

**LA ATENUACION DEL SONIDO EN  
FLUIDOS VISCOSOS**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**F I S I C O**  
**P R E S E N T A**

**FRANCISCO EDUARDO RIVERA PORTO**

**MEXICO, D. F.**

**MAYO, 1972**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A MIS PADRES .**

HAGO PATENTE MI AGRADECIMIENTO AL:

DR. FERNANDO DEL RIO H., POR SU DIRECCION -  
EN ESTE TRABAJO, ASI COMO POR LA FORMACION-  
CIENTIFICA QUE DE EL RECIBI.

EXPRESO MI RECONOCIMIENTO A LA FOUNDATION -  
FOR OVERSEAS RESEARCH GRANTS AND EDUCATION,  
SU AYUDA ECONOMICA QUE HIZO POSIBLE LA REA-  
LIZACION DE ESTE PRIMER PROYECTO DE ULTRASO  
NIDOS EN LIQUIDOS.

## INTRODUCCION.

El conocimiento de cualquier propiedad de los líquidos, nos puede dar mucha luz sobre la explicación de su estructura. Tal es el caso de la Viscosidad, la cual está descrita por dos coeficientes, el cortante  $\eta$ , y el volumétrico  $b$ ; este último que por -- años se había ignorado, resulta ser muy importante, recordemos lo dicho por Tisza<sup>11</sup> quien fue su redescubridor:

"Es obvio que el conocimiento de  $b$  puede resultar útil en la investigación de los líquidos. Sin embargo la interpretación molecular de los resultados experimentales puede ser difícil en vista de los diferentes mecanismos que contribuyen a  $b$ ".

Hasta ahora, la única manera de medir tal coeficiente  $b$ , - es midiendo la atenuación ó absorción del sonido en los fluidos. - Es por esto nuestro interés en la atenuación del sonido en los --- fluidos viscosos.

La absorción del sonido es un fenómeno por el cual se transforma ó disipa la energía del sonido en el medio, debido a diversas causas. Una de las más importantes es la Viscosidad.

Intuitivamente la viscosidad, está relacionada con el hecho de que tan fácil ó difícil puede fluir un líquido, es decir aparece una fricción interna que hace que unos líquidos fluyan más fácilmente - que otros; y en cuanto fricción es una manifestación de la irrever- sibilidad termodinámica del movimiento.

Es por esto necesario describir el estado de movimiento de un fluido, y esto es lo que se hace en la primera parte (Hidrodinámica-

ca) del primer capítulo, posteriormente ya que estamos interesados precisamente en la propagación del sonido en los fluidos, se tratan las ecuaciones de la acústica en la segunda parte de ese capítulo.

El segundo capítulo trata de un parámetro muy importante en la determinación de la viscosidad: la velocidad del sonido, por ser más fácil, comenzamos con la velocidad del sonido en los gases, partiendo del gas ideal, para luego aproximarnos a los gases reales a través de la ecuación de Van der Waals y del desarrollo virial. Como para los líquidos no se tienen buenas ecuaciones de estado, se estudia la velocidad del sonido según diversos modelos de líquidos (Eyring, Tonks), se finaliza el capítulo señalando las principales técnicas para medir la velocidad del sonido en los líquidos.

En el siguiente capítulo (III) abordamos el complejo problema de la absorción del sonido, discutimos sobre todo el papel de la viscosidad en la atenuación, el coeficiente cortante y la introducción del coeficiente volumétrico. se discute a continuación la conducción y la radiación del calor como procesos de absorción. Como apéndice a este capítulo se discute como pueden ser interpretados estos mecanismos como procesos de relajación, y se enumeran otros procesos de relajación. para terminar el capítulo se mencionan los métodos principales para medir la atenuación del sonido en los líquidos.

En un último capítulo (IV), se detalla la construcción de un-

aparato y el experimento realizado con él, para medir la velocidad del sonido en el agua y el coeficiente de absorción en el agua salada, obteniendo también el coeficiente volumétrico de viscosidad. Como apéndice a este capítulo se discute cómo afecta el factor geométrico a la atenuación del sonido, debido al hecho de que no se tiene una fuente puntual.

Esta tesis formó parte de un proyecto del Centro de Investigación de Materiales de la U.N.A.M., al cual quiero agradecer su ayuda; particularmente a las personas que laboran en dicho Centro, así como a todos los que de alguna forma me ayudaron a la realización de este trabajo.

## CAPITULO I

## ECUACIONES FUNDAMENTALES.

## A. HIDRODINAMICA.

A.1 GENERALIDADES. para describir macroscópicamente el movimiento de un fluido, nos basta considerar a un volumen "infinitesimal" de fluido, en el que habrá un número grandísimo de moléculas que componen al fluido. Una manera conveniente de hacer esta descripción, es en términos de la velocidad de fluido (es decir, dado un elemento de fluido, consideramos su velocidad en cada punto  $(x, y, z)$  en el instante  $t$ , y no la velocidad individual de las partículas del fluido que se desplazan a través del punto  $(x, y, z)$  en un tiempo  $t$ ), y de 2 variables termodinámicas por ejemplo, la presión  $P(x, y, z, t)$  y de la densidad  $\rho(x, y, z, t)$ .

Cuando el intercambio masa-energía es despreciable, es decir, cuando las velocidades consideradas son muy pequeñas comparadas -- con la velocidad de la luz, ó cuando los procesos de almacenamiento de energía ó de relajación interna en las estructuras de la materia tienen un equivalente en masa prácticamente no medible, podemos postular entonces que la materia (cantidad de masa) se conserva.

Aplicando esta ley de conservación de la masa al fluido que sale ó entra de una superficie cerrada  $S$  y aplicando el teorema de

la Divergencia (\*) obtenemos  $\int_V (\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{d\rho}{dt}) dV = 0$   
 donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie considerada.

Como este resultado es válido para cualquier volumen  $V$ , se tiene que  $\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$  (1)

a esta ecuación se le llama de Continuidad.

Si definimos a la Densidad de Flujo de Masa  $\vec{j} \equiv \rho \vec{v}$ , la ecuación (1) expresa, que la variación de punto a punto de  $\vec{j}$ , es debida a la variación de la cantidad de masa entre esos puntos.

La primera consecuencia interesante de la ecuación de Continuidad, es para el caso de un fluido incomprensible, en el que no importa en que punto ó en que tiempo, el fluido tiene densidad constante; para ello desarrollemos a (1)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (2)$$

como  $\rho = \text{constante}$ , se nos reduce a  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

La ecuación de continuidad, se refiere sólo a la cinemática de un fluido, si queremos referirnos a su dinámica, tenemos que saber como varían las fuerzas, de que dependen, y observar que conclusiones podemos obtener a partir de ellas.

Es conveniente para esto, aislar un cierto volumen del fluido y observar que la fuerza que se ejerce por unidad de volumen es igual a  $-\int_S P d\vec{f}$ ; donde  $d\vec{f}$  es la diferencial de la superficie  $S$ . Aplicando la Segunda Ley de Newton, obtenemos:

$$-\int_S P d\vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

(\*) Se le conoce también como Teorema de Gauss, Teorema de Green, o Fórmula de Ostrogradsky.

Por un lado sabemos que la velocidad es función de las coordenadas y del tiempo, por lo tanto

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t};$$

por otro lado, aplicando la primera identidad de Green (\*), nuestra fuerza por unidad de volumen será igual a  $-\int_V \text{grad } P \, dV$ ,

juntando estos resultados obtenemos:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } P = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (3)$$

A (3) se le conoce como ecuación de Euler.

Si no hay intercambio de calor entre las diversas partes de nuestro fluido, éste será adiabático (es decir, con entropía  $S$  -- constante ó isentropico). Tenemos entonces que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } s = 0,$$

como estamos suponiendo que el fluido es incomprensible, incluimos la condición (2) obteniendo

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s + s \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (s \vec{v}) = 0$$

y multiplicando esta ecuación -

por  $\rho$  se tiene: 
$$\frac{d}{dt} (\rho s) + \text{div} (\rho s \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación de Adiabaticidad, tiene la forma de la Ecuación de Continuidad.

Como es difícil medir directamente a la entropía, la eliminaremos de (4), utilizando la definición de la entalpía  $W = U + P \cdot V$  ( $U$  es la Energía interna). Se puede hacer ver que  $dw = T ds + v dP$  (donde  $T$  es la temperatura, y  $w, s, v$ , son las diferenciales de la -

$$(*) \int_V \{ \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \} dV = \int_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S};$$

entalpía, entropía y volumen específicos).

Debido a la isentropicidad:  $ds = 0$ , nos queda simplemente  $dw = v dP = \frac{1}{\rho} dP$  de donde obtenemos que:  $\vec{\nabla} \omega = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$ ; sustituyendo en la ecuación de Euler (3):

$$-\text{grad } \omega = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$$

Aplicando el operador rotacional a ambos miembros, y sabiendo que  $\text{rot}(\text{grad } \omega) = 0$  obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v}) = \text{rot} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) \quad (5)$$

Ya que el movimiento de un fluido, es determinado por 5 magnitudes, por ejemplo:  $\vec{v}, P, \rho$  entonces el sistema completo de ecuaciones de la hidrodinámica son 5. En el caso del fluido ideal (\*) son: la ecuación de continuidad (1), 3 ecuaciones provenientes de la ecuación vectorial de Euler (3), y la que expresa la adiabaticidad (4).

Sin embargo son los fluidos reales los que nos interesan, -- por ello si a nuestro fluido ideal lo metemos dentro del campo gravitacional sobre la superficie terrestre, existe una fuerza extra por unidad de volumen  $\rho \vec{g}$  y nuestra ecuación de Euler (3) se --- transforma en  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g}$  donde  $\vec{g}$  es la aceleración de la gravedad.

(\*) Se llama fluido ideal (algunos autores lo llaman perfecto), por que hemos hecho caso omiso de las condiciones reales de los -- fluidos, como su compresibilidad, termoconducción, viscosidad, de que el fluido esté en un recipiente, que esté dentro del -- campo gravitacional, etc.

El hecho de que el fluido esté en un recipiente, se expresa en que  $v_n = 0$  (la velocidad del fluido normal a la pared del recipiente es cero, ya que el fluido no atraviesa la pared). Sin embargo como en todas las paredes hay fenómenos de cohesión, las partículas adyacentes a la pared tienen  $\vec{v} = 0$ .

Las otras condiciones para ir modificando la ecuación de fluido ideal en real, merecen ser tratadas por aparte ya que tienen una influencia considerable en los fenómenos de absorción. El hecho de que el fluido sea viscoso, es introducido a continuación, mientras que el hecho de que el fluido sea compresible o que exista termoconducción son fenómenos que se nos revelan cuando hay una perturbación en el fluido y son tratados en el inciso de Acústica.

A.2 EL FLUIDO VISCOSO. La viscosidad está asociada a procesos de disipación de energía cuando el fluido está en movimiento y estos procesos son una manifestación de irreversibilidad termodinámica del movimiento.

Lo más conveniente para describir al fluido viscoso, es partir de las ecuaciones para el movimiento del fluido ideal, y a éstas agregarles términos que nos describan el comportamiento con la nueva propiedad (viscosidad).

La ecuación de continuidad no se altera, ya que no importa que el fluido sea viscoso ó no, de todas maneras se conserva la masa.

Para estudiar los efectos sobre la ecuación de Euler, expresémosla en términos del flujo de impulso, ya que como veremos más-

adelante la viscosidad se puede explicar como un proceso irreversible en el transporte de impulso entre regiones con diferentes velocidades.

El impulso por unidad de volumen del fluido es  $\rho \vec{v}$ . Es conveniente usar la notación tensorial, suponiendo que los índices latinos  $i, j, k$ , etc. van de 1 a 3 correspondiendo a los ejes  $x, y, z$ , respectivamente; también se usa la convención de Einstein para la suma de índices repetidos.

Así la variación del impulso se escribe: (6)

$$\frac{d}{dt} \rho v_i = \rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{d\rho}{dt} v_i$$

La ecuación de continuidad nos queda como (7)

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Y la ecuación de Euler se transformará en (8)

$$\frac{dv_i}{dt} = - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Ya que están en esta nueva notación, sustituimos el flujo de impulso (6) en (7)  $\frac{d(\rho v_i)}{dt} = \rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} v_i$  y sustituyendo en ésta última el resultado de (8) y agrupando (9)

$$\frac{d}{dt} (\rho v_i) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} P + \rho v_i v_k)$$

donde  $\delta_{ik}$  es el tensor delta de Kronecker (cuyo valor es 1 si  $i = k$ , y 0 si  $i \neq k$ ). De la ecuación (9) parece conveniente definir al tensor  $\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k \dots \dots (10)$ , el cual es evidentemente simétrico y de rango 2. Con lo cual nuestra ecuación (9) de Euler sencillamente se escribe como  $\frac{d}{dt} (\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \dots (11)$ .

Para ver el sentido de este tensor  $\Pi_{ik}$  integramos en un cierto volumen  $V$  a (11) y aplicando el teorema de la divergencia-

obtenemos: 
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \pi_{ik} df_k .$$

A la izquierda tenemos la variación por unidad de tiempo de la  $i$ -ésima componente del impulso en el volumen considerado, por lo tanto a la derecha tenemos la cantidad de esa componente del impulso que "sale" de la superficie que encierra al volumen, por unidad de tiempo. Es decir que  $\pi_{ik}$  es la  $i$ -ésima componente del impulso que atraviesa el elemento  $df_k$  de la superficie. Si a  $df_k$  lo escribo como  $df \cdot n_k$ , siendo  $n_k$  el vector unitario normal a la superficie exterior, entonces  $\pi_{ik} n_k$  es el flujo de la  $i$ -ésima componente del impulso por unidad de área. Y debido a (10) :  $\pi_{ik} n_k = \rho n_i + \rho v_i (v_k n_k)$ . Entonces  $\pi_{ik}$  es la  $i$ -ésima componente del impulso que pasa por unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular al eje  $\lambda_k$ , por eso se le llama "Tensor de densidad de Flujo de Impulso" y representa al transporte del impulso puramente reversible, relacionado al desplazamiento mecánico de diferentes regiones del fluido. Es claro que si  $\vec{n} = n_k$  tiene la misma dirección que  $\vec{v} = v_k$ , el transporte de impulso es longitudinal y de magnitud  $\rho + \rho v^2$ .

Una vez explicada la ecuación (11), estamos preparados para introducir la viscosidad. Para lo cual consideremos una región A del fluido cuyas partículas tienen una velocidad promedio  $\vec{v}_A$  y una región B (contigua a A) con partículas de velocidad promedio  $\vec{v}_B$  paralela a  $\vec{v}_A$ . Podemos esperar que exista un intercambio de partículas entre las regiones A y B, pero como las partículas tienen masa y velocidad, podemos hablar de flujo de impulso entre A y

B. Supongamos que  $\bar{v}_B < \bar{v}_A$ , entonces el flujo de impulso de B a A tenderá a "frenar" a las partículas de A, y el flujo de impulso de A a B tenderá a "acelerar" a las partículas de B. Este proceso, es estudiado por la teoría Cinética y la Mecánica Estadística, da como resultado macroscópico que se tiendan a equilibrar las velocidades  $\bar{v}_A$  y  $\bar{v}_B$ , a través de un proceso irreversible en que hay disipación de energía, esto es cualitativamente la viscosidad; por eso a veces se le llama "fricción interna".

Debido a estas consideraciones, introducimos la viscosidad, agregando un término  $\tau_{ik}$  al tensor flujo de impulso en la ecuación de Euler (11), y  $\tau_{ik}$  nos representa el flujo de impulso ó fuerza por unidad de área que actúa en un plano perpendicular al eje  $i$  en la dirección al eje  $k$ . Sin embargo se ha acostumbrado conservar la forma de la ecuación de Euler (11), redefiniendo al flujo de impulso como  $\pi_{ik} = P_{ik} + \rho v_i v_k - \tau_{ik}$  (12).

Para tener bien descrito a nuestro fluido viscoso, sólo nos basta encontrar de qué depende  $\tau_{ik}$  y cómo es tal dependencia.

Observemos, para esto que  $\tau_{ik}$  proviene del frotamiento de diferentes regiones del fluido, que se mueven con velocidades diferentes (debido a que hay un movimiento relativo de partículas de diferentes velocidades en el fluido), entonces  $\tau_{ik}$  debe depender de cómo cambian las velocidades de las partículas del fluido con respecto a sus coordenadas, es decir depende de las derivadas de la velocidad del fluido respecto a su posición. Si estos cambios

son pequeños el término de la primera derivada domina a las demás -- y es tal, que este término es lineal; esta aproximación resulta -- ser muy útil.

Aún más, en el caso en que la velocidad en todo el fluido -- sea uniforme, sabemos por nuestro modelo de viscosidad que  $\tau_{ik} = 0$ , por eso inferimos que no deben existir términos en  $\tau_{ik}$  que no dependan de  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \text{grad } v_i$ , para que en este caso  $\tau_{ik}$  se anule.

Por otra parte, si el fluido como conjunto gira uniformemente es decir si  $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0$  donde  $\Omega$  es la velocidad angular, también  $\tau_{ik}$  se deberá anular, y debido a que  $\vec{\Omega} = \vec{r} \times \vec{j}$  resulta que --  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0$ , por lo que inferimos que  $\tau_{ik}$  debe tener precisamente a estas combinaciones simétricas:  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ .

Si aparte suponemos al fluido isotrópico es decir que sus -- propiedades no dependen de la dirección, entonces puede ser caracterizado por escalares.

La forma más general del tensor de segundo rango que satisfaga todas las condiciones anteriores es:

$$\tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \eta' \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik}$$

con los coeficientes de proporcionalidad  $\eta$  y  $\eta'$  independientes de -- la velocidad.

En particular, la ecuación anterior la puedo escribir como:

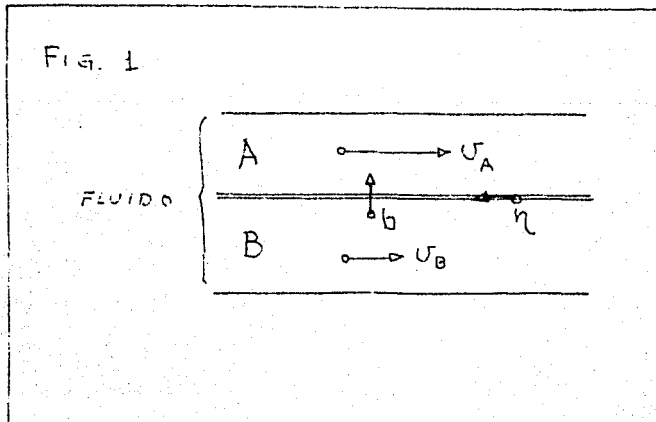
$$\tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + b \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (13)$$

donde  $\eta' = b - \frac{2}{3} \eta$       y       $b = \eta' + \frac{2}{3} \eta$

Aparentemente la agrupación hecha en (13) no tiene ningún -- sentido, pero si se calcula la suma de las componentes tales que --

$i = k$ , es decir la traza, el término entre paréntesis se contrae y se anula, es decir, elimino las componentes longitudinales (i en la dirección de k) quedándome sólo con las perpendiculares (es decir, el flujo de impulso está en éste caso en dirección perpendicular a la velocidad del fluido).

Por eso el coeficiente de proporcionalidad  $b$ , de una medida del flujo del impulso en dirección perpendicular a la velocidad -- del fluido, es decir, no sólo del flujo en una dirección sino en todo el volumen que rodea a la región. Entonces el coeficiente de proporcionalidad  $\eta$  da una medida del flujo de impulso tangencial-- en la misma dirección de velocidad del fluido, es decir, actúa sólo en la superficie que separa a 2 regiones de diferentes velocidades, me corta o divide a esas regiones (ver fig. 1)



Por eso se les acostumbra llamar a:

$\eta$  1er. coeficiente de viscosidad o coeficiente de viscosidad - cortante,

$\bar{b}$  Coeficiente de viscosidad volumétrica (bulk viscosity),

$\eta'$  2o. coeficiente de viscosidad.

Las unidades de  $\eta, \bar{b}, \eta'$  son  $1 \text{ poise} = \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{seg}} = \frac{\text{dina} \cdot \text{seg}}{\text{cm}}$

( $\eta$  y  $\bar{b}$  son siempre positivos).

Para tener una idea de los valores de  $\eta$  tomemos el del agua a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\eta = 0.010019 \text{ poise}$ . (\*)

A veces es útil la razón  $\eta/\rho$  sobre todo cuando  $\rho$  es constante, a esta razón se le llama coeficiente de viscosidad dinámica y a sus unidades en cgs se les llama stokes.

Ahora bien la ecuación de Euler (11), usando las definiciones (12) y (13), nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho v_i) &= - \frac{d}{dx_k} (P \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \bar{\sigma}_{ik}') = \\ &= - \frac{d}{dx_k} \left\{ P \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \eta \left( \frac{dv_i}{dx_k} + \frac{dv_k}{dx_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{dv_j}{dx_j} \right) - \bar{b} \delta_{ik} \frac{dv_j}{dx_j} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Notemos que tanto en la ecuación (11) como en la (14) no hemos pedido al fluido que sea incompresible. Si ahora incluimos este hecho en (14), a la cual desarrollamos, usamos (2) y agrupamos, obteniendo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (15)$$

donde  $\Delta \vec{v} = \frac{d^2 v_i}{dx_k^2}$ .

A esta ecuación se la conoce con el nombre de Navier-Stokes.

Es necesario aclarar que en la deducción de (15) utilizamos-

(\*) Ver bibliografía, referencias 14, 16 y 17.

el hecho de que  $\eta$  y  $b$  fueran constantes lo cual no es estrictamente cierto, más que a la primera aproximación, como veremos en el capítulo III;  $\eta$  y  $b$  son funciones en general de  $P$  y  $T$  (temperatura) que a su vez son funciones de  $x_1$  y  $t$ . Notemos además, que para el fluido incomprensible (15), la viscosidad sólo es cortante, lo cual era de esperarse ya que si no es compresible las partículas del fluido de la región A no podrán llegar a la región B y viceversa, sólo hasta la frontera entre las dos regiones.

#### B. ACUSTICA.

Acabamos de ver, que para un fluido incomprensible desaparece el coeficiente volumétrico de viscosidad. Como uno de los objetivos de nuestro estudio es tal coeficiente  $b$ , el estudio del movimiento de un fluido compresible es de mucha importancia en nuestro trabajo.

En este contexto, nos interesan las ondas de sonido en los fluidos, ya que el sonido es un movimiento vibratorio de pequeña amplitud que se transmite en un medio compresible.

Como ya tenemos ecuaciones para fluidos incomprensibles, resulta conveniente partir de ellas introduciendo el hecho, que sea compresible a través de un disturbio ó perturbación, así escribimos a la densidad como  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$  (16)

donde  $\rho_0$  es la densidad del medio en ausencia de la onda de sonido y  $\delta\rho$  es el cambio en la densidad debida a  $\vec{v}$  (se está suponiendo que el fluido estaba estático y que la velocidad que adquiere -

es causada solamente, por el disturbio sonoro). Análogamente, podemos escribir a la presión como  $P = P_0 + \delta P$  (16')

Si logramos encontrar una ecuación que relacione a  $P$  (16') con  $\rho$  (16), que sustituya a la ecuación (4) que fué donde introducíamos el hecho de la incompresibilidad, volveremos a tener, junto con las ecuaciones de Euler y de continuidad, un sistema completo de 5 ecuaciones para nuestro sistema hidrodinámico.

Si sustituimos a  $P$  (16') y  $\rho$  (16) en las ecuaciones de continuidad y de Euler, aparecen términos que contienen potencias de  $U_i$  y  $\delta \rho$ , así como productos entre ellos. Haremos una simplificación suponiendo que las ondas sonoras son de una intensidad muy débil - tal que  $\delta \rho \ll \rho_0$  y  $\delta P \ll P_0$ ; entonces podremos despreciar a todos los términos que tengan productos dobles o mayores de  $U_i$ ,  $\delta \rho$ , y  $\delta P$ . Al eliminar tales términos, linealizamos nuestras ecuaciones, a este proceso se le llama "Aproximación Acústica".

Aplicando tal aproximación, y usando a (16) en la ecuación de continuidad (7) obtenemos (17)

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = -\rho_0 \frac{\delta U_k}{\delta x_k}$$

y en la ecuación de Euler (8) se obtiene (18)

$$\frac{\delta \vec{U}}{\delta t} + \frac{\nabla \delta P}{\rho_0} = 0$$

Como se verá más adelante, para poder aplicar las ecuaciones anteriores en la propagación de las ondas sonoras, se debe cumplir que la velocidad  $U$  de las partículas del fluido en la onda, sea mucho más pequeña que la velocidad del sonido  $c$  (es decir la velo-

cidad de la onda al propagarse en el fluido). Esto es cualitativa-  
 mente muy claro, porque si fuera la velocidad  $v$ , mayor que  $c$ , el  
 fluido deformaría a la onda de sonido, haciendo que los cambios en  
 la presión y en la densidad ya no fueran necesariamente pequeños.-  
 Por otra parte, si consideramos que la velocidad del sonido es más  
 grande que la de las partículas del fluido, las zonas de compre-  
 sión y rarefacción en el fluido se alternarían tan rápidamente que  
 casi no habrá flujo de calor entre tales zonas, es decir que para  
 este caso, podemos seguir considerando al fluido como adiabático,-  
 y podremos escribir  $\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \delta \rho$  ..... (19) sustituyendo a -  
 (19) en la ecuación de continuidad aproximada (17), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta P) + \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (20)$$

Observemos ahora que (18) y (20) son dos ecuaciones simultá-  
 neas que nos describen a la onda sonora y tienen por variables a -  
 $\vec{v}$  y  $\delta P$ . Esto permite escribir a una de las incógnitas en fun-  
 ción de la otra.

Suponiendo fluidos irrotacionales, podremos usar el potencial  
 $\phi$  de la velocidad, es decir  $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ . Entonces, (18) en térmi-  
 nos de  $\phi$  se transforma en  $-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta P$  (21)

la cual si es sustituida en (20) y escribiendo  $\operatorname{div} \vec{v} = \nabla^2 \phi$  ob-  
 tenemos.  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \nabla^2 \phi = 0$  (22)

que es precisamente la ecuación de onda. De aquí inferimos que la  
 velocidad de propagación de la onda es.

$$c = \sqrt{\left(\frac{\delta P}{\delta \rho_0}\right)}, \quad (23)$$

Si derivamos a (22) respecto al tiempo, sustituimos (21) y (10), - encontramos que tanto  $\delta P$  como  $\delta \rho$  cumplen también con la ecuación de onda. Como  $\vec{U} = \text{grad } \phi$ , se observa también que, cada una de --- las tres componentes de la velocidad  $\vec{U}$ , cumplen con la ecuación - de onda; por lo cual, los resultados que encontramos para  $\phi$  se pue den generalizar a  $\vec{U}$ ,  $\delta P$  y  $\delta \rho$ .

Alineando el eje  $x$ , con la dirección de propagación de la on da, buscando que  $\phi$  no dependa de  $y$  ni de  $z$ , la onda se llama plana y la ecuación (22) queda (24)

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} = 0$$

Como la única componente de la velocidad que no se anula aquí es --  $U_x = \frac{d\phi}{dx}$ , la dirección de la velocidad del fluido, es la misma que la de la velocidad de la onda, y por eso se les llama a tales on-- das: longitudinales.

Si en particular la onda se propaga a la derecha se puede ha cer ver que la solución de (24) es de la forma  $\phi = f(x - ct)$  y por lo tanto  $\vec{U} = U_x = \frac{d\phi}{dx} = f'(x - ct)$ ,

aplicando (21) a la solución se obtiene

$$\delta P = \rho_0 c f'(x - ct)$$

juntando estas dos últimos resultados concluimos que

$$U = \frac{\delta P}{c \rho_0}$$

y debido a (19)

$$U = \frac{c \delta \rho}{\rho_0}$$

a través de esto se verifica la aproximación acústica, puesto que -

si  $v \ll c$ , entonces  $f_p \ll f_0$ , es decir que si la velocidad del fluido es mucho menor que la del sonido, entonces la aproximación acústica es correcta.

Si la onda es monocromática, en la que todas las cantidades son funciones armónicas del tiempo (periódicamente respecto al tiempo), entonces la solución general de la ecuación de onda (24) es

$$\phi = \phi_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

con  $\omega$  igual a la frecuencia de la onda, y

$$\phi_0 \text{ tal que } \nabla^2 \phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \phi_0 = 0$$

Si la onda se propaga en el sentido de las  $x$  positivas, la solución se reduce a

$$\phi = A e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})};$$

teniendo sentido físico únicamente la parte real de  $\phi$ . Introduciendo al vector de onda.

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n},$$

donde  $\vec{n}$  es unitario en la dirección de propagación de la onda, -- nuestra solución se reduce a :

$$\begin{aligned} \phi &= A e^{i(kx - \omega t)} && \text{y por consecuencia} \\ \rho &= \rho_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \rho &= \rho_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ v_x &= v_0 e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (25)$$

La intensidad,  $I$  (cantidad de energía que cruza una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación, por unidad de

tiempo) de una onda de sonido monocromática, es igual al producto de la velocidad por la energía acústica contenida en una unidad de volumen, para la ecuación de onda plana (25) resulta ser:

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 (v_0 x)^2 c = \frac{1}{2} \rho_0 c^3 \left( \frac{v_0 x}{c} \right)^2$$

La importancia del estudio de las ondas monocromáticas, es - que, debido a la linealización, una onda cualquiera puede ser expresada como una superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias (descomposición espectral, o análisis de Fourier).

Cuando metemos en el fluido una onda no-monocromática y el medio es dispersivo, es decir en el cual  $c$  depende de  $\lambda$ , debido a - que tal onda es la superposición de varias monocromáticas de diferente frecuencia, cada una de estas, se movera a una velocidad diferente, deformando a la onda no-monocromática original; en este - caso, en vez de usar la velocidad de fase  $c$ , se debe usar la velocidad de grupo  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

La influencia de los términos no-lineales ha sido estudiada - por ejemplo por Herzfeld, Lifovitz y Richards (\*). Lo que sucede, es que se producen armónicos de muy alto orden que distorsionan la onda original. En los gases esto trae pequeños cambios en la velocidad, pero la atenuación en la amplitud de onda aumenta considerablemente, mientras que en los líquidos sólo cuando  $I > 1 \frac{w}{cm^2}$  es - notoria la atenuación, debida a los términos no-lineales.

Por último expresemos a la velocidad del sonido (23) en tér-

(\*) Ver referencia No. 5 en la Bibliografía.

minos de otras magnitudes termodinámicas (\*).

$$\begin{aligned}
 c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s &= \frac{B_s}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T + \left( \frac{R'}{C_v} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_T = \\
 &= \gamma \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \gamma \frac{B_T}{\rho_0}
 \end{aligned} \tag{26}$$

donde

$$B_s = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \quad \text{módulo de expansión volumétrica adiabática}$$

$$\kappa_s = -V^{-1} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s \quad \text{compresibilidad volumétrica adiabática}$$

$$B_T = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \quad \text{módulo de expansión volumétrica isotérmica}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{razón de los calores específicos.}$$

$$R' = C_p - C_v.$$

Ya que las ecuaciones (26) provienen de la adiabaticidad en los cambios de  $P$  y  $\rho$  asociados a la onda sonora, cuando en la región de compresión se eleva la temperatura, y en la de rarefacción se baja; se conoce a (26) como aproximación adiabática.

(\*) Ver la Deducción en la Referencia No. 2 de la Bibliografía.

## CAPITULO II

## "LA VELOCIDAD DEL SONIDO".

## A. GASES.

Nos interesa estudiar la velocidad del sonido en los gases, por su simplicidad y porque es posible obtener predicciones de la velocidad del sonido en los gases, que están muy de acuerdo con los resultados experimentales, tal hecho no sucede en los líquidos, en los que por otro lado la predicción teórica de la velocidad del sonido en una sustancia líquida, va a depender de la velocidad del sonido en la misma sustancia pero en su fase gaseosa, tal hecho lo veremos más adelante, lo único que recalcamos es la importancia de la velocidad del sonido en los gases.

Habíamos llegado en el capítulo anterior a expresar la -- velocidad del sonido como  $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$  (26) argumentando que era una aproximación, y que la temperatura varía al cambiar la densidad. Basado en estos hechos, el primero que hizo un cálculo para obtener la velocidad del sonido fué Newton, quien supuso que el -- calor es conducido de una región a otra tan lentamente comparado con la rapidez con la que el sonido invierte el sentido del flujo de calor entre las regiones, que no hay variación en la temperatura de las regiones del fluido. Este argumento lo llevó a obtener una velocidad isotérmica del sonido, cuyas predicciones no concuerdan con los resultados experimentales.

Una suposición mejor, fue dada posteriormente por Laplace,

el cual supuso que en una onda sonora, la presión y la temperatura cambian adiabáticamente al variar la densidad, es decir que el flujo de calor es despreciable. Intuitivamente, sabemos que esto es cierto, si la longitud de onda del sonido es mayor, que el camino libre medio (distancia promedio que recorre una molécula entre dos colisiones sucesivas), bajo esta condición un pequeño flujo de calor entre la región comprimida de la onda y la rarificada, no cambia la velocidad de la onda, pero si produce una pequeña absorción en la intensidad de la onda, y esperamos que esta absorción se incremente, cuando la longitud de onda se aproxime al camino libre medio.

En el caso del sonido audible, y del ultrasonido (frecuencia menor de 1 Mhz) en líquidos, estos caminos son mucho más pequeños que las longitudes de onda.

Nuestro problema se reduce a dar una relación adiabática de la presión ó la temperatura que se cumpla para los gases. El gas más simple que podemos imaginar es el gas ideal, y la ecuación de una adiabática para tal gas, es  $PV^\gamma = cte.$  ó lo que es lo mismo  $P = cte \rho^\gamma$  de donde obtenemos que  $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma P}{\rho}$  usando este resultado así como la ecuación de estado para el gas ideal  $PV = NKT$  en la ecuación (26) obtenemos:

$$c^2 = \frac{\gamma NKT}{\rho V} = \frac{\gamma RT}{\mu},$$

donde R es la constante de los gases, K la constante de Boltzmann y el peso molecular. En este caso ideal, se observa que la velo--

cidad del sonido sólo depende de la temperatura, y no de la presión ó de la densidad.

Desde el punto de vista de la teoría cinética, para cada molécula de tipo "ideal", es decir sin interacciones, se tiene debido al teorema de la equipartición de la energía que.

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle ,$$

donde  $\langle v^2 \rangle$  es el promedio del cuadrado de la velocidad de las moléculas del fluido. De ahí que

$$c^2 = \left(\frac{\gamma}{3}\right) \langle v^2 \rangle \quad \text{y} \quad c \simeq \frac{1}{\sqrt{3}} v_{\text{prom}} \quad (27)$$

donde  $v_{\text{prom}}$ , es la velocidad promedio de las moléculas.

En otras palabras, la velocidad del sonido es del mismo orden que la velocidad de las moléculas. Y esto se puede ver, debido a que el sonido es un disturbio que produce un cambio de presión y es propagado por el movimiento mecánico de las moléculas. El problema sería saber, por cuales moléculas es transmitido el sonido, ¿ Por las más rápidas, ó por las más lentas?. Resulta razonable esperar que la velocidad del sonido sea aproximadamente un medio de la velocidad molecular promedio, ya que las moléculas más rápidas que el promedio no se "enteran" del disturbio sonoro y por lo tanto no contribuyen a él. Esto es precisamente el resultado de (27). Aunque se han continuado las investigaciones sobre-

esta línea, sólo se han obtenido resultados medianamente aproximados.

Para estudiar a los gases reales, tenemos ecuaciones de estado que nos describen aproximadamente su comportamiento, como lo es la ecuación virial:

$$PV = RT \left( 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots \right) \quad (*)$$

Se puede hacer ver que si el potencial molecular es de corto alcance, es decir la interacción molecular actúa sólo a distancias del orden del diámetro molecular, es muy buena aproximación hasta el segundo coeficiente virial, es decir:

$$PV = RT \left( 1 + \frac{B(T)}{V} \right) \quad (28)$$

En este caso se puede hacer ver (\*\*) que:

$$\begin{aligned} C = U_i (1 - g P) = \\ = \left[ \left( 1 + \frac{R}{C_{v,i}} \right) \frac{RT}{M} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{B P}{RT} + \frac{\left\{ \left( 1 + \frac{R}{C_{v,i}} \right) - 1 \right\} B' P}{R} + \right. \\ \left. + \frac{\left\{ \left( 1 + \frac{R}{C_{v,i}} \right) - 1 \right\}^2 T B'' P}{2R \left( 1 + \frac{R}{C_{v,i}} \right)} \right], \text{ donde } C_{v,i} = \lim_{V \rightarrow \infty} C_v. \end{aligned}$$

(\*) A veces el desarrollo virial es en potencias de P, sólo que el desarrollo en potencias de V como se puede justificar desde el punto de vista de la Mecánica Estadística, es más usual.

(\*\*) Ver la deducción en la referencia No. 2 de la Bibliografía.

En esta ecuación  $c$  depende de  $P$  linealmente, y da resultados aproximados a presiones pequeñas, sin que se tengan que usar más coeficientes viriales, sin embargo se desvía mucho cerca del punto crítico, ya que en este punto.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = m \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right) = 0 ,$$

Pero debido a (26), sabemos que:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T + \left(\frac{R'}{C_v}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T ,$$

Por lo que en el punto crítico " $c$ " resultaría aparentemente cero, sólo recordemos que  $R' = C_p - C_v$  y  $C_p \rightarrow \infty$  en el punto crítico (\*), por lo que esperamos que la velocidad del sonido disminuya en el punto crítico, y tal hecho se observa.

Si ahora usamos la ecuación de Van der Waals, que en términos de las variables reducidas.

$$v = \frac{V}{V_c} , \quad p = \frac{P}{P_c} , \quad t = \frac{T}{T_c} ,$$

(Donde el subíndice  $C$ , indica-

que son tomadas en el punto crítico):

$$p = 8t(3v-1)^{-1} - 3v^2$$

Utilizando ésta ecuación y (26), obtenemos:

$$c^2 = \left(1 + \frac{R}{C_v}\right) \left(\frac{RT}{M}\right) \circ (T_c) \cdot \left\{ \frac{9v^2}{(3v-1)^2} - \frac{9}{4vt(1+\frac{R}{C_v})} \right\} .$$

Notemos que en esta última ecuación, la velocidad ' $c$ ' tie

(\*) Ver referencia No. 10 en la Bibliografía.

ne un mínimo en  $t = 1$ , es decir en la temperatura crítica, lo --  
cual ya era de esperarse.

## B. LIQUIDOS.

Se sabe experimentalmente, que la velocidad del sonido en un líquido es de 5 a 10 veces la velocidad del sonido en su vapor a la misma temperatura que el líquido. Sin embargo debido a que no existe una ecuación de estado para todos los líquidos, en todas las condiciones, sólo existen diversas aproximaciones. Así -- por ejemplo Sychev (1961) dio una relación termodinámica entre la velocidad del sonido en el líquido y su vapor a lo largo de la línea de saturación.

Kincaid y Eyring lograron resultados cuantitativos aproximados de 'c', proponiendo un modelo molecular de los líquidos. -- Ellos supusieron a las moléculas como esferas elásticas de compresibilidad interna cero, imaginaban al sonido viajar en el espacio intermolecular con velocidad igual a la del sonido en el gas de la misma sustancia, pero dentro de las moléculas el sonido viajaba con velocidad infinita.

Con estas suposiciones, encontraron que:

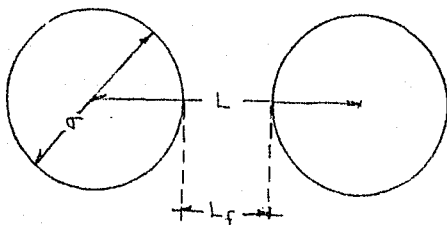
$$c_{liq} = \left( \frac{L}{L_f} \right) c_{gas} \quad (29)$$

donde L es la distancia promedio entre los centros de 2 moléculas contiguas, y  $L_f$  el espacio desocupado por las moléculas, tomando a las velocidades del sonido  $c_{liq}$ ,  $c_{gas}$ , en el líquido y el gas

a la misma temperatura.

El problema se reduce al cálculo de  $L_f$   
(Ver figura 2).

Fig. 2



Para calcular  $L_f$ , supusieron que:  $\frac{L}{L_f} = \left(\frac{V}{V_f}\right)^{1/3}$ ,  
donde,  $V_f/N_a$  es el volumen libre por molécula, (Volumen ocupado por los posibles movimientos del centro de una molécula sencilla, y  $N_a$  es el número de Avogadro. Sin embargo el problema se trasladó al cálculo de  $V_f$ , el cual debe ser inferido de otras propiedades.

Para darnos cuenta del orden de magnitud, de 'c' bajo este último modelo, supongamos para la molécula una estructura cúbica-centrada de cara (F.C.C.), un tal paquetito cúbico tiene.

$$\text{Un volumen } V_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} N_a \sigma^3 \quad \text{Haciendo } L \approx \left(\frac{V}{N_a}\right)^{1/3}$$

$$\text{y } L_f \approx L - \sigma \approx \left(\frac{V}{N_a}\right)^{1/3} - \left(\frac{V_0}{N_a}\right)^{1/3}$$

Se puede escribir a (29) como:

$$C_{liq.} = C_{gas} \left\{ 1 - \left(1 - V_0/V\right)^{1/3} \right\}^{-1} \quad (30)$$

donde  $V_a = V - V_0$  es el volumen disponible.

Si suponemos como Kittel, que  $V_0$  es el volumen de la sustancia en estado sólido a  $0^\circ\text{K}$ , y que por lo tanto.

$$V_a = V - V_0 = V_1 + V_2 + V_3 \quad (31),$$

donde  $V_1$  es el cambio en el volumen molar al elevar la temperatura del sólido de  $0^\circ\text{K}$  a su punto de fusión,  $V_2$  es el cambio al fundirse, y  $V_3$  el cambio debido a la elevación de la temperatura del líquido hasta la temperatura considerada.

Esta relación como lo demostró el mismo Kittel no es exacta. Otra forma es usando la ecuación de estado de Tonks, para un fluido de esferas rígidas elásticas (\*) descrito por

$$P = \left( \frac{RT}{V} \right) \left\{ 1 - \left( \frac{V_a}{V} \right)^{1/3} \right\}^{-1} \quad (32).$$

Ya que en general para los líquidos  $V - V_0 \ll V$  (32) se puede aproximar a  $PV_a \simeq 3RT$  de la cual obtenemos usando (31) la condición  $C_p - C_v = 3R$  y usando a (26)

$$\begin{aligned} C_{\text{liq}} &= \frac{V}{V_a} \left( \frac{V}{V_a} \right)_{\text{liq.}}^{1/2} \left( \frac{3RT}{M} \right)^{1/2} = \\ &= \left( \frac{V}{V_a} \right) \left( 3 \gamma_{\text{liq}} / \gamma_{\text{gas}} \right)^{1/2} C_{\text{gas}}. \quad (**) \end{aligned}$$

(\*) Ver Referencia No 15 en la Bibliografía.

(\*\*) Ver Referencias No. 2 y No. 17 en la Bibliografía.

donde  $\frac{V}{V_a}$  se determina experimentalmente.

Este último resultado está más en concordancia con los -- datos experimentales que los obtenidos por (32), Sin embargo da -- un error demasiado grande en ciertos líquidos debido a que Tonks y Kittel, entre otras cosas, despreciaron la intervención atractiva de las moléculas.

En la determinación de la velocidad del sonido en los lí- quidos , hay muchas cuestiones sin haber sido resueltas, como el- hecho de que para los líquidos normales (\*) orgánicos se tenga -  $C_p - C_v \simeq 5R$  y sin embargo los coeficientes de presión y- temperatura de la velocidad del sonido, están en acuerdo semi- -- cuantitativo con el experimento

(\*) Se llaman líquidos normales, cuando las interacciones atrac- tivas moleculares son pequeñas (la mayoría de los líquidos, - en particular los orgánicos). Líquidos Asociados son los que se desvían de las reglas empí- ricas, notablemente, por el hecho de que se tienden a asociar en grupos de moléculas (Agua, Alcoholes, etc.). Sin embargo - cerca del punto de vaporización, como se rompen las cadenas- moleculares, casi no hay distinción en el comportamiento en- tre los líquidos normales y los asociados.

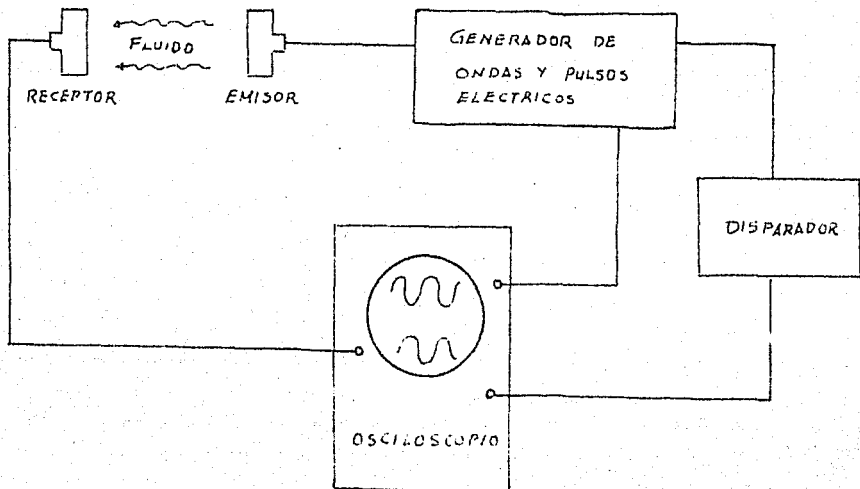
### C. MEDICION DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO.

Para poder realizar este tipo de mediciones, es necesario disponer de un dispositivo para producir ondas de sonido, que --- sean regulares y cuya frecuencia sea conocida y de preferencia -- controlada; a tales dispositivos se les conoce con el nombre de - Transductores.

Existen diversos métodos para medir la velocidad del son $\frac{1}{2}$  do usando como emisor y receptor a los transductores.

El más sencillo consiste, en medir el retardo de un pulso ó el desplazamiento en el caso de ondas continuas, y además, la -- distancia que atraviesa el sonido en el fluido, ya sea midiéndola directamente ó por diferencias entre 2 posiciones de los transduc tores. El diagrama de bloque aparece en la Fig. No. 3

Fig. No 3



Existen variaciones a este método. Por ejemplo, en vez de comparar las dos señales, una que proviene directamente del generador y otra que atraviesa al fluido; se mide su desfase introduciendo una de las señales a las placas X, la otra a las Y -- del osciloscopio, y comparando las elipses así obtenidas.

A veces resulta conveniente usar un solo transductor como emisor y receptor, entonces existirá una placa reflectora de los pulsos; dentro de esta variante se puede medir el retardo de los pulsos directamente, ó haciéndolos interferir con los pulsos siguientes, ó bien encontrando la diferencia de frecuencias entre dos resonancias consecutivas.

Como el problema es medir la velocidad de las ondas, también se usan algunos métodos basados en óptica geométrica como determinar el ángulo de refracción al cambiar de medio el haz sonoro, etc.

Sin embargo existe otro método, muy usado, basado en el hecho de que las variaciones de presión provocan variaciones en el índice de refracción del medio. Para observar tales variaciones del índice, se ilumina el fluido perpendicularmente al "haz" que generalmente es ultrasónico, y se utiliza fotografía estroboscópica para fijar en la fotografía los cambios de índice y medir así la longitud de onda entre dos regiones con índices iguales. Se utiliza también, para observar dichas variaciones de índice, el efecto de difracción descrito por Lucas y Biquard, por el cual, en un fluido transparente, en el que el índice de refracción va--

rfa periódicamente en el tiempo y en el espacio, constituye una -  
red que difracta la luz que incide en el fluido.

## "PROCESOS DE ABSORCION".

## A. VISCOSIDAD.

En la Mayoría de los fluidos (exceptuando metales líquidos como el mercurio), es sin duda la viscosidad el principal -- factor de absorción.

Si el fluido está en movimiento uniforme ó en reposo, -- no hay gradientes de velocidad por lo que el tensor flujo de impulsos (12) se reduce a  $\pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ ; aplicando la aproximación acústica:  $\pi_{11} = \pi_{22} = \pi_{33} = P$  (Por eso a P se le llama Presión Hidrostática). Sin embargo, cuando introducimos ondas sonoras, el movimiento en el fluido ya no es uniforme, en todos los puntos del fluido; esto nos obliga a considerar gradientes de velocidad, que modifican al tensor flujo de impulso.

En la aproximación acústica resulta.

$$\pi_{ik} = P \delta_{ik} - \sigma'_{ik} \quad (33)$$

A este tensor  $\sigma'_{ik}$  ya lo habíamos definido por la ecuación (13). Si tomamos la traza de  $\sigma'_{ik}$  encontramos  $\sigma'_{ik} = b \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik}$  que sustituido en la ecuación (33) y con ayuda de la aproximación de la ecuación de continuidad (16) se obtiene.

$$\frac{1}{3} \pi_{ii} = P - b \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = P - \text{div } \vec{v} = P + \frac{b}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (34)$$

Sin embargo, en los libros tradicionales de hidrodinámica se llamaba presión hidrostática a  $\frac{1}{3} \Pi_{ii}$ , es decir se despreciaba a  $b$ . Stokes, que fue el que introdujo esa aproximación, reconoció la posibilidad de que existiera el coeficiente  $b$ , pero como su efecto depende del cambio de la densidad respecto al tiempo, como se observa de (34), parecía que no había esperanza de medir los efectos conectados con el coeficiente  $b$  y por eso la omitió en sus ecuaciones \*. Citemos al mismo Stokes:

"Por supuesto, nosotros podemos hacer  $b=0$  si suponemos -- que en el caso de un movimiento de dilatación uniforme, la presión (34) en cualquier instante sólo dependa de la densidad y de la temperatura en ese instante, y no de la rapidez con que estos últimos cambian con el tiempo. En la mayoría de los casos en los que sería interesante aplicar la teoría de la fricción de los --- flúidos, la densidad es constante ó puede ser considerada como -- tal, sin introducir un error apreciable, ó bien cambia lentamente con el tiempo. En los dos primeros casos los resultados serían -- iguales si  $b$  fuese igual a cero ó no y en el tercer caso cercano al mismo. En consecuencia si la teoría y los experimentos estuvie- ran de acuerdo, los experimentos no deberían ser vistos como confir- mación de la suposición de que  $b$  sea igual a cero".(\*\*)

Sin tomar en cuenta esta aproximación queremos ver porqué la viscosidad interviene en la atenuación del sonido. Para ello sólo agregamos el término  $\sigma'_{ik}$  en el tensor de flujo de impulso-

(\*) El hecho que  $b=0$  es justificado para flúidos monoatómicos - ideales por la teoría cinética.

(\*\*) Trad de G.G. Stokes (Math. Phy Papers Ip. 88) Citado por I. - Tizsa Phy Rev. April 1, 15, 1942 (Vol. 61).

(12) al cual lo sustituimos en la ecuación de Euler hasta obtener (14). Haciendo  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$  y utilizando la aproximación acústica en (14) obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}'}{\partial x_k} \quad (36)$$

Si por simplicidad nos reducimos a una dimensión, tal que  $v_2 = v_3 = 0$  y  $v_1$  sólo función de  $x$ . (36) nos queda como:

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{1k}'}{\partial x_k} \quad (37)$$

Al introducir  $P = P_0 + \delta P$  y la definición de  $\sigma_{ik}'$  para una dimensión, dentro de la aproximación acústica, en la ecuación (37)

obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\delta P}{\delta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + (b + \frac{4}{3} \eta) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \quad (38)$$

donde se introdujo el hecho de que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\delta P) = \frac{\delta P}{\delta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}$$

Si derivamos a (38) respecto a  $t$ , utilizamos (17) y obtenemos.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \rho_0 \left( \frac{\delta P}{\delta \rho} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + (b + \frac{4}{3} \eta) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) \quad (39)$$

Para observar que en esta ecuación ya está implícita la -  
atenuación, tomemos la solución de la ecuación de onda (25) -  
es decir a una onda sonora en una dimensión. Si esta onda la sus-  
tituimos en (39) despejando y arreglando obtenemos que

$$k = \omega^2 \left( \frac{dP}{d\rho} \right)^{-1} \left\{ 1 + i\omega \left( b + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad (39)$$

Observando que  $\frac{dP}{d\rho} = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_s = \frac{B_s}{\rho_0}$  y definiendo

$$\omega_v \equiv \frac{B_s}{b + \frac{4}{3}\eta} \quad \dots \dots \dots (39 \text{ bis}) \text{ queda simplemente}$$

$$k^2 = \omega^2 \left( \frac{\rho_0}{B_s} \right) \frac{1}{1 + i\omega/\omega_v} \quad (40)$$

De aquí inferimos que la velocidad de fase del sonido  $\frac{\omega}{k}$  es compleja. Este es el hecho que nos dice que efectivamente hay atenuación. Si  $\omega$  se mantiene real debido a las condiciones a la frontera entonces  $k$  es compleja y la escribimos como  $k = k_1 - i k_2$ , con  $k_1$  y  $k_2$  reales y positivos, si usamos esto en la ecuación de onda (25) obtenemos

$$v_1 = v_1^0 e^{i(\omega t - k_1 x + i k_2 x)} = v_1^0 e^{-k_2 x} e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad (41)$$

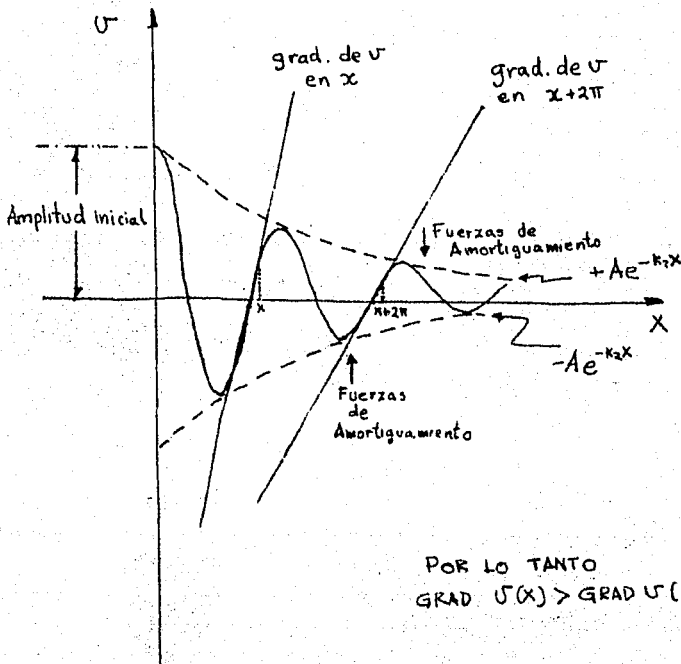
lo cual nos dice que hubo un desfaseamiento  $i k_2 x$  introducido por la viscosidad. Este desfaseamiento, Al ser complejo, es un factor que modifica a la amplitud  $v_1^0$  atenuándola exponencialmente, es decir - tiene una amplitud  $v_1^0 e^{-k_2 x}$  que disminuye exponencialmente al incrementarse  $x_1$ . De esto concluimos que un desfaseamiento complejo - significa en general la atenuación de la onda.

También se interpreta esto último, diciendo que un desfaseamiento complejo es la superposición a la onda original de otra onda de la misma frecuencia, de amplitud menor y defasada  $\pi$  radiaciones respecto a la original. (difundida). Sólo que al avanzar la onda, la amplitud sigue disminuyendo y como la onda de velocidad (41) es de forma senoidal (más una fase) (Ver fig. No. 4). -

Entonces, al disminuir la amplitud de esta onda, también disminuye su gradiente, por lo tanto disminuyen las fuerzas de amortiguamiento y con ellas la atenuación (por eso la onda decae exponencialmente). Sin embargo, el desfaseamiento es diferente a una superposición que amortigua y que al transcurrir el tiempo predomina la onda superpuesta sin continuar la amortiguación.

FIG. No. 4

Nótese que inclinación de la pendiente es decir el grad. en una dimensión es menor en  $x+2\pi$  que en  $x$ .



Como dijimos antes, la atenuación ya se puede observar -- desde (39), puesto que al ser  $b$  y  $\eta$  diferentes de cero, estamos igualando derivadas de  $U$  de segundo orden (par) que son reales con una derivada de tercer orden (impar) que resulta compleja, por lo que nos tenía que salir un desfaseamiento complejo y por lo tanto amortiguación. Resumiendo, la atenuación debido a la viscosidad, tanto de  $b$  como  $\eta$ , provienen del hecho de introducirlas - en la ecuación de Euler, a través del nuevo tensor de flujo (12).

Nuestra onda (41) tiene velocidad de fase  $\frac{\omega}{k_1}$  y su amplitud disminuye a  $e^{-l}$  en una distancia igual a  $k_2^{-1}$ . Es costumbre - que si la distancia está en cm. se defina  $k_2 \equiv \lambda$ ,  $\lambda$  se conoce - como absorción ó atenuación de la amplitud por centímetro, ya que nos da una medida, de qué tan rápido se atenúa la onda en esa distancia. Como la intensidad  $I$  de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad disminuirá a  $e^{-1}$  en una distancia  $(2\lambda)^{-1}$ ; debido a esto, a  $(2\lambda)^{-1}$  se le conoce como coeficiente de absorción por centímetro. A veces resulta conveniente medir las distancias, ya no en centímetros, sino en número de longitu--des de onda, entonces a la atenuación de la amplitud por longitud de onda se denotará por  $\alpha$

$$\alpha \equiv k_2 \lambda = 2\pi \frac{k_2}{k_1} = 2\pi \frac{\lambda}{k_1} = 2\pi \frac{\lambda \cdot U_{fase}}{\omega} \quad (42)$$

Se puede ocurrir que en vez de medir el amortiguamiento - entre dos puntos del espacio (que es nuestro caso, ya que por la-condición a la frontera, la amplitud de la onda es una constante-

y con ello las fuerzas de amortiguamiento (Ver fig. No 4 ) ya -  
que  $\omega \ll \omega_v$  de (44) también concluimos que  $\alpha \ll 1$  esto, uti-  
lizando la segunda igualdad de (42) implica que  $k_2/k_1 \ll 1$  .....(45)

El caso límite opuesto, cuando  $\omega \gg \omega_v$  es decir para un  
fluido muy viscoso, y en el que su absorción sea debida principal-  
mente a la viscosidad, obtenemos de (43).

$$v_{facc} = \frac{\omega}{k} = \left[ 2(b + \frac{4}{3}\eta) \frac{\omega}{\rho_0} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0} B_s \frac{\omega}{\omega_v}} \quad \text{y} \quad \alpha = 2\pi$$

y aplicando la segunda igualdad de (42) a  $\alpha$  observamos que --  
 $k_1 = k_2$ .

Efectuando la aproximación de Stokes ( $b = 0$ ), en el pri-  
mer caso ( $\omega \ll \omega_v$ ) resulta que  $\omega_v^0 = \frac{3}{4} B_s / \eta$  (46)  
y por lo tanto.

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{\rho_0 \omega_v^0}{\pi \omega} \alpha$$

posiblemente sea esta la forma más sencilla de obtener el coefi-  
ciente cortante de viscosidad dentro del presente esquema. La for-  
ma más simplificada de  $\eta$  nos la dá la teoría cinética elemental-  
para el gas diluido (\*):

$$\eta \simeq \frac{1}{3} m n \bar{v} l$$

donde  $m$  es la masa de la molécula,  $\bar{v}$  la velocidad promedio -  
de las moléculas,  $l$  el camino libre medio y  $n$  el número de molécu-  
las por unidad de volumen. Si sustituimos esta fórmula en (46), -  
sabiendo además que  $B_s = \gamma P = \gamma n (RT/Na)$  donde  $R$  es la constante -  
universal de los gases, obtenemos  $\frac{2\pi}{\lambda} = \omega \ll \omega_v^0 = \frac{3}{4} \frac{\gamma n (RT/Na)}{\frac{1}{3} m n \bar{v} l}$

(\*) Ver por ejemplo, referencias No. 8 y 9 de la Bibliografía.

en la cara del transductor y por lo tanto  $\omega$  es real y  $k$  es compleja), quisiéramos medir el amortiguamiento en un mismo punto a dos tiempos diferentes (tal es el caso de un pulso, que debido a la inercia del transductor, al terminar el pulso se queda oscilando y disminuyendo en amplitud) en este último caso  $k$  es real y  $\omega$  completo, es decir  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ , entonces la parte real de la ecuación (25) ya no representa a una onda estacionaria ( $\omega$  ya no es la frecuencia angular), sin embargo Markham Bayer y Lindsay demostraron que en el caso de que  $\alpha \ll 2\pi$ , sí se puede hacer lo anterior y se obtiene que  $A = \omega_2 / v_f$  con  $v_f = \omega_1 / k$ .

Regresando al caso de que  $k$  es complejo, y utilizando las definiciones de  $\alpha$  (42), de  $\omega_v$  (39 bis) en (40) obtenemos:

$$v_{fau}^2 = \frac{2B_s}{\rho_0} \frac{\{1 + (\omega/\omega_v)^2\}}{1 + \{1 + (\omega/\omega_v)^2\}^{1/2}}$$

y

$$\alpha = \pi \left( \frac{v_{fau}^2 \rho_0}{B_s} \right) \frac{\omega/\omega_v}{1 + (\omega/\omega_v)^2} \quad (43)$$

Experimentalmente se observa que para la mayoría de los fluidos se cumple que  $\omega \ll \omega_v = \frac{B_s}{b + \frac{4}{3}\eta}$  es decir, cuando los coeficientes de viscosidad son pequeños, entonces (43) se puede aproximar como  $v_f = (B_s/\rho_0)^{1/2} = v_0$  (velocidad a frecuencia cero) obteniendo.

$$\alpha = \frac{2\pi A v_0}{\omega} = \frac{\pi \omega}{\omega_v} = \frac{\pi \omega}{\rho_0 v_0^2} \left( b + \frac{4}{3}\eta \right) \quad (44)$$

De aquí que  $\alpha \sim \omega$  y  $A \sim \omega^2$  es decir que la atenuación es proporcional a la frecuencia, lo cual era de esperarse, ya que al aumentar la frecuencia aumentan los gradientes de la velocidad

lo cual implica  $\frac{2\pi l}{\lambda} \ll 1$ . O sea que para un gas muy diluido y poco viscoso  $l \ll \lambda$  (47). Esto es consistente con la hipótesis del continuo que se introdujo para obtener las ecuaciones de la Hidrodinámica.

Hay otra consecuencia importante del hecho de que  $\eta$  no sea cero para los fluidos; hasta ahora hemos tratado solo con ondas de sonido de compresión (volumétricas), pero se nos ocurre -- que podrían existir ondas puramente cortantes.

Para ello consideremos una onda plana armónica cortante, -- que se mueve solamente en la dirección  $X_1$  con velocidad del flujo del fluido a lo largo de  $X_2$  :

$$U_2 = U_2^0 \exp i(\omega t - k X_1) \quad , \quad U_1 = U_3 = 0$$

la ecuación de Euler aproximada (36) se transforma en.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1^2} \right)$$

por lo que al sustituir la onda cortante obtenemos:

$$k^2 = -i \rho_0 \frac{\omega}{\eta} \quad \text{si escribimos a } k = k_1 - i k_2$$

encontramos que  $k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2 \eta}}$  por lo tanto:

$$V_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{2 \eta \omega}{\rho_0}}$$

y usando a (42):  $\alpha = 2\pi$ . Debido a que estas ondas puramente cortantes tiene un coeficiente de absorción muy grande se les llama -- ondas de viscosidad.

## B) CONDUCCION DEL CALOR.

La suposición acerca de la adiabaticidad, es tan solo una

aproximación, puesto que de hecho sí hay un cierto calor  $dQ$  que es suministrado a un elemento de fluido por gramo - mol de la sustancia en el tiempo  $dt$ . Sin embargo supondremos que el proceso es cuasi-estático y que pasa solamente por estados de equilibrio, -- por lo que podremos seguir aplicando la termodinámica.

Para ello imaginemos, una columna de fluido de sección -- transversal  $A$ , perpendicular a la dirección de propagación de la onda sonora. Si la diferencia de temperaturas entre la cresta y el Valle es  $\Delta T$  entonces la cantidad de calor  $Q$ , que fluye a través -- de la sección transversal en un tiempo tal que la onda viaja  $\frac{\lambda}{2}$  ,

$$\text{es } Q_1 = \chi \left( \frac{2 \Delta T}{\lambda} \right) \cdot A \cdot \left( \frac{1}{2} \lambda / v \right)$$

donde  $\chi$  es la conductividad térmica del fluido.

Por otro lado, el calor  $Q_2$  que se requiere para igualar -- la temperatura del fluido contenido en la columna de longitud  $\frac{\lambda}{2}$  --

$$\text{es } Q_2 = \frac{A \cdot \lambda}{2} \left( \frac{c_p \rho_0}{M} \right) \left( \frac{\Delta T}{2} \right)$$

donde  $M$  es la masa de fluido. Si  $Q_1 \ll Q_2$  es decir si -- el proceso es cuasi -adiabático, entonces sustituyendo  $Q_1, Q_2$ , y -- arreglando obtenemos.

$$\omega \ll \frac{2\pi}{\lambda} \frac{v^2 c_p \rho_0}{\chi M} = \frac{\pi}{2} \omega_x \quad (47 \text{ bis})$$

por lo que a frecuencias bajas el proceso es cuasi - adiabático. -- Si sucede que  $Q_2 \gg Q_1$  entonces  $\omega \gg \omega_x$  es decir a frecuencias -- altas el proceso será cuasi - isotérmico.

Para encontrar que efectivamente la conducción del calor contribuye a la atenuación, consideremos por simplicidad a un ---

fluido no viscoso.

Observemos que el flujo de Calor  $\mathcal{J}$  en un fluido está dado por la Ley de Fourier:  $\mathcal{J} = -\kappa \nabla T$

$$\text{entonces } \nabla \cdot \mathcal{J} = \frac{\chi M}{\rho_0} \nabla^2 T$$

que en una dimensión es

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\mathcal{J}}{dx} = \frac{\chi M}{\rho_0} \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (48)$$

Por otro lado, la termodinámica nos dice que:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = C_v \left( \frac{dT}{dt} \right) - \frac{TM}{\rho_0^2} \left( \frac{dP}{dT} \right)_\rho \left( \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (*) \quad (49)$$

Igualando (48) y (49)

$$C_v \frac{dT}{dt} = \frac{\chi M}{\rho_0} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{TM}{\rho_0^2} \left( \frac{dP}{dT} \right)_\rho \left( \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (50)$$

Suponiendo que la variación en la temperatura es lineal para una onda sonora se tiene

$$\delta T = T - T_0 = T_1^0 \exp i(\omega t - kx), \quad T_1^0 \ll T_0$$

donde  $T_0$  es la temperatura promedio del fluido,

Si sustituimos  $\delta P$ ,  $\delta \rho$  (25) y  $\delta T$  en la derivada total de la presión  $P = P(\rho, T)$  respecto al tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \left( \frac{d\rho}{dt} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \left( \frac{dT}{dt} \right)$$

obtenemos entonces:

$$\frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{B_T}{\rho_0} \left( \frac{C_p - i k^2 \nu}{C_v - i k^2 \eta} \right) \quad (51)$$

(\*) Ver por ejemplo, las referencias 4,8,10 de la Bibliografía.

Con  $W = \frac{\chi}{\rho_0} \frac{M}{\omega}$  Notemos que (51) es una expresión Compleja y que por lo tanto ya presenta atenuación, este hecho se podría haber observado desde la ecuación (50) donde se igualan derivadas de 1er. orden con derivadas de 2o. orden, por lo que se obtuvo la expresión compleja (51). Para obtener de un modo explícito la relación entre  $k$  y  $\omega$  sustituimos (51) en la ecuación de movimiento (39) donde hacemos  $h = \eta = 0$  para tomar el caso de un fluido no-viscoso y obtener solamente la influencia de la conductividad del calor en la atenuación. Se obtiene.

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \left( \frac{B_T}{\rho_0} \right) \left( \frac{C_P - i k^2 W}{C_V - i k^2 W} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \quad (52)$$

si en esta ecuación sustituimos la onda de velocidad (25) obtenemos:

$$k^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{B_T} \cdot \frac{C_V - i k^2 W}{C_P - i k^2 W} \quad (53)$$

(53) es una ecuación compleja (por lo tanto con atenuación en la onda), y es cuadrática en  $k^2$ , por lo que obtendremos al resolverla, dos valores de  $k^2$  para cada uno de  $\omega$ . Uno de estos valores de  $|k^2|$  es aproximadamente proporcional a  $\omega^2$  y por lo tanto representa ondas sonoras, ya que en tal caso esta bien definida la velocidad de fase  $V_f = \frac{\omega}{k}$ . Herzfeld demostró que la otra solución representa ondas de temperatura amortiguadas (\*).

Para obtener la velocidad y la atenuación hacemos.

$$k^2 = k_1^2 - 2i k_1 k_2 - k_2^2 \approx k_1^2 - 2i k_1 k_2$$

es decir suponemos que la atenuación es pequeña, lo cual según la lógica y los experimentos es cierto, para fluidos no metálicos.

(\*) Ver Bibliografía, referencia No. 5.

Por otro lado, por (47 - bis)

$$\omega < \omega_x = \frac{c_p \rho_0 v^2}{\chi M}$$

como es en el caso usual, entonces es válida la aproximación ----

$W k k \ll \rho_0 \rho_0$  En tal caso.

$$v^2 = v_0^2 \frac{\omega^2 + \omega_x^2}{\gamma \omega^2 + \omega_x^2}, \quad \text{con} \quad v_0^2 = \frac{\gamma B T}{\rho_0}$$

$$\kappa_{\text{Cond. Cal}} \approx \pi \left( \frac{v^2}{v_0^2} \right) (M-1) \frac{\omega \omega_x}{\omega^2 + \omega_x^2} = \frac{2\pi \gamma v_0}{\omega} = \pi (\gamma-1) \frac{\omega}{\omega_x} = \frac{\pi (\gamma-1)}{\rho_0 v_0^2} \cdot \frac{\gamma M \omega}{C_p}$$

Hasta aquí se puede usar sólo la termodinámica. Con argumentos de teoría cinética, Eucken, Chapman y Cowling han inferido que para gases monoatómicos, aproximadamente  $\frac{M \chi}{\eta C_p} \approx 2.5$ .

Para tener una idea del valor de la atenuación  $A_{cc}$  por ---- la conductividad del calor, comparada con la atenuación  $A_{vc}$  de la viscosidad cortante, se han calculado para el agua que (\*) ---  $A_{vc} \approx 10^3 A_{cc}$ .

Aunque pequeña en el caso de agua, para otros líquidos y gases, la contribución a la atenuación debida a la conducción del calor es mayor que la debida a la viscosidad; resulta entonces importante la absorción debida a ambos.

Entonces para una onda plana armónica con viscosidad (39) sustituimos  $\frac{\rho v}{\rho_0}$  de la ecuación (51) (contribución de la conducción del Calor), obteniendo la siguiente ecuación.

$$\omega^4 - k^2 \omega^2 v_0^2 (1 + \epsilon x + i \gamma y) + i k^4 v_0^4 (\gamma + i \epsilon \gamma y) = 0 \quad (54)$$

(\*) Ver Bibliografía, referencia No. 2.

donde  $\alpha \equiv \omega / \omega_0$ ,  $\eta \equiv \omega / \omega_0^2$  con  $\omega_0 = \omega_\lambda$

cuando  $\nu = \nu_0$ .

Para resolver la ecuación cuártica (54), trabajamos a bajas frecuencias, es decir  $\alpha, \eta \ll 1$ , hacemos  $k = k_1 - i k_2$  y retenemos sólo los términos lineales en  $\alpha, \eta$ , y  $\alpha$  resolviendo por aproximaciones sucesivas. Se encuentra que

$$\alpha = \pi \left\{ \alpha + (\delta - 1) \eta \right\} = \pi \left\{ \frac{\omega}{\beta_s} \left( b + \frac{4}{3} \eta \right) + (\delta - 1) \frac{\omega \lambda M}{c_p \rho_0 \nu^2} \right\} \quad (55)$$

Es claro que en la aproximación hecha en (55), las contribuciones la conductividad calor y de las viscosidades son aditivas.

Si utilizamos la aproximación de Stokes ( $b = 0$ ), obtenemos la absorción llamada "clásica".

$$\alpha_{clás} = \frac{\pi \omega}{\beta_s \nu^2} \left\{ \frac{4}{3} \eta + (\delta - 1) \frac{M \lambda}{c_p} \right\} = \frac{\pi}{3} \frac{\omega^2}{\nu_0^2 \beta_s} \left\{ \eta + \frac{3}{4} (\delta - 1) \frac{\lambda}{c_p} \right\} \quad (56)$$

El segundo término de (56) lo obtuvo Kirchhoff, y el primero Stokes, por eso a (56) se le llama también absorción de Stokes- Kirchhoff.

Restando (56) a (55) obtenemos

$$\alpha - \alpha_{clás} = \pi \omega \left( b + \frac{4}{3} \eta \right) \left( \frac{\omega}{\beta_s \nu^2} \right)$$

Las investigaciones han proseguido, pero por la línea de la teoría cinética (postulando modelos para moléculas específicas).

Se han obtenido resultados como que la aproximación de Stokes

( $b = 0$ ) es buena para fluidos monoatómicos diluidos tales que-

$\lambda \ll \lambda$ , condición que como habíamos visto (47), es que equivalente a  $\lambda \ll \lambda$ .

Esto dió base a suponer que un fluido monoatómico de baja densidad (diluido) podía ser visto como formado por partículas -- cuasi-puntuales, cuya interacción sólo es debida a colisiones, con una sección transversal finita. Y que la viscosidad cortante tiene que ver con el cambio de impulso de las moléculas debido a colisiones intermoleculares (relajación del momento ó térmica), por eso es que sí cuenta en la absorción de fluidos monoatómicos. Por otro lado, la viscosidad volumétrica determina la resistencia a la rapidez de cambio de la densidad del fluido, como esta rapidez de cambio en el caso monoatómico, solo puede ser debida al aumento ó disminución del número de moléculas en ese volumen, esto trae aparejado un rearrreglo especial de las moléculas (Relajación estructural). En el caso de un fluido diluido (Enskog) hay una resistencia casi nula a cambiar de densidad. (Para una discusión un poco más amplia del fenómeno de Relajación, ver el Apéndice I).

### C. RADIACION DEL CALOR.

Nos interesa ahora obtener la contribución a la atenuación de la onda sonora, debida al hecho que el fluido radía calor. Este hecho origina un flujo de calor en el fluido, que como hemos visto anteriormente, atenúa la onda de sonido. Por simplicidad consideramos un fluido no viscoso.

Si un elemento de fluido está a una temperatura  $T$  y el --

fluido que lo rodea, está a una temperatura promedio  $T_0$ , entonces el calor que entra al elemento por gramo-mol, en la unidad de --- tiempo, es descrito por la llamada ley de Enfriamiento de Newton:

$$\frac{dQ}{dt} = - q C_V (T - T_0) \quad (57)$$

donde  $q$  es una constante de proporcionalidad.

Usamos a (57), por dos razones:

Una, la histórica. por simplicidad Stokes (1851), la utilizó -- y las investigaciones han proseguido siguiendo el plantea--- miento de él.

Otra. Por que la ley de enfriamiento de Newton, aunque empírica, - es una ley muy general en el intercambio del calor, prove--- niente de la linealización. Aunque generalmente se usa para la convección del calor es válida también para la radiación y la conducción del calor; pero debido a que en estos dos últimos casos se conocen leyes más específicas, no se usa generalmente la de enfriamiento de Newton.

Sustituyendo el flujo de calor (57) en (49) y usando los - mismos pasos que hicimos para obtener la atenuación debida a la - conducción del calor, obtenemos por fin una onda plana de sonido-

$$(39): \quad k^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\Theta_0} \frac{1 - i\gamma \omega}{1 - i\gamma(\gamma_0 \omega)} \quad (58)$$

que es la fórmula análoga a la (53).

De nuevo en (58), la velocidad de fase  $\omega/k$  es compleja si  $\gamma \neq 0$ , es decir hay atenuación en la onda sonora. En-

tonces como a continuación veremos, la absorción dependerá del valor de  $q$ .

Nuevamente, queremos que  $\omega$  cumpla con las condiciones a la frontera y tenga sentido físico de velocidad angular; la suponemos real y solamente la 'k' será compleja; es decir  $k = k_1 - ik_2$ . Si suponemos que el coeficiente de absorción  $k_2$  es pequeño --- (ver ecuación 41) obtenemos la aproximación  $k_1^2 \simeq k^2 - 2ik_1k_2$

Por lo tanto,  $\alpha_{rc}$  debida a la radiación de calor por longitud de onda son:

$$\begin{aligned} \nu_f^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_s}{\rho_0} \cdot \frac{1 + q^2 / (\delta^2 \omega^2)}{1 + q^2 / (\delta^2 \omega^2)} \\ \alpha_{rc} &= 2\pi \frac{k_2}{k_1} = \pi (1 - \delta^{-1}) \frac{q / \omega}{1 + q^2 / \delta^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (59)$$

Por análisis dimensional, es claro que  $q$  tiene unidades de frecuencia  $[t^{-1}]$ ; entonces 'q' puede usarse como referencia para comparar frecuencias bajas ( $\omega \ll q$ ) ó altas ( $\omega \gg q$ ), en estos dos casos límites  $\nu^2$  tiende a  $B_r/\rho_0$  y  $B_s/\rho_0$  respectivamente, lo cual, si lo comparamos con los resultados obtenidos antes para la absorción debido sólo a la conductividad térmica, en los cuales  $\nu^2 \sim B_r/\rho_0$  tanto para bajas como altas frecuencias, nos dice que el mecanismo por el que hay diferencias de temperatura que producen flujo de calor son diferentes para cada caso.

Es claro que al utilizar (57) queda indeterminada 'q', y el problema de determinar la atenuación debida a radiación de calor, se reduce a obtener el valor 'q'. Stokes (1851) y Rayleigh (1894) hicieron estimaciones empíricas de 'q', obteniendo valores

pequeños, de modo que  $\alpha_{vc}$  es despreciable en comparación con  $\alpha_{c_1}$  --  
 y  $\alpha_{visc}$ .

Aunque las investigaciones han seguido, tratando de escri-  
 bir a "q" en otros términos, es decir dándole un significado pre-  
 decible teóricamente, sólo se ha obtenido una estimación del or-  
 den de magnitud.

Hagamos una estimación. Si  $l_r$  es la distancia a la cual -  
 la radiación electromagnética plana decae a  $e^{-1}$  de su valor,  $l_r$  -  
 en principio dependerá de la frecuencia de radiación, sin embargo  
 por simplicidad consideremos a  $l_r$  constante respecto a la frecuen-  
 cia.

Experimentalmente, se observa que para los fluidos no-opa-  
 cos  $l_r \gg \lambda$  siendo  $\lambda$  la longitud de onda acústica ( $l_r$  es en general --  
 del orden de cientos de metros).

Consideremos primero un tubo a lo largo de la dirección -  
 de propagación del sonido de radio  $r \ll l_r$ . Si T es la temperatura ab-  
 soluta del fluido encerrado entre dos frentes de onda electromag-  
 nética que distan entre sí  $dl \ll \lambda$  en un tiempo t, entonces la  
 radiación de calor será emitida o absorbida sobre todo por la su-  
 perficie cilíndrica  $2\pi r dl$  que encierra al volumen considera-  
 do. Debido a la ley de Stefan- Boltzmann,

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma_{SB} \epsilon dA T^4$$

donde  $\sigma_{SB}$  es la constante de Stefan Boltzmann,  
 $dA$  la diferencial de superficie que encierra al volu-  
 men considerado.

$\epsilon$  la emisividad de la superficie se tiene que la canti

dad de radiación (calor) absorbida por el volumen en la unidad de tiempo es

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \pi r^2 \epsilon \sigma_{SB} (T^4 - T_0^4) \approx -8 \pi r^2 \epsilon \sigma_{SB} T_0^3 (T - T_0) \quad (60)$$

donde supusimos que  $\epsilon=1$ , lo cual, como es aproximadamente cierto, hace aumentar el valor de  $\frac{dQ}{dt}$ .

Por otro lado debido a (57), el flujo de calor para ese volumen será igual a  $\frac{dQ}{dt} = -q (v (T - T_0) \pi r^2 \frac{\rho_0}{M})$

donde M es la masa del fluido dentro de ese volumen. Sustituyendo (61) en (60) obtenemos que:

$$q = \frac{8 \sigma_{SB} T_0^3}{r \rho_0 (Cv/M)} \quad (61)$$

de donde concluimos que excepto a elevadas temperaturas ó bajas densidades  $\alpha_{rc}$  es despreciable.

Smith y Bahtia (\*), encontraron que para espacios abiertos ( $r \rightarrow \infty$ ,  $l r \gg \lambda$ )

$$q = (4\pi / \lambda) q_0 (h - h^2 \cot^{-1} h)$$

Siendo

$$h = \frac{\lambda}{2\pi l r}$$

Debido a lo anterior 'q' depende de  $\lambda$  y por lo tanto se debe revisar la ecuación (57) que supone a 'q' constante.

Como quiera que sea, todas las estimaciones confirman el hecho que  $\alpha_{red cal} \ll \alpha_{cond cal}$ , por lo que es posible despreciarla en los cálculos.

(\*) Ver Referencia No. 2 en la Bibliografía.

## D. MEDICION DE LA ABSORCION.

Se han encontrado muchos y muy ingeniosos métodos para mé todos para medir la absorción del sonido en los flúidos. En general se tienen muchas dificultades en cuanto a la precisión de las medidas sobre todo en bajas frecuencias (menores de 1 Mhz), es por eso el gran éxito de los ultrasonidos, y de las ondas hipersó nicas ó de ultra-alta frecuencia para efectuar tales mediciones.

A bajas frecuencias, es muy bueno el método de ondas progresivas utilizado por primera vez por Fox & Rock (\*). Ellos usaron como detector una esfera de plástico suspendida por un hilo - de nylon, la cual es deflectada por el sonido, y es esta deflexión una medida de la intensidad sonora, el desplazamiento de la esferi ta es medido por un telescopio montado en un banco óptico.

Una mejora a esta técnica, fué hecha por Biquard, el cual eliminó las ondas estacionarias, por medio de una cámara absorben te del sonido.

Pierce y Lamb midieron la absorción, con un método más di recto. Ellos hicieron el siguiente arreglo experimental: utilizaron un haz de ondas sonoras progresivas que viajaban en un tubo - principal y regresaban por un tubo lateral más pequeño. Dentro -- del último se movían pequeñas partículas de aluminio, cuyo movi--- miento era seguido con un microscopio. De ahí se podía determinar la velocidad del flujo de las partículas, y la atenuación de tal-

(\*) Referencia No. 19 en la Bibliografía.

velocidad.

Uno de los métodos más utilizados es el interferómetro -- acústico; este instrumento consiste en un transductor reversible y un plano reflector paralelo a la cara del emisor, la distancia entre ambos es variable, de tal manera que existan ondas estacionarias entre ellos. Los valores máximos de la corriente corresponden a resonancias a intervalos de media longitud de onda. Sin embargo, las medidas de absorción hechas con este método resultan bastante imprecisas.

El método por pulsos para medir la absorción del sonido, -- ha tenido gran impacto ya que tiene dos ventajas principales sobre los métodos de ondas continuas, uno es la eliminación de ondas estacionarias y el otro es la minimización de los efectos caloríficos, aún cuando se utilice una potencia grande. El método consiste en enviar un paquete corto de ondas sonoras a través del medio estudio hasta un receptor móvil, ó bien a un reflector también móvil, y en general se mide la atenuación observando cómo cambia la altura del pulso en la pantalla de un osciloscopio cuando el receptor ó el reflector es desplazado una cierta distancia conocida.

Los métodos ópticos, dependen de las variaciones de los -- índices de refracción que son producidos por los cambios en la densidad al ser atravesado un medio transparente por una onda sonora. La principal ventaja de estos métodos, es su rapidez para -- efectuar las medidas, y el poder trabajar con muestras pequeñas -- de fluido. Sólo que como se requieren ondas planas, es necesario-

trabajar en el rango de los megaciclos; otra limitación a esta -- técnica es que es necesario tener una atenuación grande, así como evitar las ondas estacionarias ó las reflexiones con las paredes, pues producen resultados erróneos.

El efecto en el cual se basa el método óptico para medir-- la absorción, fué descubierto por Debye y Sears e independiente-- mente por Lucas y Biquard en 1932, dicho efecto consiste de un ra-- yo de luz que al atravesar perpendicularmente al haz de sonido, - "siente" una rejilla de difracción senoidal, y parte de la luz -- es difractada del haz principal. La cantidad de luz difractada es proporcional a la intensidad del haz sonoro. Se usa una foto cel-- da para detectar la cantidad de luz que permanece en el haz origi-- nal, y se mueve dicho haz a diferentes distancias de la fuente de sonido, calculando así la absorción'

La principal variación de este método fué hecha por Hiede-- mann y Osterhammel, los cuales midieron la distribución de inten-- sidad de la luz sobre los diferentes órdenes de difracción y ob-- servación que tal distribución, dependía de la intensidad de las-- ondas sonoras, y aunque los cálculos resultan complicados puesto-- que la intensidad observada también depende de la longitud de la-- trayectoria óptica, así como de la longitud de onda de la luz, se obtienen resultados bastante precisos.

Existe otro método llamada de Reverbación utilizado por-- Karpovich, que usa un recipiente esférico ó cilíndrico dentro del cual está el líquido; el recipiente está suspendido por finos alam

bres en el vacío; en ambos extremos del recipiente existen cristales piezoeléctricos. La radiación acústica que se transmite de uno a otro cristal pasa a las paredes por múltiples reflexiones, hasta establecer un campo sonoro difuso del conjunto del recipiente y el líquido, en el cual la densidad de energía es constante. Cuando se desconecta el cristal emisor, la presión decae exponencialmente. Efectuando las correcciones por la absorción en el recipiente, se obtiene la absorción del sonido en el líquido.

## CAPITULO IV

EXPERIMENTO REALIZADO PARA MEDIR LA VELOCIDAD Y LA  
ATENUACION DEL SONIDO.

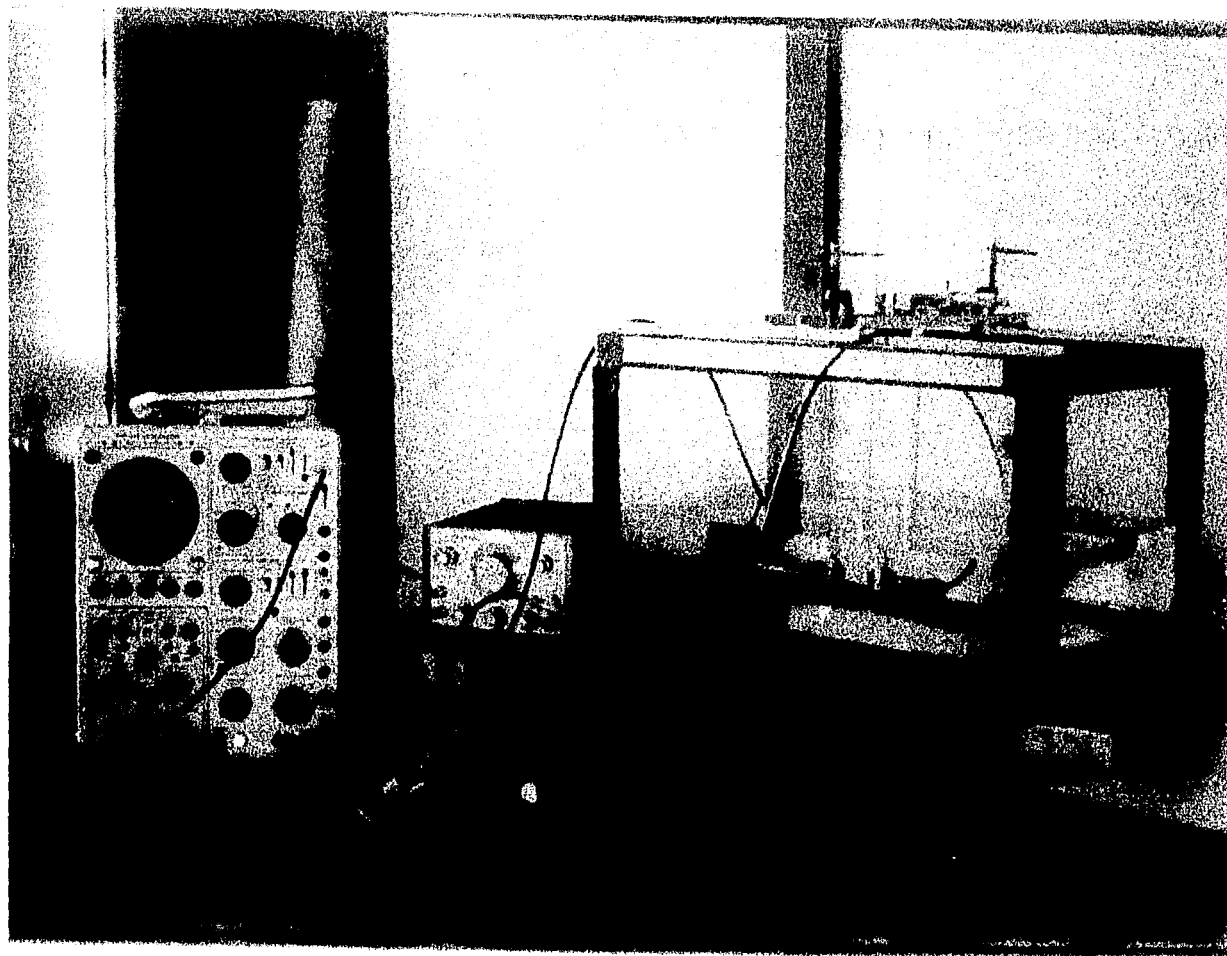
## A). LA VELOCIDAD DEL SONIDO EN EL AGUA.

Se mencionó en el capítulo II, varios métodos para la medición de la velocidad del sonido en los fluidos, la medición experimental de tal velocidad reviste un carácter muy importante ya que no se ha podido predecir con exactitud y sobre todo porque la velocidad es un parámetro que aparece en las fórmulas de la atenuación del sonido, y su conocimiento es indispensable para obtener otras magnitudes, por ejemplo el coeficiente de viscosidad volumétrico.

Debido a la facilidad en su manejo, así como el poder conseguir con facilidad las cantidades requeridas a un precio barato-escogimos al agua, para determinar su velocidad del sonido.

El diseño del aparato experimental, se hizo enfatizando la sencillez en su construcción. Consta el aparato de dos transductores piezoeléctricos de  $ZiPb$ ; uno usado como emisor y el otro como receptor, el primero fué conectado a un generador de ondas, y el otro a la pantalla de un osciloscopio tal como lo muestra el diagrama de bloque de la Fig. No. 3 y el aparato construido se muestra en la fotografía de la página siguiente.

El transductor se trabajo en su frecuencia de resonancia indicada por el fabricante (342 khz) y que coincidio con la observada a la temperatura ambiente (18°C), con ondas senoidales estacionarias.



La velocidad se midió fotografiando la traza que sobre el -- osciloscopio dejaba el voltaje producido por la onda sonora en el transductor-receptor; se modificaba la longitud de la trayectoria acústica entre los transductores una distancia  $\Delta l$  conocida, y se tomaba sobre la misma fotografía la nueva traza. La diferencia entre las posiciones máximos de las trazas, medidas a lo largo del eje del tiempo en el osciloscopio, es una medida del retraso o adelanto  $\Delta t$  al cambiar la trayectoria acústica en el agua.

Así, la velocidad del sonido en el agua está dada por  $\bar{c} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ .

Una muestra de los datos obtenidos se encuentra en la tabla - No. 1.

TABLA No. 1.

(mt x $10^{-3}$ )	(seg x $10^{-6}$ )	(m/seg x $10^3$ )
6.65	3.995	1.665
5.20	3.570	1.456
5.00	3.795	1.317
0.50	0.295	1.695
1.60	1.170	1.367
3.40	2.260	1.504
2.65	1.885	1.405
1.00	0.700	1.428
3.50	2.495	1.410
1.75	1.290	1.356

Se obtuvo una velocidad promedio de  $\bar{c} = 1460$  m/seg. El error

relativo  $\frac{dc}{c}$  de la velocidad del sonido, debido a la incertidumbre en la medición fue .04, es decir 4%.

Por otro lado, las medidas mostraron las siguientes características:

Desviación Normal  $S = 55.4$  m/seg  
 Error promedio  $E = 17.5$  m/seg  
 porcentaje estándar de error  $e = 3.8\%$ .

Comparando nuestras medidas con las de otros autores (ver gráfica No. 1) encontramos que a excepción de la dada en la referencia No. 3, las medidas oscilan alrededor, de las dos mediciones que creemos mejores (referencias No. 26 y 27). Debido a que nuestros datos estuvieron tomados a 18°C, dentro del error promedio experimental nuestra velocidad promedio del sonido cae en la línea que une las observaciones de la Ref. No. 26 entre 10°C y 20°C.

Creemos que la ligera desviación de estos datos pueda ser debida a las oscilaciones en la temperatura ambiental, así como la contaminación del agua, expuesta a la interperie.

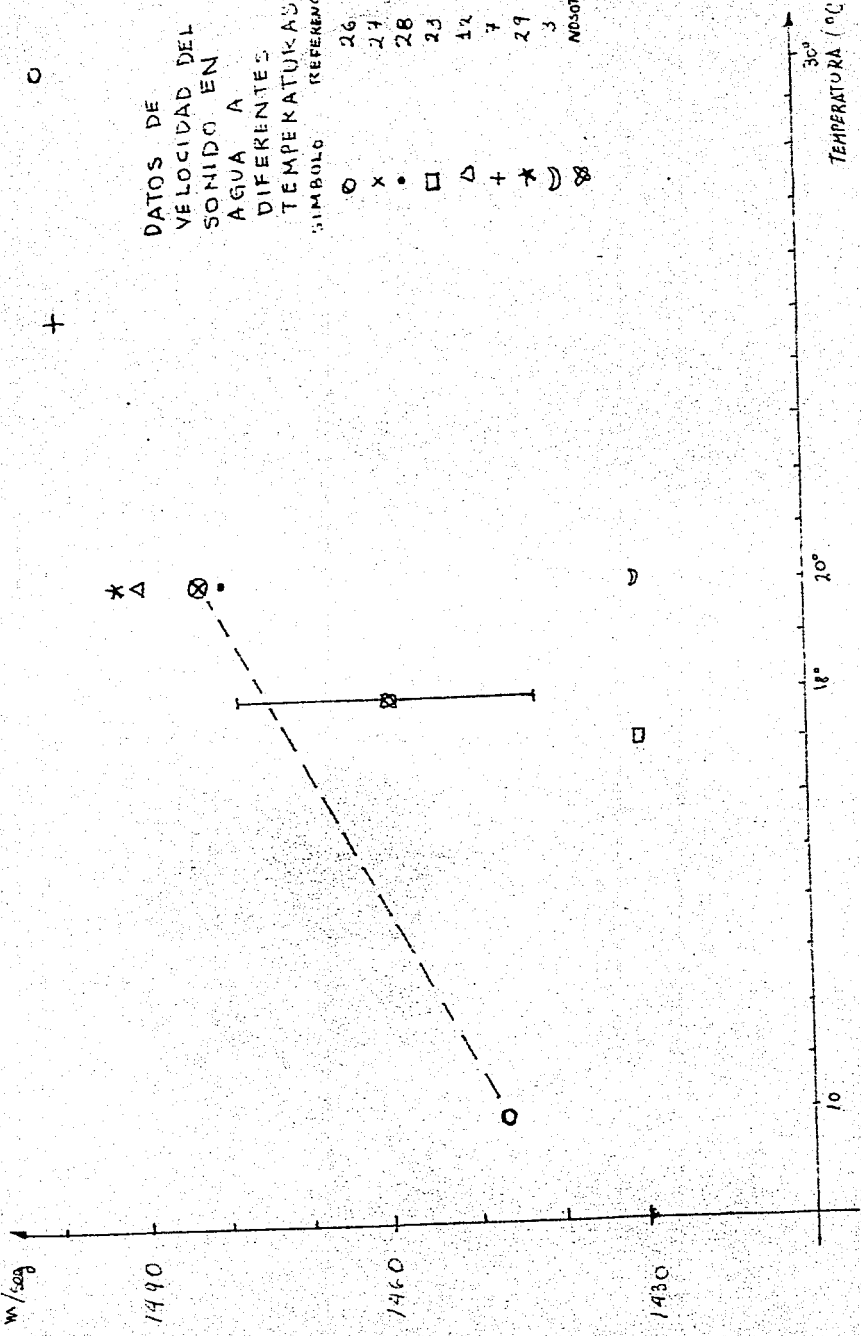
#### B. LA ATENUACION DEL SONIDO EN AGUA SALADA.

Se utilizó el mismo aparato que para la velocidad del sonido. Sólo que en este caso se midió la distancia entre los dos transductores, así como la amplitud de la traza en el osciloscopio dejada por la onda que atraviesa el líquido.

Se prefirió usar una solución salina de agua, como muestra, ya que aumenta entonces la absorción del agua, haciendo a ésta más fácilmente medible.

# GRAFICA No 1.

C Vel. del sonido  
m/csg



DATOS DE VELOCIDAD DEL SONIDO EN AGUA A DIFERENTES TEMPERATURAS

SIMBOLO REFERENCIA No.

○ 26  
 × 27  
 □ 28  
 △ 23  
 + 12  
 \* 7  
 ⊗ 29  
 3  
 NO-OTROS.

Se simuló la salinidad del agua de mar, es decir se disolvieron 35 gr. de NaCl por cada litro de agua destilada.

El experimento se realizó en un tanque lo suficientemente grande, como para proveer una fuente de temperatura constante.

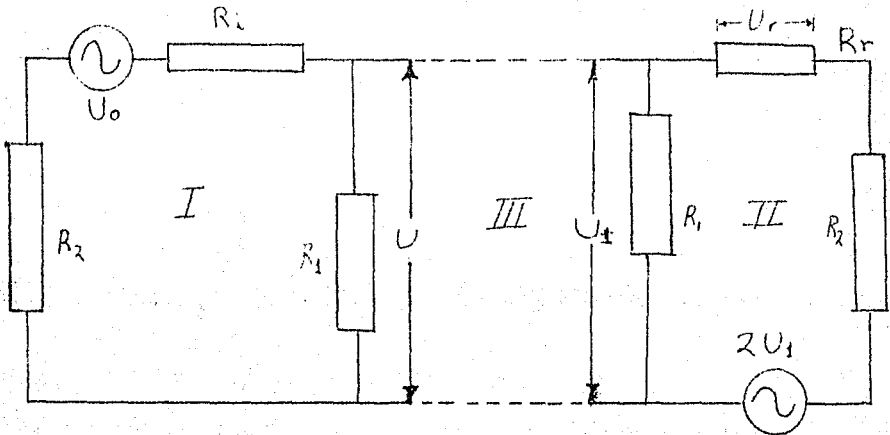
Se intentó hacer las mediciones con pulsos ó paquetes de ondas, sin embargo se tropezó con la dificultad de medir la amplitud del pulso, pues debido a la inercia del transductor, éste deforma al pulso. Preferimos entonces, el método de ondas estacionarias, con la ventaja que de esta manera nos aseguramos que las amplitudes de la onda en la cara del transductor emisor sean constantes.

Modificando la distancia entre los transductores, obtuvimos cambios en la intensidad de la onda, y a partir de estos se calculó  $A$  y  $b$ .

Se hizo esto, trabajando en el régimen lineal de respuesta del transductor (abajo de su temperatura de Curie, y con un voltaje menor a su voltaje polarización); por lo que el voltaje producido entre las caras del transductor, es proporcional a la presión que produce en el transductor un esfuerzo mecánico.

Resulta muy complicado predecir tal coeficiente de proporcionalidad entre el voltaje y la presión. Para ello, se hace un análisis de las pérdidas en la transmisión eléctrica del pulso, haciendo un circuito equivalente para la transmisión de la energía (Ver figura No. 5).

Fig. No. 5 (Referencia No. 17 de la Bibliografía).



La resistencia eléctrica de un transductor cuyas superficies están en contacto con medios diferentes (en nuestro caso, aire y agua salada), está dado por la ecuación.

$$Z = R_1 + R_2$$

donde  $R_1 = k \rho_1 c_1$  y  $R_2 = k \rho_2 c_2$  siendo  $k$  el

factor de proporcionalidad entre la impedancia acústica del medio y la resistencia eléctrica, pudiéndose expresar como

$$k = \left( \frac{2nd}{h\epsilon} \right)^2 \cdot \frac{1}{S} ,$$

donde  $d$  es el ancho del transductor en forma de disco,  $h$  la constante piezoeléctrica,  $\epsilon$  la capacitancia inductiva específica del transductor, y  $S$  es la superficie del transductor en contacto con el medio. En la fig. No. 5, I es el transductor conectado con el oscilador, II es el transductor conectado con el osciloscopio;  $U_0$  es la amplitud del voltaje del oscilador sin conectarle ningun-

na carga;  $R_i$  es la resistencia de salida del oscilador; III es el medio entre los transductores y es equivalente a una línea eléctrica con atenuación exponencial;  $R_r$  es la carga del transductor II en la cara receptora y  $U_r$  es el voltaje de entrada del receptor -- (voltaje a través de la carga del transductor II). Se supone que las pérdidas dentro del transductor son despreciables.

Entonces el voltaje suministrado a la línea por el transductor I es :

$$U = U_0 \frac{R_i}{R_1 + R_2 + R_i},$$

y el voltaje  $U_1$  que llega hasta el otro transductor es

$$U_1 = U_0 \frac{R_i}{R_1 + R_2 + R_i} e^{-\alpha l}$$

donde  $l$  es la longitud de la trayectoria acústica.

Como el transductor II sirve como oscilador para la carga --  $R_r$  y el trabajo de este oscilador se opone al de la línea, su voltaje se toma como  $2U_1$  entonces el voltaje producido por el transductor II a través de la carga  $R_r$  debe ser igual a  $U_r$  :

$$U_r = 2U_0 \frac{R_i R_r}{(R_1 + R_2 + R_i)(R_1 + R_2 + R_r)} e^{-\alpha l} = P_0 e^{-\alpha l}$$

Aunque en principio así se conoce la constante de proporcionalidad  $P_0$  las condiciones reales lo complican más: no hemos tomado en cuenta las resistencias eléctricas de los conductores en las caras de los transductores, las pérdidas por histéresis, las pérdidas por el montaje de los transductores etc. Por lo que una medida exacta del tal factor de proporcionalidad es casi imposible.

Resulta entonces conveniente eliminar a tal factor de propor

cionalidad, tomando medidas relativas, es decir si  $U_z = U_0 e^{-A z}$  y  $U_{z+x} = U_0 e^{-A(z+x)}$ , son dos medidas consecutivas de la amplitud del voltaje, a través de una trayectoria acústica  $z, z+x$ , respectivamente con intensidades  $I_z = I_0 e^{-2A z}$ ,  $I_{z+x} = I_0 e^{-2A(z+x)}$ ; entonces

$$A = \frac{1}{2x} \ln \frac{I_{z+x}}{I_z},$$

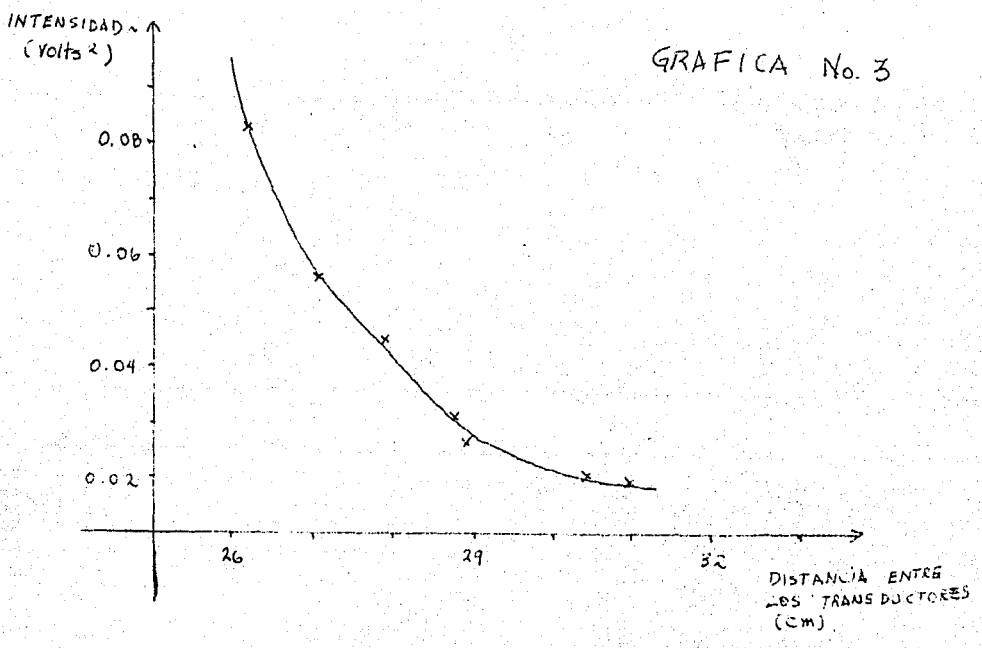
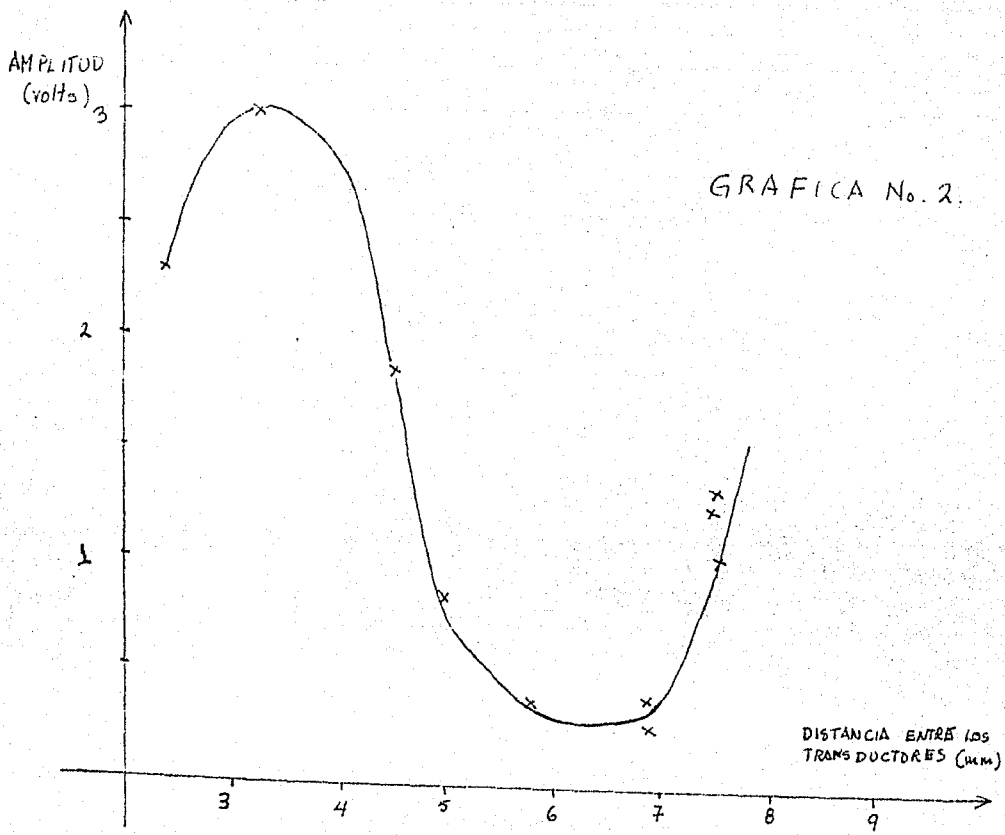
Introduciendo el factor correctivo debido a que la onda plana que sale del transductor diverge teniendo a ser esférica (Ver apéndice II):

$$A = \frac{\ln \frac{I_z}{I_{z+x}} \left( \frac{\sin^2 \frac{m}{z+x}}{\sin^2 \frac{m}{z}} \right)}{2x} \quad (62)$$

con  $m = \frac{\pi \alpha^2}{2\lambda}$ , siendo  $\alpha$  el radio del transductor.

Antes de tomar los datos para el cálculo de la atenuación, investigamos nuestro campo sonoro. En la frecuencia de resonancia del transductor 348 KHz, para el agua destilada se obtuvo una muestra de los máximos y mínimos (Ver apéndice II) que aparecen en la región de Fresnel. Estos datos se encuentran en la gráfica No. 2.

El problema de encontrar los máximos y los mínimos se trata en el apéndice II, éstos se calculan a lo largo de la línea perpendicular a la superficie del transductor, que pasa por el centro del mismo. Sin embargo, como el receptor no es puntual, capta un campo mayor por lo que las posiciones de los mínimos y máximos no corresponden a los calculados, y tal hecho se observa también, viendo -- que los mínimos ya no son cero como los cálculos lo indican.



Posteriormente se trabajó en el 5° armónico del transductor (1.775 Mhz) con objeto de hacer más direccional nuestro haz sonoro. Dentro de la zona de Fraunhofer, se trató de medir la atenuación del sonido en agua salada. Se calculó la longitud de onda  $\lambda = 0.0875$  cm, sabiendo que la velocidad del sonido en tal solución salina -- (\*) es de  $1.538 \times 10^5$  cm/seg. El transductor tiene un radio  $a = 0.6350$  cm. La frontera entre las zonas de Fresnel y Fraunhofer (ver apéndice II) está a una distancia

$$d = \frac{a^2}{\lambda} = 4.6 \text{ cm}$$

del transductor emisor.

En la zona de Fraunhofer, la intensidad se abría en un cono de ángulo

$$\Theta = \text{ang} \text{ sen } \frac{.61 \lambda}{a} = 57^\circ 28'$$

Para obtener la atenuación del sonido se utilizó la fórmula (62), los datos se tomaron a una temperatura de  $16^\circ\text{C}$  y a  $15^\circ\text{C}$ .

Combinando las parejas de datos a  $16^\circ\text{C}$ , se obtuvo como valor promedio en la atenuación

$$A = 0.0951 \text{ cm}^{-1}$$

Por lo tanto

$$\frac{A}{f^2} \pm 0.17 = 3080 \text{ seg}^2/\text{cm.}$$

El error relativo debido a la incertidumbre en la medición -- fué en este caso.

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta I}{I \Delta I} + \frac{\Delta l}{\Delta l} \approx 0.06 \text{ , es decir del 6\%}$$

Calculando la desviación normal ó estándar de las  $A$  se encontró igual a

$$S = 0.0197$$

(\*) Ver referencia No. 20 en la Bibliografía.

Con un error promedio  $E = 0.0061$ , y un porcentaje de error  $e \approx 6.5\%$ .

Obtenemos ahora el coeficiente volumétrico de viscosidad. -- Para ello nos remontamos a la ecuación (55); "pero como el efecto de la conducción del calor es despreciable respecto al de la viscosidad; en el agua hay una razón de 1 a 100" (\*). Esperamos que esta razón se conserve para el agua salada, por lo que nos remontamos a la ecuación (44); es decir a la atenuación debida solamente a la viscosidad, de la cual obtenemos:

$$b = \frac{\rho C^2}{\pi \omega} \alpha - \frac{4}{3} \eta = \frac{\rho C^3 A}{2 \pi f^2} - \frac{4}{3} \eta$$

(Notemos que muchos autores a nuestra  $A$  la llaman  $\alpha$ ) tomando como:

$$C = 1.538 \times 10^5 \text{ cm/seg} \quad (\text{Referencia No. 20})$$

$$\rho = 1.02 \quad (\text{Referencia No. 20})$$

$$\eta = 0.01075 \text{ gr. cm}^2 \text{ seg}^{-1} \quad (\text{referencia No. 24})$$

Este último dato, no es exactamente de nuestra solución, pero sí del agua de mar con la misma concentración de Sal por litro.

Obtuvimos  $b = 18 \text{ gr. cm.}^{-1} \text{ seg.}^{-1}$

La  $A$  class calculada según la teoría de Stokes:

$$A_{\text{class}} = \frac{8 \pi^2 \eta f^2}{3 \rho C^3} = 0.235 \times 10^{-3}$$

Y entonces

$$\frac{A}{A_{\text{class}}} \approx 400$$

que si lo comparamos con el del agua pura

$$\frac{A}{A_{\text{class}}} \approx 3$$

Observamos que es muy importante la viscosidad volumétrica al di--

(\* ) Ver Referencia No. 19 en la Bibliografía.

solvente sal en el agua pues mientras la viscosidad cortante para uno y otro caso es

$$\eta \text{ agua pura} = 0.01002 \text{ (Referencia No. 33) gr. cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

$$\eta \text{ agua de mar} = 0.01075 \text{ gr. cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}.$$

Son del mismo orden, no así el coeficiente de viscosidad volumétrico, que hizo que la razón  $A/A_{clor}$  aumentara en 100 veces aproximadamente al disolverle sal. Este aumento en la viscosidad volumétrica, no fue debido tanto al cambio en la velocidad del sonido -- que fue de casi 4%) si no sobre todo a la existencia de fuertes mecanismos de relajación al existir iones de cloro y de sodio en el agua.

## CONCLUSIONES.

El presente trabajo señaló la importancia del coeficiente de viscosidad volumétrico, para explicar la atenuación del sonido en los líquidos.

Se hizo un estudio en las referencias de la bibliografía, -- con objeto de entender de donde proviene la aparición del coeficiente  $b$ , como se introduce en las ecuaciones, porqué su introducción trae consigo atenuación y como se puede medir.

Se diseñó un experimento sencillo, que permitiera determinar el coeficiente volumétrico  $b$ ; el experimento se realizó en un líquido en el que  $b$  fuese grande. Sin embargo no se puede comparar -- numéricamente nuestros resultados con los de otros investigadores -- ya que no existen en la literatura científica datos de tal coeficiente, en las mismas condiciones en que realizamos el experimento.

Para un futuro trabajo con ultrasonidos, es necesario rediseñar el equipo, sea este trabajo una experiencia, para el futuro. -- En tal diseño se deben considerar con mucho cuidado los siguientes problemas que afrontamos en la realización del experimento.

Se debe tener una manera de medir con muchísima precisión -- la distancia entre los transductor, asegurándose que las caras de los dos transductores sean siempre paralelas; que el desplazamiento de los transductores, sea siempre a lo largo de una misma línea; si el líquido es conductor se recomienda aislar al transductor por medio de una delgadísima capa de aceite detenida por una película de colodión este tipo de intermediarios mejora el acoplamiento acústico

co entre el transductor y el líquido; por último señalemos que si el transductor tiene una tapa con agujero por donde salen los ultrasonidos, produce indeseables efectos de orilla y una incertidumbre en el radio del transductor.

El experimento realizado mostró, que a pesar de los errores que pudo haber, el orden de magnitud de nuestras medidas era bueno; que al disolver la sal en el agua mejoró notablemente el acoplamiento acústico entre el transductor y el líquido; y aumentó de manera considerable la atenuación, por lo que sugerimos este método para medir la salinidad del agua, lo cual tiene muchas implicaciones -- prácticas.

APENDICE I

PROCESOS DE RELAJACION.

Sucede que en general, la absorción en fluidos poliatómicos es bastante más grande de la que se puede predecir con las causas "clásicas" (viscosidad y conducción del calor).

La energía total de las moléculas de un fluido poliátomico-- se distribuye entre sus grados de libertad translacionales ó ex-- ternos, rotacionales y vibracionales ó internos. Si el fluido está en equilibrio, la distribución de energía, entre sus grados in ternos y externos, a una temperatura dada, es característica de un sistema en particular. Entonces la onda sonora produce una per turbación en la distribución energética, y no sólo hay una re distribución de la energía, entre los grados translacionales, sino un intercambio de energía entre los grados internos y externos. -- Entonces, la tendencia del sistema a regresar al equilibrio en un tiempo finito, produce la irreversibilidad en el ciclo presión -- densidad, este tiempo  $\tau$  en que el sistema tarda en responder, es decir en establecer el equilibrio térmico, se le llama tiempo de-- relajación, y al proceso antes descrito se le conoce como "relaja ción térmica" (este proceso es muy importante en los líquidos --- "normales").

Este tiempo  $\tau$  es en general mucho más grande que el tiempo  $\tau_c$  entre colisiones sucesivas, las cuales hacen que la energía del elemento del fluido en un cierto instante aumente, para luego redistribuirse durante un tiempo  $\tau$  .

El otro proceso de relajación, que ya mencionamos, es la "relajación estructural", es decir la relajación debida a un arreglo especial de las moléculas, cuando su estructura interna es alterada por el disturbio sonoro. Es claro que para moléculas monoatómicas, tal arreglo interno no existe, por esto Tisza<sup>21</sup>: - concluía que para los fluidos monoatómicos deberá ser igual a - - - cero.

Hay que señalar que cualquier mecanismo de absorción puede ser interpretado como un proceso de relajación definiendo adecuadamente su tiempo de relajación y su frecuencia asociada de "resonancia".

La frecuencia de "resonancia" que caracteriza un proceso de relajación es definida generalmente como la frecuencia angular, - en la cual ocurre la atenuación máxima por longitud de onda, entonces:

$$\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}$$

donde  $\tau_r$  es el período de relajación

Así para la viscosidad cortante

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho c^2}$$

Y para la conducción del calor

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{\kappa}{\rho c_p^2 c^2}$$

Para el gas monoatómico diluido, el significado físico de  $\tau_r$  y  $\tau_c$  es simplemente el del tiempo requerido para volver al equilibrio en la distribución de energía entre los grados transla

cionales de libertad, y debido a lo cual  $\gamma$  es aproximadamente  $\frac{h}{\bar{v}}$ , siendo  $h$  el camino libre medio y  $\bar{v}$  la velocidad molecular promedio. Esta manera de definir concuerda con los cálculos de la teoría cinética elemental para

$$\eta \approx \frac{1}{2} \rho \bar{v} h \quad \text{con} \quad C \approx \frac{3}{4} \bar{v}$$

Evidentemente el caso poliatómico se complica.

Resulta interesante la diferencia que Herzfeld hace entre la resonancia y la relajación. En resonancia, escogiendo una frecuencia adecuada se hace que el sistema se comporte de cierta manera que de otra forma no lo haría. En cambio en la relajación, escogiendo frecuencias suficientemente grandes se evita que un proceso ocurra.

Así por ejemplo, en líquidos con relajación estructural, sabemos que la presión estática produce en vez de un acortamiento entre las distancias moleculares, un rearrreglo de ellas, con que a grandes frecuencias no ocurre. Así también, en el caso de la relajación térmica en la que hay una distribución cuasi-estática entre la energía de los grados internos y externos, a pesar de que en un principio sólo se suministró energía a los grados externos, sin embargo a grandes frecuencias ésto tampoco ocurre y la energía "permanece" en los grados externos solamente.

Se presentan de hecho otras complicaciones, respecto a la existencia del tiempo de relajación  $\tau$ ; como el hecho que la presión del fluido no dependa solamente del valor instantáneo de la densidad, sino también de la historia del sistema. En la ecuación

de continuidad implícitamente utilizábamos la hipótesis de Newton, de que la presión sea proporcional a la primera derivada de la densidad respecto al tiempo, pero al considerar sólo a la primera derivada, se está considerando solamente que hay dependencia del pasado reciente. Tisza hizo ver que esto se justifica, si el tiempo considerado en el fenómeno es pequeño comparado con el tiempo de relajación; en nuestro caso el fenómeno de interés es el sonido, y el tiempo asociado es el período  $\nu^{-1}$  del sonido, es decir, se debe cumplir que

$$\nu^{-1} \ll \tau$$

si esta condición no se satisface, se debería considerar, tal como se hace en óptica, a la "constante"  $b$  como una función compleja de la frecuencia.

El problema de la relajación, se concreta un poco a tratar de estimar a  $\tau$  por otros medios (teoría cinética ó mecánica estadística) con ayuda de la termodinámica de procesos de relajación. Han contribuido notablemente a ésto, los trabajos de Chapman, Rice, - Allnat, Gray, Naugle, Cowling, Eyring etc.<sup>14</sup>

Para tener una idea de la teoría termodinámica de los procesos de relajación, estudiamos qué es lo que ocurre con el coeficiente volumétrico  $b$ .

Ante todo observemos que la viscosidad  $b$  es generalmente del mismo orden que  $\eta$ , (por ejemplo para el agua pura<sup>32</sup>  $b/\eta = 2.3$  a una atmósfera de presión y 30°C. Sin embargo en algunos casos -

Sabemos además que se manifiesta en los procesos que acompa

ñan una variación del volumen (es decir de la densidad). Cuando hay una compresión ó rarefacción se rompe el equilibrio termodinámico del fluido y los procesos internos tienden a restablecer dicho equilibrio. Si estos procesos son rápidos (tiempo de relajación pequeño), la variación del volumen se efectúa rápidamente (por supuesto, si la variación no es grande). Si en cambio el tiempo de relajación es grande (el restablecimiento del equilibrio es lento), entonces mientras se está en desequilibrio pueden ocurrir reacciones químicas que nos lleven a otro estado de equilibrio; en fin, hay disipación de energía, crece la entropía y el proceso de llegar a un equilibrio de irreversible, de tal manera que si el tiempo de relajación es grande, esperamos que se disipe mucha energía y que por lo tanto  $\tau$  sea grande.

Es decir,  $\tau$  depende de la relación entre la velocidad del proceso de compresión y el tiempo de relajación, pero como la velocidad de compresión depende de la frecuencia de la onda, la viscosidad volumétrica ya no será una constante característica de la sustancia, sino una función de la frecuencia. A esta dependencia de  $\tau$  respecto a la frecuencia se le llama Dispersión.

Supongamos ahora que  $\xi$  es una cantidad física que caracteriza el estado de un cuerpo, y  $\xi_0$  su valor en estado de equilibrio, entonces  $\xi_0$  es función de la densidad y la temperatura (por ejemplo para mezclas  $\xi$  puede ser la concentración de una de las componentes de la mezcla). Si el cuerpo no está en equilibrio  $\xi$  tenderá en el transcurso del tiempo a tomar el valor  $\xi_0$ . Si el disturbio es pequeño de tal manera que  $\xi - \xi_0$  sea pequeño, se puede desa

rollar la velocidad de variación de  $\xi$  en una serie de potencias de  $\xi$ , a primer orden tenemos:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\tau} (\xi - \xi_0)$$

(El término de orden cero se anula ya que  $\dot{\xi}$  desaparece en el equilibrio  $\xi - \xi_0$ ).  $\tau$  es el tiempo de relajación, es positivo; el signo menos en la ecuación anterior aparece para que el coeficiente de proporcionalidad entre  $\xi$  y  $(\xi - \xi_0)$  sea negativo y tienda a un límite finito.

Debido a que la variación de la entropía en estados vecinos al de equilibrio es una cantidad de segundo orden, se puede a primer orden hablar de que el proceso es adiabático.

Si además el proceso, es debido a una onda sonora armónica, la parte variable de la densidad y demás variables termodinámicas, depende del tiempo a través del factor  $e^{-i\omega t}$ .

Pero resulta también que la posición de equilibrio varía (ya que  $\xi_0$  es función de  $P$  y  $T$ ), entonces se puede escribir  $\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0$ , donde  $\xi_{00}$  es una constante igual al promedio de  $\xi_0$  cuando varía la densidad y  $\xi'_0$  es la parte periódica proporcional a  $e^{-i\omega t}$ , entonces desarrollando a  $\xi$  tenemos

$$\xi = \xi_{00} + \xi'$$

de aquí se puede demostrar que  $\xi'$  es una función periódica del tiempo:

$$\xi' = \frac{\xi'_0}{1 - i\omega\tau}$$

Entonces la presión  $P$  debe ser función de la densidad  $\rho$ , del estado del sistema  $\xi$ , y de la entropía  $s$  (esta se supone constante).

Se puede hacer ver <sup>1</sup>, que si el proceso es lento tal que el fluido pase por estados de equilibrio

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega \tau} \cdot \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{equil.}} - i\omega \tau \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right].$$

Si  $P_0$  es la presión de equilibrio termodinámico, y se produce un cambio adiabático  $\delta \rho$ , (como en el sonido), la presión de equilibrio variará según).

$$P - P_0 = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{equil.}} \right] \delta \rho = \frac{i\omega \tau}{1 - i\omega \tau} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{equil.}} - \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right] \delta \rho$$

Como es difícil medir  $\delta \rho$  en esta ecuación se elimina utilizando el hecho que  $\delta \rho$  sea un disturbio periódico (16) y (25), entonces:

$$\frac{d}{dt} \delta \rho = -i\omega \delta \rho.$$

que sustituida en la ecuación de continuidad (1):

$$\delta \rho = \frac{\rho}{i\omega} \operatorname{div} \vec{v}$$

sustituyendo esto último en la ecuación de  $P - P_0$  obtenemos

$$P - P_0 = \frac{\tau \rho}{1 - i\omega \tau} (C_0^2 - C_{\infty}^2) \operatorname{div} \vec{v},$$

donde  $C_0^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{equil.}}$  y  $C_{\infty}^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\xi}$

Introducimos a la viscosidad, a través del tensor  $\Pi_{ik}$ , y éste a través de  $-P\delta_{ik}$  de la ecuación (12); entonces multiplicando a mi ecuación anterior por  $-\delta_{ik}$  y sustituyendo en la ecuación de un fluido viscoso (14), comparando términos observo que el coeficiente de  $\operatorname{div} \vec{v}$  es  $b$  y por lo tanto

$$b = \frac{\tau \rho}{1 - i\omega \tau} \cdot (C_{\infty}^2 - C_0^2)$$

Si el proceso es lento, entonces  $\tau\omega \ll 1$ , y  $b_0 = \tau \rho (C_{\infty}^2 - C_0^2)$ .

Si encontramos ahora  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{\sqrt{(\rho^2/c^2)}}$

donde  $\frac{\partial p}{\partial t}$  está dado como en la página anterior, encontramos que

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega \tau}{c_0^2 - c_\infty^2 - i\omega \tau}}$$

debido al hecho de que esta  $k$  es compleja concluimos que debe -- existir atenuación en la onda. En caso que  $\tau \omega \ll 1$ ,  $k = \frac{\omega}{c_0}$ , -- por lo que  $c_0$  es la velocidad de la onda a frecuencias pequeñas.

En el caso contrario  $\tau \omega \gg 1$ ,  $k = \frac{\omega}{c_\infty}$ , indicándonos que  $c_\infty$  es la velocidad de la onda a grandes frecuencias.

Por último Hunt<sup>31</sup> nos dice: "Muchos mecanismos buenos y "honestos" de relajación existen y deben ser tomados en cuenta, pero al hacerlo, estos efectos deben ser mirados como factores que perturban el comportamiento termo-viscoso fundamental; más que lo contrario. Las teorías como las de Eucken, Hall, Liebermann, etc., de mezclas de dos fluidos, parecen adaptarse mejor en la inclusión de este complejo análisis, y ya se ha dado un primer paso en esta dirección. Sin embargo, mucho resta por hacer antes de decir que el problema acústico haya sido entendido".

APENDICE II.

"EL FACTOR GEOMETRICO EN LA ABSORCION".

Si nuestra fuente de ondas sonoras, fuera un punto, tendríamos ondas esféricas y la intensidad de la onda sonora decrecería con la distancia al cuadrado según la siguiente ecuación:

$$\bar{I} = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2},$$

donde  $W$  es la potencia,  $S$  la superficie esférica que dista una distancia  $r$  del origen de las ondas.

Sin embargo las ondas sonoras son producidas por un transductor de tamaño finito que oscila en el fluido.

Entonces la energía que llevan esas ondas, es la energía cinética del cuerpo en movimiento (se supone que la velocidad del transductor oscilando, es pequeña comparada con la velocidad del sonido).

Si  $\varphi$  es el potencial de la velocidad del fluido éste cumple con la ecuación de onda (24). Tiene como condiciones a la frontera las siguientes:

- En la superficie del cuerpo, la componente normal de la velocidad del fluido, debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad  $u$  del transductor, es decir  $\frac{d\varphi}{dn} = u_n$ .

- A grandes distancias comparadas con la dimensión del cuerpo, la onda debe transformarse en una onda esférica divergente, y a una distancia infinita ya no existirá la onda, es decir  $\varphi_{\infty} = 0$ .

Sea el caso en que  $\lambda \ll l$  siendo  $\lambda$  la longitud de la onda sonora y  $l$  las dimensiones del transductor, entonces podemos conside

far que nuestro cuerpo está formado por elementos de superficie lo suficientemente pequeños, como para considerarlos planos siendo a la vez grandes delante de la longitud de onda del sonido; suponemos que cada uno de estos elementos radia una onda plana, en la cual la velocidad del fluido es simplemente igual a la componente  $u_n$  de la velocidad del elemento del cuerpo.

Como el flujo de energía (intensidad) promedio para una onda plana es  $c\rho\bar{v}^2$ , donde  $\bar{v}$  es la velocidad promedio del fluido en la onda y  $c$  la velocidad del sonido. Y como  $u_n = v$ , si integramos sobre toda la superficie del cuerpo, tenemos la intensidad total por unidad de tiempos del sonido emitido:

$$I = c\rho \int_S \bar{u}_n^2 dS ;$$

es claro que para una amplitud dada, la intensidad no depende de la frecuencia de las oscilaciones.

En el caso contrario, de frecuencia bajas, es decir tales que  $\lambda \gg r$ ; observemos que en orden de magnitud  $\frac{\omega^2}{c^2} \psi \sim \frac{\psi}{\lambda^2}$ , y las segundas derivadas de  $\psi$  respecto al tiempo son del orden de  $\frac{\psi}{t^2}$ , tenemos que  $\frac{\psi}{t^2} \ll \frac{\psi}{\lambda^2}$  y por lo tanto  $\nabla^2 \psi \gg \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ . Por lo que podemos despreciar al término  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  en la ecuación de onda. Este hecho implica que en la vecindad del cuerpo ( $\lambda > r$ ) el movimiento está determinado por la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \psi = 0$ , que es precisamente la condición de un fluido incompresible ya que  $\nabla^2 \psi = \text{div grad } \psi = \text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Esto dice que para este caso en la vecindad del cuerpo, el fluido se comporta como incompresible y las ondas sonoras propiamente

te dichas comienzan a distancias más grandes que  $\lambda$ .

A estas distancias, es decir cuando  $r$  es tal que  $\lambda \ll r \ll \lambda$ , todavía es cierta la ecuación de Laplace, cuya solución a primer orden es

$$\psi = -\frac{q}{r} + A \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

para ver la influencia del primer término, supongamos que --

$\psi = -\frac{q}{r}$  solamente; entonces

$$v = -\nabla \frac{q}{r} = \frac{q \vec{r}}{r^3}$$

y el flujo a través de una superficie cerrada, por ejemplo una esfera de radio  $R$ , será  $\int 4\pi R^2 v$ , pero como  $v$  sobre la superficie vale  $\frac{q}{R^2}$ , el flujo es  $4\pi q$ ; para que este término no sea nulo, debe haber una variación del volumen del fluido que, como es incompresible solo puede venir del hecho que el transductor al cambiar su volumen expulse o aspire fluido del elemento de volumen considerado. Como la variación del volumen por unidad de tiempo es el volumen del flujo que atraviesa la superficie cerrada por unidad de tiempo, tenemos que

$$4\pi q = \dot{V}(t) = \frac{dV}{dt}$$

por lo que  $\psi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}$ .

Por otra parte en la región  $r \gg \lambda$ , debe ser una onda esférica divergente, es decir de la forma  $\psi = -\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}$ ,

(esto se puede observar, suponiendo  $\psi = \psi(r,t)$  sustituida en la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas).

por lo que se nos ocurre escribir

$$\psi = -\frac{\dot{V}(t-\frac{r}{c})}{4\pi r}$$

de donde obtenemos

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\ddot{v} (t - \frac{r}{c})}{4\pi r c} \right] \vec{n}$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario en la dirección de  $r$ .

Como la energía de la onda depende del cuadrado de la velocidad; y la intensidad de la onda es la energía por unidad de área - por unidad de tiempo se tiene

$$I = \frac{\rho c \vec{v}^2}{2} = \frac{\rho}{10 c \pi^2} \cdot \frac{\ddot{v}^2}{r^2}$$

A  $\rho c$  se le llama impedancia acústica del medio.

para encontrar la influencia del término  $A \cdot \nabla \frac{1}{r}$  en  $\varphi$  supongamos sólo que

$$\varphi = \text{div} \left( A(t) \frac{1}{r} \right)$$

y en general para  $r \gg \lambda$

$$\varphi = \text{div} \frac{A(t - \frac{r}{c})}{r}$$

A primera aproximación tendremos

$$\varphi = - \frac{\dot{A} (t - \frac{r}{c}) \vec{n}}{c r}$$

de donde

$$\vec{v} = - \frac{\ddot{A} (t - \frac{r}{c})}{c^2 r} \vec{n} \nabla (t - \frac{r}{c}) = \frac{(\dot{A} \vec{n}) \vec{n}}{c^2 r}$$

por lo que la intensidad de la onda será

$$I = \frac{\rho}{c^3} \cdot \frac{(\vec{n} \dot{A})^2}{r^2}$$

Hasta aquí solo hemos considerado el hecho de que las ondas son planas cerca del transductor y esféricas lejos de él.

Como el transductor tiene dimensiones finitas, lo más correcto es tomarlo como equivalente a un número muy grande fuentes pun-

tuales de sonido, cercamos entre sí. Ya que la radiación es emitida igualmente en todas direcciones sus frentes de onda son esféricas. Para encontrar la distribución de energía hay que sumar los rayos sonoros que salen de la superficie del transductor y que llegan a un cierto punto en un cierto instante. Es decir hay que resolver la integral de Rayleigh

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} ds$$

para cada caso en particular.

Resulta que aplicado el principio del Huygens, van a existir interferencias de cada una de las ondas provenientes de cada punto del transductor.

Backhaus y Trendelenburg<sup>25</sup> calcularon las variaciones en la intensidad para un transductor círculos de radio  $a$  con superficie emisora plana, cuando la intensidad es medida a lo largo de una perpendicular de la cara emisora que pasa por el centro, obteniendo

$$I = \sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{a^2 + z^2} - z]$$

donde  $z$  es la distancia del punto considerado al centro del transductor,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $I$  la intensidad relativa. Es claro que tal intensidad va a oscilar entre 0 y 1, obteniéndose máximos cuando

$$\frac{k}{2} [\sqrt{a^2 + z^2} - z] = [2n+1] \cdot \frac{\pi}{2}$$

es decir a unas distancias

$$z_{\max} = \frac{4a^2 - \lambda^2 [2n+1]^2}{4\lambda [2n+1]} \quad \text{con } n=0, 1, 2, 3$$

y mínimos cuando

$$\frac{k}{2} [\sqrt{a^2 + z^2} - z] = n\pi$$

es decir en

$$Z_{\min} = \frac{\lambda^2 - a^2}{2a\lambda} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

El último máximo se encuentra cuando

$$n = 0: \quad Z = \frac{a^2 - \lambda^2}{4\lambda} \approx \frac{a^2}{\lambda}$$

La región entre la fuente y la posición del último máximo se le llama campo cercano o zona de Fresnel, y más allá de esta distancia está el campo lejano ó zona de Fraunhofer. En la zona de Fresnel, el haz es paralelo y en la de Fraunhofer el haz diverge aproximadamente con un ángulo  $\theta$  formado entre la perpendicular que pasa por el centro del transductor y la línea que une los puntos donde la amplitud de la onda es cero;  $\theta$  está dado por la siguiente relación:

$$\text{Sen } \theta = \frac{0.61}{a} \lambda$$

Filipczynsky <sup>6</sup> encontró que para la zona de Fraunhofer, el valor de la presión acústica  $p$ , en un punto situado a una distancia  $r$  está dado por

$$p = \frac{p_0 r_0}{r} \left[ \frac{2 J_1 \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \text{Sen } \theta \right)}{\frac{2\pi a}{\lambda} \text{Sen } \theta} \right]$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la línea que une el punto considerado con el centro y la perpendicular a la cara del transductor que pasa por el centro,  $p_0$  es el valor de  $p$  a una distancia  $r_0$  sobre el eje del transductor,  $J_1$  son las funciones Bessel de primer orden, esto hace que al graficar en coordenadas polares, la intensidad del campo ultrasónico aparezcan rosas de varias hojas de diferente tamaño según la dirección angular de la hoja dependiendo también -

del radio del transductor y de la longitud de onda.

Heinz Born (\*) calculó que en líquidos (con  $\alpha \ll 1$ ) tales que Z fuera más grande que X (distancia entre 2 medidas consecutivas) el coeficiente de absorción estaba dado por.

$$\alpha = \frac{\ln \frac{I_z}{I_{z+x}} \cdot \frac{\text{sen}^2 \frac{m}{z+x}}{\frac{m}{z}}}{2\lambda}, \quad \text{Con} \quad m = \frac{\pi a^2}{2\lambda}$$

Con Z y Z+X medidas a lo largo de una perpendicular a la cara del transductor que pase por su centro. Esta fórmula sencilla de obtener, la atenuación proviene del hecho que la intensidad de una onda amortiguada  $I_x = I_0 e^{-2\alpha x}$  dejar de ser plana, sin llegar a ser esférica, y su energía se distribuye en una area más grande que la del transductor-emisor, de donde proviene el término corrector  $\Delta \alpha^2 \frac{m}{z}$ .

(\*) Ver referencia No. 22. en la Bibliografía.

## INDICE.

	Pág.
INTRODUCCION	
CAPITULO I ECUACIONES FUNDAMENTALES .....	1
A. HIDRODINAMICA .....	1
B. ACUSTICA .....	12
CAPITULO II LA VELOCIDAD DEL SONIDO .....	19
A. GASES .....	19
B. LIQUIDOS .....	24
C. MEDICION DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO .....	28
CAPITULO III PROCESOS DE ABSORCION .....	31
A. VISCOSIDAD .....	31
B. CONDUCCION DEL CALOR .....	39
C. RADIACION DEL CALOR .....	45
D. MEDICION DE LA ABSORCION .....	50
CAPITULO IV EXPERIMENTO REALIZADO PARA MEDIR LA VELOCIDAD Y LA ATENUACION DEL SONIDO .....	54
A. LA VELOCIDAD DEL SONIDO EN EL AGUA .....	54
B. LA ATENUACION DEL SONIDO EN AGUA SALADA ...	57
CONCLUSIONES .....	67
APENDICE I PROCESOS DE RELAJACION .....	69
APENDICE II EL FACTOR GEOMETRICO EN LA ABSORCION.....	77
INDICE .....	84
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	85

## REFERENCIAS

## BIBLIOGRAFICAS.

1. L. Landau, E. Lifchitz. Mécanique des fluides,  
Editions MIR (1967).
2. A.B. Bathia. Ultrasonic Absorption.  
Oxford (1967).
3. B. Carlin. Ultrasonics,  
Mc. Graw Hill (1960).
4. R.P. Feynman, Leighton, Sands. The Feynman  
Lectures on Physics. Vol. I. Ad. Wesley. (1966).
5. K.P. Herzfeld, T.A. Litovitz. Absorption and  
Dispersion of Ultrasonic Waves.  
Academic Press (1959).
6. L. Filipczynski, Z. Pawlowski, Y. Wehr. Ultrasonic  
methods of testing materials.  
Butterworths (1966).
7. J. Surugue. Techniques Générales du Laboratoire  
de Physique, Ed. du C.N.R.S. (1967).
8. P. Morse. Thermal Physics. Benjamin (1965).
9. R.B. Lindsay. Introduction to Physical Statistics.  
Dover (1968).
10. L. García Colín. Introducción a la Termodinámica  
Clásica. Trillas (1970).
11. A. Sommerfeld. Mechanics of Deformable Bodies.  
Academic Press (1950).

12. J. Blitz. Fundamentals of Ultrasonics  
Butteworths (1967).
13. P. Fleury. J. P. Mathieu. Vibrations Mécaniques,  
Acoustique. Eyrolles (1962).
14. A. Corona Cruz. Tesis Profesional de Físico,  
U.N.A.M. (1972).
15. E.A. Martina B. Tesis profesional de Físico,  
U.N.A.M. (1972).
16. M. Greenspan (N.B.S.) Acoustic properties of Liquids.  
American Institute of Physics Handbook,  
Mc. Graw Hill (1963).
17. V.F. Nozdrev. Aplicacion of Ultrasonics in  
Molecular Physics, Gordon and Breach (1963).
18. J.M.M. Pinkerton. Nature 160 (4056): 128-129  
(1947).
19. F. Fox, G.D. Rock, Phy Rev. 79, (1-2); 68-72  
(1946).
20. F. Fox, K.F. Herzfeld, G.D. Rock, 70, (5-6):  
329-339 (1946).
21. L. Tisza. Phy Rev, 61, 531-536 (1941).
22. H. Born. Z. Phys. 120: 383-396 (1942-1943)
23. Revue Techniques de l'Ingenieur 12:  
E. 2692, 1 E2694, 6 (1970).  
Miyake, Koizumi, J. Marine Research 7:63-66  
(1948).

25. Bakhans, F. Trendilenburg, Z.S. f. techn. Phys,  
7,630, (1926).
26. W.D. Wilson, (N.B.S.). J. Acoust-Soc. Amer,  
31,1067 (1959).
27. Vop Metod Ul'trazoukovoï, Interferometrie, Tr,  
Vses, Konf, Ind 1965, 106-6.
28. Hall, Phy. Rev. 73,775 (1948).
29. C.S. Venkeleswaran. Proc. Indian Acad, Sci,  
A15, 362 (1942).
30. Margenau, Murphy. The Mathematics. of  
Physics and Chemistry.  
Van Nostrand (1956).
31. F.V. Hunt. Propagation of Sound in Fluids.  
American Institute of Physics Handbook  
Mc. Graw Hill (1963).
32. Litovitz, Carnevale, Y. Appl. Phy, 26,816 (1955).
33. Y.F. Swindells, J. R. Col, T.B. Godfrey.  
Natl. Bur. Standars. J Research 48:1-31 (1952).