



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Distorsiones espectrales y monodromía de  
axiones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Carlos César Álvarez Segura

TUTOR

Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez



Ciudad de México, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Álvarez

Segura

Carlos César

5543607185

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

314329747

2. Datos del tutor

Dr.

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr.

Jorge Luis

Cervantes

Cota

4. Datos de sinodal 2

Dr.

Tonatiuh

Matos

Chassin

5. Datos del sinodal 3

Dr.

José Alberto

Vázquez

González

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Celia del Carmen

Escamilla

Rivera

7. Datos del trabajo escrito

Distorsiones espectrales y monodromía de axiones

87 pp

2022

*Dedicado a mis padres*

Quiero aprovechar este pequeño espacio para agradecer a todas aquellas personas que contribuyeron de alguna manera a la realización de este trabajo. En primer lugar, agradezco profundamente a mis padres, Martha y Juan, por todo el amor que me han dado, sin el cual nada de esto habría sido posible. A Jessica, quien no solo estuvo a mi lado durante el a veces tortuoso desarrollo de este trabajo, sino que me ha acompañado a lo largo de los últimos años, en los que hemos aprendido y crecido juntos. De la misma manera agradezco a mi hermano, Luis Enrique, por el cariño, apoyo y comprensión brindados durante la pandemia y a lo largo de toda mi vida. Agradezco también a todas las personas que conocí durante mis estudios en la Facultad de Ciencias. De manera particular, quiero agradecer a mis amigos Geovanny, Gabriela, Martín y Fabián por el tiempo que pasamos juntos y por la alegría que han traído a mi vida. Finalmente, agradezco sinceramente a todos los profesores que contribuyeron en mi formación académica, especialmente a mi asesor, el Dr. Saúl Ramos Sánchez, a quien quiero agradecer por su paciencia, dedicación y compromiso, que no solo permitieron que este trabajo saliera adelante, sino que son un ejemplo para mí.

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Programa de Reactivación de Investigación y Docencia (PRIDIF22) del Instituto de Física de la UNAM.

# Índice general

<b>1. Introducción y motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. El modelo cosmológico estándar</b>	<b>4</b>
2.1. El espacio-tiempo FLRW	4
2.1.1. Dinámica de un universo plano	7
2.2. Problemas	9
2.2.1. El problema de planitud	10
2.2.2. El problema del horizonte cosmológico	11
2.3. Inflación por medio de un campo escalar	12
2.3.1. Aproximación de slow-roll	15
2.3.2. La cantidad de inflación	16
<b>3. Un universo inhomogéneo</b>	<b>18</b>
3.1. Teoría de perturbaciones cosmológicas	18
3.1.1. La descomposición escalar-vector-tensor	18
3.1.2. El problema de la libertad de norma	21
3.2. Fluctuaciones escalares	24
3.2.1. Fluctuaciones de un campo escalar	24
3.2.2. Fluctuaciones en el campo del inflatón	28
3.3. Fluctuaciones tensoriales	33
<b>4. Distorsiones espectrales</b>	<b>37</b>
4.1. El Universo después de inflación	37
4.2. La CMB	38
4.2.1. El espectro de anisotropías en la temperatura	39
4.2.2. El espectro de anisotropías en la polarización	41
4.3. Distorsiones espectrales	43
4.3.1. Forma de las distorsiones	44
4.3.2. Amplitud de las distorsiones	47
4.3.3. Distorsiones espectrales debidas a la dispersión de modos acústicos	50

---

<b>5. Monodromía de Axiones</b>	<b>52</b>
5.1. Dinámica del campo escalar . . . . .	53
5.2. Cálculo del espectro de potencias escalar . . . . .	57
<b>6. Distorsiones espectrales en monodromía de axiones</b>	<b>64</b>
6.1. Cálculo de las distorsiones . . . . .	64
6.1.1. Parámetros del modelo . . . . .	65
6.1.2. Cálculo de las amplitudes . . . . .	66
6.1.3. Contribución al espectro de intensidad de la CMB . . . . .	73
6.2. Discusión de los resultados . . . . .	73
<b>7. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introducción y motivación

Desde las primeras descripciones del Universo que involucraron la teoría de la relatividad en 1917 y hasta mediados de los años sesenta, la mayor parte de la información observacional disponible sobre nuestro Universo provenía de la observación de galaxias distantes. Durante este periodo, trabajos como aquellos de Hubble y Lemaître impulsaron la idea de un universo homogéneo e isótropo en expansión que, en un pasado remoto, se encontró en un estado de alta densidad y temperatura, sembrando las bases de lo que hoy conocemos como teoría del big bang [1]. Esta descripción, no muy popular en aquella época, contenía una predicción clave: la presencia de radiación de cuerpo negro a una temperatura de unos cuantos Kelvin [2]. La detección por Penzias y Wilson [3] en 1965 de una señal de radio con una temperatura de 3.5 K, aparentemente isótropa y no polarizada fue interpretada por Dicke *et al.* [4] como el remanente de aquel pasado denso y caliente del Universo, impulsando fuertemente la teoría del big bang. Sin embargo, algunos problemas permanecían abiertos, entre ellos la explicación del alto grado de isotropía de esta radiación, conocida actualmente como radiación cósmica de fondo (CMB).

Una forma de dar solución a los problemas presentes en la teoría del big bang es considerar un periodo de expansión acelerada en el Universo temprano conocido como inflación cosmológica. Los modelos más simples de inflación involucran un único campo escalar  $\varphi$ , llamado inflatón, como el principal constituyente del Universo y cuya dinámica está regida por un potencial  $V(\varphi)$  lo suficientemente plano como para permitir que el periodo de expansión dure lo necesario para resolver los llamados problemas de planitud, isotropía, la inexistencia de monopolos y la dilución de entropía, entre otros [5, 6]. Durante este periodo de expansión acelerada se espera la aparición de pequeñas fluctuaciones en el campo del inflatón, así como en la geometría del espacio-tiempo, que son estudiadas en el régimen lineal a través de su separación en perturbaciones escalares y tensoriales primordiales [7], cuyos espectros de potencias dependen del modelo inflacionario subyacente [8]. Se espera, además, que estas perturbaciones tengan un efecto en el espectro de potencias de la CMB que puede ser medido.

En años posteriores al descubrimiento de la CMB, gran esfuerzo ha sido dedicado en búsqueda de una mejor caracterización de esta radiación, con la finalidad de establecer hasta qué punto es

isótropa y qué tan próximo es su espectro a aquel de un cuerpo negro perfecto. Mediciones realizadas por experimentos como COBE/FIRAS, WMAP y más recientemente Planck, probaron a través de su espectro de anisotropías en su temperatura y polarización, que esta radiación es altamente isótropa y han jugado un papel fundamental en el establecimiento del modelo cosmológico estándar, conocido como  $\Lambda$ CDM. Este modelo indica que el Universo es espacialmente plano, consistente con los escenarios más simples de inflación (aquellos que involucran un único campo escalar) y está constituido en un 68% de energía oscura, 27% de materia oscura no relativista y 5% de materia ordinaria. Sin embargo, a pesar de que la evidencia observacional favorece los escenarios inflacionarios más sencillos, el problema que debemos enfrentar es que existe una vasta cantidad de ellos por lo que, en la búsqueda por establecer cuál es el modelo inflacionario que mejor describe nuestras observaciones, los datos de e.g. Planck han sido empleados para tratar de reconstruir el potencial del inflatón [9] y para establecer restricciones a los parámetros de diferentes modelos inflacionarios a través de métodos estadísticos [10].

Por otro lado, debido a que la inflación cosmológica ocurre a escalas energéticas muy grandes resulta interesante buscar incluir este paradigma en teorías de gran unificación, de entre las cuales destaca la teoría de cuerdas. Un conjunto de modelos que pueden darse dentro de esta teoría son aquellos basados en monodromía de axiones [11, 12]. En estos modelos, la inflación es llevada a cabo por campos pseudoescalares que llamaremos genéricamente axiones (refiriéndonos a ALPs o axion-like particles), los cuales aparecen de manera natural y abundante en la teoría de cuerdas y cuya evolución está regida por un potencial de la forma  $V \sim \phi^p + \cos(\phi)$ . Estos modelos resultan particularmente interesantes debido a que predicen fluctuaciones tensoriales relativamente grandes, con posibilidad de ser observadas [13]. Si bien no se considera que las fluctuaciones tensoriales son enormes, todavía podrían ser grandes, por lo que vale la pena estudiar estos modelos y explorar otras posibles señales observables provenientes de ellos con la finalidad de descartarlos o confirmarlos experimentalmente.

Una fuente de información proveniente de la CMB que es independiente de la temperatura y la polarización proviene de las desviaciones del espectro de esta radiación de aquel correspondiente a un cuerpo negro, las cuales son conocidas como distorsiones espectrales. Estas distorsiones, cuyos principales tipos (isótropos) son llamados  $\mu$  y  $y$ , han recibido poca atención en el ámbito experimental y son producidas en cualquier proceso que cambie la distribución energética o el número de fotones en la CMB. Entre las posibles fuentes de estas distorsiones se encuentran escenarios exóticos como la evaporación de agujeros negros primordiales. No obstante, diversos procesos capaces de producir estas distorsiones se dan dentro del modelo  $\Lambda$ CDM, tales como el enfriamiento de los bariones debido a la expansión del Universo o el efecto Sunyaev-Zeldovich [14]. De entre los procesos esperados en  $\Lambda$ CDM es de particular interés la disipación de perturbaciones escalares primordiales de pequeña escala, también llamada disipación de modos acústicos, pues es un proceso sensible a la forma y la amplitud del espectro de fluctuaciones escalares producido por inflación, por lo que las distorsiones producidas mediante este mecanismo ofrecen una nueva forma de obtener información sobre el periodo inflacionario. El tratamiento de la disipación de modos acústicos ha permitido establecer relaciones para el cálculo de la magnitud de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$

---

debidas a este proceso [15, 16], con lo que ha sido posible predecir restricciones a distintos modelos de inflación por medio de esta herramienta [17, 18, 19]. Sin embargo, poco esfuerzo ha sido dedicado a realizar predicciones sobre las distorsiones espectrales debidas a modelos inflacionarios basados en monodromía de axiones [20].

Hasta ahora, la única información observacional de estas distorsiones proviene del experimento COBE/FIRAS [21], que solo fue capaz de establecer las cotas superiores a sus magnitudes  $|\mu| \leq 9 \times 10^{-5}$  y  $|y| \leq 15 \times 10^{-6}$ . Cálculos recientes estiman que, en los modelos más sencillos, estas cantidades podrían ser al menos tres órdenes de magnitud más pequeñas, lo que dificulta su detección. Afortunadamente, contamos actualmente con propuestas experimentales tales como PIXIE [22], PRISM [23], Super-PIXIE [24] y Voyage 2050 [25], capaces de alcanzar niveles de sensibilidad sin precedentes. Por lo tanto, consideramos urgente realizar predicciones teóricas sobre las distorsiones espectrales que puedan ser utilizadas en un futuro para establecer el modelo inflacionario correcto.

## Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 damos una descripción del modelo cosmológico estándar y su dinámica, introduciendo algunos de los problemas que dan origen al paradigma inflacionario. En la sección 2.3 introducimos el concepto de inflación por medio de un campo escalar en el límite de rodamiento lento y discutimos su dinámica. El capítulo 3 está dedicado a la teoría de perturbaciones cosmológicas. Estudiamos la dinámica del campo del inflatón y sus fluctuaciones en un universo no homogéneo ni isótropo mediante el espectro de la fluctuación de curvatura comóvil y el espectro de fluctuaciones escalares. En el capítulo 4 repasamos algunas de las características básicas de la CMB, como su espectro de anisotropías en la temperatura y su polarización. Además, la sección 4.3 introduce las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$ , así como su descripción mediante su forma y sus amplitudes. A lo largo del capítulo 5 estudiamos el modelo de inflación por monodromía de axiones y calculamos la forma del espectro de fluctuaciones escalares. En el capítulo 6 realizamos el cálculo de la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  debidas a la disipación de modos acústicos en diferentes escenarios inflacionarios en monodromía de axiones, comparándolos entre ellos. Es en los capítulos 5 y 6 en los que se encuentran los cálculos más relevantes del presente trabajo. Finalmente, en el capítulo 7 discutimos nuestros resultados y algunas de las posibles líneas de investigación futuras.

## Capítulo 2

# El modelo cosmológico estándar

A pesar de encontrarse bajo reciente escrutinio, la descripción más simple de nuestro Universo y que mejor se ajusta a las observaciones es el llamado modelo  $\Lambda$ CDM, cuyas siglas (*Lambda Cold Dark Matter*) hacen referencia a la constante cosmológica  $\Lambda^1$  y a la materia oscura fría (no relativista) como los componentes dominantes del Universo. Este modelo tiene como base las siguientes suposiciones:

- El contenido del Universo está formado por radiación (partículas relativistas como fotones y neutrinos), materia ordinaria (bosones y fermiones), materia oscura y la constante cosmológica  $\Lambda$ .
- La relatividad general es la descripción correcta de la gravedad a escalas cosmológicas.
- El principio cosmológico es válido.
- Existe un periodo de expansión acelerada en el Universo temprano.

La sección 2.1 de este capítulo trata las primeras tres suposiciones, mientras que la sección 2.2 introduce dos problemas fundamentales que tienen como consecuencia la inclusión del cuarto principio, discutido con más detalle en la sección 2.3. Este capítulo está ampliamente basado en [26, 6] principalmente, con apoyo de [27, 28, 29] para las secciones 2.1 y 2.2 y de [30] para la sección 2.3.

### 2.1. El espacio-tiempo FLRW

Cuando se observa el Universo a escalas grandes este parece el mismo en todas direcciones. Es además difícil imaginar que ocupamos un lugar privilegiado en el Universo, lo cual nos lleva

---

<sup>1</sup>Es usual encontrar en la literatura el término *energía oscura* para referirse a la contribución correspondiente a  $\Lambda$ . El término elegido apela al origen que los distintos autores atribuyen a esta contribución. A lo largo de este texto usaremos ambos de manera indistinta.

a pensar que todo observador debe recibir la misma información independientemente de donde se encuentre. Es decir, suponemos que el Universo es *homogéneo* e *isótropo* a gran escala. Evidencia obtenida a través de la radiación de fondo cósmica (CMB) y de la estructura a gran escala confirma la homogeneidad e isotropía del Universo a escalas mayores a 100 Mpc. Es así que surge el *principio cosmológico*, en el que suponemos que todo el Universo es homogéneo e isótropo a pesar de solo observar una fracción de él.

La métrica asociada a la geometría que mejor se adapta al principio cosmológico y a la expansión del Universo es la de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker (FLRW), cuyo intervalo está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (2.1)$$

donde  $a(t)$  es llamado el *factor de escala* y tiene unidades de longitud, por lo que la coordenada radial  $r$  es adimensional. La variable  $t$  es llamada *tiempo cósmico* y es el tiempo medido por un observador en reposo para quien el Universo se expande de manera uniforme a su alrededor. Las coordenadas espaciales  $(r, \theta, \varphi)$ , llamadas *coordenadas comóviles* de un punto en el espacio, permanecen constantes ante una expansión homogénea e isótropa. La constante  $k$  representa el tipo de curvatura espacial y puede tomar los siguientes valores:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{en un universo cerrado,} \\ 0 & \text{en un universo plano,} \\ -1 & \text{en un universo abierto.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Una forma de entender el factor de escala es a través de la distancia propia entre dos objetos. La homogeneidad y la isotropía del Universo nos permiten, sin pérdida de generalidad, colocarnos en el origen del sistema de coordenadas comóviles y observar un objeto que satisface  $d\Omega = 0$ , de modo que

$$d_{prop} = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} a(t) \text{sen}^{-1} r & \text{si } k = 1, \\ a(t) \text{senh}^{-1} r & \text{si } k = -1, \\ a(t)r & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dado que la coordenada comóvil  $r$  es independiente del tiempo, el único factor que interviene en el incremento (o decremento) de esta distancia es el factor de escala  $a(t)$ , por lo que la razón de cambio de esta distancia está dada por

$$\dot{d}_{prop} = \frac{\dot{a}}{a} d_{prop}, \quad (2.4)$$

en donde notamos que la razón  $H \equiv \dot{a}/a$  contiene la información del ritmo al cual las distancias cambian en nuestro Universo. Dicha razón es llamada *parámetro de Hubble*.

Al considerar que la teoría de la relatividad general es válida, podemos describir la dinámica del Universo mediante las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

en donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci, que depende de la métrica y de sus derivadas a través de

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

con  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  los símbolos de Christoffel, dados por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(g_{\beta\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}); \quad (2.7)$$

$R$  es el escalar de Ricci, esto es, la contracción del tensor de Ricci  $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ;  $G$  denota la constante de gravitación universal; y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento.

El cálculo de las componentes no nulas del tensor de Ricci asociado a la métrica FLRW da como resultado

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de manera que el escalar de Ricci está dado por

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (2.9)$$

Por otro lado, se requiere de una expresión para el tensor de energía-momento que describa apropiadamente el contenido del Universo. Es común modelar este contenido como un fluido perfecto, para el cual el tensor de energía-momento tiene la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  es la presión del fluido y  $U^\mu$  es su 4-velocidad relativa a un observador. Para un observador comóvil  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , por lo que el tensor de energía-momento toma la forma

$$(T^\mu{}_\nu) = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P). \quad (2.11)$$

Empleando (2.8) y (2.9) en las componentes de las ecuaciones de campo de Einstein (2.5) tales que  $\mu = \nu$  se obtienen las ecuaciones

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (2.13)$$

La ecuación (2.12) es conocida como la *ecuación de Friedmann*, mientras que (2.13) es llamada *ecuación de aceleración cosmológica*.

Finalmente, empleando  $D_\mu T^\mu_0 = 0$ , donde  $D_\mu$  denota la derivada covariante con respecto a  $\mu$ , es posible obtener una expresión para la *ecuación de continuidad*

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.14)$$

Es imperante notar que (2.14) puede obtenerse a partir de (2.12) y (2.13). Es decir, únicamente contamos con dos ecuaciones independientes mientras que tenemos tres incógnitas. Sin embargo, nuestro sistema es modelado como un fluido perfecto, por lo que satisface la ecuación de estado

$$P = \omega\rho, \quad (2.15)$$

en donde supondremos que  $\omega$  es una constante que depende del contenido en el Universo. Dependiendo de la sustancia descrita,  $\omega$  puede tomar los siguientes valores

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{para radiación,} \\ 0 & \text{para materia,} \\ -1 & \text{para energía oscura,} \end{cases} \quad (2.16)$$

donde la energía oscura fue introducida para dar explicación a la expansión acelerada del Universo.

De este modo la dinámica de nuestro Universo queda descrita por la ecuación de Friedmann (2.12), la ecuación de continuidad (2.14) y la ecuación de estado (2.15).

### 2.1.1. Dinámica de un universo plano

La ecuación de Friedmann (2.12) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \quad (2.17)$$

en donde se define la densidad crítica  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  como el valor que debe tomar la densidad de energía  $\rho$  a un tiempo  $t$  para obtener un espacio-tiempo plano, anulando el lado derecho de (2.17).

Durante sus primeros instantes, el Universo puede considerarse plano si su contenido es caracterizado como radiación o materia, lo cual es usualmente supuesto. Además, diversas mediciones astrofísicas sugieren fuertemente que el valor actual de la densidad de energía en nuestro Universo tiene un valor cercano al de la densidad crítica y que, por tanto, es posible modelarlo mediante la métrica FLRW con  $k = 0$ .

Consideremos entonces un universo espacialmente plano. En este caso, la ecuación de Friedmann (2.12) toma la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.18)$$

Por otro lado, al sustituir la ecuación de estado (2.15) en la ecuación de continuidad (2.14) obtenemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.19)$$

que al integrar desde un tiempo arbitrario  $t$  hasta el tiempo actual  $t_0$  y considerando  $\omega \neq -1$ , da como resultado

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}, \quad (2.20)$$

donde  $\rho_0 = \rho(t_0)$ ,  $a_0 = a(t_0)$  y con  $\rho$  siendo constante en el caso  $\omega = -1$ . Con este resultado y (2.17) obtenemos la ecuación que describe el comportamiento del factor de escala,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}, \quad (2.21)$$

cuyas soluciones, considerando  $\omega \neq -1$  e integrando desde un tiempo arbitrario  $t$  hasta el tiempo actual  $t_0$  están dadas por

$$a(t) = a_0 \left[ \frac{3(1+\omega)}{2} H_0 (t - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (2.22)$$

en donde se define  $H_0 = \sqrt{8\pi G \rho_0 / 3}$ . Al considerar que  $a(t = 0) = 0$ , es posible obtener una expresión para  $t_0$ , esto es

$$t_0 = \frac{2}{3(\omega+1)H_0}, \quad (2.23)$$

con lo cual (2.22) se escribe como

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(\omega+1)}} = a_0 \left[ \frac{3(1+\omega)}{2} H_0 t \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.24)$$

En el caso  $\omega = -1$ ,  $\rho$  es una constante, por lo que el factor de escala  $a(t)$  crece de forma exponencial. Así, para las sustancias mencionadas en (2.16) se tiene

$$a(t) = \begin{cases} a_0 (2H_0 t)^{\frac{1}{2}} & \text{para radiación,} \\ a_0 \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} & \text{para materia,} \\ a_0 e^{H_0(t-t_0)} & \text{para energía oscura,} \end{cases} \quad (2.25)$$

y la densidad de energía evoluciona de la siguiente manera

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 & \text{para radiación,} \\ \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 & \text{para materia,} \\ \rho_0 & \text{para energía oscura.} \end{cases} \quad (2.26)$$

En la ecuación (2.25) observamos que  $\ddot{a} < 0$  para materia y radiación, por lo que en estos casos se tiene una expansión que desacelera. En el caso de la energía oscura,  $\ddot{a} > 0$ , por lo que la expansión es acelerada.

A pesar de que hemos tratado cada una de las sustancias en (2.16) por separado, el contenido de nuestro Universo está formado por la combinación de estas tres especies de fluidos perfectos distintos, de manera que la densidad total de energía se escribe como

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.27)$$

en donde los subíndices  $r, m$  y  $\Lambda$  hacen referencia a la radiación, la materia y la energía oscura, respectivamente. De acuerdo con la ecuación (2.26), al adoptar la normalización  $a_0 = 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \rho_r &= \rho_{0,r} a^{-4}, \\ \rho_m &= \rho_{0,m} a^{-3}, \\ \rho_\Lambda &= \rho_{0,\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

con  $\rho_{0,i}$  la densidad de energía actual de cada especie  $i$ . Dividiendo (2.18) por  $H_0^2$  y sustituyendo las expresiones (2.27)-(2.28) se obtiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_{0,r}}{\rho_{0,c}} a^{-4} + \frac{\rho_{0,m}}{\rho_{0,c}} a^{-3} + \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,c}}, \quad (2.29)$$

definiendo el parámetro de abundancia  $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$  tenemos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}, \quad (2.30)$$

donde  $\Omega_{0,i}$  denota el parámetro de abundancia de la especie  $i$  al tiempo actual  $t_0$ . De acuerdo con los datos de la colaboración Planck [31], estos valores son aproximadamente

$$\Omega_{0,r} \approx 5.38 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{0,\Lambda} \approx 0.685 \quad \text{y} \quad \Omega_{0,m} \approx 0.315, \quad (2.31)$$

en donde es importante resaltar que información obtenida de fuentes como el espectro de anisotropías de la CMB indican que únicamente un 16 % de la contribución de  $\Omega_{0,m}$  puede vincularse con la materia ordinaria mientras que el resto debe atribuirse a otro tipo de materia que solo interactúa gravitacionalmente, la materia oscura. El dominio de la materia oscura sobre la materia ordinaria, así como la superioridad de la energía oscura, reflejada por los valores en (2.31), son lo que da nombre al modelo  $\Lambda$ CDM.

## 2.2. Problemas

El objetivo de una teoría física es describir la evolución de un sistema a partir de un conjunto de condiciones iniciales aunque el si dichas condiciones iniciales forman parte o no de la teoría en sí misma es una pregunta abierta. En el caso de la cosmología, no es del todo claro si esta debería explicar o predecir las condiciones iniciales del Universo. Sin embargo, resulta interesante que el modelo descrito en la sección anterior requiere de condiciones iniciales muy específicas para evolucionar al estado que observamos hoy. Esta afirmación es ejemplificada mediante *el problema de planitud* y *el problema del horizonte cosmológico*, discutidos a continuación.

### 2.2.1. El problema de planitud

A pesar de que la suposición de un universo plano es consistente con las observaciones, es posible considerar modelos con curvatura. En términos del parámetro de abundancia, la ecuación de Friedmann (2.17) con  $k \neq 0$  indica que debe satisfacerse

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \sum_i \Omega_i - 1. \quad (2.32)$$

Definimos la densidad de curvatura para  $k$  constante como  $\Omega_k \equiv -k/a^2 H^2$  y tomando la normalización  $a_0 = 1$  notamos el valor que toma en este momento es

$$\Omega_{0,k} = \frac{-k}{H_0^2}. \quad (2.33)$$

Dividiendo la ecuación de Friedmann (2.12) por  $H_0^2$ , en un procedimiento análogo al realizado al final de la sección 2.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} - \frac{k}{H_0^2 a^2} \\ &= \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Así, de la definición de la densidad de curvatura y (2.33) obtenemos

$$\Omega_k = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0,k} a^{-2} = \frac{\Omega_{0,k} a^{-2}}{\Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2}}, \quad (2.35)$$

que es la ecuación que describe la dinámica de la densidad de curvatura en términos de las densidades de energía actuales para cada especie. Notamos inmediatamente que si el Universo es perfectamente plano hoy, entonces siempre lo ha sido y siempre va a serlo.

Es posible mostrar que

$$\Omega_k \propto \begin{cases} t & \text{durante la era dominada por radiación,} \\ t^{2/3} & \text{durante la era dominada por materia,} \end{cases} \quad (2.36)$$

de modo que, si consideramos un escenario en el que  $\Omega_k \neq 0$  en algún momento del pasado remoto, el valor de la densidad de curvatura sería amplificado. La colaboración Planck [31] indica que  $\Omega_{0,k} \approx 0.0007$ , lo cual representa un problema pues, para obtener este valor hoy, el valor inicial debería ajustarse a uno muy específico.

### 2.2.2. El problema del horizonte cosmológico

Consideremos el intervalo de FLRW (2.1). Debido a la isotropía y homogeneidad del Universo podemos tomar, sin pérdida de generalidad,  $d\Omega = 0$  de manera que la luz se propague a lo largo de trayectorias que satisfacen

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \quad (2.37)$$

Consideremos la luz emitida por una fuente ubicada en  $r_e$  al tiempo  $t_e$ , la cual es detectada por un observador localizado en  $r = 0$  al tiempo  $t_0$ . De la ecuación anterior obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.38)$$

que nos da una relación entre el tiempo de propagación y la distancia comóvil atravesada por la luz.

La distancia propia a la fuente al momento en el que la luz es recibida está definida por la distancia comóvil multiplicada por el factor de escala al momento de la detección, es decir,

$$d_{prop} = a(t_0) \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t_0) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.39)$$

Dado que la velocidad de la luz es finita existe un límite en la distancia a la que un observador localizado en  $r = 0$  es capaz de detectar señales luminosas. Este límite define el *horizonte cosmológico*

$$h(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.40)$$

que es la máxima distancia que un rayo de luz pudo haber viajado desde que  $t = 0$ . Esta distancia representa la máxima distancia entre un observador y su entorno desde la cual los eventos pueden afectarlo al tiempo  $t$ . En particular, dos partículas separadas por una distancia mayor a  $h(t)$  no pueden interactuar entre sí.

Con la finalidad de ilustrar el problema del horizonte podemos hacer algunas aproximaciones sobre la dinámica de nuestro Universo. Consideraremos un universo plano dominado por materia desde época en la cual la CMB fue emitida y hasta su detección, considerando que la época de dominio de energía oscura ha sido breve, por lo cual sus efectos pueden ser despreciados. El tamaño del horizonte cosmológico al tiempo de emisión de la CMB,  $t_e$ , es

$$h(t_e) = a(t_e) \int_0^{t_e} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.41)$$

Por otro lado, la distancia propia entre un observador y una fuente de CMB momento de la emisión está dada por

$$d_{CMB} = a(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.42)$$

por lo que si se observan fuentes provenientes de dos direcciones opuestas la separación entre ellas es aproximadamente

$$d_{sep} = 2d_{CMB}. \quad (2.43)$$

Podemos preguntarnos si dos fuentes de CMB ubicadas en direcciones opuestas pudieron estar en contacto al momento de la emisión, para lo cual es útil considerar el cociente  $d_{sep}/h(t_e)$ . Bajo nuestras aproximaciones tenemos que  $a(t) \propto t^{2/3}$ , de la ecuación (2.25), por lo que entonces

$$\begin{aligned} \frac{d_{sep}}{h(t_e)} &= \left( 2t_e^{2/3} \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt'}{t'^{2/3}} \right) \left( t_e^{2/3} \int_0^{t_e} \frac{dt'}{t'^{2/3}} \right)^{-1} \\ &= \frac{6t_e^{\frac{2}{3}} t_0^{\frac{1}{3}} \left[ 1 - \left( \frac{t_e}{t_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right]}{3t_e} \\ &= 2 \left[ \left( \frac{t_0}{t_e} \right)^{1/3} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

El corrimiento al rojo de la luz emitida al tiempo  $t_e$  y detectada a un tiempo  $t_0$  debido a la expansión en un universo FLRW está dado por

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad (2.45)$$

con lo que podemos escribir

$$\frac{d_{sep}}{h(t_e)} = 2[(1+z)^{1/2} - 1], \quad (2.46)$$

con lo que al considerar  $z \approx 1100$  observamos que

$$\frac{d_{sep}}{h(t_e)} \approx 64, \quad (2.47)$$

con lo que la distancia entre dos fuentes de CMB provenientes de direcciones opuestas es aproximadamente 64 veces el tamaño del horizonte cosmológico, con lo que no es posible que pudieran establecer contacto entre ellas. Dado esto, nuestra intuición nos llevaría a pensar que las propiedades de esta radiación como por ejemplo su temperatura deberían ser distintas. Sin embargo, en el caso de la temperatura las observaciones nos indican una temperatura prácticamente homogénea.

### 2.3. Inflación por medio de un campo escalar

Los problemas revisados en la sección anterior fueron abordados por Guth en 1981 [32], quien encontró que ambos pueden resolverse de manera simultanea si se considera una fase de expansión

acelerada durante el Universo temprano, llamada *inflación cosmológica*. Revisemos la ecuación (2.40) que puede ser reescrita como

$$h(t) = a(t) \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a'H}, \quad (2.48)$$

en donde el término  $1/aH$  es llamado *horizonte de Hubble comóvil* que, junto con el *horizonte de Hubble* ( $1/H$ ), representa otra forma de determinar si dos eventos pueden estar en contacto causal. Objetos separados por distancias mayores al horizonte de Hubble no pueden estar en contacto causal en un momento determinado, lo cual no significa que no lo hayan estado en el pasado. Notamos, que este término también aparece en (2.32) y observamos que en condiciones de un universo dominado por radiación o materia tiende a incrementarse, pues de acuerdo con (2.24)

$$\frac{1}{aH} \propto t^{1-\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (2.49)$$

dando origen a los problemas presentados anteriormente, por lo que al conseguir que decrezca dichos problemas pueden hallar solución. Por ejemplo, tomemos la definición de  $\Omega_k$ . En un universo con curvatura no nula se tiene que

$$|\Omega_k| = \frac{1}{(aH)^2}, \quad (2.50)$$

de modo que al disminuir el horizonte de Hubble,  $\Omega_k$  también disminuye, haciendo que tienda a cero, resolviendo el problema de planitud. Por otro lado, el problema del horizonte queda resuelto, pues esto permite que el Universo observable iniciara dentro del horizonte de Hubble, que posteriormente disminuyó para que, una vez concluido el periodo inflacionario, recuperase su tendencia creciente.

El hecho de que el horizonte de Hubble decrezca implica una expansión acelerada, pues

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} > 0. \quad (2.51)$$

Existen diversos escenarios para producir inflación cosmológica. Los modelos más sencillos involucran un único campo escalar homogéneo e isótropo  $\phi$ , conocido como inflatón, mínimamente acoplado a la gravedad, cuya dinámica es descrita mediante la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_p^2}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.52)$$

en donde  $M_p^2 = 1/8\pi G$  es la masa de Planck reducida y  $g$  es el determinante de la métrica del espacio-tiempo FLRW.

Consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} = 0. \quad (2.53)$$

Dada la métrica FLRW, se tiene que  $\sqrt{-g} = a^3$ . Además, como el campo satisface las condiciones de homogeneidad e isotropía, entonces

$$\partial_i \phi = 0, \quad (2.54)$$

con  $i = 1, 2, 3$  y por tanto su lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.55)$$

de modo que las ecuaciones en (2.53) se escriben como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(a^3 \mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_t \left( a^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \\ &= -a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\partial(a^3 \dot{\phi})}{\partial t} \\ &= -a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} - 3a^2 \dot{a} \dot{\phi} - a^3 \ddot{\phi}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

de donde

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.57)$$

es la ecuación de movimiento para el campo del inflatón.

Por otro lado, en términos de la densidad lagrangiana, el tensor de energía-momento se define de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.58)$$

de manera que para el inflatón obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.59)$$

y por tanto

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (2.60)$$

Es así que al considerar (2.11) las expresiones resultantes para la densidad de energía y la presión están dadas por

$$\rho = T^0{}_0 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.61)$$

$$P = -T^i{}_i = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (2.62)$$

de modo que la ecuación de estado del inflatón es

$$\omega = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}, \quad (2.63)$$

mientras que al sustituir en (2.18) se obtiene la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (2.64)$$

### 2.3.1. Aproximación de slow-roll

Como hemos hecho notar con anterioridad, para obtener una expansión acelerada es necesario que el contenido en el Universo satisfaga  $\omega \approx -1$ , por lo que, de acuerdo con (2.63), es posible tener inflación siempre que la energía potencial domine sobre la energía cinética, es decir,

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \quad (2.65)$$

Además, la expansión acelerada solo puede llevarse a cabo durante un periodo de tiempo lo suficientemente largo si la segunda derivada temporal del campo  $\phi$  es lo suficientemente pequeña, esto es

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}. \quad (2.66)$$

Estas condiciones constituyen la llamada aproximación de *rodamiento lento* o *slow-roll*. Bajo esta aproximación la ecuación de movimiento (2.57) se escribe como

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \approx 0, \quad (2.67)$$

mientras que la ecuación de Friedmann (2.64) es

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_p^2} V(\phi). \quad (2.68)$$

Las condiciones de rodamiento lento también pueden ser entendidas a través de los parámetros de slow-roll  $\epsilon_V$  y  $\eta_V$ , definidos como

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_p^2}{2} \frac{V_\phi^2}{V^2} \quad \text{y} \quad \eta_V \equiv M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V}, \quad (2.69)$$

con las variables con subíndice  $\phi$  son derivadas con respecto al campo  $\phi$ . De manera alternativa, podemos hacer uso de los parámetros  $\epsilon$  y  $\delta$ , definidos como

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad \text{y} \quad \delta \equiv \frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}. \quad (2.70)$$

Las condiciones de slow-roll dan como resultado restricciones para los valores de estos parámetros. Para obtener una expansión acelerada se requiere

$$\frac{\ddot{a}}{a} \gg 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H} + H^2 \gg 0, \quad (2.71)$$

de donde

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (2.72)$$

Además notamos que, bajo la aproximación de rodamiento lento, las ecuaciones (2.67) y (2.68) dan como resultado  $\epsilon = \epsilon_V$ , por lo que también obtenemos una condición sobre  $\epsilon_V$ , esto es

$$\epsilon_V \ll 1, \quad (2.73)$$

cuando se tiene inflación del tipo slow-roll. Por otro lado, notamos que la ecuación (2.67) hace posible expresar  $\ddot{\phi}$  como

$$\ddot{\phi} = -\frac{\dot{\phi}V_{\phi\phi}}{3H} - \frac{V_{\phi}}{3}\epsilon_V, \quad (2.74)$$

de manera que entonces la condición (2.66) toma la forma

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{\ddot{\phi}}{V_{\phi}} = \frac{1}{3} \left( \epsilon_V - M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \right) = \frac{1}{3} (\epsilon_V - \eta_V) \ll 1, \quad (2.75)$$

y por tanto,

$$|\eta_V| \ll 1. \quad (2.76)$$

Finalmente, notamos que si la aproximación de slow-roll es válida entonces

$$\delta = \epsilon_V - \eta_V, \quad (2.77)$$

de modo que (2.76) impone

$$|\delta| \ll 1. \quad (2.78)$$

Una vez que el periodo inflacionario concluye, el inflatón decae en las partículas del modelo estándar, en un proceso llamado *recalentamiento*. El proceso inflacionario queda representado de forma esquemática en la figura 2.1.

### 2.3.2. La cantidad de inflación

Un factor importante para realizar predicciones sobre modelos inflacionarios es la cantidad de inflación que es llevada a cabo. Esta cantidad se expresa comúnmente a través de el número de e-folds  $N$ , esto es, la cantidad de veces que el factor de escala crece exponencialmente y que está dado por

$$N \equiv \ln \left( \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} H \frac{d\phi}{\dot{\phi}}, \quad (2.79)$$

en donde  $t_i$  y  $t_f$  son, respectivamente, el tiempo al inicio y al final de inflación así como  $\phi_i = \phi(t_i)$  y  $\phi_f = \phi(t_f)$ . Además hicimos uso de  $dt = d\phi/\dot{\phi}$ . Típicamente se requieren más 60 e-folds para que inflación resuelva de manera satisfactoria los problemas de planitud y del horizonte, aunque el valor

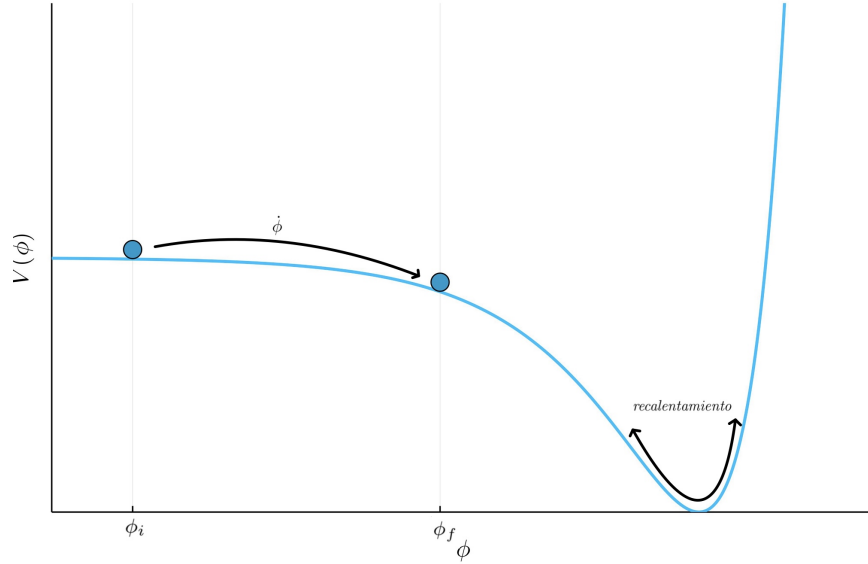


Figura 2.1: El periodo inflacionario se lleva a cabo mientras la energía potencial domine sobre la cinética y finaliza una vez que éstas se vuelven comparables. La condición en (2.66) garantiza que esto se haga lentamente, permitiendo que la expansión acelerada ocurra durante una cantidad de tiempo suficiente para resolver los problemas para los cuales se plantea. Esto es un campo rodando lentamente sobre su potencial. Una vez que esto ocurre, el campo alcanza un mínimo en su potencial, oscilando alrededor de éste durante la etapa de recalentamiento.

preciso de otros factores como la temperatura de recalentamiento. Si nuestro escenario inflacionario puede ser descrito mediante la aproximación de rodamiento lento entonces

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}}, \quad (2.80)$$

donde podemos calcular este número como función de  $\phi$ , es decir

$$N(\phi) = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}}. \quad (2.81)$$

## Capítulo 3

# Un universo inhomogéneo

En la sección 2.2 del capítulo anterior tratamos dos problemas en la cosmología para los cuales el paradigma inflacionario provee una solución sencilla. A este par de problemas se suma el problema de los monopolos magnéticos que también es resuelto al considerar un periodo de expansión acelerada. Sin embargo, el mayor mérito de la inflación cosmológica es que ofrece una explicación a las inhomogeneidades en nuestro Universo (observadas, por ejemplo, en la CMB) y puede explicar el origen de las estructuras que observamos a gran escala.

Durante el periodo inflacionario la contribución de energía dominante en el Universo corresponde al campo del inflatón. Fluctuaciones en este campo evolucionan provocando cambios en la métrica FLRW, que a su vez tienen repercusión en el campo, pues están relacionados mediante las ecuaciones de Einstein.

Las fluctuaciones producen que el final de inflación ocurra a tiempos ligeramente distintos para diferentes regiones del Universo, provocando que la evolución de estas zonas siga un ritmo no uniforme. Esto tiene como consecuencia fluctuaciones en la densidad de energía  $\delta\rho(t, \mathbf{x})$ , que tienen como última consecuencia la formación de estructuras como galaxias, cúmulos, etc.

A lo largo de este capítulo hacemos uso de unidades naturales, por lo que entonces  $M_p = 1$  en nuestras ecuaciones.

### 3.1. Teoría de perturbaciones cosmológicas

#### 3.1.1. La descomposición escalar-vector-tensor

Consideremos ligeras fluctuaciones al rededor de un fondo homogéneo e isótropo, de modo que la métrica puede escribirse como

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = g_{\mu\nu}^0(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), \quad (3.1)$$

en donde  $g_{\mu\nu}(t)$  es la métrica FLRW, cuyo intervalo es descrito en la ecuación (2.1).

El elemento de línea que corresponde a (3.1) se escribe como

$$ds^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j - h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu], \quad (3.2)$$

en donde  $\tau$  es el tiempo conforme (relacionado con el tiempo propio de un observador comóvil mediante  $dt = a(\tau)d\tau$ ),  $\gamma_{ij}$  es la métrica de un espacio tridimensional de curvatura constante máximamente simétrico (en caso de un espacio-tiempo plano  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ ) y las perturbaciones en la métrica satisfacen  $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}/a^2$ .

Un tensor simétrico como  $h_{\mu\nu}$  (que debe ser simétrico porque la métrica lo es) posee 10 grados de libertad. Sin embargo, debido a que tenemos la libertad de elegir nuestras coordenadas, cuatro de estos grados de libertad son dependientes de esta elección, por lo que solo 6 de ellos tienen significado físico. El tratamiento de los grados de libertad en  $h_{\mu\nu}$  lleva a considerar una descomposición de las perturbaciones de la métrica en modos escalares, vectoriales y tensoriales de la siguiente manera

$$h_{00} = -2\varphi, \quad h_{0i} = B_i, \quad h_{ij} = 2(\psi\gamma_{ij} + E_{ij}) \quad \text{con} \quad \gamma^{ij}E_{ij} = 0, \quad (3.3)$$

siendo  $\gamma^{ij}$  la matriz inversa de  $\gamma_{ij}$  y hacemos notar que al tomar  $E_{ij}$  como un tensor sin traza no existe pérdida de generalidad, pues esta puede ser incluida en  $\psi$ . En esta descomposición recuperamos los 10 grados de libertad correspondientes a  $h_{\mu\nu}$  con la ventaja adicional de que, en el régimen lineal, no existe acoplamiento entre estos tres tipos de fluctuaciones, por lo que su evolución es independiente y pueden tratarse por separado.

Para entender mejor esta descomposición es útil considerar el caso análogo de la descomposición de un vector en una parte longitudinal y otra transversal. Dado cualquier campo vectorial en un espacio tridimensional  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  nos es posible escribir

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^L + \mathbf{v}^T \quad \text{con} \quad \nabla \times \mathbf{v}^L = \nabla \cdot \mathbf{v}^T = 0, \quad (3.4)$$

en donde el rotacional y el gradiente se definen mediante la derivada covariante 3-dimensional  $\nabla_i$  definida a su vez con respecto a la métrica 3-dimensional  $\gamma_{ij}$ . Sabemos que esta descomposición no es única, pero existe. Notamos además que existe un campo escalar  $\phi_v$  tal que  $\mathbf{v}^L = \nabla\phi_v$ , de modo que nos es posible escribir un vector en términos de un escalar (la parte longitudinal) y una parte que no puede obtenerse a partir de un escalar (la parte transversal). Además, contamos con un grado de libertad escalar ( $\phi_v$ ) y dos vectoriales (se tienen tres componentes en  $\mathbf{v}^T$ , pero con una restricción) por lo que recuperamos los tres grados de libertad correspondientes a  $\mathbf{v}$ .

Podemos extender de manera análoga este concepto y aplicarlo a un tensor de rango dos, notando que en este caso cada uno de los índices puede ser longitudinal o transversal, por lo que se tienen tres posibles casos: ambos índices son longitudinales, uno es transversal o ambos son transversales, es decir

$$S_{ij} = S_{ij}^L + S_{ij}^I + S_{ij}^T, \quad (3.5)$$

con la condición

$$\gamma^{ik}\nabla_k S_{ij}^T = 0. \quad (3.6)$$

Las otras dos partes en (3.5) pueden escribirse en términos de un campo escalar  $\varphi_S$  y un campo vectorial transversal  $S^T$  como

$$S_{ij}^L = (\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \gamma^{ij} \nabla^2) \varphi_S, \quad S_{ij}^I = \frac{1}{2} (\nabla_i S_j^T + \nabla_j S_i^T). \quad (3.7)$$

Considerando un universo plano el diferencial de línea de la métrica perturbada se escribe como

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ (1 + 2\varphi) d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i - [(1 - 2\psi) \delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \}, \quad (3.8)$$

mientras que la derivada covariante 3-dimensional se escribe como  $\nabla_i = \partial/\partial x^i$  si se elige el sistema coordinado adecuado. De acuerdo con nuestra discusión anterior, el vector  $B_i$  puede escribirse como

$$B_i = B_{,i} + B_i^T, \quad (3.9)$$

siendo  $B$  un campo escalar y  $B_i^T$  la parte transversal de  $B_i$  con las comas representando derivadas parciales (esto es,  $\partial_i x = x_{,i}$ ). Por otro lado, el tensor  $E_{ij}$  puede descomponerse como

$$E_{ij} = E_{,ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 E + E_{i,j}^I + E_{ij}^T, \quad (3.10)$$

en donde  $E$  es un campo escalar,  $E_j^T$  es un vector transversal y  $E_{ij}^T$  es un tensor transversal, es decir, que satisface (3.6).

Los modos tensoriales son la parte de  $h_{ij}$  que no pueden ser expresados en términos de gradientes de campos escalares o vectoriales, es decir,  $E_{ij}^T$ . Esta parte posee dos grados de libertad, cinco de ellos provenientes de ser un tensor 3-dimensional simétrico sin traza, menos tres debidas a la condición (3.6). Estos modos representan a las ondas gravitacionales y sus dos grados de libertad corresponden con sus dos posibles polarizaciones.

Los modos vectoriales corresponden a  $B_i^T$  y  $E_i^I$  y cada uno posee dos grados de libertad. Estos modos han sido asociados a efectos gravitomagnéticos que no son producidos por inflación y que tampoco han sido observados.

Finalmente, los modos escalares están dados por  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $B$  y  $E$ , aportando cada uno un grado de libertad, representando la gravedad Newtoniana con consideraciones relativistas, que son observadas por medio de fluctuaciones en la densidad.

Es así que, empleando las ecuaciones (3.9), (3.10) y teniendo en cuenta que no se producen perturbaciones vectoriales durante inflación, podemos reescribir (3.8) como

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ (1 + 2\varphi) d\tau^2 - 2B_{,i} d\tau dx^i - \left[ \left( 1 - 2\psi - \frac{2}{3} \nabla^2 E \right) \delta_{ij} + 2E_{,ij} + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (3.11)$$

tomando la definición

$$h_{ij} \equiv 2E_{ij}^T. \quad (3.12)$$

### 3.1.2. El problema de la libertad de norma

Existe una sutileza en el procedimiento empleado para el tratamiento de las perturbaciones cosmológicas. En este procedimiento consideramos un universo simple  $M^0$ , que podemos llamar de fondo y obtenemos a partir de él uno más realista  $M^1$ , que podemos llamar perturbado, de manera que la perturbación en cualquier cantidad de interés en un punto  $p$  está dada por la diferencia entre las mismas cantidades en ambos universos. Por ejemplo, en el caso de la métrica, sus perturbaciones están dadas por

$$\delta g_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}(p) - g_{\mu\nu}^0(p), \quad (3.13)$$

mientras que, si consideramos un campo cualquiera  $\kappa$ , las perturbaciones son

$$\delta\kappa(p) = \kappa(p) - \kappa^0(p). \quad (3.14)$$

Lo que este enfoque sugiere es que existe algo especial en la relación entre el universo de fondo y el perturbado cuando esto puede no ser así. Si solo contamos con el universo perturbado  $M^1$ , ¿podríamos recuperar de manera única el universo de fondo  $M^0$ ? Si nuestra única restricción es el hecho de que las fluctuaciones son pequeñas, entonces la respuesta es no. La elección de un fondo para  $M^1$  es equivalente a la definición de un mapeo  $\Phi : M^0 \rightarrow M^1$ , de manera que las perturbaciones quedan definidas mediante la relación

$$\delta\kappa = \kappa(\Phi(p)) - \kappa^0(p), \quad (3.15)$$

donde es más claro que las perturbaciones dependen de cómo se elige este mapeo. La libertad de elegir  $\Phi$  es la libertad de norma, mientras que el cambio del mapeo es una transformación de norma.

El problema con la libertad de norma tiene su origen en que cambiar el mapeo  $\Phi$  tiene un impacto en la perturbación de una cantidad, es decir, puede asumir diferentes valores bajo las mismas condiciones según la elección de norma. Con esto en mente existen dos enfoques para el tratamiento de las perturbaciones: fijar una norma o identificar cantidades que sean invariantes bajo transformaciones de norma.

Fijar una norma significa elegir el mapeo  $\Phi$ , lo cual implica elegir líneas de mundo en ambos espacios (con coordenadas espaciales fijas), así como “rebanadas” correspondientes a hipersuperficies de tiempo fijo y una correspondencia entre ellos[33]. El problema que esto acarrea es que se corre el riesgo de que aparezcan cantidades que no son físicas. Por otro lado, identificar cantidades invariantes de norma puede ser complicado, aunque tiene la ventaja de eliminar los artefactos de norma, por lo que se tiene la certeza de trabajar únicamente con cantidades físicas.

Algunos ejemplos de cantidades invariantes de norma son los potenciales de Bardeen o la perturbación de curvatura comóvil  $\mathcal{R}$ , que discutiremos más adelante. Sin embargo, para el tratamiento de las perturbaciones escalares es más conveniente fijar una norma, para lo cual existen numerosas posibilidades que son frecuentemente usadas. En ocasiones cierta elección de norma proporciona ventajas sobre otras al momento de la realización de determinados cálculos, mientras que otros se

benefician de una elección diferente, por lo cual es imprescindible conocer cómo cambian las perturbaciones escalares bajo una transformación de norma. Esta complicación no existe en el tratamiento de modos tensoriales, pues estos constituyen invariantes de norma.

Considerando únicamente los modos escalares, el intervalo (3.11) se escribe como

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ (1 + 2\varphi)d\tau^2 - 2B_{,i}d\tau dx^i - \left[ \left( 1 - 2\psi - \frac{2}{3}\nabla^2 E \right) \delta_{ij} + 2E_{,ij} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (3.16)$$

Consideremos el cambio de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (3.17)$$

en donde

$$\delta x^0 = \xi^0, \quad (3.18a)$$

$$\delta x^i = \beta^{,i} + v^i, \quad (3.18b)$$

con  $\xi^0$ ,  $\beta$  escalares y  $v^i$  un vector sin divergencia, es decir, que satisface  $v^i_{,i} = 0$ . Debido a la ausencia de modos vectoriales nos es posible ignorar  $v^i$ , por lo que entonces los diferenciales se transforman como

$$dx^0 = d\tau = d\tilde{\tau} - \xi^0_{,i} d\tilde{x}^i, \quad (3.19)$$

$$dx^i = d\tilde{x}^i - (\beta')^{,i} d\tilde{\tau} - (\beta_{,j})^{,i} d\tilde{x}^j, \quad (3.20)$$

con las variables primadas siendo derivadas con respecto al tiempo conforme. De este modo, bajo estas nuevas coordenadas el intervalo (3.16) se escribe como

$$ds^2 = a^2(\tilde{\tau}) \left\{ (1 + 2\varphi - 2\xi^{0'} - 2\xi^0 \mathcal{H}) d\tilde{\tau}^2 - (2\xi^0_{,i} + 2B_{,i} - 2\beta'_{,i}) d\tilde{\tau} d\tilde{x}^i - \left[ \left( 1 - 2\psi - 2\xi^0 \mathcal{H} - \frac{2}{3}\nabla^2 E \right) \delta_{ij} - 2\beta_{,ij} + 2E_{,ij} \right] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right\}, \quad (3.21)$$

en donde se define el parámetro de Hubble en el tiempo comóvil como  $\mathcal{H} \equiv a'/a$  y se hace uso de la aproximación  $a^2(\tau) \approx a^2(\tilde{\tau}) - 2aa'\xi^0$ . Además, es importante notar que este tratamiento se hace a primer orden. Por otro lado, el elemento de línea en el otro sistema de coordenadas está dada por (3.16), es decir,

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{a}^2(\tilde{\tau}) \left\{ (1 + 2\varphi) d\tilde{\tau}^2 - 2\tilde{B}_{,i} d\tilde{\tau} d\tilde{x}^i - \left[ \left( 1 - 2\tilde{\psi} - \frac{2}{3}\nabla^2 \tilde{E} \right) \delta_{ij} - 2\tilde{E}_{,ij} \right] d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right\}. \quad (3.22)$$

Apelamos entonces a la invarianza del intervalo, es decir, que  $d\tilde{s}^2 = ds^2$ , considerando la aproximación  $\tilde{a}(\tilde{\tau}) = a(\tilde{\tau})$  por lo que al comparar (3.21) y (3.22) podemos deducir que los modos escalares

se transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= B + \beta' + \xi^0, \\
\tilde{E} &= E - \beta, \\
\tilde{\varphi} &= \varphi - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \\
\tilde{\psi} &= \psi + \mathcal{H}\xi^0 + \frac{1}{3}\nabla^2\beta.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Podemos dar un paso más al calcular el cambio de las fluctuaciones en cualquier cantidad escalar  $f$  bajo una transformación de norma dada por (3.17) y (3.18). Consideremos

$$\delta f(x^\mu) = f(x^\mu) - f^0(x^\mu), \tag{3.24}$$

con  $f^0$  un campo escalar homogéneo e isótropo en el universo de fondo. Bajo nuestra transformación de coordenadas, se escribe como

$$\tilde{\delta} f(\tilde{x}^\mu) = \tilde{f}(\tilde{x}^\mu) - \tilde{f}^0(\tilde{x}^\mu), \tag{3.25}$$

en donde al ser  $f$  un escalar, la evaluación en el mismo punto físico debe permanecer igual independientemente de las coordenadas elegidas, es decir, debe satisfacerse

$$\tilde{f}(\tilde{x}^\mu) = f(x^\mu). \tag{3.26}$$

Por otro lado, el campo sobre el fondo satisface condiciones de homogeneidad e isotropía, por lo que su dependencia es solamente temporal, es decir,

$$f^0(x^\mu) = f^0(x^0) = f^0(\tau). \tag{3.27}$$

Al igual que  $f$ , al ser  $f^0$  una cantidad escalar, debe satisfacer

$$\tilde{f}^0(\tilde{x}^0) = f^0(x^0) = f^0(\tilde{x}^0 - \xi^0) \approx f(\tilde{x}^0), \tag{3.28}$$

en donde consideramos que el cambio en las coordenadas es pequeño. Así, podemos aproximar

$$\tilde{f}^0(\tilde{x}^0) \approx f^0(\tilde{x}^0) \approx \delta x^0 \frac{\partial f^0}{\partial x^0}(x^0) + f^0(x^0), \tag{3.29}$$

con lo que al sustituir (3.26) y (3.29) en (3.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} f(\tilde{x}^\mu) &= f(x^\mu) - \delta x^0 \frac{\partial f^0}{\partial x^0}(x^0) - f^0(x^0) \\
&= f(x^\mu) - f^0(x^\mu) - \xi^{0'} f^{0'}(x^\mu) \\
&= \delta f(x^\mu) - f^{0'}(x^\mu) \xi^0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

## 3.2. Fluctuaciones escalares

### 3.2.1. Fluctuaciones de un campo escalar

Consideremos un campo escalar sin masa  $\chi$  que, al igual que el inflatón, se encuentra mínimamente acoplado a la gravedad aunque sin la necesidad de satisfacer condiciones de homogeneidad o isotropía. Dada la acción (2.52) y la expresión para el tensor de energía-momento (2.59) obtenemos, en el caso de un universo plano, que la ecuación que satisface es

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\chi + V_\chi(\chi) = 0, \quad (3.31)$$

en donde el subíndice  $\chi$  indica una derivación con respecto al campo. Ahora, consideremos que el campo  $\chi$  puede descomponerse en una parte homogénea y fluctuaciones pequeñas con dependencia espacial de la siguiente forma

$$\chi(t, \mathbf{x}) = \chi_0(t) + \delta\chi(t, \mathbf{x}), \quad (3.32)$$

de manera que al sustituir en (3.31) obtenemos

$$\ddot{\chi}_0 + \delta\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi}_0 + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\chi + V_\chi(\chi_0 + \delta\chi) = 0, \quad (3.33)$$

en donde, haciendo uso de la aproximación  $V_\chi(\chi_0 + \delta\chi) \approx V_\chi(\chi_0) + V_{\chi\chi}(\chi_0)\delta\chi$ , nos es posible reordenar los términos de la siguiente manera

$$[\ddot{\chi}_0 + 3H\dot{\chi}_0 + V_\chi(\chi_0)] + [\delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\chi + V_{\chi\chi}(\chi_0)\delta\chi] = 0, \quad (3.34)$$

de modo que el primer sumando (que corresponde a un campo como el inflatón) es anulado y, por tanto, las fluctuaciones deben satisfacer

$$\delta\ddot{\chi} + 3H\delta\dot{\chi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\delta\chi + V_{\chi\chi}(\chi_0)\delta\chi = 0. \quad (3.35)$$

Como consideramos que las fluctuaciones son pequeñas, es suficiente con realizar un análisis lineal, por lo que es útil descomponerlas en sus modos de Fourier, dados por

$$\delta\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.36)$$

en donde  $\mathbf{k}$  es el momento comóvil. Es así que la ecuación (3.35) para cada uno de los modos de Fourier se escribe como

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.37)$$

en donde despreciamos el último término al tomar en cuenta que tanto las fluctuaciones como la segunda derivada del potencial son pequeñas.

En este punto un análisis cualitativo de la ecuación (3.37) puede resultar útil. En la sección 2.3 definimos el horizonte de Hubble. Consideremos entonces la longitud de onda física de las perturbaciones  $\lambda = 2\pi a/k$ , con  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ , en dos situaciones distintas: cuando éstas se encuentran dentro del horizonte de Hubble y cuando se encuentran fuera de él.

El primer caso implica  $\lambda \ll H^{-1}$  o, de manera equivalente,  $k \gg aH$ . Observamos entonces que es posible despreciar el segundo término en (3.37), obteniendo

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.38)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con una frecuencia variable debido a la dependencia temporal del factor de escala. Esto muestra, en un nivel cualitativo, que el comportamiento de las perturbaciones dentro del horizonte de Hubble es oscilatorio.

El segundo caso implica que  $k \ll aH$ , de modo que el tercer término en (3.37) puede despreciarse, de donde obtenemos

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.39)$$

que indica que no hay evolución temporal de las perturbaciones fuera del horizonte de Hubble. Debido a que el horizonte de Hubble decrece durante el periodo inflacionario, las fluctuaciones que comienzan dentro de él oscilan hasta cruzarlo, quedando “congeladas” hasta volver a entrar en él en algún momento de la era dominada por radiación o materia.

Una vez establecido el comportamiento cualitativo de estas fluctuaciones procederemos con una descripción cuantitativa, para lo cual reescribimos (3.37) en términos del tiempo conforme  $\tau$  e introducimos la variable

$$\sigma_{\mathbf{k}} = a\delta\chi_{\mathbf{k}}, \quad (3.40)$$

para obtener

$$\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\sigma_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.41)$$

Nuestra intención es describir las perturbaciones como un sistema cuántico, por lo que realizaremos el procedimiento de cuantización canónica, para lo cual es necesario definir el momento canónico conjugado a  $\sigma$

$$\vartheta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma'}. \quad (3.42)$$

A continuación, promovemos  $\sigma$  y  $\vartheta$  a los operadores  $\hat{\sigma}$  y  $\hat{\vartheta}$ , imponiendo la relación de conmutación

$$[\hat{\sigma}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\vartheta}(\tau, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.43)$$

en donde  $[\hat{\sigma}, \hat{\vartheta}] = \hat{\sigma}\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}\hat{\sigma}$  y  $\delta^3$  denota la delta de Dirac en tres dimensiones. El operador  $\hat{\sigma}$  puede ser expandido en términos de sus operadores de creación y aniquilación de la siguiente manera

$$\hat{\sigma} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \sigma_{\mathbf{k}}(\tau)\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \sigma_{\mathbf{k}}^*(\tau)\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.44)$$

en donde las funciones  $\sigma_{\mathbf{k}}$  satisfacen (3.41) y la relación de conmutación implica

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{con} \quad \sigma_{\mathbf{k}}^* \sigma'_{\mathbf{k}} - (\sigma_{\mathbf{k}}^*)' \sigma_{\mathbf{k}} = -i. \quad (3.45)$$

Finalmente, definimos el estado vacío  $|0\rangle$  mediante la relación

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}, \quad (3.46)$$

en donde la elección de este estado equivale a especificar una condición de frontera que, junto con (3.45), define de manera única las soluciones de (3.41). La elección más común de vacío proviene del vacío de un observador comóvil en el pasado remoto, cuando todas las escalas de las fluctuaciones se encontraban dentro del horizonte de Hubble, i.e.  $k \gg aH$ . En este límite, la ecuación (3.41) toma la forma

$$\sigma_{\mathbf{k}}'' + k^2 \sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.47)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia constante. Si imponemos que el estado vacío sea aquel con un valor mínimo de energía, obtenemos soluciones únicas. Es por esto que imponemos la condición

$$\lim_{-k\tau \rightarrow \infty} \sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (3.48)$$

Consideremos una etapa de expansión acelerada tal que  $a(t) = e^{Ht}$  con  $H$  una constante (lo cual es equivalente a  $\epsilon = 0$ , que es una buena aproximación, aunque nos es posible relajar esta condición). Notamos que, de la definición del tiempo conforme, encontramos que

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}, \quad (3.49)$$

en donde los límites de integración son elegidos de tal modo que un tiempo conforme arbitrario  $\tau$  corresponde a un tiempo comóvil  $t$ , mientras que  $\tau = 0$ , con  $a \rightarrow \infty$ , corresponde a un tiempo en el futuro remoto  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, considerando  $\epsilon = 0$ , el periodo inflacionario es eterno. Sin embargo, a pesar de que esta aproximación es válida en una etapa temprana, no lo es cuando nos acercamos al final de inflación, por lo que  $\tau = 0$  corresponde más bien al final del periodo inflacionario. Con esto  $\tau \rightarrow -\infty$  corresponde a  $t = 0$ , por lo que el tiempo conforme es negativo.

Tomando (3.49), tenemos que  $a''/a = 2/\tau^2$ , por lo que (3.41) puede reescribirse como

$$\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) \sigma_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.50)$$

Realizamos el cambio de variable  $\sigma_{\mathbf{k}} = (-\tau)^{1/2} u_{\mathbf{k}}$ , obteniendo

$$\tau^2 u_{\mathbf{k}}'' + \tau u_{\mathbf{k}}' + \left(k^2 \tau^2 - \frac{9}{4}\right) u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.51)$$

que al definir  $x = -k\tau$  pasa escribirse como

$$x^2 \frac{d^2 u_{\mathbf{k}}}{dx^2} + x \frac{du_{\mathbf{k}}}{dx} + \left[ x^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right] u_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.52)$$

Esta es una ecuación de Bessel, cuya solución general puede escribirse como

$$u_{\mathbf{k}} = c_1 H_{3/2}^{(1)}(x) + c_2 H_{3/2}^{(2)}(x), \quad (3.53)$$

con  $H_{3/2}^{(1,2)}(x)$  las funciones de Hankel de orden  $3/2$  del primer y segundo tipo y siendo  $c_1$  y  $c_2$  constantes. Por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.41) se escribe como

$$\sigma_{\mathbf{k}} = (\sqrt{-\tau})^{-1} \left[ c_1 H_{3/2}^{(1)}(x) + c_2 H_{3/2}^{(2)}(x) \right], \quad (3.54)$$

que, debido a nuestra elección de vacío expresada mediante la condición (3.48) y al hecho de que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_{\nu}^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x - \nu\pi/2 - \pi/4)}, \quad (3.55)$$

podemos tomar  $c_1 = -\tau\sqrt{\pi}/2$  y  $c_2 = 0$ , de manera que entonces

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{-\tau\pi}}{2} H_{3/2}^{(1)}(-k\tau). \quad (3.56)$$

Por otro lado, podemos estudiar el comportamiento de estos modos cuando se encuentran fuera del horizonte, lo cual es equivalente a tomar el límite  $\tau \rightarrow 0$  de (3.56). Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} H_{\nu}^{(1)}(x) = -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^{\nu}, \quad (3.57)$$

de modo que

$$\sigma_{\mathbf{k}} \approx \frac{i}{\sqrt{2k^3\tau}} = -i \frac{aH}{\sqrt{2k^3}}, \quad (3.58)$$

con lo que  $\delta\chi_{\mathbf{k}}$  tiene el comportamiento cualitativo observado al inicio de la sección para modos dentro y fuera del horizonte de Hubble.

En este punto es útil definir el *espectro de potencias*, el cual caracteriza a las perturbaciones. Para una cantidad cualquiera  $g(t, \mathbf{x})$  que puede descomponerse en sus modos de Fourier como

$$g(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} g_{\mathbf{k}}(t). \quad (3.59)$$

Entonces definimos el espectro de potencias  $\Delta_g^2(k)$  mediante

$$\langle 0 | g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_g^2(k). \quad (3.60)$$

### 3.2.2. Fluctuaciones en el campo del inflatón

En la sección anterior tratamos con las fluctuaciones de un campo escalar cualquiera en un universo en expansión. Sin embargo, el caso del inflatón es ligeramente distinto pues, durante el periodo inflacionario, el inflatón fue el componente dominante. Esto quiere decir que la métrica se ve afectada por fluctuaciones del campo del inflatón, cuya dinámica se ve afectada por las perturbaciones en la métrica. Como mencionamos en la sección 3.1, la teoría de perturbaciones lineales nos permite desacoplar los modos escalares y tensoriales. Al considerar únicamente los modos escalares en una métrica perturbada como en (3.1), las ecuaciones de Einstein (2.5) imponen una relación entre las perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo y su contenido, representado en el tensor de energía-momento. Dicha relación, recordando que hacemos uso de unidades naturales, queda descrita por

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu}. \quad (3.61)$$

En estas ecuaciones, cuyo desarrollo completo puede verse en [8], las perturbaciones del tensor de Einstein son calculadas en términos de el tensor y el escalar de Ricci, así como de sus perturbaciones a través de

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R, \quad (3.62)$$

con  $\delta R_{\mu\nu}$  dado en términos de perturbaciones en los símbolos de Christoffel y

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta R_{\alpha\nu}. \quad (3.63)$$

Por otro lado, las fluctuaciones  $\delta T_{\mu\nu}$  del tensor de energía momento quedan dadas en términos de las perturbaciones  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta\phi$  al considerar la definición del tensor de energía-momento en (2.58) para un campo

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (3.64)$$

con una acción (2.52), en un universo cuya métrica se escribe como en (3.16). Las componentes con índices mixtos, quedan dadas por

$$\delta G^{\mu}_{\nu} = \delta(g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}) = \delta g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta G_{\alpha\nu}, \quad (3.65a)$$

$$\delta T^{\mu}_{\nu} = \delta(g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}) = \delta g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta T_{\alpha\nu}, \quad (3.65b)$$

por lo que, al elegir la norma Newtoniana conforme, que queda definida imponiendo  $B = 0$  y  $E = 0$  de manera que la métrica se escribe como

$$ds^2 = a^2(\tau)[(1 + 2\varphi)d\tau^2 - (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (3.66)$$

obtenemos que (3.61) se puede escribir como

$$\delta G^0_0 = \frac{2}{a^2} [-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\varphi + \psi')] = \delta T^0_0, \quad (3.67a)$$

$$\delta G^0_i = \frac{2}{a^2} [\mathcal{H}\varphi_{,i} + \psi'_{,i}] = \delta T^0_i, \quad (3.67b)$$

$$\begin{aligned} \delta G^i_j &= \frac{-2}{a^2} \{ [(2\mathcal{H}' + H^2)\varphi + 2\mathcal{H}\varphi' + 2\mathcal{H}\psi' + \psi''] \} \delta^i_j \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla^2\psi - \nabla^2\varphi) \delta^i_j + \frac{1}{2} \delta^{ik} (\psi - \varphi)_{,kj} = \delta T^i_j. \end{aligned} \quad (3.67c)$$

Debido a que el tensor de energía-momento no posee elementos fuera de su diagonal, de la ecuación (3.67c) tenemos que

$$(\psi - \varphi)_{,ij} = 0 \quad \implies \quad \varphi = \psi, \quad (3.68)$$

de modo que el tratamiento de las fluctuaciones escalares queda descrito por  $\psi$  y  $\delta\phi$ . A la cantidad  $\psi$  se le llama *perturbación de curvatura* pues, si se toman hipersuperficies 3-dimensionales de tiempo constante  $\tau$ , puede calcularse en cada una de ellas el escalar de curvatura 3-dimensional de manera análoga a como se hace en (2.6). Reemplazando en (2.7)  $g^{\mu\nu}$  (o  $g_{\mu\nu}$ ) por la métrica inducida en estas hipersuperficies, i.e. la parte espacial de (3.66), que está dada por

$$\gamma_{ij} = a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}, \quad (3.69)$$

obtenemos, luego de los cálculos correspondientes,

$$R^{(3D)} = \frac{4}{a^2} \nabla^2\psi. \quad (3.70)$$

Sin embargo,  $\psi$  no es un invariante de norma. Consideremos, por ejemplo, una traslación temporal  $\tau \rightarrow \tau + \delta\tau$ , lo cual es tomar una nueva definición de hipersuperficies espaciales. Con esto,  $\psi$  se transforma de acuerdo con (3.23), es decir

$$\psi \rightarrow \psi + \mathcal{H}\delta\tau. \quad (3.71)$$

Si consideramos entonces el corte comóvil, que es aquel para el cual las hipersuperficies son ortogonales a las líneas de mundo de observadores comóviles, se observa que  $\delta\phi_{com} = 0$  porque estos observadores no observan flujo de energía. De acuerdo con (3.30), pasar de un corte arbitrario al corte comóvil implica que

$$\delta\phi \rightarrow \delta\phi_{com} = \delta\phi - \phi'\delta\tau, \quad (3.72)$$

con lo que

$$\delta\tau = \frac{\delta\phi}{\phi'}. \quad (3.73)$$

Por lo tanto,

$$\psi \rightarrow \psi_{com} = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'}, \quad (3.74)$$

con lo que resulta conveniente definir la *perturbación de curvatura comóvil*

$$\mathcal{R} \equiv \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'} = \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}, \quad (3.75)$$

que representa el potencial gravitacional en cortes para los cuales  $\delta\phi = 0$ . Además de ser un invariante de norma,  $\mathcal{R}$  tiene la ventaja de permanecer constante una vez que sale del horizonte de Hubble, con lo cual es suficiente calcular su valor al momento de su salida, pues permanecerá igual hasta que vuelva a entrar.

Otra cantidad que guarda una estrecha relación con la perturbación de curvatura comóvil es la *perturbación de curvatura en cortes de densidad uniforme*. De manera análoga al caso anterior, consideremos una traslación temporal  $\tau \rightarrow \tau + \delta\tau$  tal que, sobre las hipersuperficies de tiempo constante, la densidad de energía es uniforme, es decir,  $\delta\rho_{unif} = 0$ . Bajo la traslación temporal correspondiente

$$\delta\rho \rightarrow \delta\rho_{unif} = \delta\rho - \rho' \delta\tau, \quad (3.76)$$

de manera que

$$\delta\tau = \frac{\delta\rho}{\rho'}, \quad (3.77)$$

mientras que la perturbación de curvatura se transforma como

$$\psi \rightarrow \psi_{unif} = \psi + \mathcal{H} \delta\tau = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\rho'}, \quad (3.78)$$

con lo que definimos la perturbación de curvatura en cortes de densidad uniforme como

$$\zeta \equiv \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\rho'} = \psi + H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}, \quad (3.79)$$

que, al igual que  $\mathcal{R}$  es un invariante de norma y representa el potencial gravitacional en cortes de densidad uniforme.

Notamos además que, debido a la ecuación de continuidad (2.14), podemos escribir esta cantidad como

$$\zeta = \psi - H \frac{\delta\rho}{3H(\rho + P)} = \psi - \frac{\delta\rho}{3(\rho + P)}. \quad (3.80)$$

Además, durante el periodo inflacionario tenemos que  $\rho + P = \dot{\phi}^2$ , con lo que

$$\dot{\rho} + 3H\dot{\phi}^2 = 0 \quad \implies \quad \dot{\rho} = -3H\dot{\phi}^2, \quad (3.81)$$

de donde a primer orden

$$\delta\rho = -3H\dot{\phi}\delta\phi, \quad (3.82)$$

por lo cual

$$\zeta = \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \mathcal{R}, \quad (3.83)$$

es decir, durante el periodo inflacionario ambas cantidades son equivalentes, por lo que en lo sucesivo nos centraremos en  $\mathcal{R}$ .

Como mencionamos anteriormente, debido a que la perturbación de curvatura comóvil es constante fuera del horizonte de Hubble, basta con conocer su valor al momento de su salida, con lo cual es necesario estudiar su dinámica. El procedimiento usual para ello consiste en fijar una norma para la cual se satisface

$$\delta\phi = 0, \quad \delta g_{ij} = a^2[1 - 2\mathcal{R}]\delta_{ij}, \quad (3.84)$$

en la cual se desarrolla la acción (2.52) a segundo orden en las perturbaciones. El desarrollo detallado de esto puede verse en [6] en donde se obtiene

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int dt d^3x a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left[ \dot{\mathcal{R}} - a^{-2}(\partial_i \mathcal{R})^2 \right], \quad (3.85)$$

que al pasar a tiempo conforme  $\tau$  y definiendo la *variable de Mukhanov* como

$$v = z\mathcal{R} \quad \text{con} \quad z^2 \equiv a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = 2a^2\epsilon, \quad (3.86)$$

toma la forma

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[ (v')^2 + (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right]. \quad (3.87)$$

Descomponiendo  $v$  en sus modos de Fourier y llevando un proceso de cuantización análogo al realizado en la sección 3.2.1, obtenemos que la ecuación que satisface es la llamada *ecuación de Mukhanov-Sasaki*

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.88)$$

Dada la definición de  $z$  tenemos que

$$\frac{z'}{z} = aH(1 + \epsilon + \delta), \quad (3.89)$$

$$\frac{z''}{z} = (aH)^2 \left[ 2 - \epsilon + 3(\epsilon + \delta) - \epsilon(\epsilon + \delta) + (\epsilon + \delta)^2 + \frac{2(\dot{\epsilon} + \dot{\delta})}{H} \right], \quad (3.90)$$

en donde, para extender un poco lo realizado en la sección 3.2.1, consideramos que durante la era inflacionaria el parámetro de Hubble no se mantiene constante, sino que evoluciona de acuerdo con  $\dot{H} = -\epsilon H^2$ . Con esto en cuenta, consideramos la relación

$$\frac{d(aH)}{d\tau} = (aH)^2(1 - \epsilon), \quad (3.91)$$

que al integrarse considerando que la variación de  $\epsilon$  en el tiempo es pequeña nos lleva a obtener

$$aH = -\frac{1}{(1-\epsilon)\tau}. \quad (3.92)$$

Bajo la aproximación de slow-roll  $\epsilon \ll 1$ , con lo que, a primer orden en  $\epsilon$ , el factor de escala se escribe como

$$a(\tau) = -\frac{(1+\epsilon)}{H\tau}, \quad (3.93)$$

por lo que al desarrollar (3.90) a primer orden en los parámetros de slow-roll  $\epsilon$  y  $\delta$  obtenemos

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\tau^2} [2 + 3(2\epsilon + \delta)] \equiv \frac{1}{\tau^2} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (3.94)$$

en donde,  $\nu = 3/2 + 2\epsilon + \delta$ . Entonces reescribimos (3.88) como

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2} \right) v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.95)$$

la cual, bajo el cambio de variable  $v_{\mathbf{k}} = (-\tau)^{1/2} u_{\mathbf{k}}$  y tomando  $x = -k\tau$  se transforma en la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 u_{\mathbf{k}}}{dx^2} + x \frac{du_{\mathbf{k}}}{dx} + (x^2 - \nu^2) u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.96)$$

que, nuevamente, tiene por solución general

$$u_{\mathbf{k}} = c_1 H_{\nu}^{(1)}(x) + c_2 H_{\nu}^{(2)}(x). \quad (3.97)$$

Si se impone la condición de Bunch-Davies (3.48) teniendo en cuenta el límite (3.55), nos es posible establecer  $c_1 = (-\tau\sqrt{\pi}/2)e^{i(\pi/2)(\nu+\pi/2)}$  y  $c_2 = 0$ , de modo que

$$v_{\mathbf{k}} = e^{i(\pi/2)(\nu+\pi/2)} \frac{\sqrt{-\tau\pi}}{2} H_{\nu}^{(1)}(-k\tau), \quad (3.98)$$

en donde, debido a nuestro interés en el espectro de potencias, definido con (3.60), nos es posible despreciar el primer factor por tratarse de una fase. Entonces al considerar

$$v_{\mathbf{k}} = z\mathcal{R}_{\mathbf{k}}, \quad (3.99)$$

tenemos que

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-k\tau}}{z\sqrt{2k}} H_{\nu}^{(1)}(-k\tau). \quad (3.100)$$

Un desarrollo alternativo se encuentra en [8]. Debido a que  $\mathcal{R}$  se mantiene constante fuera del horizonte de Hubble, consideramos el límite

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} = \lim_{-k\tau \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} = -i \frac{(-\tau)^{1/2-\nu} \Gamma(\nu) 2^{\nu}}{z 2\sqrt{\pi} k^{\nu}}, \quad (3.101)$$

en donde hemos hecho uso de (3.57). Así, el espectro de potencias de la perturbación de curvatura comóvil fuera del horizonte, queda dado por

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} \right|^2, \quad (3.102)$$

que es usualmente parametrizado en términos de una escala de referencia  $k_*$  como

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*)-1} \equiv A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*)-1}, \quad (3.103)$$

en donde

$$n_s(k_*) - 1 = \left. \frac{d\Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} \right|_{\tau_*}. \quad (3.104)$$

El cálculo de la amplitud  $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*)$  y del *índice espectral*  $n_s(k_*)$  se hace evaluando (3.101) al tiempo  $\tau_*$  en el que la escala de momento  $k_*$  sale del horizonte de Hubble, es decir, cuando  $k_* = a(\tau_*)H(\tau_*)$ , esto es

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) = \frac{k_*^3}{2\pi^2} \frac{(-\tau_*)^{1-2\nu}}{z^2(\tau_*)} \frac{\Gamma^2(\nu)}{4\pi} \frac{2^{2\nu}}{k_*^{2\nu}}, \quad (3.105)$$

en donde, considerando que la expansión se da de tal modo que  $\epsilon \approx 0$ , podemos fijar  $\nu = 3/2$ , además de emplear (3.49) para reescribir el término  $(-\tau)^{1-2\nu}$  y la definición de  $z$  en (3.86), obtenemos

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) = \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon}. \quad (3.106)$$

Podemos reescribir esta ecuación en términos del potencial para obtener, mediante (2.64), (2.69) y (2.77),

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) = \frac{V^3(\phi_*)}{12\pi^2 V_\phi^2(\phi_*)}, \quad (3.107)$$

$$n_s(k_*) - 1 = 2\eta_V(\phi_*) - 6\epsilon_V(\phi_*) \quad \text{con} \quad \phi_* = \phi(\tau_*). \quad (3.108)$$

### 3.3. Fluctuaciones tensoriales

El tratamiento de los modos tensoriales es similar al de los modos escalares. En realidad, su tratamiento es más simple pues estos sí constituyen un invariante de norma. Además, debido a la forma del tensor de energía momento, estos modos no tienen efecto en el campo del inflatón, así como éste no tiene efecto sobre los modos tensoriales. Perturbaciones en la métrica de este tipo pueden darse incluso en ausencia de cualquier contribución energética en el Universo.

Consideremos entonces la parte tensorial de (3.11), es decir,

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (3.109)$$

recordando que  $h_{ij}$  es un tensor simétrico sin traza que satisface la condición de un tensor transversal (3.6). La acción a segundo orden en las perturbaciones para estos modos está dada por [6]

$$S_{(2)} = \frac{1}{8} \int d\tau d^3x a^2 [(h'_{ij})^2 - (\partial_k h_{ij})^2]. \quad (3.110)$$

Mencionamos antes que las restricciones sobre  $h_{ij}$  implican que solo están presentes dos grados de libertad, que corresponden a sus dos distintas polarizaciones usualmente identificadas con los símbolos  $+$ ,  $\times$ . Con esto es posible escribir  $h_{ij}$  como

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times. \quad (3.111)$$

Mediante esta expansión podemos descomponer  $h_{ij}$  en sus modos de Fourier como

$$h_{ij} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\gamma=+, \times} e_{ij}^\gamma(\mathbf{k}) h_{\mathbf{k}, \gamma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.112)$$

en donde los tensores  $e_{ij}^+$  y  $e_{ij}^\times$  satisfacen

$$\begin{aligned} e_{ii}^\gamma = k^i e_{ij}^\gamma = 0, \quad e_{ij}^\gamma = e_{ji}^\gamma, \quad e_{ij}^\gamma e_{ij}^{\gamma'} = 2\delta_{\gamma\gamma'} \\ e_{ij}^\gamma(-\mathbf{k}) = [e_{ij}^\gamma(\mathbf{k})]^*. \end{aligned} \quad (3.113)$$

La ecuación (3.110) para cada uno de los modos está dada por

$$S_{(2)} = \sum_{\gamma} \int d\tau d^3k \frac{a^2}{4} [(h_{\mathbf{k}, \gamma})' - k^2 (h_{\mathbf{k}, \gamma})^2], \quad (3.114)$$

que es equivalente a tener dos copias de la acción de un campo escalar sin masa aún no normalizado. Introducimos la variable

$$v_{\mathbf{k}, \gamma} = \frac{a}{2} h_{\mathbf{k}, \gamma}, \quad (3.115)$$

de donde obtenemos que la ecuación de movimiento de los modos correspondientes a cada una de las polarizaciones es

$$v_{\mathbf{k}, \gamma}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{\mathbf{k}, \gamma} = 0, \quad (3.116)$$

en donde

$$\frac{a''}{a} = \frac{(2 + 3\epsilon)}{\tau^2} \equiv \frac{\nu_T^2 - 1/4}{\tau^2}, \quad (3.117)$$

con  $\nu_T = 3/2 + \epsilon$ , a primer orden en los parámetros de slow-roll. Al reescribir (3.116) obtenemos

$$v_{\mathbf{k}, \gamma}'' + \left( k^2 - \frac{\nu_T^2 - 1/4}{\tau^2} \right) v_{\mathbf{k}, \gamma} = 0, \quad (3.118)$$

que, nuevamente, bajo el cambio de variable  $v_{\mathbf{k},\gamma} = (-\tau)^{1/2}u_{\mathbf{k},\gamma}$  y considerando  $x = -k\tau$  se transforma en la ecuación de Bessel

$$x \frac{d^2 u_{\mathbf{k},\gamma}}{dx^2} + x \frac{du_{\mathbf{k},\gamma}}{dx} + (x^2 - \nu_T^2)u_{\mathbf{k},\gamma} = 0. \quad (3.119)$$

Las soluciones de esta ecuación se escriben en términos de funciones de Hankel como

$$u_{\mathbf{k},\gamma} = c_1 H_{\nu_T}^{(1)}(x) + c_2 H_{\nu_T}^{(2)}(x), \quad (3.120)$$

de donde al volver a la variable  $v_{\mathbf{k},\gamma}$  e imponer las condiciones de Bunch-Davies de manera análoga a como se hizo en el caso de fluctuaciones escalares, obtenemos

$$v_{\mathbf{k},\gamma} = e^{i(\pi/2)(\nu_T + \pi/2)} \frac{\sqrt{-\tau\pi}}{2} H_{\nu_T}^{(1)}(-k\tau). \quad (3.121)$$

Finalmente al ignorar el primer factor

$$h_{\mathbf{k},\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-k\tau}}{q\sqrt{2k}} H_{\nu_T}^{(1)}(-k\tau) \quad \text{con} \quad q = \frac{a}{2}, \quad (3.122)$$

lo cual nos permite calcular el límite fuera del horizonte de Hubble

$$h_{\mathbf{k},\gamma}^{(o)} \equiv \lim_{-k\tau \rightarrow 0} h_{\mathbf{k},\gamma} = -i \frac{(-\tau)^{1/2 - \nu_T} \Gamma(\nu_T)}{q} \frac{2^{\nu_T}}{2\sqrt{\pi} k^{\nu_T}}. \quad (3.123)$$

Es así, que el espectro de potencias de los modos tensoriales queda dado por

$$\Delta_h^2(k) = 2 \frac{k^3}{2\pi^2} \left| h_{\mathbf{k},\gamma}^{(o)} \right|, \quad (3.124)$$

en donde el factor 2 aparece debido a que consideramos la suma de ambas polarizaciones. Al igual que en el caso de la fluctuación de curvatura comóvil el espectro es parametrizado como

$$\Delta_h^2(k) = \Delta_h^2(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_h(k_*)}, \quad (3.125)$$

en donde

$$n_h(k_*) = \left. \frac{d\Delta_h^2}{d \ln k} \right|_{\tau_*}. \quad (3.126)$$

Siguiendo el procedimiento realizado para la fluctuación de curvatura comóvil, calculamos los modos (3.123) al momento  $\tau_*$  en el que  $k_* = a(\tau_*)H(\tau_*)$ . Suponiendo que  $\epsilon \approx 0$  es posible tomar (3.49) y  $\nu_T = 3/2$  obteniendo

$$\Delta_h^2(k_*) = 2 \frac{H^2}{\pi^2}, \quad (3.127)$$

de modo que en términos del potencial obtenemos

$$\Delta_h^2(k_*) = \frac{2V(\phi_*)}{3\pi^2}, \quad (3.128)$$

$$n_h(k_*) = -3\epsilon_V(\phi_*). \quad (3.129)$$

Finalmente, definimos el cociente entre perturbaciones tensoriales y escalares  $r$  como

$$r \equiv \frac{\Delta_h^2}{\Delta_{\mathcal{R}}^2} = 16\epsilon_V, \quad (3.130)$$

que junto con  $n_s$  y  $n_T$  caracteriza nuestro modelo de inflación, pues a través de ellos es posible reconstruir el potencial del inflatón. La colaboración Planck [31] reporta  $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$ , mientras que empleando datos de otros experimentos como WMAP y la colaboración BICEP/Keck se obtiene que  $r < 0.036$  [34]. La detección de modos tensoriales no se ha efectuado debido a las limitaciones de la tecnología actual, por lo que no se cuenta con una medición de  $n_T$ .

## Capítulo 4

# Distorsiones espectrales

En los capítulos anteriores tratamos a grandes rasgos con la descripción más adecuada de nuestro Universo, así como el mecanismo responsable tanto de su homogeneidad e isotropía como de las estructuras presentes: la inflación cosmológica. Como siguiente paso, describiremos de manera breve la relación entre inflación y una de las fuentes de información más ricas sobre nuestro Universo: la CMB. Este capítulo está ampliamente basado en [35, 36].

### 4.1. El Universo después de inflación

Como hicimos notar en la sección 2.3, el periodo inflacionario termina cuando el campo del inflatón acumula energía cinética comparable a su potencial. Una vez concluido este periodo, comienza la etapa de recalentamiento, durante la cual el inflatón oscila alrededor de un mínimo en su potencial y su energía es liberada en forma de partículas del modelo estándar con velocidades ultra-relativistas, descritas como radiación, lo cual eleva la temperatura del Universo hasta  $10^{26}\text{K}$ . Durante este periodo se dan frecuentes transformaciones entre fotones y materia.

Seguido de esto ocurre la bariogénesis, proceso que conduce al dominio de la materia sobre la antimateria. Posteriormente, a una temperatura de  $10^{15}\text{K}$ , las partículas adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs. Una vez que la temperatura desciende hasta al rededor de  $10^{12}\text{K}$ , los quarks comienzan a agruparse formando bariones, en su mayoría, protones y neutrones. A continuación, a temperaturas del orden de  $10^{10}\text{K}$  los neutrinos dejan de interactuar con el resto de las partículas, comenzando a desplazarse libremente en el Universo. Se espera también que la materia oscura se desacople en algún momento temprano.

Una vez que el Universo alcanza una temperatura del orden de  $10^9\text{K}$  se da la nucleosíntesis, proceso durante el cual los protones y neutrones se agrupan para formar núcleos de elementos ligeros como el hidrógeno, helio y litio, así como de sus isótopos  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$  y  $^7\text{Li}$  principalmente. La materia y la radiación igualan sus contribuciones en la dinámica cosmológica, para dar paso a la transición del dominio de la materia sobre la radiación. Nos encontramos entonces con fotones y el

resto del plasma, los cuales se mantienen en equilibrio térmico mediante una variedad de procesos de entre los cuales destacan la dispersión de Compton (DC), la doble dispersión de Compton (DDC) y la bremsstrahlung (BR) o radiación de frenado. Conforme la expansión del Universo continuó, estos procesos se volvieron ineficientes, se formaron los primeros átomos de hidrógeno en un proceso llamado recombinación y eventualmente, cuando la temperatura alcanzó los  $10^3\text{K}$ , los fotones se desacoplaron, propagándose libremente por el Universo desde entonces, siendo lo que hoy observamos como la CMB.

Dado que esta radiación se propaga libremente por el Universo, nos provee una imagen del Universo al momento del desacoplamiento, cuando éste tenía aproximadamente 380,000 años de edad.

## 4.2. La CMB

Hasta antes de su desacoplamiento, los fotones de la CMB permanecían en equilibrio térmico con el resto de los constituyentes, por lo cual su distribución de energía por unidad de frecuencia está dada por el espectro de un cuerpo negro, i.e.,

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (4.1)$$

en donde  $h$  es la constante de Planck y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Es importante recordar que estamos usando unidades tales que  $c = 1$ . Conforme el tiempo avanzó, la temperatura de la materia, así como su densidad, disminuyó y eventualmente la radiación comenzó a propagarse libremente manteniendo, en una buena aproximación, este espectro.

Si consideramos que la radiación en el Universo sigue una distribución dada por (4.1), su densidad de energía está dada mediante la ley de Stefan-Boltzmann

$$\rho_r = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \alpha T^4, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^2}, \quad (4.2)$$

de donde hemos colocado todas las constantes para mayor claridad. Al considerar la ecuación (2.26), obtenemos

$$a = a_0 \left( \frac{\rho_{0,r}}{\alpha} \right)^{1/4} \frac{1}{T}, \quad (4.3)$$

con lo que

$$T = \frac{a_0}{a} \left( \frac{\rho_{0,r}}{\alpha} \right)^{1/4} \equiv \frac{a_0}{a} T_0, \quad (4.4)$$

en donde el factor  $T_0$  en esta expresión define la temperatura de la CMB en la época actual. Es posible reescribir esta expresión en términos del factor de escala como

$$T = T_0(z + 1), \quad (4.5)$$

con lo cual podemos determinar la evolución en la temperatura de esta radiación. Lo interesante de esta relación es que nos da la confirmación de que el Universo se enfría a medida que se expande.

### 4.2.1. El espectro de anisotropías en la temperatura

A pesar de que la CMB es bastante isótropa, hoy sabemos que presenta ligeras anisotropías, las cuales pueden ser explicadas mediante la inflación cosmológica. La medición más directa que podemos realizar sobre esta radiación es su temperatura como función de la dirección de observación en el cielo  $\hat{\mathbf{n}}$ . Dado que el espectro de esta radiación es muy próximo al de un cuerpo negro a temperatura  $T_0$ , podemos describir las pequeñas fluctuaciones en la temperatura mediante la cantidad  $\Theta$ , definida como

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\Delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T_0} \quad \text{con} \quad \Delta T(\hat{\mathbf{n}}) = T(\hat{\mathbf{n}}) - T_0. \quad (4.6)$$

Es usual descomponer las fluctuaciones en la temperatura en términos de los armónicos esféricos  $Y_{\ell m}$  como

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \quad \text{con} \quad a_{\ell m} = \int d\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.7)$$

en donde la suma corre sobre todos los números enteros para  $\ell$  y entre  $-\ell$  y  $\ell$  para  $m$ . Además, debido a que la temperatura es una cantidad expresada mediante un número real, los coeficientes en esta expansión deben satisfacer

$$a_{\ell m}^* = a_{\ell -m}. \quad (4.8)$$

Al considerar que las anisotropías son producidas por fluctuaciones cuánticas durante inflación, asumimos que son el resultado de un proceso aleatorio Gaussiano. Dado este enfoque, el campo de anisotropías en la temperatura es un campo Gaussiano y las cantidades de interés son sus propiedades estadísticas, que deben obtenerse mediante promedios sobre todas las posibles configuraciones resultantes del proceso aleatorio en cuestión, dichos promedios son denotados mediante  $\langle \dots \rangle$ .

Aparece entonces un problema, pues solo tenemos un cielo, i.e., observamos únicamente una de esas posibles configuraciones. Sin embargo, si consideramos que el campo de fluctuaciones en la temperatura satisface condiciones de homogeneidad e isotropía estadística, podemos sustituir estos promedios sobre configuraciones con promedios en diferentes posiciones y direcciones de observación al suponer que regiones del Universo suficientemente separadas entre sí son estadísticamente independientes, por lo que podemos considerar que en cada punto se observa una realización diferente del proceso aleatorio.

La cantidad de mayor relevancia que caracteriza las fluctuaciones en la temperatura es la función de autocorrelación (o función de dos puntos)  $\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1) \Theta(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle$  pues, al ser  $\Theta$  un campo Gaussiano, el teorema de Wick establece que cualquier función de  $N$  puntos está dada como la suma sobre los productos posibles de las combinaciones de funciones de dos puntos, esto es

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1) \dots \Theta(\hat{\mathbf{n}}_N) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 2p + 1 \\ \sum_A \prod_B \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_i) \Theta(\hat{\mathbf{n}}_j) \rangle & \text{si } N = 2p, \end{cases} \quad (4.9)$$

con  $A$  el conjunto de las posibles asociaciones de pares y  $B$  el conjunto de los pares  $(i, j)$ . Como un ejemplo, si tomamos  $N = 4$  entonces

$$\begin{aligned} \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_2)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_3)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_4) \rangle &= \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle \cdot \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_3)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_4) \rangle \\ &+ \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_3) \rangle \cdot \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_2)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_4) \rangle \\ &+ \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_1)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_4) \rangle \cdot \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}_2)\Theta(\hat{\mathbf{n}}_3) \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La isotropía implica invarianza rotacional, por lo que la función de correlación depende únicamente del producto escalar  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'$ , de modo que entonces puede expresarse en términos de polinomios de Legendre como

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}})\Theta(\hat{\mathbf{n}}') \rangle = \sum_{\ell} C_{\ell}^{TT} \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) P_{\ell}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'). \quad (4.11)$$

Por lo tanto, los coeficientes de la expansión (4.7) satisfacen

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m-m'} C_{\ell}^{TT}, \quad (4.12)$$

o, de manera equivalente

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}^{TT}, \quad (4.13)$$

en donde  $C_{\ell}^{TT}$  es calculado mediante la relación

$$C_{\ell}^{TT} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{\ell m}^* a_{\ell m} \rangle. \quad (4.14)$$

Dado que consideramos que las fluctuaciones constituyen un campo Gaussiano, el conocimiento de  $C_{\ell}$  es suficiente para obtener toda la información importante sobre  $\Theta$ , por lo cual la cantidad que usualmente es reportada es el espectro de potencias, definido como

$$\Delta_T^2 = \frac{\ell(\ell + 1)}{2\pi} C_{\ell}^{TT}. \quad (4.15)$$

Las fluctuaciones en el campo del inflatón durante el Universo temprano son responsables de las anisotropías detectadas en la CMB. En las secciones 3.2 y 3.3 mencionamos que las fluctuaciones salen del horizonte de Hubble para volver a entrar en él en un momento posterior, durante la época dominada por radiación o materia. Cuando esto sucede, se producen cambios en la densidad de energía  $\delta\rho$ , lo cual da origen a las anisotropías observadas en la CMB.

La mayor contribución a las fluctuaciones de temperatura proviene de fluctuaciones escalares. La relación entre la evolución de  $\mathcal{R}$  y  $\Theta$  es condensada en una función de transferencia  $\Delta_{T_{\ell}}(k)$  de manera que [36]

$$a_{\ell m} = 4\pi(-1)^{\ell} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta_{T_{\ell}}(k) \mathcal{R}_k Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (4.16)$$

de donde, al sustituir en (4.14) obtenemos que

$$C_\ell^{TT} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \Delta_{T_\ell}(k) \Delta_{T_\ell}(k). \quad (4.17)$$

Sin embargo, la forma precisa de estas funciones de transferencia es complicada y usualmente deben calcularse numéricamente mediante códigos como CLASS [37].

Dadas las propiedades del campo  $\Theta$ , el qué tan buena puede ser nuestra medición de  $C_\ell^{TT}$  no es una cuestión menor. Los promedios en e.g., la ecuación (4.11) deben realizarse sobre distintos puntos de observación de la CMB y en distintas direcciones. Sin embargo, es evidente que solo contamos con un punto de observación por lo que únicamente nos es posible tomar promedios sobre diferentes direcciones o, de manera equivalente, sobre los  $2\ell + 1$  valores posibles de  $m$ , i.e., se toma

$$C_\ell^{TT,\text{obs}} \equiv \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} a_{\ell -m}. \quad (4.18)$$

Esto nos permite definir una cantidad de error en las mediciones, conocida como varianza cósmica, definida como

$$\left\langle \left( \frac{C_\ell^{TT} - C_\ell^{TT,\text{obs}}}{C_\ell^{TT}} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2\ell + 1}, \quad (4.19)$$

en donde podemos notar que las mediciones realizadas para valores pequeños de  $\ell$  poseen mayor cantidad de error con respecto a mediciones de  $\ell$  grandes. En la actualidad experimentos como Planck realizan mediciones hasta  $\ell \approx 1500$ .

#### 4.2.2. El espectro de anisotropías en la polarización

Otra fuente de información proveniente de la CMB es su espectro de anisotropías en la polarización, las cuales son producidas e.g. mediante la dispersión de Compton. El tratamiento de estas anisotropías es más complicado que en el caso de la temperatura pues la polarización no puede describirse mediante un campo escalar.

Las cantidades de interés en la CMB pueden ser descritas mediante el tensor de intensidad  $I_{ij}(\hat{\mathbf{n}})$ , que es un tensor bidimensional cuyas componentes son definidas con respecto a dos vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$  ortogonales a la dirección observada  $\hat{\mathbf{n}}$ . De este modo, el campo de la temperatura queda dado por

$$T = \frac{1}{4}(I_{11} + I_{22}), \quad (4.20)$$

mientras que la polarización lineal es descrita mediante los parámetros de Stokes  $Q$  y  $U$

$$Q = \frac{1}{4}(I_{11} - I_{22}) \quad U = \frac{1}{2}I_{12}, \quad (4.21)$$

de donde la amplitud  $P$  y el ángulo  $\theta$  de la polarización quedan dados por

$$P = \sqrt{Q^2 + U^2}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan(U/Q). \quad (4.22)$$

Mientras que  $T$  es una cantidad invariante bajo rotaciones del plano ortogonal a la dirección de observación (lo cual permite su descomposición en armónicos esféricos),  $Q$  y  $U$  se transforman, bajo una rotación por un ángulo  $\alpha$ , como

$$(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) \rightarrow e^{\mp 2i\alpha}(Q \pm 2iU)(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.23)$$

con lo que su descomposición debe hacerse en términos de objetos más complejos llamados armónicos esféricos tensoriales de espín 2. El resultado de esta descomposición es

$$(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2, \ell m} \pm 2 Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.24)$$

en donde al tomar

$$a_{E, \ell m} = -\frac{1}{2}(a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m}), \quad a_{B, \ell m} = -\frac{1}{2i}(a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m}), \quad (4.25)$$

es posible definir dos campos escalares  $E$  y  $B$  tales que

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} a_{E, \ell m} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}), \quad B(\hat{\mathbf{n}}) = a_{B, \ell m} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.26)$$

que caracterizan el campo de polarización de la CMB. Teniendo en cuenta estas dos cantidades, junto con el campo de anisotropías en la temperatura, podemos definir las funciones de autocorrelación para  $\Theta$  y los modos  $E$ ,  $B$ , denotadas por  $TT$ ,  $EE$ ,  $BB$  respectivamente, así como la correlación cruzada entre modos  $\Theta$  y los modos  $E$ , denotada por  $TE$ . El resto de las correlaciones se anulan por razones de simetría.

Podemos entonces definir diferentes espectros de potencias posibles mediante

$$C_{\ell}^{XY} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{X, \ell m}^* a_{Y, \ell m} \rangle \quad \text{con } X, Y \in \{T, E, B\}, \quad (4.27)$$

en donde existe dependencia tanto de  $\mathcal{R}$  como de las fluctuaciones tensoriales a través de funciones de transferencia  $\Delta_{X\ell}(k)$ . Considerando que la mayor contribución a los espectros  $EE$  y  $TE$  son las fluctuaciones escalares, tenemos que [36]

$$C_{\ell}^{EE} \approx (4\pi)^2 \int k^2 dk \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \Delta_{E_{\ell}}(k) \Delta_{E_{\ell}}(k), \quad (4.28a)$$

$$C_{\ell}^{TE} \approx (4\pi)^2 \int k^2 dk \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \Delta_{T_{\ell}}(k) \Delta_{E_{\ell}}(k), \quad (4.28b)$$

mientras que para los modos  $B$ , al tener su origen en fluctuaciones tensoriales, tenemos que

$$C_\ell^{BB} = (4\pi)^2 \int k^2 dk \Delta_h^2(k) \Delta_{B_\ell} \Delta_{B_\ell}. \quad (4.29)$$

Fluctuaciones escalares producen fluctuaciones de temperatura y modos  $E$ , mientras que las fluctuaciones tensoriales producen modos  $E$  y  $B$ . De este modo,  $C_\ell^{TT}$ ,  $C_\ell^{TE}$  y  $C_\ell^{EE}$  proveen información sobre  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ , mientras que  $C_\ell^{BB}$  puede ofrecer información sobre  $\Delta_h^2$ . De este modo las observaciones de la CMB nos ofrecen restricciones a parámetros como  $n_s$ ,  $A_s$  y  $r$ .

### 4.3. Distorsiones espectrales

Como se discutió en secciones anteriores, el espectro de cuerpo negro es mantenido mediante un conjunto de procesos que mantienen la radiación en equilibrio térmico. Sin embargo, debido a la expansión del Universo, estos procesos se vuelven menos eficientes con el avance del tiempo dando como resultado que, para valores del corrimiento al rojo menores a  $10^6$ , cambios en la energía o la cantidad de fotones puede causar desviaciones del espectro de un cuerpo negro, produciendo *distorsiones espectrales*.

Consideremos la distribución de fotones en el espacio fase  $f(q, p)$ , relacionado con el espectro de intensidad mediante un factor  $2h\nu^2$ . Consideremos la variable

$$x \equiv \frac{p}{T_z}, \quad (4.30)$$

en donde  $p$  es la magnitud del momento de un fotón. Es importante notar que, en general, la temperatura real de los fotones  $T_\gamma$  puede no evolucionar como  $T_z$ . Sin embargo, al tomar  $T_0 = 2.7255\text{K}$ ,  $T_z \approx T_\gamma$  en tiempos cercanos al actual. La variable  $x$  se relaciona con la frecuencia  $\nu$  mediante  $x = h\nu/T_0$ . Es así que la distribución de fotones en el espacio fase se escribe como  $f(q, p) = f(t, x)$ , en donde la dependencia espacial desaparece debido a las condiciones de homogeneidad en el Universo temprano. La ecuación de Boltzmann, que describe la evolución de la distribución de los fotones se escribe entonces como

$$\frac{df(t, x)}{dt} = C[f], \quad (4.31)$$

en donde  $C[f]$  es llamado el término de colisión. Es inmediato notar que en el caso  $C[f] = 0$  la distribución mantiene su forma a lo largo del tiempo, de modo que este término es responsable de los cambios exhibidos por  $f$ . Al considerar los tres principales procesos mediante los cuales la radiación se mantiene en equilibrio térmico con la materia, es posible escribir (4.31) como

$$\frac{df(t, x)}{dt} = C_{DC}[f] + C_{DDC}[f] + C_{BR}[f], \quad (4.32)$$

en donde  $C_{DC}$ ,  $C_{DDC}$ ,  $C_{BR}$ , describen los términos de colisión asociados a la dispersión de Compton, la doble dispersión de Compton y la bremsstrahlung, respectivamente. De los tres, el más sencillo

de describir es  $C_{DC}$ , dado por la ecuación de Kompaneets [35]

$$C_{DC}[f] = \dot{\mathcal{T}} \frac{T_e}{m_e} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{T_z}{T_e} f(1+f) \right) \right], \quad (4.33)$$

en donde  $\dot{\mathcal{T}} = n_e \sigma_T$ , con  $n_e$  la densidad de número de los electrones y  $\sigma_T$  la sección eficaz de Thompson. Cuando la DC es muy eficiente, el sistema tiende a un estado de equilibrio en el que el término de colisión  $C_{DC}$  equivale a cero, por lo cual, la función  $f$  satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{T_z}{T_e} f(1+f) = 0, \quad (4.34)$$

cuya solución está dada por

$$f(x) = \frac{1}{e^{x \frac{T_z}{T_e} + C} + 1}, \quad (4.35)$$

que es la distribución de Bose-Einstein para fotones en equilibrio con electrones con un potencial químico  $\mu = C$ , en donde hemos hecho implícita la dependencia temporal, como haremos frecuentemente lo largo de esta sección. Es importante notar que la DC admite un potencial químico nulo. Sin embargo, la DDC, junto con el BR son capaces de alterar el número de fotones, por lo que cuando su eficiencia es alta, el potencial químico debe minimizarse. Conforme estos procesos se vuelven menos eficientes aparecen distorsiones en el espectro.

#### 4.3.1. Forma de las distorsiones

Consideremos la distribución  $f$ , la cual podemos descomponer en una parte que corresponde al espectro de un cuerpo negro con temperatura  $T_z$  y todas aquellas desviaciones de éste, i.e,

$$f(t, x) = B(x) + \Delta f(t, x) \quad \text{con} \quad B(x) = \frac{1}{e^x - 1}. \quad (4.36)$$

Esta definición de  $\Delta f$  también toma en cuenta desviaciones de la temperatura, esto es, toma en cuenta que  $T_z$  puede no ser la temperatura de los fotones en la CMB, así como las distorsiones  $\mu$ , provenientes de un potencial químico en (4.35) y las distorsiones  $y$ , llamadas distorsiones de Compton. A continuación, revisaremos brevemente la forma de cada una de estas distorsiones.

En la sección 4.2 mencionamos que la temperatura de los fotones evoluciona según la ecuación (4.5). Sin embargo, si se introduce energía en el fluido de fotones, habrá una desviación en ella. Adicionalmente, según los procesos que mantienen en equilibrio bariones y fotones se vuelven menos eficientes, la temperatura de estos últimos,  $T_\gamma$ , se desviará de aquella de los electrones  $T_e$ , aunque aún nos sea posible describir la distribución de los fotones mediante el espectro de un cuerpo negro. Consideremos entonces el cambio en la temperatura  $\Delta T = T_\gamma - T_z$ , de modo que obtenemos

$$f(x) = B\left(\frac{p}{T_\gamma}\right) = B\left(\frac{x}{1 + \Delta T/T_z}\right), \quad (4.37)$$

que al considerar que  $\Delta T \ll T_z$  puede desarrollarse a primer orden, de donde obtenemos

$$f(x) \approx B(x) - x \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\Delta T}{T_z}. \quad (4.38)$$

Al considerar esta expresión, junto con (4.36), tenemos que

$$\Delta f(x) = G(x) \frac{\Delta T}{T_z} \equiv gG(x), \quad (4.39)$$

en donde expresamos este cambio como una amplitud  $g$  por una función de forma  $G(x)$ . Entonces, definimos la forma del cambio en la temperatura como

$$G(x) \equiv -x \frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}. \quad (4.40)$$

Estos cambios en la temperatura son muy difíciles de detectar, por lo que se requiere de un criterio que los distinga de las demás distorsiones. Dado que este efecto involucra procesos que inducen un cambio  $\Delta N$  el número de fotones, tales como el DD y el BR, podemos usar ese cambio para separar los cambios en la temperatura (con  $\Delta N \neq 0$ ) de las demás distorsiones (con  $\Delta N = 0$ ).

El siguiente tipo de distorsión se da cuando la DDC y el BR comienzan a ser poco eficientes, permitiendo que la ecuación (4.33) alcance una solución con un potencial químico no nulo, ocasionando que entonces el espectro se escriba como

$$f(x) = B(x + \mu) = \frac{1}{e^{x+\mu} - 1}, \quad (4.41)$$

que, nuevamente, puede desarrollarse a primer orden, obteniendo

$$f(x) \approx B(x) - \mu \frac{G(x)}{x}, \quad (4.42)$$

que sugiere que la distorsión producida por este efecto está dada por

$$\Delta f(x) = -\mu \frac{G(x)}{x}, \quad (4.43)$$

en donde la forma de esta distorsión se escribe como

$$\tilde{M}(x) = -\frac{G(x)}{x}. \quad (4.44)$$

Sin embargo, debemos hacer notar que, en realidad, la expresión (4.41) debe escribirse en términos de  $xT_z/T_e$  y no simplemente de  $x$ . Esta diferencia puede interpretarse como una distorsión debida al cambio de temperatura, con lo que (4.44) describe una superposición de este cambio y una distorsión debida al potencial químico, de modo que lo correcto es escribir la forma de las distorsiones  $\mu$  como

$$M(x) = -G(x) \left( \frac{1}{x} - \alpha_\mu \right), \quad (4.45)$$

en donde la constante  $\alpha_\mu$  elimina la contribución debida al cambio en la temperatura. De este modo las distorsiones  $\mu$  están dadas por

$$\Delta f(x) = \mu M(x), \quad (4.46)$$

mientras que la constante  $\alpha_\mu$  es calculada imponiendo que las distorsiones  $\mu$  no provoquen un cambio en la densidad de número de los fotones, lo cual implica

$$\int x^2 M(x) dx = \int (-x + \alpha_\mu x^2) G(x) dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.47)$$

Para resolver esta integral podemos reescribir (4.40) en términos de funciones hiperbólicas, pues

$$\frac{1}{\sinh \frac{x}{2}} = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} \implies G(x) = x \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x}{4 \sinh^2 \frac{x}{2}} \quad (4.48)$$

de modo que entonces

$$\int (-x + \alpha_\mu x^2) G(x) dx = \frac{1}{4} \left[ - \int \frac{x^2}{\sinh^2 \frac{x}{2}} dx + \alpha_\mu \int \frac{x^3}{\sinh^2 \frac{x}{2}} dx \right] = 0. \quad (4.49)$$

De acuerdo con [38, ver ec.(3.527)], tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\sinh^2 ax} dx = \frac{4}{(2a)^s} \Gamma(s) \zeta(s-1), \quad (4.50)$$

con  $\zeta$  denotando la función zeta de Riemann. Por lo tanto, al sustituir esta expresión en (4.49) obtenemos que

$$- \Gamma(3) \zeta(2) + \alpha_\mu \Gamma(4) \zeta(3) = -2! \zeta(2) + \alpha_\mu 3! \zeta(3) = 0, \quad (4.51)$$

con lo que, finalmente,

$$\alpha_\mu = \frac{1}{3} \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \approx 0.4561. \quad (4.52)$$

Finalmente, las distorsiones  $y$  o distorsiones de Compton ocurren cuando la DC se vuelve ineficiente, i.e., cuando la ecuación (4.33) no alcanza una solución de equilibrio. Para calcular la forma de estas distorsiones, consideremos que partimos del espectro de un cuerpo negro. En un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pequeño, podemos aproximar el cambio en la distribución de los fotones como

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \dot{\mathcal{T}} \frac{T_e}{m_e} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^4 \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} + \frac{T_z}{T_e} B(x)(1 + B(x)) \right] \right\}. \quad (4.53)$$

De (4.40) tenemos que

$$\frac{G(x)}{x} = - \frac{\partial B(x)}{\partial x} = B(x)(1 + B(x)), \quad (4.54)$$

por lo que al sustituir en (4.53) obtenemos

$$\Delta f(x) \approx \Delta t \dot{T} \frac{T_z - T_e}{m_e} \frac{1}{x^2} \frac{\partial [x^3 G(x)]}{\partial x}, \quad (4.55)$$

donde podemos observar que la forma de estas distorsiones está dada por

$$Y(x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial [x^3 G(x)]}{\partial x} = G(x) \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right). \quad (4.56)$$

La ineficiencia de la DC no es el único proceso que puede producir cambios en la distribución de los fotones con esta forma. En general, las distorsiones  $y$  son descritas, con base en (4.36), como

$$\Delta f(x) = yY(x), \quad (4.57)$$

en donde la amplitud  $y$  toma en consideración otras posibles contribuciones además de la ineficiencia de la DC, cuya amplitud está dada por

$$y_{DC} = \int \frac{T_e - T_z}{m_e} n_e \sigma_T dt. \quad (4.58)$$

Para valores del corrimiento al rojo superiores a  $z_{th} \approx 2 \times 10^6$ , los procesos que cambian el número de fotones como la DDC y el BR siguen siendo eficientes, por lo que la mayor parte de las distorsiones son cambios en la temperatura, por lo cual se denomina a esta etapa la era  $g$ . A continuación, a valores de corrimiento al rojo entre  $z = z_\mu \approx 4 \times 10^4$  y  $z = z_{th}$ , la DDC y el BR se vuelven ineficientes mientras que la DC sigue siendo eficiente, de manera que las distorsiones predominantes son las del tipo  $\mu$ , por lo cual esta etapa es denominada era  $\mu$ . Finalmente, a valores de corrimiento al rojo superiores a  $z_\mu$ , la DC se vuelve ineficiente, dando lugar a distorsiones  $y$ , razón por la que ese periodo es conocido como era  $y$ .

### 4.3.2. Amplitud de las distorsiones

Es usual realizar una normalización a las funciones que describen la forma de las distorsiones, de manera que una distorsión con una amplitud igual a uno provoque un incremento relativo en la densidad de energía de los fotones igual a uno. Consideremos entonces factores  $C_g$ ,  $C_\mu$  y  $C_y$  tales que si  $g = C_g$ ,  $\mu = C_\mu$  y  $y = C_y$  entonces  $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 1$ , i.e.,

$$\frac{\Delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_g \frac{\int x^3 G(x) dx}{\int x^3 B(x) dx} \stackrel{!}{=} 1, \quad (4.59a)$$

$$\frac{\Delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_\mu \frac{\int x^3 M(x) dx}{\int x^3 B(x) dx} \stackrel{!}{=} 1, \quad (4.59b)$$

$$\frac{\Delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_y \frac{\int x^3 Y(x) dx}{\int x^3 B(x) dx} \stackrel{!}{=} 1, \quad (4.59c)$$

en donde todas las integrales se realizan en el intervalo  $[0, \infty)$ . Para el cálculo del denominador, expresamos  $B(x)$  en términos de funciones hiperbólicas como

$$B(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2 \sinh \frac{x}{2}}, \quad (4.60)$$

con lo que

$$\int x^3 B(x) dx = \int x^3 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2 \sinh \frac{x}{2}} dx. \quad (4.61)$$

De acuerdo con [38, ver ec. (3.552)]

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1} e^{-ax}}{\sinh ax} = \frac{1}{2m} |B_{2m}| \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2m}, \quad (4.62)$$

en donde  $B_{2m}$  es el  $2m$ -ésimo número de Bernoulli. Al emplear esta expresión en (4.61) obtenemos

$$\int x^3 B(x) dx = \frac{1}{8} |B_4| (2\pi)^4 = \frac{1}{4} 4! \zeta(4), \quad (4.63)$$

en donde para llegar a la segunda igualdad hemos hecho uso de que el cuarto número de Bernoulli es negativo, además de que

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m+1} B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!} \quad (4.64)$$

cuando  $m$  es un número natural.

Para los cambios en la temperatura tenemos que, de la ecuación (4.50),

$$\int x^3 G(x) dx = 4! \zeta(4), \quad (4.65)$$

por lo que entonces

$$\frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_g \frac{4! \zeta(4)}{\frac{1}{4} 4! \zeta(4)} = 4C_g \stackrel{!}{=} 1 \quad \implies \quad C_g = \frac{1}{4}. \quad (4.66)$$

Del mismo modo, en el caso de las distorsiones  $\mu$  tenemos que

$$\int x^3 M(x) dx = -3! \zeta(3) + \alpha_\mu 4! \zeta(4), \quad (4.67)$$

de donde

$$\frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_\mu \left[ \frac{-3! \zeta(3)}{\frac{1}{4} 4! \zeta(4)} + 4\alpha_\mu \right] = C_\mu \left[ 4\alpha_\mu - \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \right] \stackrel{!}{=} 1 \quad \implies \quad C_\mu = \frac{1}{4\alpha_\mu - \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}} \approx 1.401. \quad (4.68)$$

Finalmente, para las distorsiones  $y$  tenemos que

$$\int x^3 Y(x) dx = 4! \zeta(4), \quad (4.69)$$

con lo cual la ecuación (4.59c) implica

$$\frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = C_y \frac{4! \zeta(4)}{\frac{1}{4} \zeta(4)} = 4C_y \stackrel{!}{=} 1 \quad \Longrightarrow \quad C_y = \frac{1}{4}. \quad (4.70)$$

De este modo, podemos definir las amplitudes normalizadas de las distorsiones como

$$\tilde{g} = g/C_g = 4g, \quad \tilde{\mu} = \mu/C_\mu \approx 1.401\mu, \quad \tilde{y} = y/C_y = 4y. \quad (4.71)$$

Con estas definiciones, el incremento relativo total en la densidad de fotones es, a primer orden

$$\left. \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \right|_{tot} = \left. \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \right|_g + \left. \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \right|_\mu + \left. \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \right|_y = \tilde{g} + \tilde{\mu} + \tilde{y}, \quad (4.72)$$

en donde los subíndices hacen referencia al incremento de energía que produce cada tipo de distorsión.

Volvemos entonces a las distorsiones en el espectro de intensidad, el cual es obtenido de la distribución de los fotones en el espacio fase mediante un factor<sup>1</sup>  $2h\nu^3/c^2$ , que podemos reescribir mediante nuestra definición de  $x$  como

$$\frac{2h\nu^3}{c^2} = \mathcal{N}x^3 \quad \text{con} \quad \mathcal{N} = \frac{2(k_B T_0)^3}{(hc)^2}. \quad (4.73)$$

Con esto, el espectro de intensidad, considerando los tres tipos de distorsiones, está dado por

$$I(x) = \mathcal{B}(x) + \tilde{g}\mathcal{G}(x) + \tilde{\mu}\mathcal{M}(x) + \tilde{y}\mathcal{Y}(x), \quad (4.74)$$

en donde las formas normalizadas de las distorsiones están dadas por

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{N}x^3 B(x), \quad (4.75a)$$

$$\mathcal{G}(x) = C_g \mathcal{N}x^3 G(x) = \frac{1}{4} \mathcal{N}x^3 G(x), \quad (4.75b)$$

$$\mathcal{M}(x) = C_\mu \mathcal{N}x^3 M(x) \approx 1.401 \mathcal{N}x^3 G(x) (\alpha_\mu - 1/x), \quad (4.75c)$$

$$\mathcal{Y}(x) = C_y \mathcal{N}x^3 Y(x) = \frac{1}{4} \mathcal{N}x^3 G(x) \left( x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right). \quad (4.75d)$$

De acuerdo con (4.74), la distorsión total en el espectro de intensidad de la CMB está dada, a primer orden, como

$$\Delta I_{tot} = \Delta I_g + \Delta I_\mu + \Delta I_y, \quad (4.76)$$

en donde  $\Delta I_g = \tilde{g}\mathcal{G}(x)$ ,  $\Delta I_\mu = \tilde{\mu}\mathcal{M}(x)$  y  $\Delta I_y = \tilde{y}\mathcal{Y}(x)$ .

<sup>1</sup>Hemos colocado todas las constantes en estas expresiones para una mayor claridad.

### 4.3.3. Distorsiones espectrales debidas a la disipación de modos acústicos

Existen numerosos procesos que pueden generar estas desviaciones, los cuales derivan de diferentes modelos cosmológicos que pueden incluir escenarios como el decaimiento de materia oscura en partículas del modelo estándar o la evaporación de agujeros negros primordiales. Sin embargo, algunos de estos procesos se dan dentro del modelo cosmológico estándar. Sabemos, e.g., que el efecto Sunyaev-Zeldovich<sup>2</sup> es responsable de la mayor parte de las distorsiones  $y$  en el Universo tardío.

De entre los diferentes procesos dentro del modelo  $\Lambda$ CDM capaces de producir distorsiones espectrales, aquel que guarda una relación más estrecha con el paradigma inflacionario es la *disipación de modos acústicos*. Las fluctuaciones en la densidad producidas por inflación provocaron que algunas regiones del Universo temprano fuesen más calientes que otras. Cerca del desacoplamiento de los fotones, estos se movieron de regiones muy calientes a otras de menor temperatura, borrando en cierta medida las anisotropías producidas por inflación. Este desplazamiento de los fotones causó una superposición de espectros de cuerpo negro con temperaturas ligeramente distintas, lo cual produjo distorsiones espectrales.

La amplitud de estas distorsiones dependerá de la amplitud y la forma del espectro de anisotropías primordiales, que a su vez depende del modelo inflacionario que las produjo. De acuerdo con [16], las amplitudes de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  producidas por este escenario están dadas por

$$\mu = 1.401\tilde{\mu} = \int_{k_{min}}^{\infty} d \ln k \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) W_{\mu}, \quad (4.77a)$$

$$y = \frac{1}{4}\tilde{y} = \int_{k_{min}}^{\infty} d \ln k \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) W_y, \quad (4.77b)$$

en donde

$$W_{\mu} \approx 2.8D^2 \left\{ \exp \left[ -\frac{\left(\frac{\hat{k}}{1360}\right)^2}{1 + \left(\frac{\hat{k}}{260}\right)^{0.3} + \frac{\hat{k}}{340}} \right] - \exp \left[ -\left(\frac{\hat{k}}{32}\right)^2 \right] \right\} y \quad (4.78a)$$

$$W_y \approx \frac{D^2}{2} \exp \left[ -\left(\frac{\hat{k}}{32}\right)^2 \right], \quad (4.78b)$$

son llamadas *funciones ventana* y son obtenidas mediante ajustes experimentales. En ellas  $\hat{k} = k/[1\text{Mpc}^{-1}]$  y

$$D^2 \approx \frac{1}{(1 + 4R_{\nu}/15)^2} \approx 0.81, \quad (4.79)$$

---

<sup>2</sup>El efecto Sunyaev-Zeldovich hace referencia a que, cuando la radiación de la CMB atraviesa un cluster de galaxias, interactúa con electrones libres en ellos. Dichos electrones se encuentran a una mayor temperatura que la radiación, por lo que puede ocurrir una dispersión de Compton inversa, lo cual transfiere energía a los fotones, causando distorsiones.

siendo  $R_\nu$  la contribución relativa de neutrinos no masivos a la densidad total de energía de radiación. Las integrales en (4.77) se realizan a partir de alguna escala  $k_{min}$  que en el caso de este trabajo es igual a  $1\text{Mpc}^{-1}$ . Es posible considerar límites inferiores menores, lo cual tiene el efecto de incrementar la magnitud de las distorsiones, como puede verse en [39, ver fig. 13], en donde  $k_{min} = 0.12\text{Mpc}^{-1}$ . Sin embargo, las aproximaciones empleadas para el cálculo de las funciones ventana (4.78) dejan de ser válidas a escalas menores a  $1\text{Mpc}^{-1}$ .

## Capítulo 5

# Monodromía de Axiones

Se cree que inflación tuvo lugar a escalas energéticas muy grandes, por lo cual existe gran interés en incluir este paradigma dentro de teorías de gran unificación como la teoría de cuerdas. Un modelo que puede incluirse en esta teoría es el llamado *inflación por monodromía de axiones*, el cual resulta interesante pues produce una señal de fluctuaciones tensoriales que podría ser detectable ya que predice un valor de  $r \approx 0.07^1$ . El elemento fundamental de este modelo es un axión  $\phi$  cuya dinámica está regida por un potencial de la forma [40]

$$V(\phi) = \lambda^{4-p}\phi^p + \Lambda^4 e^{-C_0(\phi/\phi_0)^{p_\Lambda}} \cos \left[ \gamma_0 + \frac{\phi_0}{f} \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{p_f+1} \right], \quad (5.1)$$

en donde  $\lambda, p, p_f, p_\Lambda, C_0, \gamma_0$  y  $\phi_0$  son parámetros del modelo;  $f$  es en general una función relacionada con la constante decaimiento de  $\phi$ ; y  $\Lambda$  caracteriza el rompimiento de la simetría bajo traslaciones de  $\phi$ . Por simplicidad, consideraremos  $C_0 = p_f = 0$  e ignoraremos la fase  $\gamma_0$  en el coseno, con lo que el potencial de nuestro interés pasa a ser

$$V(\phi) = \lambda^{4-p}\phi^p + \Lambda^4 \cos \left( \frac{\phi}{f} \right). \quad (5.2)$$

En este capítulo, que toma como base [41], realizamos los cálculos necesarios para obtener una expresión analítica del espectro de potencias de las fluctuaciones escalares,  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ , correspondiente a modelos inflacionarios con potenciales de la forma (5.2). Posteriormente, en el capítulo 6 empleamos las restricciones observacionales para este modelo, dadas por Planck, con la finalidad de calcular numéricamente la amplitud de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$  asociadas a diferentes elecciones de parámetros del modelo y compatibles con las observaciones. Los cálculos presentados en este capítulo, junto con los presentados en el capítulo 6 constituyen la parte esencial de este trabajo.

---

<sup>1</sup>A pesar de que [34] descarta este valor de  $r$ , aún es posible que al variar los diferentes parámetros del modelo encontremos un conjunto que ellos que satisfagan esta restricción.

## 5.1. Dinámica del campo escalar

Como primer paso estudiaremos la dinámica del inflatón en presencia del potencial (5.2). Con base en [41] tomamos el caso  $p = 1$ , aunque un procedimiento análogo puede llevarse a cabo para elecciones distintas de este parámetro. Para este valor de  $p$  el potencial se escribe como

$$V(\phi) = \lambda^3 \phi + \Lambda^4 \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) = \lambda^3 \left[ \phi + bf \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \quad \text{con} \quad b \equiv \frac{\Lambda^4}{\lambda^3 f}, \quad (5.3)$$

de modo que al sustituir esta expresión en (2.57) obtenemos que la ecuación de movimiento para este potencial se escribe como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \lambda^3 - \lambda^3 b \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{f}\right) = 0. \quad (5.4)$$

Para conseguir inflación en el límite de rodamiento lento es necesario considerar que  $\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V$ , con lo que la ecuación de Friedmann (2.64) se escribe como

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} V(\phi), \quad (5.5)$$

por lo que al considerar el potencial (5.3) se obtiene

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left[ \lambda^3 \phi + bf \lambda^3 \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]. \quad (5.6)$$

Además, la normalización de COBE implica que  $\phi \gg M_p$ , de modo que  $\frac{\phi}{M_p} \gg 1$  y el segundo término en la expresión anterior puede ser despreciado, por lo que entonces nos es posible tomar

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \lambda^3 \phi. \quad (5.7)$$

Por otro lado, el que el potencial sea monótono requiere  $b < 1$ , en cuyo caso podemos suponer  $b \ll 1$ , tratando el término oscilatorio en el potencial como una perturbación. Consideramos entonces la expansión del campo  $\phi = \phi_0 + b\phi_1$ , de manera que al sustituir en la ecuación de movimiento (5.4) tenemos que

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + \lambda^3 + b \left[ \ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 - \lambda^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{f}\right) \right] = 0, \quad (5.8)$$

en donde hemos hecho la suposición  $\frac{b\phi_1}{f} \ll 1$  dentro del argumento del coseno. Al sustituir nuestra expansión de  $\phi$  en (5.7) obtenemos

$$H = \sqrt{\frac{\lambda^3}{3M_p^2} (\phi_0 + b\phi_1)} \approx \sqrt{\frac{\lambda^3 \phi_0}{3M_p^2}} + \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{\lambda^3 \phi_1^2}{3M_p^2 \phi_0}}, \quad (5.9)$$

con lo que la ecuación (5.8), a primer orden en  $b$ , pasa a ser

$$\ddot{\phi}_0 + 3\sqrt{\frac{\lambda^3\phi_0}{3M_p^2}}\dot{\phi}_0 + b \left[ \ddot{\phi}_1 + 3\sqrt{\frac{\lambda^3\phi_0}{3M_p^2}}\dot{\phi}_1 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\lambda^3\phi_1^2}{3M_p^2\phi_0}}\dot{\phi}_0 + \lambda^3 - \lambda^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{f}\right) \right] = 0 \quad (5.10)$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$\ddot{\phi}_0 + \sqrt{\frac{3\lambda^3\phi_0}{M_p^2}}\dot{\phi}_0 + \lambda^3 = 0, \quad (5.11)$$

$$\ddot{\phi}_1 + \sqrt{\frac{3\lambda^3\phi_0}{M_p^2}}\dot{\phi}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\lambda^3}{M_p^2\phi_0}}\dot{\phi}_0\phi_1 - \lambda^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{f}\right) = 0. \quad (5.12)$$

Al considerar que  $\phi_0$  satisface la aproximación de slow-roll, la ecuación (5.11) se escribe como

$$\dot{\phi}_0 = -\sqrt{\frac{\lambda^3}{3\phi_0}}M_p. \quad (5.13)$$

Por lo tanto, al integrar desde un tiempo  $t_*$ , en el que la escala de referencia  $k_*$  sale del horizonte, hasta un tiempo arbitrario  $t$ , obtenemos

$$\phi_0(t) = \left[ \phi_*^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{2}M_p\lambda^{3/2}(t - t_*) \right]^{2/3}, \quad (5.14)$$

en donde  $\phi_*$  es el valor del campo  $\phi_0$  al tiempo  $t_*$ . A continuación, empleamos (5.13) en la ecuación (5.12) para obtener

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{1}{M_p}\sqrt{3\lambda^3\phi_0}\dot{\phi}_1 - \frac{\lambda^3}{2\phi_0}\phi_1 = \lambda^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{f}\right). \quad (5.15)$$

Podemos reescribir esta ecuación empleando a  $\phi_0$  como una variable independiente en donde los operadores diferenciales se escriben a través de (5.13) como

$$\frac{d}{dt} = -\sqrt{\frac{\lambda^3}{3\phi_0}}M_p \frac{d}{d\phi_0}, \quad (5.16a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = M_p^2 \frac{\lambda^3}{3\phi_0} \frac{d^2}{d\phi_0^2}, \quad (5.16b)$$

de donde (5.15) se escribe como

$$\frac{\lambda^3}{3\phi_0}M_p^2\phi_1'' - \lambda^3\phi_1' - \frac{\lambda^3}{2\phi_0}\phi_1 = \lambda^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{f}\right), \quad (5.17)$$

en donde las variables primadas son derivadas con respecto a  $\phi_0$ . Por tanto, la ecuación que obtenemos para  $\phi_1$  es

$$M_p^2 \phi_1'' - 3\phi_0 \phi_1' - \frac{3}{2} \phi_1 = 3\phi_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\phi_0}{f} \right). \quad (5.18)$$

Durante el periodo de tiempo de nuestro interés podemos considerar que  $\phi_0 = \phi_*$ , es una constante en todos lados excepto en el término del lado derecho de la igualdad, de modo que la ecuación a resolver es

$$\phi_1'' - 3\phi_* \phi_1' - \frac{3}{2} \phi_1 = 3\phi_* \operatorname{sen} \left( \frac{\phi_0}{f} \right), \quad (5.19)$$

en donde hemos adoptado unidades naturales con  $M_p = 1$ , consideración que tomaremos en adelante. Para la resolución de esta ecuación emplearemos el método de coeficientes indeterminados. Consideremos la variable  $x = \phi_0/f$ , con lo que tenemos

$$\frac{d}{d\phi_0} = \frac{1}{f} \frac{d}{dx}, \quad (5.20)$$

de donde se sigue que

$$\frac{d^2}{d\phi_0^2} = \frac{1}{f^2} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (5.21)$$

y entonces la ecuación de movimiento (5.19) toma la forma

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - 3\phi_* f \frac{d\phi_1}{dx} - \frac{3}{2} f^2 \phi_1 = 3\phi_* f^2 \operatorname{sen} x. \quad (5.22)$$

Proponemos como solución particular

$$\phi_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x, \quad (5.23)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_p}{dx} &= A \cos x - B \operatorname{sen} x, \\ \frac{d^2 \phi_p}{dx^2} &= -A \operatorname{sen} x - B \cos x. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sustituyendo en (5.22) y simplificando se obtiene

$$\operatorname{sen} x \left( -A + 3\phi_* f B - \frac{3}{2} f^2 A \right) + \cos x \left( -B - 3\phi_* f A - \frac{3}{2} f^2 B \right) = 3\phi_* f^2 \operatorname{sen} x, \quad (5.25)$$

por lo que el sistema de ecuaciones a resolver es

$$-A \left( 1 + \frac{3}{2} f^2 \right) + 3\phi_* f B = 3\phi_* f^2, \quad (5.26a)$$

$$-B \left( 1 + \frac{3}{2} f^2 \right) - 3\phi_* f A = 0. \quad (5.26b)$$

De (5.26b) tenemos que

$$B = -\frac{3\phi_* f A}{1 + \frac{3}{2}f^2}, \quad (5.27)$$

por lo que, al sustituir en (5.26a) se obtiene

$$-A \left(1 + \frac{3}{2}f^2\right) + 3\phi_* f \left[-\frac{3\phi_* f A}{1 + \frac{3}{2}f^2}\right] = 3\phi_* f^2. \quad (5.28)$$

Agrupando los términos semejantes tenemos que

$$-A \left[ \left(1 + \frac{3}{2}f^2\right) + \frac{9\phi_*^2 f^2}{1 + \frac{3}{2}f^2} \right] = -A \left[ \frac{(1 + \frac{3}{2}f^2)^2 + 9\phi_*^2 f^2}{1 + \frac{3}{2}f^2} \right] = 3\phi_* f^2, \quad (5.29)$$

de donde

$$A = -\left[ \frac{6\phi_* f^2 (2 + 3f^2)}{(2 + 3f^2)^2 + 36\phi_*^2 f^2} \right], \quad (5.30)$$

y por tanto

$$B = \frac{6\phi_* f^2}{(2 + 3f^2)^2 + 36\phi_*^2 f^2} \cdot 6\phi_* f. \quad (5.31)$$

De este modo la solución inhomogénea de nuestro interés es

$$\phi_1(t) = \frac{6\phi_* f^2}{(2 + 3f^2)^2 + 36\phi_*^2 f^2} \left[ -(2 + 3f^2) \operatorname{sen} \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) + 6f\phi_* \cos \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) \right], \quad (5.32)$$

que al considerar  $f \ll 1$  se escribe como

$$\phi_1(t) = \frac{3\phi_* f^2}{1 + 9\phi_*^2 f^2} \left[ -\operatorname{sen} \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) + 3f\phi_* \cos \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) \right]. \quad (5.33)$$

Recordamos en esta expresión que  $\phi_* = \phi_0(t_*)$  y estamos considerando  $\phi_0(t) \gg 1$ , por lo que conservamos el término  $\phi_*^2 f^2$  en el denominador debido a que desconocemos su comportamiento en este límite.

Es así que, al tomar  $\phi_0(t) \gg 1$  y  $f \ll 1$ , además de considerar válida la aproximación de slow-roll para  $\phi_0(t)$ , la solución a primer orden en  $b$  para la ecuación (5.4) es

$$\phi(t) = \phi_0(t) + bf \frac{3\phi_* f}{1 + (3\phi_* f)^2} \left[ -\operatorname{sen} \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) + 3f\phi_* \cos \left( \frac{\phi_0(t)}{f} \right) \right], \quad (5.34)$$

donde  $\phi_0(t)$  está dado por (5.14).

## 5.2. Cálculo del espectro de potencias escalar

Como siguiente paso procederemos al cálculo analítico del espectro de potencias escalar. La ecuación de Mukhanov-Sasaki (3.95) puede escribirse en términos de  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  y en la variable  $x = -k\tau$ , con  $\tau$  el tiempo conforme, como

$$\frac{d^2\mathcal{R}_{\mathbf{k}}}{dx^2} - \frac{2(1+2\epsilon+\delta)}{x} \frac{d\mathcal{R}_{\mathbf{k}}}{dx} + \mathcal{R}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (5.35)$$

en donde  $\epsilon$  y  $\delta$  son nuestros parámetros de slow-roll, definidos en (2.70). Como mencionamos en la sección 3.2.2, fuera del horizonte, i.e., en el límite  $x \ll 1$  la cantidad  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}(x)$  se aproxima a una constante, la cual es denominada  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)}$ , a partir de la cual definimos el espectro de potencias primordial de las perturbaciones escalares. Para la evaluación de esta última cantidad a primer orden en  $b$  es necesario realizar una expansión en los parámetros de slow-roll en (5.35) de la siguiente manera

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \mathcal{O}(b^2), \quad (5.36a)$$

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \mathcal{O}(b^2), \quad (5.36b)$$

en donde, a primer orden en  $b$  y considerando (5.34), obtenemos [41]

$$\epsilon_1 = -\frac{3bf}{\phi_*[1+(3f\phi_*)^2]} \left[ \cos\left(\frac{\phi_0}{f}\right) + 3f\phi_* \sin\left(\frac{\phi_0}{f}\right) \right], \quad (5.37a)$$

$$\delta_1 = -\frac{3b}{[1+(3f\phi_*)^2]} \left[ \sin\left(\frac{\phi_0}{f}\right) - 3f\phi_* \cos\left(\frac{\phi_0}{f}\right) \right]. \quad (5.37b)$$

Tomamos como ansatz

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \left[ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) + g(x) \right], \quad (5.38)$$

en donde  $H_{\nu_0}^{(1)}(x)$  es la función de Hankel del primer tipo de orden  $\nu_0$  con  $\nu_0 = \frac{3}{2} + 2\epsilon_0 + \delta_0$ ,  $g(x)$  es una perturbación de orden  $b$  y  $\mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)}$  es el valor de  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  fuera del horizonte con  $b = 0$ . Este valor puede calcularse al seguir los pasos de la última parte de la sección 3.2.2 para el potencial  $V(\phi_0) = \lambda^3 \phi_0$  obteniendo

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} = \mp i \sqrt{\frac{\lambda^3 \phi_k^3}{6}} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad (5.39)$$

en donde  $\phi_k$  es el valor del campo escalar al momento en el que el modo con momento comóvil  $k$  sale del horizonte, el cual está dado por

$$\phi_k = \sqrt{2p[N_* + \phi_f^2/2p - \ln(k/k_*)]}, \quad (5.40)$$

en donde  $p = 1$  y  $N_* = N(\phi_*)$  calculado bajo la aproximación de slow-roll a través de (2.81). La cantidad de nuestro interés es entonces

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} \right|^2 &= \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) + g(x) \right] \left[ -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{*(1)}(x) + g^*(x) \right] \\ &= \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} x^{2\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) H_{\nu_0}^{*(1)}(x) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} \left[ H_{\nu_0}^{(1)}(x) g^*(x) - H_{\nu_0}^{*(1)}(x) g(x) \right] + g(x) g^*(x) \right\}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

en donde el símbolo  $*$  representa el complejo conjugado de cada función. Como nos interesa este valor a primer orden en  $b$ , podemos despreciar el último término en la segunda igualdad por ser de orden  $b^2$ . Además, para valores pequeños de  $x$  tenemos el límite (3.57), por lo que entonces

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} \right|^2 &= \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} x^{2\nu_0} \left( \frac{\Gamma(\nu_0)}{\pi} \right)^2 \left( \frac{2}{x} \right)^{2\nu_0} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} \frac{\Gamma(\nu_0)}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^{\nu_0} [g^*(x) + g(x)] \right\} \\ &= \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 \left\{ 2^{\nu_0} \frac{\Gamma^2(\nu_0)}{2\pi} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \Gamma(\nu_0) 2^{\nu_0} [g(0) + g^*(0)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

con lo que al fijar  $\nu_0 = 3/2$ , lo cual es equivalente a considerar válida la aproximación de slow-roll a orden cero en  $b$ , obtenemos

$$\left| \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} \right|^2 = \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 [1 + g(0) + g^*(0)] = \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 [1 + 2\text{Re } g(0)]. \quad (5.43)$$

Finalmente, como  $g(x) \ll 1$  podemos reescribir la expresión anterior como

$$\left| \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(o)} \right|^2 \approx \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 e^{2\text{Re } g(0)} = \left| \mathcal{R}_{\mathbf{k},0}^{(o)} \right|^2 \left( \frac{k}{k_*} \right)^{\frac{2\text{Re } g(0)}{\ln(k/k_*)}}. \quad (5.44)$$

Por otro lado, expandiendo los parámetros de slow-roll a primer orden en  $b$  en la ecuación de Mukhanov-Sasaki y sustituyendo nuestro ansatz (5.38) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d^2}{dx^2} \left[ x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) \right] + \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - \frac{2}{x} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} \left[ x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) \right] - \frac{2}{x} \frac{dg(x)}{dx} \\ - \frac{2(2\epsilon_1 + \delta_1)}{x} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) \right] + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) + g(x) = 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

en donde hemos hecho uso de que  $\nu_0 = 3/2$ . Podemos entonces agrupar los términos de orden  $b$ , obteniendo que la ecuación para la perturbación  $g(x)$  es

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dg(x)}{dx} - \frac{2(2\epsilon_1 + \delta_1)}{x} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} \left[ x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) \right] = 0. \quad (5.46)$$

Para simplificar esta expresión, hacemos uso de que

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu} - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i \operatorname{sen}(\nu\pi)}, \quad (5.47)$$

en donde  $J_\nu(x)$  es la función de Bessel de orden  $\nu$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_{\nu_0}^{(1)}(x) &= H_{3/2}^{(1)}(x) \\ &= i[J_{-3/2}(x) - iJ_{3/2}] \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \operatorname{sen} x - \frac{\cos x}{x} - +i \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Entonces,

$$x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} [(x+i)\operatorname{sen} x - (1+ix)\cos x], \quad (5.49)$$

de donde, finalmente,

$$\frac{d}{dx} [x^{\nu_0} H_{\nu_0}^{(1)}(x)] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} (x \cos x + ix \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x) \approx -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{ix}, \quad (5.50)$$

en donde hemos despreciado el último término en la primera igualdad pues nos encontramos en el régimen de  $x$  pequeño. Al sustituir (5.50) en (5.46) obtenemos que la ecuación diferencial para la perturbación  $g(x)$  puede escribirse como

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dg(x)}{dx} + g(x) = 2e^{ix}(2\epsilon_1 + \delta_1), \quad (5.51)$$

en donde notamos en (5.37) que el término  $\epsilon_1$  está suprimido con respecto a  $\delta_1$  por un término  $\frac{f}{\phi_*}$  y, dado que estamos interesados en el régimen  $\frac{f}{\phi_*} \ll 1$ , nos es posible despreciar el término proporcional  $\epsilon_1$  en (5.51).

Notamos que es posible escribir  $\delta_1$  mediante identidades trigonométricas como

$$\delta_1 = -\frac{3b}{\sqrt{1+(3f\phi_*)^2}} \cos\left(\frac{\phi_0}{f} + \varphi\right), \quad (5.52)$$

en donde  $\varphi = -\arctan(3f\phi_*) - \frac{\pi}{2}$  es una fase que despreciaremos por simplicidad. Además nos es posible escribir  $\phi_0(x)$  como  $\phi_0(x) = \phi_* - \frac{\ln k/k_*}{\phi_*} + \frac{\ln x}{\phi_*} = \frac{\phi_k}{\phi_*} + \frac{\ln x}{\phi_*}$ , con lo que al definir  $r(x) \equiv \operatorname{Re}(g(x))$ , la parte de nuestro interés en la ecuación (5.51) se escribe como

$$\frac{d^2 r}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dr}{dx} + r = -\frac{6b}{\sqrt{1+(3f\phi_*)^2}} \cos(x) \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \frac{\ln x}{f\phi_*}\right). \quad (5.53)$$

Esta ecuación puede ser resuelta por medio del cálculo de su función de Green, para lo cual es necesario calcular las soluciones de la forma homogénea de la ecuación (5.53), i.e.,

$$\frac{d^2 r(x)}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dr(x)}{dx} + r(x) = 0, \quad (5.54)$$

que puede escribirse como

$$x^2 \frac{d^2 r(x)}{dx^2} - 2x \frac{dr(x)}{dx} + x^2 r(x) = 0. \quad (5.55)$$

Mediante el cambio de variable  $u(x) = (-x)^{-3/2} r(x)$  podemos escribir esta expresión como la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + x \frac{du(x)}{dx} + \left[ x^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right] u(x) = 0, \quad (5.56)$$

para la cual la función de Bessel de orden  $3/2$ ,

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad (5.57)$$

es una solución. Notamos que podemos ignorar el factor  $\sqrt{2/\pi}$  y seguir obteniendo una solución de (5.56). Al regresar en nuestro cambio de variable, obtenemos que

$$r_1(x) = x \cos x - \sin x \quad (5.58)$$

es una solución particular de la ecuación homogénea (5.55).

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) = 0, \quad (5.59)$$

para la cual conocemos una solución  $y_1(x)$ . Podemos entonces obtener otra solución  $y_2(x)$  linealmente independiente, la cual está dada por [42]

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int^x p(t) dt}}{y_1^2(x)} dx. \quad (5.60)$$

Con esto, nos es posible construir una segunda solución de la ecuación (5.55) a partir de la solución (5.58) por medio de la integral

$$\begin{aligned} r_2(x) &= r_1(x) \int \frac{e^{\int^x \frac{2}{t} dt}}{r_1^2(x)} dx \\ &= (x \cos x - \sin x) \int \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2} dx \\ &= (x \cos x - \sin x) \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

por lo que obtenemos

$$r_2(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x. \quad (5.62)$$

Contando con estas dos soluciones particulares, la función de Green asociada a la ecuación (5.53) está dada por

$$G(x, y) = \frac{r_1(x)r_2(y) - r_1(y)r_2(x)}{W(r_1, r_2)|_y}, \quad (5.63)$$

en donde  $W(r_1, r_2)$  es el wronskiano entre  $r_1$  y  $r_2$ , que en nuestro caso está dado por  $W(r_1, r_2) = x^2$ . Por tanto,

$$G(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(y) - y \cos(y)}{y^2} [x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + \frac{y \operatorname{sen}(y) + \cos(y)}{y^2} [x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)], \quad (5.64)$$

por lo que la solución para (5.53) está dada por

$$\begin{aligned} r(x) = & -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} [x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)] \int_0^\infty \cos(y) \cos\left(\frac{\phi_k}{\phi_*} + \frac{\ln y}{f\phi_*}\right) \frac{[\operatorname{sen}(y) - y \cos(y)]}{y^2} dy \\ & -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} [x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)] \int_0^\infty \cos(y) \cos\left(\frac{\phi_k}{\phi_*} + \frac{\ln y}{f\phi_*}\right) \frac{[y \operatorname{sen}(y) + \cos(y)]}{y^2} dy. \end{aligned} \quad (5.65)$$

En el límite de nuestro interés, tomando  $x \ll 1$ , obtenemos

$$r(0) = -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \int_0^\infty \cos(y) \cos\left(\frac{\phi_k}{\phi_*} + \frac{\ln y}{f\phi_*}\right) \frac{[\operatorname{sen}(y) - y \cos(y)]}{y^2} dy, \quad (5.66)$$

que podemos reescribir como

$$r(0) = -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \int_0^\infty dy \frac{\pi}{2} J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \frac{\ln y}{f\phi_*}\right). \quad (5.67)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f\phi_*) &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) y^{\frac{i}{f\phi_*}} \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \cos\left(\frac{\ln y}{f\phi_*}\right) - i \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \operatorname{sen}\left(\frac{\ln y}{f\phi_*}\right) \\ &\equiv a + ib, \end{aligned} \quad (5.68)$$

de manera que  $|\mathcal{I}(f\phi_*)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Definimos entonces  $\beta(f\phi_*) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ , de manera que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \beta(f\phi_*)\right) &= \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right) \cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] - \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_k}{f}\right) \operatorname{sen}\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right) - \frac{b}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_k}{f}\right)}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \\ &= \frac{a \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right) - b \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_k}{f}\right)}{|\mathcal{I}(f\phi_*)|}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} |\mathcal{I}(f\phi_*)| \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \beta(f\phi_*)\right) &= \frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \left[ a \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right) - b \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_k}{f}\right) \right] \\ &= -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \frac{\pi}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right) \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \cos\left(\frac{\ln y}{f\phi_*}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_k}{f}\right) \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \operatorname{sen}\left(\frac{\ln y}{f\phi_*}\right) \right\} \\ &= -\frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \frac{\ln y}{f\phi_*}\right), \end{aligned} \quad (5.70)$$

y finalmente

$$r(0) = \frac{6b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} |\mathcal{I}(f\phi_*)| \cos\left(\frac{\phi_k}{f} + \beta(f\phi_*)\right). \quad (5.71)$$

Por simplicidad, podemos ignorar la fase  $\beta(f\phi_*)$  en la expresión anterior y reconocer la integral  $\mathcal{I}$ , definida en (5.68), como una integral de Weber-Schafheitlin, que puede resolverse en forma analítica y cuya solución, de acuerdo con [43], está dada por

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^\infty dy J_{\frac{3}{2}}(y) J_{-\frac{1}{2}}(y) y^{\frac{i}{f\phi_*}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(i/2f\phi_*)}{(1 - i/f\phi_*) \Gamma(-1/2 - i/2f\phi_*)}. \quad (5.72)$$

Por lo tanto

$$|\mathcal{I}(f\phi_*)| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{|\Gamma(i/2f\phi_*)|}{(1 + 1/f^2\phi_*^2) |\Gamma(-1/2 - i/2f\phi_*)|}, \quad (5.73)$$

en donde

$$|\Gamma(i/2f\phi_*)|^2 = \frac{2\pi f\phi_*}{\sinh\left(\frac{\pi}{2f\phi_*}\right)}, \quad |\Gamma(-1/2 - i/2f\phi_*)|^2 = \frac{4\pi}{(1 + 1/f^2\phi_*^2) \cosh\left(\frac{\pi}{2f\phi_*}\right)}, \quad (5.74)$$

por lo que entonces

$$|\mathcal{I}(f\phi_*)| = \sqrt{\frac{\pi}{8} \coth\left(\frac{\pi}{2f\phi_*}\right)} f\phi_*. \quad (5.75)$$

Para simplificar la notación, definamos

$$\delta n_s = \frac{2r(0)}{\cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right)} = \frac{12b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \sqrt{\frac{\pi}{8} \coth\left(\frac{\pi}{2f\phi_*}\right)} f\phi_*. \quad (5.76)$$

Así, el espectro de potencias escalar puede escribirse como

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*) \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1} \left[1 + \delta n_s \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right)\right] \equiv A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1} \left[1 + \delta n_s \cos\left(\frac{\phi_k}{f}\right)\right]. \quad (5.77)$$

Esta forma de escribir el espectro de potencias escalar fue calculada en un caso muy específico del potencial (5.2). Sin embargo, es consistente con otros escenarios, en los que el valor del parámetro  $\delta n_s$  es bien aproximado por [40]

$$\delta n_s \approx 3b \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{\frac{p}{2f^2 N_0}} \quad \text{y} \quad N_0 = N_* + \phi_f^2/2p. \quad (5.78)$$

La compatibilidad de las expresiones (5.76) y (5.78) puede probarse bajo ciertas aproximaciones. Tomemos primero (5.78), siendo  $p = 1$  y recordando que nos encontramos en el límite  $b \ll 1$  tenemos que

$$N_* = \int_{\phi_f}^{\phi_*} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_v}} \approx \int_{\phi_f}^{\phi_*} \phi d\phi = \frac{\phi_*^2}{2} - \frac{\phi_f^2}{2}, \quad (5.79)$$

en donde consideramos la aproximación  $V(\phi) \approx \lambda^3 \phi$ , de manera que  $N_0 = \phi_*^2/2$  y por tanto

$$\delta n_s = 3b(2\pi f\phi_*)^{1/2}. \quad (5.80)$$

Por otro lado, al considerar (5.76) en el límite  $f \ll 1$ , tenemos que

$$\coth\left(\frac{\pi}{2f\phi_*}\right) \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \rightarrow 1, \quad (5.81)$$

por lo que

$$\delta n_s \rightarrow 3b(2\pi f\phi_*)^{1/2}. \quad (5.82)$$

## Capítulo 6

# Distorsiones espectrales en monodromía de axiones

En capítulos anteriores hicimos notar que las distorsiones en el espectro de la CMB constituyen una nueva e independiente fuente de información sobre la historia de nuestro Universo. En particular, la disipación de modos acústicos produce distorsiones  $\mu$  y  $y$  con una amplitud dependiente del espectro de fluctuaciones escalares, por lo que pueden emplearse en la búsqueda por establecer la naturaleza de la inflación cosmológica. En este capítulo calculamos la amplitud de estas distorsiones considerando diferentes modelos de inflación por monodromía de axiones con la finalidad de establecer si su detección es posible para propuestas experimentales existentes. Adicionalmente, buscamos determinar si la sensibilidad de dichas propuestas experimentales es suficiente para favorecer a alguno de nuestros modelos y brindar información sobre el comportamiento de la constante de decaimiento del axión.

### 6.1. Cálculo de las distorsiones

De acuerdo con la sección 4.3.3, la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  debidas a la disipación de modos acústicos es calculada mediante las ecuaciones (4.77). Para un modelo basado en monodromía de axiones, el espectro de potencias dentro de estas integrales está dado por (5.77), de manera que las magnitudes de nuestro interés están dadas por

$$\mu = \int_1^\infty d \ln k \left\{ A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \left[ 1 + \delta n_s \cos \left( \frac{\phi_k}{f} \right) \right] \right\} W_\mu, \quad (6.1a)$$

$$y = \int_1^\infty d \ln k \left\{ A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \left[ 1 + \delta n_s \cos \left( \frac{\phi_k}{f} \right) \right] \right\} W_y, \quad (6.1b)$$

$p$	$\phi_f[M_p]$	$\phi_*[M_p]$	$n_s$
2/3	0.4714	8.7686	0.976878
1	0.70711	10.747	0.974026
4/3	0.94281	12.419	0.971183

Tabla 6.1: Valores dependientes del modelo. Destaca el resultado del parámetro  $n_s$  para las diferentes elecciones del parámetro  $p$  en inflación por monodromía de axiones.

en donde las expresiones para las funciones ventana  $W_\mu$  y  $W_y$  están dadas por (4.78), mientras que  $\delta n_s$  y  $\phi_k$  son cantidades dependientes del modelo de monodromía de axiones a estudiar y pueden calcularse mediante las ecuaciones (5.76), (5.78) y (5.40).

### 6.1.1. Parámetros del modelo

En las expresiones (6.1), el conjunto de parámetros es  $\{A_s, k_*, N_*, n_s, p, b, f\}$ . Los primeros tres están relacionados con mediciones experimentales por lo que, con la finalidad de conectar nuestros resultados con las observaciones disponibles, consideramos la escala de referencia de Planck [44], estableciendo  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ , lo cual da como resultado  $N_* \approx 57.5$  al considerar que el recalentamiento se da de manera instantánea. Además, empleamos el resultado reportado por esta misma colaboración en [31] para  $A_s$ , con lo que en nuestros cálculos  $A_s = 2.09681 \times 10^{-9}$ .

Por otro lado, los parámetros  $p$ ,  $b$  y  $f$  definen un modelo inflacionario por monodromía de axiones, i.e., al asignar valores diferentes a estos parámetros estamos definiendo escenarios inflacionarios distintos. Como mencionamos anteriormente, nuestra intención es calcular la amplitud de las distorsiones para diferentes modelos, por lo que debemos variar estos tres parámetros para lograrlo. Buscamos que nuestros resultados puedan conectarse con observaciones presentes, por lo que para la asignación de valores a estos parámetros tomamos como referencia los resultados de Planck en [44], que presenta restricciones experimentales para  $p = 2/3$ ,  $p = 1$  y  $p = 4/3$ , razón por la que consideramos estos tres valores de  $p$  en nuestros cálculos.

Notamos además, que el parámetro  $n_s$  depende del escenario inflacionario a través de  $\phi_*$  en (3.108), pues este último valor es calculado mediante (5.40), en donde interviene el parámetro  $p$ , además de la cantidad  $\phi_f$ , cuyo valor es calculado al considerar  $\epsilon(\phi_f) = 1$ . Considerando la aproximación  $V(\phi) \approx \lambda^{4-p}\phi^p$  para los valores de  $p$  listados anteriormente, i.e., aquellos para los cuales Planck ofrece información, obtenemos los resultados en la tabla 6.1.

Con lo anterior tenemos que, al elegir un valor de  $p$ , el valor de  $n_s$  queda determinado, de manera que los únicos parámetros libres son  $b$  y  $f$ . Planck reporta restricciones experimentales a  $\delta n_s$  en función de  $f$ , las cuales recuperamos mediante el software DataThief [45] y convertimos en restricciones para  $b$  en función de  $f$  por medio de (5.76) si  $p = 1$  y (5.78) en los otros dos casos considerados. Las restricciones obtenidas se muestran en la figura 6.1. Es importante mencionar que en estos cálculos intervienen las cantidades  $\phi_*$  y  $\phi_f$ , cuyos valores tomamos de la tabla 6.1.

Las restricciones en la figura 6.1 establecen la región en la cual podemos variar los parámetros

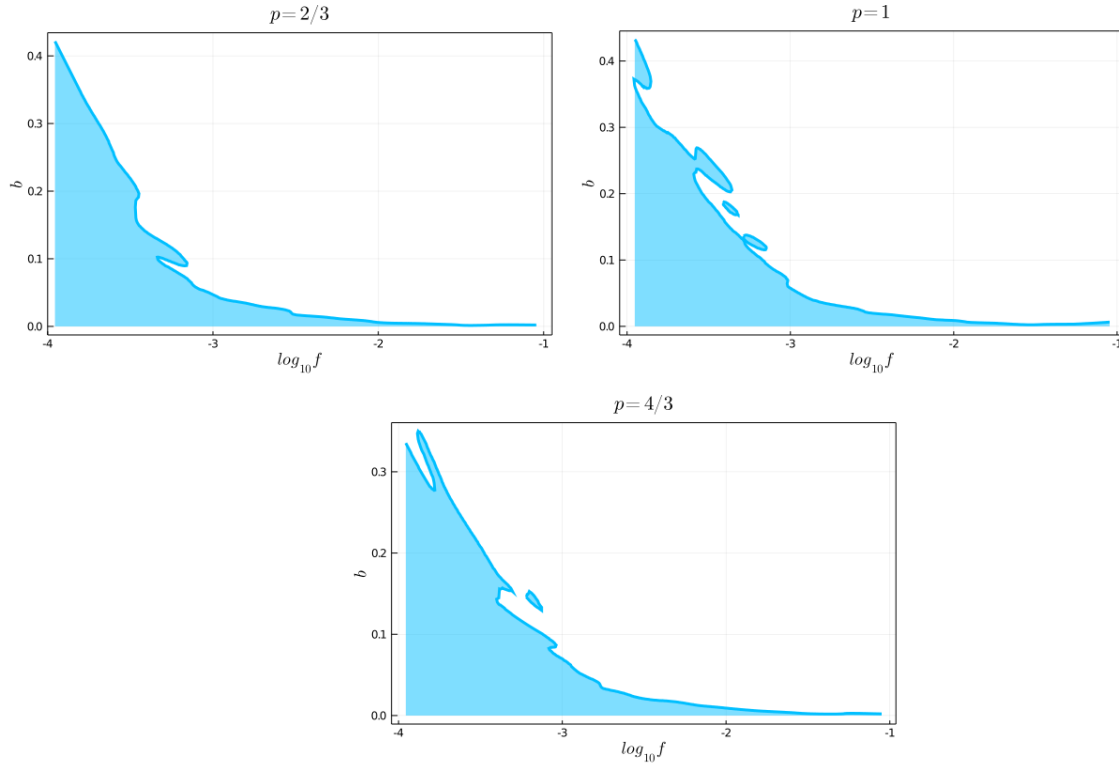


Figura 6.1: Restricciones de Planck sobre el parámetro  $b$  en función de  $f$  a  $1\sigma$ , calculadas a partir de las figuras 32-34 en [44].

$b$  y  $f$  para cada una de las tres elecciones de  $p$  que consideramos.

### 6.1.2. Cálculo de las amplitudes

A continuación describiremos el proceso mediante el cual llevamos a cabo el cálculo de la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  para cada uno de los valores de  $p$  listados anteriormente, tomando como ejemplo el caso  $p = 1$ .

Considerando  $p = 1$  el integrando en (6.1) se escribe como

$$A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \left[ 1 + \frac{12b}{\sqrt{1 + (3f\phi_*)^2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \coth \left( \frac{\pi}{2f\phi_*} \right) f\phi_* \cos \left( \frac{\phi_k}{f} \right) \right] W_{\mu,y}, \quad (6.2)$$

en donde es más claro que los únicos parámetros libres son  $b$  y  $f$ . Mencionamos en el capítulo 5 que hay escenarios en los que el parámetro  $f$  no es una constante sino una función del campo, i.e.,  $f = f(\phi)$ , por lo que resulta interesante estudiar el comportamiento de las distorsiones espectrales

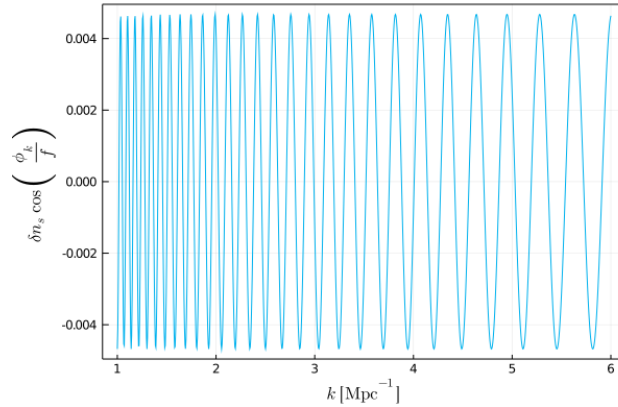
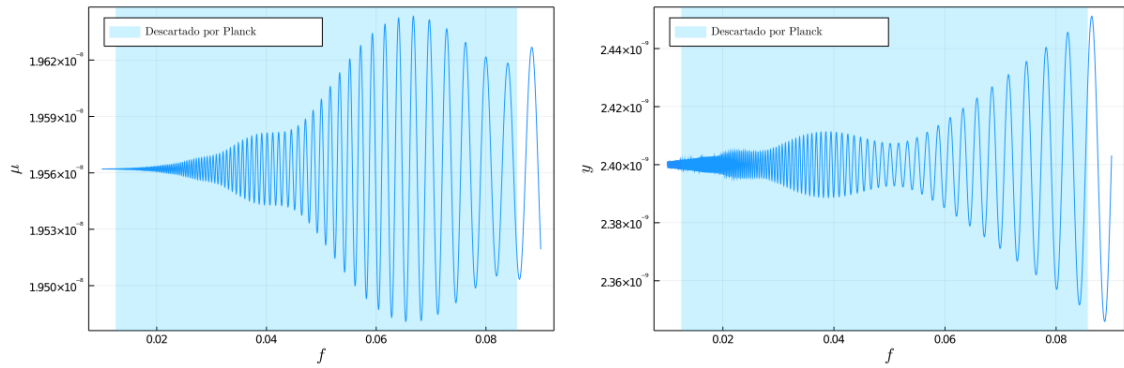


Figura 6.2: Gráfica del término oscilatorio en el espectro de fluctuaciones escalares. Podemos observar que las frecuencia de las oscilaciones cerca de  $k = 1\text{Mpc}^{-1}$  es alta cuando  $f$  es pequeño, lo cual dificulta la integración numérica.

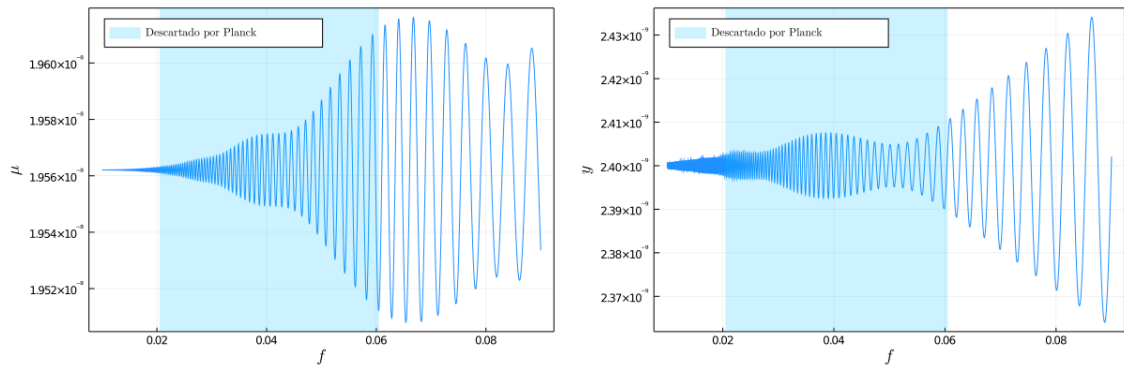
cuando este parámetro varía de manera continua. Por lo tanto, buscamos obtener, para diferentes elecciones de  $b$ , funciones  $\mu(f)$  y  $y(f)$ . Con este fin y debido a nuestro tratamiento perturbativo de la ecuación (5.4) que supone  $b \ll 1$ , consideramos los casos  $b = 0.006$ ,  $b = 0.004$ ,  $b = 0.002$  y, para cada uno de ellos, realizamos la integración numérica de (6.1) variando el parámetro  $f$  en el intervalo  $[0.01, f_{max,b}]$ , en donde  $f_{max,b}$  es el valor máximo compatible con  $b$  dentro de las restricciones en la figura 6.1. Es claro que no es posible variar el parámetro  $f$  de forma continua en este intervalo, por lo cual consideramos un tamaño de paso de  $f_{max,b}/5000$ .

El método de integración empleado fue la regla de Levin [46], con una recursión máxima de 2000, el cual resulta útil en este caso debido al término oscilatorio en el integrando, el cual oscila con una frecuencia alta cuando  $k$  se aproxima a  $1\text{Mpc}^{-1}$  para valores de  $f$  pequeños, como se ilustra en la figura 6.2, dificultando la implementación de métodos más tradicionales como cuadraturas de Gauss.

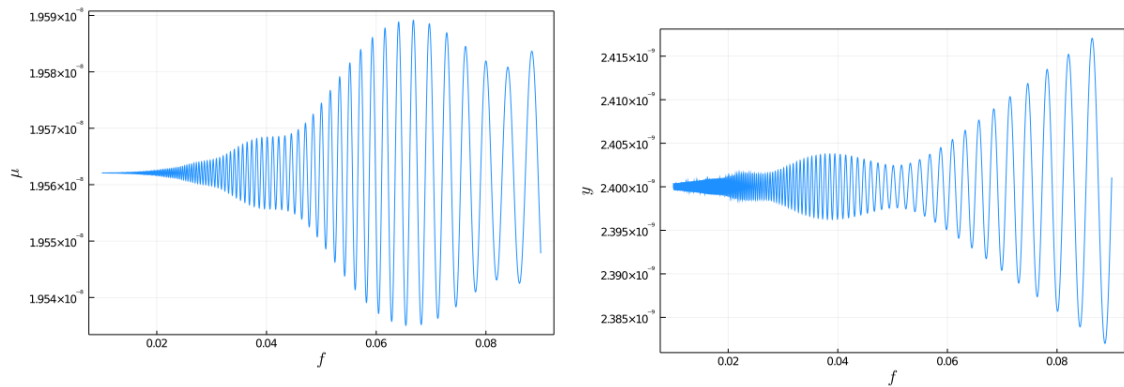
Los resultados que obtenidos para esta elección del parámetro  $p$  se muestran en la figura 6.3. Al prestar atención a la figura 6.3a observamos que la mayor parte de los resultados obtenidos son descartados por Planck. Con base en la figura 6.1 podría pensarse que es posible considerar valores de  $f$  por debajo del límite inferior establecido de 0.01, lo cual daría acceso a más valores de la amplitud de las distorsiones. Sin embargo, esto implica dificultades adicionales en la integración numérica. Hicimos notar con anterioridad que la frecuencia de el término oscilatorio en las integrales (6.1) aumenta conforme el valor de  $f$  decrece, con lo que la integración se vuelve poco confiable, lo cual podemos apreciar en la gráfica correspondiente a las distorsiones  $y$  en la figura 6.3a, en donde se observa que para  $f < 0.02$  aparecen claras irregularidades en el comportamiento de e.g. la amplitud de las distorsiones  $y$ . Tras varios intentos determinamos que para obtener una integración confiable debemos considerar  $f > 10^{-3}$ .



(a)  $b = 0.006$

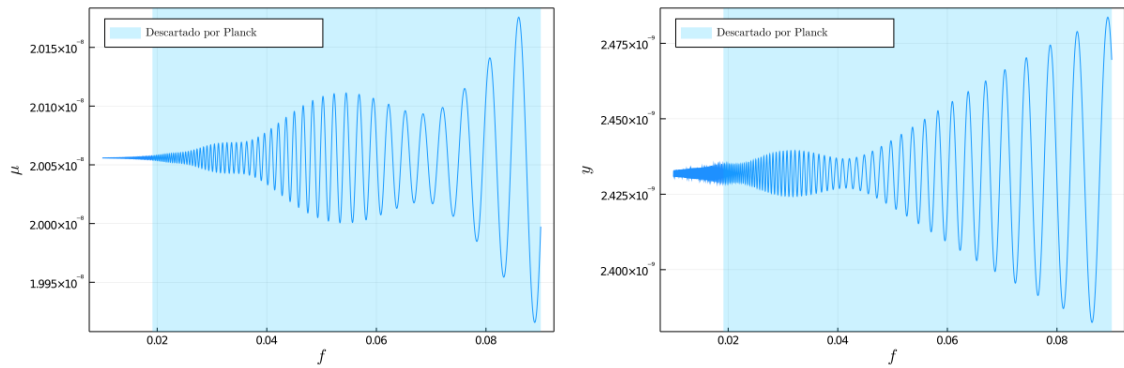
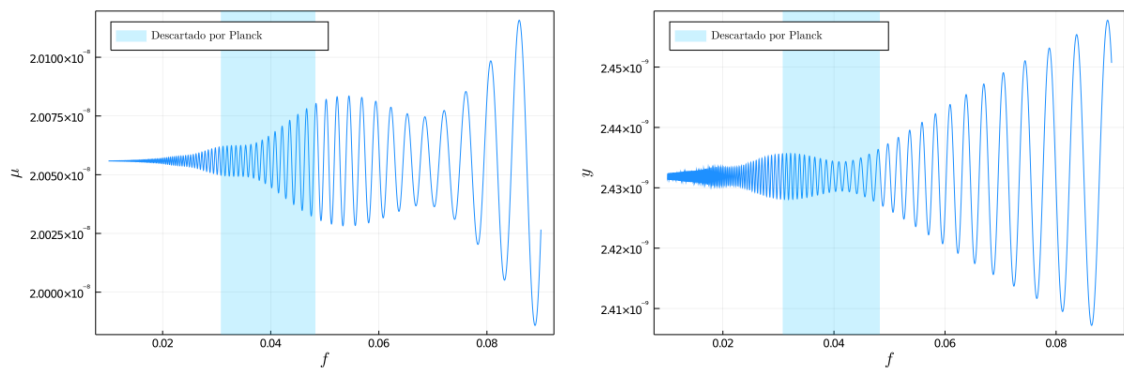
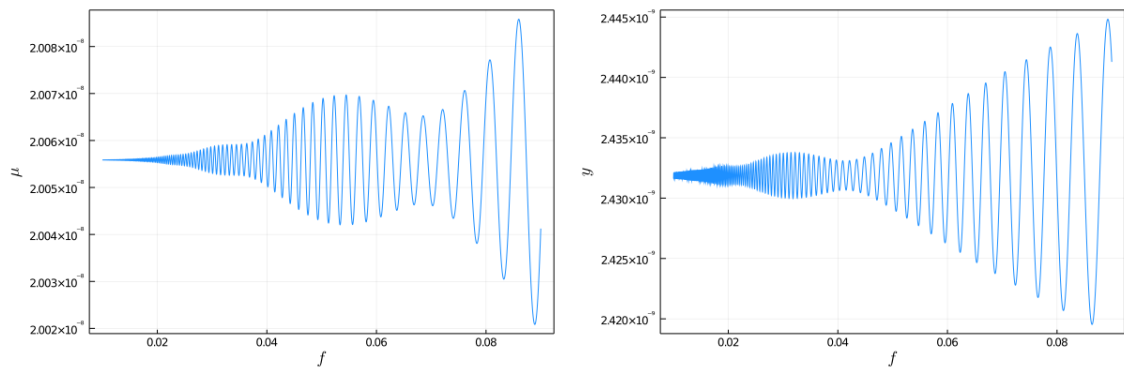


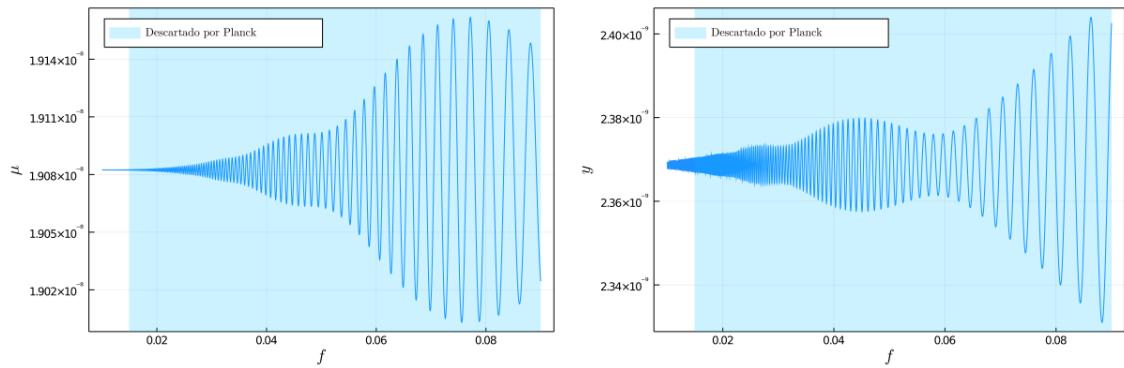
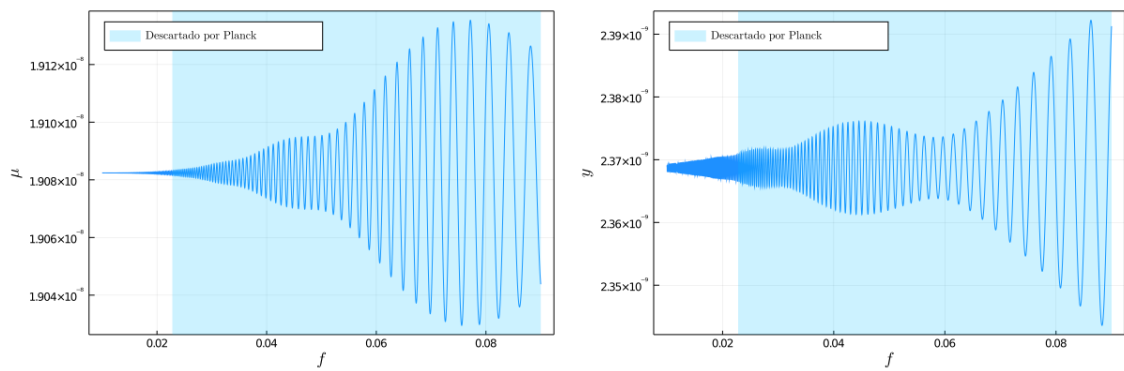
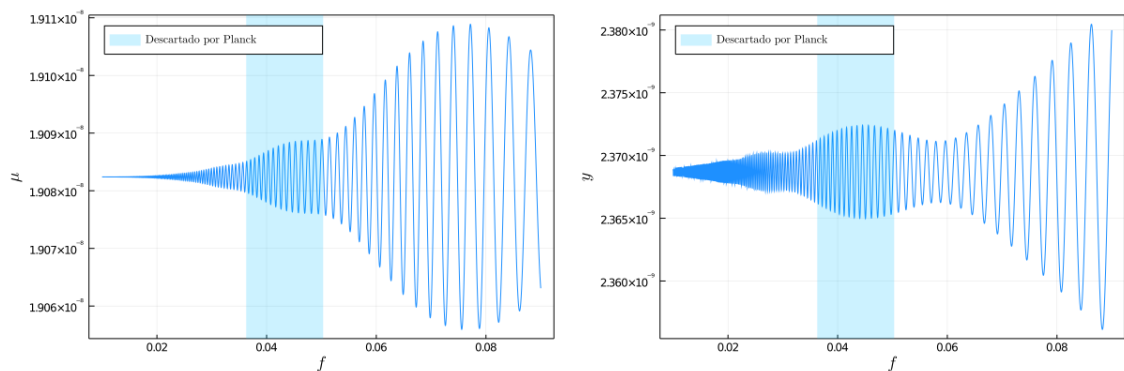
(b)  $b = 0.004$



(c)  $b = 0.002$

Figura 6.3: Amplitud de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$  para diferentes valores del parámetro  $b$ , con  $p = 1$ .

(a)  $b = 0.004$ (b)  $b = 0.002$ (c)  $b = 0.001$ Figura 6.4: Amplitud de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$  para diferentes valores del parámetro  $b$ , con  $p = 2/3$ .

(a)  $b = 0.006$ (b)  $b = 0.004$ (c)  $b = 0.002$ Figura 6.5: Amplitud de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$  para diferentes valores del parámetro  $b$ , con  $p = 4/3$ .

Este comportamiento de las distorsiones para valores de  $f$  pequeños sirvió para establecer un criterio adicional a  $b \ll 1$  para nuestra elección de valores de este parámetro. Consideremos e.g.  $b > 0.1$ . Las restricciones en la figura 6.1 implican que los valores de  $f$  permitidos para estos valores de  $b$  satisfacen  $f < 10^{-3}$ , con lo que los resultados que podríamos obtener para esta elección no son confiables. Con esto en mente, optamos por elegir valores para  $b$  que permitieran el mayor número de valores de  $f$  satisfaciendo  $f > 10^{-3}$ .

Realizamos un procedimiento análogo para el cálculo de las distorsiones para  $p = 2/3$  y  $p = 4/3$ , considerando la expresión (5.78) para  $\delta n_s$  y tomando  $b \in \{0.006, 0.004, 0.002\}$  si  $p = 4/3$  y  $b \in \{0.004, 0.002, 0.001\}$  si  $p = 2/3$ . Los resultados correspondientes se muestran en las figuras 6.5 y 6.4.

Observamos en nuestros resultados que el comportamiento de la amplitud de las distorsiones en cada uno de los casos considerados es oscilatorio, lo cual es una clara consecuencia del término oscilatorio característico de la inflación por monodromía de axiones. Notamos también que la amplitud máxima de las oscilaciones en estas magnitudes aumenta según lo hace el parámetro  $b$  y que disminuyen de manera considerable conforme los valores de  $f$  se reducen. Los valores centrales de la amplitud de las distorsiones son mostrados en la tabla 6.2, mientras que los valores máximos para la amplitud de las distorsiones  $\mu$  compatibles con las restricciones de Planck, junto con los parámetros  $b$  y  $f$  para los cuales se alcanzan dichos máximos y la amplitud correspondiente de las distorsiones  $y$  se encuentran en la tabla 6.3.

Con base en estos resultados nos fue posible establecer la amplitud máxima de las oscilaciones en el comportamiento de las distorsiones  $\mu$  cuando estas son tomadas como función del parámetro  $f$  para los diferentes escenarios de monodromía de axiones que consideramos. Estas amplitudes son mostradas en la tabla 6.4. Al ser estas las amplitudes máximas en las oscilaciones, podemos decir que si un experimento no cuenta con la sensibilidad suficiente para detectarlas, tampoco podrá detectar valores más pequeños.

Por otro lado, con la finalidad de comparar nuestros resultados con observaciones recientes, consideramos el caso de un espectro de fluctuaciones escalares dado mediante una simple ley de

$p$	$10^8 \mu^{(c)}$	$10^9 y^{(c)}$
2/3	2.00559	2.43188
1	1.95621	2.40002
4/3	1.90824	2.36869

Tabla 6.2: Valores centrales de la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  para las diferentes elecciones del parámetro  $p$ .

$p$	$b$	$f$	$10^8 \mu_{max}$	$10^9 y$
2/3	0.002	0.08598	2.01158	2.40990
1	0.006	0.08837	1.96268	2.35243
4/3	0.002	0.07716	1.91089	2.36253

Tabla 6.3: Valores de los parámetros  $b$  y  $f$  para los cuales la amplitud de las distorsiones  $\mu$  alcanza un valor máximo, junto al valor correspondiente de la amplitud  $y$ . Se consideran únicamente aquellos resultados que son compatibles con las restricciones de Planck.

$p$	$10^8 A_{\mu,max}$
2/3	0.00599
1	0.00647
4/3	0.00265

Tabla 6.4: Separación máxima del valor central de la amplitud de las distorsiones  $\mu$  para cada valor de  $p$ .

potencias. Para ello consideramos las integrales

$$\mu = \int_1^\infty d \ln k \left[ A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \right] W_\mu, \quad (6.3a)$$

$$y = \int_1^\infty d \ln k \left[ A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \right] W_y, \quad (6.3b)$$

en donde los parámetros  $A_s$  y  $k_*$  son iguales a los establecidos en la sección 6.1.1 y  $n_s = 0.96605$  es el valor reportado por Planck [31]. Las amplitudes de las distorsiones para este modelo son  $\mu = 1.83187 \times 10^{-8}$  y  $y = 2.31803 \times 10^{-9}$ , las cuales consideramos los valores de referencia dados por Planck en el escenario  $\Lambda$ CDM. Al comparar estos valores con los valores centrales obtenidos en los diferentes escenarios de monodromía de axiones de nuestro interés y comparar estos últimos entre ellos obtuvimos las tablas 6.5 y 6.6, las cuales contienen el valor absoluto de la diferencia en las magnitudes de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  entre todos nuestros modelos.

$10^8 \Delta \mu_{2/3,1}^{(c)}$	$10^8 \Delta \mu_{2/3,4/3}^{(c)}$	$10^8 \Delta \mu_{2/3,PL}^{(c)}$	$10^8 \Delta \mu_{1,4/3}^{(c)}$	$10^8 \Delta \mu_{1,PL}^{(c)}$	$10^8 \Delta \mu_{4/3,PL}^{(c)}$
0.04938	0.09735	0.17372	0.04797	0.12434	0.07637

Tabla 6.5: Diferencias entre los valores centrales  $\mu^{(c)}$  para los diferentes valores de  $p$ . En esta tabla los subíndices en la cantidad  $\Delta \mu^{(c)}$  indican los valores de  $p$  que se están comparando. En los casos en los que aparece el subíndice  $PL$  se compara el valor de  $\mu^{(c)}$  para el valor de  $p$  indicado con el valor de  $\mu$  dado por una ley de potencias con los datos de Planck.

$10^9 \Delta y_{2/3,1}^{(c)}$	$10^9 \Delta y_{2/3,4/3}^{(c)}$	$10^9 \Delta^{(c)} y_{2/3,PL}$	$10^9 \Delta y_{1,4/3}^{(c)}$	$10^9 \Delta y_{1,PL}^{(c)}$	$10^9 \Delta y_{4/3,PL}^{(c)}$
0.03186	0.06319	0.11385	0.03133	0.08199	0.05066

Tabla 6.6: Diferencias entre los valores centrales  $y^{(c)}$  para los diferentes valores de  $p$ . En esta tabla los subíndices en la cantidad  $\Delta y^{(c)}$  indican los valores de  $p$  que se están comparando. En los casos en los que aparece el subíndice  $PL$  se compara el valor de  $y^{(c)}$  para el valor de  $p$  indicado con el valor de  $y$  dado por una ley de potencias con los datos de Planck.

### 6.1.3. Contribución al espectro de intensidad de la CMB

La medición más directa que puede hacerse sobre la CMB es su espectro de intensidad, por lo que calculamos la contribución de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  a este espectro. De la ecuación (4.76) observamos que dicha contribución está dada por

$$\Delta I_{\mu,y} = \Delta I_{\mu} + \Delta I_y, \quad (6.4)$$

con ambos sumandos definidos en (4.75), donde el factor  $\mathcal{N}$  es calculado tomando  $T_0 = 2.7255$  K,  $c = 299792458$  m/s,  $k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$  JK $^{-1}$  y  $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$  JHz $^{-1}$  [47]. Debido a que nuestro interés está en determinar la sensibilidad que experimentos futuros deben poseer para la detección de estas contribuciones, consideramos en la ecuación (6.4) los valores en la tabla 6.3 pues, si los valores máximos no pueden ser detectados, ningún otro valor podrá serlo. Es necesario mencionar que, a pesar de que los valores de  $y$  en la tabla 6.3 no son los valores máximos de esta amplitud, el término dominante en (6.4) es el de las distorsiones  $\mu$  al ser un orden de magnitud mayor.

La contribución  $\Delta I_{\mu,y}$  al espectro de intensidad para los escenarios de monodromía de axiones considerados y de los valores de referencia dados por Planck es mostrada en la figura 6.6, en donde también se muestra la sensibilidad propuesta para los experimentos PIXIE, Super-PIXIE y Voyage 2050, considerando un tiempo de misión para los primeros dos de 4 y 8 años, respectivamente. Podemos observar que la detección de las distorsiones espectrales  $\mu$  y  $y$  debidas a la disipación de modos acústicos se encuentra al alcance de estos experimentos en diferentes intervalos de frecuencia.

## 6.2. Discusión de los resultados

Considerando que la duración de la misión PIXIE es de 4 años, se prevé una sensibilidad de aproximadamente 2Jy/sr en cada uno de sus canales. Con base en la figura 6.6 observamos que para frecuencias en los intervalos 29GHz – 132GHz y 187GHz – 584GHz, la detección de distorsiones en el espectro de intensidad debidas a la disipación de modos acústicos es posible para los modelos de monodromía de axiones cuyos parámetros  $b$  y  $f$  maximizan la contribución de las distorsiones  $\mu$ , al igual que para los valores de referencia dados por Planck. De hecho, podemos observar en las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 que todos los valores de las amplitudes de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  en los escenarios de monodromía de axiones considerados que son compatibles con Planck, incluyendo los mínimos, son

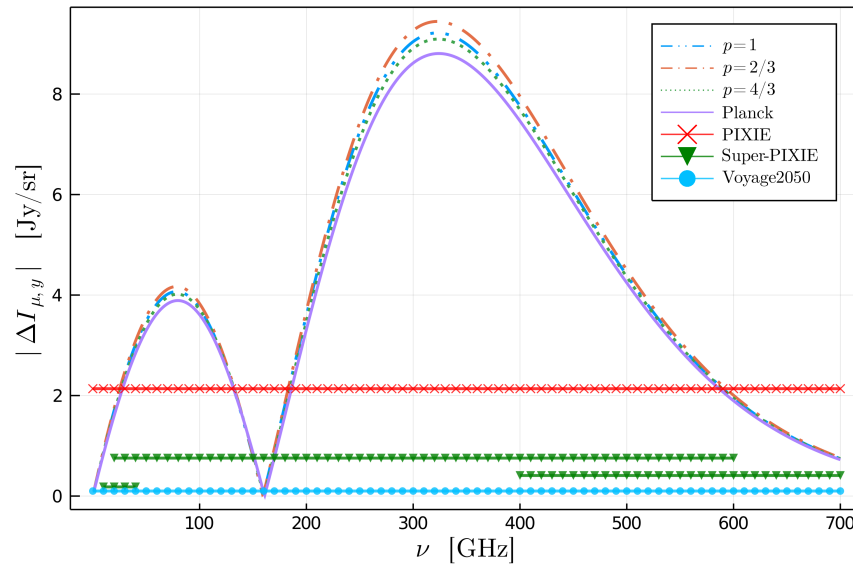


Figura 6.6: Comparación de las distorsiones espectrales producidas por diferentes modelos de inflación por monodromía de axiones, junto con el resultado esperado en un escenario de ley de potencias con los parámetros dados por Planck. Además, se muestra la sensibilidad propuesta para PIXIE, Super-PIXIE y Voyage2050.

mayores que los valores obtenidos para un espectro de potencias estándar  $y$ , dado que la detección de las distorsiones debidas a este último es posible, la detección de aquellas producidas por todos los modelos considerados en este trabajo también lo es. Por su parte, el propuesto Super-PIXIE prevé una sensibilidad de  $0.1825 \text{ Jy/sr}$  en el rango bajo,  $0.7554 \text{ Jy/sr}$  en el rango medio y  $0.4092 \text{ Jy/sr}$  en el rango alto, por lo que extendería el rango de frecuencias para la posible detección a los intervalos  $15 \text{ GHz} - 146 \text{ GHz}$  y  $175 \text{ GHz} - 700 \text{ GHz}$ .

Una vez establecido que la detección es posible, podemos preguntarnos si estos experimentos son capaces de brindar información más precisa sobre la inflación cosmológica. En particular, podemos preguntarnos si son capaces de establecer una distinción entre los diferentes modelos considerados en este trabajo para descartarlos o confirmarlos. En la tabla 6.7, recuperada de [48], se encuentran las incertidumbres pronosticadas para la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  al combinar los futuros resultados de PIXIE, así como experimentos con características similares, pero con sensibilidades 10, 100 y 1000 veces mayores, los cuales son llamados PIXIE10, PIXIE100 y PIXIE1000<sup>1</sup> respectivamente, con aquellos obtenidos por Planck. Es importante mencionar que, debido a la inclusión de los resultados de Planck, estas incertidumbres se ven reducidas en comparación con las que se obtendrían al considerar únicamente mediciones de distorsiones espectrales.

Consideremos entonces los valores centrales de estas amplitudes en la tabla 6.2, así como el

<sup>1</sup>Los experimentos Super-PIXIE y Voyage 2050 poseen sensibilidades en el rango de PIXIE10 y PIXIE100.

	PIXIE	PIXIE10	PIXIE100	PIXIE1000
$\sigma(10^8\mu)$	0.075	0.065	0.015	0.0015
$\sigma(10^9y)$	1.000	0.081	0.010	0.0019

Tabla 6.7: Incertidumbres pronosticadas para la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  al combinar resultados de Planck con diferentes experimentos para la detección de distorsiones espectrales.

resultado obtenido para el espectro dado por los datos de Planck. Comparando las diferencias entre los diferentes valores  $\mu^{(c)}$ , los cuales son mostrados en la tabla 6.5, con el intervalo de incertidumbre pronosticado para PIXIE, notamos que la sensibilidad de éste en las distorsiones  $\mu$  es suficiente para diferenciar entre un espectro con una ley de potencias estándar con los datos de Planck y aquellos correspondientes a monodromía de axiones, pues sus diferencias exceden el intervalo de incertidumbre de PIXIE. Sin embargo, esta sensibilidad no es suficiente para discernir entre estos últimos, pues permitiría descartar a lo más uno valores de  $p$ . Por ejemplo, la detección de una amplitud  $\mu = 2.00559 \times 10^{-8}$  es consistente con  $p = 2/3$  y, mientras que  $\Delta\mu_{2/3,4/3}^{(c)}$  es menor que la incertidumbre de PIXIE, descartando  $p = 4/3$ , tenemos que  $\Delta\mu_{2/3,1}^{(c)}$  está dentro del rango de incertidumbre, por lo que el caso  $p = 1$  no puede ser descartado. Es necesario considerar experimentos con mayor sensibilidad, como PIXIE100 o PIXIE1000, para que la detección de estas distorsiones pueda establecer una diferencia clara entre estos tres modelos. En el caso de las distorsiones  $y$ , PIXIE resulta incapaz de establecer diferencia alguna entre los valores centrales de los cuatro escenarios en considerados. Sin embargo, al igual que en el caso de las distorsiones  $\mu$ , un experimento como PIXIE100 podría distinguir entre todos ellos. Las mismas conclusiones pueden ser alcanzadas al considerar las diferencias entre las amplitudes máximas de las distorsiones  $\mu$  en estos modelos, mostrados en la tabla 6.3.

Adicionalmente, podemos preguntarnos si el comportamiento oscilatorio de estas distorsiones es distinguible para PIXIE o sus variantes. Para ello, consideramos los resultados mostrados en la tabla 6.4. Al hacer esto, notamos que estas diferencias exceden la incertidumbre de PIXIE, así como de PIXIE10, con lo que el comportamiento oscilatorio de las distorsiones  $\mu$  no podría ser observado con estos experimentos, haciendo imposible descartar aquellos modelos con  $f = f(\phi)$  mediante la detección de distorsiones espectrales  $\mu$ . Esta observación nos lleva a notar que, si las oscilaciones fuesen más pequeñas, lo cual ocurre al considerar valores de  $f < 10^{-3}$  es posible que ni siquiera sensibilidades como las de PIXIE1000 fuesen capaces detectarlas.

Con base en nuestros resultados determinamos que, a pesar de que la detección de estas distorsiones es posible, la sensibilidad del propuesto experimento PIXIE no es suficiente para discernir entre diferentes escenarios del modelo inflacionario de monodromía de axiones. En realidad, es necesario que la sensibilidad de estos experimentos sea alrededor de 100 veces mayor para servir a este propósito, por lo que incluso experimentos como PRISM o Super-PIXIE [24], cuya sensibilidad se encuentra en el rango de PIXIE10, no podrían diferenciar estos modelos. Sin embargo, es posible que propuestas experimentales como Voyage 2050 [25], cuyas sensibilidades se encuentran en el rango

de PIXIE100, provean la sensibilidad suficiente para establecer restricciones a los parámetros del modelo de inflación por monodromía de axiones.

Debemos mencionar que nuestros resultados están fuertemente limitados por la elección de parámetros que hicimos. En particular, destacamos nuestra incapacidad de realizar el cálculo numérico de las distorsiones al considerar  $f < 10^{-3}$ . Esta limitación es clara cuando observamos las figuras 6.3a, 6.4a y 6.3a en las que la mayor parte de nuestros datos son descartados por las observaciones de Planck. Sin embargo, consideramos que nuestros resultados con estas elecciones del parámetro  $f$  son suficientes para determinar si la detección de distorsiones espectrales asociadas a estos modelos es posible con experimentos como PIXIE y para ofrecer información valiosa sobre los requerimientos de experimentos futuros para confirmar o descartar modelos en el escenario de monodromía de axiones. Dado que observamos que la amplitud de las oscilaciones en las amplitudes de las distorsiones disminuye conforme el valor de  $f$  lo hace, consideramos la detección de estas distorsiones es posible para todos los valores de  $p$  y  $b$  considerados en este trabajo incluso para valores de  $f < 10^{-3}$ . Además, debido a que la amplitud de las distorsiones disminuye de manera considerable conforme el valor de  $f$  lo hace, considerar valores de este parámetro por debajo de nuestro límite aportaría poca información nueva con respecto al comportamiento de estas magnitudes.

# Capítulo 7

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo de tesis presentamos un estudio sobre la inflación cosmológica y de algunas de las herramientas, presentes y futuras, empleadas en su exploración. Nuestro interés se centró, de manera particular, en el modelo de inflación por monodromía de axiones y en las distorsiones espectrales en la CMB, que son una herramienta poco explorada en el terreno experimental. En nuestro trabajo buscamos establecer si la observación de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  es posible para diferentes escenarios de monodromía de axiones y si es útil para favorecer un escenario particular de este modelo. Del mismo modo, buscamos establecer si estas distorsiones proveen información útil con respecto a algunos aspectos de la física de este modelo, como la naturaleza del parámetro  $f$ .

Para el desarrollo de nuestro trabajo comenzamos repasando, en el capítulo 2, el modelo cosmológico estándar, describiendo los problemas de planitud y del horizonte cosmológico, como ejemplos de aquellos problemas que dieron origen al paradigma inflacionario. En la sección 2.3 introducimos una de las formas más simples de obtener inflación, la cual es considerar como el principal constituyente del Universo un solo campo escalar, llamado inflatón, el cual rueda lentamente mientras se desliza en su potencial. Durante esta sección introducimos los parámetros de slow-roll y el número de e-folds, cantidades que empleamos en la descripción del proceso inflacionario. A lo largo del capítulo 3 introducimos la teoría de perturbaciones cosmológicas, que nos permite tratar con un universo más realista al considerar que no satisface las condiciones de homogeneidad e isotropía través de la descomposición de las perturbaciones en modos escalares, vectoriales y tensoriales. Además, en la sección 3.2, tratamos con la dinámica de un campo escalar y de sus fluctuaciones en un universo no homogéneo ni isótropo, lo cual nos permitió establecer las bases para la descripción de la dinámica de las fluctuaciones en el campo del inflatón a través de la perturbación de curvatura comóvil y de la ecuación de Mukhanov-Sasaki. Introducimos el espectro de fluctuaciones escalares, así como del índice espectral escalar  $n_s$ . Realizamos un análisis de la dinámica de las fluctuaciones tensoriales, definiendo su espectro de potencias, así como las observables  $r$  y  $n_h$ .

En el capítulo 4 tratamos con la CMB. Describimos de manera breve cómo las mediciones de las anisotropías en su temperatura y su polarización son empleadas para imponer restricciones a

los parámetros de los espectros de fluctuaciones escalares y tensoriales. Estos datos son útiles en la búsqueda por establecer el origen de la inflación a través de la reconstrucción del potencial del inflatón. En la sección 4.3 discutimos los mecanismos más importantes que mantuvieron la radiación de la CMB en equilibrio térmico con el resto de constituyentes del Universo e introdujimos las distorsiones espectrales como consecuencia de la eventual ineficiencia de dichos procesos. Además, describimos las formas de estas distorsiones y mencionamos una de sus causas en el modelo cosmológico estándar, la disipación de modos acústicos.

El capítulo 5 contiene uno de los resultados más importantes de este trabajo. Discutimos algunas propiedades esenciales del modelo de inflación por monodromía de axiones. Durante la sección 5.1 estudiamos la dinámica del inflatón bajo la influencia del potencial (5.3), resolviendo su ecuación de movimiento a primer orden en la amplitud de las oscilaciones mediante teoría de perturbaciones. Posteriormente, realizamos de manera detallada el cálculo analítico del espectro de potencias de las perturbaciones escalares, a través de la resolución de la ecuación de Mukhanov-Sasaki a primer orden en la amplitud de las oscilaciones del potencial. Como resultado obtuvimos un espectro que contiene un término oscilatorio característico de este tipo de modelos, el cual puede ser generalizado a otros escenarios en monodromía de axiones.

Finalmente, en el capítulo 6 realizamos el cálculo de la amplitud de las distorsiones  $\mu$  y  $y$  para diferentes escenarios de inflación por monodromía de axiones mediante la integración numérica de (6.1). Encontramos que el comportamiento de estas magnitudes es oscilatorio como función del parámetro  $f$ . Además, realizamos el cálculo de la amplitud de estas distorsiones para un espectro en forma de una ley de potencias cuyos parámetros son aquellos reportados por Planck, caso para el cual realizamos la integración numérica de (6.3). La principal limitación que enfrentamos en esta etapa fue nuestra incapacidad de explorar escenarios en los que  $f < 10^{-3}$ , aunque que consideramos que nuestros resultados aportan información relevante sobre el comportamiento de las distorsiones en modelos de monodromía de axiones, pues considerar valores de  $f$  por debajo de nuestro límite tiene como resultado valores en la amplitud de las distorsiones lo suficientemente pequeños como para no ser distinguibles de los valores centrales. Determinamos que las distorsiones calculadas en este trabajo podrán ser observadas por un experimento con las características de la propuesta misión PIXIE en los rangos de frecuencia 29-132GHz y 187GHz-584GHz, mientras que experimentos con una mayor sensibilidad, como los propuestos Super-PIXIE o la misión Voyage 2050 permitirían su detección en intervalos de frecuencia más amplios, como 15GHz-146GHz y 175GHz-700GHz en el caso de Super-PIXIE.

Por otro lado, determinamos que la sensibilidad de PIXIE es insuficiente para favorecer a uno solo de los modelos que consideramos en este trabajo, así como para observar el comportamiento oscilatorio de las distorsiones en el caso de que el parámetro  $f$  no sea una constante. Para servir a este propósito es necesario contar con sensibilidades al rededor de 100 veces mayores que la propuesta para PIXIE, por lo que incluso experimentos como PRISM o Super-PIXIE serían insuficientes, de manera que la misión Voyage 2050 parece ser la mejor candidata.

A partir de la información obtenida para estos escenarios, consideramos valioso realizar una comparación de estos resultados en modelos inflacionarios que resulten más favorecidos y continuar

con la investigación para incluir otro tipo de modelos como aquellos que involucran inflación multicampo, lo cual relegamos a trabajo futuro. Adicionalmente será necesario encontrar una manera de vencer la conocida tensión entre el modelo de monodromía de axiones y la restricción  $r < 0.036$ . Para este propósito, una posible solución consiste en explorar diferentes valores de la fase  $\gamma_0$  en el término oscilatorio del potencial.

# Bibliografía

- [1] J.-P. Luminet, *Gen. Rel. Grav.* **43** (2011), 2911–2928, [1105.6271].
- [2] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, *Phys. Rev.* **73** (1948), 803–804.
- [3] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142** (1965), 419–421.
- [4] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **142** (1965), 414–419.
- [5] J. A. Vázquez, L. E. Padilla, and T. Matos, (2018), 1810.09934.
- [6] D. Baumann, *Inflation*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics of the Large and the Small*, 2011, pp. 523–686.
- [7] E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory and structure formation*, in *Cosmology 2000*, 1 2001, pp. 1–25.
- [8] A. Riotto, *ICTP Lect. Notes Ser.* **14** (2003), 317–413, [hep-ph/0210162].
- [9] J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro, and M. Abney, *Rev. Mod. Phys.* **69** (1997), 373–410, [astro-ph/9508078].
- [10] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, *Phys. Dark Univ.* **5-6** (2014), 75–235, [1303.3787].
- [11] E. Silverstein and A. Westphal, *Phys. Rev. D* **78** (2008), 106003, [0803.3085].
- [12] L. McAllister, E. Silverstein, and A. Westphal, *Phys. Rev. D* **82** (2010), 046003, [0808.0706].
- [13] L. McAllister, E. Silverstein, A. Westphal, and T. Wrase, *JHEP* **09** (2014), 123, [1405.3652].
- [14] J. Chluba, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **460** (2016), no. 1, 227–239, [1603.02496].
- [15] J. Chluba, R. Khatri, and R. A. Sunyaev, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **425** (2012), 1129–1169, [1202.0057].
- [16] J. Chluba and D. Grin, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **434** (2013), 1619–1635, [1304.4596].

- [17] E. Dimastrogiovanni and R. Emami, JCAP **12** (2016), 015, [1606.04286].
- [18] J. Chluba, A. L. Erickcek, and I. Ben-Dayan, Astrophys. J. **758** (2012), 76, [1203.2681].
- [19] N. Schöneberg, M. Lucca, and D. C. Hooper, JCAP **03** (2021), 036, [2010.07814].
- [20] R. Henriquez-Ortiz, J. Mastache, and S. Ramos-Sanchez, (2022), 2206.07719.
- [21] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright, Astrophys. J. **473** (1996), 576, [astro-ph/9605054].
- [22] A. Kogut, D. Fixsen, D. Chuss, J. Dotson, E. Dwek, M. Halpern, G. Hinshaw, S. Meyer, S. Moseley, M. Seiffert, D. Spergel, and E. Wollack, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2011** (2011), no. 07, 025–025.
- [23] PRISM, P. André et al., JCAP **02** (2014), 006, [1310.1554].
- [24] A. Kogut, M. H. Abitbol, J. Chluba, J. Delabrouille, D. Fixsen, J. C. Hill, S. P. Patil, and A. Rotti, (2019), 1907.13195.
- [25] J. Chluba et al., Exper. Astron. **51** (2021), no. 3, 1515–1554, [1909.01593].
- [26] S. Ramos Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, Las prensas de ciencias, 2018.
- [27] S. Weinberg, *Cosmology*, Cosmology, OUP Oxford, 2008.
- [28] B. Ryden, *Introduction to cosmology*, Cambridge University Press, 1970.
- [29] R. Brawer, *Inflationary cosmology and horizon and flatness problems : the mutual constitution of explanation and questions*, masters' thesis, MIT, 1996.
- [30] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large scale structure*, 2000.
- [31] Planck, N. Aghanim et al., Astron. Astrophys. **641** (2020), A6, [1807.06209], [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)].
- [32] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23** (1981), 347–356.
- [33] G. F. R. Ellis and M. Bruni, Phys. Rev. D **40** (1989), 1804–1818.
- [34] BICEP, Keck, P. A. R. Ade et al., Phys. Rev. Lett. **127** (2021), no. 15, 151301, [2110.00483].
- [35] M. Lucca, N. Schöneberg, D. C. Hooper, J. Lesgourgues, and J. Chluba, JCAP **02** (2020), 026, [1910.04619].
- [36] D. Baumann, *The Physics of Inflation. A Course for Graduate Students in Particle Physics and Cosmology*, [https://www.icts.res.in/sites/default/files/baumann\\_icts\\_dec2011.pdf](https://www.icts.res.in/sites/default/files/baumann_icts_dec2011.pdf).

- [37] D. Blas, J. Lesgourgues, and T. Tram, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011** (2011), no. 07, 034–034.
- [38] *3-4 - definite integrals of elementary functions*, Table of Integrals, Series, and Products (Seventh Edition) (A. Jeffrey, D. Zwillinger, I. Gradshteyn, and I. Ryzhik, eds.), Academic Press, Boston, seventh edition ed., 2007, pp. 247–617.
- [39] J. Chluba, *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi* **200** (2020), 265–309, [1806.02915].
- [40] R. Flauger, L. McAllister, E. Silverstein, and A. Westphal, *JCAP* **10** (2017), 055, [1412.1814].
- [41] R. Flauger, L. McAllister, E. Pajer, A. Westphal, and G. Xu, *JCAP* **06** (2010), 009, [0907.2916].
- [42] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, third ed., Academic Press, Inc., 1985.
- [43] H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, California Institute of technology. Bateman Manuscript project, McGraw-Hill, New York, NY, 1955.
- [44] Planck, Y. Akrami et al., *Astron. Astrophys.* **641** (2020), A10, [1807.06211].
- [45] B. Tummers, *DataThief III*, 2006, <https://datathief.org/>.
- [46] D. Levin, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **67** (1996), no. 1, 95–101.
- [47] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **93** (2021), no. 2, 025010.
- [48] H. Fu, M. Lucca, S. Galli, E. S. Battistelli, D. C. Hooper, J. Lesgourgues, and N. Schöneberg, *JCAP* **12** (2021), no. 12, 050, [2006.12886].