,(\ell!)^2\,k^{2\ell+1}}{[(2\ell+1)!]^2}\int_0^\infty U(r')\,r'^{2\ell+1}\,dr' \qquad \text{II-47}$$

como el alcance es finito vemos que los valores de $\delta_\ell$ son pequeños debido a lo cual para bajas energías las fases significa-

tivas son aquellas para las cuales:

$$\ell \leq kd \qquad \text{II-48}$$

lo podemos interpretar en forma semiclásica, diciendo que las partículas con parámetro de impacto mayor que el alcance del potencial no son dispersadas.

De (II-37) y (II-42) tenemos que la amplitud de dispersión es:

$$f(\Omega) = \sum a_\ell \, i^{-\ell} \, \frac{\operatorname{sen} \delta_\ell}{k} \, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{II-49}$$

substituyendo en (II-31) y comparando los coeficientes de $P_\ell(\cos\theta)\, e^{i(kr - \ell\pi/2)}/kr$ vemos que:

$$a_\ell = (2\ell+1)\, i^\ell \, e^{i\delta_\ell} \qquad \text{II-50}$$

y así

$$\psi_k(r) \sim \sum i^\ell (2\ell+1)\, e^{i\delta_\ell} P_\ell(\cos\theta) \, \frac{\operatorname{sen}(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)}{kr} \qquad \text{II-51}$$

$$f(\Omega) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, e^{i\delta_\ell} \operatorname{sen} \delta_\ell \, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{II-52}$$

La forma asintótica para la función de onda podemos escribirla como la combinación de una onda saliente y una entrante, esto es:

$$\psi_k \sim \varphi^- e^{ikr} + \varphi^+ e^{-ikr} \qquad \text{II-53}$$

escribiendo (II-51) de esta manera

$$\psi_k \longrightarrow \frac{1}{2kr}(2\ell+1)i^{\ell+1}\left[e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - S_\ell(k)\, e^{i(kr-\ell\pi/2)}\right] P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{II-54}$$

donde $S_\ell(k)$ nos da la razón entre la amplitud de la onda incidente y la transmitida y se conoce como matriz $S$ de dispersión (en este caso de $1\times1$ ) al comparar con (II-53)

$$S_\ell = (-1)^{\ell+1}\frac{\varphi^-}{\varphi^+} \qquad \text{II-55}$$

si expresamos (II-52) como:

$$f(\Omega) = \sum (2\ell+1)\,\frac{e^{2i\delta_\ell}-1}{2ik}\, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{II-56}$$

entonces

$$e^{2i\delta_\ell} = S_\ell \qquad \text{II-57}$$

A $S_\ell - 1$ se le acostumbra denotar por $T_\ell$ y se llama matriz de transición.

## II-3 Polos de Regge

En general todo lo dicho en las dos secciones anteriores sigue siendo válido aún cuando $\ell$ sea no entero, tiene sentido para el caso más general cuando $\ell$, $k$ continúa complejos. Veremos que es de gran importancia ya que en base a esto es fácil obtener información sobre estados ligados y resonancias a partir de la matriz $S$ [7,8,9,10].

Supongamos $\ell$ entero y $E$ complejo, para un polo de $S$ en el eje positivo imaginario, digamos $k = i\lambda$ ; en la

BIBLIOTECA CENTRAL
U. N. A. M.

función de onda (4.15) podemos escribirla:

$$\psi = \alpha e^{ikr - i(\ell+1)\pi/2} + \beta e^{-ikr + i(\ell+1)\pi/2} \qquad \text{II-58}$$

no aparece término ya que un polo de $S$ implica $\beta = 0$ , y la-forma asintótica es

$$\psi \rightarrow cte\ e^{-\gamma r} \qquad \text{II-59}$$

que es característico de un estado ligado.

Por otro lado si $I_m K < 0$ por ejemplo $K = \alpha - i\beta$ donde $\alpha > 0$ $0 < \beta << 1$ entonces la forma asintótica de la función de onda es:

$$\psi \longrightarrow cte\ e^{i\alpha r}\ e^{\beta r} \qquad \text{II-60}$$

que es tipo de lo que en partículas elementales se conoce como - resonancia.

Si $K^2$ es real negativo $\varphi^+(\ell, K^2)$ es real para $r$ - real y entonces $\ell = \alpha'(K^2)$ será real, si $K^2$ es real positivo - $\varphi^+(\ell, K^2)$ no es real y entonces $\ell = \alpha'(K^2)$ sea complejo[9]

Para un edo ligado con $\ell = 0$ (edo. $s$ ) la matriz-$S$ tiene un polo en la variable $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ aumentando el momento aungular y la energía habrá una familia de ddos ligados representados por una familia de polos de $S$ , esto para $\ell$ físico - - es decir entero, si consideramos $\ell$ complejo entonces a los polos de $S$ en el plano complejo $\ell, \mathcal{E}$ se les conoce como polos de Regge y como todo lo anterior sigue siendo cierto entonces la familia de soluciones para las cuales $\psi \sim e^{-Kr}$ está descrita-por el movimiento del polo de $S(\ell, \mathcal{E})$ y este movimiento está-

dado por una ecuación de la forma: $\alpha'(\ell, \mathcal{E})$ lo cual implica dos - condiciones:

$$\mathrm{Re}\,\alpha'(\ell,\mathcal{E}) = 0$$

$$\mathrm{Im}\,\alpha'(\ell,\mathcal{E}) = 0$$

que en un espacio de 4 dimensiones representan superficies ( $S$ - será regular en estas superficies)

Si $\ell = n$ entonces $\mathrm{Re}\,\ell = n$ , $\mathrm{Im}\,\ell = 0$ , la intersección de esta superficie bidimensional con $\alpha'(\ell,\mathcal{E}) = 0$ representa - una singularidad de $S$ correspondiente a uno de los estados ligados o resonancias.

La intersección de $\mathcal{E} =$ cte real con $\alpha'(\ell,\mathcal{E}) = 0$ - será un punto, el cual al cambiar la constante, cambiará de posición continuamente trazando la curva conocida como trayectoria - de Regge

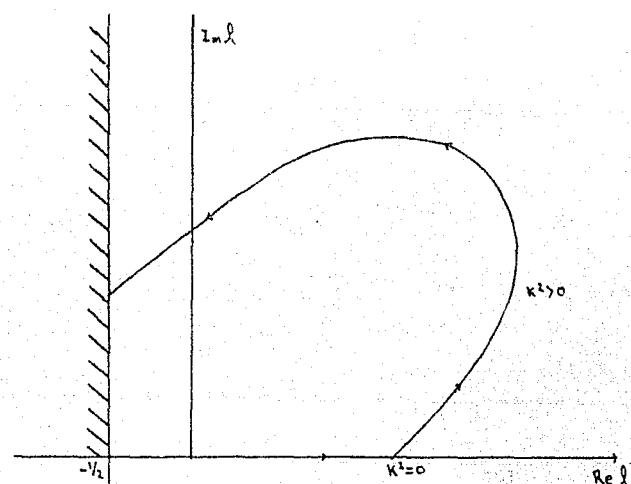



figura 6

La forma de la curva está determinada por el potencial, no obstante ciertas condiciones sobre la posición de los polos se pueden obtener de argumentos bastante generales sobre las propiedades de la ecuación de Schrödinger. Veremos qué sucede cuando la energía es igual, menor y mayor que cero.

Multiplicando a la parte radial de la ecuación de Schrödinger por $u^*_{\ell k}$ y a la conjugada de esta ecuación radial por $u_{\ell k}$ (donde $u_{\ell k}$ es la solución precisamente) y restándolas una de otra tenemos:

$$\left[\frac{d^2 u^*_{\ell k}}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\ell^*(\ell^*+1)}{r^2} - U(r)\right)u^*_{\ell k}\right] - \left[\frac{d^2 u_{\ell k}}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r)\right)u_{\ell k}\right] = 0$$

que reacomodando queda:

$$-u^*_{\ell k}\frac{d^2 u_{\ell k}}{dr^2} + \frac{d^2 u^*_{\ell k}}{dr^2}u_{\ell k} + \frac{\left[\ell(\ell+1) - \ell^*(\ell^*+1)\right]}{r^2}u^*_{\ell k}u_{\ell k} = 0 \qquad \text{II-61}$$

suponiendo que tanto el potencial como la energía son reales.

Podemos escribir (II-61) como:

$$\frac{d}{dr}\left(-u^*_{\ell k}\frac{du_{\ell k}}{dr} + u_{\ell k}\frac{d u^*_{\ell k}}{dr}\right) + 2i\,\ell_I(2\ell_R+1)\frac{u^*_{\ell k}u_{\ell k}}{r^2} = 0$$

integrando por partes de cero a infinito:

$$\left(u_{\ell k}\dot{u}^*_{\ell k} - \dot{u}_{\ell k}u_{\ell k}\right)\Big|_0^\infty + 2i\,\ell_I(2\ell_R+1)\int_0^\infty \frac{u^*_{\ell k}u_{\ell k}}{r^2}dr \qquad \text{II-62}$$

Tenemos tres casos:

1°. $K^2<0$ implica que $u_{\ell k}$ tiene la forma asintótica $u \sim e^{-kr}$ como $u_{\ell k} \to r^{\ell+1}$ cuando $r \to 0$ substituyendo obtenemos:

$$-2i\ell_r r^{2\ell+1}\Big|_0^\infty + 2i\ell_r(2\ell_r+1)\int_0^\infty \frac{u^* u}{r^2}\,dr \qquad \text{II-63}$$

vemos que se debe cumplir si $Re.\ell > -\frac{1}{2}$ (el primer término se anula) y como la integral de la derecha es positiva definida entonces $\ell_r$ debe ser igual a cero.

2°. $K^2>0$ la forma asintótica de $u_{\ell k}$ es $u \sim e^{-ikr}$ y la solución en la vecindad del origen sigue siendo $r^{\ell+1}$, substituyendo tenemos:

$$2ik + 2i\ell_r(2\ell_R+1)\int_0^\infty \frac{u^* u}{r^2}\,dr \qquad \text{II-64}$$

como todos los factores son positivos entonces $\ell_r$ debe serlo también y entonces los polos deben estar en $\ell_r>0$

3°. $K^2=0$ representa la transición.

Para estudiar el movimiento de los polos de $S$ como función de la energía cuando $K^2<0$, consideremos el operador:

$$D = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\ell+1/2)^2 - 1/4}{r^2} + U - K^2$$

entonces la ecuación radial podemos escribirla[8] como:

$$D u_{\ell k} = 0$$

la siguiente identidad se satisface:

$$u\frac{dD}{dk^2}u + uD\frac{du}{dk^2} = 0$$

donde:

$$\frac{dD}{dk^2} = \frac{1}{r^3}\,\frac{d(\ell+1/2)}{dk^2} - 1$$

por lo tanto

$$uD - Du = \frac{d^2}{dr^2}u - u\frac{d^2}{dr^2}$$
$$= \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} - u\frac{d}{dr}\right)$$

integrando:

$$\int_0^\infty u\frac{du}{dk^2}u\,dr + \left[\frac{du}{dr}\frac{du}{dk^2} - u\frac{d^2}{drdk^2}u\right] = 0$$

como $u \to r^{\ell+1}$ para $r \to 0$ y $u \to e^{-kr}$ para $r \to \infty$ entonces - el último término se anula al igual que antes para $\ell_n > -1/2$ y:-

$$\frac{d(\ell+1/2)^2}{dk^2} = \frac{\int_0^\infty u^2 dr}{\int_0^\infty \frac{u^2}{r^2}dr}$$

lo que nos dice que estados de momento angular grande pueden - existir si $k^2$ tiende al umbral, además la razón de incremento- aumenta con .

Es importante notar que la repulsión centrífuga - - $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ decrece y se puede hacer negativa (esto es de atrac-- ción hasta que $\ell = -1/2$ lo cual explica porqué para un poten-- cial dado pueden existir estados ligados aún cuando la $k^2$ se ha ce cada vez más y más negativa.

Ahora veremos como queda la amplitud de dispersión -

para $\ell$ , $\varepsilon$ complejos; según (II-56)

$$f(k^2;z) = \frac{1}{k}\sum (2\ell+1)\,\frac{e^{2i\delta_\ell}-1}{2i}\,P_\ell(z) \qquad \text{II-65}$$

Si llevamos a cabo la continuación analítica de $P_\ell$ para $\ell$ , $z$ complejos y substituir entonces a la sumatoria por una integral en el plano complejo $\ell$ de tal forma que cada término en el desarrollo sea el residuo de un polo en el contorno de integración.- Esto se puede hacer por medio de la transformación de Sommerfeld Watson la cual nos asegura que (II-65) podemos substituírla por:

$$A(\varepsilon,z) = \int_\Gamma \left(-\frac{2\ell+1}{k}\right)\left[\frac{S(\ell,\varepsilon)-1}{4}\right]\frac{P_\ell(z)}{\operatorname{sen}\pi\ell} \qquad \text{II-66}$$

donde $\Gamma$ encierra a todos los polos de $S$ .

Para comprobar esto designemos por $F(\ell)$ al integrando, aplicando el teorema del residuo tenemos que

$$A(\varepsilon,z) = -\frac{1}{k}(2\ell+1)\,\frac{S(\ell,\varepsilon)-1}{4}\,\frac{P_\ell(z)}{\operatorname{sen}\pi\ell} \qquad \text{II-67}$$

y se debe cumplir:

$$\int_\Gamma F(\ell)\,d\ell = \int_{\ell'-i\infty}^{\ell'+i\infty} F(\ell)\,d\ell + \int_{\text{semicírculo}} F(\ell)\,d\ell \qquad \text{II-68}$$

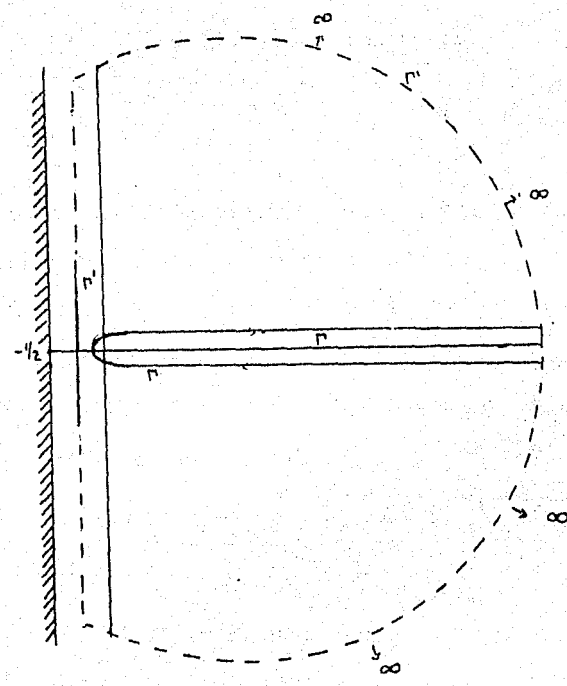



figura 7

Es posible demostrar que la integral sobre el semi-círculo se anula quedando entonces:

$$\int_{\Gamma'} F(\ell)\,d\ell = \int_{L'-i\infty}^{L'+i\infty} F(\ell)\,d\ell \qquad \text{II-69}$$

aplicando el teorema del residuo

$$\int_{L'-i\infty}^{L'+i\infty} F(\ell)\,d\ell = 2\pi i \sum_{\ell=n} \text{Res. } F(\ell) + 2\pi i \sum_{\text{Polos de Regge}} \text{Res } F(\ell) \qquad \text{II-70}$$

debemos notar que los polos de Regge son consecuencia del potencial dispersor. La primera suma conduce a $A(\varepsilon, z)$ y la segun

da a:

$$\mathrm{Res}\ F(\gamma_i) = -\frac{1}{4K}\left[2\gamma_i(\mathcal{E})+1\right] R_i(\mathcal{E})\ \frac{P_{\gamma_i(\mathcal{E})}(-z)}{\operatorname{sen}\pi\gamma_i(\mathcal{E})} \qquad \text{II-71}$$

donde la dependencia con la energía del i-esimo polo de Regge está representada (en el plano l) por $\gamma_i(\mathcal{E})$ ($\gamma_i(\mathcal{E})$ real para $\mathcal{E}<0$ y complejo para $k^2>0$, si

Tenemos entonces:

$$A(\mathcal{E},z) = \sum \frac{\beta_i(\mathcal{E})}{\operatorname{sen}\pi\gamma_i(\mathcal{E})}\ P_{\gamma_i(\mathcal{E})}(-z) - \frac{1}{K}\int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty}(2l+1)\frac{S(l,\mathcal{E})-1}{4}\ \frac{P_l(-z)}{\operatorname{sen}\pi l}\,dl \qquad \text{II-72}$$

donde:

$$\beta_i(\mathcal{E}) = \frac{2l_i+1}{2\pi i}\ \lim_{l\to l_i}(l-l_i)\frac{S(l,\mathcal{E})-1}{K} \qquad \text{II-73}$$

A diferencia de (II-56) donde $z$ (que denotamos por $\cos\theta$ ) solo podía variar de -1 a 1 aquí se ha extendido a valores no físicos por medio de continuación analítica por lo cual tiene sentido hablar de la forma asintótica para $z$ .

De la ecuación (II-72)[6,7] podemos ver que los polos de Regge controlan el comportamiento asintótico para $z$ además de los estados ligados y resonancia.

Para $z\to\infty$

$$P_{\gamma_i(-z)} \to z^{\mathrm{Re}\,\gamma} \qquad \text{II-74}$$

donde $\mathrm{Re}\,\gamma > -\frac{1}{2}$ , entonces:

$$\underset{|t|\to\infty}{A(\mathcal{E},z)} \qquad t = 2k^2(1-\cos\theta)\to\infty \qquad \text{II-75}$$

como vemos, debido al comportamiento asintótico de $A(\varepsilon, z)$ con $t$ la amplitud está determinada por los polos de Regge mas hacia la derecha en el plano. $\ell$ . Si la energía está alrededor de un-estado ligado o resonancia entonces $A(\varepsilon, z)$ es muy grande y estará dominada fundamentalmente por un solo polo de Regge, digamos $\ell_i \equiv \gamma(\varepsilon)$ cuyo residuo $\beta_i(\varepsilon)$ estará relacionado con la amplitud como sigue:

$$A(\varepsilon, z) \sim \frac{\beta_i(\varepsilon)}{\operatorname{sen} \pi \gamma(\varepsilon)} P_{\gamma(\varepsilon)}(-z) \qquad \text{II-76}$$

si $z \to \infty$

$$A(\varepsilon, z) \sim \frac{\beta_i(\varepsilon)}{\operatorname{sen} \pi \gamma(\varepsilon)} z^{\gamma_i} \qquad \text{II-77}$$

II-4 Teoría formal de la dispersión

En las secciones anteriores se obtuvieron diversos - resultados para la dispersión elástica de partículas por un potencial de alcance finito, por medio de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo ahora se obtendrán esos resultados en otra forma mas adecuada para aplicaciones[6,11]

Supongamos que el Hamiltoniano puede expresarse como:

$$H = H_0 + H_1 \qquad \text{II-78}$$

donde $H_0$ es un operador Hamiltoniano cuyos eigenvalores y eigenfunciones se conocen, digamos:

$$H_0 \phi_a = \varepsilon_a \phi_a \qquad \text{II-79}$$

El problema consiste en encontrar las soluciones a la ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi = \mathcal{E}\Psi \qquad \text{II-80}$$

En general tanto $H_0$ como $H$ tienen tanto un espectro continuo como discreto, aunque aquí solo consideramos la parte continua, los resultados así obtenidos deben ser modificados si es que existen estados ligados.

Siempre es posible elegir el origen de la energía como $\mathcal{E}=0$ y el continuo será $\mathcal{E}\geq 0$, (los estados ligados tendrán energía negativa); estamos excluyendo la posibilidad de que dentro del contínuo existan algunos niveles discretos, además suponemos que tanto $H_0$, como $H$ tienen $\mathcal{E}=0$ como origen y para cada estado $\Phi_a$ en el continuo de $H_0$ existe un correspondiente $\Psi_a$ en el contínuo de $H$ que tiene la misma energía, además de que ambos estados son normalizables.

La ecuación para $H$ es:

$$H\Psi_a = \mathcal{E}_a\Psi_a \qquad \text{II-81}$$

Ahora debemos relacionar $\Psi_a$ con $\Phi_a$. De (II-78) y (II-80) podemos escribir:

$$(H_0+H_1)\Psi_a = \mathcal{E}_a\Psi_a \qquad \text{II-82a}$$

ó

$$H_1\Psi_a = (\mathcal{E}_a - H_0)\Psi_a \qquad \text{II-82b}$$

supongamos que existe el operador inverso a $\mathcal{E}_a - H_0$ y representémoslo por $(\mathcal{E}_a - H_0)^{-1}$, entonces aplicando a ambos miembros de (II-82b) este operador: obtenemos

$$\frac{H_1 \Psi_a}{\mathcal{E}_a - H_0} = \Psi_a \qquad \text{II-83}$$

y de (II-79) sabemos que:

$$(H_0 - \mathcal{E}_a)\,\phi_a = 0 \qquad \text{II-84}$$

lo cual nos da que (II-83) está indeterminada hasta una función- $\phi$ que satisfaga (II-79) por lo cual:

$$\Psi_a = \phi_a + \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0} H_1 \Psi_a \qquad \text{II-85}$$

será la solución a la ecuación (II-81), al menos formalmente, lo que podemos ver si substituímos (II-85) en (II-81)

Esto tiene sentido siempre y cuando el operador inverso $(\mathcal{E}_a - H_0)^{-1}$ esté bien definido, es posible demostrar que - esto sucede excepto por una singularidad que podemos evitar substituyendo $(\mathcal{E}_a - H_0)^{-1}$ por:

$$(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} \qquad \text{II-86}$$

entonces (II-85) queda expresada por:

$$\Psi_a^{\pm} = \phi_a + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} \Psi_a^{\pm} \qquad \text{II-87}$$

que se conocen como ecuaciones de Lippmann-Schwinger[11]

Como vemos, mas que soluciones explícitas a la ecuación de Schrödinger son definiciones implícitas de una solución. Formalmente (II-85) se puede resolver multiplicando ambos miembros por (II-86) sumando y restando $H_1 \phi_a$, obtenemos así:

$$\Psi_a^{\pm} = \phi_a + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mathcal{E}_a - H \pm i\epsilon} H_1 \phi_a \qquad \text{II-88}$$

---

+ en lo sucesivo prescindiremos de $\lim \epsilon \to 0$

nótese que aparece $H$ en lugar de $H_0$ .

Esta forma para $\psi^{\pm}$ es conveniente para mostrar la ortonormalidad, por ejemplo

$$\left(\psi_a^+, \psi_b^+\right) = \left(\phi_a . \psi_b^+\right) + \left(\frac{1}{\mathcal{E}_a - H + i\epsilon} H_1 \phi_a . \psi_b^+\right)$$

como $H$ y $H_1$ son Hermitianos:

$$\left(\psi_a^+, \psi_b^+\right) = \left(\phi_a, \psi_b^+\right) + \left(\phi_a , H_1 \frac{1}{\mathcal{E}_a - H + i\epsilon} \psi_b^+\right)$$

si ahora reemplazamos $\psi_b^+$ por la expresión obtenida en (II-88) y substituímos $H$ por $\mathcal{E}_b$ :

$$\left(\psi_a^+ \psi_b^+\right) = \left(\phi_a \phi_b\right) + \left(\phi_a \frac{-1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b - i\epsilon} . H_1 \psi_b^+\right) + \frac{1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b - i\epsilon}\left(\phi_a . H_1 \psi_b^+\right)$$

$$= \left(\phi_a \phi_b\right) + \left(\frac{-1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b + i\epsilon} \phi_a . H_1 \psi_b^+\right) + \frac{1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b - i\epsilon}\left(\phi_a . H_1 \psi_b^+\right)$$

$$= \left(\phi_a . \phi_b\right) + \frac{-1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b + i\epsilon}\left(\phi_a H_1 \psi_b^+\right) + \frac{1}{\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b - i\epsilon}\left(\phi_a H_1 \psi_b^+\right)$$

$$= \left(\phi_a \phi_b\right) = \delta_{ab} \qquad \text{II-89}$$

Para interpretar $\psi^{\pm}$ , formemos un paquete de duda en el tiempo:

$$\psi_b^+(t) = \sum_k c_k \, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_k t} \psi_k^+ \qquad \text{II-90}$$

$c_k$ <u>no</u> depende del tiempo.

En forma análoga:

$$\Phi(t) = \sum_k C_k \, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_k t} \, \phi_k \qquad \text{II-91}$$

La constante $C_k$ sólo tiene valores apreciables cuando $k$ etiqueta a estados en donde $\mathcal{E}_k$ es aproximadamente $\mathcal{E}_a$ en el continuo; entonces la ecuación de Lippmann-Schwinger podemos escribirla como:

$$\Psi^+(t) = \phi(t) + \sum f_n(t)\,\phi_n$$

$$f_n(t) = \sum C_k \, \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_k t}}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_n - i\epsilon} \left(\phi_n \, H_1 \, \Psi_a^+\right)$$

$$f_n(t) = -\sum_k \int_{\mathcal{E}_n - \Delta\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_n + \Delta\mathcal{E}} C_k(\mathcal{E}) \left(\phi_n H_1 \Psi_a^+\right) \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_n - \mathcal{E})}}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E} - i\epsilon} \, d\mathcal{E} \, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_n t} \qquad \text{II-92}$$

Como estos límites no existen formalmente, entonces debemos considerar las siguientes relaciones:

$$\lim_{t\to-\infty} \lim_{\epsilon\to+0} e^{i\omega t}/\omega - i\epsilon = 0 \qquad \text{II-93a}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{\epsilon\to+0} e^{i\omega t}/\omega - i\epsilon = 2\pi i\,\delta(\omega) \qquad \text{II-93b}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \lim_{\epsilon\to+0} e^{i\omega t}/\omega + i\epsilon = -2\pi i\,\delta(\omega) \qquad \text{II-93c}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{\epsilon\to 0} e^{i\omega t}/\omega + i\epsilon = 0 \qquad \text{II-93d}$$

Entonces, usando (II-93a), la ecuación (II-92) se reduce a:

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 0 \qquad \text{II-94}$$

y por (II-93b):

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = -2\pi i \sum \int_{\varepsilon-\Delta\varepsilon}^{\varepsilon+\Delta\varepsilon} C_n(\phi_n H_1 \Psi_a^+)\, \delta(\varepsilon_n-\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t}$$

$$= -2\pi i \sum C_n(\phi_n H_1 \Psi_a^+)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t} \qquad \text{II-95}$$

con esto; y de (II-92):

$$\lim_{t\to-\infty} \Psi^+(t) = \phi(t) \qquad \text{II-96}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi^+(t) = \phi(t) - 2\pi i \sum_n \sum_k C_k(\phi_n H_1 \Psi_a^+)\, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t\right\} \phi_n \qquad \text{II-97}$$

procediendo de manera análoga usando (II-93c) y (II-93d) obtenemos:

$$\lim_{t\to-\infty} \Psi^-(t) = \phi(t) + 2\pi i \sum_n \sum_k C_k(\phi_n H_1 \Psi_k^-)\, \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t\right\} \phi_n \qquad \text{II-98}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \Psi^-(t) = \phi(t) \qquad \text{II-99}$$

De este comportamiento vemos que $\Psi^{\pm}$ son análogos a estados -- "entrantes" y "salientes" respectivamente ya que según (II-96) y (II-98) representan una onda no perturbada para $t\to-\infty$ y para- $t\to+\infty$ una onda dispersada la cual va apareciendo conforme -- transcurre el tiempo. Similarmente de (II-98) y (II-99) tenemos una onda dispersada cuando $t\to-\infty$ y conforme el tiempo transcurre, empieza a desaparecer hasta que sólo queda un estado no - perturbado.

No debemos confundir estado entrante con onda entrante ó estado saliente con onda saliente, ya que como vimos, el estado entrante (saliente), consta tanto de una onda entrante (saliente) como de una saliente (entrante), la primera correspondiente a una onda plana que incide sobre el dispersor y la saliente, corresponde a la onda esférica producida en la dispersión; mientras que para el estado saliente hay una onda esférica que incide y una onda plana no perturbada saliente.

Para la dispersión debida a un potencial, la representación en el espacio de coordenadas de la encontrada en las secciones anteriores, está dada en términos de la ecuación de Lippmann-Schwinger por $\psi_k^+ \equiv (r|\psi_k^+)$.

Es importante analizar el efecto de los operadores obtenidos en (II-86); de (II-89) vemos que

$$(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)\,\phi_n = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_n \pm i\epsilon)\,\phi_n \qquad \text{II-100}$$

Aplicando el operador inverso $(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}$ a ambos lados obtenemos:

$$\phi_n = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_n \pm i\epsilon)(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}\,\phi_n \qquad \text{II-101}$$

$$(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}\,\phi_n = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_n \pm i\epsilon)^{-1}\,\phi_n \qquad \text{II-102}$$

debemos notar que si $\epsilon = 0$, entonces hay una singularidad para $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_n$. También de (II-89) podemos escribir:

$$(\mathcal{E}_a - H \pm i\epsilon)^{-1}\,\psi_n^{\pm} = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_n \pm i\epsilon)^{-1}\,\psi_n^{\pm} \qquad \text{II-103}$$

La ecuación (II-102) nos dice que todos los estados $\phi_n$ de $H_0$

lo son también de $(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}$ y tienen como eigenvalores a - $(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_n \pm i\epsilon)$ (el inverso también se cumple). La interpretación de (II-103) es análoga.

Veremos ahora que las soluciones (II-88) están de - acuerdo con las ecuaciones obtenidas en la sección 1 de este capítulo.

La ecuación (II-87) podemos escribirla como:

$$|\psi_a^{\pm}) = |\phi_a) + \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} H_1 |\psi_a^{\pm}) \qquad \text{II-104}$$

multiplicando por la izquierda por $(\alpha|$ :

$$(\alpha|\psi_a^{\pm}) = (\alpha|\phi_a) + (\alpha| \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} H_1 |\psi_a^{\pm}) \qquad \text{II-105}$$

por completez se cumple:

$$\sum_{\alpha'} |\alpha')(\alpha'| = 1 \qquad \text{II-106}$$

$$\psi_a^{\pm}(\alpha) = \phi_a(\alpha) + \sum (\alpha| \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} H_1 |\alpha') \psi^{\pm}(\alpha) \qquad \text{II-107}$$

si

$$(\alpha| \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} |\alpha') \equiv F^{\pm}(\alpha\alpha', \mathcal{E}, a) \qquad \text{II-108}$$

$$\psi_a^{\pm}(\alpha) = \phi_a(\alpha) + \int F^{\pm}(\alpha, \alpha', \mathcal{E}, a)\, \psi_a^{\pm}(\alpha)\, d\alpha \qquad \text{II-109}$$

En varias de las ecuaciones anteriores apareció - $(\phi_L H_1 \psi_L^{\pm})$ , veamos cual es su significado. Debemos tener cuida

do en no confundirlo con un elemento de matriz de $H_1$ ya que - $\phi_n$ y $\psi_a^{\pm}$ pertenecen a espacios de Hilbert diferentes.

En vista de que las $\phi_n$ forman un conjunto completo de soluciones del operador $H_0$, podemos preguntarnos cual será la expansión de $H_1 \psi_a^{\pm}$ que aparece en (II-87) a partir de este sistema; tenemos así:

$$H_1 \psi_a^{\pm} = \sum_n T_{na}^{+} \phi_n \qquad \text{II-110}$$

donde

$$T_{na}^{\pm} = (\phi_n H_1 \psi_a^{\pm}) \qquad \text{II-111}$$

substituyendo (II-111) en la ecuación de Lippmann-Schwinger - (II-87) podemos escribir

$$\psi_a^{\pm} = \phi_a + \sum \frac{1}{\varepsilon_a - \varepsilon_n \pm i\epsilon} T_{na}^{+} \phi_n \qquad \text{II-112}$$

que <u>no</u> es una solución explícita, ya que $T_{na}^{+}$ según (II-111) - contiene a $\psi_a^{\pm}$ ; sin embargo, ésta forma de expresar a $\psi_a^{\pm}$ facilita, al menos formalmente, el método de aproximaciones sucesivas, por ejemplo:

$$T_{ii} = (\phi_i H_1 \phi_i) + \left(\phi_i \; H_1 \frac{1}{\varepsilon_i - H_0 + i\epsilon} H_1 \phi_i\right) + \left(\phi_i \; H_1 \frac{1}{\varepsilon_i - H_0 + i\epsilon} H_1 \frac{1}{\varepsilon_i - H_0 + i\epsilon} H_1 \phi_i\right) + \cdots \qquad \text{II-113}$$

En vista de aplicaciones futuras consideraremos el - producto escalar de la ecuación de Lippmann-Schwinger por $\phi_b$

$$(\phi_b \psi_a^{\pm}) = (\phi_b, \phi_a) + \left(\phi_b \; \frac{1}{\varepsilon_a - H_0 \pm i\epsilon} H_1 \psi_a^{\pm}\right)$$

pasando $(\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}$ al prefactor y substituyendo $H_0$ por $\mathcal{E}_b$

$$(\phi_b, \psi_a^{\pm}) = (\phi_b, \phi_a) + \left(\phi_b, \frac{1}{\mathcal{E}_a - H_0 \pm i\epsilon} H_1 \psi_a^{\pm}\right) \qquad \text{II-114}$$

podemos expresar:

$$(\phi_b, \psi_a^{\pm}) = (b|u^{\pm}|a) \qquad \text{II-115}$$

y como $\phi_n$ es un conjunto ortonormal tenemos:

$$(b|u^{\pm}|a) = \delta(b-a) + G_{\pm}(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b)\, T_{ba}^{\pm} \qquad \text{II-116}$$

donde:

$$G_{\pm} = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b \pm i\epsilon)^{-1} \qquad \text{II-117}$$

Es posible demostrar que $u^{\pm}$ son ortogonales esto es:

$$(u^{\pm}, u^{\pm\prime}) = \delta(k-k') \qquad \text{II-118}$$

También, de la definición de $T^{\pm}$ y (II-115) podemos obtener una ecuación integral para $T^{\pm}$.

$$(k|T^{\pm}|k') = (k|V|k') + \int_{-\infty}^{\infty} (k|V|k'')\, G_{\pm}\, (k|T|k')\, dk'' \qquad \text{II-119}$$

Veremos ahora qué relación existe entre $T$ y $S$ .- De la discusión anterior tenemos que $\psi^{+}$ se puede expresar en - términos de $\psi^{-}$ como:

$$\psi_n^{+} = \sum M_{mn} \psi_m^{-} \qquad \text{II-120}$$

donde:

$$M_{mn} = (\psi_n^{-}, \psi_m^{+}) \qquad \text{II-121}$$

pero de la ecuación de Lippman-Schwinger al multiplicar por $\Psi^-$:

$$M_{mn} = (\Psi_m^+ \Psi_n^-) = (\phi_m \Psi_n^+) + \left(\frac{1}{E_m - H - i\epsilon} H \phi_m \Psi_n^+\right) \qquad \text{II-122}$$

reagrupando y usando (II-103) obtenemos

$$M_{mn} = (\phi_m \Psi_n^+) + (\phi_m H_1 \Psi_n^+) \frac{1}{E_a - E_b + i\epsilon} \qquad \text{II-123}$$

pero:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\omega \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{\omega}\right) \mp i\pi\, \delta(\omega) \qquad \text{II-124}$$

entonces:

$$M_{mn} = \delta(b-a) - 2\pi i\, \delta(E_a - E_b) T_{ab} \qquad \text{II-125}$$

por lo consiguiente:

$$M_{mn} = S_{mn} \qquad \text{II-126}$$

También es posible expresar $T_{fi}$ en forma análoga a la ecuación de Lippmann-Schwinger (II-87) como sigue:

$$T_{fi} = (\phi_f H_1 \Psi_i^+)$$

$$= (\phi_f H_1 \phi_i) + \left(\phi_f H \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} H_1 \Psi_i\right)$$

$$= (\phi_f H_1 \phi_i) + \sum \left(\phi_r H_1 \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} \phi_r\right) T_{ri}$$

$$T_{fi} = H_{fi} + \sum_r \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} H_{1fi} T_{ri} \qquad \text{II-127}$$

Teniendo $T_{fi}$ automáticamente obtenemos $f$ [+] ya que de (II-119)- vemos que

$$T_{k\hat{k}_0} = \int e^{-i\hat{k}r} V(r) \Psi_k^+(r)\, dr$$

[+] Amplitud de dispersión.

$$T_{k\hat{k}_0} = \left(e^{i\hat{k}r}\, V\, \psi_k^+\right) \qquad \text{II-128}$$

Tomando en cuenta que $V \equiv \frac{\hbar^2}{2m} U$ y comparando con - (II-17) podemos escribir

$$T_{k\hat{k}_0} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} f(k,\hat{k}_0) \qquad \text{II-129}$$

y entonces vemos que la expansión en serie para $T_{k\hat{k}}$ (II-113) - es precisamente la serie de Born (ver cap. III sección 1).

II-5 Retardo Temporal

Hemos visto (sección 2) que la amplitud de disper- - sión podemos expresarla en términos de la fase $\delta_l$ y esta a su-vez en función de $U$ [+] (al menos en forma aproximada), esto nos-sugiere que es en la fase donde se encuentra la información que-sobre el potencial podemos obtener por medio de la dispersión; a continuación veremos como por medio de la fase de la amplitud de dispersión podemos determinar un tiempo $\tau$ equivalente al clásico (esta equivalencia la mostraremos explícitamente), también -- por medio de $\delta_l$ [++] se puede determinar un tiempo el cual es el-doble de $\tau$ cuando solo contribuye a la dispersión una sola - [12,13], si varias contribuyen. La comparación carece de sentido.

---

[+] ecuaciones (II-44), (II-56)

[++] y por lo consiguiente de

Al igual que en mecánica clásica nos limitaremos al movimiento de un paquete de onda que es dispersado elásticamente por un potencial de alcance finito, para esto es conveniente utilizar el concepto de paquete de onda.

Si el centro del paquete de onda se mueve según:

$$\langle \bar{r} \rangle = \bar{v} t + \bar{b} \qquad \text{II-130}$$

y suponemos que la interacción tiene lugar para $t = 0$ entonces el paquete de onda está representado por:

$$\phi(\bar{r}-\bar{b},t) = A(\bar{r}-\bar{b}-\bar{v}_0 t)\, e^{i[k\cdot(r-b)-\varepsilon t]} \qquad \text{II-131}$$

donde $A$ representa la amplitud del paquete y $\varepsilon = E/\hbar$

Considerando que la evolución del paquete es prácticamente independiente de la forma particular que tenga y la amplitud sea razonablemente suave en el sentido de la transformada de Fourier, entonces si la amplitud es apreciable en la región $\ell \cdot a$ la inversa lo será en $1/\ell \cdot a$ y así:

$$A(\bar{x}) = \int d^3\ell\, e^{i\bar{\ell}\cdot\bar{x}}\, a(\bar{\ell}) \qquad \text{II-132a}$$

$$a(\bar{\ell}) = \int d^3x\, e^{-i\bar{\ell}\cdot\bar{x}}\, A(\bar{x}) \qquad \text{II-132b}$$

Para $t = -\tau$ el paquete es idéntico con el de una partícula libre, y para $t = 0$ usando (II-132b) tenemos:

$$\phi_0(\bar{r}-\bar{b},0) = \int a(\bar{k}'-\bar{k})\, e^{i\bar{k}'\cdot(\bar{r}-\bar{b})}\, d\bar{k}' \qquad \text{II-133}$$

Si $t \neq 0$

$$\phi(\bar{r}-\bar{b},t) = \int a(\bar{k}'-\bar{k})\, e^{i[\bar{k}'(\bar{r}-\bar{b})-\varepsilon t]} \qquad \text{II-134}$$

Para construir el paquete $\psi$ que describa a la partícula antes y después de la colisión podemos substituir a la onda plana $e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}$ por $\psi_{k'}(r)$ en (II-133) y obtenemos:

$$\psi(\bar{r}-\bar{b},t) \rightarrow \int a(\bar{k}'-k)\, e^{i\bar{k}'\cdot\bar{b}}\, \psi_{k'}\, e^{-i\varepsilon' t}\, d\bar{k}' \qquad \text{II-135}$$

que solo tiene valores apreciables cuando $\bar{k}' \simeq \bar{k}$ mucho antes de la colisión ( $t \ll -\ell/v$ ) la fase varía rápidamente debido a la exponencial $e^{i\varepsilon' t}$ lo cual hace que la integral sea cero excepto cuando la fase es estacionaria si $\bar{v}t \simeq \bar{r}$ y entonces $\psi_{k'}(r)$ podemos substituirla por:

$$\psi_{k'}(r) \rightarrow e^{ik'\cdot r} + f(k',k)\,\frac{e^{ik'r}}{r} \qquad \text{II-136}$$

al substituir obtenemos

$$\psi(\bar{r}-\bar{b},t) \rightarrow \int a(k'-k)\, e^{-i\bar{k}'\cdot b}\left[e^{ik'\cdot r} + f(k',k)\,\frac{e^{ik'r}}{r}\right] e^{-i\varepsilon' t}\, dk' \qquad \text{II-137}$$

cuando $t \rightarrow \infty$ el segundo término de la derecha desaparece debido a la rápida variación de la fase excepto cuando $\bar{k}' = \bar{k}$ que es estacionaria[14].

Si esta integral es máxima cuando su fase tiene un extremo en $\bar{k}' = k$ entonces:

$$\frac{d\varphi}{dk} \qquad \text{para } \bar{k}' = k \qquad \text{II-138}$$

donde[14,16] $\varphi$ es la fase, que podemos separar, en fase de la onda incidente y fase de la onda dispersada.

Para la onda incidente:

$$\frac{d\varphi_i}{dk} = \left(\frac{d\alpha}{dk} + b - z - \frac{\hbar k}{m} t\right) \qquad \text{II-139}$$

y para la dispersada:

$$\frac{d\varphi_d}{dk} = \left(\frac{d\alpha}{dk} - b + r + \frac{d\beta}{dk} - \frac{\hbar k}{m} t\right) \qquad \text{II-140}$$

hemos utilizado $\varepsilon' t = \frac{\hbar k'^2}{2m} t$ , $a(k'-k) = |a(k'-k)|\, e^{i\alpha}$ , $f(k'k) = |f(k',k)|\, e^{i\beta}$ y que la onda incide en la dirección $z$

Dado que $\frac{\hbar k}{m} = v$, tenemos:

$$(vt)_i = z - b + \frac{d\alpha}{dk} \qquad \text{II-141a}$$

$$(vt)_d = r - b + \frac{d\alpha}{dk} + \frac{d\beta}{dk} \qquad \text{II-141b}$$

como vemos la dispersión da lugar al término $\frac{d\beta}{dk}$ lo que sugiere que puede ser un análogo cuántico a la $\Delta$ clásica o al menos estar relacionado, (la $\tau$ la obtenemos obviamente dividiendo -- por $v$ ). (la relación con la vida media y duración de colisión- se encuentra en[15].

Hemos usado la función de onda (II-136), sin embargo según (II-54) podemos expresar la función de onda en términos - "ondas parciales" con fases $\delta_\lambda$ una pregunta que urge inmediatamente es: ¿podemos calcular una $\tau$ como antes formando un pa-- quete de onda con la función de onda (II-54)? La respuesta es -

afirmativa pero ¿son ambos iguales, ó están relacionados? a continuación analizaremos esto.

Si en (II-137) usamos (II-54), en lugar de (II-136)- obtenemos:

$$\psi(\bar{r}-\bar{b},t) \rightarrow \int a(\bar{k}'-\bar{k})e^{-i\bar{k}'\cdot\bar{b}}\left[e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - e^{2i\delta_\ell}e^{i(kr-\ell\pi/2)}\right]e^{i\varepsilon' t} \qquad \text{II-142}$$

al igual que (II-137) tiene un máximo cuando su fase es estacionaria, para $\bar{k}'=k$ entonces:

$$(vt)_i = \frac{d\alpha}{dk} - r - b \qquad \text{II-143}$$

$$(vt)_d = \frac{d\alpha}{dk} + r - b + 2\frac{d\delta_\ell}{dk} \qquad \text{II-144}$$

si comparamos con (II-141) vemos que el efecto de la dispersión- está dado ahora por $2\frac{d\delta_\ell}{dk}$ , este término tiene un significado diferente al de $\frac{d\beta}{dk}$ ya que el segundo término de (II-147) in-- cluye tnato onda incidente como dispersada de hecho lo que tenemos son ondas entrantes y salientes que como ya dijimos (sec. 5) son diferentes la $\Delta_c$ que obtenemos de la diferencia entre el- paquete entrante con el saliente tiene sentido en una dimsión- ya que de (4.17) si a la dispersión solo contribuye una $\ell$ :

$$\beta = \delta_\ell$$

y entonces

$$2\Delta_c = \Delta \qquad \text{II-145}$$

(Usamos el subíndice $c$ para denotar cuántico, $\Delta_c = d\beta/dk$ se-- gún.(II-141).

Como es posible obtener un análogo a la $\Delta$ clásica- esperamos también encontrar un análogo a la trayectoria para lo- cual necesitamos conocer cual es la distancia de máxima aproxima ción, el parámetro de impacto lo introdujimos en la función de - onda, ¿lo podemos obtener también de la fase? ya que como hemos- visto se encuentra en ella la información sobre la dispersión. - Si esto es así podemos considerar que el centro de masa del pa-- quete de onda nos da la "trayectoria". A continuación veremos - esto.

Si seguimos suponiendo que $f$ varía poco en el in-- tervalo de momentos $1/\ell \cdot d$ podemos desarrollar $K'$ , $\varepsilon'$ alre- dedor de $K$ , $\varepsilon$ , y tenemos:

$$K' = K + \hat{v}\cdot(\bar{K}'-\bar{K})$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + \hbar\,(\bar{K}'-\bar{K})\cdot\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial K} \qquad \text{II-146}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + \hbar\,(\bar{K}'-\bar{K})\cdot v \qquad \text{II-147}$$

efectuando también el desarrollo de la amplitud y de la fase:

$$\alpha(K', \cos\theta) = \alpha(K, \cos\theta) + (\bar{K}'-\bar{K})\,\nabla_K \alpha\,(K, \cos\theta) + \cdots \qquad \text{II-148}$$

Obtenemos entonces que la amplitud de dispersión es:

$$f(K', \cos\theta) = f(K, \cos\theta)\, e^{i(\bar{K}'-\bar{K})\cdot\nabla_K \alpha_0}\, e^{(K'-K)\cdot\nabla_K \ln f_0} \qquad \text{II-149}$$

donde

$$f_0 = f(K, \cos\theta) \qquad \text{II-150a}$$

$$\alpha_0 = \alpha(K, \cos\theta) \qquad \text{II-150b}$$

substituyendo en (II-137) (nos limitaremos en lo sucesivo a trabajar con $\psi_d$ ), y usando (II-132):

$$\psi_d \rightarrow f(k_1 \cos\theta)\, e^{i(k\cdot r - Et)}\, A(\hat{u}(r - v_0 t) + \nabla_k \alpha_0) \qquad \text{II-151}$$

El factor $e^{(k'-k)\nabla_k \ln f_0}$ está relacionado con la distorsión. Por el momento no nos ocuparemos de él, y por el momento lo absorvemos en $\alpha$ .

Para interpretar el término $\nabla_k \alpha_0$ que aparece en la amplitud es conveniente descomponerlo en dos contribuciones perpendiculares una debida al cambio en el momento y otra al cambio en la dirección

$$\nabla_k \alpha_0 = \hat{u}_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial k} + \hat{u}_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma} \qquad \text{II-152}$$

donde $\gamma = \cos\theta$ , $\hat{u}_1$ es un vector en la dirección $\bar{k}$ y $\hat{u}_2$ perpendicular a $\hat{u}_1$ esto es:

$$\hat{u}_2 = \hat{k}' - \hat{k}'\hat{u}\,\hat{u}_1$$

entonces:

$$\nabla_k \alpha_0 = \hat{u}_1 \Delta + \hat{u}_2 B \qquad \text{II-152a}$$

al introducir en la amplitud, vemos que:

$$b = B \qquad \text{II-153}$$

Ahora $b = B$ proviene del "desplazamiento" que sufre la partícula al interactuar con el potencial

Pensando en el movimiento del centro de masa del paquete, por analogía con mecánica clásica podemos escribir

$$b = \rho \cos \theta/2 \qquad \text{II-154}$$

representamos por $\rho$ a la $r_{min}$ clásica.

Comparando con (II-152) tenemos:

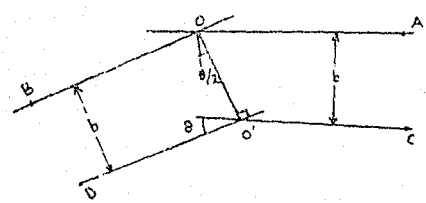
$$\rho = 2 \operatorname{sen} \theta/2 \; \frac{d\alpha_0}{d\gamma} \qquad \text{II-155}$$

El retardo temporal lo podemos obtener de (II-152a) si expresamos:

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial k} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k}$$

$$= \tau v \qquad \text{II-156}$$

En base a lo dicho podemos contruir una trayectoria. (figura 8 )




(figura 8)

debiendo notar que al igual que en mecánica clásica $\tau$ tiene dos contribuciones, una geométrica y otra dinámica, la primera proviene del hecho de que la trayectoria A o B es mayor que C o' D y la dinámica de la presencia del potencial. De la figura vemos que la contribución geométrica es:

$$\tau_{geom} = -\frac{2\rho}{v} \operatorname{sen} \theta/2 \qquad \text{II-1}$$

y la dinámica, si $\theta \ll 1$ y $|V| \ll E$

$$\tau_{div} = \frac{1}{\rho v_0^2} \int V(\rho, z)\, dz \qquad \text{II-158}$$

Todos estos resultados podemos obtenerlos a partir del movimiento del centro de masa del paquete[12,16,17] aunque el trabajo es mayor[+]. El retardo temporal $\tau_c$ (o $\Delta_c$ ) podemos obtenerlo a partir de $S_R$ (apéndice I) y de ahí podemos definir intervalos de tiempo arbitrarios (apéndice II).

Hasta ahora nada se ha dicho sobre si la fase es real o compleja; si es compleja:

$$\alpha_0 = \alpha_R + i\alpha_I$$

$$i\alpha_0 = i\alpha_R - \alpha_I \qquad \text{II-159}$$

a.- $\alpha_I$ podemos absorverla dentro de la amplitud y nos dará información sobre la distorsión que sufre el paquete. Esto podemos verlo si escribimos la amplitud como

$$f = e^{i\alpha}$$

$$= e^{-\alpha_I + i\alpha_R}$$

$$= R\, e^{i\alpha_R} \qquad \text{II-160}$$

de donde $\alpha_I$ nos da la información sobre $R$ .

---

[+]también se puede efectuar para un paquete relativista 7 , 8

II-6. Otra forma de expansión para la amplitud.

Usualmente se trabaja con la amplitud de dispersión desarrollándola en ondas parciales si la energía es no muy alta solo unos cuantos términos (ondas parciales) contribuyen con lo cual se requieren solo unas cuantas cantidades complejas dependientes de la energía para poder determinar su comportamiento con buena aproximación, pero conforme la energía se va incrementando, el número de términos que contribuyen también aumenta considerablemente, lo que da lugar a que la parametrización deje de ser adecuada. Cuando la energía se incrementa las partículas son desviadas menos de la trayectoria original esto sugiere que si se toma la desviación o algo similar (digamos la transferencia de momento) tal que si se parametriza con él solo uno o pocos términos sean significativos, se encuentra que esto es posible

La representación de Regge puede interpretarse como una descomposición de la amplitud de dispersión en amplitudes parciales cada una de las cuales corresponde al intercambio de un conjunto de pseudoestados, este desarrollo es muy similar al de ondas parciales pero como los objetos de intercambio no representan estados físicos mecánico cuánticos, el significado físico del parámetro de desarrollo $\nu$ equivalente a la $\ell$ en el desarrollo en ondas parciales.

Consideremos la dispersión elástica de dos partículas cuyos momentos entrantes son $p_1$ , $p_2$ y los momentos salientes son $p_3$ , $p_4$ (figura 9) .

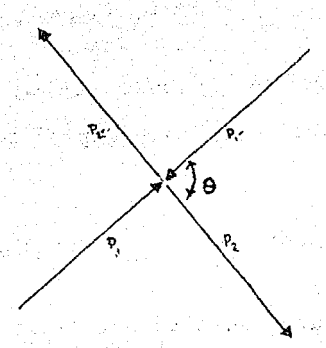



figura 9

La dispersión puede describirse por los elementos de la matriz $S\,(p_{2'}\,p_2\,,\,p_{1'}\,p_1\,)$, usualmente se usan $p_{1'}\,p_1$ para - designar las columnas y $p_{2'}\,p_2$ para los renglones.

$$S(p_1 p_2 p_{1'} p_{2'}) = S^{p_{1'}\,p_1}_{p_{2'}\,p_2} \qquad \text{II-161}$$

Las invariancias propias del sistema hacen posible - la diagonalización de $S$ ; como los estados entrantes y salientes no se alteran bajo translaciones entonces deben ser eigenestados de

$$P_i\,|kq) = k_i\,|kq) \qquad i = 1,2,3 \qquad \text{II-162}$$

donde:

$$k_i = (p_{i'} + p_i)$$
$$q_i = \tfrac{1}{2}(p_i - p_{i'})_i$$

También podemos diagonalizar:

$$L^2 \equiv L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{23}^2 \qquad \text{II-16}$$

y $L_3$ , introduciendo así la base $|E, \ell, m)$

Para partículas (sin espin) teníamos el desarrollo en ondas parciales:

$$f(K, K') = f(\Omega) = \sum_{\ell} a_{\ell}(E) P_{\ell}(\cos\theta) \qquad \text{II-16}$$

Si en lugar de esta expansión, en la que $\ell$ nos sirve para etiquetar cada contribución, usamos otra con un etiquetado diferente para $S$ digamos[18]:

$$S(p_2' p_2 \; p_1' p_1) \equiv S^{p_2 p_1}_{p_2' p_1'}$$

Tenemos entonces que los renglones y columnas están etiquetados por pseudoestados izquierdos y derechos $|p_1)(p_2|$ y $|p_1')(p_2|$ que podemos escribir como:

$$|p_1)(p_2| = |p_1, \tilde{p}_2)$$
$$|p_1')(p_2| = (\tilde{p}_1' p_2'|$$

entonces:

$$S(p_2' p_2 \; p_1' p_1) = (\tilde{p}_1' p_2' | S | p_1 \tilde{p}_2)$$

si

$$K = p_1 - p_2$$
$$q = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)$$
$$P_i | p_1 \tilde{p}_2) = K_i | p_1 \tilde{p}_2) \qquad \text{II-16}$$

La transferencia de momento $K$ es invariante bajo

translaciones en el plano perpendicular a $K$ , y rotaciones so - bre $K$ lo cual se puede ver en el sistema de Breit (figura 10) - ahora etiquetamos la base por medio de los eigenvalores $\nu$ , $m$ , $K$ como veremos a continuación

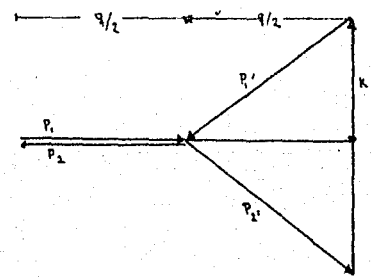



figura 10

Los elementos de la matriz $T$ están dados en esta - base por:

$$T = \int d^3p_1\, d^3p_2\; T_{p_2 p_1}\; |\tilde{p}_2)(p_1|$$

Podemos descomponer el operador $T$ para una trans-- ferencia de momento fija, digamos en la dirección $z$ , los operadores apropiados son[20,21]:

$$L_{12} = i\left(q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}\right) \equiv -i\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad \text{II-160}$$

$$(c\bar{m})^{-1} L_{i0} = i\,\frac{\partial}{\partial q_i} \equiv \xi_i \qquad i = 1,2 \qquad \text{II-167}$$

$\bar{m}$ = masa reducida

Como existe invariance frente a rotaciones alrededor del eje ,

otro operador apropiado es:

$$- \nabla^2_{q_\perp} = - q_\perp^{-1} \frac{\partial}{\partial q_\perp} \frac{\partial}{\partial q_\perp} - q_\perp^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad \text{II-168a}$$

$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 \qquad \text{II-168b}$$

donde:

$$q_\perp^2 = q_1^2 + q_2^2 \qquad \varphi = \operatorname{arctan}(q_2/q_1)$$

Podemos etiquetar una representación por medio de -- los eigenvalores de estos operadores. Las eigenfunciones simultáneas a (II-166) y (II-167) son:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2)\, h_{\nu m} = \nu^2 h_{\nu m} \qquad 0 \leq \nu^2 < \infty \qquad \text{II-169}$$

$$L_{12}\, h_{\nu m} = m\, h_{\nu m} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{II-170}$$

donde

$$h_{\nu m} = J_m(\nu \rho)\, e^{im\varphi} \qquad \text{II-171}$$

Los intervalos de $\nu$ , $m$ están determinados por la unitoriedad de los operadores (puede demostrarse en forma rigurosa).

Para poder escribir la descomposición de la matriz - $T$ necesitamos de la normalización que satisfacen las funciones $h_{\nu m}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2q\, h^*_{\nu m}(q_1 q_2)\, h_{\nu' m'}(q_1 q_2) = \frac{1}{\nu}\, \delta(\nu - \nu')\, \delta_{m m'} \qquad \text{II-172}$$

$$\int \nu\, d\nu \sum_m h_{\nu m}(q_1 q_2)\, h^*_{\nu m}(q_1' q_2') = \delta^{(2)}(q - q') \qquad \text{II-173}$$

Entonces podemos escribir:

$$Q_{kq} = \int_0^\infty \nu\, d\nu \sum_m h_{\nu m}(q_1 q_2)\, Q_k^{\nu m} + \tilde{Q}_k \qquad \text{II-174}$$

donde

$$Q_{kq} = |p_2)(p_1| \qquad \text{II-175}$$

y entonces:

$$T_{kq} = \int_0^\infty \nu\, d\nu \sum h^*_{\nu m}(q_1 q_2)\, T_k^{\nu m} + \tilde{\tilde{T}}_k \qquad \text{II-176}$$

(los segundos términos de la derecha en (II-174) y (II-176) se - refieren a la parte discreta).de esta última ecuación podemos obtener $T_k^{\nu m}$ invirtiendo:

$$T_k^{\nu m} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 q\, h_{\nu m}(q_1 q_2)\, (T_{kq} - \tilde{\tilde{T}}_k) \qquad \text{II-177}$$

Hasta ahora no hemos hecho ninguna suposición sobre el potencial sin embargo esto se hizo implícitamente al elegir el intervalo - de $\nu$ , $m$ .

El significado físico de $m$ es claro (número de unidades de momento angular intercambiados entre la partícula y la-fuente) el de $\nu$ lo discutiremos mas tarde.

Si el potencial es esféricamente simétrico:

$$T_k^{\nu m} = \delta_{m0}\, T_k^{\nu} \qquad \text{II-178}$$

entonces (II-176) se reduce:

$$T_{kq} = \int_0^\infty \nu d\nu \, T_k^{\nu} \, h^*_{\nu 0}(q, q_\perp) + \tilde{T}_k \qquad \text{II-179}$$

y

$$T_{kq} = \int_0^\infty \nu d\nu \, T_k^{\nu} \, J_0(\nu q_\perp) + \tilde{T}_k \qquad \text{II-180}$$

ya que

$$h_{\nu 0} = J_0(\nu q_\perp)$$

Expansión para dispersión hacia adelante.

Para dispersión hacia adelante, $k=0$ , tenemos:

$$L_{\alpha\beta} = -i\left(q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\beta} - q_\beta \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) \qquad \text{II-181}$$

$$(c\hbar)^{-1} L_{\alpha 0} = i \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \equiv \xi_\alpha \qquad i = 1,2,3 \qquad \text{II-182}$$

y

$$-\nabla_q^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = -q^{-1}\frac{\partial}{\partial q}\left(q\frac{\partial}{\partial q} + 1\right) + q^{-2}L^2 \qquad \text{II-183}$$

ahora las eigenfunciones simultáneas son:

$$g_{l\mu m} = \frac{1}{\sqrt{q\mu}} J_{l+1/2}(q\mu) Y_{lm}(\theta\varphi) \qquad \text{II-184}$$

satisfacen:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) g_{l\mu m} = \mu^2 g_{l\mu m} \qquad 0 \le \mu < \infty \qquad \text{II-185a}$$

$$L^2 g_{l\mu m} = l(l+1) g_{l\mu m} \qquad l = 0, 1 \ldots \qquad \text{II-185b}$$

$$L_z g_{l\mu m} = m_{l\mu m} \qquad m = -l \ldots l \qquad \text{II-185c}$$

y las relaciones de normalización son:

$$\int d^3q\, g^*_{\mu\ell m}(q)\, g_{\mu'\ell' m'}(q) = \frac{1}{\mu^2}\,\delta(\mu-\mu')\,\delta_{mm'}\,\delta_{\ell\ell'} \qquad \text{II-186}$$

$$\int \mu^2 d\mu \sum g_{\mu\ell m}(q)\, g^*_{\mu\ell m}(q') = \delta^{(3)}(q-q') \qquad \text{II-187}$$

y la expansión análoga a (II-179) es:

$$T_{oq} = \int_0^\infty \mu^2 d\mu \sum_{\ell m} T_o^{\mu\ell m}\, g^*_{\mu\ell m}(q) + \tilde{T}_o \qquad \text{II-188}$$

si el potencial es esféricamente simétrico

$$T_o^{\mu\ell m} = \delta_{\ell 0}\,\delta_{m0}\, T_o^{\mu} \qquad \text{II-189}$$

obtenemos asi:

$$\begin{aligned} T_{oK} &= \int_0^\infty \mu^2 d\mu\, T_o^{\mu}\, g^*_{\mu 00}(q) + \tilde{T}_o \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^\infty \mu^{3/2} d\mu\, J_{1/2}(q\mu)\, T_o^{\mu} + \tilde{T}_o \end{aligned} \qquad \text{II-190}$$

Significado físico de $\nu$ .

Ahora veremos cual es el significado físico de - y qué relación tiene con otros resultados[20]

De (II-179) tenemos

$$T_{kq} = \int_0^\infty \nu d\nu\, T_k^{\nu}\, J_0(\nu q_\perp) \qquad \text{II-191}$$

si no tomamos en cuenta la parte discreta o invirtiendo

$$T_k^{\nu} = \int_0^{\infty} k\,dk\, T_{kq}\, J_0(\nu k) \qquad \text{II-192}$$

supongamos que sobre nuestro dispersor inciden partículas con diferentes momentos, si deseamos trabajar solo con $k \approx k_0$ podemos "filtrar" introduciendo una función $F(k)$, cuyo valor apreciable es para $k = k_0$ entonces la amplitud (II-180) estará dada por:

$$T_k^{\nu} = \int_0^{\infty} k\,dk\, T_{kq}\, F(k)\, J_0(\nu k) \qquad \text{II-193}$$

Supongamos que $F(k) = e^{-a(k-k_0)^2}$, si expresamos a $T_{kq}$ al igual que en (II-149) y solo conservamos los dos primeros términos

$$T_k^{\nu} = \int_0^{\infty} k\,dk\, e^{i(\alpha_0 + \alpha_0'(k-k_0))}\, J_0(\nu k) \qquad \text{II-194}$$

si $k$ es suficientemente grande podemos usar la forma asintótica para $J_0$

$$J_0(\nu k) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \nu k}}\, \cos(\nu k - \pi/4)$$

tenemos entonces:

$$T_k^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{i\alpha_0} \sqrt{\frac{1}{\pi \nu k}}\, (\cos \nu k + \operatorname{sen} \nu k)\, e^{i(k-k_0)\alpha_0' + (k-k_0)^2 a}\, k\,dk$$

$$\approx e^{i\alpha_0} \sqrt{\frac{k_0}{\nu}}\, \frac{1}{2ia} \left\{ (1+i)\, e^{i\nu k_0 - \frac{(\alpha'+\nu)^2}{4a}} - (1-i)\, e^{-i\nu k_0 - \frac{(\alpha'-\nu)^2}{4a}} \right. \qquad \text{II-195}$$

la contribución más importante proviene de

$$\nu^2 \simeq (\alpha'_R)^2 \qquad \text{II-196}$$

y como vimos en (II-156) $\alpha'_R$ es el análogo cuántico de $\Delta$ entonces, la $\nu$ obtenida como uno de los eigenvalores de (II-168) tiene como contraparte clásica a $\Delta$ . Por otro lado de -- (II-166) y (II-167) tenemos:

$$-L^2_{12} + L^2_{10} + L^2_{20} = -\nu^2 \qquad \text{II-197}$$

y como el miembro izquierdo es el operador de Casimir[21] entonces:

$$L^2_{12} - L^2_{10} - L^2_{20} = \eta(\eta+1) \qquad \text{II-198}$$

donde $\eta$ son las trayectorias de Regge[21]; tenemos así la relación entre $\Delta$ y el parámetro del desarrollo $\nu$ y los polos de Regge, si la energía es muy alta la amplitud de dispersión está dominada por unos cuantos polos y si $\nu$ es independiente de la energía y solo contribuye una entonces tenemos el análogo a una constante de movimiento.

# CAPITULO III

## III-1 Aproximación de Born

Una de las aproximaciones más usadas para altas energías (o cuando podemos considerar al potencial como una perturbación) es la de Born, que podemos obtener resolviendo en forma iterativa la ecuación integral (II-15). Esta solución es esencialmente la expansión de la función de onda en serie de Luouville-Neumann.

Para obtener la aproximación cero de la ecuación (II-14):

$$\psi_k(r) = e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} U(\bar{r}')\,\psi_k(\bar{r}')\,d^3\bar{r}' \qquad \text{III-1}$$

despreciamos la integral y entonces:

$$\psi_k^{(0)}(r) = e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

La siguiente aproximación la obtenemos substituyendo $\psi_k^{(0)}$ en lugar de $\psi_k(\bar{r}')$ dentro de la integral en (III-1)

$$\psi_k^{(1)}(r) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} U(\bar{r}')\,e^{ikz'}\,d^3\bar{r}' \qquad \text{III-2}$$

para obtener la siguiente aproximación, $\psi_k^{(2)}(\bar{r}')$ substituimos la $\psi_k^{(1)}(\bar{r}')$ obtenida en lugar de $\psi_k(\bar{r}')$ dentro de (III-1), y así sucesivamente; tenemos entonces:

$$\psi_k^{(n)} = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,\psi_k^{(n-1)}(\bar{r}')\,U(\bar{r}')\,d^3\bar{r}' \qquad \text{III-3}$$

y la solución (III-1) es:

$$\psi_k(r) = e^{ikz} - \int G(\bar{r}-\bar{r}')\,U(\bar{r}')\,e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}'}\,d^3\bar{r}' + \iint G(\bar{r}-\bar{r}')\,U(\bar{r}')\,G(\bar{r}-\bar{r}'')\,U(\bar{r}'')\times$$
$$e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}''}\,d^3\bar{r}'\,d^3\bar{r}'' + \iiint G(\bar{r}-\bar{r}')\,U(\bar{r}')\,G(\bar{r}-\bar{r}'')\,U(\bar{r}'')\,G(\bar{r}-\bar{r}''')\,U(\bar{r}''')\times$$
$$e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}'''}\,d^3\bar{r}'\,d^3\bar{r}''\,d^3\bar{r}''' + \cdots\cdots \qquad \text{III-4}$$

a esta serie se le conoce como serie de Born.

Podemos interpretar cada uno de los términos en la serie de Born como sigue: El primer término nos representa una onda que se mueve libremente, esto es no hay interacción (fig. 11); en el segundo esta onda se mueve libremente hasta que es dispersada por el potencial $U(\bar{r}')$ en el punto $\bar{r}'$ después de lo cual se sigue moviendo libremente (fig. 11), y sumamos sobre todos los posibles puntos de dispersión; en el siguiente la onda se mueve libremente hasta que es dispersada en el punto $\bar{r}''$ por el potencial $U(r'')$, la onda resultante se mueve nuevamente libre de interacción hasta que es dispersada en el punto $\bar{r}'''$ por el potencial $U(r''')$ en ese punto, sumamos al igual que antes sobre todos los posibles puntos $r'$, $r''$, y así sucesivamente.

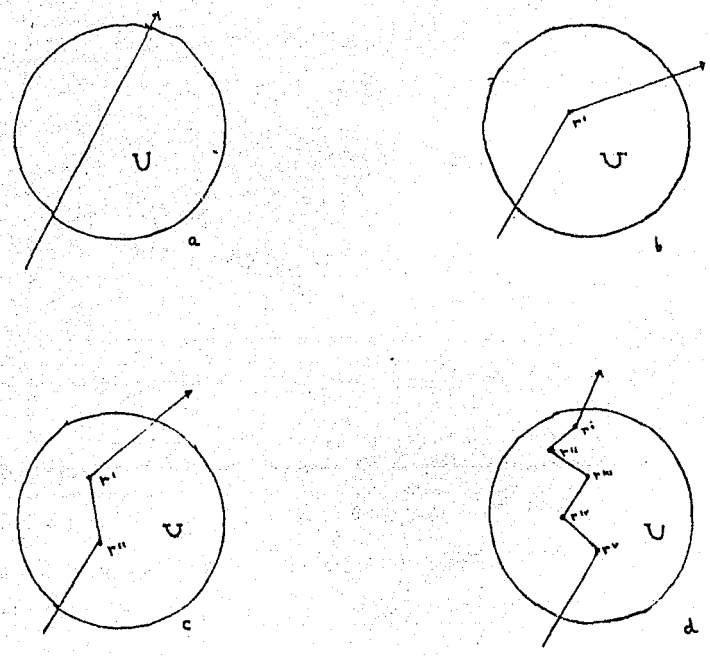



figura 11

El problema que se tiene con la serie es la convergencia ya que de ella depende qué tan buena es cada una de las aproximaciones, esta depende de la intensidad del potencial dispersor y el tiempo durante el cual la partícula interactúa con el.

Para que la serie converja debe cumplirse:

$$\psi^{(n)} \ll \psi^{(n-1)} \qquad \text{III-5}$$

Si deseamos conservar solo los primeros términos - ( $n = 1$) y suponemos $Ka \leq 1$ entonces vemos que el factor expo-

nencial dentro de la integral de la primera aproximación no contribuye por lo cual la integral es del orden $\psi^{(0)}|V|a^2$ y para que se satisfaga(III-5)

$$\psi^{(1)} \sim \frac{|V|a^2\psi^{(0)}}{2} \qquad \text{III-6a}$$

$$\psi^{(1)} \sim \frac{m|V|a^2\psi^{(0)}}{\hbar^2} \qquad \text{III-6b}$$

como $ka \leq 1$ entonces:

$$|V| < \frac{\hbar^2}{ma^2} \qquad \text{III-7}$$

Como ya dijimos la convergencia también depende del tiempo que la partícula interacciona con el potencial, ( $a/v$ ), será buena si este tiempo es pequeño comparado con el que requiere el potencial para influir apreciablemente ( $\hbar/V$ ), esto implica:

$$\frac{Va}{\hbar v} \ll 1 \qquad \text{III-8a}$$

ó

$$V \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2 ka}{ma^2} \qquad \text{III-8b}$$

como vemos la condición (III-7) no impone restricciones sobre la velocidad a diferencia de (III-8b) donde se requiere que la velocidad sea suficientemente grande respecto del potencial.

Lo que nos interesa es la amplitud de dispersión por lo cual es conveniente encontrar un método de aproximaciones sucesivas análogo al de la función de onda. Para ello es mas conveniente trabajar en el espacio de momentos.

De (II-89) vemos que las ondas planas forman un conjunto completo lo cual nos permitió obtener una ecuación integral para $T$ análoga a (III-1) y dado que (II-129) nos relaciona a $f$ con $T$ tenemos entonces una ecuación para $f$ que al resolver en forma iterativa nos da las diferentes aproximaciones de Born.

La primera aproximación es:

$$f^{(1)}(\bar{k},\bar{k}') = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i(\bar{k}-\bar{k}_0)\cdot r'}\, U(\bar{r}')\, d^3r' \qquad \text{III-9}$$

si el potencial es central e integramos sobre los ángulos:

$$f(\bar{k},\bar{k}') = \frac{-1}{(\bar{k}-\bar{k}_0)}\int_0^\infty U(r')\, \mathrm{sen}\{(\bar{k}_0-\bar{k})\cdot r'\}\, \bar{r}'\, dr' \qquad \text{III-10}$$

si hacemos:

$$\bar{k}_0 - \bar{k} = \bar{K} \qquad \text{III-11a}$$

$$(\bar{k}_0 - \bar{k})\cdot r' = \rho \qquad \text{III-11b}$$

entonces (III-10) se reduce a:

$$f(\bar{k},\bar{k}') = \frac{1}{K}\int \frac{U}{K^2}\, \frac{\mathrm{sen}\, Kr'}{Kr'}\, \rho^2 d\rho \qquad \text{III-12}$$

y por $V = \hbar^2/2mU$. $\hbar^2K^2 = 2mE$

$$f(\bar{k},\bar{k}') = \frac{1}{K}\int \frac{V}{E}\, \frac{\mathrm{sen}\, Kr}{Kr}\, \rho^2 d\rho \qquad \text{III-13}$$

usando el teorema de adición para los armónicos esféricos

$$\frac{\mathrm{sen}\, r|\bar{k}_0-\bar{k}|}{r|\bar{k}_0-\bar{k}|} = \sum (2\ell+1)\, P_\ell(\bar{k},\bar{k}')\, \frac{u_\ell(\rho)}{\rho}\, \frac{u_\ell(\rho')}{\rho'} \qquad \text{III-14}$$

y como suponemos que la dispersión es elástica

$$|\bar{k}| = |\bar{k}_0|$$

entonces (III-13) queda:

$$f(K,K_0) = \frac{1}{K}\sum_{\ell}(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\left\{-\int \frac{V}{\varepsilon}u_\ell^2(\rho)\,d\rho\right\} \qquad \text{III-15}$$

comparando con (II-49) (y suponiendo $K_0 \gg 1$) obtenemos

$$\delta_\ell = -\frac{1}{K}\int U(r')\,dr' \qquad \text{III-16}$$

III-2 Aproximación de Eikonal

Existen casos en los cuales la energía es alta y sin embargo el potencial no cumple con la condición (III-8b) esto sucede cuando:

$$V \ll \varepsilon \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}K^2 \qquad \text{III-17}$$

a la vez:

$$|V| \geq \frac{\hbar^2}{ma^2}Ka = \frac{\hbar v}{a} \qquad \text{III-18}$$

para estos casos como $\varepsilon$ es muy grande por el principio de incertidumbre es de esperarse que la posición de la partícula esté bastante bien determinada lo cual sugiere que una aproximación semiclásica es útil, esta aproximación se conoce como de Eikonal y es válida para valores arbitrarios de:

$$\frac{Va}{\hbar v} \qquad \text{III-19}$$

si $|V|/\varepsilon \ll 1$ y $Ka \gg 1$

Este método de aproximación consiste en proponer una solución de la forma

$$\psi_k(r) = e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,\varphi(\bar{r}) \qquad \text{III-20}$$

al substituir en (III-17) obtenemos una ecuación integral

$$\varphi_k(\bar{r}) = e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{i\bar{k}|\bar{r}-\bar{r}''|}}{|\bar{r}-\bar{r}''|}\, V(\bar{r}'')\,\varphi(\bar{r}'')\,d\bar{r}'' \qquad \text{III-21}$$

es conveniente introducir:

$$\bar{r}' = \bar{r}-\bar{r}'' \qquad \text{III-22}$$

substituyendo tenemos:

$$\varphi_k(\bar{r}) = 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{i(kr'-\bar{k}\cdot\bar{r}')}}{r'}\, V(\bar{r}-\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}-\bar{r}')\,d\bar{r}'$$

Si $V(\bar{r}-\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}-\bar{r}')$ varía apreciablemente en la distancia $d$ (que mas adelante precisaremos), y como

$$d\bar{r}' = \bar{r}'^2\,dr'\,d\mu\,d\phi$$

$$\mu = \cos(\widehat{\bar{k}\bar{r}})$$

entonces si integramos sobre $\phi$ y sobre $\mu$ por partes:

$$\varphi(\bar{r}) = 1 + \frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty r'dr'\left\{ \frac{e^{ikr'(1-\mu)}}{ikr'}\Bigg|_{\mu=-1}^{\mu=1} V(\bar{r}-\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}-\bar{r}')\right\} -$$

$$\frac{m}{2}\int_0^\infty r'dr'\,\frac{e^{ikr'(1-\mu)}}{ikr'}\Bigg|_{\mu=-1}^{\mu=1}\frac{d}{d\mu}\,V(r-r')\,\varphi(r-r') \qquad \text{III-23}$$

El límite $\mu=-1$ corresponde a $\bar{r}'$ antiparalelo a $-\bar{k}$ y $\mu=1$ cuando es paralelo a $\bar{k}$, como la exponencial oscila rápidamente los únicos valores apreciables provienen de los valores de la fase aproximadamente estacionarios, esto ocurre -

cuando $\bar{r}''$ es paralelo a $\bar{K}$ ; en primera aproximación tenemos - entonces:

$$\varphi(\bar{r}) = 1 - \frac{i}{\hbar v}\int_0^{\infty} V(\bar{r}-\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}-\bar{r}')\Big|_{\bar{r}\parallel\bar{K}}\,dr' \qquad \text{III-24}$$

como $\bar{r}$ es paralelo a $K$ es conveniente expresarla en coordenadas cartesianas y obtenemos:

$$\varphi(x,y,z) = 1 - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} V(x,y,z')\,\varphi(x,y,z')\,dz' \qquad \text{III-25}$$

una solución a esta ecuación integral está dada por:

$$\varphi(x,y,z) = e^{-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} V(x,y,z')\,dz'} \qquad \text{III-26}$$

y entonces la solución (III-20) es:

$$\psi(x,y,z) = e^{ikz - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{z} V(x,y,z')\,dz'} \qquad \text{III-27}$$

Si comparamos con (II-2) vemos que tiene diferencias substanciales ya que (III-37) no contiene una onda esférica saliente como las funciones de onda discutidas anteriormente, esto se explica si recordamos que lo que dijimos anteriormente tiene sentido sólo dentro del volumen ocupado por el potencial (no es válida en todo el espacio) pero con ella nos es posible calcular la amplitud de dispersión, además la integral representa un deformamiento que para nosotros es muy importante ya que con él podemos calcular $\Delta$ posteriormente.

Habíamos dicho que $V\varphi$ variaba en una distancia apreciablemente esta es: Si[22]

$$\frac{Va}{\hbar v} > 1 \qquad \text{III-28}$$

$$d \sim \frac{\hbar v}{V} \qquad \text{III-29}$$

y si

$$\frac{Va}{\hbar v} < 1 \qquad \text{III-30}$$

$$d \sim a \qquad \text{III-31}$$

ambos casos deben cumplir:

$$ka \gg 1 \qquad \varepsilon/|V| \gg 1$$

Cuando se cumple (III-28) el ángulo debe ser menor que $(ka)^{-1/2}$ y si se cumple (III-30) entonces $\theta^2 < V/\varepsilon$

Es conveniente expresar $\bar{r}$ como la suma de dos vectores, esto es (ver figura 12)

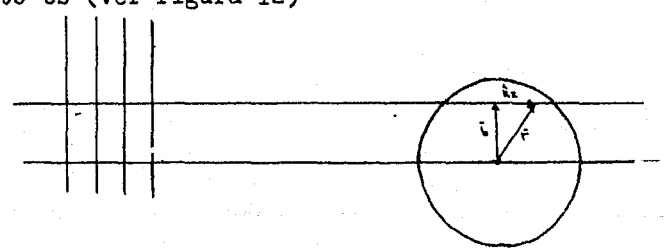



figura 12

como vemos $\bar{b}$ es el parámetro de impacto clásico.

Si substituimos (III-26) en (II-17) con la función de onda así obtenida:

$$f(k,k') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\bar{k}'-\bar{k})\cdot(\bar{b}+\hat{k}z)}\, V(\bar{b}+\hat{k}z)\, e^{i\gamma}\, dz\, d^2b \qquad \text{III-32}$$

donde

$$\gamma = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{b}+\hat{k}z)\,dz \qquad \text{(III-33)}$$

como hemos supuesto que la dispersión es elástica, $|k'| = |k|$ y dado que la energía es muy alta $\bar{k}-\bar{k}'$ es casi perpendicular a $\bar{k}$; entonces el error al substituir:

$$e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\hat{k}z} \sim 1$$

es del orden

$$(1-\cos\theta)kd \sim \theta^2 kd \ll 1 \qquad \text{III-34}$$

si además efectuamos la integración sobre $z$ en(III-32)entonces obtenemos que la amplitud de dispersión es:

$$f(k,k') = \frac{k}{2\pi i}\int e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot b}\left\{e^{i\gamma}-1\right\}d^2b \qquad \text{III-35}$$

la que podemos expresar de una manera mas apropiada si efectuamos una integración ya que

$$d^2b = b\,db\,d\phi$$

y como

$$(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{b} = kb\theta\cos\phi$$

podemos usar:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda\cos\phi}\,d\phi = J_0(\lambda) \qquad \text{III-36}$$

tenemos entonces:

$$f(k,k') = -ki\int_0^{\infty} J_0(kb\theta)\left\{e^{i\gamma}-1\right\}b\,db \qquad \text{III-37}$$

Esto es aplicable para ángulos pequeños pero podemos

mejorarlo si en lugar de integrar por una trayectoria recta lo - hacemos sobre la trayectoria clásica de la partícula, como esto- resulta bastante complicado, en su lugar podemos integrar sobre- una línea recta intermedia entre $\bar{K}$ y $\bar{K}'$ paralela al vector.

$$\bar{R} = \frac{\bar{K}+\bar{K}'}{|\bar{K}+\bar{K}'|} \qquad \text{III-38}$$

donde $\bar{b}$ es perpendicular a $\bar{R}$

En esta aproximación se representa a la onda dispersada de $K$ a $K'$ viajando por un camino intermedio (figura 13)-

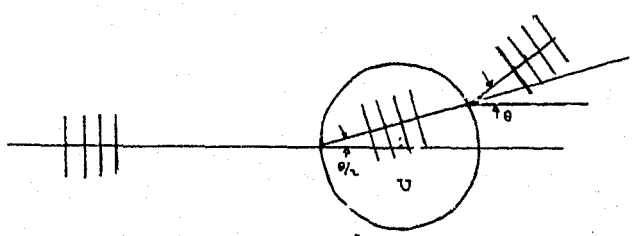



figura 13

La función de onda así obtenida es:

$$\psi(\bar{K},\bar{b}+\bar{R}z) \rightarrow \exp\left\{ i\left(\bar{K}\cdot\bar{b} + \bar{K}\cdot\bar{R}z - \frac{i}{2K}\int V(\bar{b}+\bar{R}z)\,dz\right)\right\} \qquad \text{III-39.}$$

y la amplitud de dispersión:

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\bar{r}\, e^{-i\bar{K}'\cdot\bar{r}}\, V(\bar{r})\,\psi(K,r)$$

$$\approx \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\bar{b}\,dz\, V(\bar{b}+\bar{R}z)\exp\left\{ i\left[(\bar{K}-\bar{K}')\cdot(\bar{b}+\bar{R}z) - \int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{b}+\bar{R}z')\,dz'\right]\right\}$$

III-40

pero:

$$(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{R} = 0$$

$$|\bar{k}-\bar{k}'| = 2k \operatorname{sen}\theta/2 \qquad \text{III-41}$$

entonces (III-35) queda:

$$f(k,k') = -\frac{ik}{2\pi}\int \exp(-2k \operatorname{sen}\theta/2)\left[e^{i\gamma}-1\right] d\bar{b} \qquad \text{III-42}$$

y procediendo como antes con ayuda de (III-36) y (III-37)

$$f(k,\theta) = -ik\int_0^\infty J_0(2kb \operatorname{sen}\theta/2)\left\{e^{i\gamma(b)}-1\right\} b\,db \qquad \text{III-43}$$

Si expresamos la fase $\gamma(b)$ en coordenadas cilíndricas entonces:

$$\gamma(b) = -\frac{1}{2k}\int_0^\infty \frac{r\,dr\;V(r)}{\sqrt{r^2-b^2}} \qquad \text{III-44}$$

Extensión para todas las Energías

Para hacer la extensión a todas las energías (y ángulos) en lugar de (III-43) propongamos la amplitud

$$A(\theta) = \int_0^\infty J_0(2kb \operatorname{sen}\theta/2)\, a(k,b)\; b\,db \qquad \text{III-45}$$

usando:

$$x J_0(x \operatorname{sen}\theta/2) = 2\sum_\ell (2\ell+1)\, J_{2\ell+1}(x)\, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{III-46}$$

obtenemos:

$$A(\theta) = \frac{1}{k}\int \sum (2\ell+1)\, J_{2\ell+1}(2kb)\, P_\ell(\cos\theta)\, a(k,b)\, db \qquad \text{III-47}$$

comparando con (III-45) vemos que:

$$a_\ell(k) = \frac{1}{k}\int_0^\infty J_{2\ell+1}(2kb)\, a(k,b)\, db \qquad \text{III-48}$$

pero la relación de ortogonalidad de $J_{2\ell+1}$ nos dice:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} J_{2\ell+1}(x)\, J_{2\ell'+1}(x)\, dx = \delta_{\ell\ell'}/2(2\ell+1) \qquad \text{III-49}$$

entonces:

$$a(k,b) = \frac{1}{2bk^2}\sum (2\ell+1)\, J_{2\ell+1}(2bk)\, a_\ell(k) \qquad \text{III-50}$$

junto con (III-45) tenemos una amplitud de dispersión válida para cualquier ángulo y energía.

Podemos comprobar que en el límite de energías muy-altas se reduce a (III-43) si hacemos la substitución:

$$\ell + 1/2 = kb \qquad \text{III-51}$$

si las energías son altas y $b$ es pequeño no contribuyen a -- (III-45) por lo cual se reduce a

$$A(\theta) \xrightarrow[\mathcal{E}\ \text{muy grande}]{} -ik\int_0^\infty b\,db\; J_0(2kb\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\left(e^{2i\gamma}-1\right) \qquad \text{III-52}$$

## III-3 Aproximación de Goldberger-Blankenbecler

Otro método de aproximación para altas energías es el de Goldenberger y Blankenbecler también conocido como de paráme-- tro de impacto, que podemos deducir por medio de $T$ como sigue:

De (II-119) tenemos:

$$(K|T|K') = (K|V|K) + \int dK' \frac{(K|V|K'')\,(K''|T|K')}{(K'^2 - K''^2 + i\epsilon)} \qquad \text{III-53}$$

donde:

$$K' = 0, 0, 1$$

$$K = \operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ \cos\theta$$

$$K'' = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,\ \cos\beta$$

$$\cos\Theta = K''\cdot K = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta\cos(\phi-\alpha) + \cos\theta\cos\beta$$

Al igual que en (III-45) podemos escribir $T$ y $V$ como:

$$T(K,y,K') = \int_0^\infty b\,db\, J_0(2Kby)\, H(K,b,K') \qquad \text{III-54}$$

$$V(K,y,K') = \int_0^\infty b\,db\, J_0(2Kby)\, B(K,b,K') \qquad \text{III-55}$$

siendo $y = \operatorname{sen}\theta/2$

substituyendo (III-54) y (III-55) en (III-53), obtenemos:

$$\int_0^\infty b\,db\, J_0(2Kby)\left[H(K,b,K') - B(K,b,K')\right] = \int_0^\infty \frac{dK}{(K'^2 - K''^2 + i\epsilon)}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty b'db'\,b''db''\, B(K,b',K'')\times\right.$$

$$\left. H(K''b''K')\, J_0(2Kb'\operatorname{sen}\Theta/2)\, J_0(2Kb''\operatorname{sen}\beta/2)\right] \qquad \text{III-56}$$

si substituimos:

$$d\bar{K} = K''^2 dK''\, d\Omega$$

en (III-56):

$$\int_0^\infty \frac{k''^2 dk''}{(k'^2-k''^2+i\epsilon)}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty b'db'b''db''\,B(k\,b\,k'')\,H(k'',b'',k')\right]d\Omega\,J_0(2kb'\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\times$$

$$J_0(2kb''\,\mathrm{sen}\,\beta/2)\Big]. \qquad \text{III-57}$$

usando las relaciones:

$$\int_0^\pi J_0\left([z^2+Z^2-2zZ\cos\phi]\right)d\phi=\pi\,J_0(z)\,J_0(Z) \qquad \text{III-58}$$

$$\int_0^{2\pi} J_0(2kb\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\,d\alpha = 2\pi\,J_0(2kb'\,\mathrm{sen}\,\theta/2\cos\beta/2)\,J_0(2kb''\,\mathrm{sen}\,\beta/2\cos\theta/2) \qquad \text{III-59}$$

Podemos calcular la integral sobre el ángulo sólido-substituyendo (III-58) en esa integral tenemos así:

$$I(k,y,k'')=\frac{1}{8\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\beta)\,J_0(2kb''\,\mathrm{sen}\,\beta/2)\,J_0(2kb'\,\mathrm{sen}\,\theta/2\cos\beta/2)\,J_0(2kb''\,\mathrm{sen}\,\beta/2\cos\theta/2) \qquad \text{III-60}$$

donde I representa la integral sobre el ángulo sólido en (III-57), ésta relación podemos escribirla como:

$$I(k,y,k'')=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi d\phi\,\frac{J_1(2\beta)}{\beta} \qquad \text{III-61}$$

donde:

$$\beta = k^2b'^2+k''^2b''^2-2kk''b'b''\cos\theta/2\cos\phi \qquad \text{III-62}$$

si usamos la relación de normalización:

$$\int b\,db\, J_0(2kb\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\, J_0(2kb\,\mathrm{sen}\,\theta'/2) = \frac{\delta(\mathrm{sen}\,\theta/2 - \mathrm{sen}\,\theta'/2)}{4k^2\,\mathrm{sen}\,\theta/2}$$

obtenemos:

$$I(k,y,k'') = \int_0^\infty b\,db\, G(k,k'',b',b'',b)\, J_0(2kby) \qquad \text{III-63}$$

donde $G$ representa:

$$\frac{k^2}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \mathrm{sen}\,\theta/2\, \cos\theta/2\, J_0(2kb\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\, \frac{J_1(2\beta\cos\phi)}{\beta} \qquad \text{III-64}$$

y al substituir en (III-60), la relación (III-57), se reduce a:

$$H(k,b,k') = B(k,b,k') + \int_0^\infty \frac{k''\,dk''}{(k'^2 - k''^2 + i\epsilon)} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty b\,db\, b''db''\, B(k,b',k'') \times G(k,k'',b',b'',b) \right]. \qquad \text{III-65}$$

Tenemos así una ecuación integral en términos de las transformadas $T$ y $V$, si $k, k''$ tienden a $\infty$ se puede simplificar ya que para este caso I se reduce a:

$$J_0(2kb'\,\mathrm{sen}\,\theta/2)\, \frac{\delta(b'' - k/k''\, b)}{8\pi b'\, kk''}$$

y $G$ se reduce:

$$G(k,k'',b',b'',b) = \frac{1}{8\pi kk''b'b}\, \delta(b'-b)\, \delta(b'' - k/k''\, b') \qquad \text{III-66}$$

esto nos permite escribir (III-65) como

$$H(k,b,k'') = B(k,b,k') + \frac{1}{16\pi^3}\int_0^\infty \frac{dk''}{k''^2 - k'^2 + i\epsilon} B(k,b\,k'')\, H(k'', \frac{k}{k''}b, k') \qquad \text{III-67}$$

Aún podemos simplificar un poco si tomamos en cuenta que para energías altas $P\,(1/k''^2 - k'^2)$ es despreciable comparada con $i\pi\delta(k''^2 - k'^2)$ entonces los elementos diagonales de la integral se reducen a:

$$H(k',b,k') = \frac{B(k',b,k')}{1 - \frac{i}{2k'}B(k',b,k')} \qquad \text{III-68}$$

Otro método de obtener la aproximación para $H$ podemos obtenerlo por medio del desarrollo de $T$ y $V$ en ondas parciales, como sigue:

$$(k|T|k') = T(k,k') = \sum (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\, T_\ell(k,k') \qquad \text{III-69}$$

$$(k|V|k') = V(k,k') = \sum (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\, V_\ell(k,k') \qquad \text{III-70}$$

podemos expresar $V(k,k')$ en coordenadas cilíndricas, con lo cual:

$$V(k,k') = -\frac{m}{4\pi}\iint V[(b^2+z^2)^{1/2}]\, e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{b}}\, dz\, d^2b$$

$$= -\frac{m}{2}\int_0^\infty b\,db\, J_0((\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{b}) \int_0^\infty V([b^2+z^2]^{1/2})\, dz \qquad \text{III-71}$$

es conveniente definir:

$$B = -\frac{m}{2}\int V[(b^2+z^2)^{1/2}]\, dz \qquad \text{III-72}$$

si la energía es bastante alta:

$$K''^2 - K^2 \approx -2K^2 K_z$$

$K_z$ = componente de la transferencia de momento a lo largo de $\bar{K}$

$$K'' dK'' \approx -K dK_z$$

$$K \approx K''$$

con estas aproximaciones la ecuación de Lippmann-Schwinger para-ondas parciales se reduce a:

$$T_\ell(K,K') = V_\ell(K,K') - \int \frac{K\,dK_z}{K_z + i\epsilon} V_\ell(K,K') T_\ell(K,K') \qquad \text{III-73}$$

integrando:

$$T_\ell(K,K') = \frac{V_\ell(K,K')}{1 - iK V_\ell(K,K')} \qquad \text{III-74}$$

si $\ell >> 1$ , $Kb = \ell$ y $P_\ell(\cos\theta) \rightarrow J_0(2Kb \operatorname{sen} \theta/2)$. III-75

Se satisface también:

$$V_\ell(K,K') \rightarrow -\frac{m}{4K^2} \int_{-\infty}^{\infty} V[(b^2+z^2)^{1/2}]\, dz \qquad \text{III-76}$$

con lo cual para $\ell >> 1$

$$T_\ell(K,K') \rightarrow \frac{1}{2K^2} \frac{V(b)}{1 - \frac{i}{2K} V(b)} \qquad \text{III-77}$$

donde:

$$V(b) = 2K^2 V_\ell(K,K') \qquad \text{III-78}$$

substituyendo en (III-69) y transformando la suma en una integral,

con ayuda de (III-75), obtenemos:

$$T(k,\cos\theta) \rightarrow \int b\,db\, J_0(2k \operatorname{sen}\theta/2)\, \frac{V(b)}{1-\frac{i}{2k}V(b)} \qquad \text{III-79}$$

pero de (III-76) y (III-72):

$$V_\ell(k,k') = \frac{1}{2k^2} B \qquad \text{III-80}$$

substituyendo junto con (III-28) en (III-74)

$$T_\ell(k,k') \xrightarrow[\ell \gg 1]{} \frac{1}{2k^2}\, \frac{B}{1-\frac{i}{2k}B} \qquad \text{III-81}$$

usando (III-81) y (III-75) en la ecuación (III-69) por último:

$$T(k,k') = \int_0^\infty b\,db\, J_0(2kb \operatorname{sen}\theta/2)\, \frac{B}{1-\frac{i}{2k}B} = (k|T|k') \qquad \text{III-82}$$

Es para nosotros muy importante notar que:

$$B = -\frac{m}{2}\int_b^\infty \frac{r\,V(r)\,dr}{\sqrt{r^2-b^2}} \qquad \text{III-83}$$

lo cual obtenemos de (III-72) al expresarlo en coordenadas polares.

# CAPITULO IV

## IV-1 El problema en Mecánica Cuántica

Aproximación de Born. Una dimensión: La ecuación de Schrödinger es:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2-U\right)\psi=0 \qquad \text{IV-1}$$

donde

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}=E \qquad\qquad \frac{2mV}{\hbar^2}=U$$

Si denotamos por $G$ , la función de Green que satisface:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G=-\delta(x-x') \qquad \text{IV-2}$$

entonces [26]

$$G(x,x')=-\frac{1}{2ik}e^{ik|x-x'|} \qquad \text{IV-3}$$

con lo cual podemos escribir la ecuación (1) como:

$$\psi=e^{ikx}-\int_{-\infty}^{\infty}G(x,x')\,U\,\psi(x')\,dx' \qquad \text{IV-4}$$

Si el haz incidente de partículas proviene de $-\infty$ -

entonces parte de ellos serán reflejados y parte transmitidos hacia $+\infty$ para verificar que (IV-4) satisface estas condiciones- es conveniente escribirla como:

$$\Psi = e^{ikx} + \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} e^{ik|x-x'|}\, U(x')\,\Psi(x')\,dx' + \frac{1}{2ik}\int_{x}^{\infty} e^{ik|x-x'|}\, U(x')\,\Psi(x')\,dx' \qquad \text{IV-5}$$

si hacemos $|x| \to \infty$ obtenemos

$$\Psi(x) \to e^{ikx} + \frac{e^{ikx}}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'}\, U\,\Psi(x')\,dx' \qquad \text{cuando } x \to \infty \qquad \text{IV-6a}$$

$$\Psi(x) \to e^{ikx} + \frac{e^{-ikx}}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'}\, U\,\Psi(x')\,dx' \qquad \text{cuando } x \to -\infty \qquad \text{IV-6b}$$

que podemos escribir como:

$$\Psi(x) \to e^{ikx} + b(k)\, e^{-ikx} \qquad x \to -\infty \qquad \text{IV-7a}$$

$$\Psi(x) \to f(k)\, e^{ikx} \qquad x \to +\infty \qquad \text{IV-7b}$$

donde:

$$b(k) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'}\, U\,\Psi(x')\,dx' \qquad \text{IV-8a}$$

$$f(k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'}\, U\,\Psi(x')\,dx' \qquad \text{IV-8b}$$

que satisfacen:

$$(f(k))^2 + (b(k))^2 = 1 \qquad \text{IV-9a}$$

$$1 - f(-k) = b(k) \qquad \text{IV-9b}$$

Para encontrar el potencial que satisfaga la independencia con la energía del retardo temporal necesitamos conocer - $b(k)$ ó $f(k)$.

Según (II-129) y (IV-8a) podemos escribir para una - dimensión

$$b(k) = \frac{m}{ik\hbar^2}(-k|T|k) \qquad \text{IV-10}$$

y por (II-119)

$$(k|Tk') = (k|V|k') + \int (k|V|k'')G_+(k''|T|k')\,dk'' \qquad \text{IV-11}$$

usando (II-115) y (II-128), tenemos:

$$(k|V|k') = \int_{-\infty}^{\infty} (k|T|k'')(k'|u|k'')\,dk'' \qquad \text{IV-12}$$

substituyendo en (IV-11):

$$(k|V|k') = (k|T|k') + \int (k|T|k'')G_+(k''|T|k')\,dk'' \qquad \text{IV-13}$$

$$(-k|V|k) = \frac{ik\hbar^2}{m}b(k) - \int_{-\infty}^{\infty} (-k|T|k'')G_+(k''|T|k')\,dk'' \qquad \text{IV-14}$$

Ahora podemos proponer

$$(k|T|k') = \sum \eta^n (k|T^{(n)}|k') \qquad \text{IV-15a}$$

$$(k|V|k') = \sum \eta^n (k|V^{(n)}|k') \qquad \text{IV-15b}$$

$$b(k) = \eta\, b(k) \qquad \text{IV-15c}$$

substituyendo (IV-15a,b,c) en (IV-14) e igualando coeficientes - de iguales potencias de $\eta$ , obtenemos para los dos primeros -- términos:

$$(k|V^{(1)}|k') = \frac{\hbar^2 i}{2m}(k'-k)\, b\left(\frac{k'-k}{2}\right) \qquad \text{IV-16}$$

$$(k|V^{(2)}|k') = \frac{\hbar^4}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty} b\left(\frac{k''+k'-k}{2}\right) b^*\left(\frac{k''-k'+k}{2}\right) \qquad \text{IV-17}$$

Para obtener el potencial en función de $x$ usamos la transformada de Fourier:

$$V^{(1)}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (-k|V|k)\, e^{-2ikx}\, dk \qquad \text{IV-18}$$

substituyendo en (IV-16) a (IV-18)

$$V^{(1)}(x) = \frac{2\hbar^2 i}{\sqrt{2\pi}\, m}\int_{-\infty}^{\infty} k\, b(k)\, e^{-2ikx}\, dk \qquad \text{IV-19}$$

$$V^{(2)}(x) = \frac{4\hbar^4}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ikx}\, dk \int_{-\infty}^{\infty} b(k'')\, b(k-k'')\, dk'' \qquad \text{IV-20}$$

$$= 8\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2}{m}\, b(k')\, e^{-2ik'x}\, dk'\right) \qquad \text{IV-20a}$$

podemos expresarlo en términos de $\xi$ usando (IV-9b) y escribir -

a $f$ como:

$$f(k) = A(k)\, e^{i\alpha(k)} \qquad \text{IV-21}$$

donde suponemos $\alpha(k)$ real (la parte imaginaria podemos absorverla en $A(k)$).

Si desarrollamos $f$ alrededor de $k_0$ para expresarla en función de $\Delta$:

$$f(k) \approx a(k)\, e^{i\alpha_0(k) + i(k-k_0)\Delta} \qquad \text{IV-22}$$

donde $a(k)$ tiene valores apreciables solo cuando $k \simeq k_0$. Substituyendo en (IV-19):

$$V^{(1)} = \frac{2\hbar^2 i}{m\sqrt{2\pi}} \int k\,(1 - f(-k))\, e^{-2ikx}\, dk$$

$$= \frac{2\hbar^2 i}{m\sqrt{2\pi}} \int k\,(1 - a(-k)\, e^{i\alpha_0(-k) - i(k-k_0)\Delta})\, e^{-2ikx}\, dk$$

$$= \frac{i\hbar^2}{m} \mathcal{F}(k) - \frac{i\hbar^2}{m} e^{ik_0\Delta}\, \mathcal{F}(k\, B(k)\, e^{-ik\Delta}) \qquad \text{IV-23}$$

Por $B(k)$ representamos $a(-k)\, e^{i\alpha_0(-k)}$ y $\mathcal{F}(y)$ es la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x)\, e^{-ixy}\, dx \qquad \text{IV-24}$$

La segunda aproximación es:

$$V^{(2)} = \frac{8\pi\hbar^2}{m} \left[ \delta(x) - e^{ik_0\Delta}\, \mathcal{F}(B(k)\, e^{ik_0\Delta}) \right]^2 \qquad \text{IV-25}$$

Tres dimensiones:

En el desarrollo anterior la ecuación (II-119) para - , se particulariza para una dimensión por lo tanto si ahora - la usamos en su forma original para tres dimensiones y procedemos exactamente igual que para una dimensión podemos obtener las -- ecuaciones para $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$ , solo necesitamos tener en cuenta- que ahora:

$$b(k) = f(k,k') \qquad \text{IV-26}$$

y entonces dada la relación de $f$ con $T$

$$b(k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} T \qquad \text{IV-27}$$

También debemos tomar en cuenta que ahora las transformadas de Fourier son en tres dimensiones lo cual introduce - $(2\pi)^{-3/2}$ en lugar de $(2\pi)^{-1/2}$ ; excepto por estos cambios los resultados son iguales:

$$V^{(1)}(r) = \frac{8\hbar^2 i}{m} \int \bar{k}\, f(\bar{k},\bar{k}')\, e^{-2i\bar{k}\cdot\bar{r}}\, d\bar{k}$$

$$= \frac{i\hbar^2}{m} \mathcal{F}(\bar{k}\, f(\bar{k},\bar{k}')) \qquad \text{IV-28}$$

$$V^{(2)}(r) = \frac{16\hbar^2}{m} \left[ \delta(\bar{r}) - e^{i\bar{k}_1\cdot\bar{\Delta}}\, \mathcal{F}(B(k) e^{ik\cdot\Delta}) \right]^2 \qquad \text{IV-29}$$

Como vemos al igual que en una dimensión, para determinar $V^{(n)}$ necesitamos conocer también $B(k)$ (además de que - las aproximaciones siguientes son bastante mas complicadas) esto proviene del medio que usamos $f$ para determinar el potencial.

Aproximación de Eikonal

De (III-54) tenemos la fase en términos del poten- - cial

$$\gamma = -\frac{1}{2K}\int_b^\infty \frac{V\,r\,dr}{(r^2-b^2)^{1/2}} \qquad \text{IV-30}$$

donde

$$bK = \ell + 1/2 \qquad \text{IV-31}$$

como

$$\Delta = \frac{d\gamma}{dK} \qquad \text{IV-32}$$

si

$$\Delta = cte$$

debe cumplirse

$$\gamma = K\Delta + a$$

siendo $a$ una constante arbitraria.

Tenemos entonces de (IV-30) y (IV-33) a $\Delta$ como -- función del potencial por lo cual es posible determinar $V$ , como función de da la similitud de (IV-30) y (I-49) es conveniente hacer los cambios siguientes (análogos a (I-43)).

$$u = 1/r^2 \qquad w = \frac{K^2}{(\ell+1/2)} \qquad D(x) = (2\ell+1)\gamma \qquad \vartheta(u) = 1/2\, r^3 U \qquad \text{IV-34a,b,c,d}$$

substituyendo en (IV-30) obtenemos:

$$D(x) = \int_0^x \frac{\vartheta(u)\,du}{(w-u)^{1/2}} \qquad \text{IV-35}$$

que es la ecuación integral de Abel.

$$U = \frac{4}{\pi}\frac{d}{dr}\left[r\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{k(k\Delta+a)\,d\eta}{\eta(\eta^2-r^2)^{1/2}}\right] \qquad \text{IV-36}$$

(que concuerda con lo obtenido en[28].

la integral es:

$$\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta(\eta^2-r^2)} = \frac{1}{r}\,\text{angsec}\left|\frac{\eta}{r}\right|\Bigg|_{r_{min}}^{\infty} = \frac{\pi}{2r} \qquad \text{IV-37}$$

si substituimos en (IV-37) tenemos $U=0$ lo que podemos interpretar como imposibilidad de que $\Delta$ sea constante sin embargo - pedíamos, originalmente que $\Delta$ fuese independiente de $\varepsilon$ por - lo cual podemos suponer que $\Delta$ depende de $\eta$ (esto es, de b ); veamos que nos dice sobre la constante

Tenemos de (IV-30) y (IV-33)

$$\Delta = -\left[\frac{1}{2k^2}\left|\frac{U\,r\,dr}{(r^2-b^2)^{1/2}} - \frac{a}{k}\right|\right. \qquad \text{IV-38}$$

entonces para que $\Delta$ no dependa de $\varepsilon$ , ni de $k$ , $U = k^2 F(r)$ y $a = 0$ con lo cual (IV-36) se reduce a

$$U = \frac{4}{\pi}\frac{d}{dr}\left[r\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{k^2\Delta(\eta)\,d\eta}{\eta(\eta^2-r^2)^{1/2}}\right] \qquad \text{IV-39}$$

si suponemos ahora que $U = k^2 F(r)$

$$F(r) = \frac{4}{\pi}\frac{d}{dr}\left[r\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\Delta(\eta)\,d\eta}{\eta(\eta^2-r^2)^{1/2}}\right] \qquad \text{IV-40}$$

Tenemos así el potencial en términos de la $\Delta(\eta)$ al menos en la aproximación de Eikonal como el ángulo de deflección es pequeño- el resultado coincide con el unidimensional clásico lo cual no - debe de extrañarnos si recordamos que la aproximación de Eikonal es una aproximación cuasi clásica.

Aproximación de Blankenbecler

En esta aproximación de (III-82) y (III-

$$\delta(b,k) \simeq \frac{1}{2k}B(k,b) \qquad \text{IV-41}$$

y de (III-93)

$$B(k,b) \rightarrow -\int_{b}^{\infty}\frac{r\,V(r)\,dr}{(r^2-b^2)^{1/2}} \qquad \text{IV-42}$$

que es (III-44) por lo cual al invertir obtenemos los mismos resultados. Para fijar mas esta similitud veamos qué relación -- existe entre ellas y la de Born para lo cual debemos expresar - las amplitudes de las aproximaciones de Blankenbecler y Eikonal- en serie

Podemos escribir la fase de la aproximación de Eikonal como:

$$\gamma(k,b) = -\frac{1}{k}V(b) \qquad \text{IV-43}$$

siendo

$$V(b) = -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} V[(b^2+z^2)^{1/2}]\, dz \qquad \text{IV-44}$$

entonces:

$$T = -ki\int_0^{\infty} b\, db\, J_0\left(e^{\frac{i}{k}V(b)} - 1\right) \qquad \text{IV-45}$$

si desarrollamos la exponencial y ponemos: $y' = 2k \operatorname{sen} \theta/2$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{n!}\right)\int_0^{\infty} b\, db\, J_0(by')\, V(b) \qquad \text{IV-46}$$

Para la aproximación de Blankenbecler tenemos:

$$T_{BL} = \int_0^{\infty} b\, db\, J_0(by')\, V(b) \Big/ \left(1 - \frac{i}{2k} V(b)\right) \qquad \text{IV-47}$$

que podemos desarrollar y obtener:

$$T_{BL} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2k}\right)^{n-1} \int_0^{\infty} b\, db\, J_0(by')\, [V(b)]^n \qquad \text{IV-48}$$

para compararlas usamos el desarrollo de Born para la amplitud - (II-119) que podemos escribir como:

$$(K|T_B|K') = (K|V|K') + \sum_{1}^{\infty} \int d^3k_1 \cdots d^3k_n \frac{(K|V|K_1)(K_1|V|K_2)\cdots(K_n|V|K')}{(K_1^2 - K^2 + i\epsilon)\cdots(K_n^2 - K_{n-1}^2 + i\epsilon)}$$

IV-49

El primer término:

$$(K|V|K') = \int V(r)\, e^{i(K-K')\cdot r}\, d^3r$$

podemos escribirlo como:

$$(K|V|K') = \int_0^\infty b\,db\, J_0(Ky')\, V(b) \equiv V(K,y) \qquad \text{IV-50}$$

mientras que el segundo término de la serie de Born podemos dividirlo en dos partes haciendo:

$$(K_1^2 - K^2 + i\epsilon)^{-1} \longrightarrow P\left(\frac{1}{K_1^2 - K^2}\right) + i\,\delta(K_1^2 - K^2) \qquad \text{IV-51}$$

con lo cual obtenemos (si solo tomamos la parte en $\delta$ )

$$\int d^3K_1\, (K|V|K_1)(K_1|V|K)\; i\,\delta(K_1^2 - K^2) \qquad \text{IV-52}$$

y usando:

$$\int \frac{i}{2K}\, b\,db\, J_0(by)\, [V(b)]^2$$

$$T_0 = \int_0^\infty b\,db\, J_0(by')\, V(b) + \frac{i}{2K}\int_0^\infty b\,db\, J_0(by')\, [V(b)]^2 + \cdots \qquad \text{IV-53}$$

Comparando con Eikonal y Blankenbecler vemos que al orden $1/K$ ambas aproximaciones están de acuerdo con la exacta para toda

## CONCLUSION

Tenemos entonces, según la aproximación de Eikonal - (y Blankenbecler) que para que $\Delta_c$ sea independiente de la energía se requiere que $V = \varepsilon F(r)$, si $\Delta = \alpha$ entonces el potencial - no existe. Como vemos este resultado tiene gran similitud con - el unidimensional clásico, lo cual no nos debe de extrañar ya -- que además de ser una aproximación cuasiclásica, aún cuando se - planteó en tres dimensiones no dejó de considerarse el movimiento del paquete en una dimensión lo cual podemos pensar como dado que $\theta$ es pequeño (aún siendo $b \neq 0$ ) el movimiento es unidi-- mensional. Los resultados que obtuvimos por medio de la aproximación de Born parecen más complicados, este hecho proviene de - haber utilizado la amplitud de dispersión para obtener el potencial y no directamente $\Delta_c$ o la fase por medio de (IV-33); si - usamos la fase en la aproximación de Born obtenemos el mismo resultado ya que si en (III-33), para una $\ell$ , $K$ tiende a infinito ( $b$ tiende a cero) entonces se reduce a:

$$\gamma(0) = -\frac{1}{k}\int V(r)\,dr$$

que es precisamente (III-16). Además de la dimensión final esto era de esperarse con lo cual podemos afirmar que bajo las -- condiciones en las que hemos trabajado en las tres aproximaciones para que $\Delta_c$ sea independiente de la energía $V = \mathcal{E}F(r)$

Debemos tener en cuenta que si solo una duda parcial contribuye entonces usando (IV-33) podemos aplicar los métodos - de inversión que se describen en (31,32,33,34,35) donde solo se usa la fase+ $\delta_\ell$ y las energías de los estados ligados, sin - embargo para altas energías no contribuye una sola $\ell$ por lo - cual esto carece de interés.

Comentarios

Hemos resumido así el material referente a retardo-temporal y hecho ver algunas de sus relaciones con polos de - Regge, pero falta aún no solo el tratamiento relativista sino - también la relación con teoría de grupos y sus aplicaciones.

Sobre la construcción de paquetes de onda y retardo temporal para el caso relativista existen (hasta donde sé) al - menos dos trabajos[36,37] sobre algo de la relación de polos de - Regge con teoría de grupos están[2,38] pero no se ha tratado de - unificar y explotar este conjunto de relaciones,trabajo interesante pero muy complicado; sin embargo después de todo esta relación de temas aunque sugerida se hace propia dado que se em--

+Además de que una fase puede ser producida por muy diversos potenciales por lo cual se complica aún más.

piezan a entrever sus posibilidades después de leer los trabajos aún no sintetizados y se cumple así el paso inicial pequeño pero necesario para continuar en la búsqueda de la relación uso (si - es que esto existe) tratando de utilizar lo aprendido y de modificarlo poco a poco haciéndolo acorde a las necesidades que surjan. Creo que es lo mejor que he aprendido, a interesarme por - un tema al ver sus posibilidades como buscar la literatura y tratar de entenderla para unificarla (aunque esto último no lo lo-- gré.

Dic. 1972

# APENDICE I

## La matriz S y el concepto de retardo temporal

En una de las secciones anteriores obtuvimos el análogo cuántico de la distancia propia clásica $\Delta$ , por medio de la fase de la amplitud de dispersión, a continuación veremos como de la matriz $S$ podemos obtener no solo el retardo temporal necesario para definir $\Delta$ si no intervalos de tiempo arbitrario[14,29], tenemos entonces que en la matriz $S$ o en la fase $\delta_\ell$ se encuentra toda la información que sobre el potencial podemos obtener, contiene entonces toda la información dinámica sobre la dispersión.

Podemos expresar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo como:

$$i\dot{\Psi}(t) = H\Psi(t) \qquad \text{A-1}$$

integrándola obtenemos:

$$\Psi(t) = e^{-i(t-t_0)H}\,\Psi(t_0) \qquad \text{A-2}$$

sabemos también que:

$$K\varphi_a = \varepsilon_a \varphi_a \qquad \text{A-3}$$

donde $K$ es el operador de energía cinética, esto es:

$$H = K + V \qquad \text{A-4}$$

Los estados propios dependientes del tiempo de

$$i\phi_a = K\phi_a \qquad \text{A-5}$$

son:

$$\phi_a = e^{-iKt}\varphi_a = e^{-i\varepsilon t}\varphi_a \qquad \text{A-6}$$

es conveniente expresar $\Psi(t)$ como:

$$\Psi(t) = e^{-iKt}\Psi_I(t) \qquad \text{A-7}$$

Donde $\Psi_I$ se refiere a la función de onda resultante de la interacción, para eliminar la dependencia temporal en $K$ pasamos al primer miembro la exponencial y derivamos respecto a-

$$i\dot{\Psi}_I = -e^{iKt}K\Psi(t) + e^{iKt}i\dot{\Psi}(t) \qquad \text{A-8}$$

usando (A-4)

$$\begin{aligned} i\dot{\Psi}_I &= e^{iKt}(H-K)\Psi(t) \\ &= e^{iKt}V\Psi(t) \\ &= \left(e^{iKt}V e^{-iKt}\right)\Psi_I \\ &= V\Psi_I(t) \end{aligned} \qquad \text{A-9}$$

como $e^{-i(t-t_0)H}$ es unitario, tenemos que (A-8) es la misma ecuación (A-1) a la cual le hemos aplicado una transformación unitaria por lo cual es totalmente equivalente.

Supongamos que:

$$\Psi_I = U(t,t_0)\,\Psi_I(t_0) \qquad \text{A-10}$$

donde $U(t,t_0)$ es un operador unitario tal que $U(t_0 t_0)=1$.

$$\Psi_I = e^{iKt}\,\Psi(t_0)$$

$$= e^{iKt}\,e^{-iH(t-t_0)}\,\Psi(t_0)$$

$$= e^{iKt}\,e^{-iH(t-t_0)}\,e^{-iKt_0}\,\Psi_I(t_0) \qquad \text{A-11}$$

comparando con (A-10) vemos que:

$$U(t,t_0) = e^{iKt}\,e^{-iH(t-t_0)}\,e^{-iKt_0} \qquad \text{A-12}$$

Cuando $U(t,t_0)$ opera sobre la función $\varphi$ (o una combinación de ellas) podemos pensarlo como si $e^{-iKt_0}$ se propagara de $0$ a $t_0$ de acuerdo con el operador $K$ luego otra de $t_0$ a $t$ con el Hamiltoniano $H$ y finalmente el estado resultante se propaga a $t_0$ obteniéndose así la configuración debida a la interacción después de cierto tiempo

Si lo pensamos en términos de la trayectoria clásica, podemos suponer que se mueve libremente $(V=0)$ durante un tiempo $t_0$, luego se curva durante $t-t_0$ debido a la acción del potencial y luego la regresamos por una tangente durante el tiempo $t$.

Podemos obtener una ecuación diferencial para en la cual solo intervengan cantidades relacionadas con la interacción. Tenemos que:

$$\Psi_I(t) = U(t,t_0)_I \Psi(t_0) \qquad \text{A-13}$$

substituyendo en (A-10) obtenemos:

$$i\dot{U}(t,t_0) = V\, U(t,t_0) \qquad \text{A-14}$$

que también podíamos haber obtenido por medio de (A-11)

Podemos escribir esta ecuación diferencial y la condición $U(t,t)=1$ por medio de una ecuación integral, integrando formalmente la ecuación diferencial:

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt'\, V(t')\, U(t',t_0) \qquad \text{A-15a}$$

$$U(t,t_0) = 1 + i\int_{t}^{t_0} dt'\, U(t,t')\, V(t') \qquad \text{A-15b}$$

la cual se puede resolver por iteración:

$$U(t,t_0) = 1 + \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_n \int_{t_0}^{t} dt_{n-1} \cdots \int_{t_0}^{t} dt_1\, T\left[ V(t_n) \cdots V(t_1) \right] \qquad \text{A-16}$$

donde $T$ es el operador de "orden temporal". Al menos en forma simbólica podemos escribir

$$U(t,t_0) \sim T\, e^{-i\int_{t_0}^{t} dt'\, V(t')} \qquad \text{A-17}$$

ya que la solución $U(t,t_0)$ posee las propiedades de una exponencial.

Ahora veremos como de la matriz $S$ podemos obtener el retardo temporal y como definir intervalos de tiempo arbitrarios.

Podemos escribir la función de onda saliente como:

$$\psi_{sal}(t) = \sum A(\epsilon-\bar{\epsilon})\,\psi^{+}\,e^{-i\epsilon t}$$

$$\psi_{sal}(t) = \sum A(\epsilon-\bar{\epsilon})\,S(\epsilon)\,I\,e^{-i\epsilon t} \qquad \text{A-18}$$

Si desarrollamos la matriz $S$ :

$$S(\epsilon) = \exp(\ln S(\epsilon))$$

$$= \exp\left\{ S(\bar{\epsilon}) + D\epsilon \frac{d}{d\bar{\epsilon}} \ln S(\bar{\epsilon}) \right\}$$

$$= S(\bar{\epsilon})\ \exp\left[ D\epsilon \frac{d}{d\bar{\epsilon}} \ln S(\bar{\epsilon}) \right] \qquad \text{A-19}$$

donde $D\epsilon = \epsilon - \bar{\epsilon}$

Substituyendo en (A-18) obtenemos:

$$\psi_{sal}(t) = S(\bar{\epsilon}) \sum_{D\epsilon} A(D\epsilon)\ \exp\left(-i\left[t + i\frac{d}{d\bar{\epsilon}} \ln S(\epsilon)\, D\epsilon\right]\right) \qquad \text{A-20}$$

entonces vemos que podemos interpretar:

$$\tau_d = -i \frac{d}{d\epsilon} \ln S(\epsilon) \qquad \text{A-21}$$

También tenemos:

$$\psi_n = S\,\psi_{n-1}$$

$$\psi_n e^{-i\epsilon t_n} = S\, e^{-i\epsilon t_{n-1}}\, \psi_{n-1} \qquad \text{A-22}$$

si escribimos:

$$\delta t_n = t_n - t_{n-1}$$

$$= \frac{d_n}{v} + \tau_d$$

$$= \frac{d_n}{v} - i\frac{d}{d\bar{\epsilon}} \ln S_n$$

y

$$\delta\psi_n \equiv \psi_n - \psi_{n-1} \qquad \text{A-23}$$

$$= (S e^{-i\epsilon t_{n-1}} - 1)$$

$$= (S_n - 1)\,\psi_n \qquad \text{A-24}$$

si escribimos:

$$d\epsilon = v\,dp \qquad \text{A-25}$$

entonces:

$$\delta t = \frac{d_n}{v}\left(1 - \frac{i\hbar}{d_n}\frac{d \ln S_n}{dp}\right) \qquad \text{A-26}$$

$$i\frac{\delta \psi_n}{\delta t_n} = \frac{i(S_n - 1)}{\delta t_n}\,\psi_{n-1} \qquad \text{A-27}$$

que tiene cierta analogía con la ecuación de Schrödinger ya que permite determinar la función de onda de un sistema como función del tiempo siempre y cuando no sean extremadamente cortos.

Podemos escribir (A-24) como:

$$\frac{S_n - 1}{\delta t_n} = \left[\frac{1}{\delta t_n}\left(e^{-i\epsilon\delta t_n} - 1\right) + \frac{1}{\delta t_n}\left(1 - S_n^{-1}\right)\right] S_n \qquad \text{A-28}$$

$$\hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\epsilon + i\hbar\frac{\ln S_n}{\delta t_n}\right]\psi \qquad \text{A-29}$$

Como vemos $i\hbar \frac{\ln S_n}{\delta t_n}$ juega el papel del potencial, y es equivalente a la de Schrödinger en la región donde la interacción varía poco en $\hbar/p$ (Eikonal) lo cual es de gran importancia para nosotros como veremos en la sección dedicada a esta aproximación y entonces:

$$V = i\hbar\frac{\ln S_n}{\delta t_n}$$

## APENDICE II

Otro método de obtener el retardo temporal.

En mecánica clásica calculamos el retardo temporal - como la diferencia entre el tiempo que tarda la partícula en ir- de un punto "a" a un punto "b" en presencia del potencial y en - ausencia de este, veremos ahora que en mecánica cuántica el re-- tardo temporal (A.21) $\hbar \frac{\partial \delta_1}{\partial \varepsilon}$ está relacionado con la inte--- gral de $(\psi^* \psi - \psi_\infty^* \psi_\infty)$ donde $\psi$ es la función de onda del pro-- blema y $\psi_\infty = 0$ su forma asintótica, esto si el potencial decrece- rápidamente y $\psi(0) = 0$ , lo haremos para una dimensión, la ge- neralización a tres dimensiones es inmediata.

Podemos escribir la ecuación de Schrödinger como:

$$(H-\varepsilon)\psi = (T+V-\varepsilon)\psi = 0 \qquad \text{B-1}$$

Derivando respecto de $\varepsilon$ obtenemos:

$$(H-\varepsilon)\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \psi = 0 \qquad \text{B-2}$$

Se satisface entonces:

$$\psi^* T \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} T \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = \psi^* \psi \qquad \text{B-3}$$

como $\psi^*$ y $\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}$ se anulan para $x=o$.

$$\int_0^R \psi^* \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)_{R\to\infty} \qquad \text{B-4}$$

Pero $\psi$ cuando $R\to\infty$ es $\psi_\infty \propto 1/\sqrt{v}\left(e^{ikx} - e^{2i\delta}e^{ikx}\right)$ por lo cual:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)_R = 2\hbar \frac{\partial \delta_R}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{v} R - \frac{\hbar}{2\varepsilon} \operatorname{sen}(2kR+2\delta) \qquad \text{B-5}$$

que podemos escribir como:

$$2\hbar \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \int_0^R \left(\psi^* \psi - \frac{2}{v}\right) dx + \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\varepsilon} \operatorname{sen}(2kR+2\delta) \qquad \text{B-6}$$

El término del

$$2\hbar \frac{d\delta}{d\varepsilon} = -i\hbar S^* \frac{dS}{d\varepsilon} \qquad \text{B-7a}$$

$$\frac{2}{v}\frac{d\delta}{dk} = 2\hbar \frac{d\delta}{d\varepsilon} \qquad \text{B-7b}$$

La generalización a tres dimensiones no presenta problema alguno.

REFERENCIAS

1. H. Goldstein "Classical Mechanics" Addison-Wesley 1968
2. L. Landau y E.M. Lifshitz "Mecánica Clásica" Vol. I curso - de física teórica. Editorial Reverté 1965
3. a) Ford and Wheeler Ann. Phys. 7-259 (1959)
   b) Ford and Wheeler Ann. Phys. 7-287 (1959)
4. A. Erdelyi "Tables of Integral Transforms" Vol. I cap. 8 McGraw-Hill 1954
5. J.B. Keller, I.K. Kay, J.S. Shmoy. Phys. Rev. 102-554 (1952)
6. P. Roman "Advanced Quantum Theory" Addison-Wesley 1965
7. H.M. Chan "High Energy Reactions and Regge Poles" Lectures in the Academic Training of CERN Geneva 1967
8. S.C. Frautschi "Regge Poles and S Matrix Theory" W.A. Benjamin, New York 1963
9. M. Froissart, R. Omnes "Introduction to Regge-Pole Theory" Part I Non Relativistic Theory.
10. E.J. Squier "Complex Angular Momenta and Particle Physics" W.A. Benjamin Inc., Publishers. 1963
11. B.A. Lippmann, J. Schwinger en "Quantum Scattering Theory" Selected Papers. Edited by Marc. Ross. Indiana University Press pag. 243-276
12. T. Ohmura Prog. Theoret. Phys. Kyoto Suppl. 29 108 (1964)
13. E.P. Wigner Phys. Rev. 98 145 (1955)
14. P. Haag and W. Breenningen en:"Quantum Scattering Theory" Selected Papers. Edited by Marc Ross. Indiana University Press, pag. 13-108

15. F.T. Smith Phys. Rev. 118-349, 1960

16. D. Bohm "Quantum Theory", Prentice Hall New York 1951 pag. 257-261

17. M. Froissart, M.L. Goldberger, K.M. Watson, Phys. Rev. 131-2820 (1963)

18. G. Cocho, A. Mondragón, M. Colón Vela, Nucl. Phys. A25 425 (1969)

19. Hagedorn, "Relativistic Kinematics", W.A. Benjamin 1963

20. G. Cocho, A. Mondragón, Nucl. Phys. A25 417 (1969)

21. G. Cocho, C. Fronsdal, I.T. Grodsky and V.G. Kodishevsky, Phys. Rev. 168 1766 (1968)

22. R.J. Glauber, "High Energy Collision Theory", W.E. Brittin and L.G. Dunham eds.

23. P.B. Blankenbecler and M.L. Goldberger, Phys. Rev. 126-766 (1962)

24. A.N. Kamal, L.K. Chavda, Phys. Rev. D5 994 1972

25. M. Razavy, Can. Journ. Phys. 89 1885 1971

26. P.M. Morse, H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics" Vol. II, McGraw-Hill Kogakusha

27. H.E. Moses, Phys. Rev. 102 559 (1956)

28. K. Chadan, Nvo. Cim. 37 658 (1965)

29. R.J. Moore, Phys. Rev. D2 313 (1970)

30. V. Bargmann, a) Phys. Rev. 75 301 1949
b) Rev. Mod. Phys. 21 488 1949

31. I.M. Gelfand and B.M. Levitan, Doklady Akad. Nauk SSSR 77 557 1951, Isvest. Akad. Nauk SSSR 15-309 1951

32. I.M. Gelfand and B.M. Levitan, Isvest. Akad. Nauk SSSR 15-309 1951.

33. N. Levinson, Phys. Rev. 75 1445 1949

34. R. Jost and W. Kohn, a) Phys. Rev. 87 977 1952
b) Phys. Rev. 88 382 1956

35. J.A. Wheeler, Phys. Rev. 99 630 1955

36. G. Cocho, A. Mondragón, Phys. Rev. D1 3484 1970

37. V.S. Olkhovsky, E. Recami, Nvo. Cim. 53A 610 1968

38. F.T. Hadjioannou, Nvo. Cim. 44A 185 (1966)

39. M.L. Goldberger, K.M. Watson, "Collision Theory", J. Wiley, N.Y., 1964

40. T.Y. Wu, T. Ohmura, "Quantum Scattering Theory", Prentice Hall, N.J.

41. R.G. Newton, "Scattering theory of waves and particles", McGraw-Hill 1966

42. S. Geltman, "Topics in Collision Theory", Academic Press 1969.