



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA**

**ESTUDIO DE LOS MECANISMOS INERCIALES Y  
VISCOELÁSTICOS DE UN FLUIDO ELECTRO-  
REOLÓGICO CON POTENCIALES ZETA SIMÉTRICOS**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**I N G E N I E R O Q U Í M I C O**  
P R E S E N T A :  
**DIEGO BONO DURAN**

**DIRECTOR DE TESIS**

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

**ASESOR DE TESIS:**

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

**ASESOR DE TESIS:**

DR. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES



CIUDAD DE MÉXICO

DICIEMBRE 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR**

### **PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Bono Duran Diego con número de cuenta 419117579 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado fecha en el mes de diciembre de 2024 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	Dr. Fausto Calderas García
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	IQ. Aldo Fernando Varela Martínez
Suplente:	Dra. María Guadalupe Salinas Juárez
Suplente:	Dr. Luis Antonio Ramírez Torres

El título de la tesis que se presenta es: **“Estudio de los mecanismos inerciales y viscoelásticos de un fluido electro-reológico con potenciales zeta simétricos”**

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	Dr. Luis Antonio Torres Ramírez

## **Agradecimientos**

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático y Simulación computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería>>.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovar y Mejorar la Educación (PAPIME) de la UNAM <<PE106224>> <<Material didáctico para la asignatura de transferencia de masa usando <<WOLFRAM MATHEMATICA >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida en la conclusión de estudios y para la culminación de la tesis.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por todos los conocimientos otorgados para mi formación como Ingeniero Químico.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México donde pude desempeñarme como un alumno excepcional con el fin de adquirir todos los conocimientos fundamentales para mi formación como Ingeniero Químico.
- A mi asesor, Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, quien fue mi guía para el conocimiento y motivación para realizar este proyecto. Por ser una gran persona y un excelente profesor, así como un investigador admirable. Gracias por sus enseñanzas y apoyo incondicional.

## **D e d i c a t o r i a**

Dedico esta tesis a mis padres Socorro y Jesús por haber luchado estos 25 años para brindarme una educación de calidad. Por haberme enseñado excelentes valores y por darme todo ese inmenso amor de padres a lo largo de estos años. Gracias a ustedes por haber creído en mí desde el día uno en la universidad y tener fe en que podría terminar esta carrera y obtener mi título, gracias, sin ustedes no sería el hombre que soy hoy. Este logro es dedicado a nosotros tres.

A mis tíos María Luisa y Andrés por brindarme su apoyo incondicional desde niño y ser el segundo soporte de mi formación personal y académica.

A mis primos Erika y Eduardo por ser como mis hermanos y haber crecido juntos y experimentado demasiadas vivencias juntos, gracias por todos esos años. Hoy hay frutos de todo lo vivido juntos.

A mis primos Lilia y Samuel, por estar en una etapa turbulenta en mi vida que sin saber me ayudaron a salir adelante y poder terminar mi tesis a tiempo. Gracias por todos esos buenos consejos y todos esos momentos juntos.

A mis sobrinos Samuel y Janai por haberme demostrado que los objetivos se pueden alcanzar. Por enseñarme que la felicidad es una realidad, y sobre todo gracias, Samuel, por ser un ejemplo en mi vida.

A mis primos Fernando y Beatriz por enseñarme que las metas se pueden alcanzar con perseverancia y constancia. Gracias por haber estado en las etapas más importantes de mi formación académica y a toda la familia Domínguez Duran por haber estado siempre en mi vida y me impulsaron a ser una excelente persona desde niño.

A mi amiga y colega Diana por el apoyo brindado en todo este proceso que tuve para mi titulación. Gracias por tus palabras, tus consejos y por creer en mí. Fuiste ese pequeño empujón que necesitaba para culminar este proyecto en mi vida.

A mis mejores amigos José, Luis, Moisés y Alejandro por todos esos momentos de risas, alegrías, tristezas y experiencias que solo nos han enseñado que todo objetivo se puede lograr. Gracias por ser parte fundamental en mi vida.

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

**Figura 1.** Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación. El campo eléctrico producido externamente, como el que se observa en el sistema. Genera un movimiento de un fluido con un electrolito (un fluido que contiene iones disueltos). El exceso de cationes (capa móvil) establece un flujo neto de migración desde el polo positivo (ánodo) hacia el polo negativo (cátodo).

**Figura 2.** Representación esquemática del sistema físico (Condiciones de Frontera)..

**Figura 3.** Ilustra la distribución de cargas en el sistema para diferentes valores del número alfa, relacionado a los mecanismos electro - térmicos.

**Figura 4.** Ilustra la función del perfil de velocidades vs. frecuencia en función del número de Deborah, el cual es una medida de las propiedades viscoelásticas del material en el sistema.

**Figura 5.** Ilustra el perfil de velocidades vs coordenada axial  $x$  en función de la frecuencia de la fuerza externa.

**Figura 6.** Ilustra la función del perfil de velocidades vs coordenada axial para diferentes valores de la frecuencia.

**Figura 7.** Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada axial  $x$ , para diferentes valores del número adimensional  $\square$ . En esta simulación, se ha tomado el valor de la frecuencia  $\omega = 1$ .

**Figura 8.** Ilustra la función de transferencia de flujo vs. frecuencia para diferentes valores del número alfa, relacionado a los mecanismos electro - térmicos. En esta simulación los mecanismos inerciales y viscoelásticos del material están en equilibrio.

**Figura 9.** Ilustra la función de transferencia de flujo vs. frecuencia en función del número de Deborah.

## NOMENCLATURA

### Variables dimensionales

$G_0$	Módulo elástico de corte [Pa]
$V_z$	Componente del vector velocidad [m/s]
$Q$	Flujo volumétrico [m <sup>3</sup> /s]
$E_z$	Intensidad del campo eléctrico [N/C]
$x$	Coordenada espacial [m]
$L$	Longitud [m]
$W$	Anchura [m]
$H$	Espesor [m]
$t$	Tiempo [s]

### Variables adimensionales

$x^*$	Coordenada espacial adimensional [1]
$\alpha^*$	Parámetro alfa adimensional [1]
$\beta^*$	Parámetro beta adimensional [1]
$\varphi$	Fluidez adimensional [1]
$\omega^*$	Frecuencia adimensional [1]
$O_\Phi$	Función fluidez compleja adimensional [1]
$V_z^*$	Componente del vector velocidad adimensional [1]
$Q^*$	Flujo volumétrico adimensional [1]

### Vectores y tensores

$\sigma$	Tensor de esfuerzos viscosos [Pa]
$V$	Vector de velocidad [m/s]
$g$	Aceleración de la gravedad [m/s <sup>2</sup> ]
$\nabla V^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
$\nabla V$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla^2 V$	Laplaciano vectorial de velocidad [1/s]
$\nabla \cdot E$	Divergencia del campo eléctrico [C/F]
$D$	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$T$	Tensor de esfuerzos totales [1/Pa]
$f_B$	Fuerzas de bulto en el sistema [Pa]
$p$	Escalar asociado a la presión [Pa]

### Operadores Matemáticos

$\nabla$	Operador nabla [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
$\nabla^2$	Operador laplaciano [1/m]
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material [1/m]
$\frac{\nabla}{\sigma}$	Derivada codeformacional [1/m]
$\frac{\partial}{\partial \dots}$	Derivada parcial [1/m]
$\frac{d}{d \dots}$	Derivada ordinaria [1/m]

### Letras griegas

$\lambda_0$	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
$\gamma_E$	Deformación elástica [m]
$\eta_L$	Viscosidad de Fase L [Pa·s]
$\Phi_e$	Potencial eléctrico externo [V]
$\Psi$	Potencial eléctrico inducido [V]

$\rho_e$	Densidad de carga [C/m]
$\epsilon_0$	Permitividad del fluido en el vacío [F/m]
$\rho$	Densidad del fluido [kg/m <sup>3</sup> ]
$O_\eta$	Función fluidez [1]
$O_\Phi$	Función fluidez compleja [1]
$\omega$	Frecuencia [Hz]

## CONTENIDO

RESUMEN.....	1
<b>CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>3</b>
1.1 Introducción .....	4
1.2 Antecedentes .....	5
1.2.1 Flujo electrosmótico .....	5
1.2.2 Campo eléctrico .....	5
1.2.3 Bombeo electrosmótico .....	6
1.2.4 Análisis teórico y técnicas matemáticas .....	7
1.3 Hipótesis .....	8
1.4 Objetivos.....	8
1.4.1 Objetivo general.....	8
1.4.2 Objetivos particulares .....	8
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>9</b>
2.1 Modelos viscoelásticos lineales .....	10
2.1.1 Modelo de Maxwell .....	10
2.2 Ecuaciones básicas para el modelado matemático .....	10
2.2.1 Ecuación de Continuidad y Transporte .....	10
2.3 Ecuación Constitutiva Reológica.....	11
<b>CAPÍTULO III: ECUACIONES TEÓRICAS .....</b>	<b>13</b>
3.1 Ecuaciones de conservación de transporte y reológica .....	14
3.2 Fluido newtoniano .....	14
3.3 Fluido no newtoniano.....	15
<b>CAPÍTULO IV: MODELADO MATEMÁTICO .....</b>	<b>16</b>
4.1 Análisis del sistema físico .....	17
4.2 Condiciones sujetas al fluido viscoelástico .....	17
4.3 Razonamiento matemático.....	17
4.3.1 Función potencial eléctrico inducido .....	22
4.3.2 Distribución de cargas.....	22
4.3.3 Ecuación de ecuación de movimiento de un fluido electro osmótico en un medio viscoelástico .....	23
4.3.4 Ecuación diferencial parcial .....	25

4.3.5 Ecuación diferencial parcial en el espacio de Fourier .....	26
4.3.6 Campo de velocidades de un líquido viscoelástico lineal .....	29
4.3.7 Flujo volumétrico puro de un líquido viscoelástico lineal .....	29
<b>4.4 ADIMENSIONAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO ELECTROOSMÓTICO.....</b>	<b>31</b>
4.4.1 Ecuación adimensional para la Distribución de Cargas.....	32
4.4.2 Ecuación adimensional para el Perfil de Velocidades del Fluido Viscoelástico Lineal ....	33
4.4.3 Ecuación adimensional para el Flujo Volumétrico del Fluido Viscoelástico Lineal .....	35
<b>CAPÍTULO V: SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>36</b>
5.1 Distribución de cargas: Efecto del número adimensional “Alfa” .....	37
5.2 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto del número adimensional “Deborah” .....	38
5.3 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto de la Frecuencia .....	39
5.4 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto de la Frecuencia con perturbaciones en el sistema .....	40
5.5 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto del número adimensional “Alfa” .....	41
5.6 Función de transferencia del flujo volumétrico en función de la Frecuencia y del número adimensional “Alfa” .....	43
5.7 Función de transferencia del flujo volumétrico en función de la Frecuencia y del número adimensional “Deborah” .....	45
5.8 Resumen del análisis de los resultados obtenidos .....	46
<b>CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES .....</b>	<b>47</b>
6.1 Aportación al conocimiento .....	48
6.1.1 Conclusiones .....	48
6.2 Trabajo futuro .....	51
Glosario .....	52
Referencias .....	54

## RESUMEN

En este trabajo, se estudia analíticamente el flujo electroosmótico de un fluido viscoelástico en una rendija metálica, mediante la aplicación de un campo eléctrico externo, el cual induce un flujo volumétrico electroosmótico. Para caracterizar la reología y el flujo se emplea el modelo viscoelástico no lineal de Maxwell convectivo superior. Suponiendo proceso isotérmico, flujo incompresible, estado no estacionario, mecanismos gravitacionales despreciables e invariancia axial, se obtiene expresiones analíticas para el perfil de velocidades y el flujo volumétrico. Los resultados obtenidos muestran que la dinámica lineal del sistema se puede modelar mediante funciones de transferencia complejas dinámicas y estáticas, las cuales describen la interacción entre la variable de entrada (campo eléctrico) y las variables de salida (flujo volumétrico y esfuerzo cortante en la pared). Es claro, que al utilizar variables adimensionales se obtienen grupos que describen la física del sistema (Deborah). El flujo electroosmótico puro depende de las propiedades eléctricas térmicas viscoelásticas del fluido electrorreológico y pueden ser ajustadas mediante las propiedades materiales del sistema. Los resultados teóricos computacionales fueron obtenidos mediante el programa Wolfram Mathematica (licencia UNAM). Los mecanismos viscoelásticos permiten obtener las resonancias correspondientes y su magnitud depende de los mecanismos fundamentales de este problema. La frecuencia juega un papel fundamental en las perturbaciones del perfil de velocidades y finalmente, el parámetro alfa contribuye a la respuesta dinámica lineal debido a la competencia entre las propias eléctricas (orientan) y las propiedades térmicas (dispersan). El resultado fundamental encontrado en este trabajo a nivel de investigación a nivel licenciatura es que al orientar los elementos materiales de un fluido electrorreológico podemos obtener una respuesta dinámica mayor. Este trabajo es fundamental en las aplicaciones de microdispositivos en sangre con patologías como la hipercolesterolemia, hiperglucemia, cirrosis hepática y cáncer.

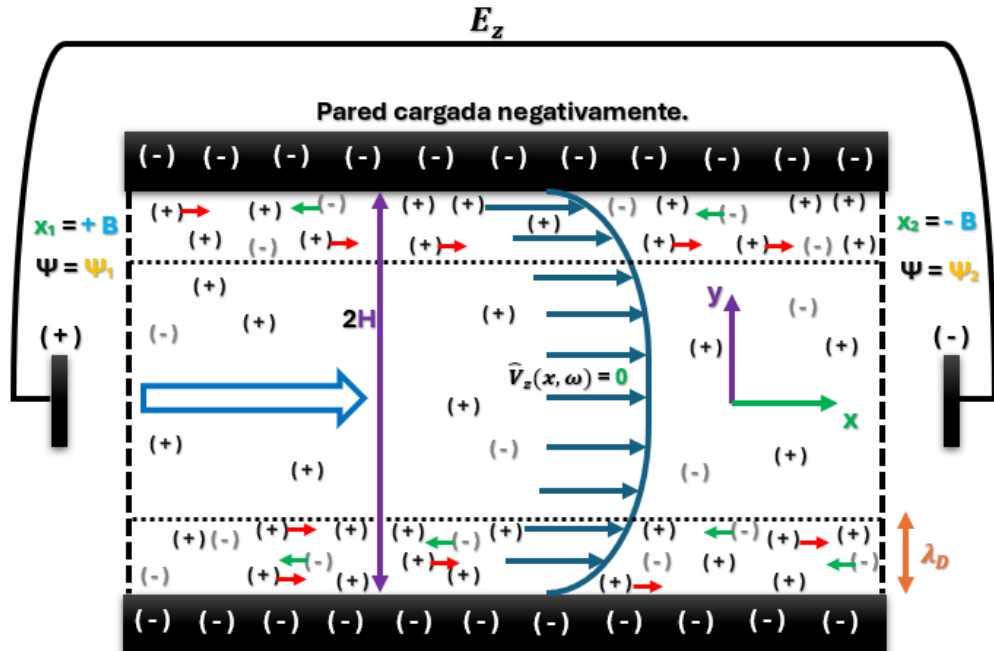


Figura 2. Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación. El campo eléctrico producido externamente, como el que se observa en el sistema. Genera un movimiento de un fluido con un electrolito (un fluido que contiene iones disueltos). El exceso de cationes (capa móvil) establece un flujo neto de migración desde el polo positivo (ánodo) hacia el polo negativo (cátodo).

*Palabras clave:* Ecuación de continuidad, Fluido newtoniano, Fluido no-newtoniano, Flujo electroosmótico, Distribución de cargas, Función de transferencia compleja, Modelo de Maxwell, Transformada de Fourier.

# **CAPÍTULO I: ESTADO DEL ARTE**

## 1.1 Introducción

Los fluidos complejos son sistemas que presentan las siete propiedades básicas de la reología como son: (i) Adelgazamiento al corte, (ii) Engrosamiento al corte, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexía, (v) Primera diferencia de esfuerzos normales (vi) Segunda diferencia de esfuerzos normales y (vii) Flujo bandeado (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). Los cristales líquidos son sistemas que presentan características de fluido complejos y estructurados y que presentan alineamiento y orientación por efecto del corte (**Khadem y Rey 2019a, 2019b, 2021**). Uno de los sistemas que puede ser tratado mediante las teorías de los cristales líquidos, son las membranas biológicas (**Abou-Dakka et al. 2012**).

Las células ciliadas (CCE), se encuentran en el oído interno y son las causantes de amplificar la información que proviene del sonido que pasa por el sistema auditivo externo e interno respectivamente (**Ramírez-Torres et al. 2024**). En particular, la flexo-electricidad aplicada a las membranas biológicas, utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno para amplificar el sonido que viaja del oído externo al medio por medio del complejo sistema auditivo (**Wang et al. 2022, 2023; Herrera-Valencia y Rey 2023**). Por otra parte, la flexo-electricidad en las membranas timpánicas, es un efecto del acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición (**Herrera-Valencia y Rey 2014**). En este proyecto-tesis se pretende incorporar los siguientes puntos importantes:

- A) Modelo electro-reológico que describe el sistema de tres fases termodinámico consistente en dos líquidos viscoelásticos y una membrana sólida flexo-eléctrica.
- B) Proponer una variante del modelo **Herrera-Valencia/Rey (Herrera-Valencia y Rey 2023)** para incorporar la viscosidad de la membrana. Esta, podría ser una medida de la resistencia que presenta al cambio de curvatura por efecto de la fuerza motriz (campo eléctrico). El modelo, nuevo se puede expresar mediante la siguiente ecuación analítica de relajación:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = G \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (1)$$

En la Ec. (1)  $\lambda_M$  [s] es un tiempo de relajación de la membrana,  $G$  [Pa] es el módulo elástico de corte y  $\partial V_z / \partial r$  [ $s^{-1}$ ]

## 1.2 Antecedentes

### 1.2.1 Flujo electroosmótico

El flujo electroosmótico (EOF) es el movimiento del fluido adyacente a una superficie cargada debido a un campo eléctrico impuesto externamente (**Burgreen y Nakache 1964; Levine et al. 1975; Yang y Li 1997; Wang et al. 2007; Berli y Olivares 2008; Afonso et al. 2009, 2013**). En EOF, la superficie siempre lleva una solución de iones, lo que garantiza una neutralidad general de la carga. Las principales aplicaciones de (EOF) incluyen: (i) análisis de inyecciones de micro flujo, (ii) cromatografía de micro fluidos, (iii) micro reactores, (iv) micro energía, (v) sistemas de enfriamiento microelectrónicos y micromezcla y bio- reología (fisiología de la sangre humana) (**Jendrejack et al. 2003; Stone et al. 2004; Wang et al. 2007; Berli y Olivares 2008; Ferrás et al. 2016**).

El flujo electro-osmótico es el movimiento de un fluido con un electrolito (un fluido que contiene iones disueltos) a través de un micro canal o un capilar muy delgado, por el cual, es aplicado un campo eléctrico (**Reuss 1809; Arulanandam y Li 2000; Bruus 2008; Das y Chakraborty 2006; Afonso et al. 2009, 2011, 2012, 2013; Arulanandam y Li 2000; Chopin 2012**).

### 1.2.2 Campo eléctrico

El campo eléctrico **E** produce oscilaciones en la membrana elástica a través de efectos mecano-eléctricos y flexo-eléctricos (**Herrera-Valencia et al. 2019**). Estas oscilaciones desplazan las fases viscoelásticas a través de los mecanismos elásticos y viscoelásticos, esto permite la conversión de energía eléctrica a mecánica, la cual, permite la integración de los efectos flexo-eléctricos y mecánicos (**Herrera-Valencia y Rey 2023, 2018, 2014**).

Los puntos destacables de esta conversión son: (i) Potencia liberada en el contacto de fases viscoelásticas dada la imposición de un campo eléctrico, (ii) Energía elástica almacenada en la membrana y (iii) Propiedades destacables de las curvas resonantes y caracterización (frecuencia de resonancia, máximo valor en curvas resonantes y anchura de curvas resonantes, **Herrera-Valencia y Rey 2023, 2018, 2014**)

Al aplicar el campo eléctrico, el exceso de cationes del bulto (capa móvil), establece un flujo neto de migración del polo positivo (ánodo) hacia el polo negativo (cátodo), generando el

flujo electro-osmótico que refiere a la migración de un líquido (solución amortiguada, i.e. con ph constante) respecto de una superficie cargada (pared capilar) al aplicar un campo eléctrico (**Chopin 2012**). La interacción del fluido con el electrólito induce en las paredes del sistema (rectangular o cilíndrico), una carga en las paredes por efecto de los procesos interfaciales, la porosidad el material y los procesos de fisi-adsorción (**Afonso et al. 2009, 2011-2013, Bruss 2008; Chopin 2012; Ferrás et al. 2016, 2018**). En este contexto, la electroósmosis se utiliza ampliamente para manipular y controlar flujos de fluidos en canales con longitudes inferiores a un milímetro. Esto se logra mediante la interacción electrostática entre un campo eléctrico externo constante y pulsante y una doble capa eléctrica (EDL) (**Stone et al. 2004; Chakraborty 2005; Das y Chakraborty 2006; Chakraborty y Srivastava 2007; Rojas et al. 2017, 2019; Vargas et al. 2019**). Suponiendo como primera aproximación en el sistema, que se cumple la condición de adherencia en las paredes del sistema cartesiano (rendija o micro canal), se han obtenido expresiones analíticas para describir el perfil de velocidades y el flujo volumétrico en el sistema, para flujo combinado (gradiente de presión y flujo electro-osmótico), y electro-osmótico puro (**Afonso et al. 2009; 2011-2013; Bruss 2008; Chopin 2012; Ferrás et al. 2016, 2018**). **Peralta et al (2020)** han informado sobre la transferencia de masa a través de un micro canal de anillo concéntrico impulsado por un flujo oscilatorio de un fluido Maxwell. Informaron que el líquido iónico se caracterizó mediante la ecuación constitutiva de Maxwell y se empleó la aproximación de Debye – Hückel. Sus resultados sugieren que las distribuciones de velocidad y concentración a través del micro canal anular se vuelven no uniformes a medida que aumenta el número de Reynolds angular y dependen notablemente del número de elasticidad.

### **1.2.3 Bombeo electroosmótico**

El bombeo electroosmótico es un mecanismo crucial para el transporte y control de los flujos de fluidos. Normalmente, los parámetros críticos que determinan el rendimiento del bombeo son: (i) la magnitud del campo eléctrico aplicado externamente, (ii) las dimensiones de la sección transversal del micro canal, (iii) la densidad de carga superficial de la superficie del micro canal, y la densidad iónica y el pH del sistema fluido (**Sánchez et al. 2013; Rojas et al. 2017; Vargas et al. 2019**).

Un método para mejorar el caudal volumétrico en un micro canal es aumentar la magnitud del campo eléctrico aplicado. Sin embargo, esto puede provocar un aumento de la temperatura del fluido como consecuencia del efecto de calentamiento Joule, lo cual es indeseable (Sánchez et al. 2013; Rojas et al. 2019, 2017; Vargas et al. 2019).

La mayoría de los enfoques se han centrado en el estudio de: (i) distribuciones de iones, (ii) geometría del material y (iii) la naturaleza reológica del fluido (Hayat et al. 2011; Ali et al. 2020 Mahapatra y Bandopadhyay 2020, 2021).

#### 1.2.4 Análisis teórico y técnicas matemáticas

El análisis teórico del EOF de fluidos newtonianos y no newtonianos en micro canales (rendijas y capilares) ha sido objeto de varios estudios matemáticos y físicos (Sánchez et al. 2013; Mederos et al. 2020). Chakraborty y Srivastava (2007) estudiaron los flujos electroosmóticos periódicos en el tiempo a través de nano canales sin presumir la validez de la distribución de cargas iónicas de Boltzmann. La función de carga se obtiene mediante consideraciones de conservación de las especies individuales y su líquido se caracteriza por la ecuación de Navier-Stokes (fluido newtoniano). Se estudió la influencia de la frecuencia del campo eléctrico sobre el flujo electroosmótico en función de los parámetros del material.

Sadek y Pinho (2019) muestran una solución analítica del flujo oscilatorio electroosmótico de fluidos convectivos superiores Maxwell (UCM) multimodo. Solución analítica para flujo electroosmótico en corte oscilatorio de pequeña amplitud (SAOS) como herramienta de medición adecuada para caracterizar la reología en el régimen de pequeñas deformaciones. Sus resultados pueden permitir la cuantificación de los módulos de almacenamiento y pérdida en el régimen lineal. Esta técnica requiere el uso de tamaños de muestra más pequeños que la prueba oscilatoria de pequeña amplitud convencional.

Las técnicas matemáticas utilizadas para resolver estas ecuaciones involucran, entre otras: (i) ecuaciones lineales ordinarias y diferenciales parciales con diferentes tipos de condiciones de contorno (Hayat et al. 2011), (ii) métodos numéricos, incluyendo diferencias finitas, elementos finitos y Comúnmente se emplea una técnica de volumen finito, así como (iii) de perturbación regular e irregular (Rojas et al. 2017).

### **1.3 Hipótesis**

Si los parámetros materiales del sistema de estudio afectan el flujo combinado electro-osmótico, entonces este, podrá ser cuantificado a través de los grupos adimensionales característicos en el sistema.

### **1.4 Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo general**

Estudiar el flujo electro-osmótico combinado de un líquido viscoelástico mediante el modelo convectivo superior de Maxwell.

#### **1.4.2 Objetivos particulares**

- I.** Calcular las funciones materiales y dinámicas del sistema como son: distribución de cargas, perfil de velocidades, y flujo volumétrico.
- II.** Aplicar el formalismo de Fourier para obtener una ecuación dinámica lineal en términos de la frecuencia que describa la relación entre la variable de entrada (campo eléctrico) y la variable de salida (flujo volumétrico).
- III.** Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que permitan describir el sistema físico. Que describan las fuerzas macroscópicas.
- IV.** Programar los códigos computacionales en el lenguaje de Wolfram-Mathematica y realizar las simulaciones del sistema.
- V.** Deducir los resultados que muestre en las curvas resonantes típicas, se comprendan y se explique el comportamiento del fluido viscoelástico complejo.

# **CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO**

## 2.1 Modelos viscoelásticos lineales

### 2.1.1 Modelo de Maxwell

Este modelo describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal, combina la deformación presente en el sólido de Hooke y la deformación del fluido newtoniano, por lo tanto, la deformación total es (**Herrera-Valencia et al. 2012**).

$$\gamma = \gamma_V + \gamma_E \quad (2.1)$$

La deformación viscosa expresada mediante la ecuación de fluido newtoniano y la del sólido de Hooke, toma la siguiente forma:

$$\sigma = G_0 \gamma_E \quad (2.2)$$

Donde:

$G_0$ : Módulo elástico de corte.

$\gamma_E$ : Deformación elástica.

Para obtener el modelo constitutivo de Maxwell se debe tomar la derivada temporal de la ecuación de deformación total (Ec. 6) y a su vez combinarla con las ecuaciones del fluido newtoniano y del sólido de Hooke:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 D \quad (2.3)$$

Donde:

$\lambda_0$ : Tiempo de relajación de Maxwell.

Cuando el tiempo de relajación tiene valor cero el sistema se reduce al comportamiento de un fluido newtoniano, mientras que, si presenta una rapidez de deformación baja, el sistema puede ser integrado con respecto a dicho valor (tiempo de deformación) y la ecuación se reduce al sólido de Hooke.

Es importante recordar que las propiedades materiales que intervienen en este modelo pueden ser calculadas mediante pruebas de flujo oscilatorio y de flujo en estado estacionario (**Calderas et al., 2009; Bird, et. al., 1987**).

## 2.2 Ecuaciones básicas para el modelado matemático

### 2.2.1 Ecuación de Continuidad y Transporte

La dinámica no-lineal de la membrana está determinada por ecuaciones de continuidad, transporte y de un balance de fuerzas en la membrana. La primera de las ecuaciones que se describe es la ecuación de continuidad en el sistema de estudio:

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L V) = 0 \quad (2.4)$$

Para la fase viscoelástica se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{V}) = 0 \quad (2.5)$$

La ecuación de movimiento puede ser descrita para cada fase en la siguiente forma:

$$\rho_R \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_R + \rho_R \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, para la fase L:

$$\rho_L \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L + \rho_L \mathbf{g} \quad (2.7)$$

### 2.3 Ecuación Constitutiva Reológica

La reología y el flujo son descritos a través de la ecuación constitutiva reológica de Maxwell, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_L \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta_L \mathbf{D} \quad (2.8)$$

Y

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_R \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta_R \mathbf{D} \quad (2.9)$$

La derivada codeformacional tiene la forma:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - \left\{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} \quad (2.10)$$

En donde la derivada material del tensor de esfuerzos toma la forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \quad (2.11)$$

Al sumar las expresiones obtenidas, tenemos la siguiente expresión analítica:

$$(\rho_L + \rho_R) \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -(\nabla p_R + \nabla p_L) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_L) + (\rho_R + \rho_L) \mathbf{g} \quad (2.12)$$

Al suponer la presencia de flujo cortante en la Ec. 2.15 se presenta la simplificación:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento (Ec. 2.15) toma la forma:

$$(\rho_L + \rho_R) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -(\nabla p_R + \nabla p_L) + \nabla \cdot (\sigma_R + \sigma_L) + (\rho_R + \rho_L)g \quad (2.13)$$

En donde el gradiente de presión en la interfase se puede expresar como la suma de las contribuciones de la fase viscoelástica R y la L, respectivamente:

$$\nabla p_{(t)} = (\nabla p_{(t)})_R + (\nabla p_{(t)})_L = \frac{\nabla p_{(t)}}{L} \quad (2.14)$$

# **CAPÍTULO III: ECUACIONES TEÓRICAS**

### 3.1 Ecuaciones de conservación de transporte y reológica

En esta sección, se presentan las ecuaciones más importantes en el sistema.

La primera de ellas es la **ecuación de continuidad**, la cual es un balance de masa sin reacción química.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (3.1)$$

La ecuación de movimiento para el sistema, o bien, la **segunda ley de newton aplicada a un medio continuo**:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_B \quad (3.2)$$

Donde:

$\mathbf{V}$ : Vector velocidad.

$\mathbf{T}$ : Tensor de esfuerzos totales.

$\mathbf{f}_B$ : Fuerzas de bulto en el sistema.

Para un mejor entendimiento, el **tensor de esfuerzos totales** toma la forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

Donde:

$\mathbf{I}$ : Matriz unitaria.

$p$ : Escalar asociado a la presión en el sistema.

$\boldsymbol{\sigma}$ : Tensor de esfuerzos viscosos y viscoelástico.

### 3.2 Fluido newtoniano

Se define la ecuación del fluido básico en fenómenos de transporte y reología, fluido newtoniano, ya que su comportamiento es fiel a la ley de Newton (**Bird et. al., 1987**), donde el esfuerzo de corte es proporcional al gradiente de velocidad de corte:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.4)$$

Y

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (3.5)$$

Donde:

$\boldsymbol{\sigma}$ : Tensor de esfuerzos viscosos (Pa).

$\mu$ : Viscosidad newtoniana (Pa·s).

$D$ : Tensor de rapidez de deformación.

$\nabla V$ : Gradiente de velocidad.

$T$ : Transpuesta del tensor (Matriz 3x3).

### 3.3 Fluido no newtoniano

En los fluidos no-newtonianos la rapidez de deformación no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación (**Bird et. al., 1987**), por lo cual, la viscosidad no es constante y va a depender de la rapidez con la que se aplique la deformación de la muestra, la temperatura, la presión, concentración, pH, entre otras variables (**Bird et. al., 1987**). Las ecuaciones involucradas en este tipo de fluido son las siguientes:

$$\sigma = 2\eta(II_D)D \quad (3.6)$$

Y

$$\eta(II_D) = \sqrt{2(D:D)} \quad (3.7)$$

# **CAPÍTULO IV: MODELADO MATEMÁTICO**

#### 4.1 Análisis del sistema físico

A continuación, se describen las siguientes características del sistema de estudio, analizado para realizar el cálculo de la permeabilidad dinámica de un fluido viscoelástico lineal y su distribución de cargas en la rendija metálica del flujo mediante la transformada de Fourier.

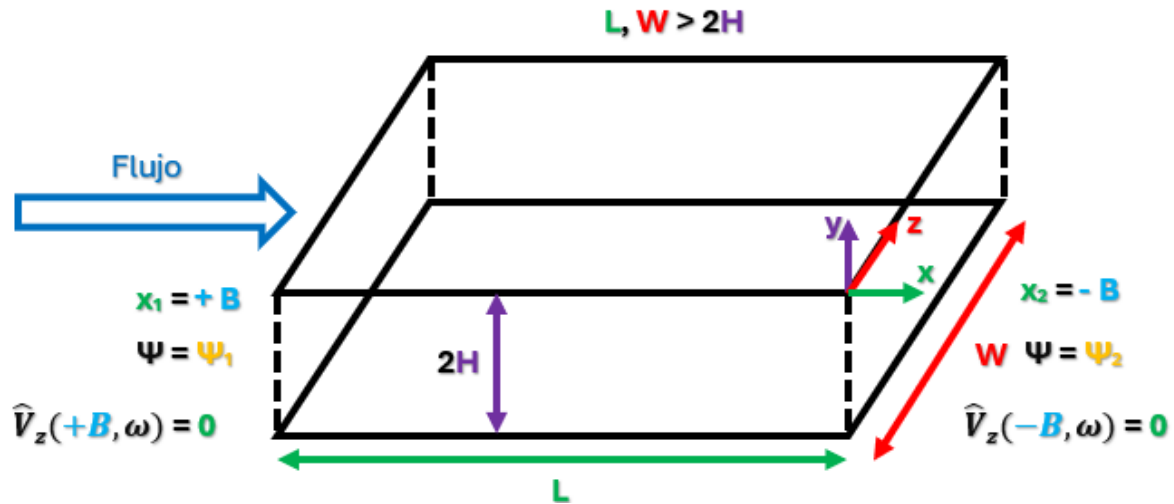


Figura 2. Representación esquemática del sistema físico (Condiciones de Frontera).

#### 4.2 Condiciones sujetas al fluido viscoelástico

- Flujo electroosmótico puro.
- Fluido viscoelástico lineal (bajas deformaciones).
- Líquido Newtoniano (viscosidad constante).
- Líquido incompresible (la densidad no depende de la posición ni del tiempo).
- Proceso en estado no estacionario (las propiedades o condiciones cambian en el tiempo).
- Flujo cortante:  $V \cdot \nabla V = 0$
- La presión es constante en el sistema de estudio.
- Dirección del campo de velocidad en "z".
- Dirección del tensor gradiente de velocidades en "x".
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables.
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente por un campo eléctrico.

#### 4.3 Razonamiento matemático

Se tiene un sistema de cargas, distribuido en un líquido viscoelástico en una rendija metálica. Las cargas se pegan en la superficie metálica en  $x = +B$  y en  $x = -B$ . Las cargas se adhieren

a las superficies por efecto de una energía eléctrica. Esto sucede cuando un electrolito se encuentra en el espacio comprendido entre dos superficies paralelas. Básicamente, este sistema es un capacitor el cual, almacena energía. La ecuación que lo describe proviene de las ecuaciones fundamentales de Maxwell, en este caso la Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

En la **Ec. (1)**, es el campo eléctrico,  $\rho$  es la densidad de carga en el medio y  $\epsilon_0$  es la permitividad del fluido en el vacío. El campo eléctrico, se puede expresar como el negativo de un potencial eléctrico externo que se impone al sistema, debido a que es una fuerza conservativa, i.e.

$$\vec{E} = -\nabla\Phi_e \quad (4.2)$$

Cuando se sustituye la **Ec. (2)** en la **Ec. (1)**, se tiene la siguiente expresión matemática y se le agrega un potencial inducido por las cargas.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} & \vec{E} &= -\nabla\Phi_e \\ \nabla \cdot (-\nabla\Phi_e) &= \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \\ -\nabla^2(\Phi_e + \Psi) &= \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\nabla^2\Phi_e + \nabla^2\Psi = -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

Donde:

$\Phi_e$  = Potencial eléctrico externo que se impone en el sistema.

$\Psi$  = Potencial eléctrico inducido de cargas en el sistema.

$\rho_e(x)$  = Densidad de carga en el medio en la dirección “x”.

$\epsilon_0$  = Permitividad del fluido en el vacío.

La **Ec. (3)**, el potencial eléctrico solo es en dirección axial, es decir, solo depende de la coordenada axial “x”. Por lo que, no hay una distribución de cargas en el sistema de estudio, solo la que se induce. Por lo tanto, se desarrollan la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi_e + \nabla^2 \Psi &= -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} & \nabla^2 \Phi_e &= 0 \\ \nabla^2 \Psi &= -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \\ \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) &= -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

La distribución de cargas se puede expresar en la siguiente manera:

$$\rho_e(x) = -\epsilon_0 \alpha^2 \Psi(x)\tag{4.5}$$

Donde el siguiente parámetro material “ $\alpha^2$ ” el cual, depende de los **mecanismos eléctricos – térmicos** y del **potencial eléctrico**. También llamado **parámetro de colisión efectiva de los iones en reacción**. Y viene dado por el parámetro de Debye – Hückel, relacionado con el espesor de la capa de Debye:

$$\lambda_D = \frac{1}{\alpha}$$

Normalmente denominado “espesor EDL”. Esta aproximación es válida cuando el espesor de la longitud de Debye es pequeño pero finito, es decir, para:

$$\frac{a}{\lambda_D} \in [10^1, 10^3]$$

En consecuencia, el potencial inducido se limita para que su energía no supere la energía térmica de manera similar a lo reportado por **Rojas et al. (2017)**.

$$\alpha^2 = \frac{2n_0 e^2 z^2}{\epsilon k_B T}$$

Donde:

$n_0$  = Concentración iónica en la solución.

$e^2$  = Valencia de la solución electrolítica

$z^2$  = La carga elemental.

$k_B$  = Constante de Boltzmann.

$T$  = Temperatura absoluta.

Por lo tanto “ $\alpha$ ” está relacionado con factores electro – térmicos en el fluido.

Al sustituir **Ec. (5)** en la **Ec. (4)**, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0} &= 0 \\ \rho_e(x) &= -\epsilon_0 \alpha^2 \Psi(x) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{(-\epsilon_0 \alpha^2 \Psi(x))}{\epsilon_0} &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \alpha^2 \Psi(x) &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Tomamos el polinomio auxiliar:

$$\begin{aligned}am^2 + bm + c &= 0 \\ a = 1 \quad b = 0 \quad c = -\alpha^2 \\ m^2 - \alpha^2 &= 0 \\ m^2 = \alpha^2 \quad \sqrt{m^2} = \pm\sqrt{\alpha^2} \quad m = \pm\alpha \\ m_{1,2} = \pm\alpha \quad m_1 = +\alpha \quad m_2 = -\alpha\end{aligned}$$

La solución general es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \\ \Psi(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Pasamos la solución general a cosenos y senos hiperbólicos:

$$\Psi(x) = C_1 \cosh(\alpha x) + C_2 \sinh(\alpha x) \quad (4.7)$$

Para encontrar la solución particular, realizamos un sistema de ecuaciones con la Ec. (7) y las condiciones de frontera:

$$\Psi(x = +B) = \Psi_1 \quad \Psi(x = -B) = \Psi_2$$

Sistema de ecuaciones:

$$\Psi_1 = C_1 \cosh(\alpha B) + C_2 \sinh(\alpha B) \dots \dots \dots (4.7.1)$$

$$\Psi_2 = C_1 \cosh(-\alpha B) + C_2 \sinh(-\alpha B) \dots \dots \dots (4.7.2)$$

Por el método de sustracción, donde:

$$\sinh(-\alpha B) = -\sinh(\alpha B) \quad \cosh(-\alpha B) = \cosh(\alpha B)$$

Por lo tanto:

$$\Psi_1 = C_1 \cosh(\alpha B) + C_2 \sinh(\alpha B) \dots \dots \dots (4.7.3)$$

$$\Psi_2 = C_1 \cosh(\alpha B) - C_2 \sinh(\alpha B) \dots \dots \dots (4.7.4)$$

El resultado sería:

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 2C_1 \cosh(\alpha B)$$

$$C_1 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2 \cosh(\alpha B)} \quad (4.8)$$

Sustituimos  $C_1$  en la Ec. (7.3), y se resuelve lo siguiente:

$$\Psi_1 = \left( \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2 \cosh(\alpha B)} \right) \cosh(\alpha B) + C_2 \sinh(\alpha B)$$

$$\Psi_1 = \left( \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \right) + C_2 \sinh(\alpha B)$$

$$\Psi_1 - \left( \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \right) = C_2 \sinh(\alpha B)$$

$$C_2 = \frac{\Psi_1}{\sinh(\alpha B)} - \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2 \sinh(\alpha B)} \quad (4.9)$$

Sustituimos **Ec. (8)** y la **Ec. (9)** en la **Ec. (7)**:

$$\Psi(x) = \left[ \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2 \cosh(\alpha B)} \right] \cosh(\alpha x) + \left[ \frac{\Psi_1}{\sinh(\alpha B)} - \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2 \sinh(\alpha B)} \right] \sinh(\alpha x)$$

$$\Psi(x) = \left[ \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \right] \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} + \left[ \frac{2\Psi_1 - (\Psi_1 + \Psi_2)}{2 \sinh(\alpha B)} \right] \sinh(\alpha x)$$

$$\Psi(x) = \left[ \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \right] \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} + \left[ \frac{2\Psi_1 - \Psi_1 - \Psi_2}{2} \right] \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha B)}$$

#### 4.3.1 Función potencial eléctrico inducido

$$\boxed{\Psi(x) = \left[ \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \right] \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} + \left[ \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} \right] \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha B)}} \quad (4.10)$$

Al obtener la solución particular de la **función potencial  $\Psi(x)$** , **Ec. (10)**, se realiza el siguiente **caso: Simetría en los potenciales  $\Psi_1 = \Psi_2$** :

$$\Psi(x) = \left[ \frac{\Psi_1 + \Psi_1}{2} \right] \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} + \left[ \frac{\Psi_1 - \Psi_1}{2} \right] \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha B)}$$

$$\Psi(x) = \left[ \frac{2\Psi_1}{2} \right] \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} + \left[ \frac{0}{2} \right] \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha B)}$$

$$\Psi(x) = \Psi_1 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] \quad (4.11)$$

#### 4.3.2 Distribución de cargas

Sustituimos la **Ec. (11)** en la **Ec. (5)**, que es la distribución de cargas:

$$\rho_e(x) = -\epsilon_0 \alpha^2 \Psi(x) = -\epsilon_0 \alpha^2 \Psi_1 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]$$

El potencial de pared  $\Psi_w$  se define como el negativo del potencial en la superficie metálica.

$$-\Psi_1 = -\Psi_B = \Psi_w$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\rho_e(x) = \epsilon_0 \alpha^2 \Psi_w \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]} \quad (4.12)$$

Si se tiene los siguientes modelos matemáticos:

$$\lambda_o = 0 \quad \sigma_{zx} = \eta_o \frac{\partial V_z}{\partial x} \quad \text{Modelo de Newton}$$

$$\lambda_o \neq 0 \quad \sigma_{zx} + \lambda_o \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = \eta_o \frac{\partial V_z}{\partial x} \quad \text{Modelo de Maxwell Viscoelástico}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = 0 \quad \sigma_{zx} + \lambda_o \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = 0 \quad \text{Modelo de Hooke}$$

Y si se toma el **modelo de Maxwell**:

$$\sigma_{zx} + \lambda_o \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = \eta_o \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\sigma_{zx} \left( 1 + \lambda_o \frac{\partial}{\partial t} \right) = \eta_o \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\eta_o}{\left( 1 + \lambda_o \frac{\partial}{\partial t} \right)} \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\eta_o}{\left( 1 + \lambda_o \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{zx} = O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

Donde:

$\sigma_{zx}$  = Componente del tensor de corte en “zx”.

$\eta_o$  = Viscosidad del fluido.

$\lambda_o$  = Tiempo de relajación de Maxwell.

### 4.3.3 Ecuación de ecuación de movimiento de un fluido electro osmótico en un medio viscoelástico

Al obtener la expresión de la densidad de cargas en “x”, ahora se utiliza la **ecuación de movimiento de un fluido electro osmótico en un medio viscoelástico**.

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla P(t) + O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 V + \rho g + \rho_e(x) \cdot E_z(t)$$

Donde:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}\right) = \text{Derivada material.}$$

$$\nabla P(\mathbf{t}) = \text{Gradiente de presión.}$$

$$O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \text{Función fluidez.}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \text{Laplaciano de la velocidad.}$$

$$\rho = \text{Densidad del fluido.}$$

$$\mathbf{g} = \text{Gravedad a la que está sujeta el sistema.}$$

$$\rho_e(\mathbf{x}) = \text{Densidad de carga en el medio que depende de "x".}$$

$$\mathbf{E}_z = \text{Intensidad del campo eléctrico en la dirección "z".}$$

Debido a las anteriores restricciones mencionadas en el **análisis del sistema físico**, se tiene la siguiente estructura fundamental.

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 V + \rho_e(x) \cdot E_z(t) \quad (4.13)$$

Si se sustituye la **Ec. (12)** en la **Ec. (13)**, se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 V + \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right] E_z(t) \quad (4.14)$$

Desarrollando la ecuación diferencial parcial:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t}\right) = O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z(z, t)}{\partial z^2}\right) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right] E_z(t)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t}\right) = O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2}\right) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right] E_z(t)$$

$$-O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2}\right) + \rho \left(\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right] E_z(t)$$

$$O_\eta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2}\right) - \rho \left(\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right] E_z(t)$$

$$\frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) = - \frac{1}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(t)$$

$$\frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) = - \frac{1}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(t) \quad (4.15)$$

Donde:

$$O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{1}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} \quad (4.16)$$

$O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$  = Función fluidez compleja.

#### 4.3.4 Ecuación diferencial parcial

Sustituimos la **Ec. (16)** en la **Ec. (15)**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \rho O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) = - O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(t)} \quad (4.17)$$

Al transformar la ecuación dinámica al espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{F}[f(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(x,t) dt = \hat{f}(x,\omega)$$

Para el primer término:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} V_z(x,t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{V}_z(x,\omega)$$

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{V}_z(x,\omega) \quad (4.18)$$

Para el segundo término, por convolución:

$$\mathcal{F} \left[ \rho O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \rho O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) dt$$

$$\rho \mathcal{F} \left[ O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) \right] = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) dt$$

$$\rho \mathcal{F} \left[ O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} \right) \right] = \rho O_\Phi(i\omega) \cdot (i\omega) V_z(x,\omega) \quad (4.19)$$

Para el tercer término de la ecuación, de igual manera por convolución:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathbf{O}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]E_z(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\mathbf{O}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]E_z(t)dt \\ \varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]\mathcal{F}\left[\mathbf{O}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot E_z(t)\right] &= \varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\mathbf{O}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot E_z(t)dt \\ \varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]\mathcal{F}\left[\mathbf{O}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot E_z(t)\right] &= \varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]\mathbf{O}_\Phi(i\omega)\cdot E_z(\omega)\end{aligned}\quad (4.20)$$

Por lo que, se sustituyen las ecuaciones (18), (19) y (20) en la Ec. (17):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{V}_z(x,\omega) - \rho\mathbf{O}_\Phi(i\omega)\cdot(i\omega)V_z(x,\omega) = -\varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]\mathbf{O}_\Phi(i\omega)\cdot E_z(\omega)\quad (4.21)$$

Definiendo el siguiente parámetro “ $\beta$ ” está relacionado con la viscoelasticidad del fluido, el número de Débora, la Función Fluidéz y la Frecuencia:

$$\beta^2 = \rho\mathbf{O}_\Phi(i\omega)\cdot(i\omega)$$

### 4.3.5 Ecuación diferencial parcial en el espacio de Fourier

Por lo tanto, al sustituir en la Ec. (21):

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{V}_z(x,\omega) - \beta^2 V_z(x,\omega) = -\mathbf{O}_\Phi(i\omega)\varepsilon_0\alpha^2\Psi_W\left[\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}\right]E_z(\omega)}\quad (4.22)$$

La Ec. (22) es una ecuación dinámica que describe los cambios espaciales – temporales y térmicos – eléctricos debido a la distribución de cargas. Para resolverla, la solución se separará en una parte homogénea y en una particular, por lo tanto:

$$\widehat{V}_{z(g)}(x,\omega) = \widehat{V}_{z(H)}(x,\omega) + \widehat{V}_{z(P)}(x,\omega)\quad (4.23)$$

Se resuelve la parte homogénea:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{V}_z(x,\omega) - \beta^2 V_z(x,\omega) = 0$$

Donde la solución general de la parte homogénea es:

$$\widehat{V}_{z(H)}(x,\omega) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x)\quad (4.24)$$

Para la solución particular se propone la siguiente expresión:

$$\hat{V}_{z(P)}(x, \omega) = A \cosh(\alpha x) \quad (4.25)$$

Si sustituimos la Ec. (25) en la Ec. (22), la expresión quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (A \cosh(\alpha x)) - \beta^2 (A \cosh(\alpha x)) = -\mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)$$

$$-\alpha^2 A \cosh(\alpha x) - \beta^2 A \cosh(\alpha x) = -\mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)$$

$$-1 = i^2$$

$$i^2 \alpha^2 A \cosh(\alpha x) + i^2 \beta^2 A \cosh(\alpha x) = i^2 \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)$$

$$A [i^2 \alpha^2 \cosh(\alpha x) + i^2 \beta^2 \cosh(\alpha x)] = i^2 \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)$$

$$A = \frac{i^2 \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)}{i^2 \alpha^2 \cosh(\alpha x) + i^2 \beta^2 \cosh(\alpha x)}$$

$$A = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W E_z(\omega) \cdot \frac{i^2 \alpha^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]}{i^2 \alpha^2 \cosh(\alpha x) + i^2 \beta^2 \cosh(\alpha x)}$$

$$A = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_z(\omega) \cdot \frac{(i\alpha)^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]}{\cosh(\alpha x) [(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]}$$

$$A = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_z(\omega) \cdot \frac{\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)}}{\cosh(\alpha x)} \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]}$$

$$A = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_z(\omega) \cdot \frac{1}{\cosh(\alpha B)} \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \quad (4.26)$$

Sustituimos la Ec. (26) en la Ec. (25), por lo tanto:

$$\hat{V}_{z(P)}(x, \omega) = \left( \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_z(\omega) \cdot \frac{1}{\cosh(\alpha B)} \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \right) \cosh(\alpha x)$$

$$\hat{V}_{z(P)}(x, \omega) = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \quad (4.27)$$

Finalmente, la solución general toma la forma:

$$\hat{V}_{z(g)}(x, \omega) = \hat{V}_{z(H)}(x, \omega) + \hat{V}_{z(P)}(x, \omega)$$

Sustituyendo la Ec. (24) y la Ec. (27) en la Ec. (23):

$$\hat{V}_{z(g)}(x, \omega) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \quad (4.28)$$

Las condiciones de frontera para este campo de velocidades son:

$$\hat{V}_z(x = +B, \omega) = 0 \quad \hat{V}_z(x = -B, \omega) = 0$$

Al sustituir las condiciones de frontera, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$0 = C_1 \cosh(\beta B) + C_2 \sinh(\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \dots\dots\dots(4.28.1)$$

$$0 = C_1 \cosh(-\beta B) + C_2 \sinh(-\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(-\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \dots\dots\dots(4.28.2)$$

Por el método de sustracción, donde:

$$\sinh(-\alpha B) = -\sinh(\alpha B) \quad \cosh(-\alpha B) = \cosh(\alpha B)$$

Por lo tanto:

$$0 = C_1 \cosh(\beta B) + C_2 \sinh(\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \dots\dots\dots(4.28.3)$$

$$0 = C_1 \cosh(\beta B) - C_2 \sinh(\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \dots\dots\dots(4.28.4)$$

El resultado sería:

$$2C_2 \sinh(\beta B) = 0$$

$$C_2 = \frac{0}{2\sinh(\beta B)}$$

$$C_2 = 0 \quad (4.29)$$

Sustituimos la Ec. (29) en la Ec. (28.3):

$$0 = C_1 \cosh(\beta B) + (0) \sinh(\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)$$

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 \cosh(\beta B) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
C_1 \cosh(\beta B) &= -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
C_1 &= -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \frac{1}{\cosh(\beta B)} \left[ \frac{\cosh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
C_1 &= -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \frac{1}{\cosh(\beta B)} [1] E_z(\omega) \\
C_1 &= -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{1}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Sustituimos la Ec. (29) y la Ec. (30) en la Ec. (28):

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_{z(g)}(x, \omega) &= C_1 \cosh(\beta x) + (0) \sinh(\beta x) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
\widehat{V}_{z(g)}(x, \omega) &= \left( -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{1}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \right) \cosh(\beta x) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
\widehat{V}_{z(g)}(x, \omega) &= \left( -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{1}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \right) \cosh(\beta x) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega) \\
\widehat{V}_{z(g)}(x, \omega) &= \left( -O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \right) + O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] E_z(\omega)
\end{aligned}$$

#### 4.3.6 Campo de velocidades de un líquido viscoelástico lineal

La solución particular, toma la forma:

$$\boxed{\widehat{V}_z(x, \omega) = O_\phi(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega)} \tag{4.31}$$

La expresión anterior, es el campo de velocidades para el sistema de estudio en donde se tiene un gradiente eléctrico y una distribución de cargas.

#### 4.3.7 Flujo volumétrico puro de un líquido viscoelástico lineal

El flujo volumétrico en el sistema de estudio se calcula mediante una integral doble en la cual, se integra el perfil de velocidades en la sección de área transversal, por lo que:

$$Q(\omega) = \int_0^W \int_{-B}^{+B} \widehat{V}_z(x, \omega) dx dz \tag{4.32}$$

Sustituimos la **Ec. (31)** en la **Ec. (32)** y se resuelve la integral doble:

$$\begin{aligned}
Q(\omega) &= \int_0^W \int_{-B}^{+B} \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \, dx dz \\
Q(\omega) &= \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \int_0^W \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] \, dx dz \\
Q(\omega) &= \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] \, dx \int_0^W \, dz \\
Q(\omega) &= \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] \, dx (W - 0) \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] \, dx \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] \, dx - \int_{-B}^{+B} \left[ \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] \, dx \right\} \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{1}{\cosh(\alpha B)} \int_{-B}^{+B} \cosh(\alpha x) \, dx - \frac{1}{\cosh(\beta B)} \int_{-B}^{+B} \cosh(\beta x) \, dx \right\} \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{\sinh(\alpha x)}{\alpha \cosh(\alpha B)} \Big|_{-B}^{+B} - \frac{\sinh(\beta x)}{\beta \cosh(\beta B)} \Big|_{-B}^{+B} \right\} \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\sinh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\sinh(-\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\sinh(\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} - \frac{\sinh(-\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} \right] \right\} \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\sinh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\sinh(-\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\sinh(\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} - \frac{\sinh(-\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

donde:

$$\sinh(-\alpha B) = -\sinh(\alpha B)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\sinh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} + \frac{\sinh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\sinh(\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} + \frac{\sinh(\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} \right] \right\} \\
Q(\omega) &= W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} E_z(\omega) \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ 2 \frac{\sinh(\alpha B)}{\cosh(\alpha B)} \right] - \frac{1}{\beta} \left[ 2 \frac{\sinh(\beta B)}{\beta \cosh(\beta B)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el **flujo volumétrico** en el sistema de estudio, esta determinado por la siguiente expresión analítica:

$$\boxed{Q(\omega) = 2W \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega)} \quad (4.33)$$

#### 4.4 ADIMENSIONAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO ELECTROSMÓTICO

Para las simulaciones en **Wólfram – Matemática**, se realiza un adimensionamiento de la **distribución de cargas** con la ecuación de la **densidad de cargas**, el **campo de velocidades del flujo electro osmótico** y su **flujo volumétrico** del mismo.

Retomando la **Ec. (12)**, que tiene que ver con la **densidad de cargas**. Se realiza los siguientes cálculos para adimensionar la ecuación:

$$\rho_e(x) = \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]$$

$$\rho_e(x) = \frac{B^2}{B^2} \varepsilon_0 \alpha^2 \Psi_W \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right]$$

$$\rho_e(x) = \frac{\varepsilon_0 \Psi_W}{B^2} (\alpha B)^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] \quad (4.34)$$

$$\rho_{e0}(x) = \frac{\varepsilon_0 \Psi_W}{B^2} \quad (4.35)$$

Se sustituye la **Ec. (35)** en la **Ec. (34)**:

$$\rho_e(x) = \rho_{e0}(x) (\alpha B)^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} \right] \quad (4.36)$$

Ahora se realiza lo siguiente:

$$\cosh(\alpha x) = \cosh\left(\frac{B}{B} \alpha x\right) = \cosh\left(\alpha B \cdot \frac{x}{B}\right) = \cosh(\alpha^* x^*) \quad (4.37)$$

$$\cosh(\alpha B) = \cosh\left(\frac{B}{B} \alpha B\right) = \cosh\left(\alpha B \cdot \frac{B}{B}\right) = \cosh(\alpha^*) \quad (4.38)$$

Se sustituye la **Ec. (37)** y **(38)** en la **Ec. (36)**:

$$\rho_e(x) = \rho_{e0}(x) (\alpha B)^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} \right] \quad (4.39)$$

$$\frac{\rho_e(x)}{\rho_{e0}(x)} = (\alpha B)^2 \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} \right] \quad (4.40)$$

$$\rho_e^*(x) = \frac{\rho_e(x)}{\rho_{e0}(x)} \quad (4.41)$$

$$\alpha^{2*} = (\alpha B)^2 \quad (4.42)$$

#### 4.4.1 Ecuación adimensional para la Distribución de Cargas

Sustituimos la **Ec. (41)** y **Ec. (42)** en la **Ec. (40)** y se obtiene la nueva **ecuación adimensional** de la **densidad de cargas** para la simulación:

$$\boxed{\rho_e^*(x) = \alpha^{2*} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} \right]} \quad (4.43)$$

Retomando la **Ec. (31)**, que tiene que ver con la **densidad de cargas**. Se realiza los siguientes cálculos para adimensionar la ecuación:

$$\widehat{V}_z(x, \omega) = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega)$$

$$\widehat{V}_z(x, \omega) = \frac{B^2}{B^2} \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega)$$

$$\widehat{V}_z(x, \omega) = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i^2(\alpha B)^2)}{[(i^2(\alpha B)^2 + i^2(\beta B)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \quad (4.44)$$

$$\beta^{2*} = (\beta B)^2 \quad (4.45)$$

Se sustituye la **Ec. (42)** y **(45)** en la **Ec. (44)**:

$$\widehat{V}_z(x, \omega) = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha B)} - \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta B)} \right] E_z(\omega) \quad (4.46)$$

Ahora se realiza lo siguiente:

$$\cosh(\alpha x) = \cosh\left(\frac{B}{B} \alpha x\right) = \cosh\left(\alpha B \cdot \frac{x}{B}\right) = \cosh(\alpha^* x^*) \quad (4.47)$$

$$\cosh(\alpha B) = \cosh\left(\frac{B}{B} \alpha B\right) = \cosh\left(\alpha B \cdot \frac{B}{B}\right) = \cosh(\alpha^*) \quad (4.48)$$

$$\cosh(\beta x) = \cosh\left(\frac{B}{B} \beta x\right) = \cosh\left(\beta B \cdot \frac{x}{B}\right) = \cosh(\beta^* x^*) \quad (4.49)$$

$$\cosh(\beta B) = \cosh\left(\frac{B}{B} \beta B\right) = \cosh\left(\beta B \cdot \frac{B}{B}\right) = \cosh(\beta^*) \quad (4.50)$$

Sustituimos la **Ec. (47)**, **Ec. (48)**, **Ec. (49)** y **Ec. (50)** en la **Ec. (46)**:

$$\widehat{V}_z(x, \omega) = \mathbf{O}_\Phi(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z(\omega)$$

$$\frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega)} = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\varphi_0(i\omega)} \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z(\omega) \quad (4.51)$$

$$O_\Phi^*(i\omega^*) = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\varphi_0(i\omega)} \quad (4.52)$$

Sustituimos la **Ec. (52)** en la **Ec. (51)**:

$$\frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega)} = O_\Phi^*(i\omega^*) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z(\omega) \quad (4.53)$$

Analizando lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_z(\omega) &= E_0 e^{-i\omega t} \\ E_z(\omega^*) &= \frac{E_z(\omega)}{E_0} = \frac{E_0}{E_0} e^{-i\omega t} \\ E_z^*(\omega^*) &= \frac{E_z(\omega)}{E_0} = e^{-i\omega t} \\ E_z(\omega) &= E_0 E_z^*(\omega^*) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sustituimos la **Ec. (54)** en la **Ec. (53)**:

$$\frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega)} = O_\Phi^*(i\omega^*) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_0 E_z^*(\omega^*)$$

$$\frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega)} = O_\Phi^*(i\omega^*) \varepsilon_0 \Psi_W E_0 \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z^*(\omega^*)$$

$$\frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_0} = O_\Phi^*(i\omega^*) \frac{\varepsilon_0 \Psi_W E_0}{\varepsilon_0 \Psi_W E_0} \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z^*(\omega^*) \quad (4.55)$$

$$\widehat{V}_z^*(x,\omega) = \frac{\widehat{V}_z(x,\omega)}{\varphi_0(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_0} \quad (4.56)$$

#### 4.4.2 Ecuación adimensional para el Perfil de Velocidades del Fluido Viscoelástico Lineal

Sustituimos la **Ec. (56)** en la **Ec. (55)** y se obtiene la nueva **ecuación adimensional** del **campo de velocidades del líquido viscoelástico lineal** para la simulación:

$$\widehat{V}_z^*(x,\omega) = O_\Phi^*(i\omega^*) \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\cosh(\alpha^* x^*)}{\cosh(\alpha^*)} - \frac{\cosh(\beta^* x^*)}{\cosh(\beta^*)} \right] E_z^*(\omega^*) \quad (4.57)$$

Retomando la **Ec. (33)**, que tiene que ver con el **flujo volumétrico** del fluido. Se realiza los siguientes cálculos para adimensionar la ecuación:

$$Q(\omega) = 2W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega)$$

$$Q(\omega) = \frac{B^2}{B^2} 2W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha)^2}{[(i\alpha)^2 + (i\beta)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega)$$

$$Q(\omega) = 2W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i)^2(\alpha B)^2}{[(i)^2(\alpha B)^2 + (i)^2(\beta B)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega) \quad (4.58)$$

Se sustituye la **Ec. (42)** y **(45)** en la **Ec. (58)**:

$$Q(\omega) = 2W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega)$$

$$Q(\omega) = \frac{B}{B} 2W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta} \right] E_z(\omega)$$

$$Q(\omega) = 2B W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha B)}{\alpha B} - \frac{\tanh(\beta B)}{\beta B} \right] E_z(\omega) \quad (4.59)$$

Ahora se realiza lo siguiente:

$$\alpha B = \alpha^* \quad (4.60)$$

$$\beta B = \beta^* \quad (4.61)$$

Sustituimos la **Ec. (60)** y **Ec. (61)** en la **Ec. (59)**:

$$Q(\omega) = 2B W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z(\omega) \quad (4.62)$$

De la **Ec. (54)** sustituimos en la **Ec. (62)**:

$$Q(\omega) = 2B W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_0 E_z^*(\omega^*)$$

$$Q(\omega) = 2B W O_{\phi}(i\omega) \varepsilon_0 \Psi_W E_0 \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*)$$

$$\frac{Q(\omega)}{\varphi_0(i\omega)} = 2B W \frac{O_{\phi}(i\omega)}{\varphi_0(i\omega)} \varepsilon_0 \Psi_W E_0 \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*) \quad (4.63)$$

$$\mathbf{O}_{\Phi}^*(i\omega^*) = \frac{\mathbf{O}_{\Phi}(i\omega)}{\varphi_0(i\omega)} \quad (4.64)$$

Sustituimos la Ec. (64) en la Ec. (53):

$$\begin{aligned} \frac{Q(\omega)}{\varphi_0(i\omega)} &= 2BW\mathbf{O}_{\Phi}^*(i\omega^*)\varepsilon_0\Psi_W E_0 \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*) \\ \frac{Q(\omega)}{\varphi_0(i\omega)2BW\varepsilon_0\Psi_W E_0} &= \mathbf{O}_{\Phi}^*(i\omega^*) \frac{2BW\varepsilon_0\Psi_W E_0}{2BW\varepsilon_0\Psi_W E_0} \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*) \\ \frac{Q(\omega)}{\varphi_0(i\omega)\varepsilon_0\Psi_W E_0} &= \mathbf{O}_{\Phi}^*(i\omega^*) \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{Q}^*(\omega) = \frac{Q(\omega)}{\varphi_0(i\omega)2BW\varepsilon_0\Psi_W E_0} \quad (4.66)$$

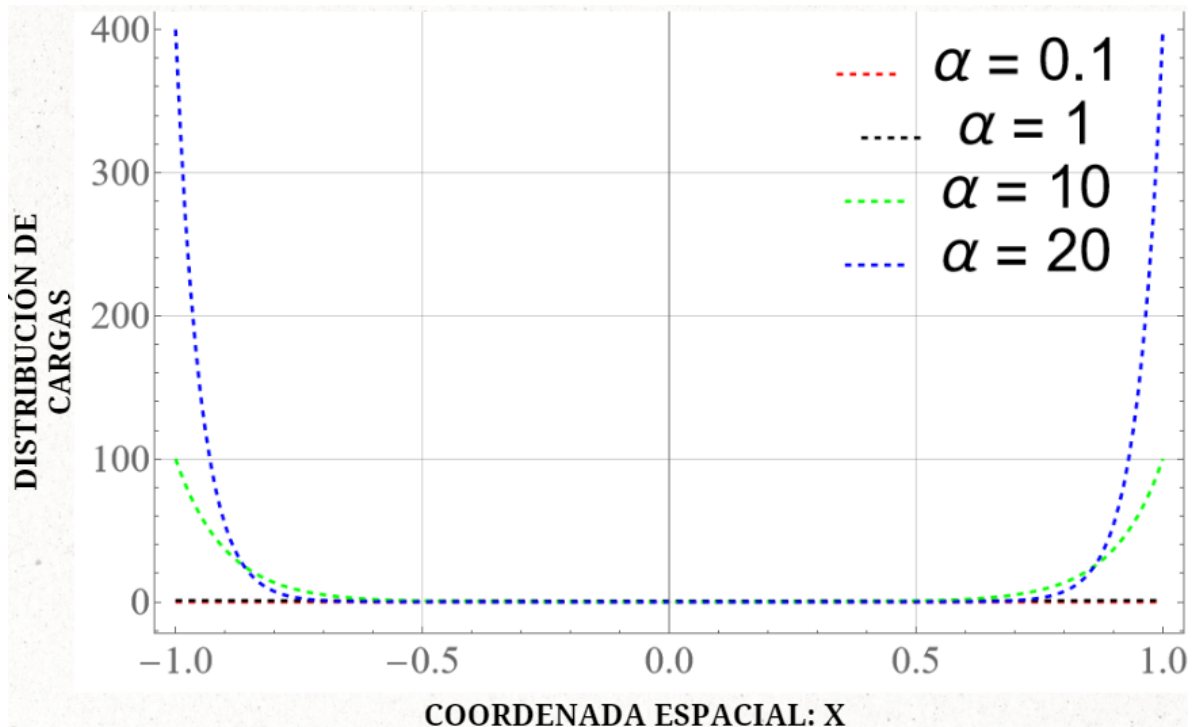
#### 4.4.3 Ecuación adimensional para el Flujo Volumétrico del Fluido Viscoelástico Lineal

Sustituimos la Ec. (66) en la Ec. (65):

$$\boxed{\mathbf{Q}^*(\omega) = \mathbf{O}_{\Phi}^*(i\omega^*) \cdot \frac{(i\alpha^*)^2}{[(i\alpha^*)^2 + (i\beta^*)^2]} \left[ \frac{\tanh(\alpha^*)}{\alpha^*} - \frac{\tanh(\beta^*)}{\beta^*} \right] E_z^*(\omega^*)} \quad (4.67)$$

# **CAPÍTULO V: SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

### 5.1 Distribución de cargas: Efecto del número adimensional “Alfa”

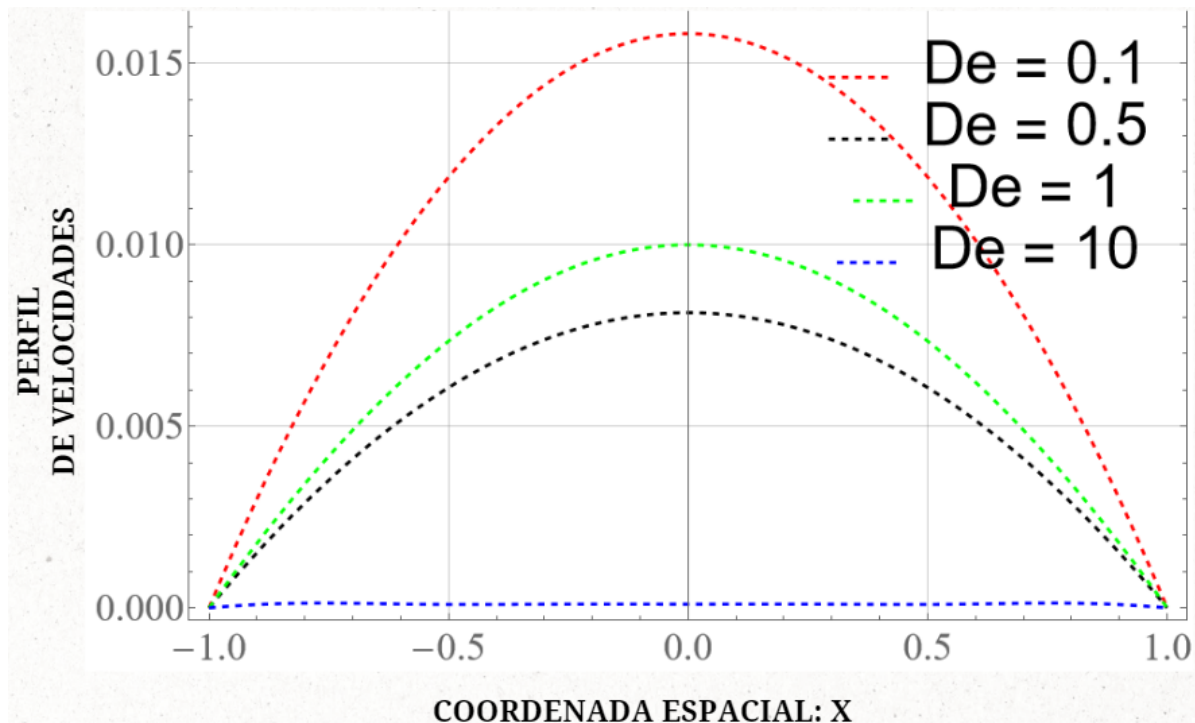


**Figura 3.** Ilustra la distribución de cargas en el sistema para diferentes valores del número alfa, relacionado a los mecanismos electro - térmicos.

La Fig. (3) describe la distribución de cargas en el micro-dispositivo en función de la posición para diferentes valores del número en Alfa. El número Alfa es una competencia entre los mecanismos eléctricos y térmicos. Es claro que en el centro del sistema ( $x = 0$ ) las cargas están dispersas en el sistema y conforme se acerca a la pared, las cargas se orientan. Es claro los siguientes puntos:

- a) El número  $\alpha$  controla los mecanismos eléctricos y térmicos del sistema. Los mecanismos térmicos dispersan las cargas, mientras que los eléctricos orientan las cargas.
- b) Es claro que, la interacción entre la pared y las carga es favorecido por el número  $\alpha$ . Cuando  $\alpha \ll 1$ , la distribución de cargas es constante, y cuando  $\alpha \gg 1$ , se observa un perfil parabólico.
- c) En el centro del sistema se observa una dispersión de cargas, mientras que en la interfase sólido-fluido es claro la interacción entre las cargas y el sólido.

## 5.2 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto del número adimensional “Deborah”

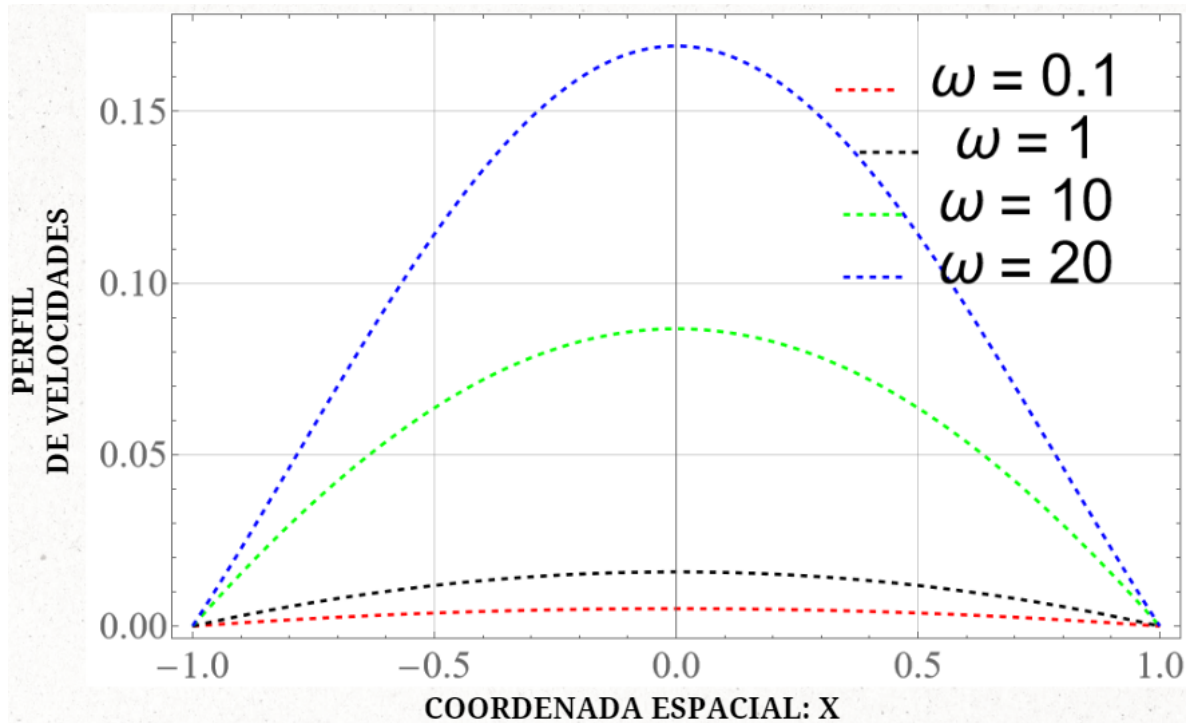


**Figura 4.** Ilustra la función del perfil de velocidades vs. frecuencia en función del número de Deborah, el cual es una medida de las propiedades viscoelásticas del material en el sistema.

La Fig. (4) ilustra el perfil de velocidades vs la coordenada axial  $x$ , para diferentes valores del número de Deborah. En la Fig. (4), se observan los siguientes puntos importantes:

- En todos los casos, se observa el perfil de velocidades clásico de Poiseuille.
- En la interfase entre la pared y el fluido, se observa que la velocidad es cero.
- En el centro del sistema ( $x = 0$ ), la velocidad del sistema es máxima y su valor queda determinado por las propiedades inerciales y viscoelásticas del sistema.
- El número de Deborah describe los inerciales los cuales se activan a través de la densidad del fluido, la longitud característica del radio y el inverso del módulo elástico de corte, partido por el tiempo de relajación viscoelástico asociado a los procesos disipativos y de almacenamiento del fluido.
- En este punto, se ha fijado la frecuencia a  $\omega = 1$ .
- En este punto, se ha fijado el número adimensional  $\alpha = 1$ . En este punto, se observa que los mecanismos térmicos y eléctricos se equilibran.

### 5.3 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto de la Frecuencia



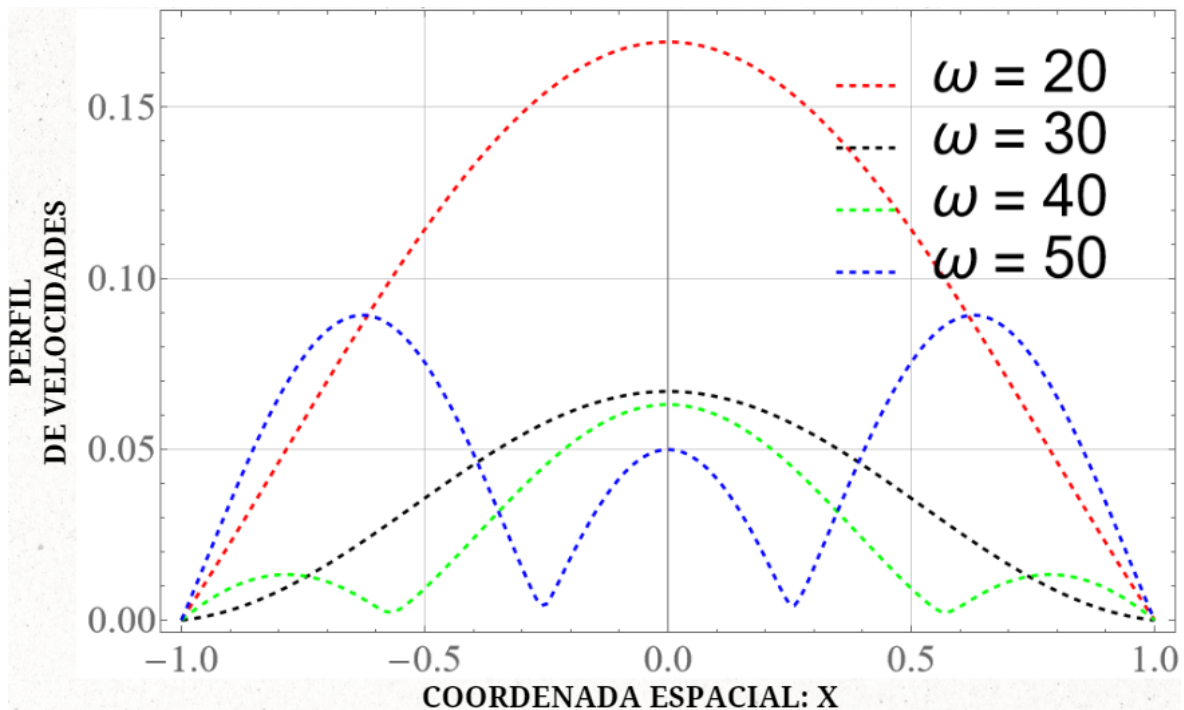
**Figura 5.** Ilustra el perfil de velocidades vs coordenada axial x en función de la frecuencia de la fuerza externa.

La Fig. (5) muestra el perfil de velocidades en función de la coordenada axial para diferentes valores de la frecuencia. Los valores utilizados en esta simulación corresponden a  $\alpha = 1$ . El valor de  $\alpha$  corresponde a una competencia entre los valores eléctrico y térmicos de la distribución de cargas. Los siguientes puntos son importantes:

- En todos los casos, se observa una parábola, i.e., en las paredes la velocidad es cero y en el centro es máxima.
- El efecto de la frecuencia incrementa, el máximo en el perfil de velocidades.
- Es claro que, para estos valores, no se observa oscilaciones en el perfil de velocidades.

Al comparar las Figs. (3) y (4) se observa que los mecanismos inerciales y la frecuencia pueden aumentar el valor máximo del perfil de velocidades y que, en todos los casos analizados, el perfil de velocidades es simétrico.

#### 5.4 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto de la Frecuencia con perturbaciones en el sistema

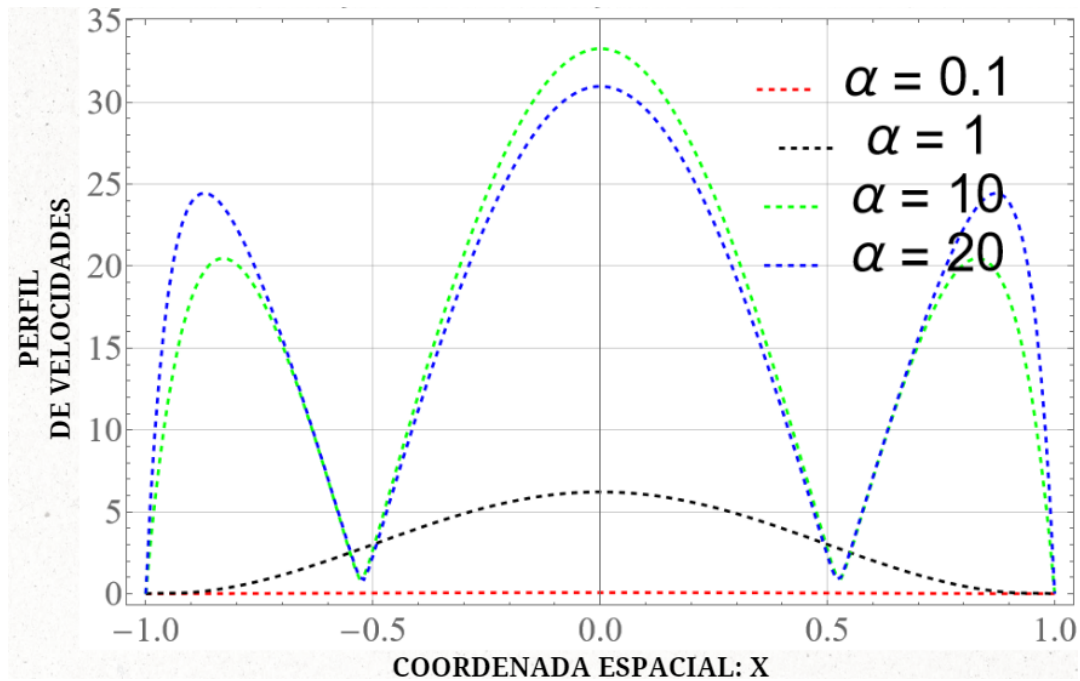


**Figura 6.** Ilustra la función del perfil de velocidades vs coordenada axial para diferentes valores de la frecuencia.

La Fig. (6) muestra el perfil de velocidades en función de la coordenada axial para diferentes valores de la frecuencia. Los valores utilizados en esta simulación corresponden a  $\alpha = 1$ . Los siguientes puntos son destacables de la Fig. (6):

- En el caso de la frecuencia  $\omega = 20$ , se observa que el perfil es parabólico, es decir, en la interacción pared-fluido, la velocidad es cero, mientras que en el centro esta es máxima.
- En el caso de la frecuencia  $\omega = 30$ , se observa que la anchura del perfil decrece considerablemente.
- En el caso de la frecuencia  $\omega = 40$ , se observa que el perfil de velocidades oscila por efecto de este valor de frecuencia. Es claro que, el perfil es simétrico y que presenta máximos y mínimos a ciertos valores de la coordenada axial  $x$ .
- Existe una frecuencia crítica  $\omega_c > 20$ , para la cual la frecuencia afecta el perfil de velocidades y este oscila para ciertos valores en las coordenadas axiales.

### 5.5 Perfil de velocidades del fluido viscoelástico lineal: Efecto del número adimensional “Alfa”



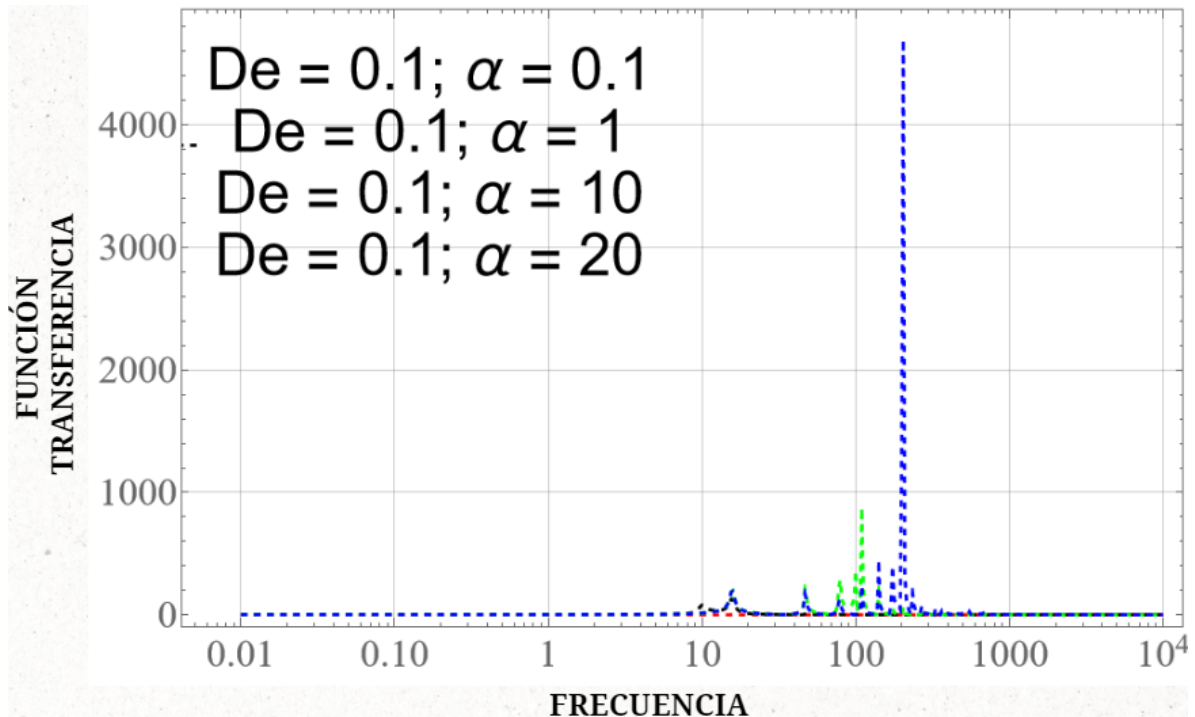
**Figura 7.** Ilustra el perfil de velocidades en función de la coordenada axial x, para diferentes valores del número adimensional  $\alpha$ . En esta simulación, se ha tomado el valor de la frecuencia  $\omega = 1$ .

La Fig. (7) muestra el perfil de velocidades en función de la coordenada axial x para diferentes valores del número adimensional  $\alpha$ . El valor de la frecuencia en esta simulación es  $\omega = 1$ . Los siguientes puntos son destacables de la Fig. (7):

- En el caso del valor  $\alpha = 0.1$ , se observa que el perfil es parabólico no presenta oscilaciones y se observa un perfil parabólico.
- Para  $\alpha = 1$ , se observa que el perfil de velocidades se modifica y se estrecha por efecto de que los mecanismos inerciales y térmicos están en equilibrio.
- Para  $\alpha = 10$  los mecanismos eléctricos dominan sobre los térmicos y se observa un efecto de máximos y mínimos en el perfil de velocidades.
- En todos los casos, el sistema es simétrico. En otros sistemas como en las coronas circulares, el perfil es asimétrico por efecto del contacto del líquido complejo y las dos áreas.

- e) Para  $\alpha = 20$  se observa un comportamiento muy parecido, excepto que hay un valor numérico menor en el caso de los máximos y mínimos del perfil de velocidades.
- f) Es claro que, el perfil de velocidades se ve afectado por los valores de la frecuencia  $\omega$ , mecanismos térmicos  $\alpha$  e inerciales a través del número de Deborah De.

## 5.6 Función de transferencia del flujo volumétrico en función de la Frecuencia y del número adimensional “Alfa”



**Figura 8.** Ilustra la función de transferencia de flujo vs. frecuencia para diferentes valores del número alfa, relacionado a los mecanismos electro - térmicos. En esta simulación los mecanismos inerciales y viscoelásticos del material están en equilibrio.

La Fig. (8) muestra el efecto del campo eléctrico y el flujo volumétrico en función del número adimensional  $\alpha$ , a través de la norma de la función de transferencia compleja. Es claro, que para ciertos valores de la frecuencia  $\omega$ , el sistema presenta resonancias debido al acoplamiento entre los mecanismos eléctricos/térmicos/inerciales y viscoelásticos.

Es claro que cuando el sistema presenta un  $\alpha \gg 1$ , el sistema es dominado por los mecanismos dispersivos, debido a los efectos de la energía cinética de las partículas. Cuando  $\alpha \ll 1$ , el sistema se orienta debido a que los eléctricos domina sobre los térmicos.

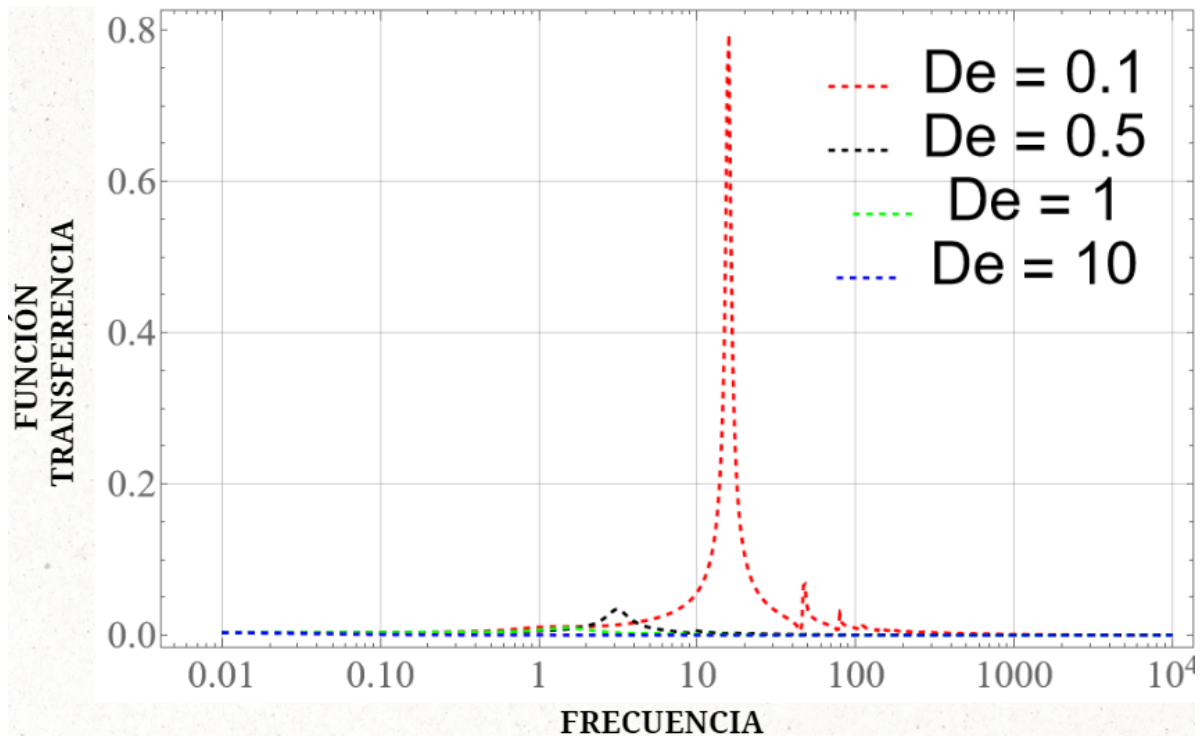
Esta, depende de las propiedades electro - térmicas a través del número adimensional alfa. Es claro que a un alfa es mucho mayor, el sistema presenta un pico resonante dominante seguido de un tren de picos secundarios. Esta simulación demuestra que existe una competencia entre los mecanismos eléctricos y térmicos. Las fuerzas eléctricas tienen orientadas a las partículas mientras que los térmicos aumentan la energía cinética y producen un mayor desorden por lo que la respuesta dinámica es mucho menor.

Los siguientes puntos importantes son resumidos a continuación:

- a) Los mecanismos térmicos aumentan la energía cinética de las partículas y por lo tanto la dispersión de estas.
- b) Los mecanismos eléctricos inducen el orden y tiene una consecuencia directa con la parte eléctrica en las propiedades de bulto.
- c) Para que un sistema presente oscilaciones debe de existir un campo eléctrico aplicado y, por lo tanto, un fluido con electrolitos para que exista un impulso. En este punto, el fluido viscoelástico contendrá la física necesaria para describir una oscilación.

En particular, en este trabajo de tesis, el sistema se analizará el comportamiento del campo eléctrico y el flujo volumétrico donde existe una competencia entre los mecanismos eléctricos y térmicos. En la siguiente sección analizaremos el fluido de Maxwell, pero a través del número de Deborah y de las propiedades materiales asociadas a este sistema.

### 5.7 Función de transferencia del flujo volumétrico en función de la Frecuencia y del número adimensional “Deborah”



**Figura 9. Ilustra la función de transferencia de flujo vs. frecuencia en función del número de Deborah.**

En la Fig. (9). Se representa la norma de la función de transferencia vs en función del número de Deborah. Los siguientes puntos destacables son mencionados de la Fig. (9):

- En la simulación, se observa una resonancia dominante, seguida de un tren de curvas de menor magnitud conforme la frecuencia aumenta o sus oscilaciones.
- El número de Deborah (De) es una competencia entre los mecanismos inerciales, geométricos, elásticos de bulto y viscoelásticos.
- Al incrementar el número de Deborah, se observa un decremento en la respuesta dinámica lineal.
- Al decrecer el número de Deborah, se observa un incremento en la respuesta dinámica lineal y el máximo valor en las curvas resonantes.
- El valor del máximo está definido por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas del material.

## 5.8 Resumen del análisis de los resultados obtenidos

Para la distribución de cargas en el fluido y en el sistema, se puede analizar que para los valores  $\alpha = 10$  y  $\alpha = 20$ , los mecanismos dispersan las cargas y los mecanismos eléctricos orientan las cargas.

Para el perfil de velocidades cuando el número adimensional “Deborah” varía en el sistema, se puede observar que, si se requiere un comportamiento viscoelástico,  $De = 1$ , con un perfil de velocidad parabólico y estable.

Cuando se tiene el perfil de velocidades con variaciones en la frecuencia en el sistema, se analiza que, para un perfil de velocidad máximo,  $\omega = 20$  Hz, y si no se quiere tener perturbaciones en el sistema, no se debe de aumentar la frecuencia en  $\omega = 40$  Hz. y  $\omega = 50$  Hz.

Si en el perfil de velocidades cuando existe el efecto del número adimensional “alfa”, se observó que para cuando  $\alpha = 1$ , la energía cinética de las partículas es moderada, la temperatura en el sistema es estable y se mantiene un perfil de velocidades parabólico.

Respecto a la función de transferencia del flujo volumétrico del fluido depende de la frecuencia y del número adimensional “alfa”, se analizó que hay una dominancia de los mecanismos dispersivos cuando  $\alpha \ll 1$ , por lo tanto, la temperatura es alta y las colisiones de las partículas son mayores. Por lo tanto, para cuando  $\alpha \gg 1$ , el sistema es dominado por los mecanismos eléctricos e inducen dirección y orden a las cargas.

Por último, cuando la función de transferencia del flujo volumétrico del fluido cuando este depende de la frecuencia y del número adimensional “Deborah”, se analizó que a una frecuencia entre  $10 \text{ Hz} < \omega < 100 \text{ Hz}$ , la resonancia es alta, con mecanismos viscosos dominantes. Y entre un rango de  $1 \text{ Hz} < \omega < 10 \text{ Hz}$ , existe resonancia baja, pero con mecanismos viscoelásticos dominantes en el sistema.

# **CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES**

## 6.1 Aportación al conocimiento

### 6.1.1 Conclusiones

En este trabajo se estudió el flujo electro-osmótico de un líquido viscoelástico fluyendo entre una rendija metálica con longitud  $L$ , anchura  $W$  y con un espesor  $2H$ , donde  $L, W > 2H$ . El sistema es deformado continua e irreversiblemente por efecto de un campo eléctrico complejo.

La interacción del fluido con el electrólito induce en las paredes del sistema (rectangular), una carga en las paredes por efecto de los procesos interfaciales y la porosidad del material. En las paredes del sistema se induce una primera capa de electrones negativa y por atracciones electrostáticas entre la pared y el fluido, se induce una carga positiva, la cual, a su vez, promueve por atracciones eléctricas una segunda capa negativa. El espesor de estas capas (Negativa/Positiva/Negativa) se conoce como longitud de Debye  $\lambda_D$ . Para caracterizar la transferencia de momento, se empleó el modelo reológico convectivo superior de Maxwell, el cual en flujo cortante simple se reduce al modelo de Maxwell.

Los objetivos de esta investigación fueron los siguientes:

- a) Calcular las funciones materiales y dinámicas del sistema como son: la distribución de cargas, perfil de velocidades, y flujo volumétrico.
- b) Aplicar el formalismo de Fourier para obtener una ecuación dinámica lineal en términos de la frecuencia que describa la relación entre la variable de entrada (campo eléctrico) y la variable de salida (flujo volumétrico).
- c) Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que permitan describir el sistema físico. Que describan las fuerzas macroscópicas.
- d) Programar los códigos computacionales en el lenguaje de Wolfram-Mathematica y realizar las simulaciones del sistema.

Para alcanzar los objetivos de (A-D) se supuso que el sistema se encuentra en estado no estacionario, el fluido electro-reológico es incompresible, i.e., su densidad es constante, el flujo es unidireccional, es decir el vector velocidad solo depende la componente en  $x$ , i.e.,  $V_z = V_z(x,t)$ . Además, se supone que es válida la aproximación de Hückel-Debye, en el sistema.

La estrategia para llevar a cabo este proyecto de investigación a nivel licenciatura, es utilizar la ecuación de continuidad (conservación de la masa sin generación), la ecuación de movimiento en sus tres componentes, e incorporar la distribución de cargas en la componente z de la ecuación de movimiento. Al combinar las ecuaciones de movimiento en z, y la componente reológica de la ecuación de Maxwell, se obtiene una ecuación diferencial parcial, dependiente de la posición y del tiempo. Este modelo, se puede interpretar como una ecuación de Navier-Stokes modificada por una función que depende de la derivada parcial temporal  $\partial/\partial t$ . Este operador se puede interpretar como una viscosidad o fluidez isotrópica y solo es válida para bajas deformaciones.

Asumiendo, que en la interfase se cumple la condición de no-deslizamiento en la pared, y utilizando el formalismo de Fourier, el cual consiste en transformar el tiempo y los operadores temporales al espacio de las frecuencias, se obtuvo una ecuación diferencial que describe los cambios de la velocidad en función del espacio y de la frecuencia. Suponiendo que, en el centro de la rendija metálica, la velocidad es continua, se obtiene una expresión analítica para el perfil de velocidades, y la primera función de transferencia compleja del sistema. Esta función de transferencia  $T(x, \omega)$  es no-homogénea y depende de la coordenada espacial  $x$  y de la frecuencia  $\omega$ . Al integrar la función de transferencia con respecto a la coordenada  $x$ , se tiene la función de transferencia compleja del flujo volumétrico la cual, básicamente es una ecuación promediada en el espacio. El flujo volumétrico  $Q_v(t, \omega_0)$ , se puede expresar como el producto del flujo volumétrico Newtoniano  $Q_N(t, \omega_0)$ , función de transferencia compleja y el campo eléctrico oscilatorio.

$$Q_v(t, \omega_0) = Q_N T(\beta, \omega_0) E(t, \omega_0)$$

Para facilitar la interpretación de resultados y las fuerzas microscópicas del sistema, se propone un conjunto de variables adimensionales, las cuales introducen grupos físicos como el número de Deborah ( $De$ ) y  $\alpha$ . Estos números relacionan los mecanismos inerciales y viscoelásticos y el segundo está relacionado a los mecanismos eléctricos y térmicos. Estos números dependen las propiedades materiales del sistema, como son: (i) tiempos de

relajación, (ii) Tiempos de retardo, (iii) Tiempos geométricos, (iv) Viscosidades y (v) Módulo de corte.

Los resultados, el análisis y las conclusiones de este trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- a) Si se quiere una distribución de cargas, en donde los mecanismos dispersivos (térmicos) dispersen las cargas en la interfase sólido-fluido y exista una orientación de las cargas de los mecanismos eléctricos en una dirección hacia centro del sistema o seno del fluido,  $\alpha = 10$  y  $20$ .
- b) Si se quiere tener un comportamiento viscoelástico en el sistema, donde se tenga un perfil de velocidades estable y parabólico, el número adimensional “Deborah” debe de ser  $De = 1$ . Pero si se quiere tener un perfil de velocidad máximo en el sistema de estudio, el número adimensional “Deborah” debe de ser  $De = 0.1$ , pero teniendo en cuenta que el fluido tendrá un comportamiento viscoso o de tipo Newtoniano.
- c) Respecto a la frecuencia, si se quiere tener un perfil de velocidades máximo y estable, sin que presente perturbaciones en el sistema, la frecuencia debe de tener un valor de  $20$  Hz.
- d) Si se tiene un perfil de velocidades de tipo parabólico donde existe el efecto de los mecanismos eléctricos y térmicos en el sistema, el número adimensional “Alfa” debe de tener un valor de  $\alpha = 1$ , para que exista una energía cinética de las partículas moderada, por lo tanto, una temperatura estable en el sistema de estudio.
- e) Si se tiene la función de transferencia del flujo volumétrico donde depende de la frecuencia y el número adimensional “Alfa”, y se quiere una dominancia de los mecanismos eléctricos donde inducen dirección y orden a las cargas del campo eléctrico,  $\omega > 100$  Hz.
- f) Y si se tiene la función de transferencia cuando depende de la frecuencia y del número adimensional “Deborah”, si se quiere tener un comportamiento viscoelástico dominante en el sistema, la frecuencia debe de estar en un rango de  $1 \text{ Hz} < \omega < 10 \text{ Hz}$ .

## 6.2 Trabajo futuro

En este trabajo, se estudia el flujo electroosmótico puro (FEP) de un fluido viscoelástico modelado con la ecuación convectiva superior de Maxwell. Este modelo contiene dos propiedades materiales que están ligadas a través del módulo elástico de corte. Las líneas naturales en la continuación de esta investigación se encuentran, pero no limitándose a, los siguientes puntos:

- a) Estudios teórico para incluir mecanismos viscosos a bajo y alto corte, tiempos viscoelásticos, tiempos de retardo y tiempos no newtonianos del sistema (geométricos, ruptura, reestructuración, etc).
- b) Simulaciones computacionales robustas incluyendo mecanismos acoplados de transferencia de momento, energía y materia.
- c) Experimentos reométricos para calcular las propiedades materiales e incluirlos los valores en las predicciones numéricas.
- d) Protocolos experimentales basados en comités de bioética con el fin de obtener muestras biológicas de sangre y alimentar las predicciones de nuestros modelos.
- e) Incluir mecanismos como son tamaño de iones, efectos de volumen excluido.

Finalmente, este proyecto representa una búsqueda constante de conocimientos centrados en las áreas de fenómenos de transporte y reología de fluidos que proporcionen nueva información con el fin de apoyar a la solución de problemáticas presentadas en la rama de bio-ingeniería.

## Glosario

<b><i>Campo eléctrico:</i></b>	Un campo eléctrico es un campo de fuerza creado por la atracción y repulsión de cargas eléctricas (la causa del flujo eléctrico).
<b><i>Capa de Debye-Hückel:</i></b>	Describe una mezcla de iones (electrolitos), inmersos en un medio dieléctrico continuo de temperatura, presión y concentración molar y relaciona la conductividad eléctrica del medio en soluciones electrolíticas.
<b><i>Deformación:</i></b>	Es el cambio que sufre un cuerpo al aplicarle cierta fuerza.
<b><i>Densidad de carga eléctrica:</i></b>	Relaciona la cantidad de carga eléctrica en un volumen, superficie o línea determinada y describe cómo se distribuye la carga eléctrica en el espacio.
<b><i>Ecuación Constitutiva:</i></b>	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, esfuerzo, deformación).
<b><i>Ecuación de continuidad:</i></b>	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia de un sistema físico.
<b><i>Ecuación de movimiento:</i></b>	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
<b><i>Esfuerzo en pared:</i></b>	Dirección de fuerza aplicada y evaluada en el límite del sistema (pared).
<b><i>Estado estacionario:</i></b>	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
<b><i>Fluido:</i></b>	Es toda sustancia que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación tangencial e irreversible.
<b><i>Flujo:</i></b>	Es la acción de algún cuerpo, en este caso la masa, que fluye a través de una superficie o sustancia.
<b><i>Flujo cortante:</i></b>	Flujo que aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
<b><i>Flujo electroosmótico:</i></b>	Es un tipo de flujo en donde al aplicarle un campo eléctrico externo, se genera un movimiento de este por las cargas eléctricas en la superficie de la pared del sistema y las cargas en el fluido.
<b><i>Flujo homogéneo:</i></b>	Es el flujo en donde dos fases presentan un promedio de sus propiedades físicas y su posición no se ve afectada en las propiedades del sistema.
<b><i>Flujo laminar:</i></b>	Tiene un comportamiento que se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse y cada particular sigue una trayectoria paralela y lineal.
<b><i>Flujo lineal:</i></b>	Es descrito por trayectorias paralelas y lineales y fluye en una sola dirección.
<b><i>Flujo oscilatorio:</i></b>	Se refiere a un flujo con movimientos de expansión, contracción, oscilantes y fuerzas periódicas.
<b><i>Flujo pulsátil:</i></b>	Se refiere a un flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil con movimientos de expansión, contracción y oscilantes y fuerzas periódicas.
<b><i>Flujo volumétrico:</i></b>	Volumen por unidad de tiempo.
<b><i>Fluido incompresible:</i></b>	Fluido que tiene una densidad constante.

<b>Fluido newtoniano:</b>	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
<b>Fluido no-newtoniano:</b>	La viscosidad no es constante y varía con la tensión cortante.
<b>Fluido viscoelástico:</b>	Es aquel fluido que tiene características viscosas y elásticas.
<b>Frecuencia:</b>	Frecuencia de movimiento, puede ser expresada en proporción al cambio de dirección periódico o ángulo.
<b>Intensidad del campo eléctrico:</b>	Es la intensidad de la fuerza por unidad de carga positiva. Cualquier partícula cargada crea un campo eléctrico a su alrededor.
<b>Modelo constitutivo de Maxwell:</b>	Ecuación constitutiva que describe el comportamiento reológico de fluencia, relajación y recuperación de sistemas con comportamiento viscoelástico.
<b>Número de Deborah:</b>	Se utiliza para caracterizar sustancias de acuerdo con su comportamiento elástico/viscoso/viscoelástico.
<b>Potencial eléctrico:</b>	Es una magnitud escalar en un punto del espacio que permite obtener una medida del campo eléctrico que adquiere una carga si está en ese punto.
<b>Rapidez de deformación:</b>	Rapidez con la que se deforma un sistema.
<b>Tensor de esfuerzo:</b>	Matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en la cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
<b>Tiempo de relajación:</b>	Tiempo necesario para el sistema con el fin de alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo de esfuerzo.
<b>Tiempo de retardo:</b>	Tiempo que necesita el sistema para llegar a un equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo cortante.
<b>Velocidad promedio:</b>	Velocidad axial promediada a través del área de flujo.
<b>Viscoelasticidad:</b>	Es una propiedad de los fluidos que presentan viscosidad y elasticidad, donde presentan cierta resistencia y deformaciones con la capacidad de ser reversibles.
<b>Viscoelasticidad lineal (Fluido de Maxwell):</b>	Es una región a bajas deformaciones. En esta zona el fluido presenta respuestas viscosas (fluidez) y elásticas (solidez) constantes.
<b>Viscoelasticidad no lineal:</b>	Es una región a bajas deformaciones. En esta zona el fluido presenta respuestas viscosas (fluidez) y elásticas (solidez) variables.
<b>Viscosidad:</b>	Es una propiedad de los fluidos en donde presentan cierta resistencia a su movimiento.

## Referencias

Abou-Dakka M, Herrera-Valencia EE, Rey AD (2012) Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J Non-Newton Fluid Mech* 185-186:1–17.

Afonso AM, Alves MA, Pinho FT. Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 159 (2009) 50–63.

Afonso AM, Alves MA, Pinho FT, Electro-osmotic flows of viscoelastic fluids in microchannels under asymmetric zeta potential, *J. Eng. Math.* 71 (2011) 15-30.

Berli CLA, Olivares ML. Electro-kinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels, *J. Colloid Interface Sci.* 320 (2008) 582–589.

Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1977) *Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics*, (1977) Wiley, New York

Byron Bird R, Armstrong RC, Hassager O (1987) *Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc.

Chakkraborty S. Dynamics of capillary flow of blood in to a micro fluidic channel, *Lab-on-a-chip* 5 (2005) 421–430.

Chopin DM, *Principios básicos de electroforesis capilar: técnica analítica de separación analítos*, Tecnología en salud, 1 (2012) 86-89.

Ferrás LL, Cavadas AS, Resende AS, Afonso AM, Pinho FT. Effect of the solvent viscosity of pure electro-osmotic Flow of viscoelastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 259 (2018) 125–129.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Soriano-Correa C, Ramírez-Torres LA, Hernández-Abad VJ, Calderas F (2023) Study of the electroosmotic flow of a structured fluid with a new generalized rheological model. *Rheol Acta* **63**: 3-32.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano-Correa C, Nuñez-Ramírez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). *Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana*. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2023) Fluctuating Flexoelectric Membranes in Asymmetric Viscoelastic Media: Power Spectrum through Mechanical Network and Transfer Function Models. *Symmetry*. **15**:1-36.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Medina-Torres L, Nuñez Ramírez DM, Hernandez Abad VJ, Calderas F, Manero O (2019) New simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid. *Phys Fluids* **31**: 063104-1/17.

Khadem SA, Rey AD (2019a). Theoretical platform for liquid-crystalline selfassembly of collagen-based biomaterials, *Frontiers in Physics* **7**:1-15

Khadem SA, Rey AD (2019b) Thermodynamic modelling of acidic collagenous solutions: from free energy contributions to phase diagrams. *Soft Matt.* **15**: 1833.

Khadem SA, Rey AD (2021) Nucleation and growth of cholesteric collagen tactoids: A time-series statistical analysis based on integration of direct numerical simulation (dns) and long short-term memory recurrent neural network (lstm-rnn). *J. Coll. Inter. Sci.* **582**: 859.

Ramírez-Torres LA, Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Soriano-Correa C, Hernández-Abad VJ, Calderas F (2024) Non-linear electro-rheological model of membrane

immersed in Tanner-Power law fluids applied to outer hair cells: Shear-thinning mechanisms, *Phys. Fluids* **36**: 033111.

Ramírez-Torres LA, Medina-Torres L, Calderas F, Núñez-Ramírez DM, Manero O (2023) Rheology and Hydrodynamics of Iron Ore Mineral Pulps during a Bioleaching Process in a Continuous Stirred-Tank Reactor. *Chem. Eng. Tech.* **46**: 670.

Rey AD, Servio P, Herrera-Valencia, EE (2014) Stress-sensor device based on flexoelectric liquid crystalline membranes, *ChemPhysChem* **15**:1405-1412.

Sourav M, Sirshendu D. Effects of non-Newtonian power law rheology on mass transfer of a neutral solute for osmotic flow in a porous microtube, *Biomicrofluidics* **7** (2013) 044113.

Stone HA, Stroock AD, Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a Lab-on-a-Chip, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004) 381–411.

Wang C, Wong TN, Yang C, Ooi KT. Characterization of electro-osmotic flow in rectangular microchannels, *Int. J. Heat Mass Transf.* **50** (2007) 3115–3121.

Yang C, Li D. Electrokinetic effect on pressure-driven liquid flow in rectangular microchannels, *J. Colloid Interface Sci.* **194** (1997) 95–107.