

REPRESENTACIONES INESCINDIBLES SOBRE UN
CAMPO DE CARACTERISTICA PRIMA

Tesis de Matemáticas

México, D.F.
1971

C. Andujo Rolón.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. INTRODUCCION

Este trabajo está basado en los resultados que D. G. Higman plantea en su artículo: "Indecomposable representations at characteristic p " (1).

En la segunda sección se dan algunas definiciones básicas y se hace una exposición de algunos teoremas relacionados con G - F -módulos, que serán utilizados en demostraciones posteriores. Esta sección es esencialmente la primera parte de (1).

La sección 3 está dedicada a los G - F -módulos inescindibles sobre grupos cíclicos, en campos de característica prima. En la primera parte de esta sección se describen las representaciones inescindibles asociadas a estos módulos, y se da específicamente su forma matricial. Como una consecuencia de ésta y de los resultados de la segunda sección, se prue

ba que todo grupo con p -subgrupos de Sylow cíclicos, tiene un número finito de representaciones inescindibles, determinadas por matrices con elementos en el campo.

En la cuarta sección se hace una caracterización de las representaciones inescindibles asociadas a los $T \times T$ -módulos, para después relacionarla con las representaciones inescindibles sobre grupos con p -subgrupos de Sylow no cíclicos, probando que existen representaciones inescindibles de grado arbitrario.

2. G - F - M O D U L O S

Sea G un grupo finito y F un campo de característica $p > 0$. Se usará el término G - F -módulo para describir aquellos módulos a los cuáles corresponden representaciones de G por medio de matrices no singulares con coeficientes en F , y serán llamados módulos de representaciones. Esto se puede entender como una pareja (V, ρ) , formada por un espacio vectorial V sobre F y una representación

$$\rho : G \longrightarrow GL_F(V)$$

de G por endomorfismos de V . Diremos que el espacio vectorial V es un G -módulo. En particular, un G - F -módulo es un espacio vectorial de dimensión finita sobre F . Dos G - F -módulos M y N son equivalentes si existe un G - F -isomorfismo de M en N .

Ya que a cada G - F -módulo M le corresponde una única representación de G y recíproca

mente, utilizaremos, por conveniencia, módulos de representaciones en lugar de representaciones.

Sea S un subgrupo de G y m un S -módulo. Considérese una descomposición de G en clases izquierdas: $G = x_1 S \cup x_2 S \cup x_3 S \cup \dots \cup x_r S$. Sea $L = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, con $r = [G:S]$, un conjunto de representantes de tal forma que $L \cap S = 1$. Todo elemento g en G puede escribirse en forma única como un producto $g = g^+ g_+$, con g^+ en L y g_+ en S . Obsérvese que para toda s en S , $(sg)_+ = sg_+$ y $(sg)^+ = g^+$. Sea m^G el conjunto de todas las funciones $\alpha: L \rightarrow m$. Si u_x está en m y x en L , denotemos por $x \cdot u_x$ a la función cuyo valor en x es u_x y cero en z si z es diferente de x . Entonces todo elemento en m^G puede escribirse como una suma $\alpha = \sum x \cdot \alpha(x)$. De una manera natural se le da a m^G una estructura de G - F -módulo, definiendo

$$\sum x \cdot u_x + \sum x \cdot v_x = \sum x \cdot (u_x + v_x)$$

$$g(\sum x \cdot u_x) = \sum (gx)^+ \cdot (gx)_+ u_x \quad (g \text{ en } G)$$

$$(x \cdot u_x)_w = x \cdot u_{xw} \quad (w \text{ en } F).$$

Si como espacio vectorial sobre F , m tiene dimensión k , entonces m^G tiene dimensión $k[G:S]$ y una base de m^G sobre F es:

$$\{g_i e_j\}, \quad j=1, \dots, k, \quad i=1, \dots, r,$$

con $r=[G:S]$ y $\{e_j\}$ una base de m en F .

Para un G - F -módulo M , el S - F -módulo restringido es el módulo M_S que se obtiene al considerar únicamente los operadores de S en M .

LEMA 2.1.

Si M es un G - F -módulo y si el subgrupo S contiene un p -subgrupo de Sylow de G , entonces M_S^G tiene un sumando directo equivalente a M .

Demostración.

La aplicación $\beta : M \rightarrow M_S^G$ tal que

$\beta(u) = \sum x \cdot x^{-1} u$ es un G - F -isomorfismo, ya que

para toda g en G , u en M y w en F

$$\begin{aligned} g(\beta u) &= g(\sum x \cdot x^{-1} u) = \sum (gx)^+ \cdot (gx)^+ x^{-1} u \\ &= \sum (gx)^+ \cdot [(gx)^+]^{-1} g x x^{-1} u \\ &= \sum (gx)^+ \cdot [(gx)^+]^{-1} g u = \beta \sum g u \end{aligned}$$

$$(\beta u)_w = (\sum x \cdot x^{-1} u)_w = \sum x \cdot x^{-1} u_w = \beta(u_w).$$

Si u está en M y $\beta u = 0$, entonces $1 \cdot u = u = 0$; además claramente es sobre. Como S contiene un p -subgrupo de Sylow de G , la transformación

$\rho: M \rightarrow M$, donde $\rho(u) = ru$ con $r = [G:S]$, es un automorfismo. Esto es claro debido a que

$(r, p) = 1$. Sea α su inverso y α^+ un G - F -homomorfismo de M_S^G en M definido por

$$\alpha^+(\sum x \cdot u_x) = \alpha \sum x u_x$$

y tal que $\alpha^+ \beta u = \alpha^+ \sum x \cdot x^{-1} u = \alpha \sum x x^{-1} u = \alpha [G:S] u = \alpha r u = u$; es decir, $\alpha^+ \beta = 1_M$, teniendo así la siguiente sucesión exacta escindible

$$0 \rightarrow \ker \alpha^+ \xrightarrow{i} M_S^G \xrightarrow{\alpha^+} M \rightarrow 0$$

$\xleftarrow[\beta]{\quad}$

Esto prueba que M es un sumando directo de

M_S^G .

TEOREMA 2.2.

a) Si el subgrupo S de G contiene un p-subgrupo de Sylow de G, entonces todo G-F-módulo M inescindible es equivalente a un sumando directo del G-F-módulo inducido por algún sumando directo inescindible de M_S .

b) Si S es cualquier subgrupo de G, entonces todo S-F-módulo m inescindible es equivalente a un sumando directo del S-F-módulo inducido por algún sumando directo inescindible de m^G .

Demostración.

a) M_S puede escribirse como $M_S = m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n$, donde cada m_i es un S-F-módulo inescindible; además, $(M_S)^G = m_1^G \oplus m_2^G \oplus \dots \oplus m_n^G$. Aplicando el lema 1.1 se tiene que M es equivalente a un sumando directo de M_S^G . Ya que los G-F-módulos admisibles son espacios vectoriales de dimen-

sión finita sobre F , cualquier submódulo debe tener dimensión menor que aquél en el cuál es te propiamente contenido, satisfaciendo así los módulos de representaciones ambas condiciones de cadena. Como M es inescindible, el teorema de Remak-Krull-Schmidt implica que M es equivalente a un sumando directo de m^G para alguna i .

b) Escribiendo $m^G = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_p$, con cada M_i un G - F -módulo inescindible, se tiene que $(m^G)_S = M_{1S} \oplus M_{2S} \oplus \dots \oplus M_{pS}$. Considérese el conjunto \hat{m} de todos los elementos $\sum x \cdot u_x$ de m^G con $u_1 = 0$, el cual forma un S - F -submódulo de m^G , y es tal que $(m^G)_S = \beta m \oplus \hat{m}$. Ya que para todo elemento $\sum x \cdot u_x$ de $(m^G)_S$
$$\sum x \cdot u = \beta(u_x) - [\sum x \cdot u_x - \beta(u_x)]$$
, se tiene que $\sum x \cdot u_x - \beta(u_x)$ está en \hat{m} y además $\beta m \cap \hat{m} = 0$. Aplicando nuevamente el Teorema de Remak, tenemos que m es equivalente a un sumando direc

to de alguno de los S-F-módulos M_{ij} .

3. T - F - M O D U L O S I N E S C I N D I B L E S

Sea T un grupo cíclico de orden p^s , F un campo de característica prima $p \neq 0$. Ya que el álgebra de grupo FT es un cociente

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow F[x] \longrightarrow FT \longrightarrow 0$$

en donde I es el ideal generado por $(x^{p^s} - 1) = (x - 1)^{p^s}$ (debido a que la característica del campo es p), los módulos sobre FT se pueden considerar como $F[x]$ -módulos que son anulados por I , aplicando el teorema fundamental de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales, se tiene que los FT -módulos inescindibles son los $F[x]$ -módulos

$$F[x]/J$$

con J un ideal que contiene a I . Por ser I generado por $(x - 1)^{p^s}$, los ideales con esta propiedad son

$J_1 = ((x - 1)), J_2 = ((x - 1))^2, \dots, J_p^s = ((x - 1))^{p^s}$
y $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_p^s$, de donde se tiene

TEOREMA 3.1.

Si T es un grupo cíclico de orden p^s y F un campo de característica $p \neq 0$, entonces T tiene p^s clases de representaciones inescindibles en F , de grados $1, 2, \dots, p^s$ y están determinadas por los módulos

$$F[x] / J_i = M_i, \quad i=1, 2, \dots, p^s.$$

Obsérvese que para cada FT -módulo M_k , $1 \leq k \leq p^s$, existe una transformación \star cíclica e inescindible, cuyo polinomio mínimo es $(x - 1)^k$. Si v es un generador del módulo M_k , entonces los elementos $b_0 = v, b_1 = v(\star - 1), b_2 = v(\star - 1)^2, \dots, b_{k-1} = v(\star - 1)^{k-1}$ son linealmente independientes ya que $v(\star - 1) = 0$ y $v(\star - 1) \neq 0$. Como la $\dim_F M_k = k$ se sigue que los vectores b_0, b_1, \dots, b_{k-1} for-

TEOREMA 3.3.

Si T tiene p-subgrupos de Sylow cíclicos,
entonces G tiene un número finito de clases de
representaciones inescindibles sobre F.

Demostración.

Sea G un grupo de orden $p^s n$, con $n = [G:S]$.
Toda representación de grado k de un p -subgru
po de Sylow induce una representación de G de
grado kn . Ahora por el teorema 2.2(b) sabemos
que esta representación inducida tiene una com
ponente inescindible de grado mayor o igual a
 k , una cota para el número de representacio—
nes inescindibles puede ser $kn - k + 1$. Aplican—
do el teorema 2.2(a) obtenemos que el número
de clases de representaciones de G está acota
do por $p^{s/2} [(p^s + 1)n - p^s + 1]$. Los grados de las
representaciones inescindibles de G son menor
o igual al orden de G , en efecto pues un p -sub

grupo de Sylow tiene una representación ines
cindible de grado máximo p^s , que induce una
representación de G de grado $p^s n$.

4. T x T - F - M O D U L O S I N E S C I N D I B L E S

LEMA 4.1.

La aplicación $\Phi: M_n(F) \longrightarrow GL_{2n}(F)$ da
por

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo del grupo aditivo del ál-
gebra $M_n(F)$ en el grupo multiplicativo $GL_{2n}(F)$.

Demostración.

Es inmediato que Φ es un homomorfismo, ya
que

$$\begin{aligned} \Phi(A+B) &= \begin{pmatrix} I & A+B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \Phi(A)\Phi(B). \end{aligned}$$

Sea $T \times T$ el producto directo de dos gru

pos cíclicos de orden p generados respectivamente por a y b .

LEMA 4.2.

Si A es una matriz de $n \times n$ que únicamente conmuta con matrices no singulares o nilpotentes, entonces el homomorfismo

$$\psi : T \times T \longrightarrow GL_{2n}(F)$$

definido por

$$a \longrightarrow A = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad b \longrightarrow B = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

es una representación inescindible de $T \times T$.

Demostración.

Ya que $A^p = B^p = I$ y $AB = BA$, ψ determina una representación de $T \times T$. Para ver que esta representación es inescindible, probaremos que toda matriz que conmuta con A y B es o no singular o nilpotente, ya que entonces todo endomorfismo del módulo correspondiente a la re-

presentación dada es o no nilpotente o un automorfismo.

Sea

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix},$$

con C en $M_{2n}(F)$ y X, Y, Z y W en $M_n(F)$.

Si $CA = AC$, entonces

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ W & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X + Y \\ W & W + Z \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + W & Y + Z \\ W & Z \end{pmatrix},$$

de donde,

$$W = O \text{ y } X = Z$$

con

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Si además $CB = BC$,

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & XA + Y \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y + AX \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

así que $XA = AX$. Pero por hipótesis X es o no singular o nilpotente. Ahora bien, si X es no singular, claramente C también lo es. Si X es nilpotente, existe k en \mathbb{N} tal que $X^k = 0$, entonces $C^{2k} = 0$, lo que implica que C es nilpotente. Luego, la representación determinada por a en A y b en B es una representación inescindible de $T \times T$.

TEOREMA 4.3.

Si el grupo G tiene p -subgrupos de Sylow no cíclicos, existen representaciones inescindibles de G sobre F de grado arbitrario.

Demostración.

Ya que G puede considerarse un p -grupo no cíclico, entonces G tiene un factor del tipo $T \times T$, con T grupo cíclico de orden p . Por el lema 4.2 existen representaciones inescindibles de un (p,p) -grupo de grado tan grande como se quiera. Además todo $T \times T$ - F -módulo inescindible es también un G - F -módulo inescindible. En el teorema 2.2(b) se probó que toda representación M , inescindible de un p -subgrupo de Sylow de un grupo G , es equivalente a una componente de una representación inducida por una representación inescindible de G , y esta representación inducida tiene una componente

inescindible de grado mayor o igual al grado
de M.

B I B L I O G R A F I A

(1) D. G. Higman

Indecomposable representations at
characteristic p . Duke Math. J. 21
(1954).

(2) Ch. W. Curtis, I. Reiner

Representation theory of finite
groups and associative algebras.
Interscience, (1962).

I N D I C E

1. Introducción	1
2. G-F-Módulos	3
3. T-F-Módulos inescindibles	10
4. Tx T-F-Módulos inescindibles	16
Bibliografía	22