Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis del movimiento geodésico en el límite extremal de un agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Ramón Tamayo Andrade

TUTOR:

Dr. Francisco Nettel Rueda

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria y agradecimientos

Dedico este trabajo de investigación con profundo amor y cariño a Daniela. Sin su invaluable compañía y entrega no hubiese tenido el valor de concretar este gran paso en mi vida. Gracias por creer incansablemente en mi cuando ni yo podía; por alumbrar el camino cuando todo parecía oscuro; por todos los momentos de reflexión, diversión, alegría, calma y paz que me has regalado; y, en especial, por ser mi compañera de vida, por caminar codo a codo conmigo en la calle, y ser juntos mucho más que dos. Te amo enteramente.

Agradezco al Dr. Francisco Nettel Rueda por su apoyo, comprensión y tolerencia, no solamente en el desarrollo de este proyecto de tesis, sino también conmigo. Gracias por guiarme con sabiduría y convertirse en un querido amigo y colega. Siempre estaré agradecido por la oportunidad que me dió para conocer a fondo este mundo tan fascinante de la investigación.

A mis padres, Verónica y Ramón, quienes me han amado incondicionalmente desde pequeño, gracias por ayudarme a forjar lo que soy hoy en día, por enseñarme a ser un soñador, a ser un guerrero, a ser humano. Este logro definitivamente es el reflejo de la libertad de pensamiento que siempre hemos buscado. También dedico este trabajo a ustedes, como un signo de gigantesca gratitud a la educación que sé que me brindaron con su corazón entero.

Y no puedo dejar de agredecer a Newton, quien llegó a mi vida y revolucionó mi forma de vivir, quien me dió motivos para siempre llegar a casa con una enorme sonrisa de lado a lado.

Agradezco a mi equipo de la carrera, Luis, Eduardo, Sebastián, Ilhuitemoc y Pablo, quienes formaron gran parte de mi camino académico y personal en estos años, y con quienes aprendí mucho. Les agradezco y siempre atesoraré todas esas noches en vela en las que si no resolvíamos el mundo, al menos aprendíamos algo nuevo.

A Dávila, que he visto y me ha visto crecer, le agradezco mucho todos estos años de vivencias desde que eramos niños hasta ahora que seguimos siendo niños, pero ahora con una carrera universitaria. Gracias por seguir aquí y formar parte de mi camino. Gracias por siempre preocuparte por mi.

A mi colega, amiga y profesora, Tiffani, quien ha sido muy importante en mi desarrollo como universitario. Gracias por tus enseñanzas y las oportunidades que me has dado para crecer.

Y finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México UNAM; en

particular, a los profesores que día a día hicieron su labor con devoción para que yo pudiese crecer no solamente profesionalmente hablando, sino también cultural y humanamente.

Índice general

Resumen **1**

1. Introducción **3**
1.1. Antecedentes . . . 3
1.2. Estructura del proyecto . . . 5
1.2.1. Motivación y problemática a resolver . . . 5
1.2.2. Plan de acción . . . 5

2. Revisión de Relatividad General **7**
2.1. El fundamento físico: Principio de Equivalencia . . . 7
2.2. Variedades diferenciales . . . 8
2.3. Vectores y Tensores para la Relatividad General . . . 11
2.4. Tensor métrico y métrica . . . 14
2.5. Particularidades sobre la integración . . . 16
2.6. Derivada covariante . . . 17
2.7. Transporte paralelo y geodésicas . . . 19
2.8. Tensor de curvatura . . . 21
2.9. Gravitación en la **RG** . . . 24
2.10. Simetrías en **RG** . . . 25

3. Agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón **29**
3.1. Solución de Schwarzschild . . . 29
3.1.1. Unicidad . . . 32
3.2. Singularidades, horizontes de eventos y agujeros negros . . . 32
3.3. Agujero negro **GMGHS** . . . 35
3.3.1. Dilatón y campo de Maxwell en el agujero **GMGHS** . . . 36
3.3.2. Acción, ecuaciones de campo y solución . . . 37
3.3.3. Coordenadas de área y límite extremal . . . 39

4. Potenciales efectivos **43**
4.1. Análisis general . . . 43
4.1.1. Partículas masivas . . . 46
4.1.2. Partículas no-masivas . . . 47
4.2. Análisis en el límite extremal . . . 48
4.2.1. Partículas masivas . . . 49

4.2.2. Partículas no masivas 50

5. Curvas geodésicas en el límite extremal **55**
5.1. Análisis general 55
5.1.1. Partículas masivas 56
5.1.2. Partículas no-masivas 59

6. Discusión y conclusiones **63**
6.1. Régimen de agujero negro 63
6.2. Límite extremal 64
6.2.1. Potenciales 65
6.2.2. Curvas geodésicas 65

A. Apéndice: GMGHS **69**
A.1. Deducción de las ecuaciones de campo para un agujero negro GMGHS . . . 69

Referencias **74**

Resumen

En este proyecto de tesis, se estudia a nivel teórico y computacional, las trayectorias geodésicas en el *límite extremal* de un agujero negro en la teoría **Einstein-Maxwell-dilatón**; en paricular, en el agujero negro **GMGHS**. A su vez, se hacen breves comentarios sobre las trayectorias geodésicas en el *régimen de agujero negro*.

Para lograr lo anterior, se realiza primero un marco teórico en el que se presentan las ideas esenciales para tratar a los agujeros negros. Es decir, primero se hace un repaso global de todos los conceptos que engloban a la **Relatividad General**, haciendo hincapié en temas como las *curvas geodésicas*, las *simetrías* y las *ecuaciones de campo de Einstein*; luego, se aborda el concepto de agujero negro, partiendo de una de las soluciones más sencillas a las ecuaciones de Einstein, la **solución de Schwarzschild**; y finalmente, se presenta al agujero **GMGHS** definiendo a grandes rasgos lo que es el *campo dilatónico*, y cómo se acopla en la teoría de Einstein-Maxwell; esto, para poder deducir las ecuaciones de campo correspondientes, a través del *principio de mínima acción*, mostrando a su vez, las soluciones correspondientes, que serán la métrica sobre la cual se basarán los resultados de este trabajo.

Después se presenta el cambio de *coordenadas de área*, porque el agujero negro en cuestión tiene dos singularidades de curvatura, y como la intención es analizar curvas geodésicas, este cambio de coordenadas, permite acotar la región de estudio a una región exterior a ambas singularidades.

Fueron obtenidos y graficados los *potenciales efectivos* en el *régimen de agujero negro* y en el *límite extremal*, tanto para partículas masivas y no-masivas. En el caso del *régimen de agujero negro*, fueron considerados a los párametros del agujero (M, ϕ_0 y Q) como unitarios; mientras que en el *límite extremal*, también se consideró al parámetro M como unitario. No se hace uso de las *coordenadas de área* ya que en esas coordenadas resulta imposible construir **potenciales efectivos**.

Se encuentra que en el *régimen de agujero negro* los potenciales están correctamente definidos para regiones fuera de las dos singularidades, donde existen *órbitas acotadas* y en particular, *órbitas circulares* tanto *inestables* como *estables* para el caso de partículas masivas, mientras que para partículas no-masivas, solamente existen *órbitas circulares inestables*. Por otro lado, en el *límite extremal*, los potenciales indican que para partículas masivas existen *órbitas acotadas*, más aún, existen *órbitas circulares estables*; mientras que para partículas

no-masivas no existen *órbitas acotadas*, en particular, no existen *órbitas circulares inestables*. De hecho, se encuentra que los potenciales efectivos para el caso extremal, son los mismos que los generados un **campo newtoniano**; sin embargo, el hecho de que esta descripción no sea en *coordenadas de área*, hace que el análisis a través del potencial efectivo pueda llevar a conclusiones erróneas, esto debido a que la ecuación para el momento angular es distinta a la del caso usual.

Y, para finalizar el trabajo, se hacen comparaciones de las *curvas geodésicas* (obtenidas en coordenadas de área) con lo que se esperaba de los potenciales efectivos para el caso extremal. Se nota que los potenciales efectivos son discontinuos para el caso extremal debido a la existencia de la singularidad exterior, por lo que cerca de la discontinuidad, el movimiento geodésico se ve afectado. No obstante, en general se concluye que requiere de menos energía el acercarse a la *singularidad desnuda* cuando se habla de partículas no-masivas en comparación con las masivas. A su vez, también se concluye que debido a la relación entre momento angular y velocidad angular de las partículas prueba, las *curvas geodésicas* no son las mismas que las producidadas en la teoría *newtoniana*. Y en el régimen de singularidad desnuda, se encuentra que cuando las partículas se acercan a la singularidad su velocidad angular diverge sin importar si se usan *coordenadas de área* o no.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Cuando se habla de **Relatividad General**, usualmente los objetos de estudio de mayor interés son los **agujeros negros** porque no podemos reproducirlos bajo condiciones que controlemos experimentalmente, ni están a nuestro alcance inmediato. De hecho, hace solamente 5 años se tomó la primera foto de un agujero negro [1]; podría parecer mucho tiempo, pero en el ámbito de la ciencia esto es bastante reciente.

A pesar de que hace no mucho tiempo fue tomada la primera foto de un agujero negro, se han hecho varios trabajos teóricos a lo largo de más de 100 años para entender con profundidad cómo describir a esta parte de la naturaleza. Primeramente, en 1915, A. Einstein propone una **teoría clásica de campos** que explica el fenómeno gravitacional aún mejor que I. Newton, ya que esta teoría describe fenómenos que no podían entenderse con la mecánica clásica, como la **precesión del perihelio de Mercurio** [2]. Sin embargo, quien resuelve por primera vez estas ecuaciones porpuestas por Einstein, es K. Schwarzschild en 1916, quien determina la solución sin fuentes, en el vacío, para un espacio-tiempo curvo estático y con simetría esférica, misma que es conocida como **solución de Schwarzschild**, la cual generó que varios científicos pusieran sus esfuerzos para obtener soluciones a las **ecuaciones de campo de Einsten**; tan es así, que se han encontrado soluciones para agujeros negros con rotación, con carga, y, con carga y rotación [2].

En principio, cuando se dice que un agujero negro tiene carga, nos referimos a que hay un **campo de Maxwell** intrínseco. Así, siguiendo ese mismo hilo de pensamiento, se han

incluido a lo largo de la historia distintos campos a la teoría de Einstein para obtener más soluciones a las ecuaciones. En particular, en 1988, G. Gibbons y K. Maeda, publicaron un artículo titulado *Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields* [3], donde proponen una nueva solución a las ecuaciones de Einstein; mientras que, de forma independiente, en 1991, D. Garfinkle, G. Horowitz y A. Strominger, publicaron otro artículo sobre la misma solución, el artículo se titula *Charged black holes in string theory* [4]. Como el nombre de los artículos lo dice, este agujero negro considera al campo de Maxwell debido a que está cargado; sin embargo, hay otro campo de por medio, que es un campo escalar.

En este proyecto de tesis, vamos a entender a la solución que estudiamos como una solución exacta a la teoría de Einstein en 4 dimensiones con un campo de Maxwell y un campo dilatónico, no obstante, no se va a estudiar a la teoría de la que se obtiene esta solución. Pero la idea central consiste en que la ecuación usual de movimiento en la teoría de cuerdas predice, bajo aproximaciones a bajas energías, la teoría de Einstein, ya que su descripción se basa en las ecuaciones de Einstein más correcciones proporcionales a la **escala de Planck** [4]; por lo tanto, si se tiene un agujero negro suficientemente grande, entonces la **curvatura** alrededor de su **horizonte de eventos** y fuera de él será pequeña en comparación a cuando se está cerca de la **singularidad**, donde la región es porporcional a la *escala de Planck*. Por lo mismo, si se está en regiones fuera del agujero negro donde la distancia respecto a la singularidad es grande en comparación a la misma e*scala de Placnk*, entonces se puede hacer una aproximación de la teoría de cuerdas a la teoría de Einstein, en sí, porque la teoría de cuerdas también es una teoría de campos. De hecho, con base a lo anteriormente mencionado, a esta aproximación se le conoce como **aproximación a bajas energías**, ya que donde hay una mayor energía es alrededor de la singularidad [4].

En particular, cuando Garfinkle, Horowitz y Strominger publicaron su artículo, consideraron a un campo definido en la teoría de cuerdas, pero que bajo las aproximaciones antes mencionadas, continúa presentando interacciones, este campo es el campo escalar discutido en párrafos anteriores, conocido como **campo dilatónico**. Lo relevante es que se pueden resolver las ecuaciones de campo bajo la acción de la interacción gravitacional, el campo electromagnético y el campo dilatónico. Más aún, descubrieron que la **condición de límite extremal** para este agujero negro no requiere de imponer condiciones de masa negativa o energía negativa.

Años después se realizaron varios análisis sobre la solución antes mencionada, en particular sobre cómo era el **movimiento geodésico de partículas prueba en el límite extremal**. En particular, C. Blaga y P. A. Blaga, publicaron en 1998, un artículo titulado *On the geodesics for a spherically symmetric dilaton black hole* [5], en el que resuelven analíticamente las **ecuaciones de geodésicas** y obtienen trayectorias para partículas prueba; sin embargo, no dan una interpretación física al respecto. Es hasta 2015, que C. Blaga publica otro artículo titulado *Timelike geodesics around a charged shperically symmetric dilaton black hole* [6], en donde analiza las curvas geodésicas cualitativamente mediante el **método de potenciales efectivos** y llega a la conclusión de que el movimiento geodésico en el límite extremal describe potenciales iguales a los descritos por un **campo newtoniano** para cierto tipo de coordenadas esféricas, pero no concluye por qué. A su vez, hasta el momento, no se han usado

coordenadas de área para expresar la métrica en cuestión, situación que será abordada con detalle en este trabajo.

Al día de hoy, bajo las reservas de que haya algún trabajo al respecto, no se conoce la razón de lo planteado al final del párrafo anterior.

1.2 Estructura del proyecto

A continuación, para dar una introducción completa a este trabajo, se definirá la estructura de este proyecto, empezando por plantear cuál es la problemática a resolver y cuáles son las formas a través de las que se planea contestar a esta misma cuestión, que será el centro de interés de la investigación.

1.2.1 Motivación y problemática a resolver

La problemática central de este proyecto está enmarcada en el ámbito de la Relatividad General; en particular, en una teoría que abarca a un campo de Maxwell y a un campo dilatónico. La idea es estudiar la solución de agujero negro de esta teoría; y en particular, analizar el movimiento geodésico de partículas masivas y no-masivas, haciendo énfasis en los cambios cualitativos y cuantitativos que se presentan en el límite extremal.

El análisis del movimiento geodésico, en epecial el correspondiente a partículas no-masivas, es relevante debido a que brinda una idea de las características de la geometría del espacio-tiempo; y además, es relevante en el contexto de la astrofísica [7].

Si bien la existencia de singularidades desnudas en principio está descartada por la conjetura de censura cósmica, esta solución resulta interesante debido a que permite un régimen de singularidad desnuda que no requiere la postulación de parámetros que impliquen masas negativas; y a su vez, permite realizar un análisis cualitativo del movimiento geodésico para contrastar este régimen con el de agujero negro.

1.2.2 Plan de acción

El proyecto se dividirá en 5 etapas esenciales para lograr describir el movimiento geodésico deseado. En primera instancia, se hará una revisión de los postulados más importantes de la Relatividad General, así como de sus conecuencias más relevantes; esto, para dejar claras las herramientas a utilizar durante la investigación.

La segunda etapa se basará en establecer las ecuaciones de campo en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón, de donde se propondrá un ansatz como solución para describir un agujero

negro en dicho espacio-tiempo.

Luego, en la tercera etapa, se usará la solución propuesta con el fin de establecer potenciales efectivos que permitan describir, de forma general, un análisis de las curvas geodésicas para partículas masivas y no-masivas; y posteriormente, se aplicará la condición del límite extremal a los potenciales propuestos para hacer el mismo análisis.

Consecuentamente con el hilo de la investigación, en la cuarta etapa, se resolverán numéricamente las ecuaciones de las geodésicas en el límite extremal, graficando el comportamiento de partículas prueba.

Y finalmente, para concluir este proyecto, se compararán los resultados numéricos y cualitativos para describir íntegramente a las curvas geodésicas en el límite extremal, haciendo énfasis en el caso de partículas no-masivas.

Capítulo 2

Revisión de Relatividad General

2.1 El fundamento físico: Principio de Equivalencia

Para entender la Relatividad General hay que tener presentes los principios físicos y matemáticos que la rigen. Estas primeras secciones están dedicada a abordar el principio físico fundamental y uno de los conceptos matemáticos más relevantes, las *variedades diferenciales*. A su vez, se supondrá que el lector ya está familiarizado con la *Relatividad Especial*.

La teoría de la Relatividad General está fundamentada en el Principio de Equivalencia de Einstein (**PEE**), el cual se complementa con otros dos principios: el Principio de Equivalencia Débil (**PED**) y el Principio de Equivalencia Fuerte (**PEF**).

PEE

Todas las leyes de la física no gravitacionales son las mismas que las de la relatividad especial para regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas [2].

PED

Para regiones suficientemente pequeñas de espacio-tiempo, el movimiento de un partícula en caída libre es el mismo tanto si la partícula está en un campo gravitacional como si estuviese uniformemente acelerada [2].

Es claro que la aceleración uniforme debe igualar la contribución del campo gravitacional para que se sostenga el concepto del enunciado anterior.

PEF

Todas las leyes de la física son las mismas que las de la relatividad especial para regiones del espacio-tiempo suficientemente pequeñas [2].

Es claro que si se cumple el **PEF**, se cumple también el **PED** y el **PED**. Así, resulta natural a través del **PEF**, buscar la construcción de un modelo matemático en el que se puedan usar de forma local los marcos de referencia con los que se trabaja en la Relatividad Especial (marcos de referenciales inerciales cartesianos) para describir las leyes de la física; a estos marcos se les conocerá como Marcos de Referencia Inercial Locales **MRIL**.

Ahora bien, el modelo matemático mencionado en el párrafo anterior se fundamenta en un ente conocido como *variedad*, objeto de estudio de la siguiente sección.

2.2 Variedades diferenciales

Las *variedades* son estructuras matemáticas abstractas que de forma local se comportan como $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$ [8]. Por esto, el **PEF** y la noción de **MRIL** invitan a usar a las variedades como la realización matemática del modelo planteado en la sección anterior.

En principio, las *variedades* que serán analizadas, serán *n-dimensionales* y diferenciables tantas veces como se requiera.

Las propiedades de diferenciabilidad son necesarias ya que como es común en física, se requiere de un análisis diferencial para describir el cambio de las variables u observables. Sin embargo, es fundamental mencionar que al hablar de diferenciabilidad, este texto se enfocará en la diferenciabilidad sobre estructuras relacionadas a conjuntos en $\mathbb{R}^4$.

Para dar ejemplos de estructuras que no son variedades, se puede describir el caso de una línea recta intersecando un plano ortogonalmente, de tal forma que en la intersección entre la línea y el plano se describen localmente dos situaciones. En la primer situación, se observa al plano, definido en $\mathbb{R}^2$; mientras que en la segunda situación, se observa a la recta, definida en $\mathbb{R}$. Así, localmente no se mantiene fija la dimensión de los espacios que se asemejan a la estructura, por lo tanto, no se está trabajando con una variedad, como se muestra en la Figura 2.1.

Por otro lado, una *2-esfera* es el ejemplo de lo que sí es una variedad, en donde siempre se pueden construir sistemas coordenados, con misma dimensión, por cada punto de la esfera, como se muestra en la Figura 2.2.

Con el fin de establecer mejor las ideas de lo que es una *variedad n-dimensional* diferenciable, se presentarán a continuación un conjunto de definiciones para especificar el concepto y lo que este abarca.

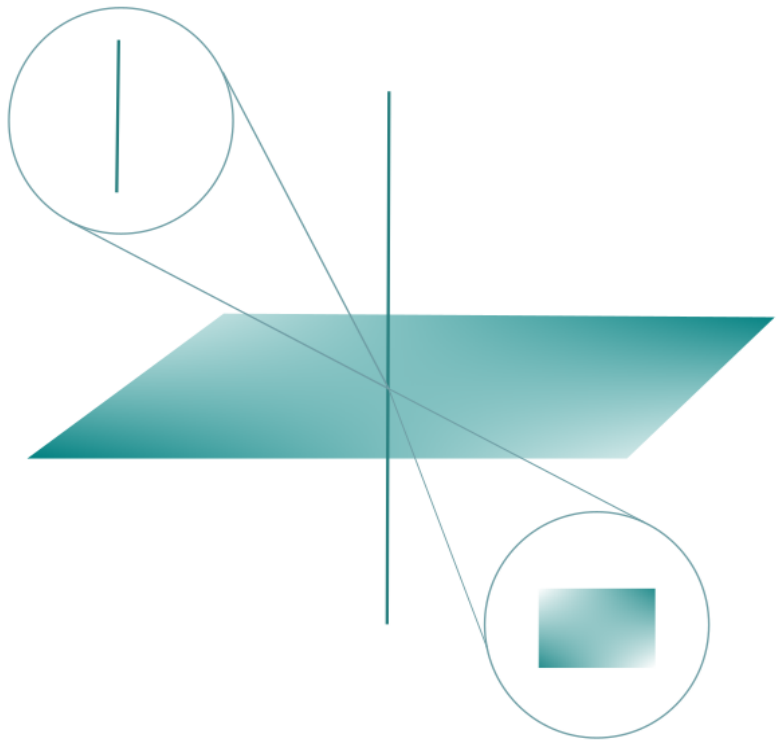

Figura 2.1.: Línea recta intersecando un plano ortogonalmente. En la intersección, de forma local, puede describirse tanto a un plano como a una recta.

Diferenciabilidad

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.
Y sean $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Se dice que una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de tipo C^q si puede derivarse q veces. Si $q \to \infty$ entonces C^q pasa a nombrarse C^∞ y entonces, se dice que ϕ será de tipo C^∞ si puede derivarse tantas veces como se requiera.
A su vez, una función es *suave* si es de tipo C^∞.

Para motivos de este texto, cuando se hable de diferenciabilidad, se referirá a funciones que cumplen con la definición anterior. También se considerará que todas las funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ son suaves, a menos que se indique lo contrario.

Bola abierta

En $\mathbb{R}^n$, una *bola abierta* es el interior de una *n-esfera*. Esta bola, está definida por un centro ($x \in \mathbb{R}^n$) y un radio ($r \in \mathbb{R}$).

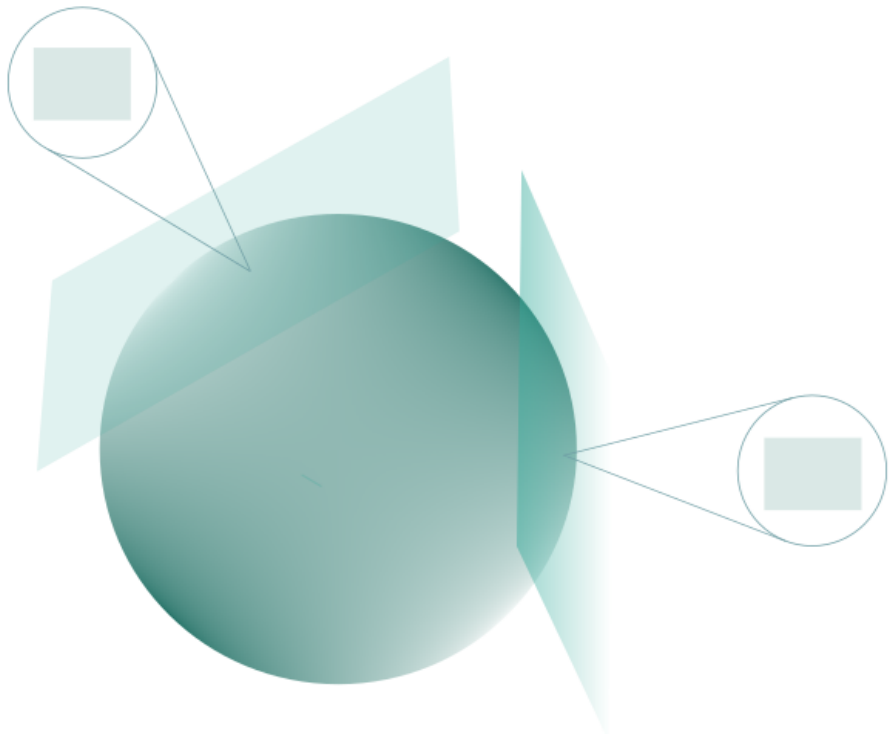

Figura 2.2.: 2-esfera en la que por cada punto se pueden construir sistemas coordenados con misma dimensión.

Conjunto abierto

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
U es un *conjunto abierto* en $\mathbb{R}^n$ si para toda $x \in U$ existe una *bola abierta* centrada en x tal que la bola queda completamente contenida en U.

Carta

Sea M un conjunto arbitrario.
Una *carta* para un abierto de la variedad ($U \subset M$), es un conjunto $W \subseteq M$ y una función biyectica $\phi : W \subseteq M \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(W) = V$ y V sea un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Esta carta, se suele denotar como (W,ϕ), y es a lo que usualmente se le conoce como *sistema coordenado*.

Unión suave

Sea M un conjunto arbitrario. Y sean (W,ϕ_W), (V,ϕ_V) dos cartas de dimensión n, en M.
Se dice que estos sistemas están *unidos suavemente* si $W \cap V \neq \emptyset$, y las funciones $\phi_W \circ \phi_V^{-1}$, $\phi_V \circ \phi_W^{-1}$ están definidas desde su dominio correspondiente (la intersección antes planteada) a conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Atlas

Un *atlas tipo* C^∞ o, simplemente un *atlas* (para simplificar la notación), es una colección de *cartas* $\{(W_a,\phi_a)\}$ tales que la unión de las U_a sea M y las *cartas* estén unidas suavemente. La primera condición, en palabras, se dice como: la colección de los U_a *cubre* a M.

Finalmente, con todas las anteriores definiciones, se puede definir a continuación lo que es una *variedad n-dimensional diferencal*; sin embargo, la diferenciabilidad es implícita debido a las suposiciones realizadas sobre las funciones, de tal manera que se utilizará indiscriminadamente el término de *variedad n-dimensional diferencial* para hacer referencia a las variedades cuyas funciones ya cumplen con todas las condiciones de diferenciabilidad antes planteadas. Más aún, para evitar ambigüedades, en este texto, todas las variedades mencionadas serán diferenciales a menos que se indique lo contrario.

Variedad diferencial

Una *variedad n-dimensional diferencial* es la colección de un conjunto M arbitrario con un *atlas completo* correspondiente a este mismo conjunto. El ser *completo*, implica que el *atlas* contiene a todas las posibles *cartas* para M [2].
Por motivos prácticos y notacionales, usualmente se refiere a M como la variedad, mientras que lo referente al atlas queda implícito.

2.3 Vectores y Tensores para la Relatividad General

Asumiendo que el lector tiene ya un bagaje de conocimientos relacionado al cálculo tensorial, se presenta en esta sección los conceptos tensoriales básicos que se utilizan, en particular, para la Relatividad General (**RG**). Puntualmente, se ahondará en las características de los vectores, de los tensores en general, y de uno de los tensores más importantes para la **RG**: la métrica.

Los tensores son entes matemáticos que son independientes de los sistemas coordenados, por eso es que hacemos uso de estos objetos. De hecho, para evitar ambigüedades, es importante mencionar el siguiente principio, que está motivado por lo mencionado al inicio de este párrafo:

Principio de covariancia

Las ecuaciones tensoriales son invariantes ante cambios de coordenadas.

Ahora bien, continuando con la presentación de los conceptos tensoriales básicos, es importante introducir la siguiente definición:

Derivada direccional

Sean M una *variedad n-dimensional* y $p \in M$. A su vez, sean ϕ el mapeo en una carta de M, γ una curva que pasa por p, y f una función sobre M. Si λ parametriza a γ, entonces la derivada direccional de f a lo largo de γ en el punto p es

$$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_p \equiv \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda}. \tag{2.1}$$

Si se desarrolla (2.1) se puede demostrar (2.2) [8]. Así, se identifica al **vector tangente** como el operador de derivada direccional, descrito en (2.3).

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{2.3}$$

donde $\{x^\mu\}$ representa el sistema coordenado que describe a la curva parametrizada por λ. Y las derivadas parciales se realizan respecto al sistema coordenado de elección. Véase que (2.3) representa un *operador de la derivada direccional*, que está determinado por curvas que pasan por p. Geométricamente esto es conveniente, porque el operador anterior, por mera contrucción, es independiente de coordenadas, gracias a la regla de la cadena.

Con lo anterior, se define al:

Espacio tangente sobre un punto p

Sea M una variedad, y sea $p \in M$.
Se define al **espacio tangente** en p ($\mathbf{T_p}$) como el conjunto de todos los operadores de derivada direccional (vectores tangentes) determinados por curvas que pasan por p.

Puede demostrarse que el espacio tangente en cualquier punto de una variedad, es un espacio vectorial [2]. De hecho, trabajar en espacios tangentes es ventajoso, ya que a partir de ellos se definen los tensores, que a grandes rasgos son funciones multilineales que están definidas del producto cartesiano entre espacios tangentes y sus espacios duales, a números reales. Aún así, hay que tomar esta anterior proposición con reservas, porque por construcción, los tensores tienen una relación intrínseca con las variedades, en tanto, están determinados por productos tensoriales entre los vectores de las bases que generan a los espacios tangentes y sus espacios duales [9].

En **RG**, las variedades son la estructura en que está moldeado el espacio-tiempo, y los vectores a usar, son los pertenecientes a los espacios tangentes de la variedad usada [2].

De (2.3) es claro que las derivadas parciales son base de T_p, y las derivadas de las coordenadas del sistema respecto al parámetro, son las componentes del vector. A este tipo de base que resultó se le conoce como **base coordenada**, la cual sí es dependiente de coordenadas; pero es intuitiva de visualizar y analizar.

Es importante decir que la base coordenada es la base preferente al trabajar en **RG**; sin embargo, hay otras bases que se pueden usar. La particularidad de la base coordenada es que bajo transformaciones de coordenadas sigue, mediante la regla de la cadena, la relación dada en (2.4)

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{2.4}$$

Ley de transformación para componentes vectoriales

Si se tiene en general un vector $D = D^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, por las características tensoriales que se buscan asignar, entonces D no puede cambiar ante cambio de bases, por lo que por (2.4) se sigue (2.5), ya que los cambios de bases son consecuencias del cambio de coordenadas

$$D^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} D^\nu. \tag{2.5}$$

La *ley de transformación para componentes vectoriales* es lo buscado para tensores de rango (1,0), también llamados **vectores**. Pero también hay otros entes matemáticos relevantes, y es que, similarmente a la construcción de los vectores, se puede introducir el concepto de *espacio dual*.

Espacio dual sobre un punto p

Sea M una variedad, y sea $p \in M$.
Se define al **espacio dual** en p ($\mathbf{T^*_p}$) como el conjunto de todas los mapeos lineales que van del espacio tangente (en p) a los reales. Es decir, si hay un elemento $\omega \in T^*_p$ entonces $\omega : T_p \to \mathbb{R}$ y ω es lineal.

Como caracterítica intrínseca del espacio dual, puede demostrarse que es un espacio vectorial [2].

A los vectores en el espacio dual se les llaman vectores duales o covectores; y análogamente a los vectores, se toma un vector dual que ayudará a construir el espacio dual. Así, el vector dual por excelencia en **RG** es lo que comunmente se conoce como *diferencial*. Así, una base para el espacio $T^*_p(M)$, son los diferenciales de las funciones coordenadas x^μ.

Similar a los vectores, los vectores duales operan bajo cambio de coordenadas de la siguiente forma:

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{2.6}$$

Ley de transformación para componentes duales

Si se tiene un vector dual $N = N_\mu dx^\mu$, entonces, debido a (2.6) y a la invariancia tensorial bajo cambios de coordenadas, las componentes de los vectores duales se transforman bajo cambios de coordenadas como

$$N_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} N_\mu, \tag{2.7}$$

La *ley de transformación para componentes duales* es lo buscado para tensores de rango (0,1), también llamados **covectores**. Por lo tanto, $\{dx^\mu\}$ es conocida como la *base coordenada* para el espacio de covectores (o **espacio cotangente en** p).

Ahora bien, dado lo anterior, es posible generalizar las leyes de transformación de componentes a una ley de transformación de las componentes de un tensor de rango (k, l), como se enuncia a continuación:

Ley de transformación para componentes de un tensor

Si T es un tensor de rango (k, l), sus componentes, bajo cambios de coordenadas, se transforman como

$$T^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}_{\gamma'_1 \cdots \gamma'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x^{\gamma'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_l}}{\partial x^{\gamma'_l}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\gamma_1 \cdots \gamma_l}. \tag{2.8}$$

Debe recordarse que no siempre las derivadas parciales de tensores son tensores. De hecho solamente en el caso de la derivada parcial de un tensor de rango (0,0), el resultado sí es un tensor (de rango (0,1)) [9].

Otro caso particular es el del espacio-tiempo plano, donde por las transformaciones de Lorentz, es posible encontrar un sistema coordenado (coordenadas cartesianas del espacio-tiempo de Minkowski) donde la derivada parcial de un tensor sí devuelve un tensor; es decir, en espacios-tiempos planos. No obstante, al generalizar a otros espacios-tiempos, es donde la derivada parcial de un tensor no devuelve un tensor, a saber, a espacios-tiempos curvos [10]. Esto se discutirá más a fondo al hablar de derivadas covariantes y el tensor de curvatura.

2.4 Tensor métrico y métrica

La métrica es un objeto geométrico fundamental en **RG**. De hecho, podría decirse que es el más importante, ya que determina la mayoría de cantidades físicamente importantes para entender la gravitación.

De forma intuitiva, y con base a la *Relatividad Especial*, se sabe que el tensor métrico es un objeto geométrico que determina la idea de distancia entre dos puntos. Más específicamente, este da estructura para determinar la distancia entre eventos en el espacio-tiempo [2].

Antes de continuar la discusión, se presentará la distinción entre *métrica* y *tensor métrico*. Para ello, se enuncian las siguientes definiciones:

Tensor métrico en un punto p

Sea M una variedad y $p \in M$.
Se define al tensor métrico en p ($g(p)$) como un tensor que actúa sobre pares de vectores en T_p y devuelve su producto escalar.

Métrica

Sea M una variedad.
Se define a la métrica para M (g) como el campo tensorial conformado por los tensores métricos de los puntos de M.

Como aclaración, cuando se use g se hará referencia a la métrica como objeto geométrico; mientras que cuando se use $g_{\mu\nu}$, se estará haciendo referencia a las componentes de la métrica respecto a alguna base para los espacios tangentes.

A continuación se presentan características derivadas de las dos definiciones anteriores [2]:

1. El tensor métrico es un tensor de rango (0,2).

2. Por definición, el tensor métrico aplicado a un vector consigo mismo, representa la norma al cuadrado del vector, que es un escalar; es decir, un invariante ante transformación de coordenadas.

3. El tensor métrico es un tensor simétrico.

4. Vista en su forma matricial, la métrica es una matriz no-singular; es decir, $|g_{\mu\nu}| \equiv g \neq 0$

5. Como consecuencia de 4, siempre existe inversa ($g^{\mu\nu}$) de tal forma que al contraer esta, se cumple que $g^{\gamma\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\gamma}_{\nu}$

6. Como consecuencia de 3, la métrica es simétrica; por lo tanto, también la inversa; ergo, $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$.

7. En la manipulación de tensores, tanto la métrica como su inversa, sirven para cambiar la ubicación de índices en las componentes de otros tensores, ya que la métrica establece un isomorfismo entre los espacios tangentes y cotangentes; esto se traduce en la operación de subir y bajar índices [2].

8. La métrica puede tener una **forma canónica** que básicamente caracteriza sus componentes en forma de una matriz diagonal con ciertos valores. Se suele escribir como $\mathbf{g}_{\mu\nu} = diag(-1, -1, -1, ..., 1, 1, ..., 1)$, donde primero se colocan los signos negativos y luego los positivos. Estos dígitos son los que se presentan en la diagonal. Cabe decir que el orden depende de la convención usada por el texto [2].

9. La **signatura** de una métrica es la suma de sus eigenvalores positivos menos la suma de sus eigenvalores negativos. Por otro lado, dependiendo estas combinaciones de números, se puede clasificar la métrica como se muestra a continuación.

   a) Si todos los valores en la forma canónica son positivos, entonces la métrica es *Riemanniana* o definida positiva.

   b) Si solamente hay un menos en la forma canónica, la métrica es *pseudo-Riemanniana* o Lorentziana. Usualmente, las métricas usadas en la **RG** son *Lorentzianas*.

   c) Si la forma canónica tiene más de un valor negativo, entonces la métrica se conoce como indefinida.

10. En **RG** siempre es posible escribir el tensor métrico en forma canónica, en un punto p sobre la variedad (M) en cuestión. En general, este resultado no aplica para vecindades alrededor de p. De hecho, se puede ser aún más específico y decir que para cada punto p hay un sistema de coordendas en el que la métrica se escribe en su forma canónica y sus primeras derivadas en p se anulan; más aún, en la **RG**, la forma canónica es la de la métrica de Minkowski (espacio tiempo-plano), y estas coordenadas, son conocidas como **coordenadas localmente inerciales** [2].

    A partir de la discusión anterior, se pueden relacionar los sistenas de *coordenadas localmente inerciales* con la idea de los **MRIL**; es decir, se puede realizar un **MRIL** en un punto $p \in M$ mediante la construcción de *coordenadas localmente inerciales* en p.

    El párrafo anterior representa las condiciones matemáticas en el **PEF** del concepto de regiones suficientemente pequeñas de espacio-tiempo. A su vez, hay que recalcar que estas características son puntuales; es decir, dependen de cada punto en el espacio-tiempo.

2.5 Particularidades sobre la integración

Al momento de integrar en el espacio-tiempo, debe considerarse un factor extra determinado por la geometría de la variedad en cuestión (región de espacio-tiempo); es decir, determinado por la métrica. Eso se debe a que si únicamente se considera el elemento de volumen, se tiene que este se transforma como la densidad de un tensor [9]; sin embargo, siempre se busca que ante cambios de coordenadas, todo siga preservándose como un tensor. Por ello, para que sea invariante bajo cambio de coordenadas, es importante considerar el factor extra para evitar la densidad.

Intregación de funciones escalares

La integral de funciones escalares (ψ) sobre variedades n dimensionales diferenciales (con métrica $g_{\mu\nu}$) dotadas con un sistema coordenado arbitrario $\{x^\mu\}$, está dada por

$$\int \sqrt{|g|}\psi \, d^n x, \tag{2.9}$$

donde g es el determinante de la métrica.

2.6 Derivada covariante

Debido a que la derivada parcial no funciona como una generalización de derivada direccional para espacios con curvatura, se establece entonces la **derivada covariante** como una alternativa para diferenciar tensores y obtener tensores. Dicho de otra manera, se define a la derivada covariante para que exista una independencia de coordenadas, como lo demandan las propiedades tensoriales.

Para motivos prácticos, esta sección será puntual. Se mencionará su definición y se describirán las características de esta derivada en la RG.

Derivada covariante

Sean M una variedad; T y A tensores del mismo tipo; y f una función escalar sobre M, entonces la derivada covariante es un tensor que debe cumplir en general tres propiedades básicas que se muestran enlistadas a continuación [9]:

1. Linealidad:
$$\nabla(T + A) = \nabla T + \nabla A. \tag{2.10}$$

2. Regla del producto:
$$\nabla(fT) = (df \otimes T) + f(\nabla T). \tag{2.11}$$

3. En funciones escalares (ψ) sobre M, es la derivada parcial:
$$\nabla_\gamma \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\gamma}. \tag{2.12}$$

Note que de entrada, una propiedad intrínseca a la derivada covariante debido a su construcción, es que aplicada a un tensor, da como resultado otro tensor [9], por lo que respeta las leyes de transformación para tensores ante cambio de coordenadas. De lo anterior, se puede rescatar que la derivada parcial de una función escalar sí es un tensor.

Con base a todas las propiedades anteriores, es posible demostrar que las componentes de

la derivada covariante de un tensor D de rango (k, l) están determinadas por

$$\nabla_\rho D^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial D^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\beta} D^{\beta \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots - \Gamma^{\beta}_{\rho\nu_1} D^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\beta \nu_2 \dots \nu_l} - \dots, \tag{2.13}$$

donde los coeficientes $\Gamma^\mu_{\nu\beta}$ son conocidos como **coeficientes de la conexión**; estos coeficientes determinan la forma en la que los vectores (o vectores duales) son transportados paralelamente a lo largo de una curva, de un espacio tangente (o espacio dual) a otro [2]. La idea de *transporte paralelo* será abordada en la siguiente sección.

En principio, la conexión no es un tensor, simplemente es un conjunto de coeficientes que también codifican información geométrica, aunque no necesariamente de forma invariante ante cambios de coordenadas [9].

Tensor de torsión

Si $\Gamma^\mu_{\nu\beta}$ representa a los coeficientes de la conexión, entonces el tensor de torsión (T) se define a través de sus componentes, asociadas a una base coordenadas, como

$$T^\mu_{\nu\beta} = 2\Gamma^\mu_{[\nu\beta]}. \tag{2.14}$$

Así, dado lo anterior, hay que recordar que físicamente, en la **RG** se busca que la métrica no cambie a través de cambios tensoriales sobre la variedad analizada (*compatibilidad de la métrica*), y que la variedad involucrada tenga *torsión cero*, es decir, que $\Gamma^\mu_{\nu\beta} = \Gamma^\mu_{(\nu\beta)}$ [2].

Conexión de Levi-Civita

En general, muchas conexiones pueden estar asociadas a una variedad n-dimensional diferencial; sin embargo, para la **RG** se usa una conexión única [2] determinada por la métrica; es decir, por la forma en la que se mide en la variedad. A los coeficientes de esta conexión peculiar con las características mencionadas anteriormente se les conoce como **Símbolos de Christoffel**, y a la conexión, como **Conexión de Levi-Civita**.

Como comentario adicional, cabe mencionar que la *compatibilidad de la métrica* se escribe matemáticamente como sigue:

$$\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0. \tag{2.15}$$

Considerando todos los atributos mencionados en esta sección, se puede mostrar que la conexión de Christoffel está determinada de manera única por la métrica como sigue [9]

$$\Gamma^\mu_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\rho} \right). \tag{2.16}$$

Finalmente, hay que mencionar que a las conexiones se les exige que las componentes de contracciones conmuten [9], por lo tanto, se extiende a tensores que, si se tiene un tensor T de rango (k, l) en una variedad M, se cumple:

$$\nabla_\gamma (T^\mu_{\mu\sigma}) = (\nabla T)^\mu_{\gamma\mu\sigma}. \tag{2.17}$$

2.7 Transporte paralelo y geodésicas

El **transporte paralelo** de un vector a lo largo de una curva es la operación de transportarlo manteniéndolo constante respecto a la curva durante todo el trayecto [2]. A continuación, se define matemáticamente el concepto antes mencionado:

Transporte paralelo

Sea A un tensor de rango (k, l) en una variedad arbitraria M, y γ una curva en M que está parametrizada por λ. Se dice que A es *transportado paralelamente* a lo largo de la curva γ si se cumple

$$\left(\frac{DA}{d\lambda}\right)^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\alpha_1\ldots\alpha_l} \equiv \frac{dx^\rho}{d\lambda}\nabla_\rho A^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = 0. \tag{2.18}$$

Donde $\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\rho}{d\lambda}\nabla_\rho$ es el operador diferencial que generaliza a la derivada direccional, llamado **derivada direccional covariante**.

Como en **RG** se impone que las métricas sean compatibles, entonces sigue que la métrica esté transportada paralelamente en cualquier curva usada sobre la variedad correspondiente al problema en cuestión [9].

El transporte paralelo preserva la norma; respecto a métricas compatibles y vectores transportados paralelamente de la siguiente manera [2]:

$$\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu) = 0. \tag{2.19}$$

Por otro lado, las **curvas geodésicas** son curvas que transportan paralelamente a su vector tangente [2]. A continuación, se define matemáticamente el concepto antes mencionado:

Curva geodésica

Sea $x^\mu(\lambda)$ una curva parametrizada en una variedad M, se dice que $x^\mu(\lambda)$ es una *curva geodésica* si pasa que

$$\frac{D}{d\lambda}(\frac{dx^\mu}{d\lambda}) = 0. \tag{2.20}$$

A este última expresión se le conoce como la **ecuación geodésica**.

La anterior definición es válida para cualquier conexión; en particular, si la conexión es la de Levi-Civita, la definición coincide con la curva que extremaliza la distancia entre dos puntos de la variedad en cuestión [8]. Así, en el caso de la conexión de Levi-Civita, las curvas goedésicas son una extrapolación de lo que es una línea recta en el espacio euclídeo; y es que, una línea recta en el espacio euclídeo es el camino de menor distancia entre dos puntos; sin embargo, existe una definición alternativa a esto, ya que usando la conexión antes mencionada, se puede decir que la línea recta en el espacio euclídeo es el camino que transporta paralelamente su propio vector tangente [2].

Las geodésicas presentan propiedades e interpretaciones de muchísima utilidad para el estudio de la gravitación clásica de espacios-tiempos curvos (en este caso, la **RG**). A continuación se presenta un listado de estas propiedades:

- Las geodésicas son los caminos que siguen las partículas prueba en caída libre. Especificando aún más, las partículas de prueba son cuerpos que no generan influencia sobre la geometría por la que avanzan o se mueven. La idea anterior es una aproximación, no siempre es cierto, ya que cualquier partícula con energía y momento puede interactuar con el espacio-tiempo y curvarlo aunque sea mínimamente; sin embargo, estas ideas se abordarán mejor cuando se planteen las *ecuaciones de Einstein*.

- El párametro de las curvas geodésicas en **RG** es por excelencia, el tiempo propio (τ), para curvas con vectores tangentes tipo tiempo. Usualmente cualquier otro parámetro es un *parámetro afín* (λ) tal que $\lambda = \alpha\tau + \beta$, para α y β constantes. Es plausible usar cualquiera de estos dos parámetros en la ecuación de las geodésicas, no importa cuál, ya que la ecuación queda invariante ante cambios de estos mismos parámetros [9]. Claramente, si el párametro no es *afín*, entonces no se cumpliría la *ecuación geodésica*.

- Las partículas en caída libre siempre se mueven en la dirección en que apunta su momento [2]. Esto es una consecuencia de que al escribir la ecuación geodésica con el tiempo propio como parámetro, se encuentra la siguiente ecuación equivalente

$$p^{\beta}\nabla_{\beta}p^{\alpha} = 0. \tag{2.21}$$

En (2.21) se tiene que p^{α} es el cuadrimomento de la partícula en cuestión.

Debido a que la ecuación geodésica es una ecuación diferencial de segundo orden, se tiene que entre dos puntos, la curva geodésica es única dadas las condiciones iniciales; es decir, si se da el punto inicial y el vector tangente inicial, entonces la solución a la ecuación geodésica es única.

No obstante a lo anterior, es importante recalcar que en una variedad plana, el transporte paralelo de un punto a otro no depende de la curva que se use para hacerlo, mientras que en una variedad con curvatura sí depende de la curva; es decir, hay varias maneras de hacer el transporte paralelo de un punto a otro en una variedad con curvatura [9]. Un ejemplo intuitivo de una variedad con curvatura en la que puede existir más de una curva que transporte paralelamente a un vector V es el de una *2-esfera*, como se ilustra en la Figura 2.3,

Partiendo de la Figura 2.3, al transportar el vector V de $p1$ a p por un meridiano y luego el mismo vector transportarlo de $p1$ por el ecuador a $p2$, para después transportarlo por otro meridiano a p, se observa que se obtienen dos vectores distintos; esto indica que la variedad tiene una propiedad intrínseca llamada **curvatura**, la cual cuantifica qué tan distintos son estos dos vectores tansportados en p.

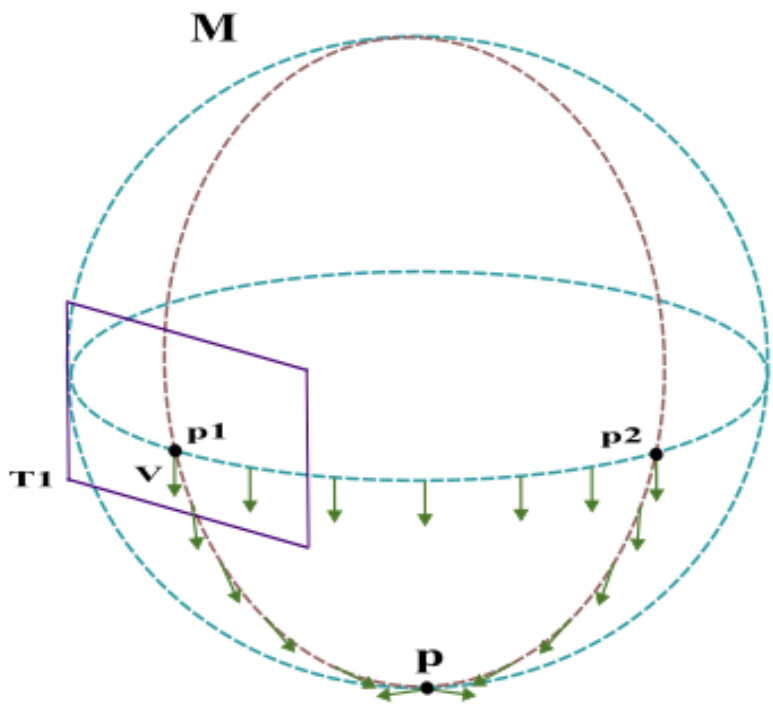

Figura 2.3.: Transportes paralelos distintos del vector V, partiendo de $p1$ y terminando en p, donde $T1$ es el espacio tangente asociado a $p1$, M es la variedad (*2-esfera*) y las circunferencias máximas son las curvas geodésicas.

2.8 Tensor de curvatura

El tensor de curvatura, también conocido como **tensor de Riemann** ($R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma}$), es un tensor de rango $(1,3)$. Este, es el tensor que cuantifica formalmente la curvatura de variedades diferenciales n-dimensionales. En tal razón, para la **RG**, el tensor de Riemann permite cuantificar la curvatura del espacio-tiempo. Y cabe decir que en particular, el tensor de curvatura describe de forma local la curvatura en cada punto de una variedad [8].

Para fines de este proyecto basta mencionar cómo se determinan las componentes del tensor de Riemann respecto a una base coordenada; estas están dadas por

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{2.22}$$

La anterior expresión es válida para la generalidad de las conexiones [9]; sin embargo, en la **RG** se considera la conexión de Levi-Civita y los coeficientes $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ son los llamados símbolos de Christoffel. De esta última conexión y las herramientas matemáticas ya mostradas, se obtienen dos resultados importantes. Estos son:

1. Si existe un sistema coordenado en el que las componentes de la métrica sean constantes, puede concluirse que el tensor de curvatura se anula [9].

2. Si el tensor de curvatura se anula, siempre existe un sistema coordenado en el que las componentes de la métrica son constantes [2].

En la Tabla 2.1 se muestran las propiedades básicas que presenta el tensor de Riemann. Estas son fundamentales porque permiten determinar la cantidad de componentes independientes del tensor. En particular, para una dimensionalidad cuatro (espacio-tiempo en particular), el tensor presenta 20 componentes independientes [2].

No.	Propiedad
1	$R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma} = -R^{\sigma}_{\mu\gamma\nu}$
2	$R_{\sigma\mu\nu\gamma} = g_{\sigma\alpha} R^{\alpha}_{\mu\nu\gamma}$
3	$R_{\sigma\mu\nu\gamma} = -R_{\mu\sigma\nu\gamma}$
4	$R_{\sigma\mu\nu\gamma} = -R_{\sigma\mu\gamma\nu}$
5	$R_{\sigma\mu\nu\gamma} = R_{\nu\gamma\sigma\mu}$
6	$R_{\sigma\mu\nu\gamma} + R_{\sigma\nu\gamma\mu} + R_{\sigma\gamma\mu\nu} = 0$
7	$\nabla_{\rho} R_{\sigma\mu\nu\gamma} + \nabla_{\nu} R_{\sigma\mu\gamma\rho} + \nabla_{\gamma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = 0$

Tabla 2.1.: Propiedades básicas del tensor de Riemann.

También en la Tabla 2.1, a la propiedad 6 se le conoce como **primera identidad de Bianchi**; mientras que a la propiedad 7 se le conoce como **segunda identidad de Bianchi**. Y en general, a estas dos expresiones se les conoce como las **identidades de Bianchi**.

Tensor de Ricci

El **tensor de Ricci** es definido como

$$R_{\sigma\rho} \equiv R^{\alpha}_{\sigma\alpha\rho}, \tag{2.23}$$

es decir, como una contracción del tensor de Riemann. De donde, para la conexión de Christoffel, esta es la única contracción independiente [9].

De las propiedades básicas para el tensor de Riemann, se sigue que *el tensor de Ricci es un tensor simétrico* [9].

Escalar de Ricci

Del tensor de Ricci se obteniene una cantidad escalar, a la que se conoce como **escalar de Ricci**. Esta cantidad escalar está dada por

$$R \equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \tag{2.24}$$

Tanto el escalar como el tensor de Ricci codifican la información sobre la curvatura, pero solamente la correspondiente a las trazas distintas de cero del tensor de curvatura. Podría haber información que no esté siendo contemplada al momento de trabajar con las cantidades

mencionadas al inicio de este párrafo. Sin embargo, hay un tensor que guarda toda esta información relevante para la descripción de una región en el espacio-tiempo, este es el **tensor de Weyl**, ya que incluye la información que fue descartada al momento de considerar solamente a las trazas del tensor de curvatura.

Tensor de Weyl

Sea $R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma}$ el tensor de curvatura en una región de una variedad M con dimensión n, se define al tensor de Weyl ($W_{\sigma\mu\nu\gamma}$) como el tensor de Riemann sin sus contracciones; es decir

$$W_{\sigma\mu\nu\gamma} \equiv R_{\sigma\mu\nu\gamma} + \frac{2}{(n-2)(n-1)} g_{\sigma[\nu} g_{\gamma]\mu} R - \frac{2}{(n-2)} (g_{\sigma[\nu} R_{\gamma]\mu} - g_{\mu[\nu} R_{\gamma]\sigma}). \tag{2.25}$$

Finalmente, de todas las cantidades tensoriales mencionadas, se suele definir consecuentemente un tensor de alta relevancia para la **RG**. Este es, el **tensor de Einstein**. En esta sección, solamente será definido y se mencionará una característica matemática fundamental; sin embargo, toda la información sobre cómo interpretar a este tensor físicamente se dejará para la siguiente sección.

Tensor de Einstein

Sean $g_{\sigma\rho}$ la métrica y $R_{\sigma\rho}$ el tensor de Ricci en una región de una variedad M, se define al tensor de Einstein como

$$G_{\sigma\rho} \equiv R_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\rho}. \tag{2.26}$$

Matemáticamente, como la métrica y el tensor de Ricci son simétricos, entonces es prácticamente inmediato ver que el tensor de Einstein también es simétrico.

De (2.26) puede hacerse la observación de que en el tensor de Einstein se ven involucrados otros tensores que describen la geometría, como lo son la métrica, el tensor de Ricci, y el escalar de Ricci. De tal manera que el tensor de Einstein evoca a pensar directamente en una descripción geométrica del espacio-tiempo si se piensa en el contexto de la **RG**; más aún, la existencia del tensor de Einstein, aunada a las identidades de Bianchi, implica que este tensor tiene *divergencia* cero [2]; es decir,

$$\nabla_{\rho} G^{\sigma\rho} = 0. \tag{2.27}$$

Anteriormente se mencionó que el escalar de Ricci es un escalar que codifica parte de la información sobre la curvatura; no obstante, a través del tensor de Weyl también es posible obtener un escalar que codifica parte de la información de curvatura. Es por eso que en ocasiones se hace referencia a estos escalares como escalares de curvatura; es decir, hay más de uno, dependiendo a qué tensor están asociados y de qué tipo de información representan.

2.9 Gravitación en la RG

El objetivo principal de la **RG** es describir a la gravitación. Einstein propone el **PEF** como la idea que fundamenta físicamente a las ecuaciones matemáticas que describen la gravitación, las cuales son conocidas como **ecuaciones de campo de Einstein**, o simplemente, **ecuaciones de Einstein**.

J. Wheeler resumió la idea de la descripción geométrica de la gravitación en su famosa observación *"Matter tells Spacetime how to curve, and Spacetime tells matter how to move"* [11]. La interpretación en esta idea, es que la curvatura del espacio-tiempo describe comportamientos de la materia, y que la gravedad se manifiesta como curvatura debido a la existencia de materia.

La justificación de la interpretación antes mencionada, se basa en el **PEF**, que proporciona la idea de que la gravedad en la naturaleza es una manifestación universal; es decir, que afecta a todas las partículas y, a todas las formas de energía y momento. En tanto, para Einstein, algo universal como lo es la gravedad, debería ser descrito como una característica fundamental del medio en el que los campos de materia se propagan; esto es, la gravedad es una descripción del entorno físico en el que se encuentra la materia; más no una fuerza [2].

El párrafo anterior es entonces la conexión entre el fundamento físico y la matemática. Ya que por el mismo **PEF**, como en regiones suficientemente pequeñas de espacio-tiempo es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional por medio de experimentos, y como en las variedades n-dimensionales diferenciales se ha presentado que es posible encontrar **MRIL**, entonces la identificación es clara con la matemática. Se identificará al espacio-tiempo como una variedad que permita analizar **MRIL**; de tal manera que en estos **MRIL** las leyes de la física se reduzcan a nada más y nada menos que las leyes de la relatividad especial.

Como ya se definió el entorno preferido en el que se trabajará (variedades n-dimensionales diferenciales), ahora se deben generalizar las ecuaciones a características tensoriales para tener descripciones como las planteadas en secciones anteriores. De tal manera que, en la construcción de las leyes físicas para un espacio-tiempo curvo, se puede usar el **principio de acoplamiento mínimo** [2]. A continuación, se define este principio a través de un orden jerárquico:

Principio de acoplamiento mínimo

1. Encontrar una ley física válida en coordenadas inerciales en el espacio-tiempo plano.
2. Escribir la ley en su forma tensorial aplicando $\eta \to g$ y $\partial \to \nabla$; donde η es la *métrica de Minkowski*, g es la métrica en el espacio-tiempo curvo, ∂ es la derivada parcial y ∇ es la derivada covariante en el espacio-tiempo curvo.
3. Afirmar que la ley descrita en 2 es una ley válida en el espacio-tiempo curvo.

Así, usando el anterior concepto, se postulan a las *ecuaciones de Einstein* como una descripción del campo gravitacional [2], dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.28}$$

Es importante decir que a lo largo del texto se consideran unidades donde la velocidad de la luz es $c = 1$ (con respectivas unidades y equivalencias), por lo que la velocidad de la luz no aparece explícitamente en (2.28), pero es importante que sea considerada cuando se manejan otros sistemas de unidades. A su vez, como comentario adicional, debe decirse que $T_{\mu\nu}$ es el ya conocido por la relatividad especial, **tensor de energía-momento**. Y, como observación adicional, G es la constante de gravitacion universal.

En la anterior ecuación puede visualizarse claramente una relación entre la geometría del espacio-tiempo (descrita por el tensor de Einstein) y la energía-momento (descrita por el tensor de energía-momento); de donde se tiene que la energía-momento determina la geometría del espacio-tiempo, físicamente hablando.

Para finalizar esta sección, hay que mencionar que la ecuaciones de Einstein representa una teoría de campos. Así que una de las formas en las que se pueden obtener las ecuaciones de campo, es haciendo uso del **principio de mínima acción** [9] que propone la *formulación lagrangiana* para teorías de campo. Sin embargo, esto será abordado con mayor detenimiento en el tercer capítulo de este trabajo.

2.10 Simetrías en RG

Las *ecuaciones de Einstein* son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales [9] que pueden ser difíciles de resolver en un caso general; sin embargo, si se suponen ciertas simetrías para el espacio-tiempo (y el contenido de energía-momento) es posible encontrar soluciones, incluso de manera analítica [2].

Por lo anterior, suelen hacerse consideraciones de simetría que no solamente simplifican las *ecuaciones de Einstein*, sino también las ecuaciones geodésicas. Por lo mismo, es importante establecer lo que es una *simetría*; y en particular, debido a los objetivos de este proyecto, bastará con definir el concepto de *simetría* a través del uso de sistemas coordenados. Ergo, a continuación se define al **sistema de coordenadas adapatado a una simetría**:

Sistema de coordenadas adaptado a una simetría

Sea M una variedad y sea g la métrica asociada a la variedad. Se dice que si M posee *simetría*, entonces existe un sistema coordenado $\{x^\alpha\}$ conocido como *sistema de coordenadas adaptado a la simetría*, tal que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{2.29}$$

para algún valor de α; se dice también que $g_{\mu\nu}$ es *independiente* de x^α [2].

Véase que (2.29) implica que la geometría no varía a lo largo de una coordenada en particular, lo cual es consistente si se piensa en simetría de forma intuitiva y con base a conocimiento empírico.

Ahora bien, ya que el objeto de interés en este proyecto es la **RG**; y más aún, las curvas geodésicas, lo que busca hacerse es describir a partículas con cuadrimomento en un fondo curvo, por lo que la ecuación geodésica puede escribirse como ya se había mostrado en (2.21). Nótese que al aplicar la derivada covariante, esta ecuación es equivalente a escribir

$$p^\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\delta_{\beta\alpha} p^\beta p_\delta = 0, \tag{2.30}$$

de donde, por la definición de cuadrimomento de una partícula con masa m y por regla de la cadena, se observa que los cambios de momento respecto al tiempo propio están dados por

$$p^\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} = m \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} = m \frac{dp_\alpha}{d\tau}. \tag{2.31}$$

Y a su vez

$$\Gamma^\delta_{\beta\alpha} p^\beta p_\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\mu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\mu} \right) p^\beta p_\delta = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \right) p^\beta p^\mu}_{\text{Porque } p^\beta p^\mu \text{ es simétrico}}. \tag{2.32}$$

Por consecuente, (2.30) se simplifica en

$$m \frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \right) p^\beta p^\mu. \tag{2.33}$$

Sin embargo, si se tiene que la coordenada x^α es tal que la métrica es independiente de esta, entonces, de (2.33), se sigue:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = 0; \tag{2.34}$$

es decir, sí la métrica es independiente de alguna coordenada, se conserva una de las componentes del cuadrimomento a lo largo de la trayectoria parametrizada por el tiempo propio; pero el tiempo propio y parámetros afines son los válidos para la ecuación geodésica; así, la simetría implica en este caso la existencia de **cantidades conservadas**, lo cual lleva a la siguiente definición:

Vectores de Killing

Sea M una variedad, sea $\{x^\alpha\}$ su conjunto de coordenadas correspondiente, y sea $g_{\mu\nu}$ la métrica asociada a la variedad. Si $\{x^\alpha\}$ es el conjunto de coordenadas de las que la métrica es independiente, entonces se define al **vector de Killing** respecto a la coordenada x^α [2] como:

$$K(\alpha) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{2.35}$$

de donde sus componentes quedan determinadas como:

$$K(\alpha)^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^\mu = \delta^\mu_\alpha. \tag{2.36}$$

A través de los vectores antes mencionados, quedan determinadas las cantidades conservadas; que a su vez, están dadas por el cuadrimomento, que engloba la información del movimiento de la partícula. Esto es de gran utilidad porque solamente con estos vectores, que son una consecuencia de la geometría del espacio-tiempo, se pueden determinar propiedades de las partículas.

Cabe decir que los resultados obtenidos se generalizan por consistencia para partículas no-masivas, ya que las geodésicas para casos físicos son establcecidas para partículas masivas y no-masivas.

Por ende, con todo lo establecido en esta sección, es posible definir una ecuación para saber cuáles son las cantidades conservadas a través de primero encontrar los *vectores de Killing*. Hasta el momento, todo el análisis se hizo a partir de saber que existía una coordenada de la que la métrica era independiente, y con ello establecer al vector correspondiente; no obstante, véase que las cantidades conservadas presentan esta característica de conservación respecto al tiempo propio; es decir, la derivada direccional covariante de la cantidad conservada se anula, ya que la derivada direccional para el caso de geodésicas está parametrizada en principio por el tiempo propio o parámetros afines.

Dicho lo anterior, es claro que para encontrar las cantidades conservadas, basta encontrar los *vectores de Killing*, los cuales quedan determinados por la derivada direccional covariante a través de la siguiente ecuación:

$$p^\beta \nabla_\beta (K_\alpha p^\alpha) = 0, \tag{2.37}$$

donde p^β representa a las componentes del cuadrimomento de la partícula en cuestión, y K representa al *vector de Killing* a encontrar a través de la ecuación, conocida como **ecuación de Killing**.

Capítulo 3

Agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón

Para estudiar a los agujeros negros en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón, primero hay que estudiar el origen de los agujeros negros; y es que estos son consecuencia de la **RG**. Así, el objetivo de este capítulo es introducir una de las soluciones clásicas a las ecuaciones de campo de Einstein (*solución de Schwarzschild*), con la cual podrá entenderse a grandes rasgos qué es un agujero negro y cómo puede describirse en caso de tener simetría esférica, ser estático y no tener carga; de tal manera que con dicho conocimiento se pueda abordar la aproximación a bajas energías de un agujero negro tipo Gibbons-Maeda-Garfinkle-Horowitz-Ströminger (**GMGHS**) [3][4], el cual está descrito por la teoría Einstein-Maxwell-dilatón; es decir, por campos gravitaciones, electromagnéticos y dilatónicos. Por lo mismo, se dará un breve acercamiento sobre lo que es el campo dilatónico para saber cómo se relaciona con los otros campos en este tipo de teoría; luego, se mostrará la acción propuesta por **GMGHS** para agujero negro, las ecuaciones de campo correspondientes, y el ansatz de solución; esto, con la finalidad de obtener a través de cambios de coordenadas las condiciones para el límite extremal de este agujero, que son fundamentales para el objetivo de este trabajo.

3.1 Solución de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild (**SSc**) es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío, considerando una métrica con simetría esférica y estática. Es decir, en general, la **SSc** considera que la métrica del espacio-tiempo tiene simetría esférica y su fuente de campo gravitacional es estática. De hecho, basándose en [2], puede probarse que en

coordenadas esféricas, la métrica descrita por el elemento de línea en la **SSc** es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.1}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del cuerpo alrededor del cual se está considerando la métrica con simetría esférica, y Ω es el ángulo sólido asociado a las coordenadas esféricas.

Ahora bien, en la **SSc** se menciona la masa del cuerpo alrededor del cual se está considerando la métrica. La forma de pensar esto es intuitiva; en general, si se tiene un cuerpo masivo con simetría esférica (como una estrella o un planeta) con masa M, este generará una curvatura en el espacio-tiempo como plantea la **RG**.(3.1) describe la métrica alrededor del cuerpo masivo, por eso se resuelve (2.28) en vacío, para solamente modelar la dinámica de objetos que se mueven debido a la interacción gravitacional creada por M, sin considerar otras contribuciones de energía-momento [2][10].

Hay que mencionar que la Figura 3.1 es meramente espacial, más no espacio-temporal, por lo que un evento dentro del dominio de (3.1) no está descrito en su totalidad por las coordenadas esféricas, siempre debe considerarse la componente temporal de la métrica para entender la dinámica de objetos alrededor del cuerpo con masa M. Más aún, por construcción, la métrica no está definida para regiones en el interior del cuerpo de masa M (porque la métrica está definida en el vacío) ni para $r \leq 2GM \equiv r_s$ (**radio de Schwarzschild**). También, véase que en general, para objetos astrofísicos que no son agujeros negros, se observa que $r_s < re$; mientras que para agujeros negros es donde sucede que $r_s > re$ ya que la masa del objeto se concentra en un punto; esto se discutirá más adelante [2].

Como comentarios adicionales, resulta relevante establecer dos observaciones más sobre la **SSc**:

- Si $r \to \infty$
$$\Rightarrow ds^2 \to -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.2}$$

- Si $M = 0$
$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.3}$$

Observe que (3.2) es una consecuencia directa de alejarse de la fuente de campo gravitacional; es decir, de la masa M, por ello, se esperaría que mientras más lejos se esté de la fuente, más se parece a un espacio-tiempo plano, lo cual es reflejado por la ecuación antes mencionada, ya que en el infinito la métrica se reduce a la de Minkowski. Así, conviene generalizar lo anterior en lo siguiente:

Asintóticamente plano

Si una métrica se reduce a (3.2) cuando se está infinitamente lejos de la fuente de campo gravitacional, se dice que la métrica es **asintóticamente plana**.

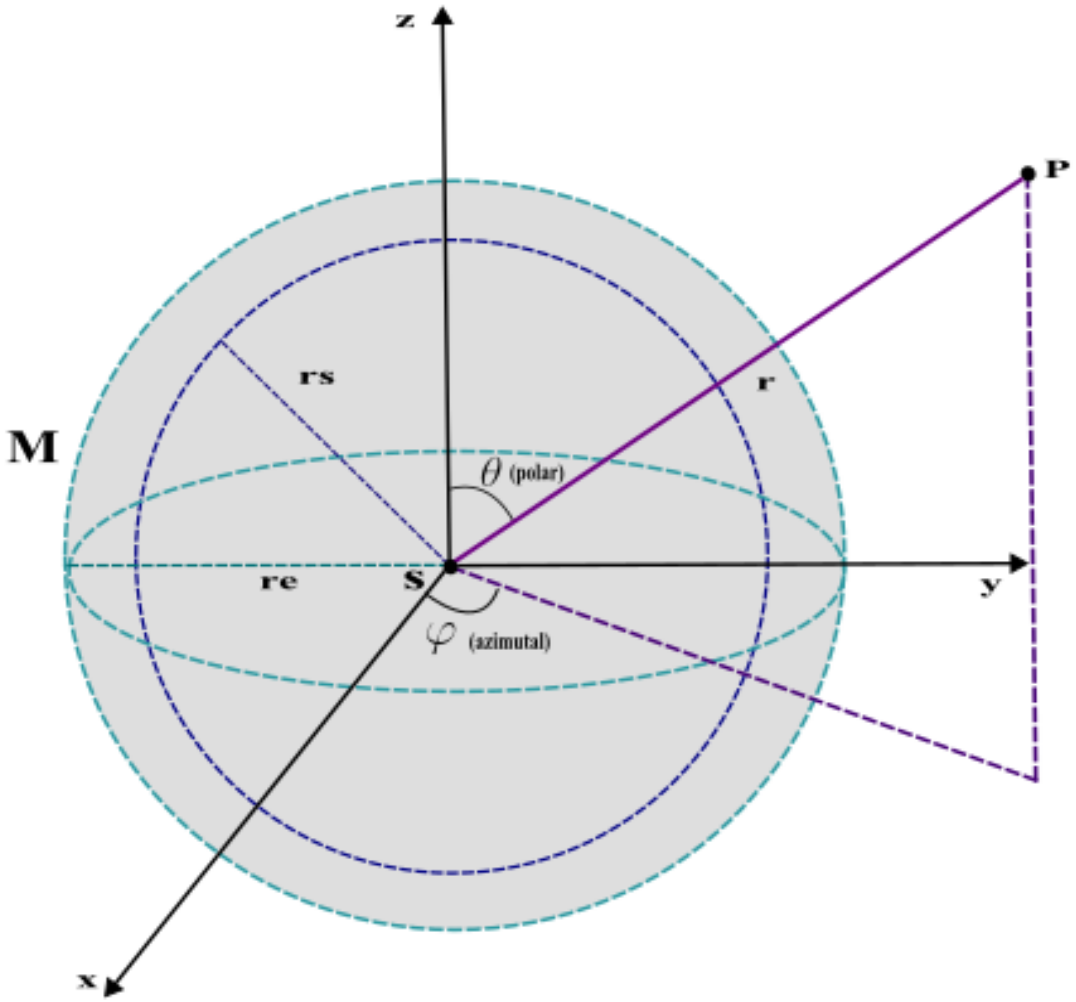

Figura 3.1.: Esquematización de la **SSc** para un objeto astrofísico no colapsado (no agujero negro). Las coordenadas de cualquier punto P fuera de la masa M están descritas por la magnitud radial (r); el ángulo polar (θ) y el ángulo azimutal (φ), que se obtiene de la proyección ortogonal del vector de posición espacial de P sobre el plano xy. S es el centro del cuerpo masivo, re es el radio de la esfera y rs es el r_s.

Por otro lado, es claro que si no hay fuente de campo gravitacional; o dicho de otra forma, si no hay masa (M), entonces no hay curvatura, por lo que espacio-tiempo debe ser plano, lo cual está descrito analíticamente por (3.3) cuando $M = 0$; es decir, la métrica tiende a la del espacio-tiempo plano cuando la masa de un objeto (que es fuente del campo gravitacional) tiende a cero.

Algo importante a recalcar dado lo anterior, es que las coordenadas usadas son válidas para

$r > r_s$, por lo que no cubren toda la variedad en la que se trabaja, son solamente una carta. Entonces hay dos opciones, cuando se tiene un agujero negro se debe extender la solución en vacío para cubir todos los puntos; mientras que cuando se tiene un objeto astrofísico distinto de un agujero negro se debe encontrar una solución interior para $r < r_s$ para describir a toda la variedad.

3.1.1 Unicidad

Sería de mucha valía que la solución de Schwarzschild sea única, ya que si no lo fuese para las condiciones planteadas en la subsección anterior, entonces la curvatura en un punto del espacio-tiempo no sería la misma (dependería de la métrica), lo cual afectaría completamente en la dinámica de partículas prueba.

Existe un teorema que prueba la *unicidad de la **SSc***, el cual enuncia que:

Teorema de Birkkhoff

La **única** solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y con simetría esférica, es la **SSc** [2][12].

Del resultado anterior se pueden rescatar dos importantes observaciones:

- La métrica dada por la solución de las ecuaciones de campo de Einstein, en el vacío y con simetría esférica, siempre es estática y asintóticamente plana.
- Las componentes de la métrica dada por la solución de las ecuaciones de campo de Einstein, en el vacío y con simetría esférica, siempre son independientes del tiempo, pero sí dependientes de las coordenadas radiales.

3.2 Singularidades, horizontes de eventos y agujeros negros

Para hablar de singularidades y horizontes de sucesos es importante aclarar que el tratamiento matemático que define a estos conceptos puede ser muy complejo y técnico; no obstante, para esta investigación se hará un análisis más cualitativo de cómo se definen, empezando por su comportamiento en la **SSc**.

Si se toma la **SSc**, en particular (3.1), se puede visualizar que cuando la coordenada radial es cero o es el r_s, algunas componentes de la métrica divergen. Así, antes de abordar lo que significa físicamente esto, es fundamental recalcar que las componentes de la métrica en este caso son dependientes de las coordenadas, lo cual es inconveniente, ya que recordando la interpretación del *principio de covariancia*, la física no debe depender de coordenadas, por lo tanto, hay que tener cautela con los radios antes mencionados.

En principio, si la métrica diverge en algún punto del espacio-tiempo, esto llevaría a pensar que la curvatura del espacio-tiempo diverge en ese mismo lugar; pero para poder tener seguridad de que en esas regiones hay divergencias de curvatura debe analizarse el tensor de Riemann.

Las componentes del tensor de Riemann dependen de las coordenadas; no obstante, los escalares que se obtengan de este tensor, conocidos comúnmente como *escalares de curvatura*, son independientes de coordenadas (por su naturaleza tensorial) [9]. Así, puede probarse que para la **SSc**, existe un escalar conocido como **escalar de Kretschmann** ($K \equiv R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$), que diverge en $r = 0$ [2]; es decir, cuando el radio se anula sí se obtiene información física independiente de las coordenadas. En general, más escalares de curvatura podrían ser obtenidos para saber si hay más puntos en el espacio-tiempo donde la curvatura diverge; lo importante es recalcar que son estos escalares los que brindan información física independiente del sistema de coordenadas elegido para hacer los análisis.

En particular, para la **SSc** se encuentra que hay toda una región en el espacio-tiempo en la que la curvatura diverge (porque la diveregencia es para todo t), y es la caracterizada por el *escalar de Kretschmann* [2].

En este trabajo se usarán las siguientes definiciones que permitirán clasificar los tipos de singularidades:

Singularidad de curvatura

Se dirá que en un punto del espacio-tiempo existe una **singularidad de curvatura** si diverge algún escalar de curvatura.

Singularidad coordenada

Se dirá que en un punto del espacio-tiempo existe una **singularidad coordenada** si diverge alguna de las componentes de la métrica pero no diverge ningún escalar de curvatura.

Regresando una vez más al caso particular de la **SSc**, se encuentra que el r_s no es más que una singularidad coordenada; de hecho, bajo un cambio apropiado de coordenadas, puede mostrarse que la métrica (3.1) no es singular en r_s [2].

En el caso de la **SSc**: ¿Qué representa físicamente el *radio de Schwarzschild*? Para ello, es conveniente analizar qué pasa con las partículas alrededor de dicho radio, en particular los fotones. Recordando de la relatividad especial, que los fotones (como partículas prueba), viajan por *trayectorias nulas* ($ds^2 = 0$) [10], entonces considerando una trayectoria radial para el fotón se puede observar a partir de (3.1) que

$$\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \tag{3.4}$$

Obsérvese que si $r = r_s$, entonces (3.4) diverge, es decir, la pendiente de los conos de luz de partículas prueba diverge.

Lo anterior puede interpretarse de la siguiente manera: Para un observador estático (*coordenadas de Schwarzschild*) afuera del cuerpo de masa M, mirar que algún objeto se acerca desde el infinito hacia la región determinada por el r_s sería equivalente a observar que el objeto nunca atraviesa dicha región, o más bien, que le toma un tiempo infinito atravesarla.

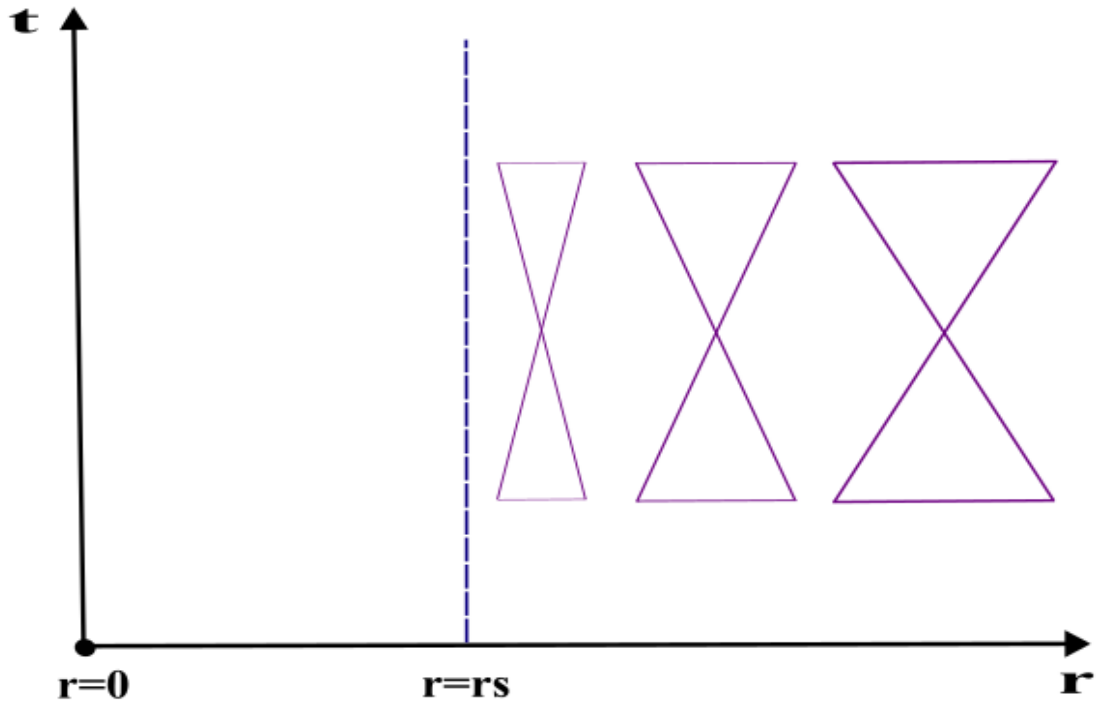

Figura 3.2.: Conos de luz de las partículas conforme se acercan a $rs = r_s$ descritos en *coordenadas de Schwarzschild*.

Con toda la motivación anterior y la esquematización de la Figura 3.2, puede interpetarse a la región descrita por r_s en la **SSc**, como un *punto de no retorno* para las partículas que atraviesan dichos puntos del espacio-tiempo. A la superficie descrita por este punto de no retorno se le suele llamar **horizonte de eventos**.

Así, usando la intuición física de los resultados que brinda la **SSc**, es posible entender las siguientes definiciones [2], que serán tomadas como punto de partida para las secciones posteriores:

Horizonte de eventos

Se dice que una superficie es un **horizonte de eventos** si las partículas prueba no pueden salir una vez que la atraviesan.

Agujero negro

Una región del espacio-tiempo de la cual la luz no puede escapar es un **agujero negro**.

Hay que aclarar que las definiciones anteriores son cualitativas; existen definiciones más apropiadas para entender estos conceptos, definiciones que son más precisas y formales; pero no fueron consideradas aquí debido a que escapan de los objetivos de este trabajo. Estas definiciones pueden ser revisadas con mayor detalle en [2] y [12].

En principio, la idea de agujero negro viene del colapso de estrellas super-masivas; cuando estas colapsan, toda la masa se contrae a un solo punto del espacio-tiempo, de densidad infinita, donde por la **RG**, ahí habría una singularidad de curvatura [10], lo cual tiene completo sentido, porque para que diverga la curvatura en algún punto, tendría que haber una densidad de masa infinita en ese punto. Por lo mismo, el objeto físico que mejor modela la **SSc**, es un agujero negro; en caso de objetos astrofísicos no colapsados como el Sol, estos no generan una singularidad de curvatura, y menos un horizonte de sucesos, ya que su masa está distribuida en un volumen finito distinto de cero; por ello, la **SSc** funciona para describir el espacio-tiempo en el exterior de objetos astrofísicos distintos de agujeros negros, pero no modela correctamente lo que ocurre en su interior.

Por otro lado, la definición de horizonte de eventos lleva a caracterizarlos a través de cómo se comportan las trayectorias nulas para determinar dónde divergen los conos de luz. Esto se puede complementar con concpetos como la *completez geodésica* [2], concepto que no será abordado ya que no es requerido para fines de esta investigación. A su vez, como la descripción de los *horizonte de eventos* está caracterizada por las curvas geodésicas de fotones (las cuales son independientes de las coordenadas por la naturaleza tensorial de la ecuación geodésica), entonces bajo cambios de coordenadas podría cambiar el valor radial que describe al *horizonte de sucesos*, más no las existencia del mismo [2].

Dados los anteriores conceptos, hay que mencionar la siguiente definición, que será de relevancia para este trabajo:

Singularidad desnuda

Una **singularidad desnuda** es una *singularidad de curvatura* que no está rodeada por un *horizonte de eventos*.

En el caso de un agujero negro descrito por la **SSc**, no hay una posibilidad (física) de tener una singularidad desnuda, ya que eso implicaría $0 > M$ [10].

3.3 Agujero negro GMGHS

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo y al inicio de este mismo trabajo, este proyecto de investigación se basa en el estudio de partículas prueba alrededor de un cierto tipo de agujero negro. Habiendo definido ya lo que es un agujero negro y cómo describir el comportamiento de partículas prueba, ahora resulta necesario definir cuál es el agujero negro sobre el que se trabajará; por ello, la intención de esta sección es desmenuzar las partes que componen a un agujero negro **GMGHS**, mostrar las ecuaciones de campo que lo rigen, las

soluciones, y su límite extremal; es decir, cuando la solución no tiene horizonte de eventos.

En particular, los campos de materia cumplen sus propias ecuaciones que, junto con las ecuaciones de Einstein, determinan cómo se dan las distintas interacciones.

3.3.1 Dilatón y campo de Maxwell en el agujero GMGHS

Se comentó en la *Introducción* que **GMGHS** propusieron una solución en espacio-tiempo no vacío para las ecuaciones de campo de Einstein; el hecho de que no sea vacío se debe a que hay campos externos presentes (el campo de Maxwell y el campo dilatónico). La existencia de estos campos es partícipe directa en la geometría del espacio-tiempo, ya que generan energía [4]. De tal forma que, para establecer notación, se definirá lo siguiente:

Agujero negro GMGHS

Al agujero negro con la métrica determinada por la solución a las ecuaciones de campo de Einstein de **GMGHS**, se le conocerá como **agujero negro GMGHS**.

Así, resulta fundamental comentar un poco sobre lo que son los campos mencionados anteriormene, claramente, en el contexto del agujero negro en cuestión:

- El **campo de Maxwell** es el campo asociado al tensor de esfuerzos de Maxwell (F de la teoría electrodinámica); y en particular, en el agujero **GMGHS**, es aquel asociado a un campo puramente magnético generado por una carga magnética [4].

- El **campo dilatónico** es un campo escalar (ϕ) proveniente de la *teoría de cuerdas*, que describe la *fuerza de auto-interacción* de una *cuerda*, lo cual determina a grandes rasgos, el valor de la constante de gravitación universal (G) [13].

Es importante recalcar que la intención de este texto no es la de ahondar en el contexto ni en la terminología de la *teoría de cuerdas*. Sin embargo, si se quiere hacer un estudio más detallado de lo que significan los términos anteriores en el contexto de *cuerdas*, se recomienda referirse a [13]. Más aún, tómese en cuenta que en la teoría electrodinámica clásica no pueden existir cargas magnéticas [2]; sin embargo, en el contexto de la *teoría de cuerdas* sí [3]; y, como ya se mencionó en la *Introducción*, los agujeros negros tipo **GMGHS** son una *aproximación a bajas energías* de la teoría de cuerdas a la teoría clásica de la **RG**, por lo mismo, es natural que se hereden características de la teoría original a la teoría aproximada.

Aunado a las anteriores condiciones, también se pide que el agujero negro a tratar sea *estático* y con *simetría esférica* [4].

La motivación de la construcción de los agujeros negros tipo **GMGHS** fue presentada en la *Introducción*; no obstante, no se mencionó a partir de qué regiones es válida dicha solución asociada a las ecuaciones de campo de Einstein. De hecho, al ser una aproximación, no hay una fontera exacta que determine a dicha región, pero usualmente se considera que la solución

es válida en vecindades alrededor del *horizonte de eventos* y afuera de este, ya que en esas regiones la escala es lo suficientemente grande respecto a la escala de Planck, escala en la que no se puede hacer la aproximación a bajas energías [4].

3.3.2 Acción, ecuaciones de campo y solución

Considerando todas las condiciones para el agujero negro **GMGHS**, es necesario usar coordenadas esféricas, debido a su simetría. De tal forma que, con base a dichas coordenadas, según [4], el tensor de esfuerzos de Maxwell propuesto es:

$$F = Q \sin\theta d\theta \wedge d\varphi, \tag{3.5}$$

donde Q es la carga magnética;y, θ y φ son los ángulos polar y azimutal, respectivamente, correspondientes a las coordenadas esféricas.

Ahora bien, se ha comentado sobre las características físicas del agujero negro **GMGHS**, pero no se ha mostrado cuáles son las ecuaciones que rigen a todos los campos. Las ecuaciones de campo se pueden obtener a través del *principio de mínima acción* [9], el cual consiste en extremalizar la *acción* a través del cálculo variacional [9].

Para el caso del agujero negro **GMGHS** se obtiene que la acción lagrangiana S es

$$S = \int_M d^4x\sqrt{-g}[-R + 2(\nabla\phi)^2 + e^{-2\phi}F^2], \tag{3.6}$$

donde g es el determinante de la métrica, R el escalar de curvatura de Ricci, ϕ el campo dilatónico, y F el tensor de esfuerzos de Maxwell [4].

En el *Apéndice A* se muestra la deducción de las ecuaciones de campo para la acción lagrangiana determinada por (3.6). En particular, las ecuaciones de campo obtenidas son 3: (A.4), (A.8) y (A.15). Estas ecuaciones son las *ecuaciones de campo para el agujero negro* en cuestión. Así, por practicidad, se condensarán estas 3 ecuaciones en la Tabla 3.1, las tres determinan la geometría del espacio-tiempo, pues se resuelven simultáneamente.

No. Ecuación	Ecuación de Campo
1	$\nabla^2\phi + \frac{1}{2}e^{-2\phi}F^2 = 0$
2	$\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}) = 0$
3	$R_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + 2e^{-2\phi}F_{\mu\rho}F^\rho{}_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}e^{-2\phi}F^2$

Tabla 3.1.: Ecuaciones de campo para el agujero negro **GMGHS**.

Así, se puede demostrar que el ansatz correcto (en coordenadas esféricas) de solución para

las ecuaciones de campo del agujero negro **GMGHS** es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r\left(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}\right) d\Omega^2 \tag{3.7}$$

y

$$e^{-2\phi} = e^{-2\phi_0}\left(1 - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{Mr}\right), \tag{3.8}$$

donde Q es la carga magnética, M es la masa del agujero, ϕ el campo dilatónico y ϕ_0 es valor asintótico del campo dilatónico [4][14], ya que se pide que la solución asociada a este sea *asintóticamente plana* si se quiere describir solamente a la interacción generada por el agujero [2]. Considérese la constante de gravitación universal adimensional ($G = 1$).

Una vez determinada las solución para el agujero (descrita por (3.5), (3.7) y (3.8)), deben saberse dos cosas para su correcto análisis: ¿Cuáles son las *singularidades de curvatura*?¿En dónde se encuentra el *horizonte de eventos* y cuántos hay?

En respuesta a lo anterior, se encuentra que para esta agujero existen dos singularidades de curvatura y un horizonte de sucesos [15].

- El *horizonte de eventos* está descrito por la región esférica determinada por $r_s = 2M$ (*radio de Schwarzschild*).
- Las *singularidades de curvatura* están determinadas solamente por dos escalares de curvatura [15]:
  - *Escalar de Ricci*, que diverge cuando

$$r = 0. \tag{3.9}$$

  - *Escalar de Weyl*, que diverge cuando

$$r = \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}. \tag{3.10}$$

Es decir, existe un *horizonte de eventos* que rodea a dos *singularidades de curvatura*, donde claramente, la posición de la singularidad determinada por (3.10) es mayor que la posición de la singularidad determinada por (3.9). Por lo tanto, esquemáticamente, se puede pensar que el agujero negro está consituido como se muestra en la Figura 3.3.

Véase que en principio, de la Figura 3.3, la región $r_R < r < r_W$ está desconectada causalmente del resto del espacio-tiempo, por lo que se suele omitir esta región bajo un cambio de coordenadas, ya que de todas maneras, antes de alcanzar la singularidad interior, existe otra singularidad, exterior, cubierta por el horizonte de sucesos. Por lo tanto, podría modelarse la situación con solamente una singularidad (la exterior) y un horizonte de sucesos, lo cual recuerda a la **SSc**; sin embargo, se mostrará en la siguiente sección que la existencia

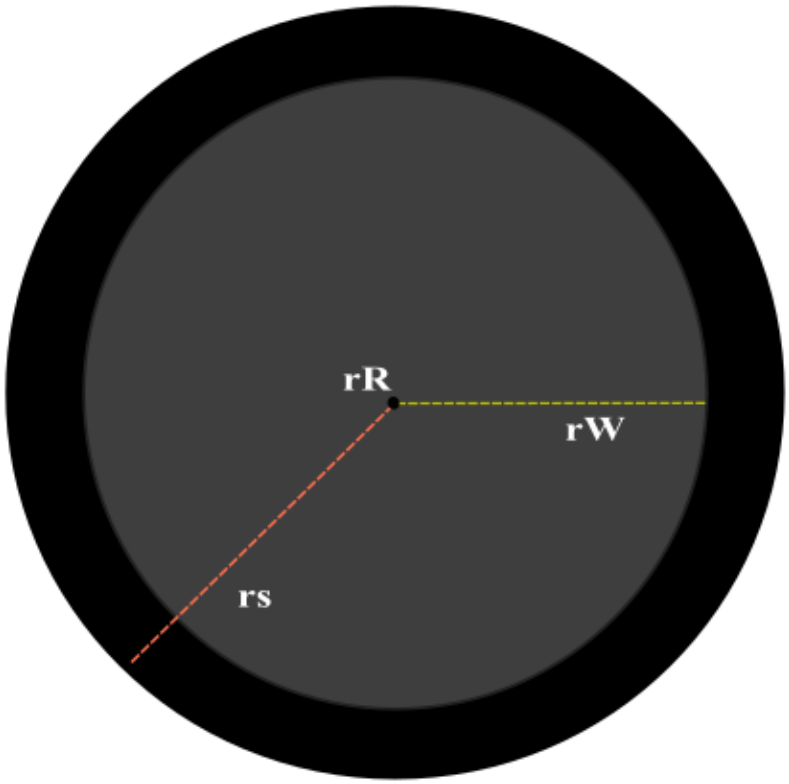

Figura 3.3.: Vista polar del agujero negro **GMGHS**, donde $rs \equiv r_s$, $rW \equiv r_W$ (radio descrito por (3.10)) y $rR \equiv r_R$ (radio descrito por (3.9)).

del campo dilatónico y de Maxwell impide que la solución bajo un cambio de coordenadas sea exactamente la **SSc**.

Como comentario final a esta sección, debe mencionarse la *unicidad* de la solución a las ecuaciones de campo obtenidas. Esto es importante, porque si es única, entonces todas las cantidades físicas obtenidas son propias del sistema físico en cuestión (en este caso, del agujero negro con las condiciones antes planteadas), y no de la solución que se obtenga para el sistema. Resalta que la solución **GMGHS** sí es única; esto fue probado en M. Mars y W. Simon en 2002 [16].

3.3.3 Coordenadas de área y límite extremal

En esta sección, se abordará un cambio de coordenadas específico, **coordenadas de área** [15]. En estas coordenadas las componentes de la métrica asociadas al ángulo sólido solamente dependen de la coordenada radial al cuadrado, lo que se asemeja en simetría esférica a la **SSc**. Llamaremos a estas, las *coordenadas de área*.

Es importante mencionar que el cambio a *coordenadas de área* solamente se puede realizar para métricas estáticas y con simetría esférica [15], características con la que cumple la métrica de **GMGHS**, y solamente para una región del espacio-tiempo. Así, la forma general para las *coordenadas de área*, también en coordenadas esféricas, es la siguiente:

$$ds^2 = -\lambda(R)^2 h(R) dt^2 + h(R)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \tag{3.11}$$

donde λ y h son funciones de la coordenada radial R. A partir de (3.7), es claro que la relación que guardan las coordenadas es

$$R^2 = r\left[r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = Mr^2 - Q^2 e^{-2\phi_0} r - MR^2, \tag{3.12}$$

de donde, se observa que (3.12) es un polinomio de segundo orden con variable r, por lo que su solución es

$$r = \frac{Q^2 e^{-2\phi_0} \pm \sqrt{Q^4 e^{-4\phi_0} + 4M^2R^2}}{2M},$$

pero, al tener coordenadas esféricas, los radios negativos no son parte del dominio de las coordenadas, por lo que

$$r = \frac{Q^2 e^{-2\phi_0} + \sqrt{Q^4 e^{-4\phi_0} + 4M^2R^2}}{2M}. \tag{3.13}$$

Ahora bien, debido a (2.6), es claro que la uno-forma dr se relaciona con la uno-forma dR de la siguiente manera:

$$dr = \frac{dr}{dR} dR. \tag{3.14}$$

Por lo tanto, derivando (3.13) respecto a R, se obtiene que

$$\frac{dr}{dR} = \frac{2MR}{\sqrt{Q^4 e^{-4\phi_0} + 4M^2R^2}}. \tag{3.15}$$

Luego, al sustituir (3.15) en (3.14), es claro que se cumple

$$dr^2 = \frac{4M^2R^2}{Q^4 e^{-4\phi_0} + 4M^2R^2} dR^2. \tag{3.16}$$

Ergo, relacionando (3.16) con (3.7) y (3.11), resulta que:

$$h(R) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{Q^4 e^{-4\phi_0} + 4M^2R^2}{4M^2R^2}\right).$$

Y al multplicar $(1 - \frac{2M}{r})$ por $h(R)^{-1}$, se obtiene debido a (3.11),

$$\lambda(R) := \frac{2MRe^{2\phi_0}}{\sqrt{Q^4 + 4e^{4\phi_0} M^2R^2}}. \tag{3.17}$$

Por otro lado, sustituyendo (3.13) en $h(R)$, se puede definir a $h(R)$ completamente en términos de R; es decir

$$h(R) := \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4e^{2\phi_0}M^2}{Q^2 + \sqrt{Q^4 + 4e^{4\phi_0}M^2R^2}}\right)\left(\frac{Q^4 + 4e^{4\phi_0}M^2R^2}{e^{4\phi_0}M^2R^2}\right). \tag{3.18}$$

Por ende, con (3.17) y (3.18), la métrica en coordenadas de área queda determinada. Véase que si se evalúa (3.12) en r_W, la coordenada radial de área se anula; es decir, este cambio de coordenadas describe al agujero para $r \geq r_W$, lo cual coincide con lo buscado al final de la sección anterior, que era representar al agujero negro con solamente la singularidad exterior y el horizonte de sucesos bajo un cambio de coordenadas adecuado, este, termina siendo el cambio de coordenadas a coordenadas de área. Este comportamiento se esquematiza a través de la Figura 3.4

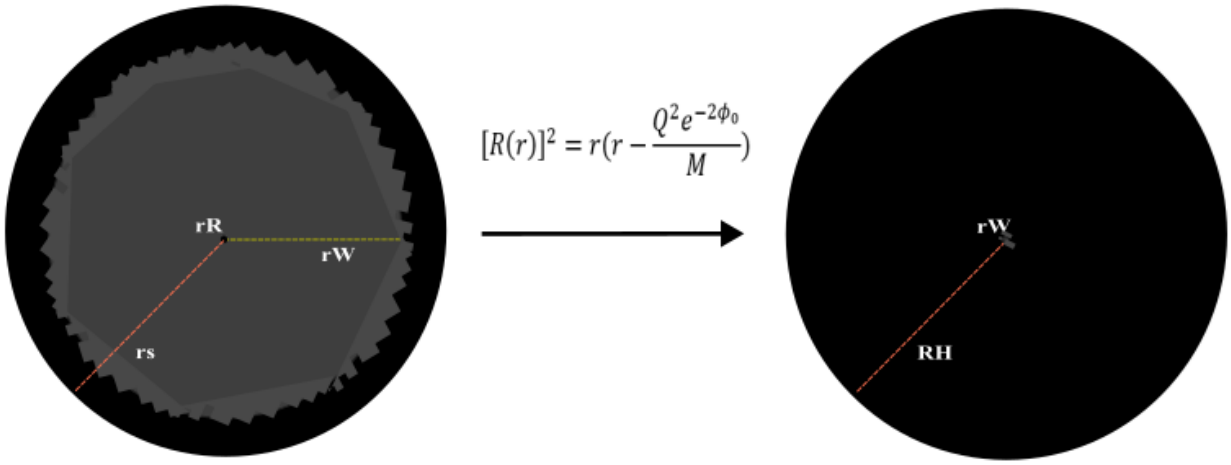

Figura 3.4.: Transformación de coordenadas a coordenadas radiales de área, donde el radio r_W coincide con $R = 0$ en las nuevas coordenadas. A su vez, en la nuevas coordenadas, el horizonte de eventos ahora está determinado por R_H.

Ahora, bajo la transformación de coordenadas radiales (3.12), se puede calcular R_H de la siguiente manera:

$$R_H^2 = R^2 \mid_{r_s=2M} = 2M\left(2M - \frac{Q^2e^{-2\phi_0}}{M}\right) = 4M^2 - 2Q^2e^{-2\phi_0}$$

$$R_H = \sqrt{4M^2 - 2Q^2e^{-2\phi_0}}, \tag{3.19}$$

de donde, se opta por la solución positiva para R_H; esto, para evitar definir coordenadas radiales negativas que no corresponden al dominio de las coordenadas esféricas. A su vez,

(3.19) refleja la importancia de las coordenadas de área, ya que para que el agujero negro siga teniendo sentido físico, debe ocurrir la siguiente condición:

$$\Rightarrow 4M^2 - 2Q^2 e^{-2\phi_0} \geq 0; \tag{3.20}$$

es decir, (3.20) refleja una condición puramente física, no dependiente de las coordenadas, que establece la relación intrínseca entre los parámetros del agujero para que este siga siendo agujero negro. Véase que si (3.20) es tal que se anula, entonces R_H también se anula, por lo que en ese caso se tendría la condición para el **límite extremal** del agujero negro; es decir, cuando la singularidad (exterior) está *desnuda* (no rodeada por algún horizonte de sucesos). Por lo tanto, el *límite extremal* sucede cuando

$$Q^2 = 2M^2 e^{2\phi_0}. \tag{3.21}$$

A este última condición dada por (3.21) se le conocerá como **condición extremal** del agujero.

Como comentario adicional a esta sección, que será de utilidad para capítulos posteriores, se presenta a continuación la métrica en coordenadas de área para el *límite extremal*. Con todos los cálculos realizados en esta sección, la obtención de este caso para la métrica es directa; es decir, a través de sustituir (3.17) y (3.18) en (3.11), y luego aplicar la *condición extremal*, se obtiene al elemento de línea de la métrica como

$$ds^2 = -\frac{\sqrt{M^2+R^2}-M}{\sqrt{M^2+R^2}+M}dt^2 + \frac{R^2}{M^2+R^2}\frac{\sqrt{M^2+R^2}+M}{\sqrt{M^2+R^2}-M}dR^2 + R^2 d\Omega^2. \tag{3.22}$$

Para finalizar esta sección, no hay que dejar de mencionar que la solución a las ecuaciones de campo del agujero negro **GMGHS** no solamente es (3.7), también es (3.5) y (3.8); no obstante, el objetivo de esta investigación es el de describir la trayectoria geodésica de partículas prueba alrededor del agujero negro, por lo que se ha procurado analizar con detalle a la métrica, que determinará la forma de las geodésicas. A su vez, la solución (3.7) para una métrica estática, es válida para $r > r_s$ ya que para $r = r_s$ la métrica no está bien definida, y para $r < r_s$, r y t intercambian sus roles, es decir, la t se convierte en la coordenada espacial y r en la temporal; lo mismo sucede con (3.11) para $R = R_H$ y $R < R_H$, sin embargo, para el caso *extremal* (3.22) esto ya no es así, la coordenada R es válida para cualquier valor, es decir, $0 < R < \infty$.

Capítulo 4

Potenciales efectivos

El uso de los potenciales efectivos para el estudio del movimiento de partículas es muy común en el campo de la gravitación; en sí, en el estudio del movimiento de partículas prueba alrededor de un agujero negro [10][17]. Dichos potenciales son una representación clásica de cómo influye la fuente de campo gravitacional en las partículas con cierto momento y energía que circundan a la fuente [2]. La intención de esta sección, es seguir el planteamiento usual para la construcción de los potenciales efectivos de una manera análoga a como se ha hecho en las referencias de este trabajo; es decir, [18], [19] y [20]. Así, la idea será graficar los potenciales obtenidos, con el objetivo de bosquejar el movimiento geodésico de interés.

Cabe decir que se hace uso del software de aplicación *Mathematica* para realizar la graficación de los potenciales.

4.1 Análisis general

Debido a que el agujero negro **GMGHS** tiene simetría esférica, y como se busca hacer el análisis geodésico de partículas prueba, entonces no es considerada ninguna interacción además de la gravitacional sobre las partículas, por lo que el momento angular de estas debe conservarse; es decir, el movimiento de las partículas es coplanar [2][10]. Así, sin pérdida de generalidad se fijará la coordenada $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A su vez, como la métrica tiene la propiedad de ser estática, entonces la conservación de la energía debe ocurrir para las partículas prueba [2], por lo que existen dos cantidades

conservadas para las partículas: *Su momento angular y su energía.* Así, con base a (2.34) y (2.35) es claro que, para un *parámetro afín* (λ), la energía por unidad de masa (E) está asociada al vector de Killing ($K(0)$) como

$$E = -K(0)_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \tag{4.1}$$

y que el momento angular por unidad de masa (L) está asociado al vector de Killing ($K(3)$) como

$$L = K(3)_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \tag{4.2}$$

Así, para obtener E y L, deben conocerse $K(0)_\mu$ y $K(3)_\mu$, por lo que, a través de (2.36) es claro que

$$K(0)^\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{4.3}$$

y que

$$K(3)^\mu = (0, 0, 0, 1), \tag{4.4}$$

ya que la base de la métrica de este espacio-tiempo es la *base coordenada.* Así,

$$K(0)_\mu = g_{\mu\nu} K(0)^\nu \tag{4.5}$$

y

$$K(3)_\mu = g_{\mu\nu} K(3)^\nu. \tag{4.6}$$

Por lo tanto, usando la métrica dada en (3.7) para después sustituir (4.5) y (4.6) en (4.1) y (4.2), respectivamente, se tiene que

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \tag{4.7}$$

y

$$L = r\left(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}\right) \frac{d\varphi}{d\lambda}. \tag{4.8}$$

Más aún, de (2.19), resulta que la cantidad ϵ (norma al cuadrado del cuadri-momento) debe conservarse a lo largo de la trayectoria geodésica; ya que la norma al cuadrado del cuadri-momento se conserva [2], donde

$$\epsilon \equiv -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \tag{4.9}$$

En (4.9), se toma el signo negativo ya que las trayectorias de las partículas analizadas no son de *tipo espacio.* Esto queda implícito en el análisis, ya que lo que se busca de este

proyecto es analizar los casos más aplicables a nivel observacional, como en la astrofísica (observacional), por lo que se omite el caso de partículas que se muevan con velocidades mayores a la velocidad de la luz al ser un caso no físico. Donde $\epsilon = 0$ en el caso *tipo luz*, y $\epsilon > 0$, en el caso *tipo tiempo* [2]. Para efecto prácticos, en el caso *tipo tiempo*, se normalizará ϵ; es decir, se tomará $\epsilon = 1$.

Luego, desarrollando (4.9) con (3.7), y recordando que $\theta = \frac{\pi}{2}$, se obtiene que

$$\epsilon = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r\left(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \tag{4.10}$$

Después, sustituyendo (4.7) y (4.8) en (4.10), se llega a la siguiente ecuación diferencial, que solamente está en términos de la coordenada radial:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2M}{r}\right]\left[\frac{L^2}{r}\left(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M}\right)^{-1} + \epsilon\right] = \frac{1}{2}E^2. \tag{4.11}$$

Si se considera $\frac{1}{2}E^2 = E_{ef}$ y $\frac{1}{2}[1 - \frac{2M}{r}][\frac{L^2}{r}(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})^{-1} + \epsilon] = V_{ef}(r)$, entonces es posible interpretar a (4.11) como la ecuación clásica de energía para una partícula de masa unitaria y energía total E_{ef} moviéndose en un potencial unidimensional $V_{ef}(r)$. Si bien esta interpretación podría parecer la explicación final al problema del movimiento de las partículas geodésicas, es una intepretación errónea, ya que en principio, la existencia de potenciales gravitaciones viene a su vez de la existencia de fuerzas gravitacionales, concepto que en **RG** no existe. Así, (4.11) no necesariamente es la ecuación de energía que representa exactamente el movimiento geodésico, pero al menos, V_{ef} (potencial efectivo) da una aproximación clásica de cómo las partículas prueba se comportan en presencia de un agujero negro. De hecho, lo que hace la **RG** al resolver las *ecuaciones geodésicas*, es otorgar correcciones precisas para esta aproximación clásica. En particular, esto es lo que se busca hacer en el siguiente capítulo, resolver directamente las *ecuaciones geodésicas* para conocer el movimiento geodésico exacto.

Para finalizar esta sección, se presenta una forma desglosada del V_{ef}; es decir, si se desarrolla algebraicamente el término que se había asignado como potencial efectivo, se puede llegar a que

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \frac{M}{r}\epsilon + \frac{L^2}{2r}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})} - \frac{ML^2}{r^2}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})}. \tag{4.12}$$

También, recálse cuál es la relación entre la energía efectiva (E_{ef}) y la energía total (E):

$$2E_{ef} = E^2. \tag{4.13}$$

4.1.1 Partículas masivas

Para el caso de partículas masivas, debe recordarse que $\epsilon = 1$, por lo que, partiendo de (4.12), se tiene que el potencial efectivo es:

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})} - \frac{ML^2}{r^2}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})}. \tag{4.14}$$

Así, en la Figura 4.1 se muestra la gráfica de (4.14) para diferentes valores de momento angular. En particular, los parámteros del agujero negro se toman como unitarios; es decir, M, Q y ϕ_0; esto último es posible ya que la combinación de estos valores hace que se cumpla la condición positiva de (3.20); es decir, para estos valores se está en el *régimen de agujero negro*, el cual sigue que

$$r_s > r_W; \tag{4.15}$$

es decir, la singularidad exterior está cubierta por el horizonte de eventos.

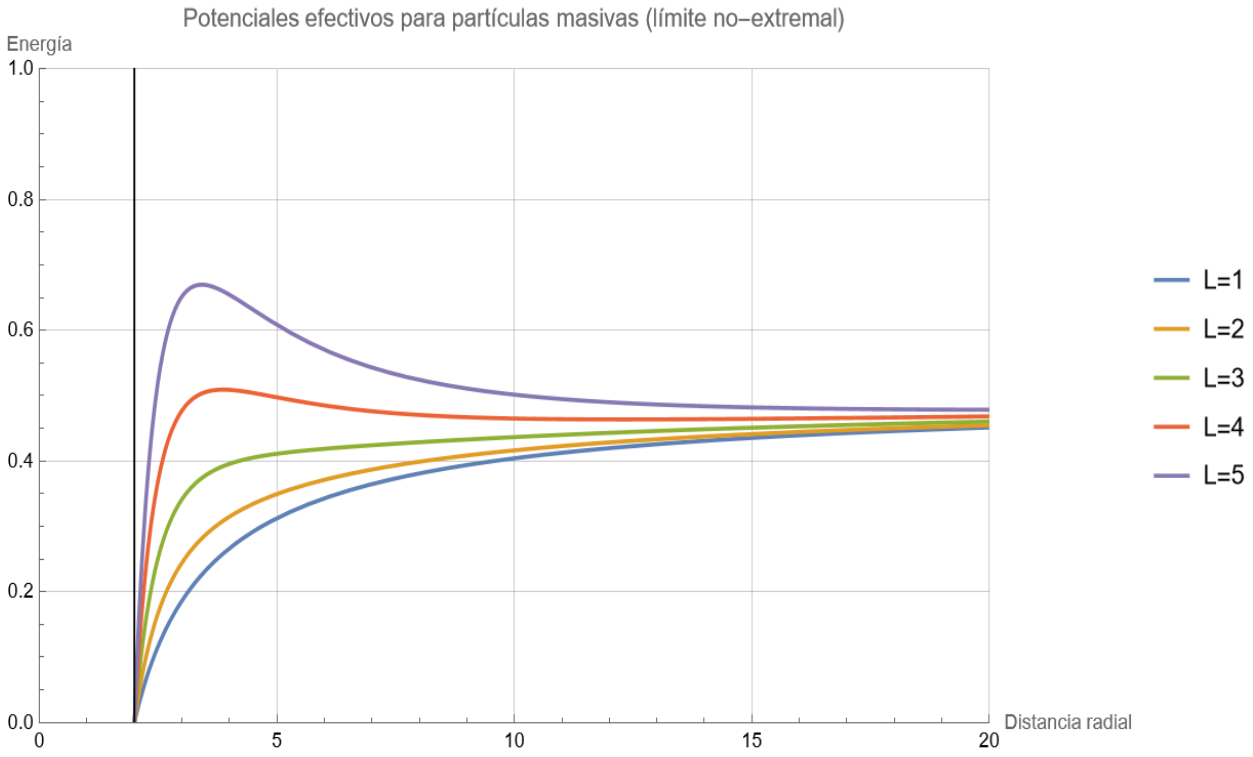

Figura 4.1.: Potenciales efectivos para partículas masivas con cinco valores distintos de momento angular, en el régimen de agujero negro. La línea vertical asintótica a los potenciales y que es paralela al eje de la energía, se encuentra en $r = r_s$.

Como tal, se busca describir el *régimen de agujero negro* en esta sección porque en secciones posteriores se caracterizará con mayor detalle el régimen del *límite extremal*.

Al derivar (4.14) se obtienen los puntos críticos con valores reales positivos mostrados en la Tabla 4.1.

L	r_c
1	0.0908
2	0.0909
3	0.0909
4	3.8689 y 12.3108
5	3.4201 y 21.7596

Tabla 4.1.: Puntos críticos (r_c) de (4.14), para $M = Q = \phi_0 = 1$, dependiendo del valor de L. Caso masivo.

De la Figura 4.1 y Tabla 4.1, se observa que sí existen *órbitas acotadas*, en particular, *órbitas circulares inestables* y *órbitas circulares estables* para algunos valores de momento angular ($L = 4$ y $L = 5$). Las *órbitas circulares inestables* están descritas por los máximos locales de los potenciales que estén ubicados fuera del *horizonte de eventos*, mientras que las *órbitas circulares estables* están descritas por los mínimos locales de los potenciales que estén ubicados fuera del *horizonte de eventos*.

4.1.2 Partículas no-masivas

Para el caso de partículas no-masivas, se aplica la condición correspondiente; es decir $\epsilon = 0$, por lo que, partiendo de (4.12), se tiene que el potencial efectivo para partículas no-masivas es:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2r}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})} - \frac{ML^2}{r^2}\frac{1}{(r - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{M})}. \tag{4.16}$$

En la Figura 4.2 se muestra la gráfica de (4.16) siguiendo la misma argumentación para los parámetros que en la sección anterior, el único cambio sería que en este caso, las partículas son no-masivas, pero el régimen sigue siendo el de agujero negro.

Al derivar (4.16) se obtienen los puntos críticos con valores reales positivos mostrados en la Tabla 4.2.

De la Figura 4.2 y Tabla 4.2, se observa que no existen *órbitas acotadas* más que *órbitas circulares inestables* para todos valores de momento angular graficados. Las *órbitas circulares inestables* están descritas por los máximos locales de los potenciales que estén ubicados fuera del *horizonte de eventos*.

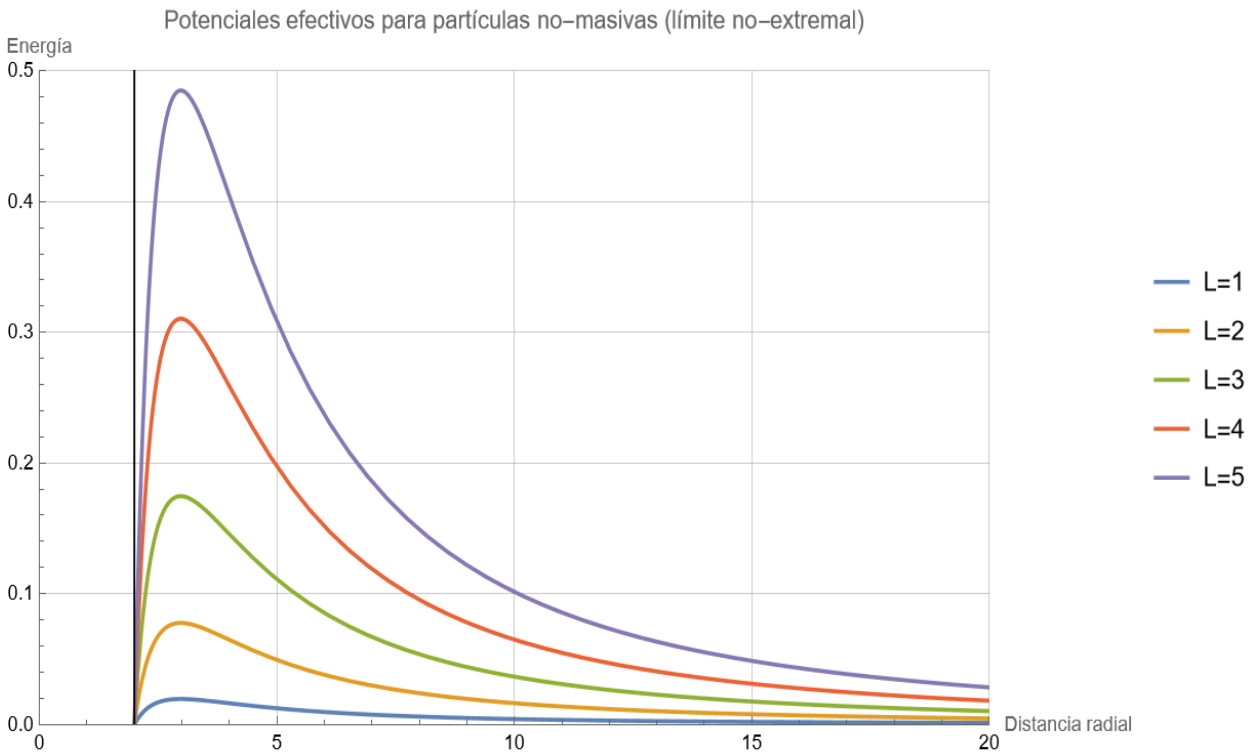

Figura 4.2.: Potenciales efectivos para partículas no-masivas con cinco valores distintos de momento angular, en el régimen de agujero negro. La línea vertical asintótica a los potenciales y que es paralela al eje de la energía, se encuentra en $r = r_s$.

4.2 Análisis en el límite extremal

Ahora bien, para el límite extremal, basta tomar la *condición del límite extremal* dada por (3.21) y aplicarla a (4.12). De tal forma que el potencial en el *límite extremal* es

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\epsilon - \frac{M}{r}\epsilon + \frac{L^2}{2r^2}. \tag{4.17}$$

Debido a que el objetivo del presente trabajo es analizar con detalle las curvas geodésicas en el límite extremal, entonces para esta sección, se pretende encontrar en qué distancia radial se encuentran las órbitas circulares estables. Para ello, basta calcular los puntos críticos de V_{ef} y analizar cuáles corresponden a mínimos locales para el potencial.

Derivando, se tiene que

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = \frac{M}{r^2}\epsilon - \frac{L^2}{r^3}, \tag{4.18}$$

por lo que, si se anula (4.18), y se resuelve para r, se obtienen los puntos críticos para V_{ef},

L	r_c
1	0.0909 y 2.9767
2	0.0909 y 2.9767
3	0.0909 y 2.9767
4	0.0909 y 2.9767
5	0.0909 y 2.9767

Tabla 4.2.: Puntos críticos (r_c) de (4.16), para $M = Q = \phi_0 = 1$, dependiendo del valor de L. Caso no-masivo.

los cuales serán nombrados como r_c, donde

$$r_c = \frac{L^2}{M\epsilon}. \tag{4.19}$$

En las siguientes secciones se analizará si los r_c obtenidos corresponden a máximos o mínimos del potencial.

Véase también que para el *límite extremal*:

$$r_W = r_s. \tag{4.20}$$

4.2.1 Partículas masivas

Para las partículas masivas, $\epsilon = 1$, por lo tanto, (4.17) se simplifica en

$$V_{ef} = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2}. \tag{4.21}$$

En la Figura 4.3 se muestra la gráfica de (4.21) para distintos valores de momento angular. Por simplicidad, se considerará $M = 1$.

También, de la Figura 4.3, puede apreciarse que los r_c están asociados a mínimos del potencial; es decir, las órbitas correspondientes serán estables. Más aún, es posible decir que conforme el momento angular de las partículas aumenta, entonces se requerirá de más energía (en las partículas) para que estas describan órbitas estables.

Por otro lado, con base a (4.19), mientras menor sea el momento angular, más cerca de la singularidad se encontrarán estas órbitas estables. Y, contrariamente, conforme el momento angular aumente, las órbitas estables se encontrarán más lejos de la singularidad.

Con la finalidad de complementar el análisis de resultados que se hará en capítulos posteriores, a continuación se muestran dos tablas con los valores de energía asociados a cada uno de los r_c, para el caso con $M = 1$. Estos valores fueron obtenidos directamente

de la gráfica de la Figura 4.3. Véase que entre $L = 1$ y $L = 2$ hay un cambio cualitativo importante, ya que $L = 1$ no tiene *órbita circular estable* dado que el mínimo de potencial está en un radio menor al radio de la singularidad. Y además, las *órbitas circulares estables* solamente existen para un intervalo de valores de L.

L	E_{efc}
1	$6.98 \cdot 10^{-5}$
2	0.38
3	0.44
4	0.47
5	0.48

Tabla 4.3.: Energía efectiva asociada a r_c (E_{efc}) dependiendo del valor de L. Caso masivo.

L	E_c
1	0.011
2	0.871
3	0.938
4	0.969
5	0.979

Tabla 4.4.: Energía total asociada a r_c (E_c) dependiendo del valor de L, siguiendo la regla de transformación (4.13). Caso masivo.

4.2.2 Partículas no masivas

En el caso de partículas no-masivas, $\epsilon = 0$, por lo cual, (4.17) se simplifica en

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2r^2}. \tag{4.22}$$

En la Figura 4.4 se muestra la gráfica de (4.22) para varios valores de momento angular. Se observa que no hay órbitas acotadas; de hecho, analizando (4.18), es claro que cuando $\epsilon \to 0$, entonces $r_c \to \infty$; lo cual es consistente con lo planteado al inicio de este párrafo porque en esa región la singularidad físicamente ya no tendría efecto sobre las partículas. También, conforme decrementa el momento angular de las partículas prueba, se visualiza en la figura que las partículas pueden acercarse más a la singularidad, pero no llegar a esta, a menos que el momento angular se anule, lo cual haría que la barrera de potencial dada por (4.22) sea idénticamente cero, o a menos que la gráfica del potencial efectivo interseque

con la línea vertical descrita por la singularidad exterior, en ese caso, partículas no-masivas pueden alcanzar la singularidad, como se verá en el capítulo siguiente.

Los valores de las Tablas 4.5 y 4.6 serán importantes para análisis posteriores.

L	E_{efs}
1	0.12
2	0.51
3	1.1
4	2
5	3.1

Tabla 4.5.: Energía efectiva asociada a r_s (E_{efs}) dependiendo del valor de L. Caso no-masivo y masivo.

L	E_s
1	0.489
2	1.009
3	1.483
4	2
5	2.489

Tabla 4.6.: Energía total asociada a r_s (E_s) dependiendo del valor de L, siguiendo la regla de transformación (4.13). Caso no-masivo y masivo.

Uno de los principales comentarios a analizar sobre el *límite extremal*, es la condición descrita por (4.20), de donde se concluye que la singularidad exterior está *desnuda* y está ubicada en r_s; esto en principio es correcto para el límite tratado; no obstante, la métrica (3.7) tiene dos singularidades de curvatura; y como ya se ha mencionado anteriormente, esta métrica está definida para regiones fuera del horizonte de eventos; en particular, para el *límite extremal*, eso correspondería a que la métrica esté definida para regiones afuera de la superficie definida por r_s; ergo, los potenciales efectivos mostrados en las Figuras 4.3 y 4.4 están sujetos a esta interpretación física para r_s.

El párrafo anterior indica que para $r < r_s$, los potenciales mostrados no son necesariamente los correctos, podría incluso haber alguna discontinuidad. De hecho, esto es lo que sucede en las Figuras 4.3 y 4.4, la discontinuidad está en r_s ya que ahí hay una singularidad de curvatura.

Para finalizar este capítulo es importante comentar que los potenciales asociados para la partícula masiva en el *límite extremal* tienen la misma forma funcional que los potenciales efectivos descritos por un *campo newtoniano* [2], por lo que en principio, parecería que las

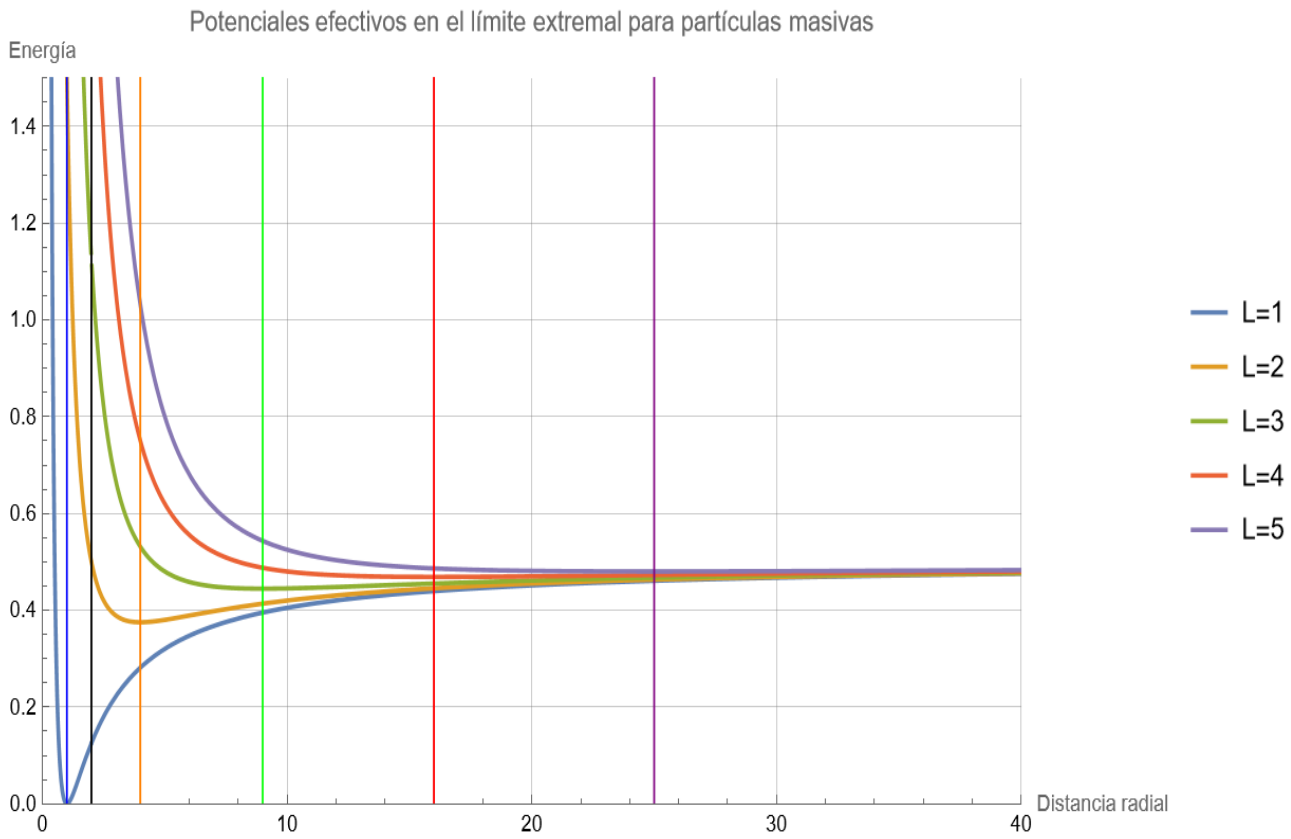

Figura 4.3.: Potenciales efectivos para partículas masivas con cinco valores distintos de momento angular, en el régimen del límite extremal. Las líneas paralelas al eje de la energía correponenden a $r = r_c$; excepto por la segunda, vista de izquierda a derecha, que corresponde a $r = r_s$.

órbitas descritas serían cónicas (para el caso masivo); no obstante, la velocidad angular no coincide a la correspondiente a un campo newtoniano debido a (4.8), esto será abordado con mayor detalle en el último capítulo de este proyecto. De forma natural, podría pensarse que si se hace el cambio de coordenadas a *coordenadas de área*, entonces es posible resolver el problema mencionado al inicio de este párrafo sobre la velocidad angular, pero por la forma en la que está construida la métrica (3.22), no es posible identificar potenciales efectivos con estas coordenadas ya que $g_{RR} \neq (g_{tt})^{-1}$[2].

Véase que a través de las figuras de los potenciales; las Tablas 4.4 y 4.6; y la regla de transformación (4.13), es posible clasificar a las órbitas de partículas prueba en el límite extremal como en las siguientes tablas.

Para $L = 1$ en el caso masivo, es claro que para toda energía total entre E_s y 1, se forman órbitas no acotadas en las que la partícula prueba cae a la singularidad; mientras que, para energías mayores a 1, la partícula puede caer en la singularidad o desviarse.

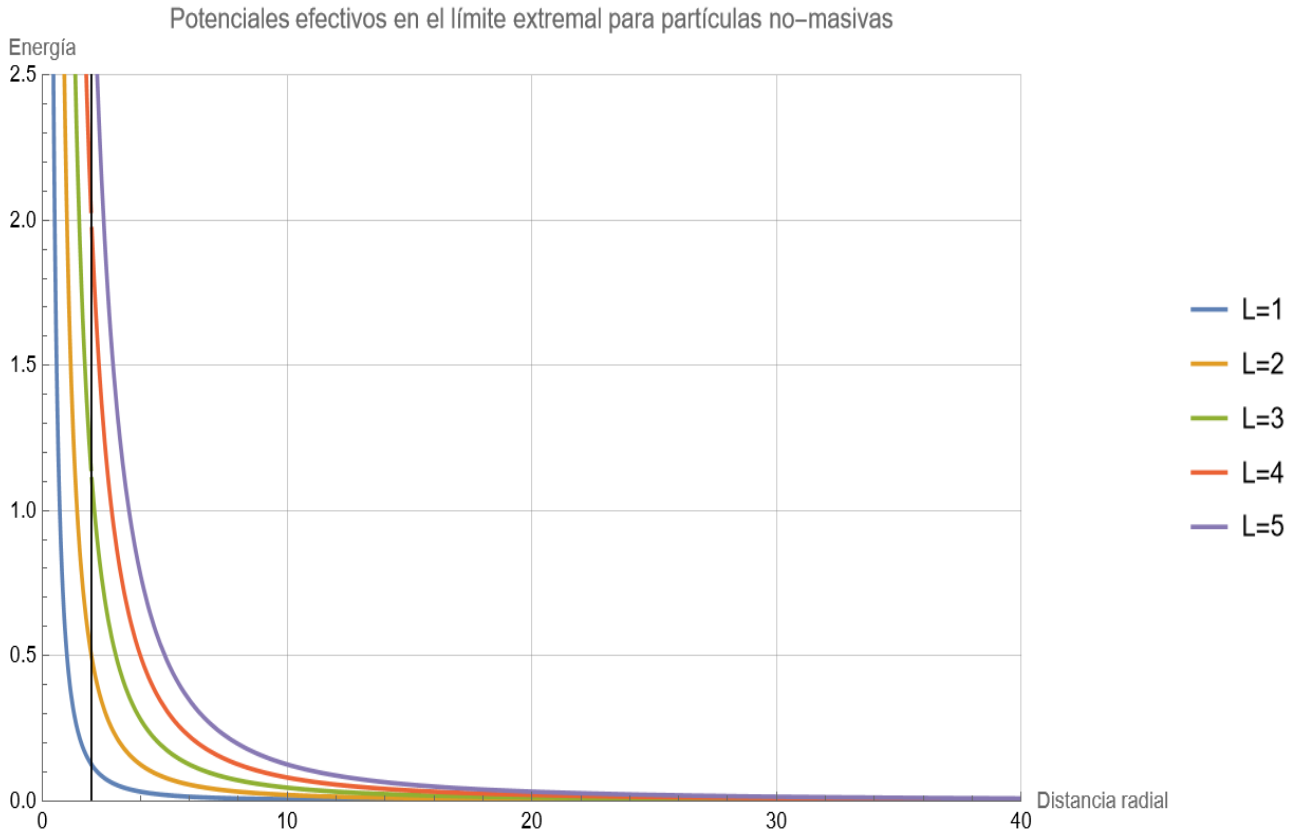

Figura 4.4.: Potenciales efectivos para partículas no-masivas con cinco valores distintos de momento angular, en el régimen del límite extremal. Las líneas paralelas al eje de la energía corresponde a $r = r_s$.

Condición de energía total	Tipo de órbita
$E = E_c$	Órbita circular estable
$E_c < E \leq 1$	Órbita acotada
$1 < E < E_s$	Órbita no acotada, la partícula no cae en la singularidad
$E \geq E_s$	Órbita no acotada, la partícula cae en la singularidad o se desvía

Tabla 4.7.: Descripción de órbitas con base a condiciones de energía para $L \geq 2$. Caso masivo.

Condición de energía total	Tipo de órbita
$0 \leq E < E_s$	Órbita no acotada, la partícula no cae en la singularidad
$E \geq E_s$	Órbita no acotada, la partícula cae en la singularidad o se desvía

Tabla 4.8.: Descripción de órbitas con base a condiciones de energía para todo L. Caso no-masivo.

Capítulo 5

Curvas geodésicas en el límite extremal

El objetivo concreto de este capítulo, es calcular las curvas geodésicas exactas para el límite extremal en dos casos específicos, partículas masivas y partículas no-masivas, mientras que la discusión de las curvas obtenidas se desarrollorá en el capítulo posterior a este. Así, se hará uso de las simetrías del problema para reducir el orden de las ecuaciones que caracterizan al movimiento geodésico; es decir, de las ecuaciones geodésicas, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para realizar esto último, hay varios métodos, el usado en este proyecto es uno de ellos; sin embargo, procedimientos análogos pueden ser encontrados en [21],[22],[23],[24] y [25].

Como aclaración, es importante mencionar que el cálculo de integraciones numéricas a lo largo de este capítulo fue realizado a través del software de aplicación *Mathematica*. Este mismo software fue utilizado para graficar el trayecto de las curvas geodésicas.

5.1 Análisis general

La idea principal del análisis consiste en aprovechar las simetrías como se hizo en el capítulo anterior, partiendo de los vectores de Killing y llegando a ecuaciones diferenciales de primer orden a través de las cantidades conservadas (energía y momento) y la conservación de la cantidad ϵ en las curvas geodésicas. En particular, se usará la métrica descrita en (3.22), que es propia del *límite extremal*; más aún, sus coordenadas son de *área*, por lo que la comparación con resultados de métricas conocidas, como la **SSc**, será más directa.

Como con las *coordenadas de área*, la simetría esférica y la estaticidad se preservan, entonces el momento y la energía se siguen conservando; ergo, usando (3.22), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6), es claro que:

$$E = \frac{\sqrt{M^2+R^2}-M}{\sqrt{M^2+R^2}+M}\frac{dt}{d\lambda}, \tag{5.1}$$

y

$$L = R^2\frac{d\varphi}{d\lambda}. \tag{5.2}$$

Luego, expandiendo los términos de (4.9) utilizando la métrica dada por (3.22), y volviendo a establecer que $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta que

$$\epsilon = \frac{\sqrt{M^2+R^2}-M}{\sqrt{M^2+R^2}+M}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R^2}{M^2+R^2}\frac{\sqrt{M^2+R^2}+M}{\sqrt{M^2+R^2}-M}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \tag{5.3}$$

Después, si se sustituye (5.1) y (5.2) en (5.3), resulta una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en términos de R parametrizada por λ, así como lo indica (5.4)

$$E^2 = \frac{R^2}{M^2+R^2}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\sqrt{M^2+R^2}-M}{\sqrt{M^2+R^2}+M}\left(\frac{L^2}{R^2}+\epsilon\right). \tag{5.4}$$

Véase que (5.2) y (5.4) forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, donde una de las ecuaciones, (5.4), está desacoplada. Así, es posible resolver el sistema primero obteniendo una solución para R (en términos de λ) de tal forma que con esta solución se pueda resolver (5.2). Ahora bien, no resulta trivial resolver de forma analítica este sistema, así que es necesario proceder por integración numérica; de hecho, eso es lo que se hará para cada sección consecuente, de este capítulo.

El motivo de resolver el sistema de ecuaciones antes planteado, se basa en encontrar paramétricamente tanto a R como φ, con lo cual se podrá graficar el trayecto de las curvas geodésicas.

Hay que aclarar que el trayecto de las curvas geodésicas es independiente de las coordenadas elegidas ya que la *ecuación geodésica*, es una ecuación tensorial; por lo tanto, es indistinto si se usan las *coordenadas de área*, como es el caso.

5.1.1 Partículas masivas

Para partículas masivas, como ya se ha comentado anteriormente, $\epsilon = 1$, entonces (5.4) se simplifica en

$$E^2 = \frac{R^2}{M^2+R^2}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\sqrt{M^2+R^2}-M}{\sqrt{M^2+R^2}+M}\left(\frac{L^2}{R^2}+1\right). \tag{5.5}$$

Más aún, para el límite extremal, la transformación de coordenadas (3.12) se simplifica en

$$R^2 = r(r - 2M), \tag{5.6}$$

usando la *condición extremal*. Por lo tanto, de (5.6) y (4.19), se obtiene que para partículas masivas

$$R_c^2 = \frac{L^2}{M}\left(\frac{L^2}{M} - 2M\right), \tag{5.7}$$

donde ahora se caracterizaron las órbitas acotadas descritas por r_c pero en la coordenada R. De esta última relación, se sigue que para tener bien definido el valor de R_c, debe cumplirse que

$$L^2 > 2M^2. \tag{5.8}$$

En las Figuras 5.1, 5.2, 5.3,5.4 y 5.5, se muestran las trayectorias geodésicas descritas por (5.2) y (5.5) para varios valores de L y E.

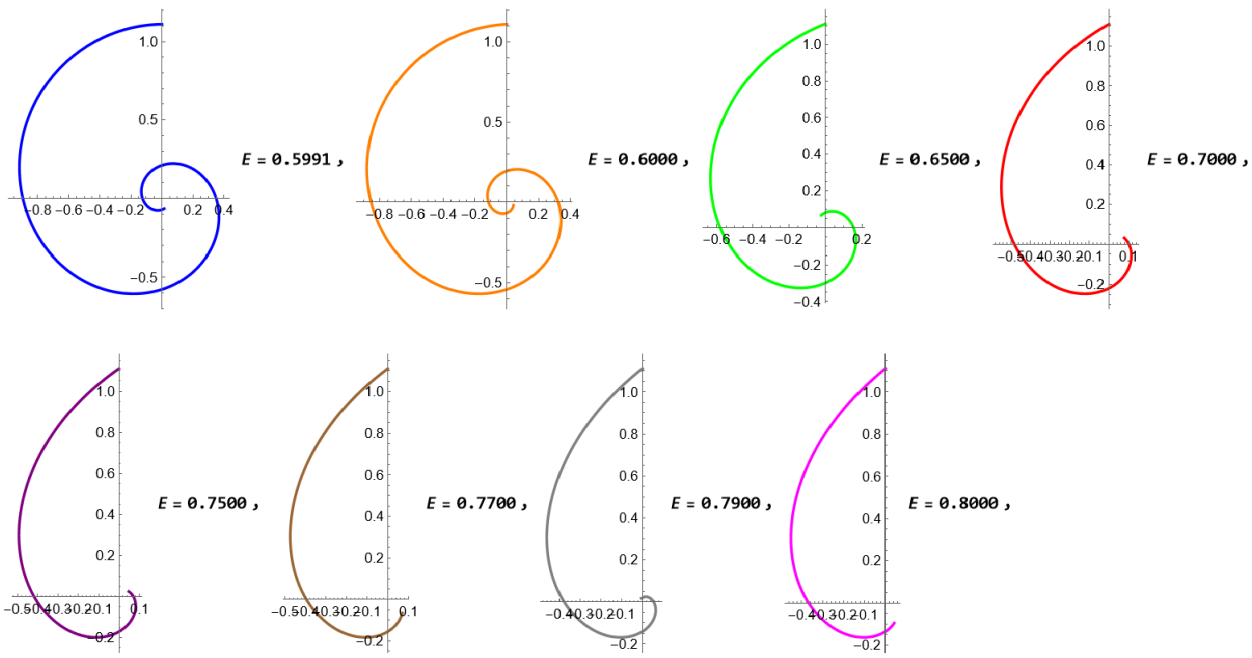

Figura 5.1.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 1$ y valores iniciales: $R_0 = 1.11$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso masivo.

Obsérvese que para el caso de partículas masivas, se hizo el análisis partiendo de R_c para tratar de describir la órbitas circulares. Se logra visualizar órbitas circulares para $L = 2$, mientras que para los otros valores de momento angular no, debido a que fue necesaria mayor precisión de cómputo.

Para $L = 3, L = 4$ y $L = 5$, de las curvas geodésicas de partículas masivas, se observa que conforme la energía se acerca más a E_c, las curvas tienden a ser circulares. Ahora bien, en

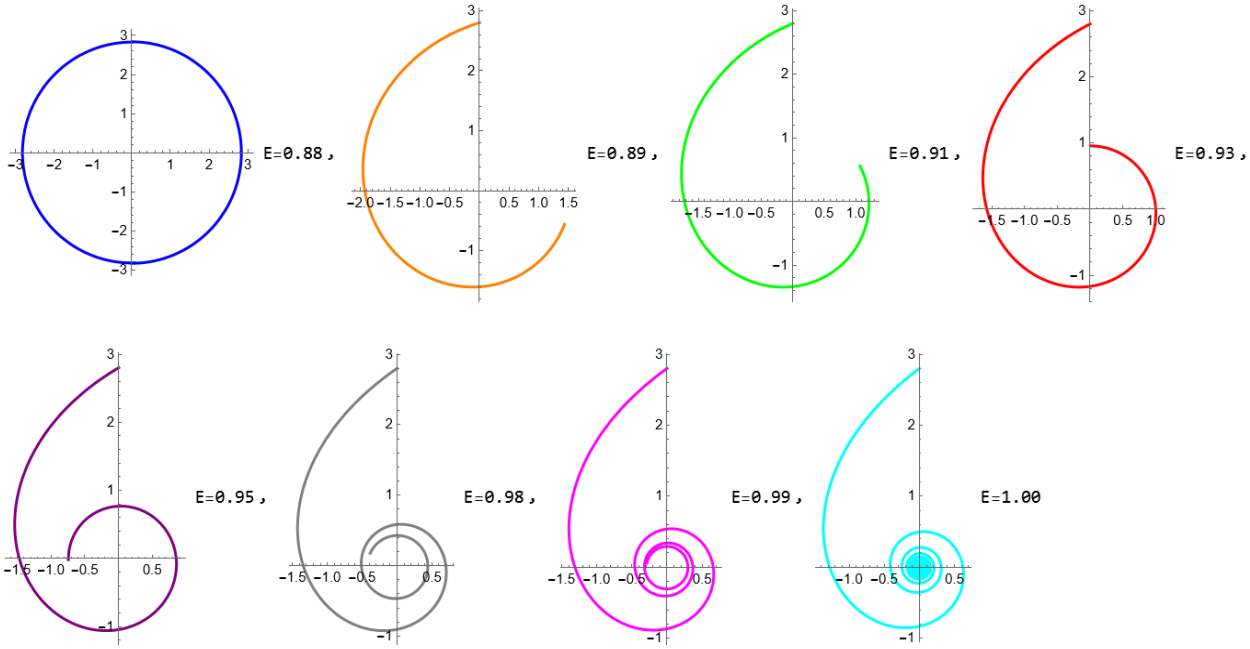

Figura 5.2.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 2$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso masivo.

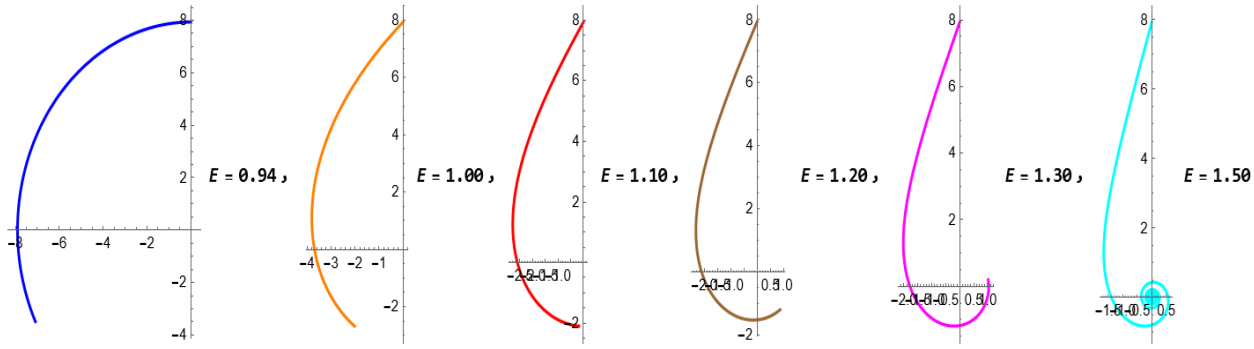

Figura 5.3.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 3$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso masivo.

principio, pareciera que las curvas no están completas para energías mayores a E_s; es decir, que les faltan tramos de trayectoria, y es que esto es un defecto propio de la discontinuidad de los potenciales debido a la existencia de la singularidad exterior, cosa que ya se había mencionado anteriormente. Es decir, en las vecindades de $r = r_s$ (que en *coordenadas de área* es $R = 0$), las curvas geodésicas ya no siguen la forma de los potenciales efectivos.

Cabe decir que para $L = 1$, resultó imposible definir R_c debido a la Tabla 4.3, pero el análisis se empezó partiendo de algún radio mayor a $R = 0$.

Los resultados obtenidos para las geodésicas son consistentes con lo esperado para los potenciales; en particular, con los resultados de las Tablas 4.7 y 4.8. Esto es que, para un momento angular fijo, conforme aumenta la energía de la partícula prueba, la trayectoria que

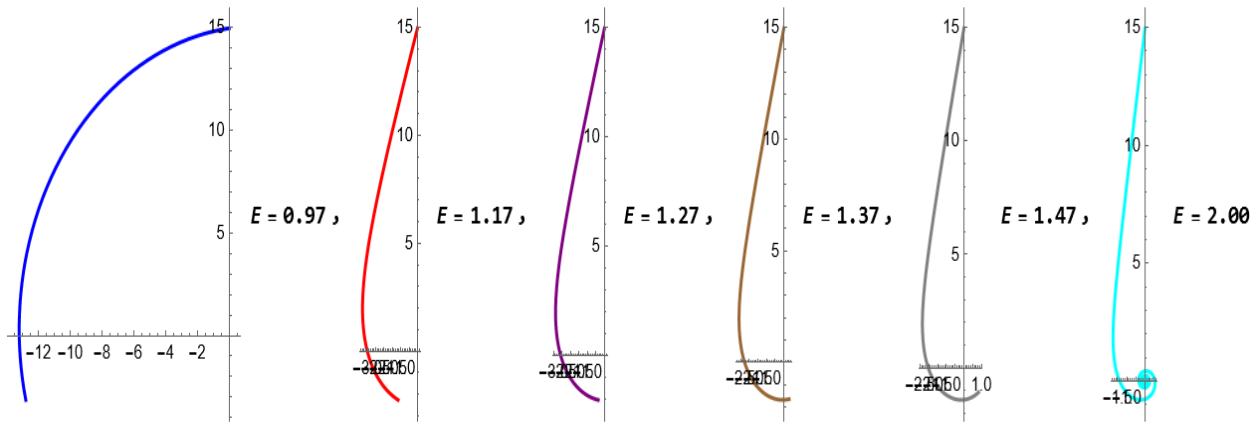

Figura 5.4.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 4$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso masivo.

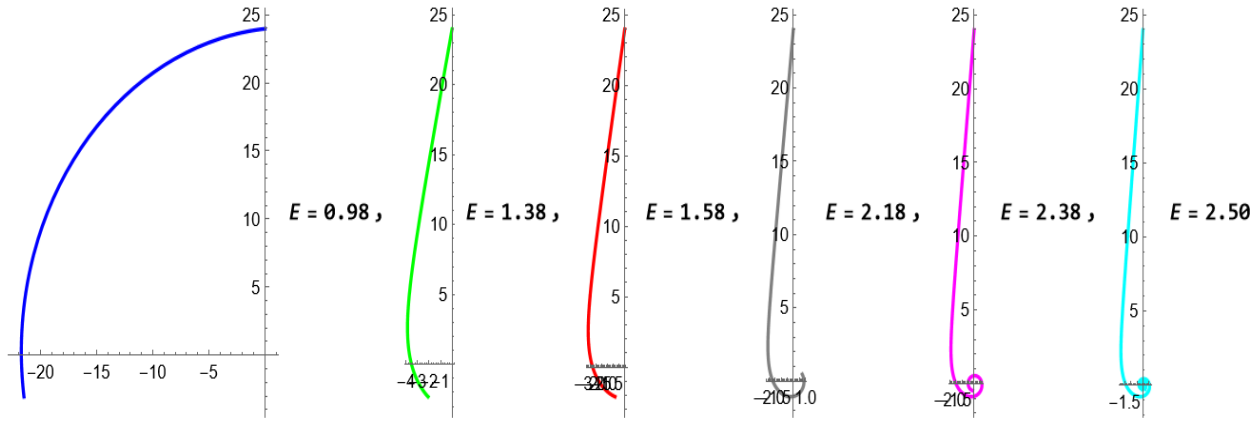

Figura 5.5.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 5$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso masivo.

describa esta se acercará cada vez más a la singualaridad exterior; mientras que, para una energía fija, conforme aumenta el momento angular, la trayectoria de la curva geodésica se alejará cada vez más de la singularidad.

5.1.2 Partículas no-masivas

En el caso de las particulas no-masivas, se tiene que $\epsilon = 0$, por lo que (5.4) se simplifica en

$$E^2 = \frac{R^2}{M^2 + R^2}\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\sqrt{M^2 + R^2} - M}{\sqrt{M^2 + R^2} + M}\frac{L^2}{R^2}. \tag{5.9}$$

Véase a su vez que como en el caso de partículas no-masivas, $r_c \to \infty$, entonces debido a (5.6), $R_c \to \infty$. Esto último era de esperarse, ya que bajo cambios de coordenadas, las trayectorias gedésicas no deben cambiar, como se comentó en párrafos anteriores.

En las Figuras 5.6,5.7, 5.8, 5.9 y 5.10, se visualizan las trayectorias geodésicas determinadas por (5.2) y (5.9) para varios valores de L y E.

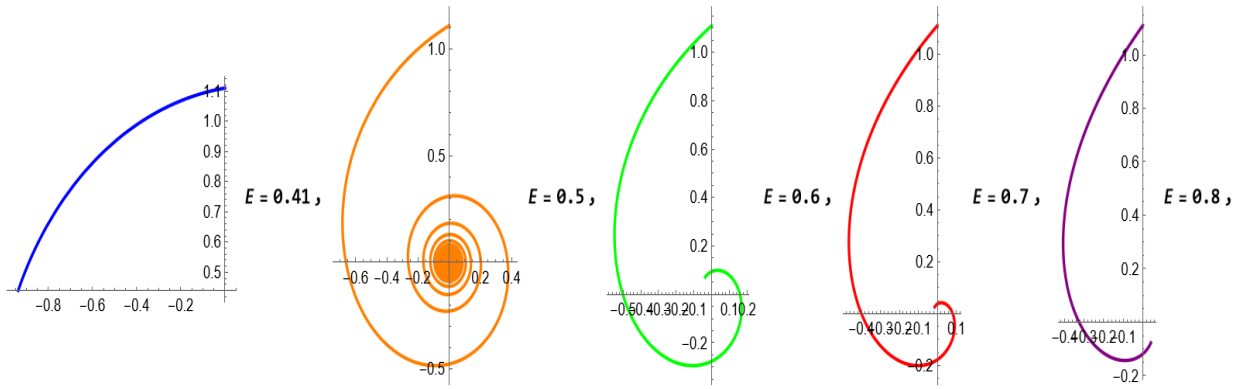

Figura 5.6.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 1$ y valores iniciales: $R_0 = 1.11$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso no-masivo.

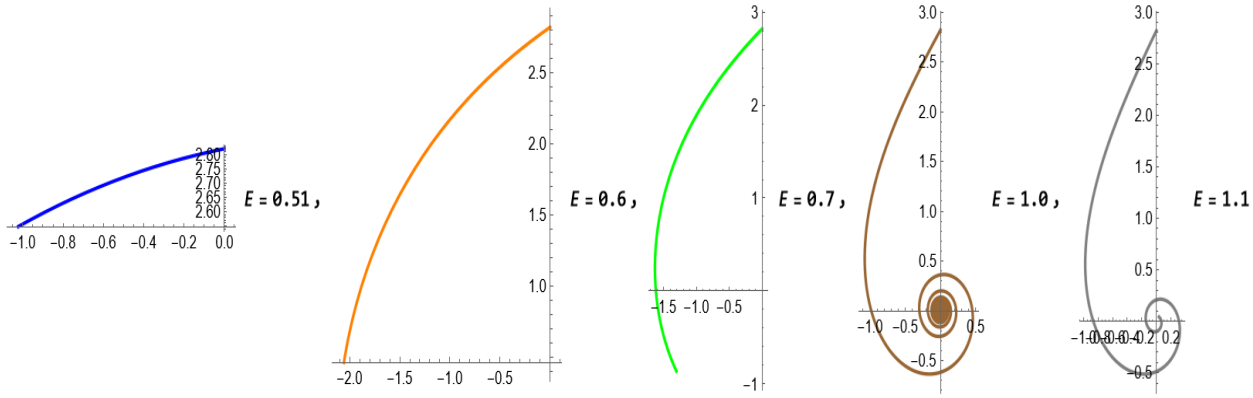

Figura 5.7.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 2$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso no-masivo.

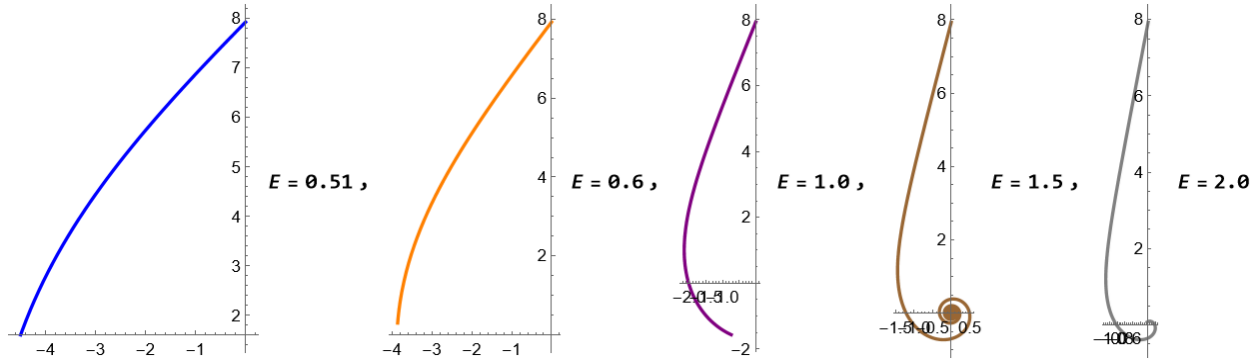

Figura 5.8.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 3$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso no-masivo.

Las partículas no-masivas presentan las mismas dificultades para trazarlas que las trayectorias para partículas masivas, por las mismas razones que en la sección anterior. La diferencia

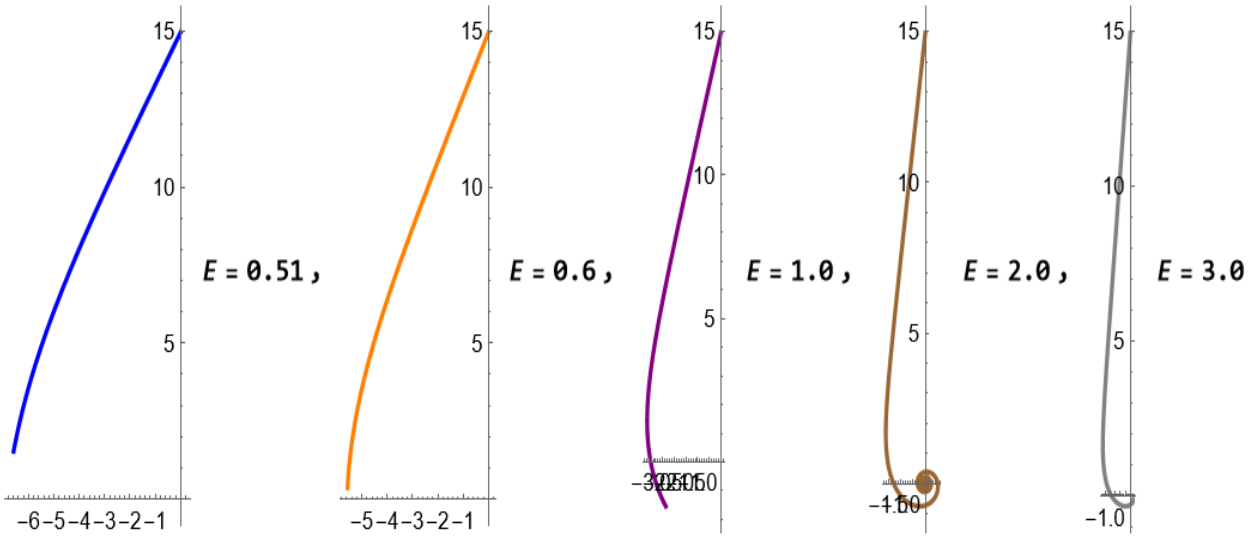

Figura 5.9.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 4$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso no-masivo.

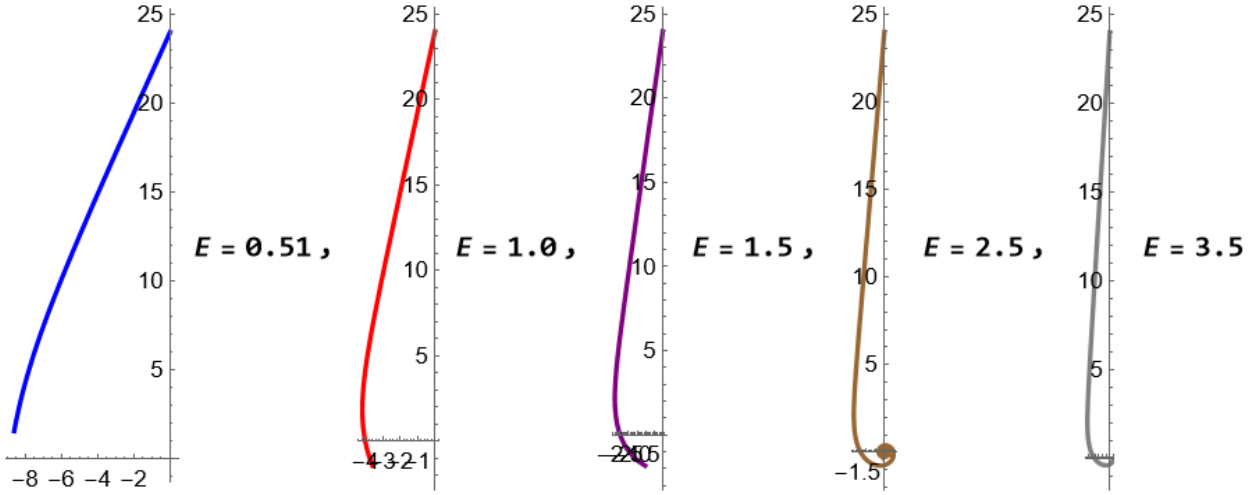

Figura 5.10.: Curvas geodésicas para diversos valores de energía, con $L = 5$ y valores iniciales: $R_0 = R_c$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Caso no-masivo.

en este caso, sería también la forma de los potenciales. Se graficaron las curvas partiendo de las mismas coordenadas radiales que en el caso masivo. Se observa que efectivamente se requiere de menos energía, a comparación del caso masivo, para acercarse a la singularidad; pero también puede notarse que cerca de las energías E_s mostradas en la Tabla 4.6, las curvas geodésicas develan un comportamiento que no es acorde a los potenciales, debido a la discontinuidad de los potenciales alrededor de la singularidad; en particular, cuando la energía es mayor que E_s, se observa que la partícula alcanza la singularidad, mientras que para energía menores, la partícula no llegaría a la singularidad.

Por otro lado, en la curvas geodésicas del caso no-masivo, se confirma la no existencia de órbitas circulares; y que para un valor de momento angular fijo, conforme aumenta la energía,

más se acerca la partícula prueba a la singularidad; mientras que, para un valor de energía fijo, conforme aumenta el momento angular, más es difícil para la partícula el aproximarse a la singularidad; esto, a excepción de las regiones vecinas a $R = 0$.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

Este último capítulo se dividirá en dos secciones principales; donde en una de ellas se tratarán los resultados obtenidos para el *régimen de agujero negro*, abordando algunas características pero no ahondando con profundidad en ellas, ya que el objetivo de este trabajo es desarrollar con mayor detalle los resultados correspondientes a la otra principal sección de este capítulo, el estudio del *límite extremal*.

6.1 Régimen de agujero negro

Respecto al *régimen de agujero negro*, nótese de la Figuras 4.1 y 4.2, que los potenciales están definidos correctamente para $r > r_s$; es decir, para coordenadas radiales mayores al radio asociado al horizonte de eventos, lo cual es consistente porque en principio, el movimiento geodésico fuera del horizonte de eventos está descrito por la métrica (3.7). Más aún, véase de (4.15) que la singularidad exterior está cubierta por el horizonte de eventos; esto es algo que ya se había comentado en capítulos anteriores, sin embargo, también describe un hecho esperado, debido a que el horizonte de eventos debería cubrir (contener) a las singularidades en el caso del *régimen de agujero negro*.

De la forma de los potenciales efectivos se rescata que para partículas masivas hay *órbitas acotadas*, en particular, hay *órbitas circulares inestables* y *órbitas circulares estables* para algunos valores de momento angular ($L = 4$ y $L = 5$); en el caso de *órbitas circulares inestables*, esto es, que para condiciones iniciales de energía y r_c, las partículas están condenadas a travesar el horizonte de eventos. En lo que respecta al comportamiento geodésico con base

al momento angular, se observa que conforme aumenta el momento angular, también se requiere de más energía para que las partículas se muevan en las *órbitas circulares inestables*, tanto para partículas masivas como no-masivas; de hecho, conforme el momento angular de las partículas aumenta, el potencial efectivo parece describir una barrera de potencial para imposibilitar el paso de las partículas al horizonte de eventos; no obstante, si la partícula prueba tuviera las condiciones iniciales (de posición y energía) correspondientes al máximo del potencial efectivo, debido a la inestabilidad, la partícula podría caer inevitablemente en el horizonte de eventos, o simplemente salir expulsada hacia el infinito.

Para el caso de partículas no-masivas, las únicas *órbitas acotadas* son las *órbitas circulares inestables*, que existen para todos los valores de momento angular graficados.

Véase que la descripción cualitativa anterior está sujeta a los parámetros intrínsecos al agujero negro (M, ϕ_0 y Q), pero estos parámetros siempre tienen que seguir la condición (3.20) para el régimen de agujero negro tratado, por lo que los comportamientos serán similares, algunos más dominantes que otros. Sin embargo, puede haber una combinación de parámetros en la que haya mínimos para el potencial, generando que existan *órbitas circulares estables*; es más, sí existen esas combinaciónes, véase [6]. Es por ello que la intención de este proyecto recae más en el estudio del *límite extremal*, cuyo análisis en potenciales efectivos no se ha estudiado con tanto detalle.

Como comentarios finales a esta sección, hay que mencionar las diferencias entre (4.14) y (4.17) a nivel asintótico. Y es que, cuando $r \to \infty$, (4.14) $\to \frac{1}{2}$; mientras que (4.17) $\to 0$. Este comportamiento se debe a que para partículas prueba, se normalizó la masa, y al momento de construir el potencial efectivo vía la aproximación clásica para la energía, permanece un término constante ($\frac{1}{2}$) que se refleja gráficamente en la Figura 4.1. Por otro lado, en el caso de partículas no-masivas, el término constante se anula, haciendo que el potencial sea asintóticamente cero.

El hecho de que el potencial tienda a ser una constante distinta de cero (asintóticamente) podría llevar a pensar que existen órbitas circulares en esas regiones, ya que para esos casos el potencial no varía respecto a r, pero la interpretación rechaza estos casos; y es que, como se ha mencionado en capítulos anteriores, físicamente la singularidad ya no tiene efecto sobre las partículas cuando estas se encuentran virtualmente en el infinito.

6.2 Límite extremal

Para el límite extremal hay múltiples resultados a analizar, por lo que esta sección se dividirá en dos subsecciones. Una para analizar los potenciales efectivos, y otra para analizar las curvas geodésicas con base a las conclusiones determinadas por los potenciales efectivos.

6.2.1 Potenciales

Uno de los principales comentarios a analizar sobre el *límite extremal*, es la condición descrita por (4.20), de donde se concluye que la singularidad exterior está *desnuda* y está ubicada en r_s; esto en principio es correcto para el límite tratado; no obstante, la métrica (3.7) tiene dos singularidades de curvatura; y como ya se ha mencionado anteriormente, esta métrica está definida para regiones fuera del horizonte de eventos; en particular, para el *límite extremal*, eso correspondería a que la métrica esté definida para regiones afuera de la superficie definida por r_s; ergo, los potenciales efectivos mostrados en las Figuras 4.3 y 4.4 están sujetos a esta interpretación física para r_s.

El párrafo anterior indica que para $r < r_s$, los potenciales mostrados no son necesariamente los correctos, podría incluso haber alguna discontinuidad. De hecho, esto es lo que sucede en las Figuras 4.3 y 4.4, la discontinuidad está en r_s ya que ahí hay una singularidad de curvatura.

Otros resultado fundamental para el *límite extremal* es la existencia de *órbitas acotadas*; más aún, es la existencia de *órbitas circulares estables*. Esto último es propio del caso masivo, ya que del caso no-masivo, como se comentó en el cuarto capítulo de este trabajo, no existen físicamente órbitas circulares; es más, es claro que no existen *órbitas acotadas*. Del caso masivo, se encuentra que las órbitas circulares están descritas por (4.19) y que para que estas estén bien definidas (en la región mayor a r_s), debe cumplirse (5.8), que es una expresión independiente de coordenadas; por esto mismo, es claro que r_c para $L = 1$ no está correctamente definido para la Figura 4.3, por lo que hablar de la energía E_c correspondiente a $L = 1$ en la Tabla 4.3 es engañoso, ya que en ese caso $r_c < r_s$. Aún así, siempre sucede que $r_c > r_s$ (existen *órbitas circulares estables*) cuando $L > \sqrt{2}M$, debido a (5.8).

Ahora bien, con respecto a la energía, si se sustituye (4.19) en (4.21), resulta que conforme $L \to \infty$ entonces $E_{efc} \to \frac{1}{2}$. Es decir, la energía correspondiente a las *órbitas circulares estables* tiende a un valor en particular conforme aumenta el momento angular.

Para finalizar esta subsección es importante comentar que los potenciales asociados para la partícula masiva en el *límite extremal* tienen la misma forma funcional que los potenciales efectivos descritos por un *campo newtoniano* [2], por lo que en principio, parecería que las órbitas descritas serían cónicas (para el caso masivo); no obstante, en las curvas geodésicas no se visualiza esto, y como tal, es un comportamiento que será abordado en la siguiente subsección para concluir este proyecto.

6.2.2 Curvas geodésicas

Haciendo uso de las conclusiones de la subsección pasada, y de las curvas geodésicas obtenidas en el quinto capítulo del presente trabajo, es posible dar conclusiones aún más concretas sobre el movimiento geodésico en el *límite extremal*. La forma de abordar esto será

primero para el caso masivo, y luego para el caso no-masivo, pero antes hay que mencionar que la razón principal por la cual las curvas geodésicas no coinciden con las de un campo newtoniano es en gran parte por (4.8); y es que, al aplicar (3.21), se obtiene que:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r(r-2M)}, \tag{6.1}$$

velocidad angular que no coincide con la correspondiente a un campo newtoniano; de hecho, esta velocidad angular diverge conforme la partícula prueba se acerca a la singularidad exterior; ubicada en r_s.

Una forma de hacer que la velocidad angular sea similar a la generada por un campo newtoniano, es cambiar de coordenadas a las *coordenadas de área*, donde efectivamente, la velocidad angular ahora se comporta *newtonianamente*, como se muestra en (5.2); sin embargo, la energía ya no, como lo establece (5.1). Es más, la forma en la que está construida la métrica (3.22) no permite identificar los potenciales efectivos ya que $g_{RR} \neq (g_{tt})^{-1}$ [2].

En el caso de *coordenadas de área* también sucede que la velocidad angular diverge cuando la partícula se acerca al cero de la coordenada radial, donde hay que recordar que este cero corresponde a $r_W = r_s$ (a la singularidad exterior).

Para el caso de partículas masivas, se hizo el análisis partiendo de R_c para tratar de describir la órbitas circulares. Se logra visualizar órbitas circulares para $L = 2$, mientras que para los otros valores de momento angular no, debido a que fue necesaria mayor precisión de cómputo.

Lo que sí puede observarse en las figuras correspondientes a las curvas geodésicas de partículas masivas, es que conforme la energía se acerca más a E_c, las curvas tienden a ser circulares. Ahora bien, en principio, pareciera que las curvas no están completas; es decir, que les faltan tramos de trayectoria, y es que esto es un defecto propio de la discontinuidad de los potenciales debido a la existencia de la singularidad exterior, cosa que ya se había mencionado anteriormente. Es decir, en las vecindades de $r = r_s$ (que en *coordenadas de área* es $R = 0$), las curvas geodésicas ya no siguen la forma de los potenciales efectivos.

Cabe decir que para $L = 1$, como se ha mencionado, resultaba imposible definir R_c, pero el análisis se empezó partiendo de algún radio mayor a $R = 0$.

Los resultados obtenidos para las geodésicas son consistentes con los esperado para los potenciales, en las regiones donde las geodésicas están descritas para $R > 0$, que es donde los potenciales están bien definidos. Esto es para un momento angular fijo, conforme aumenta la energía de la partícula prueba, la trayectoria que describa esta se acercará cada vez más a la singualaridad exterior; mientras que, para una energía fija, conforme aumenta el momento angular, la trayectoria de la curva geodésica se alejará cada vez más de la singularidad.

Por ende, las partículas no-masivas presentan las mismas dificultades para trazarlas que las trayectorias para partículas masivas, por las mismas razones. La diferencia en este caso, sería también la forma de los potenciales. En este caso, se graficaron las curvas partiendo

de las mismas coordenadas radiales que en el caso masivo. Se observa que efectivamente se requiere de menos energía, a comparación del caso masivo, para acercarse a la singularidad; pero también puede notarse que cerca de las energías E_s mostradas en la Tabla 4.6, las curvas geodésicas develan un comportamiento que no es acorde a los potenciales, debido a la discontinuidad de los potenciales alrededor de la singularidad; en particular, cuando la energía es mayor que E_s, se observa que la partícula alcanza la singularidad, mientras que para energía menores, la partícula no llegaría a la singularidad.

Por otro lado, en la curvas geodésicas del caso no-masivo, se confirma la no existencia de órbitas circulares; y que para un valor de momento angular fijo, conforme aumenta la energía, más se acerca la partícula prueba a la singularidad; en tanto que, para un valor de energía fijo, conforme aumenta el momento angular, más es difícil para la partícula el aproximarse a la singularidad; esto, a excepción de las regiones vecinas a $R = 0$.

APÉNDICE A

Apéndice: GMGHS

A.1 Deducción de las ecuaciones de campo para un agujero negro GMGHS

Dada la acción S descrita para el agujero negro *GMGHS*, es decir, (3.6), se sabe que por el *principio de mínima acción* [9], ya comentado en el capítulo 3, para obtener las ecuaciones de campo debe igualarse la variación de la acción a cero.

Ahora bien, debido a que la acción depende de 3 campos (Gravitacional, dilatónico y de Maxwell) entonces la variación de S debe ser igual a cero respecto a cada uno de los campos para que la variación total sea cero; esto se debe a que cada término aporta a la acción [2].

Por lo anterior, si se hace la **variación respecto a** ϕ, el primer término a variar es $\delta(-\sqrt{-g}R)$, de tal forma que debe cumplirse

$$\delta(-\sqrt{-g}R) = 0, \tag{A.1}$$

ya que el término no depende de ϕ. Luego, desarrollando el segundo término de S respecto a ϕ se tiene que

$$\delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2) = 2\sqrt{-g}\delta((\nabla\phi)^2),$$

pero por definición

$$(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi.$$

$$\Rightarrow \delta((\nabla\phi)^2) = \delta(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) = g^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) = g^{\mu\nu}[\delta(\nabla_\mu\phi)\nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\phi\delta(\nabla_\nu\phi)].$$

$$\Rightarrow \delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2) = 2\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu\phi)\nabla_\nu\phi + \underbrace{g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\delta(\nabla_\nu\phi)}_{g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta(\nabla_\mu\phi)\ (g^{\mu\nu}\text{ es simétrico})}].$$

$$\therefore \delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2) = 4\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta(\nabla_\mu\phi). \tag{A.2}$$

Después, para el tercer término,

$$\delta(e^{-2}\phi\sqrt{-g}F^2) = \sqrt{-g}F^2\delta(e^{-2\phi})$$

$$\Rightarrow \delta(e^{-2}\phi\sqrt{-g}F^2) = -2\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^2\delta\phi. \tag{A.3}$$

De tal forma que, como $\delta S = 0$, entonces de (A.1), (A.2) y (A.3), se tiene que δS es

$$0 = \int_M d^4x\sqrt{-g}[4g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta(\nabla_\mu\phi) - 2e^{-2\phi}F^2\delta\phi];$$

sin embargo,

$$4\int_M d^4x\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta(\nabla_\mu\phi)] = \underbrace{4\int_M d^4x\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\nabla_\mu(\delta\phi)]}_{\nabla_\nu \to \frac{\partial}{\partial x^\nu}\text{ porque }\phi\text{ es escalar}}.$$

Y por *integración por partes*

$$4\int_M d^4x\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\nabla_\mu(\delta\phi)] = 4[\int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta\phi) - \int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi)\delta\phi],$$

pero, por **teorema de Stokes** [9],

$$4\int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi\delta\phi) = 4\int_{\partial M} d^3x\sqrt{-\gamma}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi(\delta\phi)n_\mu,$$

donde γ es el determinante de la métrica en la hipersuperficie definida por ∂M y n_μ es el vector unitatio normal a la hipersupeficie, como es indicado en el teorema antes mencionado. Sin embargo, en la frontera, se pide que los campos en cuestión tengan variación cero ($\delta\phi = 0$), para que las ecuaciones de campo estén bien definidas en la variedad M [9], por lo que, retomando la expresión para $\delta S = 0$, se tiene que

$$0 = \int_M d^4x\sqrt{-g}[-4\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi) - 2e^{-2\phi}F^2]\delta\phi,$$

y como la variación $\delta\phi$ fue arbitaria

$$\Rightarrow -4\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi) - 2e^{-2\phi}F^2 = 0,$$

también, como la métrica es compatible (2.14) ya que se considera un marco de **RG** para la métrica

$$\Rightarrow g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}e^{-2\phi}F^2 = 0,$$

donde el primer término es $\nabla^2\phi$ al aplicar la métrica.

$$\therefore \quad \overbrace{\nabla^2\phi + \frac{1}{2}e^{-2\phi}F^2 = 0.}^{\textbf{Primera ecuación de campo}} \tag{A.4}$$

Al hacer la **variación respecto a** A_μ, que es el *cuadri-potencial* para el campo de Maxwell [2], se tiene que

$$\delta(-\sqrt{-g}R) = 0 = \delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2, \tag{A.5}$$

porque ambos términos no dependen del potencial A_μ. Sin embargo, hay un término en la variación que no se anula. Véase que

$$\delta(\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^2) = \sqrt{-g}e^{-2\phi}\delta(F^2),$$

pero, es posible descomponer a F^2 a través de la métrica; es decir

$$F^2 = g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

$$\Rightarrow \delta(F^2) = g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}\delta(F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) = g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}[F_{\mu\nu}\delta F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\delta F_{\mu\nu}] = \underbrace{2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\delta F_{\mu\nu}.}_{g^{\mu\nu}\text{es simétrico y hay índices mudos}}$$

Más aún, por definición del campo de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{A.6}$$

$$\Rightarrow \delta F_{\mu\nu} = \delta(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}) = \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu} = \underbrace{\nabla_\mu(\delta A_\nu) - \nabla_\nu(\delta A_\mu).}_{\text{En } \mathbf{RG} \text{ (2.13) se anula [2]}}$$

$$\therefore \delta(F^2) = 2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}[\nabla_\mu(\delta A_\nu) - \nabla_\nu(\delta A_\mu)] \tag{A.7}$$

Por lo tanto, como $\delta S = 0$, entonces de (A.5) y (A.7) se obtiene que δS es

$$0 = 2\int_M d^4x\sqrt{-g}e^{-2\phi}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}[\nabla_\mu(\delta A_\nu) - \nabla_\nu(\delta A_\mu)].$$

No obstante, al aplicar la métrica

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} = F^{\mu\nu}.$$

$$\Rightarrow 0 = 2\int_M d^4x\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^{\mu\nu}[\nabla_\mu(\delta A_\nu) - \nabla_\nu(\delta A_\mu)] = \underbrace{4\int_M d^4x\sqrt{-g}e^{-2\phi}[F^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu)].}_{\text{Por antisimetría en el campo de Maxwell [15]}}$$

Posteriormente, integrando por partes

$$4\int_M d^4x\sqrt{-g}e^{-2\phi}[F^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu)] = 4[\int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\delta A_\nu) - \int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu})\delta A_\nu].$$

Y, una vez más, por teorema de Stokes,

$$4\int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\delta A_\nu) = 4\int_{\partial M} d^3x\sqrt{-\gamma}(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\delta A_\nu)n_\mu,$$

donde, como en la variación respecto a ϕ, γ es el determinante de la métrica en la hipersuperficie definida por ∂M y n_μ es el vector unitatio normal a la hipersupeficie. A su vez, por el mismo argumento antes mencionado, en la fontera, se pide que los campos en cuestión ya no varíen ($\delta A_\nu = 0$ en este caso). En consecuencia, volviendo a la expresión en la que la variación de S se anula, resulta que

$$0 = -4\int_M d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu})\delta A_\nu,$$

y como δA_ν era arbitraria

$$\Rightarrow \quad \overbrace{\nabla_\mu(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}) = 0.}^{\textbf{Segunda ecuación de campo}} \tag{A.8}$$

Finalmente, haciendo la **variación respecto a** $g^{\mu\nu}$, resulta que hay que entra en juego la variación de $\sqrt{-g}$. Así, es importante mencionar que de [2] se sabe que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{A.9}$$

de tal forma que el primero de los términos a variar de S se ve como

$$\delta(-\sqrt{-g}R) = -\delta(\sqrt{-g}R) = -[R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R].$$

De hecho, por (2.24), se tiene que

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{A.10}$$

Ergo, de (A.9) y (A.10), es claro que

$$\delta(-\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}[-g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + (\frac{R}{2}g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}]; \tag{A.11}$$

mientras que, el siguiente término a variar queda como

$$\delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2) = 2\delta[\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2] = 2\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) = \underbrace{2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}).}_{\phi \text{ es escalar y no depende de } g^{\mu\nu}}$$

Luego,

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} = \underbrace{\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + 1)\delta g^{\mu\nu}.}_{\text{Por (A.9)}}$$

Entonces, sustituyendo la última relación con la penúltima, resulta

$$\delta(2\sqrt{-g}(\nabla\phi)^2) = \sqrt{-g}[2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2]\delta g^{\mu\nu}. \tag{A.12}$$

Por otro lado, la última variación a hacer es

$$\delta(\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^2) = \underbrace{e^{-2\phi}\delta(\sqrt{-g}F^2)}_{F^2 \text{ depende de } g^{\mu\nu}} = e^{-2\phi}\delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) = \underbrace{e^{-2\phi}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}).}_{F_{\mu\nu} \text{ no depende de } g^{\mu\nu} \text{ por (A.6)}}$$

Y, desarollando la variación del producto

$$\Rightarrow \delta(\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^2) = e^{-2\phi}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}[g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}(g^{\alpha\mu}\delta g^{\nu\beta} + g^{\nu\beta}\delta g^{\alpha\mu})] = (...)$$

$$(...) = \underbrace{\sqrt{-g}e^{-2\phi}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}[-\frac{1}{2}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}\delta g^{\nu\beta} + g^{\nu\beta}\delta g^{\alpha\mu}]}_{\text{Por (A.9)}} = (...)$$

$$(...) = \sqrt{-g}e^{-2\phi}[-\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \underbrace{g^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}\delta g^{\nu\mu}}_{\beta \longleftrightarrow \mu} + \underbrace{F_{\nu\beta}F_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}\delta g^{\nu\mu}}_{\alpha \longleftrightarrow \nu}] = (...)$$

$$(...) = \underbrace{\sqrt{-g}e^{-2\phi}[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 + g^{\alpha\beta}(F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} + F_{\nu\beta}F_{\mu\alpha})]\delta g^{\mu\nu}}_{F^2 = g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} \text{ y } g^{\mu\nu} \text{ es simétrico}} = (...)$$

$$(...) = \sqrt{-g}e^{-2\phi}[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 + \underbrace{2g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}}_{F_{\mu\nu} \text{ es antisimétrico}}]$$

$$\therefore \delta(\sqrt{-g}e^{-2\phi}F^2) = \sqrt{-g}e^{-2\phi}[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 + 2F_{\mu\rho}F^{\rho}{}_{\nu}]\delta g^{\mu\nu}. \tag{A.13}$$

Como se busca que $\delta S = 0$, entonces de (A.11), (A.12) y (A.13), resulta que δS es

$$0 = \int_M d^4x\sqrt{-g}[\frac{R}{2}g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + e^{-2\phi}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 + 2F_{\mu\rho}F^{\rho}{}_{\nu})]\delta g^{\mu\nu}$$

$$+ \int_M d^4x\sqrt{-g}[-g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}],$$

pero la última integral puede verse como la cuadridivergencia de un campo vectorial [2], por lo que aplicando el teorema de Stokes de la misma forma que se aplicó a lo largo de toda esta sección, se anula la integral, valga la redundancia. Por ende, como $\delta g^{\mu\nu}$ era una variación arbitraria

$$\Rightarrow \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + e^{-2\phi}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 + 2F_{\mu\rho}F^{\rho}{}_{\nu}) = 0;$$

posteriormente, aplicando $g^{\mu\nu}$ a la expresión anterior; es decir, obteniendo la *traza* se produce que

$$2R - R + 2(\nabla\phi)^2 - 4(\nabla\phi)^2 - 2e^{-2\phi}F^2 + 2e^{-2\phi}\underbrace{g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho}{}_{\nu}}_{=F^2} = 0.$$

$$\Rightarrow R - 2(\nabla\phi)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{2} = (\nabla\phi)^2. \tag{A.14}$$

Por lo que, si se sustituye (A.14) en la expresión obtenida antes de calcular la traza, resulta la última ecuación de campo a calcular; es decir:

$$\overbrace{R_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + 2e^{-2\phi}F_{\mu\rho}F^{\rho}{}_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}e^{-2\phi}F^2}^{\textbf{Tercera ecuación de campo}}. \tag{A.15}$$

Como comentario adicional, nótese que se obtienen 3 ecuaciones de campo debido a la cantidad de campos involucrados.

Referencias

[1] F. Reddy. What are black holes? National Aeronautics and Space Administration (NASA), 2020.

[2] S. Carroll. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Cambridge University Press, 2019.

[3] G. Gibbons and K. Maeda. Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields. Nuclear Physics B, 298, 1988.

[4] D. Garfinkle, G. Horowitz, and A. Strominger. Charged black holes in string theory. Physical Review D, 43(10), 1991.

[5] C. Blaga and A. Blaga. Motion of test particles around a charged dilatonic black hole. Serbian Astronomical Journal, (158), 1998.

[6] C. Blaga. Timelike geodesics around a charged spherically symmetric dilaton black hole. Serbian Astronomical Journal, (190), 2015.

[7] Bardeen J.M. James m. bardeen papers. University of Washington Libraries, Special Collections, 1965-1995.

[8] C. Isham. Modern Differential Geometry for Physicists. World Scientific Publishing, 2003.

[9] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. Analysis, manifolds and physics. North-Holland, 2009.

[10] S. Ramos. Relatividad para futuros físicos. Las Prensas de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.

[11] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler. Gravitation. Princeton University Press, 1973.

[12] Hawking S. and G. Ellis. The Large-Scale Structure of Space-Time. Cambridge, 1973.

[13] C. Johnson. D-Branes. Cambridge University Press, 2003.

[14] D. Garfinkle, G. Horowitz, and A. Strominger. Erratum: Charged black holes in string theory. Physical Review D, 45(10), 1992.

[15] C.S. Lopez-Monsalvo, F. Nettel, and H. Quevedo. Conformally invariant thermodynamics of a maxwell-dilaton black hole. General Relativity and Gravitation, 2013.

[16] M. Mars and W. Simon. On uniqueness of static einstein-maxwell-dilaton black holes. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 6, 2002.

[17] J. Bardeen. Timelike and Null Geodesics in the Kerr Metric. Ecole d'Eté de Physique Théorique, 1972.

[18] T. Maki and K. Shiraishi. Motion of test particles around a charged dilatonic black hole. Classical and Quantum Gravity, 11, 1994.

[19] P. Mao, R. Li, L. Jia, and Ji. Ren. Acceleration of particles in einstein-maxwell-dilaton black holes. Chinese Physics C, 41(6), 2017.

[20] C. Yu, D. Chen, and C. Gao. Bound on lyapunov exponent in einstein-maxwell-dilaton-axion black holes. Chinese Physics C, 46(12), 2022.

[21] E. Contreras, Á. Rincón, G. Panotopoulos, and P. Bargueño. Geodesic analysis and black hole shadows on a general non-extremal rotating black hole in five-dimensional gauged supergravity. Annals of Physics, 432, 2021.

[22] A. Hamo and I. Sakalli. Exact solutions to the geodesic equations of linear dilaton black holes. Department of Physics, Eastern Mediterranean University.

[23] Kai . Flathmann and S. Grunau. Analytic solutions of the geodesic equation for einstein-maxwell-dilaton-axion black holes. Physical Review D, 92, 2015.

[24] B. Turimov, J. Rayimbaev, A. Abdujabbarov, B. Ahmedov, and Z. Stuchlík. Test particle motion around a black hole in einstein-maxwell-scalar theory. Physical Review D, 102, 2020.

[25] C. Blaga and A. Blaga. Phase-plane analysis of the timelike geodesics around a spherically symmetric static dilaton black hole. Cornell University, 2021.