UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

EL SIGNIFICADO DE LAS CONECTIVAS Y LOS CAMBIOS DE LÓGICA: UN ENFOQUE CATEGORISTA

TRABAJO FINAL QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
PRESENTA

LUIS ESTRADA GONZÁLEZ

DIRECTORA: DRA. IVONNE VICTORIA PALLARES VEGA

NOVIEMBRE DE 2008

Esta investigación comenzó cuando Claudia Olmedo me regaló la versión en español de *Conceptual Mathematics* de William Lawvere y Stephen Schanuel. Había sabido de la teoría de categorías porque Newton da Costa la mencionaba un par de veces en *El conocimiento científico* (libro que también me regaló Claudia), por lo que cuando vi el libro de Lawvere y Schanuel me llamó la atención. Leí el libro, todavía con una visión conjuntista de la matemática y creyendo que la lógica *es* la ciencia del razonamiento correcto, por lo que encontré perturbadoras las secciones finales acerca de los topoi y la lógica. Al principio no pude expresar con claridad mis preocupaciones, pero ahora resumiría mi inquietud inicial del siguiente modo: ¿Cómo se podría reconciliar la polivalencia de los topoi, surgida en el marco de una teoría de extremada generalidad y potencia, con resultados lógicos que dicen que la bivalencia es una aspecto fundamental de toda lógica con ciertas características, lógicas entre las que se encuentra la lógica interna de los topoi? ¿Es posible bivaluar por medios categoristas la lógica interna de los topoi? Esa primera pregunta me motivó a tratar de buscar otras interacciones interesantes entre la lógica contemporánea y la teoría de categorías. En el camino me encontré la formidable idea de que la matemática ha avanzado mediante el reemplazo de elementos constantes por variables, la cual me ha ayudado a cambiar muchas de mis anteriores ideas. Por ejemplo, ahora distingo entre la lógica y las lógicas, por un lado, y la aplicación canónica de una lógica, por el otro. Después de un tiempo me hice a la idea de que una perspectiva categorista podría cambiar radicalmente la manera de enfrentar muchos problemas en filosofía de la lógica y de la matemática. Parte de lo que sucedió después está contenido en esta investigación. Pero antes de comenzar me gustaría agradecer a la gente que ha hecho posible este trabajo.

Por supuesto agradezco a mis padres, Luis Humberto y Susana, por su apoyo, paciencia y confianza. Agradezco también a mi tío Enrique y a mi tía Gloria, porque me tendieron la mano aunque yo era muy diferente a ellos y eso les haya provocado muchos dolores de cabeza. La Dra. Atocha Aliseda me ayudó desde el comienzo de la maestría y le agradezco también algunas conversaciones muy valiosas. El Dr. Raymundo Morado influyó mucho para que este trabajo resultara más legible para los filósofos; sé que todavía no estará satisfecho y que sobre todo será escéptico acerca de mi tesis principal. La Dra.

Ivonne Pallares merece un agradecimiento especial por su paciencia y su ayuda desde el comienzo de este proyecto y por ayudarme a hacer las preguntas correctas a pesar de la peculiaridad de nuestra colaboración. Ni siquiera podría haber comenzado esta investigación sin ella. Sin su apoyo en un momento complicado ahora estaría defendiendo un trabajo todavía más breve, menos complicado y más popular, pero mucho menos satisfactorio para mí. Sin su apoyo también estaría defendiendo un trabajo mucho más largo, muy interesante y muy satisfactorio para mí, pero para el cual requiero más tiempo, más conocimientos y un entorno más favorable. Afortunadamente, esas condiciones se han reunido y parece que podremos llevar a buen término ese otro proyecto. Muchas, muchísimas gracias por todo doctora.

Recibí una beca del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) durante el periodo 2006-2008, que fue una condición necesaria para la redacción de este trabajo. En 2006 recibí una beca de la Academia Mexicana de Ciencias para participar en el *XVI Verano de la Investigación Científica*, periodo en el cual redacté algunas partes de esta investigación bajo la supervisión de la Dra. Pallares y de la Dra. Aliseda. Gracias a la Dirección General de Estudios de Posgrado pude asistir a varios simposios y coloquios pertinentes para mi tema de investigación. Presenté algunas de las ideas expuestas en este trabajo en el *XIII Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática* (Oaxaca, México, agosto de 2006), las *VIII Jornadas Juan José Rivaud de Historia y Filosofía de las Matemáticas* (Guanajuato, México, septiembre de 2006), la *2ª Gran Semana Nacional de la Matemática* (Puebla, México, octubre de 2006), las *IX Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun "Filosofía y Matemáticas"* (Concepción, Chile, mayo de 2007), el III Coloquio de Estudiantes del Posgrado en Filosofía de la Ciencia (México, D. F., octubre de 2007), el *XIV Congreso Internacional de Filosofía de la AFM* (Sinaloa, México, noviembre de 2007), el Día de la Lógica (México, D. F., marzo de 2008), el *XIV Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática* (Paraty, Río de Janeiro, Brasil, mayo de 2008, al que pude asistir gracias a un *Student Travel Award* otorgado por la Association for Symbolic Logic y los organizadores del evento) y en el Seminario Permanente de la Cátedra "Estructuras Dinámicas del Significado" de la Facultad de Estudios Superiores de Cuautitlán (Cuautitlán, Estado de México, junio de 2008). Finalmente, gracias a un apoyo de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla a través de su Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas pude presentar un resumen de este trabajo en el *XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana* (Valle de Bravo, Edomex, octubre de 2008). Agradezco a todos los asistentes de los eventos mencionados que con sus preguntas, comentarios y sugerencias me ayudaron a mejorar este trabajo.

Claudia Olmedo García, Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez, Juan Francisco Orea Retif (asiduos lectores míos), Carlos César Jiménez Jiménez y Fabiola López Velázquez hicieron importantes comentarios a versiones preliminares de al menos partes de este trabajo. Les agradezco el tiempo que dedicaron a leer mis trabajos y a hacerles observaciones.

Del profesor Newton C. A. da Costa, el profr. Graham Priest, el profr. Geoffrey Hellman, el Dr. Chris Mortensen, el Dr. Răzvan Diaconescu, el Dr. Alexandre Costa Leite, el Dr. Andrei Rodin, Greg O'Keefe y el Dr. Владимир Васюков (Vladimir Vasyukov) recibí muchos consejos muy útiles, correos electrónicos esclarecedores acerca de muchos asuntos, textos, prepublicaciones de otros o de su propia autoría y varias recomendaciones bibliográficas para este y otros trabajos relacionados.

Es indispensable también agradecer al jurado: Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia, Dr. Zbigniew Oziewicz Kwass, Dr. Federico Marulanda Rey y Dr. Alejandro Herrera Ibáñez, por su apoyo no sólo en éste sino en otros proyectos.

Muchas gracias a todos ellos. Pero no puedo dejar de estar eternamente agradecido a Claudia Olmedo García; no puedo imaginarme haciendo estas cosas sin ella, no sólo porque me ha regalado libros clave, sino porque me ha regalado la alegría y la esperanza.

Y ahora, ¡que comience la batalla!

Luis Estrada González

Campinas-Paraty-Ciudad de México-Puebla

Mayo-octubre de 2008

El significado de las conectivas y los cambios de lógica: un enfoque categorista

Introducción

Los conceptos básicos de lo que ahora se conoce como "teoría de categorías" fueron introducidos en la década de 1940 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane para desarrollar una teoría general de las equivalencias naturales en topología algebraica, la cual requería un tratamiento uniforme de algunas propiedades matemáticas que aparecían en contextos muy diversos. En las dos décadas subsecuentes, la teoría de categorías experimentó un rápido desarrollo, convirtiéndose así en un importante marco conceptual para el álgebra abstracta moderna, la geometría algebraica y la topología algebraica. Además de ser una herramienta en esas áreas de investigación matemática contemporánea, las categorías rápidamente se convirtieron en objeto de una disciplina matemática independiente, esto es, se consideraron un objeto de investigación por derecho propio. Tras poco más de 60 años de desarrollo, la teoría de categorías ha mostrado que también puede ayudar a pensar la matemática y su fundamentación de una manera distinta a la que hace posible la teoría de conjuntos.

Entre las muchas aportaciones tanto formales como conceptuales de la teoría de categorías está el estudio sistemático y unificado de diversos tipos de conjuntos, algunos de los cuales a su vez funcionan como diferentes modelos para una teoría de conjuntos axiomática (la cual usualmente es la de Zermelo-Fraenkel (ZF)). En lo que sigue sólo presentaré elucidaciones acerca de estos tipos de conjuntos sin dar definiciones formales. Un *conjunto concreto* es la extensión de un predicado; ser un miembro de un conjunto concreto es precisamente satisfacer cierto predicado 'P', es decir, ser un P. Un ejemplo de conjunto concreto es el conjunto de los números reales x tales que $\sqrt{x} > x$. Un *conjunto abstracto* resulta de haber abstraído de un conjunto concreto el requisito de poseer cierto atributo, salvo el de que sus elementos sean distintos entre sí; por ejemplo, un conjunto de tres cosas (no importa si son verdes, animales, extensas, mayores que 7 y menores que 10^{100}, etc.). Los conjuntos concretos son los objetos de estudio de la teoría tradicional de conjuntos.[1] Una manera de entender qué es un *conjunto variable* es considerarlo como una

[1] La distinción entre 'conjunto concreto' y 'conjunto abstracto' está ya en Cantor, expuesta de una manera similar a la que se ha hecho aquí (cfr. Cantor 1887-8: 411), aunque Cantor denominaba "*Kardinalzahlen*"

familia indexada de conjuntos abstractos A = $\{A_i: i \in I\}$, esto es, como un conjunto abstracto A *que varía* sobre el índice *I*. Cada A_i es entonces el "valor" del conjunto variable A en el *estado i.* Los conjuntos usuales, abstractos constantes, son el caso límite en el cual *I* es vacío. Y los conjuntos abstractos variables pueden ser conjuntos *constantes* (o *estáticos*), es decir, conjuntos abstractos que constituyen el caso límite donde la variación ha sido reducida a cero, o también conjuntos *discretamente variables*, esto es, conjuntos abstractos cuyo índice de variación es numerable. Por ejemplo, el conjunto de personas en una estación de trenes es variable a lo largo de un día; cada hora tiene nuevos elementos: el conjunto que varía es "las personas en la estación" y el índice de variación es el tiempo (discreto, representado con las horas de un día). Pero también hay conjuntos *continuamente variables*, es decir, conjuntos cuyos elementos varían sobre un dominio *continuo I*. Un dominio continuo (conectado) *I* no tiene huecos y es infinitamente divisible, por lo que el conjunto que varía sobre *I* no "salta" abruptamente de un valor de *I* a otro. Debido a la gran diferencia que hay entre los dominios continuos y los discretos las características de los conjuntos continuamente variables pueden llegar a diferir enormemente de los otros tipos de conjuntos.[2]

La noción categorista de 'topos' puede considerarse una formulación precisa de la noción de 'universo de conjuntos abstractos variables' y la teoría de topoi[3] como teoría de

("números cardinales") a los conjuntos abstractos. El uso del término "conjunto abstracto" para referirse a lo que Cantor llamaba "número cardinal" se debe a Lawvere (1994); véase también Lawvere y Rosebrugh (2003). Fraenkel (1976) llamaba "conjunto abstracto" a un conjunto en el cual la naturaleza de los objetos no importa pero, como señala Bell (2006), esta "abstracción" es más bien "indiferencia" y no queda claro si un conjunto así es distinto de un conjunto concreto.

[2] Usualmente se reserva el nombre "conjuntos abstractos" para los conjuntos abstractos *constantes* o "cantorianos", como también los llama Lawvere. Cfr. Lawvere y Rosebrugh (2003: i; 92; 246); Landry y Marquis (2005: n46). Me parece que esa terminología puede hacer pensar que los conjuntos variables no son abstractos, por eso preferiré hablar de la distinción conjuntos constantes/conjuntos variables y no conjuntos abstractos/conjuntos variables.

[3] Nótese, como asunto de ortografía, que *topologie*, aunque sea una palabra francesa, se forma a partir de *topos* y *logos*, palabras griegas. No importa si Grothendieck siempre escribía "*les topos*" porque si la palabra francesa *topos* viene de *topologie*, también es natural considerar a un "topos" como *una* de las cosas estudiadas por la *topologie*, como un *objet topológique*. "*Les topos*" puede considerarse un neologismo francés, como McLarty (1990: 357n) ha argumentado, pero es igualmente plausible pensar que Grothendieck estaba usando un barbarismo. No reclamo una competencia seria en este asunto; tanto "topos" como "topoi" tienen sus usuarios y sus defensores pero, al igual que Freyd, soy "un amante confeso de las terminaciones clásicas", por lo que aquí utilizaré la etimología griega para *topologie* (y *topología*, *topology*, etc.) y escribiré "topoi" para el plural de "topos".

conjuntos generalizada. Al igual que la teoría de conjuntos, o más exactamente, al igual que algunos modelos de las teorías axiomáticas de conjuntos, cada topos puede verse como un marco para desarrollar grandes partes de la matemática hasta ahora conocida, quizá toda la matemática conocida con la excepción de la teoría de categorías misma. Sin embargo, lo que aquí me interesa es la reconstrucción categorista de las conectivas lógicas usuales (conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\Rightarrow$) y negación ($\neg$)), así como el planteamiento de problemas en filosofía de la lógica utilizando la perspectiva categorista.[4]

Mi objetivo al redactar y presentar este trabajo es doble: por un lado, proporcionar un acercamiento filosófico a la teoría de categorías distinto al usual (la teoría de categorías como otro fundamento para la matemática), a saber, mostrando que la interacción entre la teoría de categorías, la lógica contemporánea y las filosofías de la lógica y la matemática puede ser muy fructífera para las disciplinas involucradas. Por otro lado, y no menos importante, intento contribuir a la difusión de la teoría de categorías en el ámbito filosófico mexicano.

En cuanto al primer objetivo, sólo trataré uno de todos los posibles temas que hay en la intersección de la teoría de categorías, la lógica y la filosofía, que sin embargo, considero es central para esas tres disciplinas: el tratamiento categorista o, más específicamente, en la teoría de topoi, de las conectivas lógicas. Pero tampoco puedo tratar este tema en toda su extensión. La pregunta que guía el análisis que desarrollaré del primer tema es la siguiente: si las leyes lógicas que valen en un topos son diferentes a las que valen en otro, ¿las conectivas lógicas significan cosas diferentes en cada uno de esos topoi, como sugeriría Quine? Dicho de manera breve: ¿qué cambia cuando, de un topos a otro, cambia la lógica interna?

[4] En inglés es muy común encontrar la expresión *categorical* para referirse a algo relativo a la teoría de categorías, con la excepción de Goldblatt y algunos pocos seguidores. En español se ha utilizado también ‘categórico’ como traducción de *categorical*. Utilizaré el término ‘categorista’ y sus derivados porque ‘categórico’ ya tiene usos muy arraigados en lógica, matemática y filosofía (como en los trabajos de Aristóteles y en la investigación de la axiomática) y porque ‘categorial’ y sus derivados, sugerencia de Goldblatt (1984), aunque menos susceptible de confusión que ‘categórico’, también tienen un uso filosófico (en la fenomenología husserliana). Además, ‘categorista’ semeja a ‘conjuntista’.

La discusión del problema del cambio de lógica ha seguido en lo esencial los lineamientos propuestos por Quine (1970), para quien todo cambio de lógica (todo cambio en la colección de teoremas de una lógica dada) es cambio de tema, es decir, cambio en el significado de las conectivas lógicas, lo cual consiste en cambiar sus condiciones de verdad y las colecciones de teoremas e inferencias válidas en los cuales aparecen esas conectivas.[5] Pocas veces se ha cuestionado esta idea; la mayoría de las veces se intenta mostrar que el cambio de significado de las conectivas es legítimo o incluso necesario para algún propósito. Otra opción ha sido aceptar que hay cambio de tema, pero que lo que cambia no es el significado de las conectivas lógicas sino la noción de deducibilidad (cfr. Morado (2007)). Una intuición común a varios proponentes de lógicas diferentes a la clásica es que si ha de modificarse la colección de teoremas clásicos es porque algunas teorías con cierto valor para nuestro cuerpo de conocimientos pueden requerir lógicas diferentes (cfr. por ejemplo Priest (1975), da Costa (1982)). Por ejemplo, si al estudiar los fenómenos cuánticos hay que utilizar una lógica diferente a la clásica es porque las partículas subatómicas tienen propiedades cuyo tratamiento en términos clásicos es inadecuado o, cuando menos, complica demasiado las cosas. Pero estos argumentos sólo suelen mostrar que un cambio en la colección de teoremas y en el significado de las conectivas o en la relación de deducibilidad se debe a que ciertas teorías así lo requieren y no a que las conectivas y otras nociones centrales tengan el mismo significado en diferentes lógicas.

Cuando hablo del problema del significado de las conectivas lógicas no me refiero al problema, quizá más discutido, de saber cuáles son las constantes lógicas, ya sea en una teoría formal o en el lenguaje ordinario. El problema no es saber cuáles o cuántas constantes lógicas hay, sino más bien qué tipo de significado debe adscribírseles, independientemente de cuáles y cuántas sean. No obstante, quizá sea ocioso discutir el problema sin conocer al menos algunas conectivas, por lo que consideraré los casos casi incontrovertibles (la conjunción, la disyunción, la implicación y la negación). Hay dos grupos de teorías predominantes en el debate actual acerca del significado de las conectivas lógicas. Uno es el de las teorías "representacionalistas", basadas en la semántica modelo-

[5] Aunque lo correcto es hablar de las condiciones de verdad de las proposiciones en las que aparecen las conectivas, por simplicidad en ocasiones hablaré de las "condiciones de verdad de las conectivas".

teórica, cuya tesis es que el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución a las condiciones de verdad de las fórmulas que la contiene; el otro es el de las teorías “inferencialistas”, basadas en la semántica de la teoría de la demostración, según el cual el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución al rol inferencial de esas fórmulas.[6]

Tanto el representacionalismo como el inferencialismo son *maximalistas* en el sentido de que suponen que *todos* los aspectos de la semántica modelo-teórica (respectivamente, la semántica de teoría de la demostración) son relevantes en la determinación del significado de las conectivas. De acuerdo con una propuesta *minimalista*, sólo algunos aspectos modelo-teóricos (respectivamente, inferenciales) relacionados con las conectivas son semánticamente relevantes y otros, aunque importantes, no contribuyen a la determinación del significado de las conectivas (cfr. Hjortland (2007)).

En el presente trabajo discuto el problema del significado de las conectivas lógicas a partir de la reconstrucción de las conectivas en la teoría de categorías. En la sección I presento con cierto detalle algunas propuestas tradicionales acerca de los cambios de lógica y su relación con el significado de las conectivas lógicas. En la sección II introduzco algunos conceptos y construcciones básicos de la teoría de categorías. En la sección III presento algunas características importantes de la categoría **Conjuntos**, características que esta categoría tiene en común con otras llamadas “topoi”, que describo en la sección IV. En la sección V presento el análisis categorista de la lógica de orden cero y en la VI muestro que, aunque **Conjuntos** es un topos cuya lógica interna es clásica, en general la lógica interna de un topos es no clásica. En las secciones VI y VII trataré de hacer plausibles las siguientes dos hipótesis:

(1) que la caracterización categorista de las conectivas en la teoría de topoi puede considerarse una versión del minimalismo, esto es, que la caracterización categorista de las conectivas da un significado para las mismas, especifica qué quiere decir la expresión vaga

[6] Tomo la terminología y la descripción de Brandom (2000: 45). A diferencia de Barceló (2007: 63s), considero que el “regimentismo”, la idea de que el significado de las constantes lógicas captura cierto sentido de las “palabras lógicas” “y”, “o”, etc. del lenguaje natural, no ha sido una teoría del significado de las conectivas, sino más bien un desiderátum de muchas lógicas y de varias teorías del significado de las conectivas.

"aspecto relacionado con una conectiva" y muestra qué aspectos relacionados con una conectiva no son semánticamente relevantes;

(2) que la estructura de los objetos en un topos, no un cambio de significado en las conectivas, es lo que genera la diferencia en la colección de teoremas en la lógica interna, por lo que, si se acepta el minimalismo, la teoría de categorías proporciona un ejemplo de cambios de lógica en los que no hay cambio de significado en las conectivas.

Finalmente, en la sección VIII distingo tres principios que suelen identificarse (*bivalencia*, *tercio excluso* y *validez de la fórmula* $\varphi \vee \neg\varphi$), su formulación categorista y muestro cuáles de ellas están presentes en todo topos y cuáles se restringen.

Aunque este es un trabajo de filosofía de la matemática y de la lógica, es prácticamente imposible dar una explicación completa de todos los temas aquí discutidos o mencionados. Ello me lleva a considerar como ejemplos de trabajo sólo dos topoi: **Conjuntos** y $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$. Cuando ha sido necesario presentar nociones o resultados más complicados, lo hago de una manera lo más informal posible. Otras nociones complejas o resultados más avanzados son sólo mencionados si es necesario hacerlo ya que no se requiere mucho más para entender los problemas que ellos sugieren; del mismo modo, he intentado dar referencias para todos los resultados. De antemano ofrezco una disculpa por todas las omisiones y atribuciones erróneas que haya hecho.

I. Cambio de lógica y cambio de tema: algunas propuestas tradicionales

Quine (1970) estableció las líneas generales en las que el problema de qué cambia de una lógica a otra habría de discutirse y defendió una tesis que todo teórico interesado en el problema tendría que discutir. Según Quine todo cambio de lógica (todo cambio en la colección de teoremas o inferencias válidas de una lógica dada) es cambio de tema (cambio en el significado de las conectivas lógicas[1]). Pocas veces se ha cuestionado esta tesis; la mayoría de las veces se intenta mostrar que el cambio de significado de las conectivas es legítimo o incluso necesario para algún propósito. Una intuición común a varios proponentes de lógicas diferentes a la clásica es que algunas teorías, por el tipo de objetos de los que tratan, requieren una lógica diferente como herramienta deductiva (cfr. por ejemplo Priest (1975), da Costa (1982)). Así, al decir que el cambio de tema puede ser legítimo, los críticos han aceptado la tesis quineana de que cambio de lógica es cambio de tema y ciertamente parece haber buenas razones para ello. Por ejemplo, la semántica de mundos posibles parece hacer explícita la diferencia de significado entre la negación clásica y la intuicionista del siguiente modo (m y m' son mundos posibles y $\geq$ una relación de orden entre mundos):

Negación clásica: $v(\neg \mathrm{A}, m) = \top$ si y sólo si $v(\mathrm{A}, m) = \bot$

Negación intuicionista: $v(\neg \mathrm{A}, m) = \top$ si y sólo si para todo $m' \geq m$, $v(\mathrm{A}, m') = \bot$

Otra opción, menos explorada, que ya había mencionado antes pero que no consideraré aquí, ha sido la de aceptar que sí hay un cambio de tema, pero que lo que cambia no es el significado de las conectivas lógicas sino la noción de deducibilidad (cfr. Morado (2007)).

Antes de continuar es necesario precisar qué entenderé por la tesis quineana de que cambio de lógica es cambio de tema; para esto considérese el multicitado pasaje de *Philosophy of Logic*:

> Mi opinión acerca del diálogo [entre quienes creen que puede haber oraciones verdaderas de la forma $\varphi \wedge \neg \varphi$ y quienes no] es que ninguna parte sabe de lo que está

[1] Aunque Quine no lo expresaría así dado su escepticismo acerca del significado. Cfr. *infra* y nota siguiente.

> hablando. Piensan que están hablando de la negación, '[$\neg$]', 'no', pero la noción seguramente ha dejado de ser reconocible como la negación cuando consideraron algunas conjunciones de la forma [$\varphi\wedge\neg\varphi$] como verdaderas y dejaron de considerar que tales oraciones implican a todas las demás. Evidentemente, este es el predicamento del lógico divergente: cuando trata de negar la doctrina simplemente cambia de tema. (Quine 1970: 81)

Abstrayendo los elementos particulares del ejemplo (las lógicas involucradas y la conectiva discutida), la tesis de Quine es que al cambiar de la lógica L_1 a la lógica L_2, esto es, al formular una lógica L_2 diferente a L_1, se cambia de tema. *Grosso modo*, dos lógicas son diferentes si y sólo si son diferentes sus colecciones de tautologías, contingencias o falsedades lógicas. Según Quine, el cambio de tema consiste en cambiar la manera de entender las conectivas, en cambiar su significado, lo cual a su vez consistiría en cambiar los valores que toma una oración en determinadas condiciones y también en modificar las implicaciones entre ciertas oraciones. Entonces 'cambio de tema' quiere decir 'cambio de significado de las conectivas lógicas', lo cual a su vez quiere decir 'cambio en los valores de verdad de ciertas fórmulas, presumiblemente atribuible a un cambio en la manera de evaluar las conectivas, y cambio en las inferencias válidas entre ciertas fórmulas'. Para Quine (1960) el significado-estímulo de las conectivas queda determinado a través de sus condiciones de asentimiento y disentimiento (y suspensión del juicio, según añade en Quine (1973)). Omitiendo sus limitaciones a la conducta observable y las complicaciones introducidas en Quine (1973), podría decirse que para Quine el significado de una conectiva está determinado por las condiciones de verdad de las oraciones en las que aparecen, que esas condiciones de verdad validan ciertos teoremas, a saber, los de la lógica clásica, y por el hecho de que esas condiciones de verdad reproducen de la manera más fiel posible el uso de sus contrapartes del lenguaje ordinario.

La tesis de Quine ha sido ampliamente aceptada incluso por quienes tienen una visión diferente acerca del significado de las conectivas lógicas. Hay dos grupos de teorías predominantes en el debate actual acerca del significado de las conectivas lógicas: las teorías *representacionalistas* y las *inferencialistas*. La tesis de las teorías representacionalistas, basadas en la semántica modelo-teórica, es que el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución a las condiciones de verdad de las fórmulas que la contiene. Por ejemplo, las condiciones de verdad para las conectivas tal y como éstas están expresadas en las usuales tablas de verdad para la lógica clásica de orden cero determinan el significado de las conectivas clásicas. Quine sería, con las salvedades expresadas al final del párrafo anterior, un representacionalista. De acuerdo a las teorías inferencialistas, basadas en la semántica de la teoría de la demostración, el significado de una conectiva lógica se determina por su contribución al rol inferencial de las fórmulas en las que aparecen. Por ejemplo, el significado de la conjunción consistiría en que de $\varphi\wedge\psi$ se puede inferir tanto φ como ψ (regla de eliminación de la conjunción), y de que φ y ψ se puede concluir $\varphi\wedge\psi$ (regla de introducción de la conjunción). Esa sería la contribución de la conjunción al rol inferencial de las fórmulas en las que aparece y ese sería su significado. Tanto los correlatos representacionalistas como los inferencialistas de la tesis de Quine suelen ser aceptados, esto es, para los representacionalistas cambiar de lógica es cambiar las condiciones de verdad de las conectivas y para los inferencialistas cambiar de lógica es cambiar la colección de inferencias válidas o las reglas para el uso de las conectivas.

Entre los pocos objetores de la tesis de Quine están Putnam (cfr. 1957, 1962, 1968), Morton (1973) y, más recientemente, Paoli (2003, 2007) y Read (2008). Cada uno de estos autores acepta lo que Hjortland (2007) denomina "minimalismo para (el significado de) las conectivas lógicas", a saber, la tesis de que sólo algunos aspectos modelo-teóricos (respectivamente, inferenciales) son semánticamente relevantes y otros, aunque importantes, no contribuyen a la determinación del significado de las conectivas.

Putnam (1962: 51) defiende tres tesis: (1) que las conectivas tienen un "significado central" o "nuclear" (*core meaning*) que es independiente de muchos de los teoremas (o de las inferencias válidas, si se prefiere hablar en términos inferencialistas); esto es, para Putnam, Quine no caracteriza adecuadamente el significado de una conectiva; (2) que si por "cambio de significado" se entiende la modificación del uso global de una conectiva, esto es, si "cambio de significado" quiere decir que la conectiva aparece en una fórmula que es teorema de una lógica pero no de otra, entonces cambiar de lógica sí es cambiar de significado; (3) que si la tesis "cambio de lógica es cambio de tema" significa que un cambio de lógica involucra *solamente* un cambio de significado en las conectivas entonces la tesis es falsa, pues un cambio de lógica también afecta la relación de deducibilidad. Por supuesto, las tesis (2) y (3) son importantes sólo en el caso de que el significado de las conectivas fuera otro que su significado central. Así, sólo me ocuparé de la tesis (1) y de la defensa que Putnam hace de ella en (1968: 187-197).

Putnam distingue, aunque un tanto implícitamente, entre los teoremas (las inferencias válidas) de una lógica $\mathscr{L}$ y las propiedades que tiene que satisfacer una conectiva c para ser c (aunque dichas propiedades pueden validar ciertos teoremas o inferencias). En el contexto de una discusión acerca de la lógica de la mecánica cuántica, Putnam introduce la idea de un "significado operacional" de las conectivas lógicas. Así, una cosa serían los teoremas en los que aparece la disyunción, que pueden diferir de una lógica a otra, y otra cosa serían las características que tiene que cumplir una conectiva para ser una disyunción. Omitiendo su discusión acerca de la mecánica cuántica y modificando un poco su presentación, un significado operacional para las conectivas se especificaría como sigue. Supóngase una semántica en la que la colección de valores de verdad tiene al menos un valor máximo y un valor mínimo y las conectivas se evalúan del siguiente modo:

- el significado operacional de $\varphi\wedge\psi$ consiste en que su valor es igual a la del conyunto con menor valor;
- el significado operacional de $\varphi\vee\psi$ consiste en que su valor es igual a la del disyunto con mayor valor;
- el significado operacional de $\neg\varphi$ consiste en que el valor de la conjunción de $\neg\varphi$ con φ es igual al valor mínimo de la semántica y que el valor de la disyunción de $\neg\varphi$ con φ es igual al valor máximo de la semántica.[2]

Las conectivas de la lógica cuántica tienen este significado operacional; además, no es difícil verificar que las conectivas de la lógica clásica también tienen este significado operacional y que a partir de él pueden caracterizarse los teoremas clásicos restringiendo la colección de valores de verdad al caso en el que sólo hay dos valores (el máximo y el

[2] Esta propuesta de Putnam no es todo lo general que uno desearía: la definición operacional para la negación no serviría ni para la lógica intuicionista ni para muchas lógicas tolerantes a la inconsistencia. Por supuesto, en el texto discutido (Putnam 1968) sólo trata de mostrar que hay un significado operacional común a la lógica clásica y la lógica cuántica, pero en otros textos, Putnam (1957) por ejemplo, explícitamente dice que la validez de $\varphi\vee\neg\varphi$ no forma parte del significado ni de la disyunción ni de la negación.

mínimo, verdadero y falso, 1 y 0). En la discusión acerca de la relación entre la lógica clásica y la lógica cuántica, el *número* de valores de verdad y la (in)validez de algunos teoremas como $(\varphi\wedge(\psi\vee\chi)) \Leftrightarrow ((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))$ son, de acuerdo con Putnam, aspectos irrelevantes en la determinación del significado de las conectivas. Tomando en cuenta sólo los significados operacionales presentados líneas arriba, las conectivas de la lógica clásica y la lógica cuántica no tienen distintos significados (operacionales).[3]

Morton (1973) va más lejos que Putnam al decir que no tiene que haber una sola colección de inferencias (respectivamente, teoremas) que tenga que ser compartida por *c*, *c*' y *c*'' para que esas conectivas *se parezcan*, para que las tres sean, por ejemplo, disyunciones. Morton sugiere que dos conectivas *c*' y *c*'' *son similares* si entre *c*' y *c*'' hay alguna colección común I* de inferencias válidas (teoremas) y *c*''' se parece a la conectiva *c*' si comparten alguna colección I** de inferencias válidas (teoremas) aunque I* y I** no sean la misma colección de inferencias válidas (teoremas) e incluso sean disjuntas. Sin embargo, *similitud* no implica *identidad de significado*, que es lo que se necesitaría para tratar de rebatir la tesis de Quine. La propuesta de Putnam no tiene este problema porque para que dos conectivas *c* y *c*' sean, digamos, una conjunción, ambas tienen que validar cierta colección de teoremas o inferencias válidas.

En el marco del "enfoque inferencial" de la lógica, una *regla operacional* para una conectiva *c* en una lógica *L* dice cómo se usa *c* en las pruebas de *L*; las reglas pueden ser de introducción o eliminación. En las *reglas estructurales* de una lógica *L* no aparecen conectivas. Gentzen (1935: 80) sugirió que el significado de una conectiva queda especificado por su correspondiente regla (operacional) de introducción. Este punto de vista ha sido desarrollado, entre otros, por Dummett (cfr. Dummett (1978)), Prawitz (1981) y Došen (1989). Este no es el lugar para presentar ni siquiera los rasgos fundamentales de

[3] Podría haber una dificultad con este significado operacional de las conectivas. Alguien puede rechazar que el significado operacional de la disyunción es el de ser el supremo de los disyuntos, que el significado operacional de una conectiva debe hacer referencia a la verdad y, así, el significado de la disyunción es que es verdadera cuando alguno de los disyuntos es verdadero. Esto no excluye la posibilidad de que haya más valores ni de que la asignación de valores sea no veritativo-funcional. Algo análogo podría aducirse para el caso de la conjunción y, de hecho, para el resto de las conectivas. Pero esta dificultad no es insalvable. Si esta crítica es correcta, de cualquier modo se tendría que decir qué valor tiene una disyunción cuando ninguno de los disyuntos es verdadero. Me parece que se tendría que recurrir a la idea de que el valor de una disyunción es el del disyunto con mayor valor.

esta propuesta o de sus variantes más importantes; para un rápido panorama puede verse Paoli (2002: 8-11).

Hay lógicas que no difieren en las reglas operacionales, sólo en las estructurales, por lo que es al menos dudoso que el significado de las conectivas difiera de una lógica a otra. Sin embargo, la igualdad de reglas operacionales para una conectiva no justifica algo más fuerte que la mera duda acerca de la identidad de significado porque los teóricos inferencialistas no están de acuerdo en si el significado de las conectivas se determina sólo por las reglas operacionales o si las reglas estructurales también hacen alguna contribución. Wansing (2000) asegura que en la práctica los lógicos frecuentemente dicen que las conectivas tienen dos tipos de significado: uno "operacional", determinado por las reglas operacionales de introducción y eliminación de conectivas, y otro "global", en el cual se toma en cuenta la contribución de las reglas estructurales. No obstante, la postulación de estos dos tipos de significado no es de mucha utilidad para tratar de refutar la tesis quineana, pues de cualquier modo habría al menos un sentido en el que cambio de lógica es cambio de tema, a saber, cuando las conectivas de dos lógicas difieren en su significado global.[4] Aunque Paoli está consciente de esta dificultad, sí dice que puede haber cambio de lógica, específicamente rivalidad entre lógicas, sin cambio de significado, pues las conectivas en distintas lógicas pueden tener el mismo significado operacional, las mismas reglas de introducción y eliminación (cfr. Paoli 2003: 539).

Esta propuesta enfrenta un problema similar al de la idea de Morton. Que las reglas operacionales para una conectiva sean las mismas en dos lógicas dice que ambas conectivas son el mismo tipo de conectiva (una negación, por ejemplo); incluso puede decirse que el que las conectivas de dos lógicas obedezcan las mismas reglas operacionales implica que las conectivas comparten algún significado común. Sin embargo, ello no garantiza que esas reglas basten para especificar el significado completo de las conectivas, lo cual deja espacio para que haya de hecho un cambio de significado de las conectivas de una lógica a otra si cambian las reglas estructurales. Aunque atractiva, la tesis minimalista tiene todavía tiene

[4] El significado operacional del que se habla en este contexto no es igual al significado operacional del que habla Putnam.

muchas dificultades tanto en su misma enunciación como en la formulación de una propuesta más o menos acabada.

Sostengo que las lógicas internas de los topoi proporcionan un ejemplo de cambio de lógica que no se debe a un cambio de significado en las conectivas, sino a las diferencias en las características de los objetos, características dadas por los morfismos entre los objetos. Así, la caracterización categorista de las conectivas también puede servir para dotar de mayor contenido a la tesis del minimalismo, ayudando a señalar cuáles elementos son relevantes para determinar el significado de las conectivas y cuáles no. No obstante, antes de discutir con detalle la versión categorista de la tesis minimalista es indispensable presentar por lo menos algunos rudimentos de teoría de categorías y de teoría de topoi, que es lo que haré en las secciones II-VI.

II. Nociones básicas de teoría de categorías

En matemática, las funciones, sus propiedades y sus relaciones son tan importantes como los conjuntos. De hecho, en muchos casos, la estructura de un objeto matemático se conoce a través de las relaciones que tenga con otros objetos, relaciones que están dadas precisamente por funciones entre los objetos en cuestión. La teoría de categorías puede ser vista como una "sociología de la matemática" en la que los objetos matemáticos se estudian a través de las relaciones que hay entre ellos. En lo que sigue presentaré algunas características fundamentales de las funciones matemáticas y después presentaré la definición de qué es una categoría.

Toda función de un conjunto A a un conjunto B establece una correspondencia entre los elementos de A y ciertos elementos de B de tal manera que a cada elemento de A le corresponda uno y sólo un elemento de B. Como es usual, denotaré a las funciones con las letras '*f*', '*g*', '*h*', etc. y para expresar que *f* es una función del conjunto C al conjunto D escribiré

$$f\colon C \to D.$$

En este caso C se llama el *dominio* de *f* y D su *codominio*. Si *f* es una función de un conjunto C a un conjunto D y *c* es un elemento de C, $f(c)$ denota el (único) elemento de D que corresponde al elemento *c* bajo la función *f*.

Una consecuencia de este concepto de función es que, para cualquier conjunto dado C, siempre existe una función de C a sí mismo: la función que le asocia a cada elemento *c* de C el elemento *c* mismo, esto es, $f(c) = c$. Dichas funciones suelen llamarse "funciones identidad" y denotarse como id_C ó 1_C, donde el subíndice especifica el conjunto del que se trate. Otra consecuencia del concepto de función es que, dados tres conjuntos C, D y E cualesquiera, si existen dos funciones $f\colon C \to D$ y $g\colon D \to E$ entonces también existe una función de C (el dominio de *f*) a E (el codominio de *g*), la cual suele denotarse como $(g \circ f)\colon C \to E$, y es llamada "*f* seguida de *g*" o "*f* compuesta con *g*".[1] Es preciso enfatizar que para poder componer dos funciones el codominio de una debe ser igual al dominio de

[1] En ocasiones omitiré el signo '$\circ$' y sólo escribiré '*gf*'.

la otra y que, cuando esto es así, $g \circ f$ no siempre es igual a $f \circ g$. Sean los números naturales el dominio y el codominio de dos funciones f y g definidas del siguiente modo: $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^3$. De acuerdo con estas reglas de asociación se puede calcular qué número se le asocia al número 2 mediante la composición $g \circ f$: $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(2 + 5) = g(7) = 7^3 = 343$. Ahora, si la composición es $f \circ g$ se obtiene lo siguiente: $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(2^3) = f(8) = 8 + 5 = 13$, que es diferente a la primera composición.

Supóngase que hay dos funciones f: $C \rightarrow D$ y g: $E \rightarrow F$. Entonces f y g son la misma función si y sólo si (i) C = E y D = F (es decir, f y g tienen el mismo dominio y el mismo codominio); y (ii) para cualquier elemento c del dominio, $f(c) = g(c)$. Ahora, considérese una función f: $C \rightarrow D$ y las funciones identidad de C y D. La composición de la función identidad en C seguida de f tiene como resultado la función f misma: $f \circ 1_C = f$. Piénsese, por ejemplo, en C como un conjunto de estudiantes, en D como un conjunto de pupitres y que la función f le asigna a cada estudiante un asiento; dado que la identidad en el conjunto de estudiantes deja al conjunto tal como está (a Humberto le asigna a Humberto, a Susana le asigna a Susana, etc.) entonces el resultado de aplicar primero la función identidad en C y después la función f es exactamente el mismo que el resultado de aplicar únicamente la función f. También es cierto que $1_D \circ f = f$: considérense la misma función y los mismos conjuntos. Si tras asignar a cada estudiante un asiento se aplica la función identidad al conjunto de pupitres, estos quedan igual (al pupitre a se le asigna el pupitre a, al b el b, etc.); la asignación de pupitres a cada alumno no cambia si después de aplicar f se aplica la función identidad a los pupitres.

Otra propiedad de la composición de funciones es que, dadas tres funciones

$$f: C \rightarrow D, \qquad g: D \rightarrow E \qquad \text{y} \qquad h: E \rightarrow F,$$

la composición de $g \circ f$ seguida de la función h es la misma función que la composición de f seguida de $h \circ g$, esto es, la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Por ejemplo, sean los números naturales el dominio y el codominio de dos funciones f y g definidas como en la página anterior ($f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^3$) y una función h definida del siguiente modo: $f(x) = 2x$. $g \circ f$ puede ser expresada como $g \circ f = (x + 5)^3$ y $h \circ g$ como $h \circ g = 2(x^3)$. Sea $x = 2$, entonces

- $h \circ (g \circ f(2)) = h(g(f(2))) = h((2 + 5)^3) = h(343) = 2(343) = 686$.

- $(h \circ g) \circ f = (h \circ g(f(2))) = 2(f(2)^3) = 2((2 + 5)^3) = 2((7)^3) = 2(343) = 686$.

En lugar de utilizar las nociones de 'conjunto' y 'función (entre conjuntos)', la noción de categoría se define mediante axiomas que involucran los conceptos de 'objeto' y 'morfismo (entre objetos)', los cuales expresan las características esenciales de las funciones señaladas en los párrafos anteriores, pero sin presuponer nada acerca de la naturaleza de dichos objetos con una excepción que será mencionada más adelante.

Una *categoría* **C** consta de una colección Ob(**C**), cuyos miembros son los *objetos* de **C**, y de una colección Mor(**C**), cuyos miembros son los morfismos de **C**, de tal manera que satisfacen las siguientes condiciones:

Morfismos: Para todo par X, Y de objetos en una categoría **C** hay una colección $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ llamada los *morfismos* de X a Y en **C**.[2] Cada morfismo f tiene asociados dos objetos, no necesariamente distintos entre sí, uno de los cuales es llamado "dominio de f" y el otro "codominio de f". Lo anterior se denota $f: X \rightarrow Y$, donde X es el dominio y Y el codominio.

Composición: Para toda tercia X, Y y Z de objetos de **C** hay una función del producto cartesiano $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z)$ llamada "composición de morfismos en **C**". Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$, la composición de f y g se denota $(g \circ f): X \rightarrow Z$. '$(g \circ f)$' y se lee "$f$ seguida de g", "g de f", "g tras f" o también "g (se hace o ejecuta) después de (hacer o ejecutar) f".

[2] El subíndice "**C**" indica de qué categoría se trata y puede omitirse cuando el contexto permite saber cuál es.

Identidad: Para todo objeto X hay un morfismo id_X (ó 1_X) en $\mathrm{Hom}_C(X, X)$, llamado "identidad en X", en el que el dominio y el codominio son el mismo.

La identidad, los morfismos y la composición satisfacen dos axiomas:

Identidad: Para cualquier morfismo $f\colon X \to Y$ de **C**,

$$(id_Y \circ f) = f \quad \text{y} \quad (f \circ id_X) = f.$$

Asociatividad: Para cualesquiera morfismos $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ y $h\colon Z \to W$ de **C**,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Una manera alternativa para expresar determinadas igualdades entre morfismos consiste en afirmar que ciertos *diagramas* conmutan, donde un diagrama consiste en cierta organización de flechas (morfismos) y vértices (objetos) en una categoría dada. Se dice que un diagrama *conmuta* si para cada par A, B de objetos en una categoría dada **C**, cualquier morfismo en **C** de A a B es representada como el mismo morfismo en **C**. Por ejemplo, supongamos que $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$ y $h\colon C \to B$ son morfismos en una categoría dada **C** cuyo diagrama es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

Decir que el diagrama conmuta significa que $h \circ g = f$; este tipo de igualdades serán importantes en otras construcciones.[3] Un ejemplo de diagramas conmutativos lo dan los axiomas para los morfismos identidad, $(id_Y \circ f) = f$ y $(f \circ id_X) = f$, representados a continuación mediante diagramas:

[3] Hay diagramas "externos", como el anterior, particularmente útiles cuando están involucrados varios objetos y morfismos a la vez o cuando algunos detalles de los objetos y morfismos son irrelevantes para lo que se está discutiendo. También hay diagramas "internos" en los cuales se muestran explícitamente ciertos detalles de los morfismos y los objetos (como al querer representar cuántos elementos tiene un conjunto o al querer representar de cuáles elementos del dominio a cuáles del codominio va exactamente cierto morfismo). Por ejemplo, al discutir más adelante la noción de 'subconjunto' utilizaré diagramas internos.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "id_Y"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[ur, "id_X"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Una construcción que será muy importante para el resto de este trabajo es el *producto fibrado*. Sean f: $A \to C$ y g: $B \to C$ dos morfismos cualesquiera de una categoría dada **C**. Entonces un producto fibrado para f y g consiste de un **C**-objeto D y un par de morfismos f_1: $D \to A$ y g_1: $D \to B$ tales que $f \circ f_1 = g \circ g_1$ y para cualesquier **C**-objeto T y cualesquiera **C**-morfismos f_2: $T \to A$ y g_2: $T \to B$, si $f \circ f_2 = g \circ g_2$ entonces existe un único **C**-morfismo h: $T \to D$ tal que $h \circ f_1 = f_2$ y $h \circ g_1 = g_2$. Lo anterior suele expresarse también mediante la afirmación de que el cuadrado del siguiente diagrama conmuta y tiene la propiedad de que si f_2 y g_2 son tales que $f \circ f_2 = g \circ g_2$, entonces existe un único morfismo en C h: $T \to D$ que hace que los dos triángulos a la izquierda del cuadrado también conmuten:

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f"] & \\
T \arrow[urr, "f_2"] \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "g_2"'] & D \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & C \\
 & & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

En 1963, en el congreso de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en Jerusalén, Tarski le preguntó a Lawvere qué es una categoría si no un conjunto de objetos y un conjunto de flechas. Lawvere respondió que mientras que la teoría de conjuntos trata de la relación binaria de pertenencia, la teoría de categorías lo hace con la relación ternaria de composición. Parece que la respuesta satisfizo a Tarski.[4] Pallares explica otra diferencia entre la teoría de conjuntos y la teoría de categorías en términos más ilustrativos:

> Si adoptamos como punto de partida la teoría de conjuntos, es decir, si unificamos las diversas ramas de las matemáticas mediante la noción de 'conjunto', veremos un universo (jerarquizado) habitado únicamente por conjuntos. En particular, veremos

[4] Cfr. Lambek (2004: 157). Sin embargo, según Marquis, Tarski pensaba que Lawvere confundía en su proyecto de fundamentación sintaxis con semántica y matemática con metamatemática.

sólo un tipo de "objeto" matemático. En contraste, si adoptamos como punto de partida los conceptos de 'objeto' y 'morfismo' (tal y como éstos están codificados en los axiomas que definen la noción de 'categoría'), veremos un universo en el que hay dos tipos de entidades, las cuales sin embargo siempre están estructuradas o configuradas de una forma particular, es decir, como 'categorías'. (Pallares 2006: 228s)

Por otro lado, nótese que los axiomas de la teoría de categorías no afirman la existencia de categoría alguna, sino que expresan las condiciones bajo las cuales ciertas entidades dadas constituyen una categoría. Lo único que se presupone acerca de la naturaleza de los objetos que pueden constituir categorías es que cumplan con la existencia del morfismo identidad y que obedezcan su correspondiente axioma. El axioma de identidad puede leerse como la condición de que todo objeto de una categoría sea idéntico a sí mismo.[5] Los conjuntos y las funciones entre ellos forman una categoría, **Conjuntos**. Sin embargo, dado que el concepto de 'objeto' no está caracterizado mediante axiomas y lo único que se requiere para que algo sea un morfismo es que satisfaga las condiciones mencionadas, la definición de categoría admite la posibilidad de que existan categorías cuyos objetos no sean conjuntos en el sentido tradicional de la teoría de conjuntos y cuyos morfismos no sean tampoco funciones entre dichos conjuntos. **Conjuntos** es de hecho una categoría entre muchas otras y los conjuntos son objetos matemáticos entre muchos otros. No obstante, en este trabajo serán muy importantes ciertas categorías llamadas "topoi" muy parecidas, en un sentido a precisar más adelante, a la categoría **Conjuntos**; en la siguiente sección presentaré algunas propiedades de la categoría **Conjuntos** que serán de suma utilidad en el resto del trabajo y que servirán para definir los topoi.[6]

[5] No obstante, también hay intentos de trabajar teorías de categorías sin el axioma de la existencia del morfismo identidad. Véase, por ejemplo, Ageron (2005).

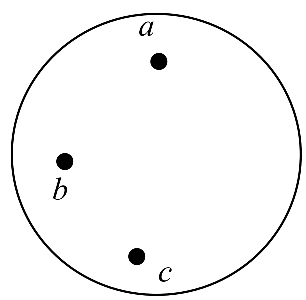
[6] Para las demostraciones de que las categorías de las que hablo en este trabajo son en efecto categorías y que, en otros casos, los ejemplos de categorías con propiedades adicionales tienen en efecto las propiedades que digo que tienen, así como la unicidad de ciertos morfismos, pueden consultarse McLarty (1995) y Mac Lane y Moerdijk (1992).

III. La categoría Conjuntos

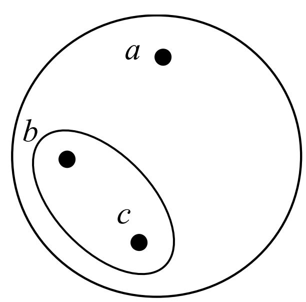
La categoría **Conjuntos** tiene como objetos conjuntos[1] y como morfismos las funciones entre conjuntos. En esta sección presento algunas de las propiedades de esta categoría.

Primero ilustremos cómo es un producto fibrado en la categoría **Conjuntos**. Dadas dos funciones f: $A \to C$ y g: $B \to C$, un producto fibrado para f y g es el conjunto D = $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ junto con las respectivas proyecciones f_1: $D \to A$ y g_1: $D \to B$ tales que $f_1((a, b)) = a$ y $g_1((a, b)) = b$.

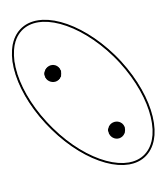
Para elucidar de manera categorista la noción de 'subconjunto' considérese un conjunto Z con tres elementos:



y ahora considérense sólo algunos de los elementos de Z:



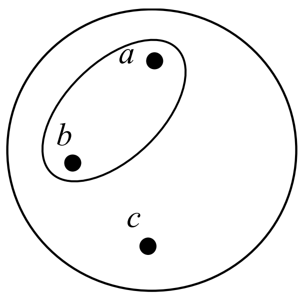
Los elementos indicados en la figura constituyen una *parte* del conjunto Z.[2] Una parte tiene una forma; en este caso la parte indicada es de la forma S:

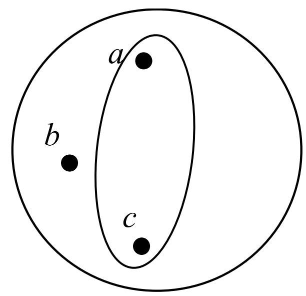
S = 

[1] Conjuntos abstractos constantes, según las distinciones esbozadas en la introducción.

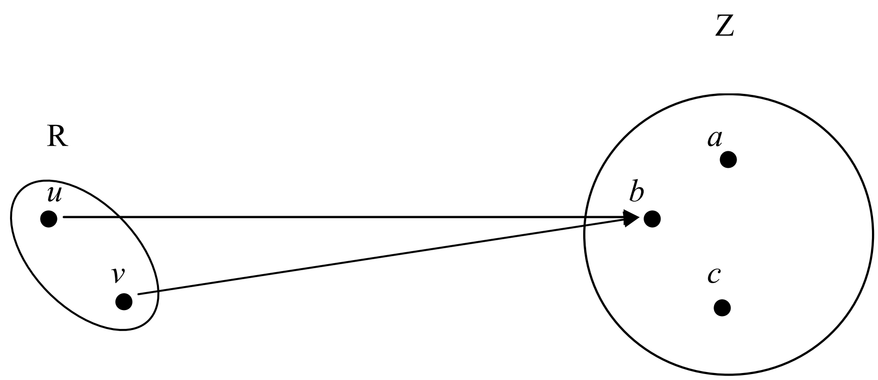
[2] 'Subconjunto' es una noción distinta a 'elemento de un conjunto'. Un elemento de un conjunto C es cualquier objeto terminal de C, esto es, cualquier conjunto unitario, mientras que los subconjuntos pueden tener cualquier número de elementos (incluso cero).

(la parte indicada es un conjunto con dos elementos). Sin embargo, para expresar qué "parte" de Z es exactamente {*b*, c} no es suficiente afirmar que {*b*, c} es una parte con la forma considerada en la figura de arriba, pues las partes indicadas en las siguientes figuras

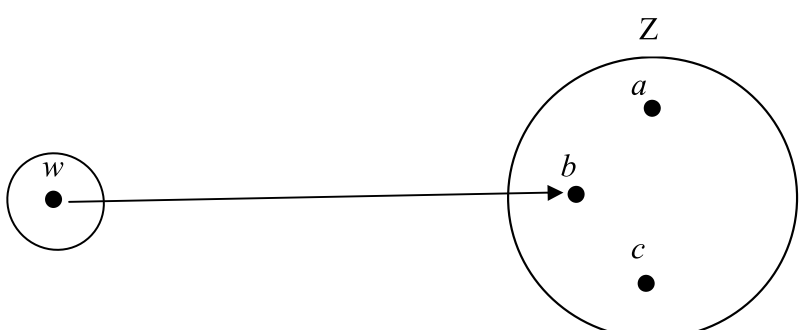




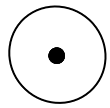
también tienen la forma S pero no son la parte {*b*, c} de Z. Para poder distinguir entre las diversas partes de Z se requiere además de una "función de inclusión" de una parte dada de Z a Z mismo. Por tanto, una *parte* de Z de forma A es una función inyectiva de A a Z. Ahora, sea R un conjunto de la forma S: hay $card(\mathrm{Z})^{card(\mathrm{R})}$ morfismos de R en Z, algunos de los cuales evidentemente no son partes de Z de forma R, como el siguiente:



Denotaré como f: $R \to Z$ a este morfismo que va de R a Z. La parte de Z seleccionada por el morfismo f también puede ser obtenida por otro morfismo g cuyo codominio es Z pero cuyo dominio no es de la forma S:



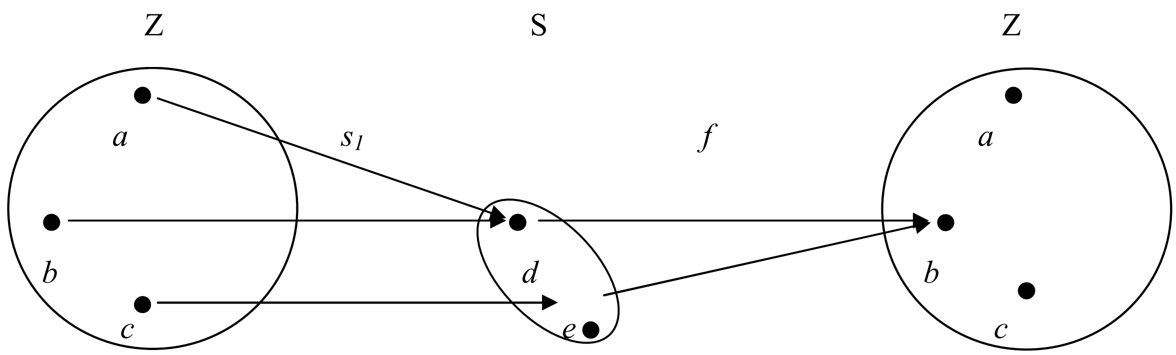
En este caso si T denota la forma

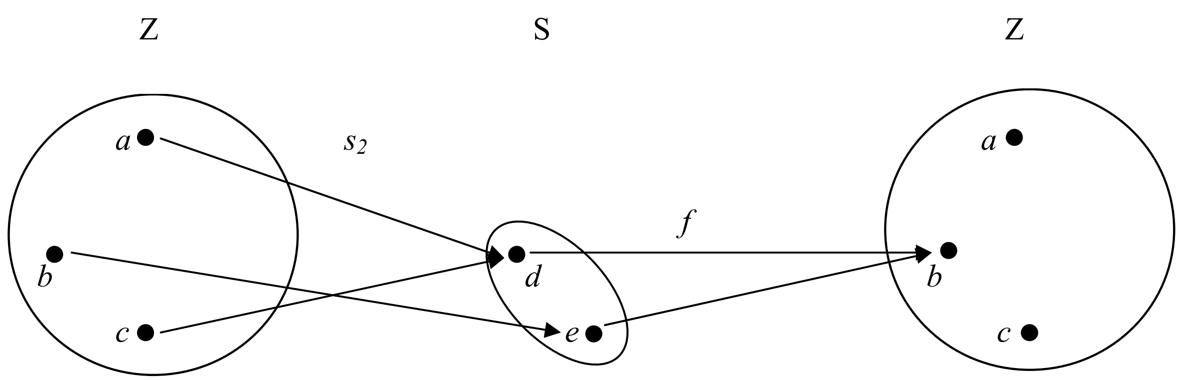


entonces es claro que *b* es una parte de Z de forma T.

Para expresar adecuadamente la noción de 'parte de forma S de un conjunto Z', el morfismo de S a Z debe preservar la distinción de elementos en S. Dichos morfismos en la categoría **Conjuntos** se llaman "funciones inyectivas" y se definen de la siguiente manera: un morfismo i: $F \rightarrow X$ de **Conjuntos** es una *función inyectiva* si para cualquier par de morfismos s_1 y s_2 de X a F, $is_1 = is_2$ implica que $s_1 = s_2$. De una forma contrapositiva, una función i: $F \rightarrow X$ es inyectiva si $s_1 \neq s_2$ implica que $is_1 \neq is_2$.

De acuerdo con esta definición, la función f: $R \rightarrow Z$ no es inyectiva porque hay dos funciones diferentes que, compuestas con f, dan el mismo resultado; dicho de otro modo, aunque $s_1 \neq s_2$, $fs_1 = fs_2$ y por eso f no es inyectiva:





Otro nombre para las funciones inyectivas en teoría de conjuntos tradicional es "funciones uno a uno". En el ejemplo anterior, *f* claramente no es una función uno a uno: ¡es dos a uno! En adelante simbolizaré a las funciones inyectivas con una flecha especial: $i: A \hookrightarrow B$. En ocasiones usaré la expresión '$A\subseteq B$' para referirme al hecho de que A es un subconjunto de B.

Si B es un conjunto tal que para todo objeto A de la categoría **Conjuntos** hay una única función $f: A\to B$ entonces B es un *objeto terminal* en la categoría **Conjuntos**, denotado '**1**'. Un objeto terminal en **Conjuntos** es un conjunto con un solo elemento. Así, un *elemento* de un conjunto dado A es cualquier morfismo $f: \mathbf{1} \to A$, en tanto que un *elemento generalizado* x es cualquier morfismo $x: X\to A$. Si g y h son funciones con igual dominio y codominio, una igualdad entre funciones, denotada "$g = h$", implica que, para todo elemento generalizado x, $g(x) = h(x)$.

Sean A y B dos objetos de **Conjuntos**, $A\times B$ su producto cartesiano y $p_A: A\times B \to A$ y $p_B: A\times B \to B$ las proyecciones.[3] Sean C un objeto de **Conjuntos** y $f: C \to A$, $g: C \to B$ dos funciones. Entonces la función $\langle f, g\rangle: C \to A\times B$ dada por $\langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$ para todo elemento c de C, es la única función que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "{\langle f, g\rangle}"] \arrow[drr, "g"'] & A\times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Por tanto, **Conjuntos** tiene *productos binarios*, los cuales constituyen la versión categorista de la noción de 'producto cartesiano'. También puede definirse la noción de 'producto de funciones' como sigue: sean A, B, C y D conjuntos y dos funciones $f: A\to C$ y $g: B\to D$. El producto de f y g, denotado "$f\times g$: $A\times B \to C\times D$" es la función dada por $f\times g\ ((a, b)) = (f(a), g(b))$ y es la única función que hace que el siguiente diagrama conmute:

[3] La proyección $p_A: A\times B \to A$ es una función que a cada par $\langle a, b\rangle$ de $A\times B$ le asocia el elemento a en A. La proyección $p_B: A\times B \to B$ hace algo similar pero para el elemento b de B.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] & & C & \\
A\times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] \arrow[rrrr, "f\times g"] & & & & C\times D \arrow[ul, "p_C"'] \arrow[dl, "p_D"] \\
 & B \arrow[rr, "g"'] & & D &
\end{tikzcd}$$

Sean f, g: $A\rightarrow B$ morfismos de **Conjuntos**, D = $\{x \in$ A$|$ $f(x) = g(x)\}$ e i: $D\rightarrow A$ el morfismo inclusión en A. Si $x \in$ D entonces $f(i(x)) = f(x) = g(x) = g(i(x))$. Sea C un conjunto y h: $C\rightarrow A$ un morfismo de **Conjuntos** tal que $f \circ h = g\circ h$. Como por hipótesis $f(h(c)) = g(h(c))$ para toda $c \in$ C, entonces $h(c) \in$ D para toda $c \in$ C. Sea k: $C\rightarrow D$ la función dada por $k(c) = h(c)$. Entonces para toda $c \in$ C $(i\circ k)$ $(c) = i$ $(k(c))= i$ $(h(c)) = h(c)$ y por lo tanto $i \circ k = h$. Más aún, k: $C\rightarrow D$ es la única función tal que $i\circ k = h$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
 & C \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se dice entonces que el conjunto D junto con la función i: $D\rightarrow A$ es un *igualador para f y g*.

Sea $\varnothing$ el conjunto vacío. Como para todo objeto A de **Conjuntos** existe una única función f: $\varnothing \rightarrow A$ se dice que $\varnothing$ es un *objeto inicial* en **Conjuntos** y por lo tanto que **Conjuntos** tiene *objeto inicial*.

Sean A y B conjuntos. Un *coproducto* o *suma para* A *y* B está dado por un conjunto C y por dos funciones i_A: $A\rightarrow C$ y i_B: $B\rightarrow C$ con la siguiente propiedad. Para cualquier conjunto D y cualesquiera funciones f:A$\rightarrow$D y g:B$\rightarrow$D hay exactamente una función h: $A+B\rightarrow D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A+B \arrow[r, "h"] & D \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Un coproducto para dos conjuntos dados A y B está dado por ejemplo, por el conjunto A+B = $\{(x, 0) \mid x \in A\} \cup \{(y, 1) \mid y \in B\}$ y por las funciones i_A: $A \to A+B$ y i_B: $B \to A+B$ definidas como $i_A(x) = (x, 0)$ para cada $x \in A$ e $i_B(y) = (y, 1)$ para cada $y \in B$.

Sean f, g: $A \to B$ morfismos de **Conjuntos** y S = $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \subseteq B \times B$ un conjunto. Considérese una relación R de equivalencia en B tal que (i) $S \subseteq R$ y (ii) si T es una relación de equivalencia en B tal que $S \subseteq T$ entonces $R \subseteq T$. Sea D = B/R = $\{[b] \mid b \in B\}$ el conjunto de clases de equivalencia bajo S y f_R: $B \to D$ dada por $f_R(b) = [b]$. Sea $a \in A$, entonces $f_R(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = f_R(g(x))$. Por tanto $f_R \circ f = f_R \circ g$. D junto con la función f_R es el coigualador de f y g, el conjunto cociente de A en el que se identifican dos elementos $f(x)$ y $g(x)$ con f, g: $A \to B$, si para todo objeto C y morfismos h: $B \to C$, k: $D \to C$ el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "f_R"] \arrow[dr, "h"'] & & D = B/R \arrow[dl, "k"] \\
& & C &
\end{tikzcd}
$$

Para dos conjuntos dados A y B, el conjunto B^A de funciones de A a B, llamado "exponencial", y la función e: $B^A \times A \to B$ llamada "evaluación" tienen la siguiente propiedad. Para cualquier conjunto D y cualquier función dada g: $A \times D \to B$, hay exactamente una función $[g]$: $D \to B^A$ tal que $g = f \circ (1_A \times [g])$:

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B^{A} \arrow[dr, "f"] & \\
A\times D \arrow[ur, "1_A \times [g]"] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

Sea **2** un conjunto con dos elementos 0 y 1, $\boldsymbol{1} = \{0\}$ un objeto terminal en **Conjuntos** y v: $\boldsymbol{1} \to \Omega$ la función dada por $v(0) = 1$. Sean A un conjunto, S un subconjunto de A e i: $S \hookrightarrow A$ la función de inclusión. Sea χ_S: $A \to \mathbf{2}$ la función dada por $\chi_S(a) = 1$ si y sólo si $a \in$ S. Entonces χ_S, llamada "función característica de S", es la única función tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "\chi_S"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "v"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}
$$

donde '!' denota a la única función que hay de un conjunto S a un objeto terminal. De manera más general, dados un conjunto y una función inyectiva (es decir, un monomorfismo en **Conjuntos**) m: $M \to$A, la función χ_M: $A \to \mathbf{2}$ dada por $\chi_M(a) = 1$ si y sólo si existe $x \in M$ tal que $m(x) = a$ es la única que hace que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "\chi_M"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "v"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}
$$

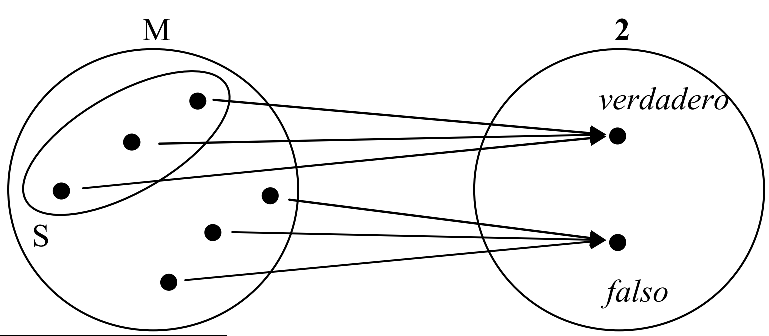
sea un producto fibrado. Se dice entonces que el conjunto **2** junto con la función *v*: ***1*** → ***2***, función llamada "verdadero", es un *clasificador de subobjetos* en la categoría **Conjuntos**. Análogamente, puede introducirse un morfismo llamado "falso" definido como sigue:

falso: ***1*** → ***2*** es la única función hace que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "falso \overset{\text{def}}{=} \chi_{0_1}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}
$$

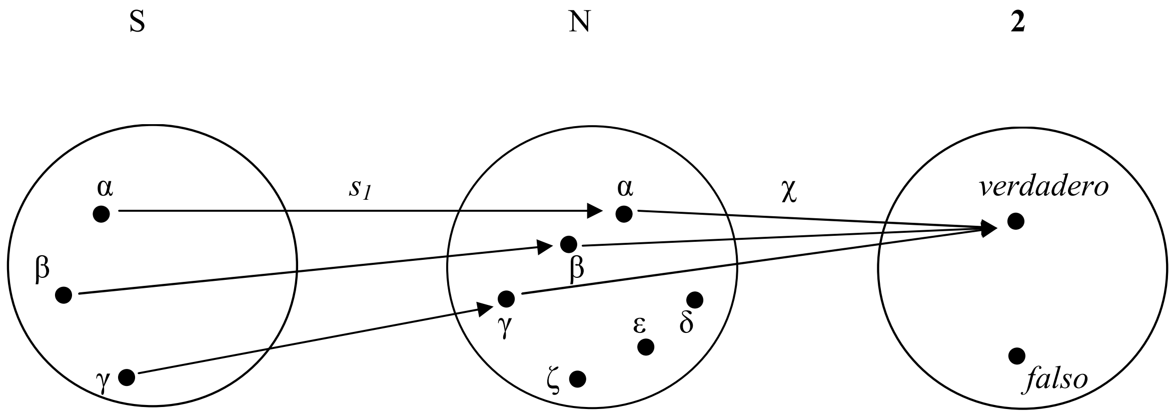
sea un producto fibrado, donde *falso*(0) = 0 y 0_1 es la única función que hay de un objeto inicial en **Conjuntos** a un objeto terminal.

El que un conjunto con dos elementos, digamos 1 y 0, junto con la función *verdadero*: ***1*** → ***2*** dada por *verdadero*(0) = 1 sea un clasificador de subobjetos en **Conjuntos** implica que en esta categoría no hay "grados de pertenencia" a un subconjunto S de un conjunto dado A: dado un elemento éste simplemente pertenece o no pertenece al subconjunto. La situación de la clasificación de subconjuntos en **Conjuntos** es tal que los elementos de un conjunto dado M, sólo tienen, con respecto a un subconjunto S del conjunto dado, dos opciones: o están contenido en el subconjunto o no lo están:[4]

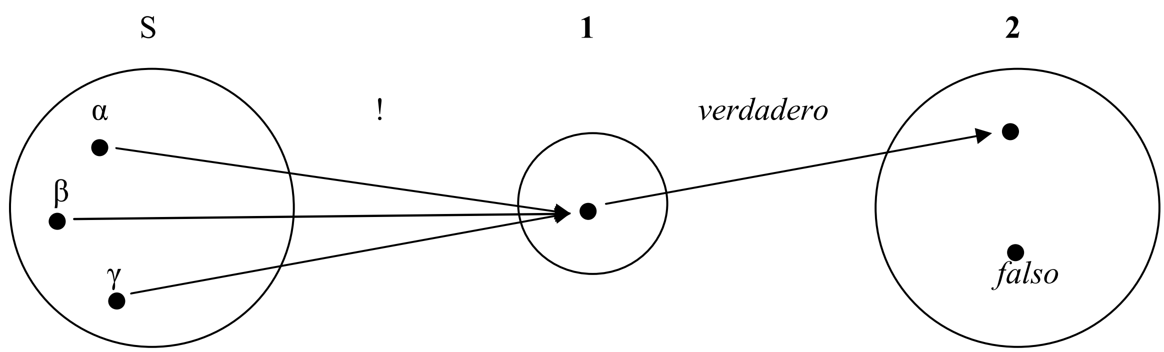


[4] Es por esto que al clasificador de subobjetos llamársele "objeto de valores de verdad" y que **Conjuntos** es bivalente, pues su clasificador sólo tiene dos elementos.

Considérese un conjunto N con seis elementos y un subconjunto S de M con tres elementos:



Una propiedad fundamental del morfismo de N a **2** es que la composición $\chi \circ s_1$ es igual a la siguiente composición:



esto es, en ambas composiciones los tres elementos de S al final son enviados al mismo elemento de **2** (a *verdadero*).

IV. Los topoi

Las propiedades de la categoría **Conjuntos** presentadas en la sección anterior pueden formularse en general para cualquier categoría como expongo a continuación.

Sea **C** una categoría dada. Un objeto B de **C** es un *objeto terminal* si para cada objeto A de **C** hay exactamente un morfismo $f: A \to B$. Un objeto terminal suele denotarse '**1**'.[1] Un objeto D de **C** es un *objeto inicial* si para cualquier objeto E hay un único morfismo $f: D \to E$. Un objeto inicial suele denotarse '**0**'. Llamaré "elemento" a cualquier morfismo $f: \mathbf{1} \to A$ y "elemento generalizado" a cualquier morfismo $x: X \to A$.

Si g, $h: A \to B$ son morfismos en una categoría dada, la igualdad $g = h$ implica que, para todo elemento generalizado x de A, $g \circ x = h \circ x$.

Un objeto $B_1 \times B_2$ de una categoría **C** junto con un par de morfismos $p_1: B_1 \times B_2 \to B_1$ y $p_2: B_1 \times B_2 \to B_2$ es un *producto* (*binario*) para B_1 y B_2 si para cada **C**-objeto D y cada par de morfismos $f_1: D \to B_1$ y $f_2: D \to B_2$ dados hay exactamente un morfismo $f: D \to A$ para el cual se cumple que $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. Lo anterior se resume mediante el siguiente diagrama conmutativo:[2]

$$\begin{tikzcd}
 & & B_1 \\
D \arrow[rru, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, "f_2"'] & B_1 \times B_2 \arrow[ru, "p_1"'] \arrow[rd, "p_2"] & \\
 & & B_2
\end{tikzcd}$$

---

[1] En la sección anterior usé el signo '**1**' para referirme a un objeto terminal en la categoría **Conjuntos.** En adelante usaré ese signo para referirme a un objeto terminal de una categoría dada y, si el contexto no ayuda a distinguir entre objetos terminales de diferentes categorías, mediantes un subíndice expresaré a qué categoría pertenece un objeto terminal. Algo similar haré con otras notaciones, como '**0**', '$S \hookrightarrow A$' o el signo '**Ω**' para un objeto inicial, un monomorfismo o para un clasificador de subobjetos, respectivamente, en una categoría dada. Por ejemplo, si es necesario desambiguar o tener claro a qué categoría **C** pertenece cierto clasificador de subobjetos, escribiré "Ω_C".

[2] La semejanza en los diagramas para el producto y el producto fibrado puede hacer pensar que éste último es sólo una manera de "añadir algo" al producto, cuando en realidad parten de situaciones diferentes: el producto se define para *parejas de objetos* (objetos que pueden ser a su vez morfismos); el producto fibrado se define para *parejas de morfismos*.

Los morfismos p_1 y p_2 se llaman “morfismos proyección” (primera y segunda proyección, respectivamente). El morfismo f: $D \rightarrow A$ también suele denotarse como $<f_1, f_2>$: $D \rightarrow A$.[3]

Sean A, B, C y D objetos de una categoría y f: $A \rightarrow C$ y g: $B \rightarrow D$ dos morfismos de esa misma categoría. El *producto de los morfismos* f y g es el único morfismo $f\times g$: $A\times B \rightarrow C\times D$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "f"] & C & \\
A\times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] \arrow[rrr, "f\times g"] & & & C\times D \arrow[ul, "p_C"'] \arrow[dl, "p_D"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & D &
\end{tikzcd}$$

es decir, $f\times g = <f \circ p_A, g\circ p_B>$.

Sean f, g: $A\rightarrow B$ morfismos de una categoría dada **C**. Un *igualador* en **C** para f y g está dado por un objeto D y un morfismo i: $D\rightarrow A$ de **C** con las siguientes dos propiedades: **(1)** $f \circ i = g\circ i$; y **(2)** para cualquier morfismo dado h: $C\rightarrow A$ de **C**, si $f \circ h = g\circ h$ entonces hay exactamente un morfismo en **C** k: $C\rightarrow D$ para el cual $h = i\circ k$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& C \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considérese ahora un par de objetos A y B cualesquiera de una categoría dada **C**. Un *coproducto para A* y B en **C** está dado por un objeto A+B y dos morfismos i_1: $A \rightarrow$ A+B y i_2: $B \rightarrow$ A+B de **C** con la siguiente propiedad: para cualquier objeto D y cualquier par de morfismos f: $A \rightarrow D$ y g: $B \rightarrow D$ de **C**, hay exactamente un morfismo h: A+B $\rightarrow D$ que satisface $h\circ i_A = f$ y $h\circ i_B = g$.

[3] En el capítulo 2, tratando de la lógica, indicaré cómo con esta definición de ‘producto’, se puede mostrar que un producto para dos conjuntos, cada uno de los cuales tiene dos elementos, es un conjunto con cuatro elementos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A+B \arrow[r, "h"] & D \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se dice que una categoría dada "tiene productos (coproductos) binarios" si hay un producto (coproducto) para cualesquiera dos objetos de esa categoría.

Sean f, g: $A \rightarrow B$ morfismos de una categoría **C** dada. Un objeto C de **C** junto con un morfismo j: $B \rightarrow D$ de **C** es un *coigualador* en **C** para f y g si (1) $j \circ f = j \circ g$; y (2) para cualquier objeto D y cualquier morfismo h: $B \rightarrow C$ de **C**, si $h \circ f = h \circ g$, entonces existe un único morfismo k: $D \rightarrow C$ en **C** tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "h"'] & & C \arrow[dl, "k"] \\
& & C &
\end{tikzcd}$$

Dados dos objetos A y B en una categoría **C** con productos binarios, un *exponencial en **C** para A y B* está dado por un objeto B^A (llamado *objeto de morfismos en **C** de A a B*) junto con un morfismo f: $C \times A \rightarrow B$ de **C** (llamado *morfismo evaluación*) con la propiedad de que, para cada objeto D y cada morfismo g: $A \times D \rightarrow B$, hay exactamente un morfismo $[g]$: $D \rightarrow C$ tal que $g = f \circ (1_A \times [g])$.

$$\begin{tikzcd}
& A \times C \arrow[dr, "f"] & \\
A \times D \arrow[ur, "1_A \times [g]"] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Sea **C** una categoría dada y i: $F \rightarrow X$ un morfismo de **C**. Se dice que i es un *monomorfismo en* **C** si para cualquier par de morfismos s_1 y s_2 de X a F, $is_1 = is_2$ implica que $s_1 = s_2$. De una forma contrapositiva, un morfismo i: $F \rightarrow X$ es un monomorfismo si

$s_1 \neq s_2$ implica que $is_1 \neq is_2$. En lo que sigue simbolizaré a los monomorfismos con una flecha especial: i: $A \hookrightarrow B$.

Sean S y Z dos objetos de una categoría dada. Un *subobjeto i de* Z *con forma* S *es* un monomorfismo *i* de S a Z. Por lo tanto, un subobjeto *i* de Z con forma S preserva la distinción de elementos (generalizados) de S.

Sea O un objeto de una categoría dada **C** y sean i: $S \hookrightarrow O$ un subobjeto de O (de forma S) y x: $X \to O$ un elemento (generalizado) de O. Se dice que *x está en el subobjeto i*, simbolizado como '$x \in i$', si hay algún morfismo h: $X \to S$ en **C** tal que $x = i \circ h$. Dados dos subobjetos de O, i: $S \hookrightarrow O$ y j: $T \hookrightarrow$ O, se dice que *i es anterior (menor) o igual a j*, simbolizado '$i \leq j$', si hay algún morfismo g: $S \to T$ de **C** tal que $i = j \circ g$.

Un *clasificador de subobjetos* en una categoría **C** con objeto terminal y productos fibrados es un objeto Ω de **C** con un morfismo *verdadero*: $\mathbf{1} \to \Omega$ tal que para cualquier monomorfismo i: $S \hookrightarrow A$ hay un único morfismo χ_i: $A \to \Omega$ llamado "morfismo característico de *i*" tal que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "\chi_i"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde '!' denota al único morfismo de S a **1** que por hipótesis existe en **C**.

Un clasificador de subobjetos en una categoría dada **C** tiene la siguiente propiedad: si O es un objeto de **C** e i: $S \hookrightarrow O$ es cualquier subobjeto de O, entonces hay exactamente un morfismo χ_S: $O \to \Omega$ tal que para todo t: $\mathbf{1} \to O$, $t \in i$ si y sólo si $\chi_S \circ t = verdadero$. Dicho sucintamente, un clasificador de subobjetos (Ω, *verdadero*: $\mathbf{1} \to \Omega$) en una categoría **C** (con objeto terminal y productos fibrados) nos dice, para cualquier objeto O de **C** y cualquier parte de O de forma S, qué elementos de O están incluidos en la parte S. Un clasificador de subobjetos en una categoría dada **C** también tiene la propiedad de que si f: $O \rightarrow \Omega$ es un morfismo **C**, entonces f es el morfismo característico de algún otro morfismo i: $S \hookrightarrow O$.

También puede introducirse un morfismo llamado "falso", análogo al morfismo *verdadero*, definido como sigue:

falso: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$ es el (único) morfismo hace que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "falso \overset{\text{def}}{=} \chi_{0_1}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

sea un producto fibrado.

Ciertas categorías, llamadas "topoi", se consideran muy parecidas a la categoría **Conjuntos** en el sentido de que sus objetos pueden considerarse como cierto tipo de "conjuntos generalizados" y sus morfismos y construcciones pueden verse como funciones y construcciones conjuntistas apropiadamente generalizadas.[4] La noción de 'topos' puede definirse de muchas maneras equivalentes. Para mis propósitos estará bien considerar la siguiente. Un *topos* es una categoría $\mathcal{E}$ con:

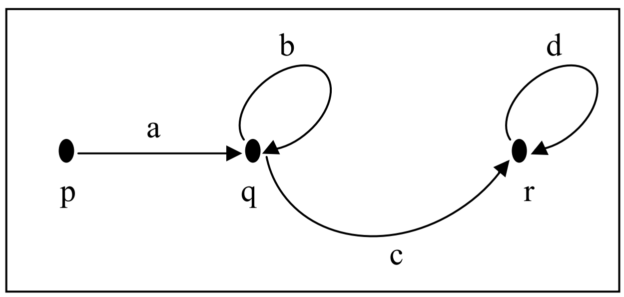
- *Objeto terminal*, **1**;
- *Objeto inicial*, **0**;
- *Productos binarios*, X×Y;
- *Coproductos binarios*, X+Y;

[4] Esto es sólo una manera de elucidar qué es un topos; de esto no debe inferirse que la noción de 'topos' en la práctica matemática surgió intentando generalizar la de 'conjunto'. Al respecto véase McLarty (1990).

- *Igualadores*,
- *Coigualadores*,
- *Exponenciales*, Y^X;
- *Clasificador de subobjetos*, (Ω, *verdadero*: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$).

La categoría **Conjuntos** tiene estas características, algunas de las cuales se presentaron explícitamente en la sección anterior, de ahí que **Conjuntos** sea un topos. Pero **Conjuntos** no es el único topos; quizá ni siquiera sea el más importante ni el más interesante.[5] Aquí consideraré sólo otro más, $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$, el topos cuyos objetos son las gráficas (irreflexivas dirigidas).[6]

Cualquier gráfica tiene una representación del siguiente tipo:



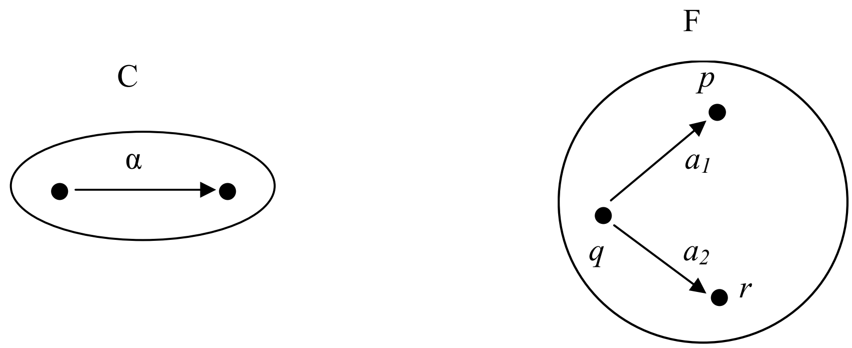
Un objeto G de $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ está dado por un par de conjuntos (A_G, P_G) y por un par de funciones s_G: $A_G \rightarrow P_G$ y t_G: $A_G \rightarrow P_G$. Los elementos de A_G se llaman "flechas" de G y los de P_G "puntos" o "vértices" o "nodos" de G. En la gráfica de arriba, la función s_G aplicada a la flecha *a*, $s_G(a)$, da como resultado el punto *p*, llamado "la *salida* de *a*"; y $t_G(a)$ = q se llama "la *llegada* de *a*". En la gráfica de arriba el conjunto P_G tiene tres elementos: p, q y r. El conjunto A_G tiene cuatro: a, b, c y d. Por último, las funciones s_G: $A_G \rightarrow P_G$ y t_G: $A_G \rightarrow P_G$ están dadas por $s_G(a)$ = p, $s_G(b)$ = q, $s_G(c)$ = q, $s_G(d)$ = r; $t_G(a)$ = q, $t_G(b)$ = q, $t_G(c)$ = r y

[5] ¡Y lo mismo aplica para los topoi respecto a las categorías en general! Quizá matemáticamente los topoi no sean las categorías más importantes ni las más interesantes pero, como trato de mostrar en este trabajo, sirven muy bien para ilustrar qué puede aportar el tratamiento categorista a algunos problemas filosóficos.

[6] Omitiré la prueba de que $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ es una categoría y un topos. Para una breve pero cuidadosa exposición de algunas características de esta categoría véase Vigna (1997).

$t_G(d)$ = r. Los morfismos en esta categoría son mapeos que a cada flecha del dominio con sus respectivas salida y llegada le asignan una flecha en el codominio

¿Qué sería una *subgráfica* de G, esto es, un subobjeto o parte de G = (A_G, P_G, s_G, t_G)? Por la definición de 'parte', una subgráfica debe ser un morfismo de gráficas inyectivo i: $X \hookrightarrow G$, es decir, un morfismo de gráficas que además preserve la diferencia de los elementos de X.[7] Como en este caso X y G son gráficas, entonces no sólo diferentes vértices de G deben corresponder a diferentes vértices de X, sino que diferentes flechas de G deben corresponder a diferentes flechas de X. Considérense las siguientes gráficas:

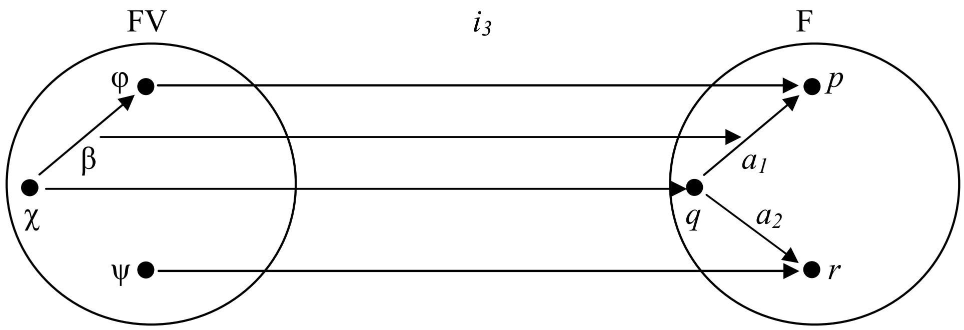


Hay dos subgráficas de F con forma C, a saber, i_1: $C \hookrightarrow F$ e i_2: $C \hookrightarrow F$ definidas como sigue:

$$i_1(s(\alpha)) = q,\ i_1(t(\alpha)) = p,\ i_1(\alpha) = a_1$$
$$i_2(s(\alpha)) = q,\ i_2(t(\alpha)) = r,\ i_2(\alpha) = a_2$$

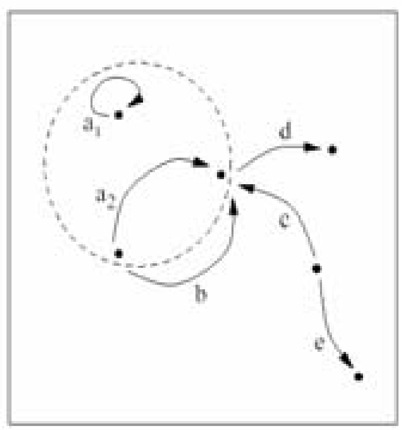
Por supuesto i_1 e i_2 no son las únicas partes o subgráficas de F. Otra subgráfica de F está dada por FV junto con el monomorfismo i_3: $FV \hookrightarrow F$, el cual está definido como $i_3(\chi) = q$, $i_3(\varphi) = p$, $i_3(\beta) = a_1$, $i_3(\psi) = r$, como se muestra a continuación:

[7] Como ya se dijo, un elemento en una categoría dada es un morfismo x: $\mathbf{1} \to X$; en la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ un objeto terminal es, por supuesto, un objeto O tal que para todo objeto G haya exactamente un morfismo $G \to O$. En la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$, la gráfica es un objeto terminal; el vértice desnudo no puede ser un objeto terminal porque no es cierto que para toda gráfica G haya un y sólo un morfismo de gráficas de G al vértice: si G contiene flechas entonces a éstas nada puede asignárseles en la gráfica que consiste de un vértice desnudo.



El morfismo i_4: $FV \rightarrow \boldsymbol{F}$, con $i_4(\chi) = q$, $i_4(\varphi) = r$, $i_4(\beta) = a_2$, $i_4(\psi) = r$ no es un morfismo inclusión en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$, pues a dos puntos distintos de FV (a saber, φ y ψ) i_4 les asigna el mismo punto en F (r).[8]

Ahora considérese la gráfica H:

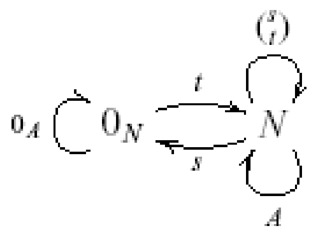


El subobjeto de H indicado con la línea punteada, que llamaré S, consiste claramente al menos de dos flechas: la flecha a_1 y la flecha a_2. Pero, ¿la flecha b está en S? La flecha b consiste no sólo de la flecha, sino también de su salida y su llegada, que sí están en S (son también la salida y la llegada de a_2), por lo que parece que habría que encontrar una manera de decir que aunque la flecha b no forma parte del todo de S, su salida y su

[8] Si una gráfica está dada por dos conjuntos, el de flechas y el de puntos o vértices, tal que a cada flecha le corresponden dos puntos, uno que es su salida y otro su llegada, entonces no puede haber gráficas que consten de "flechas desnudas" (flechas sin sus vértices de salida y llegada), pero nada obsta para que haya gráficas que consten sólo de puntos. Si una gráfica requiere que a toda flecha se le asignen sus vértices, entonces una gráfica que conste sólo de vértices satisface por vacuidad la condición.

llegada sí lo son, porque decir que b no es un subobjeto de S podría hacer pensar que todo el subobjeto b está fuera de S.

A diferencia de la clasificación de subobjetos en **Conjuntos**, en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ deben entonces examinarse más de dos casos. Un clasificador de subobjetos para $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ (que denotaré '$\Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$') tiene la siguiente forma:



Un clasificador de subobjetos para $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ consta de dos vértices (0_N, N) y cinco flechas (0_A, t, s, $\binom{s}{t}$, A). Nótese que 0_N es tanto la salida como la llegada de 0_A; así mismo, es la salida tanto de t como de s. N es la salida y la llegada de A y de $\binom{s}{t}$, así como la llegada de t y s.

Dada una subgráfica $m\colon S \hookrightarrow G$, el morfismo clasificador $\chi_m\colon G \to \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$ se comporta como sigue:

- Los vértices que no están en S son mapeados a 0_N, *falso para vértices*;
- Los vértices que están en S son mapeados a N, *verdadero para vértices*;
- Si una flecha no está en S se tienen cuatro posibilidades:

– si su salida y su llegada tampoco están en S entonces s mapeada a 0_A, *falso para la flecha y sus vértices*;

– si su salida está en S pero la llegada no entonces es mapeada a s, *falso para la flecha pero verdadero para su salida*;

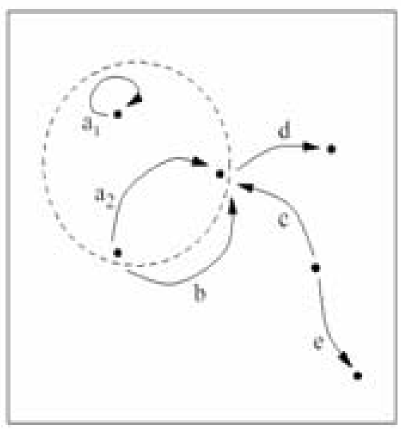
– si su llegada está en S pero la salida no entonces es mapeada a t, *falso para la flecha pero verdadero para su llegada*;

– si tanto su salida como su llegada en S entonces es mapeada a $\binom{s}{t}$, *falso para la flecha pero verdadero para sus vértices*;

- Por último, una flecha en S se mapea a A, *verdadero para la flecha (y para sus vértices)*.

En otras palabras, las posibilidades para los vértices sólo son dos (un vértice está o no está en cierta subgráfica). Sin embargo, la situación de las flechas es, se dice, más variada, pues hay cinco flechas en $\Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$ para asignar, dependiendo de la asignación de su salida y de su llegada. Será importante tener en cuenta que el morfismo *verdadero* en la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ es el morfismo A: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$ y que el morfismo *falso* es 0_A: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$.

Ahora, el mapeo correspondiente a la gráfica H y su subobjeto S indicado con la línea punteada



es el siguiente (omito la asignación de los vértices pues los vértices de a_1 y a_2 son mapeados a N y todos los demás 0_N):

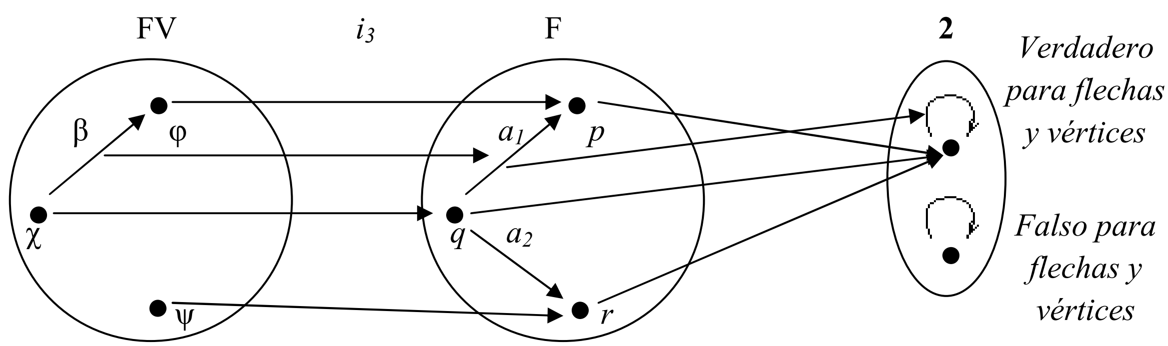
$\chi_m(a_1) = m(a_2) = A$ $\qquad\qquad$ $\chi_m(c) = t$

$\chi_m(b) = \binom{s}{t}$ $\qquad\qquad$ $\chi_m(d) = s$

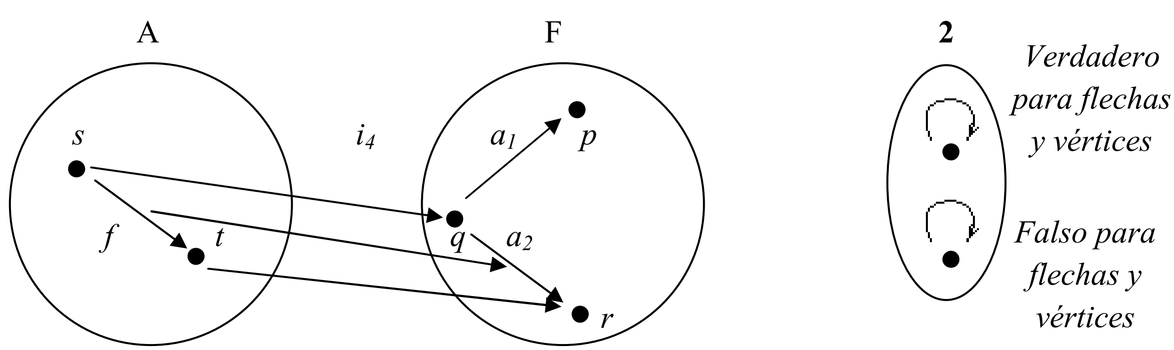
$\chi_m(e) = 0_A$

¿Por qué en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ una flecha no se clasifica como se clasifican los elementos de **Conjuntos**, esto es, simplemente como estando o no estando en la subgráfica? Casi ningún texto de teoría de categorías, ni siquiera elemental, muestra explícitamente por qué en ciertos topoi un objeto con dos elementos no es un clasificador de subobjetos, como sí sucede en **Conjuntos**. La razón es sencilla y $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ será útil para explicarla. Sean *FV* y *F* gráficas e i_3: $FV \hookrightarrow F$ un morfismo de $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ tal y como se muestra en la figura de abajo. Sea **2** en $S^{\downdownarrows}$ la gráfica

y supóngase que en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ (**2**, *verdadero*: $\boldsymbol{1} \to \boldsymbol{2}$) es un clasificador de subobjetos. Entonces la clasificación de la subgráfica de F de forma FV se haría del siguiente modo:



Pero habría un problema al clasificar el siguiente subobjeto:



Recuérdese que para cualquier t: $T \to O$, t está incluido en un subobjeto (S, i) de O si y sólo si $\chi_S \circ t$ = *verdadero*. Aplicando un par de contrapositivas se tiene que para cualquier t: $T \to O$, t no está incluido en un subobjeto (S, i) de O si y sólo si $\chi_S \circ t \neq$ *verdadero*. El único morfismo diferente a *verdadero* (*para flechas y vértices*) en este clasificador hipotético sería *falso para flechas y vértices*. Por lo tanto a_2 debería mapearse a la flecha de *falso*, pero cualquier opción de mapeo para los vértices de a_2 sería indeseable: dado que q y r sí están en incluidos en FV entonces deben ser mapeados al vértice del elemento *verdadero*, pero entonces a la flecha a_2 no se le asociarían sus vértices, como debe hacer un morfismo en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$; si q y r se mapean al vértice del elemento *falso* de tal modo que a a_2 se le asocien sus vértices, se concluiría que q y r están y no están incluidos en FV, lo cual no puede ser porque de hecho sí están incluidos en FV. Por lo tanto, la gráfica **2** = $\{\overset{\curvearrowright}{\bullet}, \overset{\curvearrowright}{\bullet}\}$ no funciona como un clasificador de subobjetos en la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$.

V. Lógica de orden cero en los topoi

En la teoría de topoi es posible dar una caracterización de varias nociones lógicas. Como indiqué en la sección anterior, todo topos $\mathcal{E}$ tiene por definición clasificador de subobjetos, el cual consiste de un objeto Ω de $\mathcal{E}$ y de un $\mathcal{E}$-morfismo *verdadero*: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$ con cierta propiedad universal. **Conjuntos** es bivalente, en tanto que $\boldsymbol{S}^{\Downarrow}$ tiene dos valores de verdad para los vértices y cinco para las flechas.[1] El que un objeto Ω y un morfismo *verdadero*: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$ puedan verse como un objeto de valores de verdad para un topos $\mathcal{E}$ posibilita también caracterizar a las conectivas lógicas en $\mathcal{E}$. En esta sección presentaré dicha caracterización, primero para la categoría **Conjuntos** y después para un topos cualquiera; en la sección VI daré algunos ejemplos y presentaré el tema de la lógica interna de los topoi, la cual involucra la ausencia de algunas leyes clásicas en ciertos topoi y la validez de las leyes intuicionistas en todos ellos.[2]

Sea $\mathcal{E}$ un topos y sea (Ω, *verdadero*: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$) un clasificador de subobjetos de $\mathcal{E}$. Las fórmulas de orden cero o *proposiciones* de $\mathcal{E}$ son $\mathcal{E}$-morfismos φ: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$, esto es, las proposiciones son valores de verdad. En **Conjuntos** cada morfismo de **1** (un objeto terminal, un conjunto unitario) al objeto **2** es una proposición, lo cual podría parafrasearse diciendo que en **Conjuntos** cada subobjeto de un conjunto dado es una proposición con un valor de verdad, y que, dado que un clasificador de subobjetos es un conjunto con dos elementos, toda proposición es o verdadera o falsa. Analizaré más detenidamente las funciones de verdad en esta categoría.

Sean φ: $\boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{2}$ y ψ: $\boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{2}$ dos proposiciones en la categoría **Conjuntos**. A cada proposición se le asigna uno de los valores de verdad y, en combinación con las conectivas lógicas (conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\Rightarrow$) y negación ($\neg$)) se forman nuevas proposiciones que reciben valores de verdad de acuerdo con las bien conocidas

[1] Aunque ver al clasificador de subobjetos como un objeto de valores de verdad (cfr. *supra*, nota 20) es algo que no me resulta del todo satisfactorio. Creo que hay una diferencia fundamental entre clasificar subobjetos y otorgar valores de verdad, y por consiguiente entre un clasificador de subobjetos y un objeto de valores de verdad. Sin embargo, discutir este tema queda fuera de los objetivos del presente trabajo y lo reservo para otra ocasión. Por lo pronto, en este trabajo utilizaré la terminología usual.

[2] En esta sección sigo muy de cerca la exposición de Awodey (1996: 223-230).

tablas de verdad para la lógica clásica de orden cero. Esas tablas reflejan los siguientes "morfismos de verdad" en la categoría **Conjuntos** los cuales definiré más abajo:

Negación: $\neg$: $\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2}$

Conjunción: $\wedge$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2}$

Disyunción: $\vee$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2}$

Implicación: $\Rightarrow$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2}$

Dado que estos morfismos tienen codominio **2**, cada una es el morfismo característico de algún subobjeto de su dominio.[3]

En **Conjuntos** las funciones *verdadero* y *falso* tienen las siguientes características:

$$\textit{falso} \leq \varphi \qquad\qquad \varphi \leq \textit{verdadero}$$

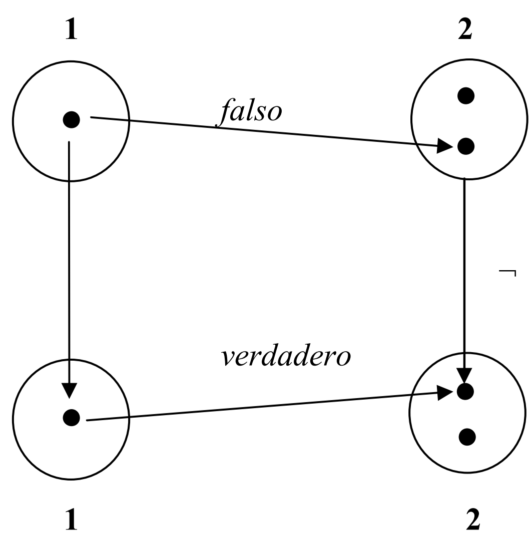
esto es, *falso* es anterior (menor o igual) a cualquier proposición y *verdadero* es posterior (mayor o igual) a cualquier proposición; si '$\leq$' se lee "implica" entonces lo anterior significa que lo falso implica cualquier proposición y que lo verdadero es implicado por cualquier proposición. Teniendo estas características y dado que en **Conjuntos** un conjunto con dos elementos es un clasificador de subobjetos, las conectivas lógicas usuales (una unaria y tres binarias) se definen como sigue:

Negación: Sea *falso*: $\boldsymbol{1} \to \boldsymbol{2}$. Entonces $\neg$: $\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2}$ es por definición la única función que hace que el diagrama

[3] Véase la definición de 'clasificador de subobjetos' para una categoría cualquiera en la sección anterior.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{falso}"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{2} \arrow[d, "\neg \overset{\mathrm{def}}{=} \chi_{falso}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\mathit{verdadero}"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

sea un producto fibrado. Es decir, $\neg = \chi_{falso}$ es la función característica de *falso*, donde *falso* es a su vez la función característica de 0_1: $0 \rightarrow 1$. La negación de una proposición φ se denota como ¬φ y se define como la composición $\neg \circ \varphi$: $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$. De esta definición se sigue que $\neg \circ \varphi$ es la misma función que *verdadero* si y sólo si φ: $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ es la misma función que ⊥, dicho de manera breve, ¬φ = *verdadero* si y sólo si φ = *falso*. Usando un diagrama interno, la negación ¬ es la única función de **2** a **2** que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:[4]



[4] En la siguiente sección mostraré con cierto detalle cómo funciona este morfismo en la categoría **Conjuntos**.

Conjunción: La conjunción $\wedge$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}$ se define como el morfismo característico de $\langle verdadero, verdadero\rangle$: $\boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}$. Es decir, $\wedge$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}$ es por definición la única función tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

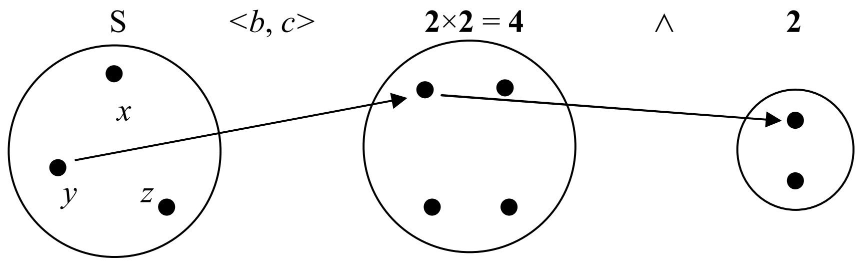
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\langle verdadero, verdadero\rangle"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{2\times 2} \arrow[d, "\wedge \overset{\text{def}}{=} \chi_{\langle verdadero,\, verdadero\rangle}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

Dadas dos proposiciones φ: $\boldsymbol{1}\rightarrow \boldsymbol{2}$ y ψ: $\boldsymbol{1}\rightarrow \boldsymbol{2}$ en **Conjuntos**, la conjunción de φ y ψ se denota como $(\varphi\wedge\psi)$ y se define como la composición $\wedge\circ\langle\varphi, \psi\rangle$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}$. Esta definición implica que $(\varphi\wedge\psi)$ es la misma función que *verdadero* si y sólo las funciones φ y ψ son ambas la misma función que *verdadero*. De manera breve, $(\varphi\wedge\psi)$ = *verdadero* si y sólo si φ = *verdadero* y ψ = *verdadero*.[5]

La función $\wedge$: $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}$ tiene la propiedad de que, para cualesquiera morfismos b: $S \rightarrow \boldsymbol{2}$ y c: $S \rightarrow \boldsymbol{2}$, existe un único morfismo $\langle b, c\rangle$: $S \rightarrow \boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}$ tal que $b\wedge c$ = *verdadero* si y sólo si $\langle b, c\rangle \in \langle verdadero, verdadero\rangle$ (donde $b\wedge c$ se define como la composición $\wedge\circ\langle b, c\rangle$: $S \rightarrow \boldsymbol{2}$), lo que significa que $b\wedge c$ = *verdadero* si y sólo si b = *verdadero* y c = *verdadero*. Considérese la conjunción $b\wedge c$ para un caso particular de la categoría

[5] Como mencioné en la sección II, los productos (A×B) y los coproductos (A+B) categoristas son generalizaciones de los productos y los coproductos conjuntistas. En el caso de **Conjuntos**, si **2** = {*verdadero*, *falso*} entonces **2**×**2** = **4** = {<*verdadero*, *verdadero*>, <*verdadero*, *falso*>, < *falso*, *verdadero*>, <*falso*, *falso*>}.

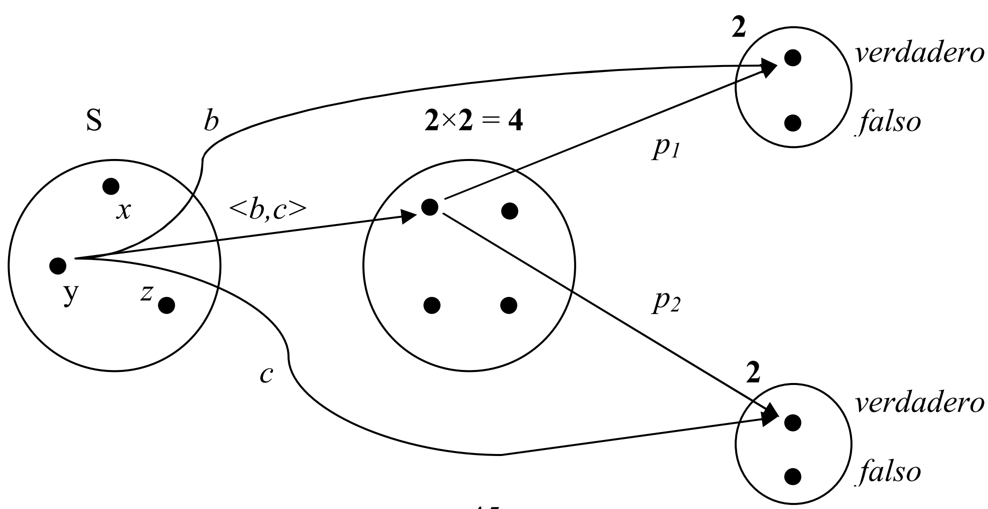
Conjuntos (con $b(x)$ = *verdadero*, $b(y)$ = *verdadero*, $b(z)$ = *falso*; $c(x)$ = *falso*, $b(y)$ = *verdadero*, $b(z)$ = *verdadero*):



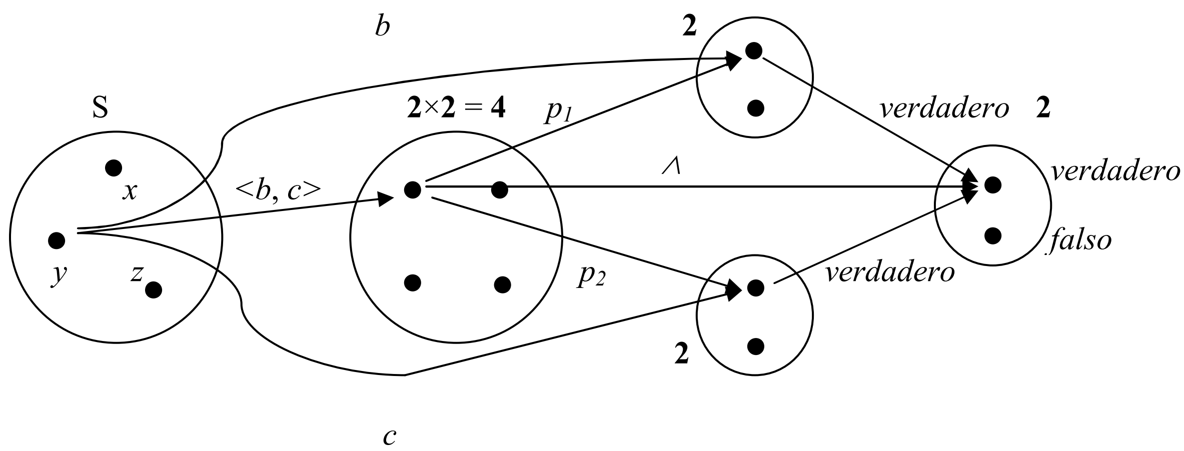
Este diagrama queda más claro si se observa que **4** junto con los morfismos p_1: $\boldsymbol{4} \to \boldsymbol{2}$ y p_2: $\boldsymbol{4} \to \boldsymbol{2}$ es un producto de **2** y **2** en **Conjuntos**, esto es, para cualquier conjunto D y un par de morfismos f_1: $D \to \boldsymbol{2}$ y f_1: $D \to \boldsymbol{2}$ hay exactamente un morfismo f: $D \to \boldsymbol{4}$ para el cual se cumplen $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$. Un caso particular sería cuando D = S, $f_1 = b$, $f_2 = c$ como en el siguiente diagrama externo:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbf{2} \\
S \arrow[urr, "b"] \arrow[r, "<b{,}c>"] \arrow[drr, "c"'] & 2\times2 \arrow[ur, "p_1 = verdadero"'] \arrow[dr, "p_2 = verdadero"] & \\
& & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

o, usando un diagrama interno,



En el siguiente diagrama se hace explícito que $b \wedge c$ = *verdadero* si y sólo si <*b*, *c*> $\in$ <*verdadero*, *verdadero*> (es decir, que $b \wedge c$ = *verdadero* si y sólo si *b* = *verdadero* y *c* = *verdadero*):[6]



No hay que perder de vista que *b*, *c* y <*b*, *c*> son funciones distintas pero que tienen el mismo codominio: recuérdese que como *b* (respectivamente, *c*) es un morfismo que tiene como codominio a un clasificador de subobjetos entonces *b* (*c*) es el morfismo característico de algún otro morfismo i: $B \hookrightarrow S$ (respectivamente, m: $C \hookrightarrow S$). Puesto que <*b*, *c*>(*y*) = <*verdadero*, *verdadero*> debe haber dos elementos $\beta \in$ B y $\gamma \in$ C tales que $i(\beta) = y$ y $m(\gamma) = y$.

Disyunción: Sean

- A = {<1, 0>, <1, 1>} y B = {<0, 1>, <1, 1>},

- $\langle verdadero_2, id_2 \rangle$: $\boldsymbol{2} \to \boldsymbol{2 \times 2}$ una función tal que $\langle verdadero_2, id_2 \rangle(0)$ = $\langle verdadero_2(0), id_2(0) \rangle$ = <1, 0> (con $verdadero_2 = verdadero \circ !_2$) y $\langle verdadero_2, id_2 \rangle(1)$ = $\langle verdadero_2(1), id_2(1) \rangle$ = <1, 1>, con lo que la imagen de $\langle verdadero_2, id_2 \rangle$ es el conjunto A;

[6] Compárese este diagrama con el diagrama general para un producto fibrado en la sección II; así, tal como lo dice la definición, el morfismo $\wedge$: $\boldsymbol{2\times 2} \to \boldsymbol{2}$ es el único morfismo que hace que el rombo del diagrama anterior sea un producto fibrado

- $\langle id_2, verdadero_2 \rangle$: $\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}$ una función tal que $\langle id_2, verdadero_2 \rangle(0) = \langle 0, 1 \rangle$ y $\langle id_2, verdadero_2 \rangle(1) = \langle 1, 0 \rangle$, con lo que la imagen de $\langle id_2, verdadero_2 \rangle$ es el conjunto B.

Sea (A∪B) = {<0, 1>, <1, 0>, <1, 1>} = S y considérese el coproducto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, "\langle verdadero_2, id_2 \rangle"] & & \\
& \mathbf{2}+\mathbf{2} \arrow[r, "f"] & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \\
\mathbf{2} \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, "\langle id_2, verdadero_2 \rangle"'] & &
\end{tikzcd}$$

entonces hay una única función f: $\boldsymbol{2}+\boldsymbol{2} \rightarrow \boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}$ tal que su imagen es A∪B. La función f (= $[\langle verdadero_2, id_2 \rangle, \langle id_2, verdadero_2 \rangle]$) puede escribirse como la composición de un epimorfismo[7] f^* seguido de un monomorfismo g:

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbf{2}+\mathbf{2} \arrow[ur, "f^*"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbf{2}\times\mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2}+\mathbf{2} \arrow[r, "{[\langle verdadero_2, id_2 \rangle, \langle id_2, verdadero_2 \rangle]}"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \arrow[d, "\vee \overset{\text{def}}{=} \chi_{[\langle verdadero_2, id_2 \rangle, \langle id_2, verdadero_2 \rangle]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

[7] e es un *epimorfismo* si, para cualesquiera morfismos t_1 y t_2, $t_1e = t_2e$ implica $t_1 = t_2$.

es un producto fibrado. Así, $\vee$: $\mathbf{2}\times\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ es por definición la función característica de $[\langle verdadero_2, id_2\rangle, \langle id_2, verdadero_2\rangle]$: $\mathbf{2}+\mathbf{2} \to \mathbf{2}\times\mathbf{2}$. Esto implica que $(\varphi\vee\psi)$ = *verdadero* si y sólo si φ = *verdadero* ó ψ = *verdadero*.

Implicación: Considérese el conjunto $\textcircled{\le} = \{<x, y>\in \mathbf{2}\times\mathbf{2} \mid x \le y\} = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 1>\}$, el cual claramente es un subconjunto del conjunto $\mathbf{2}\times\mathbf{2} = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>\}$. En **Conjuntos**, la relación $\le$ (menor o igual que) es un orden parcial entre cuyas características está la de que, para cualesquiera x y y, $x \le y$ si y sólo si $(x\wedge y) = x$. Sea e: $\{<x, y>\in \mathbf{2}\times\mathbf{2} \mid x \le y\}\to\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ el igualador de $\wedge$: $\mathbf{2}\times\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ y la primera proyección de $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ a $\mathbf{2}$. Entonces la implicación se denota como $\Rightarrow$: $\mathbf{2}\times\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ y se define como el único morfismo tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\textcircled{\le} \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{2}\times\mathbf{2} \arrow[d, "\Rightarrow \overset{\text{def}}{=} \chi_e"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\Rightarrow$: $\mathbf{2}\times\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ es la función característica de e: $\textcircled{\le} \hookrightarrow \mathbf{2}\times\mathbf{2}$. El par <1, 0>, que claramente no pertenece a $\textcircled{\le}$, constituye el único caso en el que $(\varphi\Rightarrow\psi)$ = *falso*.[8] Con base en esta definición puede demostrarse que $(\varphi\Rightarrow\psi)$ = *verdadero* si y sólo $((\varphi\wedge\psi) = \varphi)$. Esto último puede ilustrarse fácilmente en el caso de la lógica clásica: en una tabla de verdad, el único caso en el que $s(\varphi\wedge\psi) \neq s(\varphi)$ es el caso en el que $s(\varphi) = 1$ y $s(\psi) = 0$, que es el único caso en el que $(\varphi\Rightarrow\psi) \neq 1$ (i. e. $(\varphi\Rightarrow\psi) = 0$).

[8] Esta situación no es exclusiva de la categoría **Conjuntos** y de hecho se da en cualquier topos.

Las definiciones de las conectivas recién expuestas para la categoría **Conjuntos** pueden generalizarse para un topos cualquiera simplemente considerando el clasificador de subobjetos adecuado en lugar del objeto **2** de la categoría **Conjuntos**. Así, por ejemplo, los siguientes diagramas son productos fibrados en cualquier topos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "falso"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\neg \overset{\text{def}}{=} \chi_{falso}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

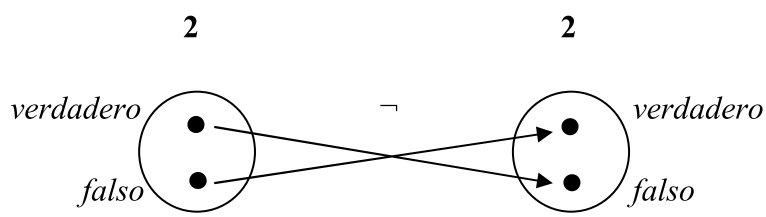
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\langle verdadero, verdadero \rangle"] \arrow[d, "!"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge \overset{\text{def}}{=} \chi_{\langle verdadero, verdadero \rangle}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "verdadero"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Puede establecerse una correspondencia entre la lógica clásica de orden cero y un álgebra booleana, a saber, dicha lógica es un álgebra con dos elementos en la que las operaciones satisfacen ciertas condiciones. Esos dos elementos son los valores de verdad, las operaciones son las conectivas y las condiciones que satisfacen están determinadas por las conocidas tablas de verdad.

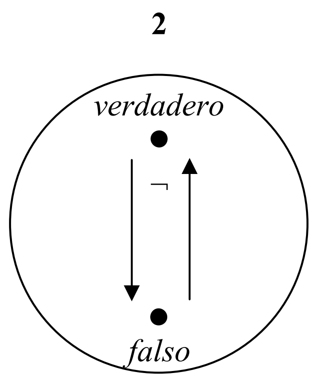
Tomando en cuenta las generalizaciones categoristas sobre los valores de verdad, la lógica de orden cero en un topos $\mathcal{E}$ es el 'álgebra' de morfismos en $\mathcal{E}$ de un objeto terminal a $\mathbf{\Omega}$, colección usualmente denotada '$\mathcal{E}[\mathbf{1}, \mathbf{\Omega}]$', con las definiciones recién dadas de las conectivas. Se dice que $\mathcal{E}$ es booleano si $\mathcal{E}[\mathbf{1}, \mathbf{\Omega}]$ es un álgebra booleana, de ahí que el álgebra de sus valores de verdad sea la lógica clásica; si el álgebra $\mathcal{E}[\mathbf{1}, \mathbf{\Omega}]$ es no booleana entonces el topos $\mathcal{E}$ es no booleano y su lógica es no clásica. A continuación mostraré un ejemplo de topos booleano, **Conjuntos**, y luego mostraré que $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ no es booleano, en particular que en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ $\neg^{\circ}$*falso* $\neq$ *verdadero* y que $\neg^{\circ}\neg^{\circ}$*verdadero* $\neq$ *verdadero*.

VI. Topoi con diferentes lógicas internas

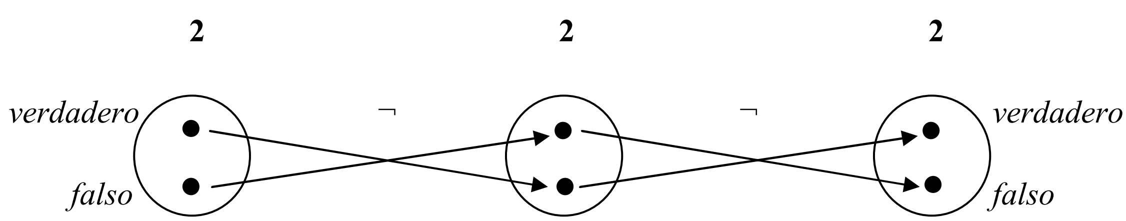
Un morfismo negación tiene como dominio y codominio al clasificador de subobjetos; en el caso de la categoría **Conjuntos** es el morfismo ¬: ***2→2*** que cumple la condición especificada en la sección anterior. Un diagrama interno para este morfismo sería el siguiente:



o el siguiente:[1]



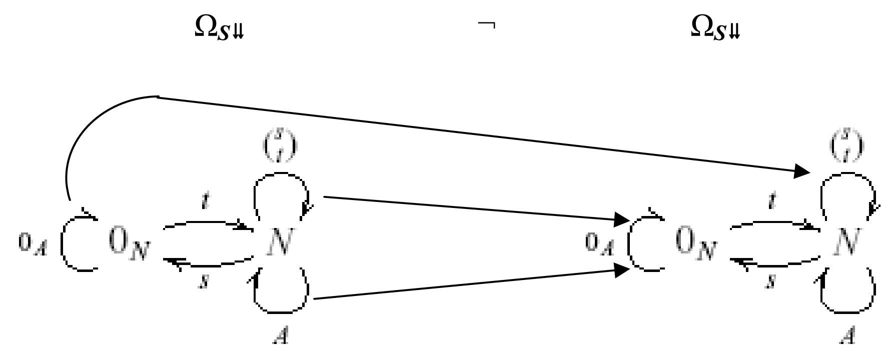
Así, en el caso de **Conjuntos**, *verdadero* = $\neg\circ$*falso* y *falso* = $\neg\circ$*verdadero*. Por otro lado, como puede verse en los siguientes diagramas, $\neg\circ\neg\circ$*verdadero* = *verdadero* y $\neg\circ\neg\circ$*falso* = *falso*:



[1] Omito la prueba de que este morfismo es el único que hace que el diagrama correspondiente sea un producto fibrado.

En la categoría **Conjuntos**, la doble negación de una proposición es igual a la proposición misma. En esa categoría también se tiene que, como **2** es el clasificador de subobjetos, para toda proposición φ, φ = *verdadero* ó φ = *falso*. En resumen, **Conjuntos**[**1**, Ω] es un álgebra booleana, esto es, **Conjuntos** es un topos booleano y su lógica interna es la clásica.

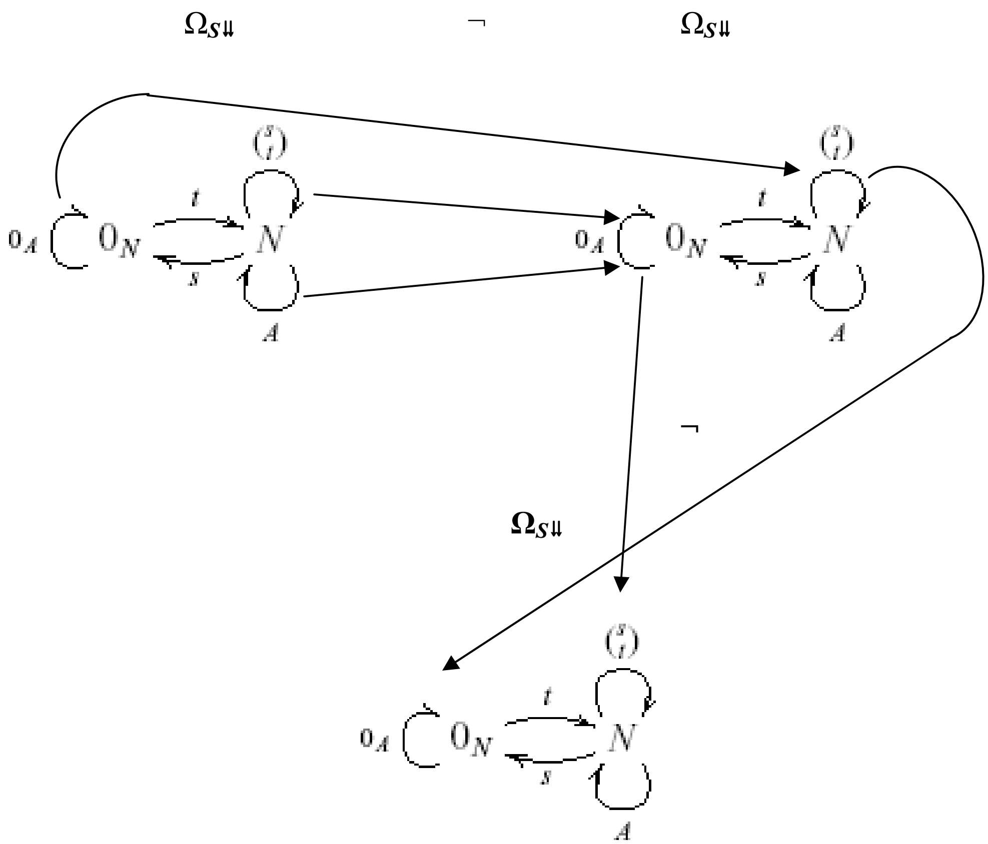
Pero en la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ la situación es diferente, pues $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}[\mathbf{1}, \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}]$ no es un álgebra booleana y su lógica interna es no clásica. Veamos a continuación un diagrama interno para el morfismo $\neg: \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}} \to \Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}$:[2]



En la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$, $\neg\circ\neg\circ$*verdadero* no es igual a *verdadero*:[3]

[2] Para no complicar el diagrama omito indicar el morfismo negación para las subgráficas *t* y *s*; de cualquier modo lo importante aquí es mostrar el resultado la composición del morfismo negación con los morfismos *verdadero* (A) y *falso* (0_A). Como en el caso del morfismo negación para **Conjuntos**, omito la prueba de que el morfismo negación recién descrito es el único que hace que el diagrama correspondiente sea un producto fibrado.

[3] Aunque $\neg\circ\neg\circ$*falso* = *falso*.



En esta categoría también se tiene que no toda proposición φ es tal que φ = *verdadero* ó φ = *falso*. En resumen, $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}[\mathbf{1}, \Omega_{S^{\downdownarrows}}]$ no es un álgebra booleana, esto es, $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ es un topos no booleano y su lógica interna es no clásica. También es fácil ver que $\varphi\vee\neg\varphi$ no es válida en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$. Para que la composición $\vee\circ<\varphi, \neg\varphi>$ sea igual al morfismo *verdadero* es necesario que alguna de las proposiciones φ ó ¬φ sea igual a *verdadero*. Si $\varphi = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ entonces $\neg\varphi = 0_A$ (*falso*). Como ninguna de esas proposiciones es igual a *verdadero* entonces la composición $\vee\circ<\varphi, \neg\varphi>$ tampoco es igual a *verdadero*. No obstante, en la teoría de topoi hay un resultado que establece un límite en cuanto a qué leyes pueden dejar de valer en un topos o, mejor aún, qué leyes deben cumplirse en todo topos. Ese teorema dice que una proposición φ es válida en cualquier topos si y sólo si φ es intuicionistamente válida, de ahí que aunque la igualdad $\neg\neg\varphi = \varphi$ no sea válida en todo topos la igualdad

$\neg\neg\neg\varphi = \neg\varphi$ sí lo es.[4] Cabe mencionar que la lógica interna de un topos no tiene que ser sólo o intuicionista o clásica, también puede ser una lógica superintuicionista. Una lógica superintuicionista o "intermedia" es una lógica que añade axiomas a la lógica intuicionista pero sin que la lógica resultante colapse en la lógica clásica. Una de las lógicas intermedias más conocida es la de Dummett (cfr. 1959), que añade a la lógica intuicionista el axioma $(\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$; esta lógica es la lógica interna de, por ejemplo, la categoría **Sistemas dinámicos** (cfr. Goldblatt 1984: 228; Dummett 1977; Segerberg 1968). Otro topos cuya lógica interna es no clásica es la categoría **Biv**, también llamada "**Conjuntos^{2}**" (cfr. Bell 2006, Goldblatt 1984: 34, 227).

Los resultados anteriores son los que motivan esta investigación. La lógica interna puede cambiar de un topos a otro; hay algunos topoi cuya lógica interna es clásica y otros en los que sólo valen las leyes intuicionistas. En la siguiente sección analizo la tesis de que cambio de lógica es cambio de tema a partir del tratamiento categorista de las conectivas lógicas que he expuesto aquí.

[4] Para la prueba de este resultado puede consultarse Goldblatt (1984). Por otro lado, en este trabajo he hablado exclusivamente de lógicas de orden cero. Las fórmulas de primer orden y orden superior que valen en cualquier topos son los teoremas de la lógica intuicionista *libre* de orden superior.

VII. El minimalismo categorista y el significado de las conectivas lógicas

La teoría de categorías proporciona una caracterización de las conectivas lógicas que no prejuzga su carácter clásico, intuicionista o superintuicionista. Como se vio en la sección V, hay una definición general de las conectivas, esto es, una sola definición de las conectivas para cualquier topos. Dado que las conectivas están definidas para un topos cualquiera y son aplicables a cualquier cosa que sea un subobjeto de un objeto en el topos dado. No puede decirse de antemano que, por ejemplo, la negación en los topoi en los que no vale el tercio excluso esté definida de manera intuicionista, como sí podía hacerse en el caso de la semántica de mundos posibles.

Como puede verse en los ejemplos de la sección anterior, la ausencia de algunos teoremas clásicos en ciertos topoi se debe a las características y propiedades de los objetos, no a un cambio en la definición de las conectivas. Ahí también señalé que una diferencia importante entre los objetos y subobjetos de $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ y los de **Conjuntos**, diferencia que influye para que sus lógicas internas sean distintas, es que en **Conjuntos** los subobjetos pueden ser clasificados por **2**, mientras que los de $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ no. En **Conjuntos**, cualquier φ: $\boldsymbol{1} \to \Omega$ es tal que φ = *verdadero* o φ = *falso*, sin opciones adicionales. Con esto en cuenta, en **Conjuntos** valdrán todas las leyes clásicas. Pero en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ una proposición φ puede ser igual a *verdadero*, puede ser igual a *falso* y a otro valor "intermedio" (e. g. "falso para la flecha pero verdadero para ambos vértices"). Como se vio al final de la sección IV, los topoi que no son bivalentes no pueden ser bivalentes; si lo fueran, algunos de sus objetos dejarían de ser lo que son (por ejemplo, gráficas que constan de flechas y sus respectivos vértices tendrían que ser gráficas con flechas desnudas, las cuales por definición no son gráficas) o habría subobjetos que a la vez están y no están contenidos en otros. Estas diferencias entre los topoi son lógicamente anteriores a la definición de las conectivas; el que $\neg \circ \neg = id_{\Omega}$ sea cierta en **Conjuntos** pero no en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ no se debe a que las conectivas se hayan definido de manera diferente para cada una de esas categorías, sino a que sus respectivos objetos y subobjetos tienen características diferentes (dadas por los morfismos de la categoría en cuestión). Si alguna de las igualdades *verdadero* = $\neg \circ$*falso* ó *falso* = $\neg \circ$*verdadero* falla esto tampoco se deberá a una supuesta diferencia entre las condiciones de verdad de la negación en un topos y otro, sino a cuántos valores de verdad haya, esto es, a la estructura del objeto Ω.[1] A su vez, el cambio en la estructura de Ω cuando se pasa de una categoría a otra se debe a las características de los objetos de la categoría, determinadas por los morfismos entre los objetos.

Por otro lado, me parece que la caracterización categorista de las conectivas constituye una versión del minimalismo acerca del significado de las conectivas lógicas. Como mencioné en la sección I, de acuerdo con el minimalismo no todos los aspectos relacionados con las conectivas contribuyen a la determinación de su significado. Pero esto es demasiado vago: ¿Qué es un "aspecto relacionado con una conectiva"? ¿Cuáles de esos aspectos sí están relacionados con una conectiva y cuáles no?

La caracterización de las conectivas en la teoría de topoi es muy general, pues las conectivas son cierto tipo de morfismos que hacen que, en cualquier topos, ciertos diagramas sean productos fibrados. Los "aspectos relacionados con las conectivas" son los objetos y los morfismos que aparecen en esos diagramas. ¿Cuáles de esos aspectos no forman parte del significado de la conectiva? Para definir las conectivas en una categoría cualquiera **C** con productos, coproductos, objeto terminal y productos fibrados, lo único que se exige es (i) que **C** tenga clasificador de subobjetos, es decir, que haya un objeto Ω de **C** con un morfismo *verdadero*: $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$ que satisfaga ciertas condiciones, esto es, que haya al menos un valor de verdad $\boldsymbol{1} \rightarrow \Omega$, y (ii) que la categoría **C** sea "no degenerada" (que los morfismos *verdadero* y *falso* sean distintos), es decir, que haya al menos dos valores de verdad. Características adicionales, como que un clasificador en **C** sólo tenga dos valores de verdad o más de dos, no intervienen en la definición de las conectivas. Estas características adicionales tampoco afectan a los productos (Ω×Ω) *qua* productos o a los coproductos (Ω+Ω) *qua* coproductos y, por tanto, las definiciones de las conectivas no dependen de características adicionales de un producto o un coproducto más allá de las que hacen que éstos sean un producto y un coproducto en una categoría dada.[2] Como las conectivas están definidas para cualquier topos, tampoco interviene en su definición la estructura particular de algún objeto o subobjeto del topos en cuestión, esto es, en la

[1] En teoría de topoi estas igualdades se expresan como isomorfismos y, de hecho, en general el subobjeto no-*falso* no es isomorfo al subobjeto *verdadero*.
[2] Compárese esto con la idea de Putnam del significado operacional de las conectivas expuesta más arriba.

definición de las conectivas no se especifica que las definiciones valgan para categorías cuyos objetos tengan tales o cuales características o cuyos morfismos sean estos o aquellos adicionales a los objetos y morfismos que todo topos debe tener. Si lo que he expuesto anteriormente es correcto, el que una composición de morfismos, donde uno de ellos es una conectiva, sea igual a otro morfismo tampoco forma parte del significado de dicha conectiva, sino que es resultado de la composición de la conectiva con subobjetos con ciertas características. El único aspecto semánticamente relevante es el hecho de que las conectivas son los únicos morfismos que hacen que en determinadas categorías ciertos diagramas sean productos fibrados.

Una objeción tradicional a las propuestas minimalistas sería que, desde un punto de vista algebraico, las conectivas son definidas por ciertos axiomas y es claro que, digamos, los axiomas para la negación son diferentes en un álgebra de Boole y en un álgebra de Heyting. Dado que la negación en cada una de esas álgebras está caracterizada por axiomas diferentes se trata de hecho de negaciones diferentes. Me parece que la precisión pertinente aquí es la siguiente: un axioma como $\neg\neg x = x$ en el álgebra booleana expresa el hecho de que entre los objetos del álgebra es cierto que la doble negación es igual a la identidad, no *prescribe* la forma en que deben relacionarse los objetos. Sería incorrecto suponer que los objetos del álgebra van a satisfacer la eliminación de la doble negación simplemente porque se introduce un axioma que dice que así debe ser. El axioma es prescriptivo en el sentido de que excluye a ciertos dominios, no en el sentido de que fuerza a cualquier objeto del dominio en cuestión a que se ajuste a él. Sería como pensar que la lógica interna de la categoría $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ va a cambiar sólo porque se le añada como axioma que $\neg\circ\neg = id_{\Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}}$. La estructura de los objetos y los subobjetos en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$ excluye que $\neg\circ\neg = id_{\Omega_{\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}}}$, aunque la negación se defina igual para todos los topoi, booleanos o no.

VIII. Bivalencia, tercio excluso y $\varphi\vee\neg\varphi$

Algunos teóricos de las categorías, al enfatizar el carácter intuicionista de las leyes que valen en todos los topoi, no toman en cuenta algunas importantes distinciones hechas en lógica. En ocasiones dicen que en la teoría de topoi se rechaza el tercio excluso, en otras dicen que se rechaza bivalencia, otras dicen que la proposición $\varphi\vee\neg\varphi$ no es válida en todos los topoi, como si 'tercio excluso', 'bivalencia' y 'validez de $\varphi\vee\neg\varphi$' fueran nociones equivalentes. Muchas veces se asume que la *proposición* $\varphi\vee\neg\varphi$ *significa* que φ o bien es verdadera o bien es falsa, aunque esta interpretación no es exclusiva de los teóricos de las categorías. Sin embargo, en esta interpretación se identifican algunos principios que son idénticos sólo bajo ciertas condiciones, como las impuestas por los objetos y subobjetos de la lógica clásica, mientras que otros principios son simplemente obviados:[1]

Bivalencia: Sólo hay dos valores de verdad (*verdadero* y *falso*).

Tercio excluso (a): Dadas una proposición y su negación, alguna de las dos ha de ser falsa.

Tercio excluso (b): Dadas una proposición y su negación, no pueden ser ambas falsas.

Validez de la proposición $\varphi\vee\neg\varphi$.

La formulación usual o "ingenua" del tercio excluso asume estos cuatro principios más los siguientes:

No contradicción: Dadas una proposición y su negación, no pueden ser ambas verdaderas.
Funcionalidad: A cada proposición le corresponde uno y sólo un valor.
De la unión de estos cinco principios resulta la formulación usual del principio del tercio excluso:
Tercio excluso naïve: Dada una proposición, ésta es o verdadera o falsa.

Estos principios no son equivalentes, por lo que rechazar o adoptar una de ellos no involucra ni el rechazo ni la adopción de los otros. Hay lógicas en las cuales al parecer se

[1] Estas distinciones están basadas en las discutidas en Béziau (2004), aunque no coinciden con ellas.

rechaza **Bivalencia**, la proposición $\varphi\vee\neg\varphi$ no es válida y no obstante se cumple **Tercio excluso (b)**. Un ejemplo de lógica así es G_3, la lógica trivaluada de Gödel, que es una lógica cuyas matrices para la negación y la disyunción son las siguientes (‘$\top$’ denota el valor verdadero, ‘$\bot$’ el falso y ‘#’ denota el tercer valor):

φ	$\neg\varphi$
$\top$	$\bot$
#	$\bot$
$\bot$	$\top$

$\varphi\vee\psi$	$\top$	#	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
#	$\top$	#	#
$\bot$	$\top$	#	$\bot$

Estos principios tienen la siguiente expresión categorista:

Bivalencia: El clasificador de subobjetos en una categoría dada **C** es el objeto $\mathbf{2}_{\mathbf{C}}$, esto es, un objeto de **C** con dos elementos (los morfismos *verdadero*: ***1→2*** y *falso*: ***1→2***). Asociado con este supuesto está el de que las igualdades $\neg\circ$*falso* = *verdadero*, $\neg\circ$*verdadero* = *falso* son válidas.

Tercio excluso (a): para toda φ, φ = *falso* ó $\neg\varphi$ = *falso*.

Tercio excluso (b): ninguna φ es tal que φ = *falso* y $\neg\varphi$ = *falso*.

Validez de la proposición ($\varphi\vee\neg\varphi$), para toda φ, $\vee\circ\langle\varphi, \neg\varphi\rangle$ = *verdadero*.

No contradicción: ninguna φ es tal que φ = *verdadero* y $\neg\varphi$ = verdadero.[2]

Funcionalidad: A cada proposición le corresponde uno y sólo un valor de verdad.

Tercio excluso naïve: para toda φ, φ = *verdadero* ó φ = *falso*.

Teniendo en cuenta estas distinciones, ahora puede decirse que lo que en ciertos topoi se excluye es no sólo el **Tercio excluso naïve**, sino también **Tercio excluso (b)**, además de **Bivalencia** y **Validez de $\varphi\vee\neg\varphi$**. Sólo **Tercio excluso (a)**, **Funcionalidad** y **No contradicción** son válidos en cualquier topos. Ya se vio que esto no se debe a que las

[2] En rigor también debería distinguirse entre el *principio de no contradicción* y la *validez de* $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$ (para toda φ, $\neg\circ(\wedge\circ\langle\varphi, \neg\varphi\rangle)$ = *verdadero*).

conectivas tengan significados distintos en distintos topoi. La causa de esto es, más bien, la estructura particular de los objetos que constituyen las diferentes categorías. Concretamente, **Bivalencia** es excluida en muchos topoi. Por ejemplo, en $\boldsymbol{S}^{\Downarrow}$ sí hay dos "valores de verdad" posibles para los vértices, pero para las flechas hay distintos "grados de verdad".

Conclusiones

En la primera sección de este trabajo expuse algunas propuestas tradicionales acerca del problema del significado de las conectivas de diferentes lógica, especialmente las ideas de Quine (quien defiende la variación de significado), Putnam (quien formuló la idea de un "significado operacional" común a las conectivas de diferentes lógicas) y las recientes propuestas para distinguir entre teorías "maximalistas" y teorías "minimalistas". Según el maximalismo, todo aspecto relacionado con una conectiva contribuye a su significado; para el minimalismo sólo algunos aspectos hacen una contribución semántica. Así, Quine, y con él gran parte de filósofos de la lógica, sería un maximalista, en tanto que autores como Putnam, Read y Paoli serían minimalistas. En las secciones II-VI presenté algunos rasgos básicos de la teoría de categorías y de la teoría de topoi para llegar a la definición categorista de las conectivas lógicas, que es la misma para todo topos. En la sección VII argumenté que la caracterización categorista de las conectivas lógicas puede considerarse como una versión muy sofisticada del minimalismo como tesis acerca del significado de las conectivas, que incluye una precisión en lo que debería entenderse por "elemento relacionado con una conectiva". También argumenté que la diferencia de teoremas en distintos topoi no involucra un cambio en el significado de las conectivas lógicas. El componente no clásico está dado por los objetos, ya que si los objetos sólo son o verdaderos o falsos entonces las condiciones de verdad arrojarán teoremas clásicos, pero si los objetos tienen, como en $\boldsymbol{S}^{\downdownarrows}$, otros valores además de *verdadero* o *falso* entonces ciertos teoremas clásicos no serán válidos. Así, cualquier "divergencia" en la colección de teoremas de la lógica interna de un topos a otra se deberá a la naturaleza de los objetos considerados y no al significado de las conectivas. Lo que cambia cuando cambia la lógica interna de un topos a otro son las características de los objetos en cada topos, características dadas por los morfismos entre los objetos, las cuales no desempeñan papel alguno en la definición de las conectivas, de ahí que no sea el significado de las conectivas lo que cambia. En la última sección traté de distinguir tres principios que suelen identificarse (*bivalencia*, *tercio excluso* y *validez de la fórmula* $\varphi \vee \neg\varphi$), su formulación categorista y mostré cuáles de ellas están presentes en todo topos y cuáles no.

Por último me gustaría señalar algunos otros problemas en filosofía de la lógica que sería interesante analizar desde el punto de vista categorista. Primero está el problema casi natural de tratar de tratar de extender la tesis minimalista de tal manera que comprehenda más lógicas, esto es, tratar de dar un análisis categorista de las conectivas que permita establecer un significado común no sólo para las conectivas de las lógicas clásica, intermedias e intuicionista, sino que incluya conectivas de otras lógicas (lógicas de la relevancia, tolerantes a la inconsistencia, etc.). Otro problema es el de abordar de manera categorista las cuestiones de qué es una lógica y qué es la lógica. Los propios teóricos de categorías han aventurado ya algunas propuestas. Lawvere (2003) distingue entre dos sentidos del término "lógica". En el sentido *amplio* la lógica consiste en "todas las leyes del pensamiento humano hechas explícitas para que el pensamiento pueda ser un instrumento útil". En el sentido *reducido* la lógica es el estudio del álgebra de las partes entre universos de discurso (básicamente, la lógica interna de un topos). Lambek (1968; 1969; 1972) sugiere ver a una categoría como un sistema deductivo: los objetos son las fórmulas, los morfismos son las deducciones entre esas fórmulas, mientras que los axiomas que han de cumplir los objetos y los morfismos son las reglas de inferencia. Así, dependiendo de qué axiomas adicionales tenga una categoría se obtienen diferentes lógicas. Otro enfoque categorista es tratar a las lógicas particulares como objetos matemáticos que forman la categoría **Lógicas**, cuyos morfismos son, en las versiones más aceptadas, traducciones entre lógicas (véase, por ejemplo, Arndt *et al*. (2007)). Un problema todavía abierto es el de si puede darse un tratamiento categorista de (cuando menos la mayor parte de) las lógicas conocidas. Una posible respuesta es negativa ya que, siguiendo el enfoque de Lambek, el axioma de existencia de morfismos identidad podría interpretarse como la regla $A \vdash A$, pero hay lógicas en las que esta regla no es aplicable irrestrictamente. No obstante, hay quienes dudan que sistemas en los que esa regla no sea válida puedan considerarse lógicas (cfr. Beall and Restall (2006: 96)), aunque quizá la pregunta de fondo es si esas estructuras son susceptibles de análisis matemático y, más específicamente, categorista. Lawvere (1990) ha argumentado que esto no es posible, mientras que otros dicen que lo que hay que modificar es la noción de 'categoría' (cfr. Ageron (2005)). Sería importante investigar cómo se relacionan estos tratamientos categoristas en los que, como dicen Lambek y Scott (1988:

128), "(…) [se] trata a la lógica menos como fundamentación que como parte de las matemáticas (…)" y en los que en ocasiones la lógica es "sensible a los objetos" –como en la lógica interna de un topos–, con la concepción tradicional de la lógica, según la cual la lógica es una ciencia "tópicamente neutral" y absolutamente general que no obstante tiene un objeto específico: la estructura de normas que gobiernan el razonamiento correcto.

Referencias

Ageron, Pierre (2005): "Logic without Self-Deductibility", en Jean-Yves Béziau (ed.), *Logica Universalis. Towards a General Theory of Logic*, Alemania: Birkhäuser Verlag, 2005, pp. 89-95.

Arndt, Peter *et al*. (2007): "A Global Glance on Categories in Logic", *Logica Universalis* **1**, no. 1, pp. 3-39.

Awodey, Steve (1996): "Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective", *Philosophia Mathematica* **4**, no. 3, 1996, pp. 209-237.

Barceló, Axel (2007): "Sobre la naturaleza múltiple de las constantes lógicas", en Maite Ezcurdia (comp.), *Orayen: de la forma lógica al significado*, México: IIF-UNAM, 2007, pp. 61-82.

Beall, JC y Greg Restall (2006): *Logical Pluralism*, Oxford: Oxford University Press.

Bell, John Lane (2006): "Abstract and Variable Sets in Category Theory", en Giandomenico Sica (ed.), *What is Category Theory?*, Monza, Italia: Polimetrica, 2006, pp. 9-16.

Brandom, Robert (2000): *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism* Cambridge: Harvard University Press.

Béziau, Jean-Yves (2002): "The Philosophical Import of Polish Logic", en M. Talasiewicz (ed.), *Methodology and Philosophy of Science at Warsaw University*, Varsovia: Semper, 2002, pp. 109–124.

– (2004): "Bivalence, Excluded Middle and Non Contradiction", en Libor Behounek (ed.), *The Logica Yearbook 2003*, Praga: Academia de Ciencias, pp.73-84.

Cantor, Georg (1887-8): "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten" 1 y 2, en Ernst Zermelo (ed.), [*Cantors*] *Gesammelte Abhandlungen matematischen und philosophischen Inhalts*, Berlín: Springer, 1980, pp. 378-439.

Carnap, Rudolf (1943): *The Formalization of Logic*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

da Costa, Newton (1982): "The Philosophical Import of Paraconsistent Logic", *The Journal of Non-Classical Logic* 1, pp. 1-19.

Došen, Kosta (1989): “Logical Constants as Punctuation Marks”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **30**, pp. 362-381.

Dummett, Michael A. E. (1959): “A Propositional Calculus with a Denumerable Matrix”, *Journal of Symbolic Logic* **24**, no. 2, pp. 97-103.

– (1977): *Elements of Intuitionism*, Oxford: Clarendon Press.

– (1978): *Truth and Other Enigmas*, Londres: Duckworth.

Fraenkel, Abraham (1976): *Abstract Set Theory,* Amsterdam: North-Holland, cuarta edición revisada.

Gentzen, Gerhard (1935): “Investigations into Logical Deduction”, en M. E. Szabó (ed.), *The Collected Works of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North Holland, 1969, pp. 168-131.

Goldblatt, Robert (1984): *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, edición revisada, Holanda: North-Holland.

Hjortland, Ole Thomassen (2007): “Proof-Theoretic Harmony and Structural Assumptions”, borrador disponible en olethhjortland.googlepages.com/Cambridge.pdf

Lambek, Joachim (1968): “Deductive Systems and Categories I. Syntactic Calculus and Residuated Categories”, *Mathematical Systems Theory* vol. **2**, pp. 287-318.

– (1969): “Deductive Systems and Categories II. Standard Constructions and Closed Categories”, *Category Theory, Homology Theory and their Applications I*, Berlin: Springer, pp. 76-122.

– (1972): “Deductive Systems and Categories III. Cartesian Closed Categories, Intuitionistic Propositional Calculus, and Combinatory Logic”, *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Lecture Notes in Mathematics vol. **274**, Berlin: Springer, pp. 57-82.

– (2004): “What is the World of Mathematics?”, *Annals of Pure and Applied Logic* **126**, pp. 149-158.

Lambek, Joachim y Philip J. Scott (1988): *Introduction to High Order Categorical Logic*, Great Britain: Cambridge University Press, primera reimpresión.

Landry, Elaine y Jean-Pierre Marquis (2005): "Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical", *Philosophia Mathematica* **13**, pp. 1-43.

Lawvere, Francis William (1991): "Some Thoughts on the Future of Category Theory", *Proceedings of the International Conference on Category Theory held in Como, Italy 1990*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1488, Springer-Verlag, pp. 1-13.

– (1994): "Cohesive Toposes and Cantor's *Lauter Einsen*", *Philosophia Mathematica* **2** (1), 1994, pp. 5-15.

Lawvere, Francis William y Stephen Hoel Schanuel (2000): *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge: Cambridge University Press. Segunda reimpresión. Versión castellana: *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías*, México: Siglo XXI, 2002. Traducción de Francisco Marmolejo Rivas, con asistencia de Ivonne Pallares Vega.

Lawvere, Francis William y William Rosebrough (2003): *Sets for Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Mac Lane, Saunders (1975): "Sets, Topoi, and Internal Logic in Categories", en Harvey Ernest Rose y John C. Shepherdson (eds.), *Proceedings of the Logic Colloquium '73*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **80**, Amsterdam: North Holland, pp. 119–134.

Mac Lane, Saunders e Ieke Moerdijk (1992): *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*, Berlin: Springer-Verlag.

McLarty, Colin (1990): "Uses and Abuses of the History of Topos Theory", *British Journal for the Philosophy of Science*, 41, pp. 351-375.

– (1995): *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Toronto: Oxford Clarendon Press.

Morado, Raymundo (2007): "Quine y Fland: ¿Podemos cambiar el significado de las conectivas lógicas?", *Analogía filosófica* **21**, no. 2, pp. 165-176.

Morton, Adam (1973): "Denying the Doctrine and Changing the Subject", *The Journal of Philosophy* **70**, no. 15, pp. 503-510.

Pallares, Ivonne (2006): "Unificación conceptual en matemáticas", en Juan C. González (ed.), *Perspectivas contemporáneas sobre la cognición*, México: UAEM-Siglo XXI, 2006, pp. 212-236.

Paoli, Francesco (2002): *Substructural Logics. A Primer*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

– (2003): "Quine and Slater on Paraconsistency and Deviance", *Journal of Philosophical Logic* **32**, pp. 531-548.

– (2007): "Implicational Paradoxes and the Meaning of Logical Constants", *Australasian Journal of Philosophy* **85** (4), diciembre de 2007, pp. 553-57.

Prawitz, Dag (1981): "Philosophical Aspects of Proof Theory", en Guttorm Floistad y Georg Henrik von Wright (eds.), *Contemporary Philosophy: A New Survey*, Vol. 1, La Haya: Nijhoff, pp. 235-278.

Priest, Graham (1975): "Review of *Deviant Logics*", The Philosophical Quarterly 25, no. 101, pp. 371-373.

Putnam, Hilary (1957): "Three-Valued Logic", en Putnam (1980), pp. 166-173. Originalmente publicado en *Philosophical Studies* **8**, pp. 73-80.

– (1962): "The Analytic and the Synthetic", *Mind, Language, and Reality. Philosophical Papers Volume 1*, Nueva York: Cambridge University Press, 1975, pp. 33-69. Originalmente publicado en Herbert Feigl y Grover Maxwell (eds.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1962, pp. 358-397.

– (1968): "The Logic of Quantum Mechanics", en Putnam (1980), pp. 174-197. Originalmente publicado como "Is Logic Empirical?", en Robert S. Cohen y Marx W. Wartofsky (eds.), *Boston Studies in the Philosophy of Science* **5**, Dordrecht: Reidel, 1968, pp. 216-241.

– (1980): *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers Volume 1*, Massachusetts: Cambridge University Press, 1980, séptima reimpresión de la segunda edición.

Quine, Willard van Orman (1960): *Word and Object*, Cambridge: The MIT Press.

– (1970): *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, primera edición.

– (1973): *The Roots of Reference*, La Salle: Open Court.

Raatikainen, Panu (2008): "On Rules of Inference and the Meaning of Logical Constants", aparecerá en *Analysis* **64**, no. 4 (octubre de 2008).

Read, Stephen (2008): "Harmony and Modality", por aparecer en L. K. Cédric Dégremont, Laurent Keiff y Helge Rückert (eds.), *On Dialogues, Logics and Other Strange Things*, Londres: King's College Publications, pp. por confirmar.

Segerberg, Krister (1968): "Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's", *Theoria* **34**, 1968, pp. 26-61.

Vigna, Sebastiano (1997): "A Guided Tour in the Topos of Graphs", Technical Report 199-97, Università di Milano, Dipartimento di Scienze dell'Informazione, 1997. URL: http://vigna.dsi.unimi.it/papers.ToposGraphs.pdf

Wansing, Heinrich (2000): "The Idea of a Proof-Theoretic Semantics", *Studia Logica* **64**, pp. 3-20.