UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MATEMÁTICAS.

Principios del análisis armónico en el estudio de la ecuación de Beltrami.

Presenta:

Cortés Cortina Carlos Brandon

Dirigió:

Dr. Baisón Olmo Antonio Luis

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

En primer lugar, agradezco a mi familia por su apoyo incondicional, pero principalmente a mis Padres ya que sin ellos no sería lo que soy ahora. También, debo reconocer que este proyecto no habría sido posible sin la orientación de los Dres. Antonio Luis Baisón Olmo y Victor Alberto Cruz Barriguete, quienes además de mentores se han convertido en muy buenos amigos y colegas.

Resumen. El proyecto de tesis aquí expuesto, tiene por objetivo presentar las herramientas necesarias que permiten el estudio de la ecuación de Beltrami. Además, la metodología del trabajo contempla tópicos propios de los últimos semestres de la carrera de Matemáticas que permitan entender la aplicación de los mismos. La finalidad es escribir una monografía para que un lector proveniente de dicha carrera o afín pueda familiarizarse rápidamente con conceptos más especializados dentro del análisis armónico.

Una vez dilucidadas las herramientas principales, se explorarán las condiciones y los espacios clásicos que permiten encontrar soluciones principales para la ecuación de Beltrami, y de esta forma dar un fundamento riguroso en el ámbito teórico para dar solución a este problema.

De igual manera, se presentarán algunos puntos de interés sobre elementos periféricos en el estudio de esta ecuación, que son objeto de estudio actualmente como lo es la conjetura de Iwaniec. Cabe mencionar que las soluciones para la ecuación de Beltrami, que también son llamadas en la literatura funciones cuasiconformes, son la generalización natural de las funciones conformes, y juegan un papel muy importante en las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico. Por otro lado este tipo de funciones aparecen de forma natural en la Geometría Diferencial y recientemente en problemas aplicados a fenómenos físicos.

Dentro de este segmento de las matemáticas se abarcan temas como: teoría de la medida, análisis matemático, análisis armónico, variable compleja, ecuaciones diferenciales parciales, teoría de operadores, espacios de funciones, entre otros.

La ecuación de Beltrami se define por medio de los operadores diferenciales ∂ y $\overline{\partial}$, los cuales operan funciones en variable compleja de la forma

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

y

$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Es claro que dichos operadores son lineales y no se restringen a funciones holomofas, ya que si f es *holomorfa*, entonces $\overline{\partial} f = 0$, esto como una implicación de las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Estos operadores son de interés ya que la ecuación de Beltrami, donde $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ y $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, tiene la siguiente formulación:

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f.$$

Al coeficiente μ, se le conoce como coeficiente de Beltrami, y las condiciones que lo caracterizan son requeridas para la resolución de dicha ecuación diferencial, al menos para poder afirmar la existencia de sus soluciones, las cuales se les conoce como funciones cuasiregulares, o cuasiconformes en caso de que además las soluciones sean homeomorfas.

Luego de la primera caracterización de las soluciones de la ecuación de Beltrami, es válido cuestionarse por la existencia de soluciones dentro de los espacios $L^p(\mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{C})$, y entonces veremos que no necesariamente para todo $p \in (1, +\infty)$, existe una solución para la ecuación de Beltrami, o al menos, no puede obtenerse mediante las mismas técnicas empleadas en este trabajo. Aún así, daremos un rango para p, de tal manera que se pueda afirmar la existencia de la solución en el espacio $L^p(\mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{C})$.

Clásicamente, el método para resolver la ecuación de Beltrami radica en la teoría $L^p(\mathbb{C})$ de la transformada de Beurling, el cual, al ser bien implementado resume la ecuación en un problema de operadores. Por otra parte, la transformada u operador de Beurling como se nombra en este proyecto, también es materia de estudio por si misma, un ejemplo de esto se presenta mediante la conjetura de Iwaniec anteriormente nombrada.

Índice general

Preliminares. 6
0.1. Teoría de la medida. 6

Capítulo 1. Espacios de Lebesgue. 9
1.1. Funciones en $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 9
1.2. $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre los reales. 11
1.3. $L^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ a través de $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. 12
1.4. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{C})$. 15
1.5. Funciones de Bessel y transformada de Fourier de funciones radiales. 16
1.6. Operadores diferenciales y transformada Fourier. 19
1.7. Fórmula de reconstrucción. 21

Capítulo 2. Aproximaciones y generalizaciones sobre conjuntos de funciones. 24
2.1. La Fórmula de Plancherel. 24
2.2. Descomposición de Whitney. 27
2.3. Espacio de funciones de Schwartz $S(\mathbb{C})$. 29
2.4. Teoría de distribuciones temperadas 33

Capítulo 3. La ecuación de Beltrami. 36
3.1. Ecuaciones diferenciales y soluciones fundamentales. 36
3.2. Operador de Cauchy. 36
3.3. Operador de Beurling. 38
3.4. Potencial logarítmico. 39
3.5. Un vistazo a la ecuación de Beltrami. 39
3.6. Operador de Beltrami. 40
3.7. Intervalo crítico del operador de Beltrami. 44

Bibliografía 48

Bibliografía 49

Preliminares.

0.1. Teoría de la medida.

Uno de los usos más comunes de la teoría de la medida, es la generalización del concepto de área, mismo que permite la formulación de la integral. En particular, nuestro interés se centra en poder caracterizar los espacios de funciones Lebesgue integrables definidos en $\mathbb{C}$ con valores en $\mathbb{C}$. Por tal motivo, comenzamos haciendo una reseña de algunos conceptos y resultados de la teoría de la medida.

DEFINICIÓN 1. Consideremos un conjunto Θ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Theta)$. Decimos que $\mathcal{S}$ es una *σ-álgebra* de Θ, si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\Theta \in \mathcal{S}$.
- Si $\Upsilon \in \mathcal{S}$ entonces $\Upsilon^c \in \mathcal{S}$.
- Si $\{\Upsilon\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ entonces $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}\{\Upsilon\}_i \in \mathcal{S}$.

Entenderemos como *espacio medible*, a la pareja ordenada $(\Theta, \mathcal{S})$, y a los elementos del conjunto $\mathcal{S}$ los llamaremos *medibles*.

De la definición anterior, podemos observar que $\emptyset \in \mathcal{S}$ al ser el complemento del total. Además, el conjunto $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cap}\Upsilon_i = \left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}\Upsilon_i^c\right)^c \in \mathcal{S}$. Es decir, la intersección numerable de elementos de $\mathcal{S}$, también es un elemento de $\mathcal{S}$.

Como ejemplo, consideremos

$$\mathcal{S}_n := \{B \subseteq \mathbb{N} \text{ tal que } B \text{ es a lo más numerable}\}.$$

Entonces, para verificar que $\mathcal{S}_n$ es una *σ-álgebra*, basta con observar que las operaciones descritas en la definición 1 entre conjuntos a lo más numerables devuelven conjuntos a lo más numerables, aunque cabe mencionar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.

Por otra parte, si consideramos un conjunto Θ y el conjunto

$$\mathcal{S}(E) := \cap\{\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\Theta) \text{ tal que } \mathcal{S} \text{ es } \sigma - \textit{álgebra} \text{ y } E \subseteq \mathcal{S}\},$$

no es complicado demostrar que $\mathcal{S}(E)$, mejor conocida como la *σ-álgebra generada por E*, es la *σ-álgebra* más pequeña que contiene a E.

DEFINICIÓN 2. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, entonces, llamaremos a $\mathcal{S}(\tau_{\mathbb{R}})$ la *σ-álgebra de Borel* y nos referiremos a los elementos de esta como *Borelianos*[1].

De la definición 2 es útil recordar que la topología $\tau_{\mathbb{R}}$ es el conjunto cuyos elementos son intersecciones arbitrarias de intervalos abiertos. Además, por la definición del conjunto $\mathcal{S}(\tau_{\mathbb{R}})$, los *Borelianos* en $\mathbb{R}$ pueden ser caracterizados por intersecciones arbitrarias de intervalos abiertos. De igual forma podemos verificar que una *σ-álgebra de Borel* en el plano podría ser caracterizada por el conjunto de intersecciones arbitrarias de rectángulos en $\mathbb{R}^2$, que son el producto de intervalos abiertos.

DEFINICIÓN 3. Una función $f : (\Theta, \mathcal{S}_1) \to (\Phi, \mathcal{S}_2)$, donde $(\Theta, \mathcal{S}_1)$ y $(\Phi, \mathcal{S}_2)$ son *espacios medibles*, es una *función medible* si para todo $U \in \mathcal{S}_2$ se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{S}_1$.

Una caracterización clásica de estas funciones se presenta de la siguiente forma.

TEOREMA. *Consideramos la función $f : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ donde $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra de Borel en la recta y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

[1] En general, dada una topología τ, entenderemos al conjunto $\mathcal{S}(\tau)$ como la *σ-álgebra de Borel generada por τ*.

1. f *es medible.*
2. $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{S}$.
3. $f^{-1}((c, \infty)) \in \mathcal{S}$.
4. $f^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{S}$.
5. $f^{-1}([c, \infty)) \in \mathcal{S}$.

El lector podrá ver el teorema antes enunciado en [**5**, pág. 35].

DEFINICIÓN 4. Consideremos un *espacio medible* $(\Theta, \mathcal{S})$. Una *medida positiva* es una función $A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$, que satisface las siguientes condiciones:

- Para todo $E \in \mathcal{S}$, $A(E) \geq 0$.
- $A(\emptyset) = 0$.
- Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$, tales que $E_j \cap E_k = \emptyset$ cuando $j \neq k$, entonces:

$$A(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} A(E_i).$$

Al añadir al espacio medible $(\Theta, \mathcal{S})$ la función A, se obtiene la terna $(\Theta, \mathcal{S}, A)$, la cual llamamos *espacio de medida*.

El concepto de *medida* nace de otras ideas fundamentales. Por ejemplo, podemos ver que el conjunto cuyos elementos son intersecciones arbitrarias de rectángulos abiertos, forman una *σ-álgebra* en $\mathbb{R}^2$, entonces, la función A que asocia a cada rectángulo con su área resulta ser una *función de medida*. Es decir, que las *funciones de medida* son una generalización de los conceptos de área, longitud y volumen.

DEFINICIÓN 5. Consideremos un *espacio de medida* $(\Theta, \mathcal{S}, A)$. El conjunto de elementos $A-$*nulos* lo denotamos como

$$\eta(A) := \{E \in \mathcal{S} \text{ tal que } A(E) = 0\}.$$

En este sentido, cuando hablemos de que en un *espacio de medida* $(\Theta, \mathcal{S}, A)$, se satisface una propiedad $P(x)$ casi para todo $x \in \Theta$, nos referimos a que la propiedad $P(x)$ es verdadera en x siempre que $x \in \Theta \backslash E,\ E \in \eta(A)$.

DEFINICIÓN 6. Decimos que un espacio de medida $(\Theta, \mathcal{S}, A)$ es *completo*, si para cada $F \subseteq E$, tal que $E \in \eta(A)$, se cumple que $F \in \eta(A)$.

DEFINICIÓN 7. Una función $s : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^+, \mathbb{B}_\mathbb{R})$, es llamada *simple si* toma un número finito de valores respetando la regla de correspondencia

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}(x)$$

donde E_i es un conjunto medible y $b_i \in \mathbb{R}^+$ para cada $i = 1, ..., n$.

DEFINICIÓN 8. Consideremos una función simple $s : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^+, \mathbb{B}_\mathbb{R})$, definimos su *integral* por:

$$\int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x) := \sum_{i=1}^{n} b_i A(E_i).$$

Podemos destacar algunas propiedades derivadas de la definición 8.

TEOREMA. *Si* $s,\ m : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^+, \mathbb{B}_\mathbb{R})$ *son medibles y* $c \in \mathbb{R}$, *entonces.*

- $\int_{\mathbb{R}} cs(x)dA(x) = c\int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x)$.
- $\int_{\mathbb{R}} (s(x) + m(x))dA(x) = \int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x) + \int_{\mathbb{R}} m(x)dA(x)$.
- *Si* $s(x) \leq m(x)$, *entonces* $\int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x) \leq \int_{\mathbb{R}} m(x)dA(x)$.

- $\left|\int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \mid s(x) \mid dA(x).$

Se sabe que una *función medible* definida positiva puede ser aproximada por una sucesión creciente de *funciones simple*s definidas positivas como se observa en [**4**, pág. 170]. De este modo, podemos definir la integral de una *función medible* positiva como sigue.

Definición 9. Consideremos una función medible positiva $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}^+, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$. Entenderemos como suma superior y suma inferior de f respectivamente a los valores reales obtenidos de las siguientes expresiones:

$$\bar{S}(f, A) := \sup_{s-\text{simple}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x) \text{ tal que } f(x) \leq s(x) \right\},$$

$$\underline{S}(f, A) := \inf_{s-\text{simple}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} s(x)dA(x) \text{ tal que } s(x) \leq f(x) \right\}.$$

Una *función medible*, es integrable respecto a la medida A, si se satisface que

$$\bar{S}(f, A) = \underline{S}(f, A),$$

y a ese límite cuando es finito lo denotamos por $\int_{\mathbb{R}} f(x)dA(x)$.

Además, hasta el momento hemos pensado en funciones que sólo toman valores no-negativos, para poder definir estos conceptos en funciones que pueden tomar valores tanto positivos como negativos, solo basta considerar lo siguiente. Dada una función *medible* $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$, se definen las funciones

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

No es difícil ver que, si $f(x)$ es una función que puede tomar valores tanto positivos como negativos, podemos escribirla de la forma $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Así, tiene sentido definir la *integral de la función medible* $f(x)$ como:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dA(x) := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)dA(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)dA(x)$$

cuando las integrales de la derecha son finitas. En este caso, entenderemos que una función con dichas características es *integrable* si

$$\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid dA(x) < +\infty.$$

Además, entenderemos por *integral de una función medible* $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$, sobre el conjunto medible $I \subseteq \mathbb{R}$, como

$$\int_I f(x)dA(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \chi_I(x)dA(x).$$

Es natural identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, y de este forma $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ puede ser identificado con $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$, por tanto una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es medible si $\text{Re}(f)$ y $\text{Im}(f)$ son medibles.

Definición 10. Consideremos una función medible $f : (\mathbb{C}, \mathbb{B}_{\mathbb{C}}) \to (\mathbb{C}, \mathbb{B}_{\mathbb{C}})$. Definimos su integral como

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)dA(z) := \int_{\mathbb{C}} \text{Re}(f(z))dA(z) + i\int_{\mathbb{C}} \text{Im}(f(z))dA(z),$$

entendiendo a $dA(z)$ como la medida de área.

Capítulo 1

Espacios de Lebesgue.

En esta sección, haremos un análisis práctico de los espacios de Lebesgue y algunas de sus características principales en el análisis armónico. Así también, discutiremos propiedades de la transformada de Fourier sobre estos conjuntos. En particular, para el caso del espacio $L^2(\mathbb{C})$, se puede aprovechar el hecho de ser Hilbert[1]. Por otro lado, en $L^2(\mathbb{C})$ la transformada de Fourier es una isometría, tópico que se probará en el segundo capítulo. En resumen, este capítulo es una construcción de los conjuntos principales donde extenderemos nuestro análisis y también presentaremos las herramientas básicas a implementar.

1.1. Funciones en $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Introduciremos en primera instancia la noción del *espacio de Banach* de funciones de valores reales cuadrado integrables para que poco a poco podamos generalizar más este concepto. La idea central de comenzar con este conjunto, es que a partir de él podemos analizar sus propiedades, y de manera orgánica extenderlas sobre el plano real para poder generar su análogo sobre el plano complejo, aprovechando el homeomorfismo natural entre ellos. Además, en muchas de las propiedades de $L^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$, las demostraciones son idénticas o se heredan de estas ideas básicas. De igual manera, no hay que perder de vista que el interés por construir la teoría sobre este espacio en particular, es por su propiedad de ser Hilbert y de este modo tener una noción de ortogonalidad, derivada del producto escalar en dicho conjunto.

Definición 11. Definimos el conjunto $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la forma

$$L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{medible tal que} \quad \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dA(x)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Para mostrar que este conjunto es no vacío, veamos un ejemplo. Consideremos

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x\in[a,b]; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \chi^2_{[a,b]}(x)dx = b-a.$$

Además podemos ver que el conjunto $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ contiene funciones más interesantes. Podemos analizar la función definida como $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ y afirmamos que f pertenece a $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Para esto basta observar que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx < +\infty.$$

Entonces notemos que

[1]Un espacio de funciones es de Hilbert, si tiene producto escalar, mismo que defina una norma con la que todas las sucesiones convergentes sean de Cauchy.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

y haciendo el cambio de variable a coordenadas polares $(x,y) = (r\cos(\theta), r\text{sen}(\theta))$, donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta dr = 2\pi\int_{\mathbb{R}^+} re^{-r^2}dr,$$

Considerando el cambio de variable $u = r^2$ vemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = 2\pi\int_{\mathbb{R}^+} re^{-r^2}dr = \pi\int_{\mathbb{R}^+} e^{-u}du = \pi,$$

y finalmente

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Por lo que la afirmación de que $f \in L^2(\mathbb{C})$ es cierta.

Por lo visto hasta aquí, podemos deducir que una función que sea continua en algún intervalo cerrado y acotado, por la característica de dicho intervalo, será una función perteneciente a $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Por otro lado, se puede demostrar que este conjunto es un espacio vectorial sobre los reales. Pensemos, para que esto sea cierto primero necesitamos que la suma sea cerrada en este conjunto, esto es que $\int_{\mathbb{R}}(f+g)^2dx < +\infty$, por lo que necesitamos acotar dicha integral de alguna forma. Como un buen primer paso motivemos lo siguiente.

TEOREMA 12 (Desigualdad de Schwarz). *Consideremos $f, g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Si las funciones f o g son nulas el resultado se sigue trivialmente, por lo tanto supongamos que ambas funciones son no nulas. Consideremos dos números reales arbitrarios a y b, entonces se cumple que $(a-b)^2 \geq 0$ y equivalentemente

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2). \tag{1.1.2}$$

En particular podemos elegir

$$a = \lambda^{-\frac{1}{2}}|f(x)| \text{ y } b = \lambda^{\frac{1}{2}}|g(x)|. \tag{1.1.3}$$

Sustituyendo las relaciones (1.1.3) en (1.1.2) obtenemos

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\lambda^{-1}|f(x)|^2 + \lambda|g(x)|^2\right), \tag{1.1.4}$$

que por monotonía de la integral

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{2}\left(\lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)^2dx + \lambda\int_{\mathbb{R}} g(x)^2dx,\right). \tag{1.1.5}$$

Por último, eligiendo

$$\lambda = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.1.6}$$

Podemos sustituir (1.1.6) en la expresión (1.1.5) para obtener finalmente que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.7}$$

□

1.2. $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre los reales.

Una característica importante que debe satisfacer $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denotado también como $L^2(\mathbb{R})$, para ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es que sus elementos sean cerrados bajo la adición. Para ello pensemos en lo siguiente:

TEOREMA 13 (Desigualdad de Minkowski). *Consideremos $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f y g son no nulas. Aprovechando las propiedades del valor absoluto se satisface

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))^2 &= |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)| \\ &\leq |f(x)+g(x)|\;|\,f(x)\,|+|\,f(x)+g(x)\,||\,g(x)\,|,\end{aligned}$$

que por monotonía de la integral

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\,f(x)+g(x)\,||\,f(x)\,|\,dx + \int_{\mathbb{R}} |\,f(x)+g(x)\,||\,g(x)\,|\,dx, \tag{1.2.2}$$

y por *desigualdad de Schwarz* aplicada en la expresión (1.2.2), obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Entonces, dividiendo por el factor común, finalmente tenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Inmediatamente por la expresión (1.2.1) argumentamos que $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es cerrado bajo la adición. En otras palabras, si $f, g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, entonces $f+g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Además, la multiplicación por escalar también es cerrada trivialmente, entonces se puede decir que efectivamente este es un espacio vectorial sobre los reales. Podemos además ver que los elementos del conjunto

$$L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 dA(x) < +\infty \right\},$$

satisfacen tanto la *desigualdad de Schwarz*, como también la *desigualdad de Minkowski*, y las demostraciones serían idénticas en ambos casos. Entonces decimos que $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es también un espacio vectorial sobre los reales.

Para concluir esta sección, cabe mencionar que sobre este conjunto podemos definir una estructura más refinada, ya que este espacio es *normado*. A saber, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ entonces

$$\|\,f(x)\,\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\,f(x)\,|^2\,dA(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

resulta ser una norma inducida por el producto escalar definido como

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dA(x),$$

lo que argumenta que $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es efectivamente un espacio de Hilbert como afirmamos al inicio de la sección, característica que engloba diversas propiedades que mencionaremos más adelante.

1.3. $L^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ a través de $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

Las discusiones anteriores nos permiten presentar el siguiente concepto como una extensión de los espacios estudiados.

DEFINICIÓN 14. Definimos el conjunto $L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ de la siguiente forma

$$L^2(\mathbb{C}) := \left\{ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{C}} |\, f(z)\,|^2\, dA(z) < +\infty \right\}.$$

Veamos que

$$\int_{\mathbb{C}} |\, f(z)\,|^2\, dA(z) < +\infty$$

se cumple si y sólo si $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2 dxdy < +\infty$. Esto equivale a que $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. De modo que podemos entender a $L^2(\mathbb{C})$ como una suma directa de la forma $L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \oplus iL^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Ergo $L^2(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial sobre los reales al ser suma directa entre espacios vectoriales sobre los reales.

Más aún, tenemos que:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} |\, f(z)g(z)\,|\, dA(z) \le \left(\int_{\mathbb{C}} |\, f(z)\,|^2\, dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}} |\, g(z)\,|^2\, dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}.$
2. $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{C}} |\, f(z)+g(z)\,|^2\, dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{\mathbb{C}} |\, f(z)\,|^2\, dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{C}} |\, g(z)\,|^2\, dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}.$

DEFINICIÓN 15. Entenderemos al conjunto $L^p(\mathbb{C})$ como el conjunto descrito de la forma

$$L^p(\mathbb{C}) := \left\{ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{C}} |\, f(z)\,|^p\, dA(z) < +\infty \right\}.$$

y

$$L^\infty(\mathbb{C}) := \left\{ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ medible tal que } \sup_{z\in\mathbb{C}} |\, f(z)\,| < +\infty \right\}.$$

LEMA 16. *Consideremos el* disco abierto con centro en z_0 y radio r

$$\mathbb{D}_{r_0}(z_0) := \{z\in\mathbb{C} \textit{ tal que } |\, z-z_0\,| \le r_0\}$$

y las funciones $g,\ f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ *con regla de correspondencia*

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \textit{si } z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{r_0}(z_0); \\ \frac{1}{(z-z_0)^\alpha}, & \textit{si } z\in\mathbb{D}_{r_0}(z_0); \end{cases}$$

y

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \textit{si } z\in\mathbb{D}_{r_0}(z_0); \\ \frac{1}{(z-z_0)^\alpha}, & \textit{si } z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{r_0}(z_0); \end{cases}$$

Entonces $f\in L^p(\mathbb{C})$ *si* $\alpha p<2$ *y* $g\in L^p(\mathbb{C})$ *siempre que* $\alpha p>2$.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que si hacemos un cambio de variable a coordenadas polares obtenemos

$$\| f \|_p^p = \int\limits_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} \frac{dA(z)}{| z - z_0 |^{\alpha p}} = \int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta dr}{r^{\alpha p-1}} = 2\pi \int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{r^{\alpha p-1}}.$$

Entonces, si $2 - \alpha p > 0$

$$\int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{r^{\alpha p-1}} = \left(\frac{r^{2-\alpha p}}{2-\alpha p}\Big|_0^{r_0} \right) < +\infty$$

de donde deducimos nuestra afirmación respecto a la función f.

Ahora aplicando la mismo cambio a coordenadas polares, obtenemos que

$$\| g(z) \|_p^p = \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} \frac{dA(z)}{| z - z_0 |^{\alpha p}} = \int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta dr}{r^{\alpha p-1}} = 2\pi \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha p-1}}.$$

Finalmente, siempre que $2 - \alpha p < 0$,

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha p-1}} = \left(\frac{r^{2-\alpha p}}{2-\alpha p}\Big|_{r_0}^{\infty} \right) < +\infty$$

de donde deducimos nuestra afirmación respecto a la función g. □

Del lema 16 podemos observar que si $p = 2$ la función $f(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_{\mathbb{D}_{r_0}(0)}$ es una función de $L^2(\mathbb{C})$, pero f^2 no lo es. Entonces el producto de dos funciones en $L^2(\mathbb{C})$ no es un elemento de $L^2(\mathbb{C})$, por lo tanto no es un álgebra de funciones. Más aún, nos da una idea de como generar funciones de tipo $L^p(\mathbb{C})$. Por ejemplo, decimos que el soporte de una función es la cerradura del subconjunto del dominio donde no se anula dicha función, de manera más técnica.

DEFINICIÓN 17. Se define el *soporte de una función f como el conjunto* $\overline{\{z \in \Omega \text{ tal que } f(z) \neq 0\}}$, y con base en esto denotamos al *conjunto de funciones continuas con soporte compacto* como $C_c(\Omega)$.

De la definición 17, podemos observar que si $f \in C_c(\mathbb{C})$ entonces

$$\int\limits_{\mathbb{C}} | f(z) |^p \, dA(z) = \int\limits_{\text{supp}(f)} | f(z) |^p \, dA(z) \leq \| \left(f(z)\, \bar{f}(z)\right)^{\frac{p}{2}} \|_\infty \, A(\text{supp}(f)) < +\infty.$$

Es decir, que $C_c(\mathbb{C}) \subseteq L^p(\mathbb{C})$. De aquí podemos ver que toda función continua multiplicada por una función característica de un conjunto compacto pertenece a $L^p(\mathbb{C})$, más aún, se puede probar que el conjunto de funciones continuas con soporte compacto es denso en L^p, para ello necesitamos un par de herramientas para refinar nuestro espacio y poder trabajarlo como deseamos. En primer lugar, los espacios L^p son conocidos por ser *espacios de Banach*, donde su norma se define en general como

$$\| f \|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{C}} | f(z) |^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

y $p \in (1, +\infty)$. Entonces formulemos lo siguiente.

TEOREMA 18. *El conjunto $C_c(\mathbb{C})$ es denso en $L^p(\mathbb{C})$ bajo la norma de este último.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un conjunto acotado $B \subseteq \mathbb{C}$ y la medida del campo complejo A. Entonces por regularidad de la misma, tenemos que existen U abierto y K compacto tales que $K \subseteq B \subseteq U$ y $A(U\setminus K) < \varepsilon_0$ con $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, entonces K es cerrado y $\mathbb{C}\setminus U$ también es cerrado, además K y $\mathbb{C}\setminus U$ son claramente disjuntos. Por el *lema de Urysohn* [**7**, pág. 237], existe una función continua $g : \mathbb{C} \to [0, 1]$ con la propiedad de que si $z \in K$ entonces $g(z) = 1$ y si $z \in \mathbb{C}\setminus U$ entonces $g(z) = 0$ por lo que se afirma

que g tiene soporte compacto. Ahora si consideramos $\varepsilon_0 = (\varepsilon)^p$ y la función característica del conjunto B denotada por χ_B, entonces

$$\| \chi_B - g \|_p = \left(\int_{\mathbb{C}} | \chi_B(z) - g(z) |^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{U \setminus K} | \chi_B(z) - g(z) |^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

entonces obtenemos que $\| \chi_B - g \|_p < (\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon$ ya que $A(U/K) < \varepsilon$. Es decir, las funciones características se pueden aproximar por funciones del tipo $C_c(\mathbb{C})$. Por otro lado, consideremos s una *función simple* de la forma

$$s(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(z).$$

Entonces para cada χ_{E_i} existe una función continua y de soporte compacto f_i, de tal manera que

$$\| \chi_{E_i} - f_i \|_p < \varepsilon_0.$$

Con base en esto definimos

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(z).$$

Claramente f es continua y de soporte compacto, al ser f combinación lineal de funciones continuas y de soporte compacto, ya que la unión de los soportes de cada f_i resulta ser el soporte de f y como bien sabemos, la unión finita de conjuntos compactos es compacto. Si además consideramos

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{n \max\limits_{i=1,..n} \{| a_i |\}},$$

tenemos que

$$\| s - f \|_p = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} - a_i f \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} | a_i | \| \chi_{E_i} - f_i \|_p,$$

y por transitividad obtenemos que $\| s - f \|_p < n \max\limits_{i=1,..,n} \{| a_i |\} \varepsilon_0 = \varepsilon$, por lo que afirmamos que las *funciones simples* pueden ser aproximadas por funciones continuas de soporte compacto. Por último, si f es una función de L^p, sabemos que existe una sucesión de *funciones simples* tales que, para todo $\varepsilon > 0$

$$\| f - \varphi_n \|_p < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.1}$$

cuando $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande. Por lo anterior, tenemos que para cada φ_n existe una función g_n continua y de soporte compacto tal que

$$\| \varphi_n - g_n \|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.3.2}$$

entonces solo basta observar que cuando n es suficientemente grande, por las expresiones (1.3.1) y (1.3.2) se tiene

$$\| f - g_n \|_p \leq \| f - \varphi_n \|_p + \| \varphi_n - g_n \|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Este resultado nos será muy útil más adelante, debido a que en muchos casos, es más sencillo probar ciertas propiedades en un conjunto de funciones que sea denso en otro. De esta manera poder extender dichas propiedades en un conjunto más grande.

1.4. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{C})$.

En esta sección presentaremos las propiedades principales de la transformada de Fourier sobre el espacio $L^1(\mathbb{C})$, con la intención de darle uso en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales. Esto no es de extrañarse ya que en diferentes ramas de la física y las matemáticas es muy común el uso de la transformada de Fourier con estos fines. En concreto, el conjunto $L^1(\mathbb{C})$ nos es de utilidad como se verá a continuación, ya que además de ser un espacio de Lebesgue, también satisface con el requisito de que la transformada de Fourier de sus elementos está bien definida.

Pensemos en los siguientes conjuntos de funciones

$$L^1(\mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{C}} \mid f(z) \mid dA(z) < +\infty \right\}$$

y

$$L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{R}^n} \mid f(z) \mid dA(z) < +\infty \right\},$$

Ahora, si consideramos $f \in L^1(\mathbb{C})$ entonces se satisface que

$$\left| \int_{\mathbb{C}} f(z) e^{-2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(z) \right| \leq \int_{\mathbb{C}} \mid f \mid\mid e^{-2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} \mid dA(z) \leq \int_{\mathbb{C}} \mid f \mid dA(z) < +\infty$$

de esta forma tiene sentido la siguiente definición.

Definición 19. Consideremos $f \in L^1(\mathbb{C})$, entonces decimos que la *transformada de Fourier de* f es la función

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{C}} f(z) e^{-2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(z).$$

Observemos que si $f \in L^1(\mathbb{C})$ entonces $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{C})$. Para un mejor entendimiento de la transformada de Fourier, podemos destacar las siguientes propiedades:

Lema 20. *Consideremos $\alpha, h, \delta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^1(\mathbb{C})$, entonces:*

1. ***Propiedad de linealidad.*** $\widehat{f + \alpha g} = \widehat{f} + \alpha \widehat{g}$.
2. ***propiedad de traslación***. $\widehat{f(z+h)}(\xi) = e^{2\pi i \mathrm{Re}(h\bar{\xi})} \hat{f}(\xi)$.
3. ***Propiedad de dilatación***. $\widehat{f(\delta z)}(\xi) = \mid \delta \mid^{-2} \hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ *si* $\delta \in \mathbb{R}$.
4. $\widehat{f(\mid z \mid)} = e^{2i\arg(z)} \hat{f}(e^{\arg(z)}\xi)$.

Demostración. En este caso haremos uso del *teorema del cambio de variable* [**10**, pág. 156].

1. Es inmediato debido a la propiedad de linealidad de la integral.
2. En este caso pensemos en el cambio de variable $w = z + h$, entonces $dA(w) = dA(z)$, por lo que
$$\widehat{f(z+h)}(\xi) = \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{-2\pi i \mathrm{Re}((w-h)\bar{\xi})} dA(w) = e^{2\pi i \mathrm{Re}(h\bar{\xi})} \hat{f}(\xi).$$
3. Como $\delta \in \mathbb{C}$, entonces, por el cambio de variable $w = \delta z$ tendríamos que
$$\mid \delta \mid^{-2} dA(w) = dA(z)$$
entonces haciendo uso del *teorema de cambio de variable* obtenemos que
$$\widehat{f(\delta x)} = \mid \delta \mid^{-2} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{-2\pi i \mathrm{Re}(w\frac{\bar{\xi}}{\delta})} dA(w) = \mid \delta \mid^{-2} \hat{f}(\xi\bar{\delta}^{-1}).$$
4. En este caso basta observar que $z = \mid z \mid e^{i\arg(z)}$ y por el tercer punto tenemos que
$$\widehat{f(\mid z \mid)}(\xi) = \overbrace{f(ze^{-i\arg(z)})}(\xi) = \hat{f}(e^{-i\arg(z)}\xi).$$

□

Para aclarar ideas, sería bueno hacer un primer ejemplo de como calcular la transformada de Fourier para funciones definidas en $\mathbb{C}$.

Consideremos el cuadrado $I^2 := [-n,n]\times[-n,n]$ y calculemos la transformada de la función característica $\chi_{I^2} : I^2 \to \mathbb{C}$ cuya regla de correspondencia es

$$\chi_{I^2}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in I^2 \\ 0, & \text{si } z \in I^2 \end{cases}$$

Observamos que

$$\widehat{\chi_{I^2}}(\xi) = \int_{\mathbb{C}} \chi_{I^2}(z) e^{-2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(z) = \int_{I^2} e^{-2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(z).$$

Entonces para $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ se tiene

$$\widehat{\chi_{I^2}}(\xi) = \left(\int_{[-n,n]} e^{-2\pi i x\xi_1} dx \right) \left(\int_{[-n,n]} e^{-2\pi i y\xi_2} dy \right) = \left(\frac{e^{-2\pi i x\xi_1}}{-2i\pi\xi_1} \right) \left(\frac{e^{-2\pi i y\xi_2}}{-2i\pi\xi_2} \right) \Big|_{-n}^{n},$$

obteniendo así

$$\widehat{\chi_{I^2}}(\xi) = \frac{1}{\pi^2\xi_1\xi_2} \left(\frac{-e^{-2\pi i n\xi_1} + e^{2\pi i n\xi_1}}{2i} \right) \left(\frac{-e^{-2\pi i n\xi_2} + e^{2\pi i n\xi_2}}{2i} \right),$$

que podemos escribir como

$$\widehat{\chi_{I^2}}(\xi) = \frac{1}{\pi^2\xi_1\xi_2} \mathrm{sen}(2\pi n\xi_1)\mathrm{sen}(2\pi n\xi_2).$$

Como podemos observar, el cálculo de la transformada de Fourier puede complicarse incluso en funciones bastante simples.

Definición 21. Decimos que una función de valores complejos es radial, si satisface que $f(z) = f(ze^{i\theta})$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, una función es radial si su imagen no cambia si se precompone con una rotación. Un ejemplo sencillo de las funciones radiales lo tenemos en la función $f(z) =\mid z \mid$.

1.5. Funciones de Bessel y transformada de Fourier de funciones radiales.

En el análisis de funciones que satisfacen cierta simetría esférica o axial es muy común la aparición de *funciones de Bessel* para su estudio. Dichas funciones suelen ser definidas a partir de las necesidades de la rama en la que se emplean, ya sea mediante una función generadora o una solución propuesta sobre alguna ecuación diferencial entre otros. En este trabajo, el interés principal sobre las *funciones de Bessel* se centra en el análisis de las funciones radiales.

Pensemos en una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R})$, que son funciones de variable real tales que existen sus segundas derivadas. Entonces, pensemos en la *ecuación de Bessel* que es de la forma

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + x\frac{df}{dx}(x) + (x^2 - n^2)f(x) = 0, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N},$$

que podemos resolver si de forma exhaustiva proponemos $f(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, que al sustituirlo en la ecuación anterior y bajo un ajuste técnico. Es decir, tomando b_{-1} y b_{-2}

iguales a cero, obtenemos que

$$\begin{aligned}0 &= n(n-1)x^n\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k + 2nx^n + nx^n\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k + x^n\sum_{k=0}^{\infty}kb_kx^k + z^n\sum_{k=2}^{\infty}b_{k-2}x^k + \\ &- n^2x^n\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k \\ &= x^n\sum_{k=0}^{\infty}(n(n-1)b_k + 2nkb_k + k(k-1)b_k + nb_k + kb_k + b_{k-2} - n^2b_k)x^k \\ &= x^n\sum_{k=0}^{\infty}(2nkb_k + k^2b_k + b_{k-2})x^k = x^n\sum_{k=0}^{\infty}(k(k+2n)b_k + b_{k-2})x^k.\end{aligned}$$

Esta identidad implica que los coeficientes satisfacen la relación de recurrencia

$$k(k+2n)b_k + b_{k-2} = 0.$$

Considerando $b_{-1} = 0$, se tiene que $b_1 = -\frac{b_{-1}}{1+2n} = 0$. Recursivamente obtenemos que $b_{2k-1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, se tiene que $b_2 = -\frac{b_0}{4(1+n)}$, entonces $b_4 = \frac{b_0}{4^2 2(2+n)(1+n)}$, así sucesivamente obtenemos que:

$$b_{2k} = (-1)^k\frac{b_0}{4^k k!(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}.$$

Elegimos $b_0 = \frac{1}{2^n n!}$ y de este modo

$$b_{2k} = (-1)^k\frac{1}{2^{2k}k!(n+k)!}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Al sustituirlo en la representación de la función obtenemos que

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Dado que los coeficientes b_k se eliminan cuando k es impar, la última igualdad es lo que se conoce como *función de Bessel* de orden n y lo denotaremos como:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Observemos que para cada n en la *ecuación de Bessel*, tenemos una solución de J_n. Más aún, dichas soluciones están indexadas por ese mismo parámetro. Además, será de suma importancia poder caracterizar estas funciones en una representación integral, debido a que como se ha podido observar hasta el momento, es mediante la integral que se han caracterizado varios conceptos aquí empleados.

LEMA 22. *Consideremos $f(x,h) = e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})}$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{C}$. El desarrollo de Laurent en la variable h, sobre un disco de radio $r < 1$ centrado en el origen $\mathbb{D}_r(0)$ está dado por*

$$f(x,h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)h^k.$$

DEMOSTRACIÓN. Descomponiendo $f(x,h)$ y describiendo cada componente en su desarrollo de Laurent obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = e^{\frac{x}{2}h}e^{-\frac{x}{2h}} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-x}{2h}\right)^m}{m!}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+m}h^{n-m}}{n!m!} =\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-m}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{(m+k)!m!}h^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{(m+k)!m!}h^k\right]+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\sum_{m=-k}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{(m+k)!m!}h\right]\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}J_k(x)h^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}J_k(x)h^k
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)h^k.$$

□

Para el caso en el que $h=ie^{i\theta}$, se cumple que

$$e^{ix\cos(\theta)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)i^ke^{ik\theta}. \tag{1.5.1}$$

Recordemos que

$$\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi, & \text{si } k=0;\\ 0, & \text{si } k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

Multiplicando la igualdad (1.5.1) a ambos lados por $e^{-im\theta}$ e integrando sobre el intervalo $(0,2\pi)$, obtenemos la *representación integral de la función de Bessel de orden m*

$$J_m(x)=\frac{i^{-m}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(x\cos(\theta)-m\theta)}d\theta. \tag{1.5.2}$$

La relación (1.5.2) nos será muy útil para desarrollar la transformada de Fourier sobre ciertas regiones.

LEMA 23. *La transformada de Fourier de una función radial también es radial.*

DEMOSTRACIÓN. Primeramente es claro que si $\theta=\arg(z)$ y también $\zeta=\arg(\xi)$, entonces

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{C}}f(z)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)=\int_{\mathbb{C}}f(\mid z\mid)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(|z||\xi|e^{i(\theta-\zeta)})}dA(z),$$

que bajo la parametrización del plano complejo de la forma $(x,y)=(r\cos(\theta),r\mathrm{sen}(\theta))$, donde $r\in\mathbb{R}^+$ y debido a la periodicidad de la función coseno, llegamos a que

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{2\pi}rf(r)e^{-2\pi ir|\xi|\cos(\theta-\zeta)}d\theta dr=\int_{\mathbb{R}^+}rf(r)\left(\int_0^{2\pi}e^{-2\pi ir|\xi|\cos(\theta)}d\theta\right)dr,$$

entonces

$$\hat{f}(\xi)=2\pi\int_{\mathbb{R}^+}rf(r)J_0(-2\pi r\mid\xi\mid)dr. \tag{1.5.3}$$

Por último de la representación integral de la función de Bessel de orden m (1.5.2) vemos que

$$\hat{f}(\xi e^{i\Theta}) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} rf(r)J_0(-2\pi r \mid \xi e^{i\Theta} \mid)dr = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} rf(r)J_0(-2\pi r \mid \xi \mid)dr = \hat{f}(\xi).$$

□

De lema 23 destacamos que tenemos una demostración para la fórmula para el cálculo de la transformada de Fourier de funciones radiales en términos de una *función de Bessel* con valores reales. Es decir, podemos hacer uso de las propiedades clásicas de este tipo de funciones. Por ejemplo, calculemos la transformada de Fourier de la función característica de un disco de radio r_0 arbitrario centrado en cualquier punto del plano complejo, denotado como $\mathbb{D}_{r_0}(z_0)$. Para esto observamos que

$$\widehat{\chi_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)}}(\xi) = 2\pi \int_0^{r_0} rJ_0(-2\pi r \mid \xi \mid)dr = \frac{-1}{\mid \xi \mid} \int_0^{r_0} (-2\pi r \mid \xi \mid)J_0(-2\pi r \mid \xi \mid)dr.$$

Entonces usando el lema 22 y tomando $u = -2\pi r \mid \xi \mid$ concluimos que

$$\widehat{\chi_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)}}(\xi) = \frac{-r_0}{\mid \xi \mid} J_1(-2\pi r_0 \mid \xi \mid).$$

Consideremos el anillo con centro en z_0 y radios $r_0 < r_1$, denotado por

$$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \ r_0 \leq \mid z - z_0 \mid \leq r_1\},$$

Otro ejemplo de transformada de Fourier, es el de la función $\chi_{\mathbb{A}}$ característica del anillo $\mathbb{A}$, que está dada por

$$\widehat{\chi_A}(\xi) = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} rJ_0(-2\pi r \mid \xi \mid)dr = \frac{(r_0 - r_1)(J_1(-2\pi r_1 \mid \xi \mid) - J_1(-2\pi r_0 \mid \xi \mid))}{\mid \xi \mid}.$$

1.6. Operadores diferenciales y transformada Fourier.

Para esta sección tengamos en cuenta las siguientes consideraciones. Primeramente, una función de valores complejos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se puede caracterizar de la forma $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reconociendo que si $z = x + iy$, entonces $f(z) = f(x + iy)$. De esta forma denotaremos las derivadas parciales de la forma $\partial_x f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$ y $\partial_y f(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

Definición 24. Para una función $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f \in C^1(\mathbb{C})$, definimos los operadores diferenciales ∂ y $\overline{\partial}$ de la forma:

$$\partial f(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z) - i\partial_y f(z)\right)$$

y

$$\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z) + i\partial_y f(z)\right).$$

Antes de dar el siguiente paso y ver su comportamiento bajo la transformada de Fourier, consideremos lo siguiente.

Teorema (de la convergencia dominada). *Considerando el espacio de medida* $(\mathbb{C}, S, A)$*, entonces, si una sucesión de funciones medibles* $f_1, f_2, ...\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *que convergen casi en todas partes puntualmente a la función medible* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *y supongamos además que existe una función* $g \in L^1(\mathbb{C}, \mathbb{R}^+)$*, tal que* $\mid f_n(z) \mid \leq g(z)$ *casi en todas partes para todo* n *natural. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n(z)dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z)dA(z).$$

Más detalles del *teorema de convergencia dominada* pueden ser consultados en [**12**, pág. 91].

TEOREMA 25 (de la continuidad de la integral). *Consideremos $f\colon \mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ en un espacio de medida $(\mathbb{C},\mathbb{B}_{\mathbb{C}},A)$, tal que la función $z\mapsto f(z,t)$, es medible para cada $t\in\mathbb{R}$ y la función $t\mapsto f(z,t)$ es continua para cada $z\in\mathbb{C}$. Supongamos también que existe una función $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$ en $L^1(\mathbb{C},\mathbb{R}^+)$ de tal manera que $\mid f(z,t)\mid\leq g(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$ y $t\in\mathbb{R}$. Entonces la función $f(z,t)$ es integrable para todo $t\in\mathbb{R}$ y además, la función $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida como*

$$F(t)=\int_{\mathbb{C}} f(z,t)dA(z)$$

es continua.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}} \mid f(z,t)\mid dA(z)\leq\int_{\mathbb{C}} g(z)dA(z)<+\infty,$$

que es equivalente a decir que $f(z,t)$ es $L^1(\mathbb{C})$ respecto a la primera coordenada. Además, si $\{t_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria que converge a un $t_0\in\mathbb{R}$ arbitrario, entonces $\{f(z,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente a $f(z,t_0)$. Por hipótesis, la sucesión de funciones satisface que $\mid f(z,t_n)\mid\leq g(z)$. Esto implica que se satisfacen las hipótesis del *teorema de convergencia dominada*. Definiendo

$$F(t)=\int_{\mathbb{C}} f(z,t)dA(z),$$

y considerando que $f(z,t_n)$ es continua respecto a la segunda entrada, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}F(t_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{C}} f(z,t_n)dA(z)=\int_{\mathbb{C}} f(z,t_0)dA(z)=F(t_0),$$

de donde concluimos que efectivamente $F(t)$ es continua. □

LEMA 26. *Consideremos una función $f\in L^1(\mathbb{C})\cap C^1(\mathbb{C})$ y que $\partial f\in L^1(\mathbb{C})$*

1. $\widehat{\partial f}(\xi)=\pi i\bar{\xi}\ \hat{f}(\xi)$.
2. $\widehat{\bar{\partial}f}(\xi)=\pi i\xi\ \hat{f}(\xi)$.
3. $\partial_{\xi_1}\hat{f}(\xi)=-2\pi i\ \widehat{xf}(\xi)$.
4. $\partial_{\xi_2}\hat{f}(\xi)=-2\pi i\ \widehat{yf}(\xi)$.
5. $\partial\hat{f}(\xi)=-\pi i\ \widehat{\bar{z}f}(\xi)$.
6. $\bar{\partial}\hat{f}(\xi)=-\pi i\ \widehat{zf}(\xi)$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar (1) y (2) tenemos que observar que, por la definición de los operadores ∂, $\bar{\partial}$ y la transformada de Fourier:

$$\widehat{\partial f}(\xi)=\frac{1}{2}(\widehat{\partial_x f}(\xi)-i\ \widehat{\partial_y f}(\xi))\quad\text{y}\quad\widehat{\bar{\partial}f}(\xi)=\frac{1}{2}(\widehat{\partial_x f}(\xi)+i\ \widehat{\partial_y f}(\xi)).$$

Consideremos $h\in\mathbb{R}$ y definimos

$$g(z,h)=\begin{cases}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}, & \text{si } h\neq 0;\\ \partial_x f(z)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}, & \text{si } h=0.\end{cases}$$

Entonces se observa que $g(z,h)$ es continua en la variable h para toda $z\in\mathbb{C}$ y medible en la variable z para toda $h\in\mathbb{R}$, además de que $|g(z,h)|\leq|\partial_x f(z)|$, por lo que se satisfacen las hipótesis del teorema 25, de este modo

$$\int_{\mathbb{C}}\partial_x f e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)=\int_{\mathbb{C}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)$$

y aplicando el teorema 25 obtenemos que

$$\int_{\mathbb{C}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z).$$

Consiguiendo así que

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)=\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f(z+h)}(\xi)-\hat{f}(\xi)}{h}=\lim_{h\to 0}\hat{f}(\xi)\left(\frac{e^{2\pi ih\xi_1}-1}{h}\right),$$

de este modo se afirma que

$$\int_{\mathbb{C}}\partial_x f(z)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\xi)}dA(z)=2\pi i\xi_1\hat{f}(\xi).$$

Análogamente para $\widehat{\partial_y f}(\xi)$, por lo que obtenemos

$$\widehat{\partial_x f}(\xi)=2\pi i\xi_1\hat{f}(\xi)\ \text{ y }\ \widehat{\partial_y f}(\xi)=2\pi i\xi_2\hat{f}(\xi),$$

entonces observamos que

$$\widehat{\partial f}(\xi)=\frac{1}{2}((2\pi i\xi_1)\ \hat{f}(\xi)-i(2\pi i\xi_2)\ \hat{f}(\xi))=\pi i\bar{\xi}\ \hat{f}(\xi).$$

También,

$$\widehat{\overline{\partial}f}(\xi)=\frac{1}{2}((2\pi i\xi_1)\ \hat{f}(\xi)+i(2\pi i\xi_2)\ \hat{f}(\xi))=\pi i\xi\ \hat{f}(\xi).$$

Ahora, para abordar (3) y (4) basta con ver que bajo las mismas restricciones aplicadas para (1) y (2), entonces por teorema de convergencia dominada 1.6 se satisface, por lo que

$$\partial_{\xi_1}\hat{f}(\xi)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\int_{\mathbb{C}}f(z)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\xi)}\left(\frac{e^{2\pi ihx}-1}{h}\right)dz=-2\pi i\ \widehat{xf}(\xi),$$

análogamente para $\partial_{\xi_2}\hat{f}(\xi)=-2\pi i\ \widehat{yf}(\xi)$. Por último para (5) y (6) tenemos que

$$\partial\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2}(\partial_{\xi_1}\hat{f}(\xi)-i\ \partial_{\xi_2}\hat{f}(\xi))$$

de la misma forma que

$$\overline{\partial}\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2}(\partial_{\xi_1}\hat{f}(\xi)+i\ \partial_{\xi_2}\hat{f}(\xi)),$$

y por (3) y (4) se concluye que

$$\partial\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2}((-2\pi i)\ \widehat{xf}(\xi)-i(-2\pi i)\ \widehat{yf}(\xi))=-\pi i\ \widehat{\bar{z}f}(\xi)$$

y

$$\overline{\partial}\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2}((-2\pi i)\ \widehat{xf}(\xi)+i(-2\pi i)\ \widehat{yf}(\xi))=-\pi i\ \widehat{zf}(\xi).$$

□

1.7. Fórmula de reconstrucción.

Dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales, la implementación de la transformada de Fourier es útil siempre y cuando exista una forma de recuperar una función para la cuál conozcamos de antemano su transformada, es por esto que el siguiente paso será argumentar la reconstrucción de dicha función, para eso comencemos con lo siguiente.

Pensemos en la *función Gaussiana* $f(z)=e^{-\pi|z|^2}$ para $z\in\mathbb{C}$. Véase que haciendo los cambios a coordenadas polares de la forma $(x,y)=(r\mathrm{sen}(\theta),r\mathrm{cos}(\theta))$ y $u=\pi r^2$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{C}}\mid f((z)\mid dA(z)=\int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{2\pi}re^{-\pi r^2}d\theta dr=2\pi\int_{\mathbb{R}^+}re^{-\pi r^2}dr=1.$$

De donde deducimos que la función Gaussiana pertenece $L^1(\mathbb{C})$. Más aún, afirmamos ahora que $\hat{f}(\xi)=f(\xi)$. Para ello notemos que de la definición de los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ aplicados a la función Gaussiana, obtenemos que

$$\partial f(z)=-\pi\bar{z}f(z)\ \text{ y }\ \overline{\partial}f(z)=-\pi zf(z). \tag{1.7.1}$$

Además, por las propiedades de la transformada de Fourier

$$\partial\hat{f}(\xi) = -\pi i\widehat{\bar{z}f}(\xi) = i\widehat{\partial f(z)}(\xi) = -\pi\bar{\xi}\,\hat{f}(\xi) \text{ y } \overline{\partial}\hat{f}(\xi) = -\pi i\,\widehat{zf}(\xi) = i\widehat{\overline{\partial} f(z)}(\xi) = -\pi\xi\,\hat{f}(\xi).$$

Es decir, la transformada de Fourier de $f(z)$ debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial\hat{f}(\xi) = -\pi\bar{\xi}\,\hat{f}(\xi), \\ \overline{\partial}\hat{f}(\xi) = -\pi\xi\,\hat{f}(\xi), \\ \hat{f}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

Observemos que si $f(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$, entonces, por las propiedades descritas en el Lema 26 y las identidades (1.7.1) tenemos que:

$$\begin{cases} \partial f(\xi) = -\pi\bar{\xi}f(\xi), \\ \overline{\partial} f(\xi) = -\pi\xi f(\xi), \\ f(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7.3}$$

Entonces, por (1.7.3), tenemos que $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ satisfacen el problema (1.7.2). Además, si suponemos que existe una $G(\xi)$ tal que

$$\begin{cases} \partial G(\xi) = -\pi\bar{\xi}\,G(\xi), \\ \overline{\partial} G(\xi) = -\pi\xi\,G(\xi), \\ G(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7.4}$$

podemos considerar

$$H(\xi) = \frac{G(\xi)}{f(\xi)} = G(\xi)e^{\pi\xi\bar{\xi}},$$

y de aquí vemos que sus derivadas parciales son nulas por las relaciones establecidas en (1.7.4). Es decir,

$$\partial H(\xi) = \partial G(\xi)e^{\pi\xi\bar{\xi}} + \pi\bar{\xi}e^{\pi\xi\bar{\xi}}G(\xi) = e^{\pi\xi\bar{\xi}}(\partial G(\xi) + \pi\bar{\xi}G(\xi)) = 0$$

y

$$\overline{\partial} H(\xi) = \overline{\partial} G(\xi)e^{\pi\xi\bar{\xi}} + \pi\xi e^{\pi\xi\bar{\xi}}G(\xi) = e^{\pi\xi\bar{\xi}}(\overline{\partial} G(\xi) + \pi\xi G(\xi)) = 0,$$

de donde deducimos que H es una función constante y además $H(0) = 1$. Entonces la función H es idénticamente uno, lo que indica que la solución $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ es única [2].

TEOREMA 27. *Si $f,\ g \in L^1(\mathbb{C})$ entonces*

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\hat{g}(z)dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \hat{f}(\xi)g(\xi)dA(\xi).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue de usar la definición la transformada de Fourier aplicada a $g \in L^1(\mathbb{C})$ como sigue

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\hat{g}(z)dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\left(\int_{\mathbb{C}} g(\xi)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(\xi)\right)dA(z),$$

que por el *teorema de Fubini* expuesto en [**4**, pág. 170]

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\hat{g}(z)dA(z) = \int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\mathbb{C}} f(z)e^{-2\pi i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}dA(z)\right)g(\xi)dA(\xi) = \int_{\mathbb{C}} \hat{f}(\xi)g(\xi)dA(\xi).$$

□

TEOREMA 28. *Consideremos $f \in L^1(\mathbb{C})$, entonces se cumple que*

[2] En el caso de que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, es decir que $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, solo se necesita integrar respecto a cada variable y ver que $e^{-\pi x_i^2}$, es solución de la ecuación diferencial con valor inicial de la forma

$$u' + 2\pi x_i u = 0, \quad u(0) = 1,$$

que es única por el teorema de existencia y unicidad.

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(\xi).$$

DEMOSTRACIÓN. Primeramente observemos que para toda $f, g \in L^1(\mathbb{C})$, entonces

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\widehat{g(\delta z)} dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z) \mid \delta \mid^{-2} \widehat{g}(\bar{\delta}^{-1} z) dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(\bar{\delta} z)\widehat{g}(z) dA(z), \tag{1.7.5}$$

debido al *teorema de cambio de variable*. Además, por el teorema 27

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\widehat{g(\delta z)} dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(z) g(\delta z) dA(z), \tag{1.7.6}$$

donde de las igualdades (1.7.5) y (1.7.6) deducimos que

$$\int_{\mathbb{C}} f(\bar{\delta} z)\widehat{g}(z) dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(z) g(\delta z) dA(z).$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada cuando $\mid \delta \mid \to 0$ etiqueta se cumple

$$f(0) \int_{\mathbb{C}} \widehat{g}(z) dA(z) = g(0) \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(z) dA(z).$$

En particular si $g(z) = e^{-\pi |z|^2}$, entonces

$$f(0) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(\xi) dA(\xi).$$

Por último, si consideremos $F(w) = f(z + w)$ y recordando que

$$\widehat{f(z+w)} = e^{2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} \widehat{f},$$

concluimos que

$$f(z) = F(0) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f(z+w)}(\xi) dA(\xi) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(\xi).$$

□

De este resultado observamos que, una vez conocida la transformada de Fourier de una función, entonces es posible recuperar dicha función con la fórmula obtenida del teorema 28, y denotaremos esta manera de operar como sigue:

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(z) = \phi(z) = \int_{\mathbb{C}} \phi(\xi) e^{2\pi i \mathrm{Re}(z\bar{\xi})} dA(\xi).$$

Capítulo 2

Aproximaciones y generalizaciones sobre conjuntos de funciones.

En este capítulo veremos algunos resultados indispensables en el desarrollo y formulación de herramientas entorno al análisis armónico. También, presentaremos los espacios sobre los cuales comúnmente se trabaja, como por ejemplo, *la clase de funciones de Schwartz*. Debido a sus propiedades, los elementos de esta clase satisfacen los requerimientos para poder trabajar sobre ellos la transformada de Fourier. Además, su propiedad de ser denso en los conjuntos $L^p(\mathbb{C})$, nos permite extender ciertas propiedades a estos últimos. Más aún, veremos que existen ecuaciones diferenciales, las cuales, cuentan con soluciones que podrían ser ajenas al concepto clásico de solución y es donde abordaremos el concepto de *distribución* para solventar este inconveniente.

2.1. La Fórmula de Plancherel.

En esta sección serán necesaria ciertas consideraciones a la hora de trabajar la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{C})$, para que no se vean restringidos los resultados que tenemos hasta ahora, como lo son la fórmula de recuperación entre otros.

Nuestros esfuerzos se centrarán en probar que la transformada de Fourier es una isometría en el conjunto $L^2(\mathbb{C})$, haciendo una aproximación mediante *funciones simples*. La ventaja de la prueba aquí expuesa radica en el hecho de que es una prueba constructiva, lo que nos permite prescindir de varias hipótesis que regularmente se requien cuando se estudia el tema.

Para comenzar afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

Para probarlo, consideremos un número fijo $R \in \mathbb{R}^+$ y definamos las curvas $C_R(0) := \left\{ Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$ y $\Gamma := C_R(0) \cup [-R, R]$. Nuestra intención es calcular la integral de línea

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

Observemos que

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} = \frac{de^{iz}}{dz}(0) = i,$$

lo que indica que la función $\frac{e^{iz}-1}{z}$ es continua en cero. Así, dicha función en el interior de la curva Γ es analítica, ya que un corolario del *teorema de Morera* (véase [**6**, pág. 122]) nos indica que si una función f es continua en $Int(\Gamma)$ y analítica en $Int(\Gamma) \backslash \{z_0\}$, entonces f es analítica en $Int(\Gamma)$ y como además la curva descrita es cerrada obtenemos que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx = 0. \tag{2.1.1}$$

Ahora aplicando el *lema de Jordan* [**2**, pág. 262], el cual nos dice que tomando una función holomorfa que sea de la forma $f(z) = e^{iaz} g(z)$ con $z \in C_R(0)$, donde a es un parámetro

positivo, se cumple que

$$\left| \int_{C_R(0)} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi}{a} \max_{0\leq\theta\leq\pi} \mid g(Re^{i\theta}) \mid .$$

Entonces obtenemos que

$$\left| \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \pi \left| \frac{1}{Re^{i\theta}} \right| = \frac{\pi}{R}.$$

Por tanto, se tiene $\int\limits_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0$ y $\int\limits_{C_R(0)} \frac{dz}{z} = i\pi$ cuando $R \to \infty$. Por lo que la expresión (2.1.1) toma la forma

$$-\pi i + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x} dx = 0. \tag{2.1.2}$$

Tomando la parte imaginaria de la expresión (2.1.2) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \pi.$$

Para la siguiente integral, basta por observar que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(x-i\varepsilon)^2} dx = -\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{(x-i\varepsilon)^2} dz$$

además de cumle que

$$-\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{(x-i\varepsilon)^2} dz = -\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi i \left(\lim_{z\to i\varepsilon} \frac{d}{dz} \left(e^{2iz} - 2 \right) \right)$$

de esta forma

$$-\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi i \left(\lim_{z\to i\varepsilon} \frac{d}{dz} \left(e^{2iz} - 2 \right) \right) = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi e^{-2\varepsilon} = \pi$$

Por otra partes, recordemos que la característica de un cuadrado tiene como transformada de Fourier:

$$\widehat{\chi_{[-n,n]^2}}(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi n\xi_1)\operatorname{sen}(2\pi n\xi_2)}{\pi^2 \xi_1 \xi_2}.$$

Entonces, para ver que dicha función es $L^2(\mathbb{C})$, podemos observar que

$$\| \widehat{\chi_{[-n,n]^2}} \|_2^2 = \frac{1}{\pi^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi n\xi_1)}{\xi_1^2} d\xi_1 \right)^2 = \frac{1}{\pi^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(2\pi n)\operatorname{sen}^2(u)}{u^2} du \right) = 4n^2.$$

Es decir, $\| \widehat{\chi_{[-n,n]^2}} \|_2^2 = A([-n,n]^2)$, y entonces afirmamos que la transformada de Fourier de la característica del cuadrado pertenece a $L^2(\mathbb{C})$. Más aún, el cuadrado de su norma en este sentido es la medida del cuadrado, al igual que la característica. Es decir, además probamos que se satisface que

$$\| \chi_{[-n,n]^2} \|_2 = \| \widehat{\chi_{[-n,n]^2}} \|_2 .$$

Cada vez estamos más cerca de establecer que la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$. Entonces, con esto en mente veamos el siguiente resultado que nos será de gran ayuda para poder concluir esta sección.

LEMA 29. *Consideremos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\frac{1}{2}[\mid a-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] = A([a,b] \cap [c,d]).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos los siguientes casos.

Caso 1: Consideremos $a < b < c < d$, entonces $[a,b] \cap [c,d] = \phi$, en cuyo caso la medida de la intersección es cero. Para eso observemos que

$$\frac{1}{2}[\mid a-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mid a-b \mid + \mid b-c \mid + \mid c-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-c \mid - \mid c-d \mid - \mid a-b \mid - \mid b-c \mid]$$
$$= 0.$$

Caso 2.:

Consideremos $b = c$, entonces $[a,b] \cap [c,d] = c$ e igualmente la medida de la intersección es cero, entonces veamos que

$$\frac{1}{2}[\mid a-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mid a-c \mid + \mid c-d \mid - \mid c-d \mid - \mid a-c \mid] = 0 = A([a,b] \cap [c,d]).$$

Caso 3.: Consideremos $a < c < b < d$, entonces $A([a,b] \cap [c,d]) = \mid c-d \mid \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{2}[\mid a-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mid a-c \mid + \mid c-b \mid + \mid b-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] = \mid c-b \mid =$$
$$= A([a,b] \cap [c,d]).$$

Caso 4.:

Consideremos $a = c$ y $b = d$, entonces $A([a,b] \cap [c,d]) = \mid a-b \mid = \mid c-d \mid$, de aquí, vemos que

$$\frac{1}{2}[\mid a-d \mid + \mid b-c \mid - \mid b-d \mid - \mid a-c \mid] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mid a-b \mid + \mid a-b \mid] = \mid a-b \mid = \mid c-d \mid = A([a,b] \cap [c,d]).$$

□

TEOREMA 30. *Consideremos $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$, y sean R_I, $R_J \subseteq \mathbb{C}$ rectángulos de la forma $R_I = [a,b] \times [c,d]$, $R_J = [e,f] \times [g,h]$. Entonces se cumple que $\langle \widehat{\chi_{R_I}}, \widehat{\chi_{R_J}} \rangle = \langle \chi_{R_I}, \chi_{R_J} \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Analizando el caso más simple, el de los intervalos, obtenemos por el producto escalar para funciones de variable real lo siguiente

$$\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[a,b]} e^{2\pi i x\xi} dx \right) \left(\int_{[c,d]} e^{-2\pi i x\xi} dx \right) d\xi,$$

o escrito de otra forma

$$\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{2\pi i b\xi} - e^{2\pi i a\xi} \right) \left(e^{-2\pi i d\xi} - e^{-2\pi i c\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi^2}$$

entonces vemos que

$$\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} [\cos(2\pi(b-d)\xi) + \cos(2\pi(a-c)\xi) - \cos(2\pi(a-d)\xi) - \cos(2\pi(b-c))] \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Además, mediante la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2(x)$ obtenemos

$$\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}} -\text{sen}^2(\pi(b-d)\xi) - \text{sen}^2(\pi(a-c)\xi) + \text{sen}^2(\pi(a-d)\xi) + \text{sen}^2(\pi(b-c)) \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Entonces, por lo probado al inicio de este capítulo sobre la integral de Dirichlet y por el lema 29, ocurre que

$$\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \rangle = \frac{1}{2}[- \mid b-d \mid - \mid a-c \mid + \mid a-d \mid + \mid b-c \mid] = A([a,b] \cap [c,d]),$$

de donde concluimos que

$$\left\langle \widehat{\chi_{[a,b]}}, \widehat{\chi_{[c,d]}} \right\rangle = \left\langle \chi_{[a,b]}, \chi_{[c,d]} \right\rangle .$$

Ahora, para el caso que nos interesa, consideremos $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$ y $J_1 = [e,f]$, $J_2 = [g,h]$, entonces observemos que

$$\langle \widehat{\chi_{R_I}}, \widehat{\chi_{R_J}} \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{2} \widehat{\chi_{I_i}}, \prod_{i=1}^{2} \widehat{\chi_{J_i}} \right\rangle = \prod_{i=1}^{2} \langle \widehat{\chi_{I_i}}, \widehat{\chi_{J_i}} \rangle ,$$

por lo que

$$\langle \widehat{\chi_{R_I}}, \widehat{\chi_{R_J}} \rangle = \prod_{i=1}^{2} \langle \chi_{I_i}, \chi_{J_i} \rangle = \left\langle \chi_{R_I}, \chi_{R_J} \right\rangle .$$

Observemos que si $R_I \cap R_J = \varnothing$ entonces:

$$\langle \widehat{\chi_{R_I}}, \widehat{\chi_{R_J}} \rangle = \left\langle \chi_{R_I}, \chi_{R_J} \right\rangle = 0.$$

Ahora, véase que si $g \in L^2(\mathbb{C})$ es *simple*, podemos considerar $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i \in 1, .., n$ y de este modo

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(z),$$

donde $E_n \cap E_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$. Entonces ocurre que

$$\| \widehat{g} \|_2^2 = \int_{\mathbb{C}} | \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\chi_{E_i}}(\xi) |^2 \, dA(\xi) = \int_{\mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^{n} | a_i |^2 \, \widehat{\chi_{E_i}}^2(\xi) + 2 \sum_{i \neq j} \mathrm{Re}(a_i \bar{a_j}) \widehat{\chi_{E_i}}(\xi) \widehat{\chi_{E_j}}(\xi) \right) dA(\xi),$$

y entonces

$$\| \widehat{g} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} | a_i |^2 \, \widehat{\chi_{E_i}}^2(\xi) dA(\xi) + 2 \sum_{i \neq j} \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Re}(a_i \bar{a_j}) \widehat{\chi_{E_i}}(\xi) \widehat{\chi_{E_j}}(\xi) dA(\xi).$$

Así, como $\left\langle \widehat{\chi_{E_i}}, \widehat{\chi_{E_j}} \right\rangle = 0$, se deduce que

$$\| \widehat{g} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2 \| \widehat{\chi_{E_i}} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \, \| \chi_{E_i} \|_2^2 = \| g \|_2^2 .$$

Para concluir, sabemos que si $f \in L^2(\mathbb{C})$, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(\mathbb{C})$, tal que f_n converge a f en el sentido de $L^2(\mathbb{C})$. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\| f - f_n \|_2 < \varepsilon$. Unido a esto, el *teorema de convergencia dominada* nos permite decir que

$$\| \widehat{f} \|_2 = \lim_{n \to \infty} \| \widehat{f_n} \|_2 = \lim_{n \to \infty} \| f_n \|_2 = \| f \|_2 .$$

□

Entonces, terminamos esta sección afirmando que la transformada de Fourier es una isometría en el espacio $L^2(\mathbb{C})$. En otras palabras,

TEOREMA 31. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{C})$ se cumple que:*

$$\| \widehat{f} \|_2 = \| f \|_2 .$$

2.2. Descomposición de Whitney.

Como se pudo apreciar en segmentos anteriores, calcular la transformada de Fourier regularmente no es una tarea fácil, por ese motivo debemos de encontrar métodos alternos para su solución. Por ejemplo, este cálculo se puede volver en cierta medida más sencillo si las regiones de integración están mejor controladas. Como en el caso de la característica del cuadrado, donde calculamos su transformada de Fourier, si descomponemos una región como la unión de regiones para las que conocemos su transformada de Fourier, podríamos hablar de la transformada de Fourier de la característica de cualquier región bajo ciertas condiciones.

TEOREMA 32 (de la descomposición de Whitney). *Consideremos un conjunto abierto, acotado y con medida distinta de cero $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe una familia de cubos cerrados $\{Q_j\}$, llamada* descomposición por cubos de Whitney de Ω, *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\bigcup_{i\in J} Q_i = \Omega$.
2. $\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq \operatorname{dist}(Q_j, \Omega^c) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q_j)$*una arista del cubo.*
3. *Si dos cubos se tocan entre ellos entonces* $\frac{1}{4} \leq \frac{\ell(Q_j)}{\ell(Q_k)} \leq 4$.
4. *Dado un cubo Q_j, existen al menos $12^n - 4^n$ cubos de la partición que lo tocan.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando $k,\ j \in \mathbb{N}$ y $m_j \in \mathbb{Z}$ denotaremos al conjunto de los cubos de generación k como

$$\vartheta_k := \left\{ Q - \text{cubos} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ tal que } \ x \in Q \text{ implica que } \frac{m_j}{2^k} \leq x_j \leq \frac{m_j+1}{2^k} \right\}$$

Además, pensemos en el conjunto de la forma

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \text{ tal que } \frac{2\sqrt{n}}{2^k} < \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \frac{4\sqrt{n}}{2^k} \right\}.$$

De este modo construimos la clase

$$\mathcal{F}' := \{Q \text{ tal que } Q \in \vartheta_k \text{ y } Q \cap \Omega_k = \emptyset\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}'$ satisface la propiedad (1), ya que si $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{F}'} Q$, entonces existe un cubo Q, que contiene al punto x, cuya distancia a la frontera de Ω es al menos el doble del diámetro de Q y por lo tanto $x \in \Omega$ trivialmente. Por otro lado, si $x \in \Omega$, entonces para algún $\varepsilon > 0$ se cumple que $x \in B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ y por densidad de los racionales existen $n, k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\varepsilon < \frac{n}{k} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^k}$, por lo que se deduce que $x \in B_{\frac{\sqrt{n}}{2^k}}(x)$, lo que indica que $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \operatorname{dist}(x, \Omega^k) \leq \frac{2\sqrt{n}}{2^k}$. Así $x \in \mathcal{F}'$, por lo que $\bigcup_{i\in J} Q_i = \Omega$.

Ahora, para la propiedad (2), si $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{F}'} Q$ por construcción $x \in Q \cap \Omega_k \neq \emptyset$ para algún k. Entonces

$$\frac{\sqrt{n}}{2^k} \leq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) - \sqrt{n}\ell(Q) \leq \operatorname{dist}(Q, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \frac{4\sqrt{n}}{2^k},$$

lo que prueba la propiedad (2).

Hasta este punto podemos afirmar que el conjunto $\mathcal{F}'$ satisface las propiedades descritas, pero un inconveniente claro de este conjunto es el hecho de que los cubos no son disjuntos, ya que hay contenciones evidentes entre ellos. Para rodear este inconveniente refinemos la partición. Podemos considerar para cada $Q \in \mathcal{F}'$ el cubo máximo (en $\mathcal{F}'$) que lo contiene denotado como Q^{max}, entonces es claro que el conjunto de la forma $\mathcal{F} := \{Q^{max} \mid Q \in \mathcal{F}'\}$ satisface las propiedades (1) y (2), ya que solo hemos quitado las intersecciones dobles. Entonces para demostrar (3), notemos que en esta nueva familia de cubos, al decir que dos cubos Q_j y Q_k se tocan, nos referimos a sus fronteras, entonces aprovechando el inciso (2), obtenemos

$$\sqrt{n}\ell(Q_k) \leq \operatorname{dist}(Q_k, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(Q_k, Q_j) + \operatorname{dist}(Q_j, \Omega^c) \leq 0 + 4\sqrt{n}\ell(Q_j).$$

Así

$$\sqrt{n}\ell(Q_k) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q_j),$$

y por lo tanto $\frac{1}{4} \leq \frac{l(Q_j)}{l(Q_k)}$. Por otro lado

$$\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq \operatorname{dist}(Q_j, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(Q_j, Q_k) + \operatorname{dist}(Q_k, \Omega^c) \leq 0 + 4\sqrt{n}\ell(Q_k),$$

lo que implica que

$$\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q_k),$$

o equivalentemente $\frac{\ell(Q_j)}{\ell(Q_k)} \leq 4$, lo que termina de demostrar esta propiedad.

Para la propiedad (4), observemos que si $Q \in \vartheta_k$, entonces lo tocan exactamente $3^n - 1$ cubos, que son los cubos de la misma generación que tocan toda una cara, los que tocan solo una arista y los que tocan solo un vértice. Además cada cubo $Q \in \vartheta_k$ contiene

al menos 4^n cubos de $\mathcal{F}$ que tocan el cubo, es decir $4^n(3^n-1) = 12^n - 4^n$ es el número mínimo de cubos que tocan a un cubo arbitrario. □

Consideremos cualquier $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y su descomposición por cubos de Whitney, entonces si tomamos un cubo en una generación k_0, y otro en la generación k_1, tal que $k_0 \geq k_1 + 2$, entonces $Q_{k_0} \cap Q_{k_1} = \emptyset$. Esto se observa del inciso (3) del resultado anterior, pero no resulta inmediato de ver, por lo que podemos hacer el siguiente ejercicio:

Supongamos que $Q_{k_0} \cap Q_{k_1} \neq \emptyset$, entonces por construcción tenemos que si existe $x \in Q_{k_0} \cap Q_{k_1}$, x debe satisfacer las condiciones del conjunto Ω_k para $k = k_0$ y $k = k_1$, esto es que simultáneamente se satisfacen

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k_0-1}} < \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k_0-2}}$$

y

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k_1-1}} < \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k_1-2}}.$$

Por otro lado, si ahora $k_0 \geq k_1 + 2$, entonces existe $p \geq 0$ natural, tal que cumple la siguiente igualdad $k_0 = k_1 + 2 + p$. Entonces

$$\operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k_1+p}} < \frac{\sqrt{n}}{2^{k_1-1}} < \operatorname{dist}(x, \Omega^c),$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $Q_{k_0} \cap Q_{k_1} = \emptyset$.

Véase que de esta última observación, bien se puede pasar por alto con un cambio en el algoritmo en algunos dominios. Por ejemplo, en la figura 2.2.1, podemos ver que todos los cuadros tocan un cuadro de cada generación.

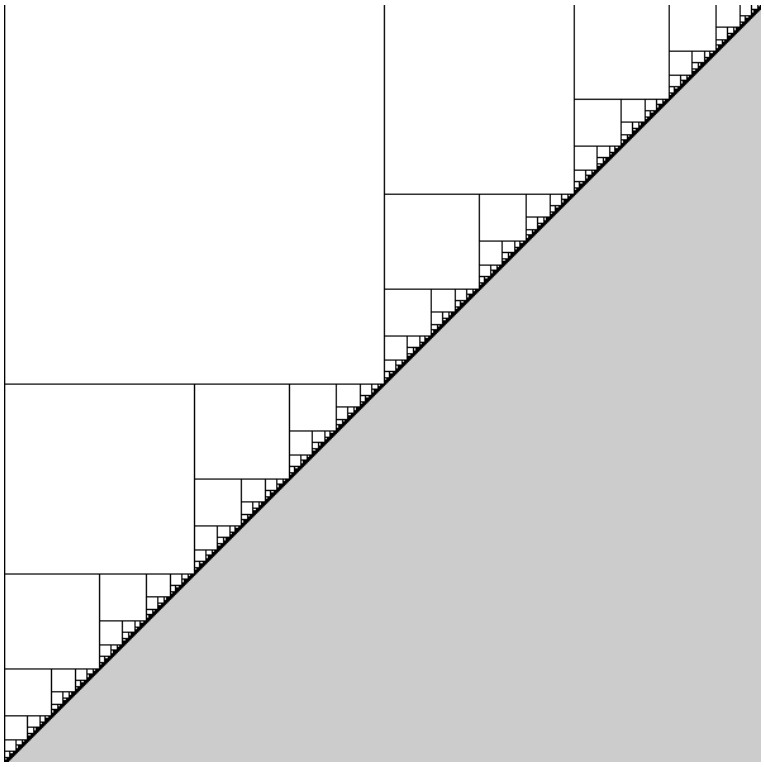

FIGURA 2.2.1. Descomposición de Withney

2.3. Espacio de funciones de Schwartz $S(\mathbb{C})$.

Como se ha mencionado anteriormente, muchos de los resultados tienden a ser muy restrictivos respecto a las funciones en los *espacios de Banach* tratados hasta ahora, y en un intento para poder acotar dicho conjunto de tal manera que cada resultado

descrito anteriormente pueda ser válido para una clase específica de funciones, podemos definir la *clase de Schwartz*, o *espacio de Schwartz*. De este modo, partamos de algunas definiciones básicas en el sentido complejo.

DEFINICIÓN 33. Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, con $z \in \mathbb{C}$. Entenderemos los siguientes operadores como sigue:

- $z^\alpha = z^{\alpha_1}\bar{z}^{\alpha_2}$.
- $\partial^\beta f = \partial^{\beta_1}\overline{\partial}^{\,\beta_2} f$.
- $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2$.
- $\mid \beta \mid = \beta_1 + \beta_2$.

Como ejemplo de la notación anterior tenemos los siguientes ejemplos:

- $z^{(1,0)} = z$.
- $z^{(0,1)} = \bar{z}$.
- $z^{(1,1)} = z\bar{z}$.
- $\partial^{(1,0)} f(z) = \partial f(z)$.
- $\partial^{(0,1)} f(z) = \overline{\partial} f(z)$.
- $\partial^{(1,1)} f(z) = \partial\overline{\partial} f(z)$.

DEFINICIÓN 34. Definimos la *clase de funciones de Schwartz* o *clase de Schwartz*, denotada como $S(\mathbb{C})$, se define como:

$$S(\mathbb{C}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{C}) \text{ tal que } \sup_{z\in\mathbb{C}} \mid z^\alpha \partial^\beta f \mid < +\infty \text{ para cuales quiera } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Además, para cada par de vectores $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, se definen las seminormas de este espacio de la forma

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \mid z^\alpha \partial^\beta f(z) \mid .$$

Una vez establecida esta definición, podemos comenzar a abordar algunas de las propiedades del conjunto $S(\mathbb{C})$.

LEMA 35. *Las principales propiedades de la clase de Schwartz $S(\mathbb{C})$ son:*

1. *$S(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*
2. *Dadas las funciones $f,\ g \in S(\mathbb{C})$ entonces $fg \in S(\mathbb{C})$.*
3. *Si $f \in S(\mathbb{C})$ entonces $f \in L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, +\infty)$.*
4. *Si $f \in S(\mathbb{C})$ entonces $\hat{f} \in S(\mathbb{C})$ y además $\hat{f} \in L^p(\mathbb{C})$ para toda $p \in (1, +\infty)$.*
5. *Todas las funciones de la clase de Schwartz satisfacen la identidad de Plancherel, así como también las hipótesis de la fórmula de recuperación.*
6. *. Si $f \in S(\mathbb{C})$ entonces $\lim_{|z|\to\infty} \mid z^\alpha \partial^\beta f(z) \mid = 0$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Es inmediato al considerar que la cerradura de los elementos en $S(\mathbb{C})$ se satisface por definición.
2. En este caso solo basta observar que los operadores diferenciales que definimos satisfacen las reglas de Leibniz

   $$\partial(fg) = g\partial f + f\partial g \quad \text{y} \quad \overline{\partial}(fg) = g\overline{\partial} f + f\overline{\partial} g.$$

   Entonces podemos observar, que el operador diferencial del producto de funciones devuelve una suma de productos de funciones acotadas, por lo que $fg \in S(\mathbb{C})$.
3. Para este punto, consideremos primero $f \in S(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$ y por simplificar la notación, consideremos $\mathbf{0} := (0, 0) \in \mathbb{N}^2$. Entonces

   $$\mid f(z) \mid^p \leq \frac{\rho^p_{\alpha,\mathbf{0}}(f)}{\mid z \mid^{|\alpha|}}.$$

   Ahora, si observamos el hecho de que

   $$\| f \|^p_p = \int_{|z|\leq 1} \mid f(z) \mid^p dA(z) + \int_{|z|>1} \mid f(z) \mid^p dA(z),$$

se concluye que para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tal que $2 <\mid \alpha \mid p$, se cumple que

$$\| f \|_p^p \leq \pi \rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^p(f) + \left(\frac{2\pi}{\mid \alpha \mid p-2} \right) \rho_{\alpha,\mathbf{0}}^p(f) < \infty.$$

4. Por lo probado en teorema 26, tenemos que si $f \in S(\mathbb{C})$, entonces para alguna $C \in \mathbb{R}^+$

$$\mid \xi^\alpha \partial^\beta \hat{f} \mid \leq C \mid \xi^\alpha \widehat{\bar{z}^{\beta_2} z^{\beta_1}} f \mid \leq C \mid \widehat{\partial^\alpha z^\beta f} \mid \leq C \| \partial^\alpha z^\beta f \|_1 < \infty.$$

5. Se satisface particularmente ya que

$$S(\mathbb{C}) \subseteq L^2(\mathbb{C}).$$

6. Consideremos $w, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, de tal forma que $\mid w \mid = \mid \alpha \mid + 1$, entonces, por definición sabemos que existe $M_{w,\beta} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mid \partial^\beta f(z) \mid \leq \frac{M_{w,\beta}}{\mid z \mid^{|\alpha|+1}}.$$

Entonces véase que

$$\mid z^\alpha \partial^\beta f(z) \mid \leq \mid z \mid^{|\alpha|} \frac{M_{w,\beta}}{\mid z \mid^{|\alpha|+1}} = \frac{M_{w,\beta}}{\mid z \mid},$$

y así cuando $\mid z \mid \to +\infty$, se cumple que $\mid z^\alpha \partial^\beta f \mid \to 0$.

□

De estos resultados, es claro que en $S(\mathbb{C})$ tiene sentido trabajar la norma de $L^p(\mathbb{C})$. De hecho resulta ser denso en estos últimos con su respectiva norma, lo que se probará más adelante. También podemos definir una métrica en este espacio, la cual tiene la forma

$$\rho(f-g) = \sum_{\alpha,\beta} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}{1+\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}.$$

No es complicado ver que esta resulta ser una métrica en $S(\mathbb{C})$, lo verdaderamente interesante en este caso es el hecho de que con esta métrica, $S(\mathbb{C})$ resulta ser completo.

TEOREMA 36. *La clase de Schwartz $(S(\mathbb{C}), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $S(\mathbb{C})$, entonces para todo $n,\ m \geq N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tiene que

$$\rho(f_m - f_n) < \varepsilon,$$

y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_n - f_m) < \varepsilon.$$

Entonces la sucesión $\left\{z^\alpha \partial^\beta f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy, y como bajo la norma $\| \ \|_\infty$ la sucesión $\left\{z^\alpha \partial^\beta f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, sabemos que existe un punto de acumulación a donde converge, esto es que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ existe $f_{\alpha,\beta} \in S(\mathbb{C})$ tal que $\left\{z^\alpha \partial^\beta f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido $L^\infty(\mathbb{C})$ a $f_{\alpha,\beta}$ y lo denotamos como

$$z^\alpha \partial^\beta f_n \xrightarrow{\| \ \|_\infty} f_{\alpha,\beta}.$$

Lo que equivale a que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$

$$f_n \xrightarrow{\rho_{\alpha,\beta}} f,$$

que se traduce finalmente en que

$$f_n \xrightarrow{\rho} f_{\alpha,\beta}.$$

□

Hasta el momento todo parece tener una buena estructura, aunque es muy cierto que la naturaleza de este conjunto puede ser muy restrictiva en cuanto a sus elementos, pero describen bien aquellas funciones para las cuales son válidos nuestros resultados anteriores respecto a la transformada de Fourier.

Otro tópico recurrente dentro de este conjunto, es el hecho de que es una topología definida como sigue.

DEFINICIÓN 37. Consideremos $\Phi \subseteq S(\mathbb{C})$ decimos que es *abierto de Schwartz* si y solo si para todo $f \in \Phi$, existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito de seminormas ρ_{α_i,β_i} tal que

$$Q_\varepsilon := \{g \in S(\mathbb{C}) \text{ tal que } \rho_{\alpha_i,\beta_i}(f-g) < \varepsilon \text{ con } i = 1, ..., n\} \subseteq \Phi.$$

Entonces $\tau_S := \{\Phi \subseteq S(\mathbb{C}) \text{ tal que } \Phi \text{ es abierto de Schwartz}\} \cup \{\emptyset\}$ resulta ser una topología para $S(\mathbb{C})$.

Además, podemos analizar el siguiente resultado.

LEMA 38. *El espacio $C_c^\infty(\mathbb{C})$ es denso en $S(\mathbb{C})$ respecto la norma $\| \ \|_p$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $f \in S(\mathbb{C})$ y definimos la función $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$\varphi_r(z) = f(z)e^{-\left(\frac{1}{r-|z|}\right)}\chi_{\mathbb{D}_r(0)}(z)$$

De este modo obtenemos que $\varphi_{z_0} \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, y se observa que $\text{supp}(\varphi_{z_0}) := \overline{\mathbb{D}_r(0)}$. Además, podemos observar que

$$\lim_{r\to\infty} \|f - \varphi_r\|_p^p = \lim_{r\to\infty} \left\{ \int\limits_{\mathbb{D}_r(0)} \left| f(z)\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{r-|z|}\right)}\right)\right|^p dA(z) + \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_r(0)} |f(z)|^p \, dA(z) \right\} = 0$$

finalmente afirmamos que $C_c^\infty(\mathbb{C})$ es denso en $S(\mathbb{C})$. □

Ahora, para dar el siguiente paso, que sería verificar que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{C})}^{\|\|_p} = L^p(\mathbb{C})$, tenemos primero que contemplar algunos resultados previos.

DEFINICIÓN 39. En un espacio vectorial normado E, entenderemos que una función lineal sobre E es *acotada*, si satisface que para alguna constante $C \in \mathbb{R}^+$ se cumple que:

$$\| f \|_Y \leq C \| x \|_X,$$

donde $f : (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$.

TEOREMA 40 (de Hahn-Banch). *Consideremos X un espacio normado y un subespacio normado M de X. Entonces, si f es una función lineal acotada definida sobre M, existe una extensión de f sobre X denotada como F, tal que $\| F \|_X = \| f \|_M$.*

TEOREMA 41. *Sea $p \in (1, +\infty)$ y A una medida sigma-finita positiva en un espacio X y sea Φ una funcional lineal acotada en L^p. Entonces, existe una única $g \in L^q$ tal que q es el exponente conjugado de p, de modo que para todo $f \in L^p$*

$$\Phi(f) = \int_X f(x)g(x)dA(x).$$

Más aún, se cumple que $\| \Phi \| = \| g \|_q$ donde $\| \Phi \| = \sup\limits_{f\in L^p} \left\{ \frac{\|\Phi\|_p}{\|f\|_p} \right\}$.

El teorema 40 puede ser consultado en [**10**, pág. 104] y el teorema 41 es descrito como en [**10**, pág. 127].

COROLARIO 42 (del teorema de Hahn-Banach). *Consideremos un espacio normado E y un subespacio F de E. El subespacio F es denso en E si y sólo si todas las funciones lineales acotadas y continuas en E que satisfacen que $f|_F = 0$, son idénticamente cero en E.*

La prueba del corolario 42 puede ser consultada en [**10**, pág. 106].

TEOREMA 43 (de Du Bois-Reymond). *Consideremos la función medible $v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ se satisface que*

$$\int_{supp(f)} f(z)\bar{v}(z)dA(z) = 0,$$

entonces la función medible v es idénticamente cero.

TEOREMA 44. $\overline{C_c^\infty(\mathbb{C})}^{\|\|_p} = L^p(\mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Primero definamos la funcional lineal y continua de la forma

$$\phi\colon L^p(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},$$

donde $\phi(f) = 0$ para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, entonces por teorema de identificación (teorema 39), tenemos que existe un $v \in L^q(\mathbb{C})$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{C})$

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\bar{v}(z)dA(z),$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, de aquí por el lema de Du Bois-Reymond tenemos que para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\bar{v}(z)dA(z) = 0 \Longleftrightarrow v \equiv 0.$$

De este modo obtenemos que para todo $f \in L^p$

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\bar{v}(z)dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\ 0\, dA(z) = 0,$$

y por el corolario 42 del *teorema de Banach* concluimos que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{C})}^{\|\|_p} = L^p(\mathbb{C})$. □

COROLARIO 45. *El conjunto $S(\mathbb{C})$ es denso en $L^p(\mathbb{C})$.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediatamente se tiene que $C_c^\infty(\mathbb{C})$ es denso en $S(\mathbb{C})$ y en $L^p(\mathbb{C})$, entonces por transitividad obtenemos finalmente el resultado esperado. □

2.4. Teoría de distribuciones temperadas

Como estudiamos en la sección anterior, la clase de Schwartz presenta buenas propiedades que nos permiten implementar la transformada de Fourier de sus elementos, y por otro lado pudimos ver que incluso la clase de Schwartz nos sirve como puente para extender varias propiedades a los espacios $L^p(\mathbb{C})$, lo que como veremos más adelante permite hacer estudios más específicos sobre las soluciones de la ecuación de Beltrami.

Sin embargo, cuando trabajamos algunos problemas en ecuaciones diferenciales, ocurre que en ocasiones llamamos solución general, a una descripción demasiado simple de un conjunto de funciones. Es más, se presentan casos donde la solución es la integral, derivada o convergencia de algo y no siempre es sencillo ver si ese aparente resultado tiene sentido bajo los estándares de la formalidad. Por ejemplo, considere la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{du}{dt}(t) = f_\varepsilon(t), \quad u(0) = 0,$$

donde

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{si } 1 < t < 1+\varepsilon; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la solución al abordarla de la manera de siempre sería

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t \le 1; \\ \frac{(t-1)}{\varepsilon}, & \text{si } 1 \le t \le 1+\varepsilon; \\ 1, & \text{si } t \ge 1+\varepsilon. \end{cases}$$

Es claro que si ε tiende a cero, entonces la solución a la ecuación diferencial es una función escalonada. De hecho, es una función constante que en el momento cero tiene

un impulso (salto puntual). La pregunta aquí, básicamente gira entorno al significado del resultado. Es decir, si tiene sentido hablar de diferenciabilidad de una función de estas características, como en la física, al hablar de la delta de Dirac, o cuando hablamos en campos eléctricos de un punto de carga, etc. El objetivo de las distribuciones es generalizar nuestro concepto de funciones, de ahí que se les conozca en la literatura como *funciones generalizadas.*

Nosotros nos concentraremos en un tipo de distribuciones o funciones generalizadas conocidas como *distribuciones temperadas.*

DEFINICIÓN 46. Definimos la *clase de distribuciones temperadas* $S'(\mathbb{C})$ como el dual vectorial de $S(\mathbb{C})$. Es decir, el espacio vectorial de funcionales lineales definidas en $S(\mathbb{C})$.

Tenemos las siguientes observaciones.

- Dada $f \in S(\mathbb{C})$ se puede definir una distribución T_f temperada mediante la regla de correspondencia
$$\phi \mapsto T_f(\phi) = \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{\phi(z)} dA(z).$$
- La observación anterior muestra que la aplicación que a cada da $f \in S(\mathbb{C})$ le asocia la funcional $T_f = \langle f, \cdot \rangle \in S'(\mathbb{C})$ es inyectiva.
- En particular, cada $f \in L^p(\mathbb{C})$ define una distribución temperada $T_f = \langle f, \cdot \rangle \in S'(\mathbb{C})$.
- La distribución *delta*.....lo que tenías bien explicado
- Si f es localmente integrable, entonces existen constantes C y N tales que, si $R > 1$,
$$\int_{\mathbb{D}_R(z)} |f(z)| dA(z) \leq CR^2.$$
Entonces f define una distribución temperada T_f.
- De forma más general, si μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{C}$, podemos definir la distribución temperada T_μ por $T_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\mu$.
- Dado cualquier polinomio p define una distribución temperada T_p definida por $\phi \mapsto \langle p, \phi \rangle$.
- Sabemos que si $f, g \in S(\mathbb{C})$ entonces $fg \in S(\mathbb{C})$ y define una distribución temperada T_{fg}.

En la dirección de la convergencia de distribuciones temperadas, consideramos lo siguiente.

DEFINICIÓN 47. Una sucesión $T_n \in S'(\mathbb{C})$ converge a $T \in S'(\mathbb{C})$ si para todo $\phi \in S(\mathbb{C})$,
$$T_n(\phi) \xrightarrow{n\to\infty} T(\phi).$$

Entonces con esta definición podemos abordar lo siguiente:

LEMA 48. *Si* $T_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *en* $S'(\mathbb{C})$ *y* $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *en* $S(\mathbb{C})$, *entonces* $T_n(\phi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

La demostración es trivial debido a la definición anterior, pero es útil para probar el siguiente corolario

COROLARIO 49. *Si* $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ *en* $S'(\mathbb{C})$ *y* $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \phi$ *en* $S(\mathbb{C})$, *entonces* $T_n(\phi_n) \xrightarrow{n\to\infty} T(\phi)$.

DEMOSTRACIÓN. Basta con observar que
$$(T_n - T)(\phi_n - \phi) = T_n(\phi_n) - T(\phi_n) + T_n(\phi) - T(\phi),$$
que por el lema 48, cuando $n \to \infty$ obtenemos
$$0 = T_n(\phi_n) - T(\phi).$$
□

DEFINICIÓN 50. Consideremos $T \in S'(\mathbb{C})$. Definimos la *derivada en el sentido de las distribuciones de* T *con respecto a* x o *derivada débil con respecto a* x *de la distribución* T como
$$(\partial_x T)(\phi) := -T(\partial_x \phi)$$

para todo $\phi \in S(\mathbb{C})$.

En el caso de los operadores ∂ y $\overline{\partial}$, se cumple

$$\begin{aligned}(\partial T)(\phi) &= -T(\overline{\partial}\phi),\\ (\overline{\partial} T)(\phi) &= -T(\partial\phi),\end{aligned}$$

y en general para $\alpha \in \mathbb{N}^2$,

$$\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi).$$

Considerando lo anterior, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 51. *Consideremos $T \in S'(\mathbb{C})$ tal que $(\partial T)(\phi) = 0$ y $(\overline{\partial} T)(\phi) = 0$ para cada $\phi \in S(\mathbb{C})$. Entonces T es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato al aplicar el *teorema de Du Bois-Reymond* (teorema 43). □

Para $f, g \in S(\mathbb{C})$, sabemos por el teorema 35 que particularmente f, $g \in L^1(\mathbb{C})$, por lo que se cumple el teorema 27

$$\int_{\mathbb{C}} \hat{f}(z) g(z) dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z) \hat{g}(z) dA(z).$$

Con ello, podemos definir la *transformada de Fourier de una distribución temperada*. Por ejemplo, supongamos que $f \in S(\mathbb{C})$, entonces

$$\widehat{T(\phi)} = T(\hat{\phi})$$

para toda $\phi \in S(\mathbb{C})$.

Es conocido que la transformada de Fourier es una aplicación lineal invertible de $S'(\mathbb{S})$ en $S'(\mathbb{C})$.

Además, las relaciones en el lema 26 pueden entenderse en el sentido de las distribuciones y su formulación es análoga. Para el lector interesado en profundizar, se sugiere revisar Renardy [**9**, cap. 5] .

Capítulo 3

La ecuación de Beltrami.

3.1. Ecuaciones diferenciales y soluciones fundamentales.

Un primer paso en la búsqueda de soluciones para la ecuación de Beltrami, será el estudio de las ecuaciones diferenciales en los que se involucran los operadores ∂ y $\overline{\partial}$, ya que un análisis en el comportamiento de estos operadores, podría darnos herramientas que nos ayuden a estudiar dicha ecuación. Para eso consideremos $g \in S(\mathbb{C})$, y la ecuación de Cauchy no homogénea

$$\overline{\partial} f(z) = g(z).$$

y presentemos lo siguiente.

Definición 52. Consideremos $g \in S(\mathbb{C})$ y $K(z) = \frac{1}{\pi i z}$. De este modo, en término de las distribuciones se define el operador de Cauchy y el operador conjugado de Cauchy respectivamente

$$(\mathcal{C}g)(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\xi)}{z-\xi} dA(\xi) = (K * g)(z)$$

y

$$(\mathcal{C}^* g)(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\xi)}{\overline{z-\xi}} dA(\xi) = (\bar{K} * g)(z).$$

De la definición 52 se deriva el hecho de que

$$\overline{\partial}(Cg)(z) = (\mathcal{C}\overline{\partial} g)(z) = g(z)$$

como también que

$$\partial(\mathcal{C}^* g)(z) = (\mathcal{C}^* \partial g)(z) = g(z).$$

Estas relaciones y la definición pueden ser consultadas en [**1**, pág. 93]

3.2. Operador de Cauchy.

Es importante el poder caracterizar los espacios de soluciones de una ecuación diferencial dada. Por ejemplo, si nos fijamos en el operador de Cauchy anteriormente definido, es inmediato observar que como espacio métrico se satisface que

$$\mathcal{C} : (S(\mathbb{C}), \rho) \to (S(\mathbb{C}), \rho).$$

Pero si $g \in L^2(\mathbb{C})$ observamos que no necesariamente se satisface que $\mathcal{C}g \in L^2(\mathbb{C})$. Para validar esta observación, consideremos $g \in L^2(\mathbb{C})$ definida como $g(z) = \chi_{\mathbb{D}_r(0)}(z)$. Entonces tenemos que

$$\overline{\partial}(\mathcal{C}g)(z) = g(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in \mathbb{D}_r(0), \\ 0, & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_r(0), \end{cases}$$

por lo que, podemos observar que

$$(\mathcal{C}g)(z) = \begin{cases} \bar{z} + f(z), & \text{si } z \in \mathbb{D}_r(0), \\ h(z), & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_r(0), \end{cases}$$

con h holomorfa en el complemento del disco unitario y f holomorfa en el disco unitario. Así podremos considerar el caso particular

$$(\mathcal{C}\chi_{\mathbb{D}_r(0)})(z)=\begin{cases}\bar{z}, & \text{si } z\in\mathbb{D}_r(0),\\ \frac{1}{z}, & \text{si } z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_r(0),\end{cases} \tag{3.2.1}$$

y de este modo por el lema 16 tenemos que $\frac{\chi_{\mathbb{D}_r(0)}}{z}\notin L^2(\mathbb{C})$. Por lo tanto vemos que $(\mathcal{C}g)\notin L^2(\mathbb{C})$. Sin embargo, podemos analizar lo siguiente.

DEFINICIÓN 53. Diremos que una función $f\in BMO(\mathbb{C})$ (bounded mean oscillation), siempre que

$$\| f \|_*:=\sup_{\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{A(\mathbb{D})}\int_{\mathbb{D}} \mid f(z)-f_{\mathbb{D}} \mid dA(z)\right\}<+\infty,$$

donde

$$f_{\mathbb{D}}=\frac{1}{A(\mathbb{D})}\int_{\mathbb{D}} f(z)dA(z),$$

y definimos las funciones VMO (vanish mean oscillation) como las funciones que pertenecen $\overline{C_c^\infty(\mathbb{C})}^{\|\|_*}$.

Considerando la definición 53 podemos observar que

$$\mathcal{C}: L^2(\mathbb{C})\to VMO(\mathbb{C}).$$

Para ello veamos lo siguiente:
Sean $g\in L^2(\mathbb{C})$ y $\mathbb{D}:=\{w\in\mathbb{C} \text{ tal que } \mid z-w\mid\leq\varepsilon\}$, entonces

$$(\mathcal{C}g)_{\mathbb{D}}=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{C}}\frac{g(w)}{z-w}dA(w)dA(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}} g(w)\mathcal{C}(\chi_{\mathbb{D}})dA(w),$$

y por lo obtenido en (3.2.1) tenemos que

$$(\mathcal{C}g)_{\mathbb{D}}=\frac{-1}{\pi i}\left\{\int_{\mathbb{D}}\overline{w}g(w)dA(w)+\int_{\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}}\frac{g(w)}{w}dA(w)\right\}.$$

Por otro lado

$$(\mathcal{C}g)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{g(w)}{z-w}dA(w)=\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{\chi_{\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}}(w)}{w}\right)g(w)dA(w),$$

de este modo

$$\int_{\mathbb{D}}|(\mathcal{C}g)(z)-(\mathcal{C}g)_{\mathbb{D}}|\,dA(z)\leq\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\mid f(w)\mid|g(w)|\,dA(w),$$

donde si $\mid w\mid\leq 1$

$$f(w)=\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{1}{z-w}+\bar{w}\right|dA(z)\leq\mid w\mid+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{dA(z)}{\mid z\mid}=\mid w\mid+2.$$

Ahora, si $\mid w\mid>1$ entonces

$$f(w)=\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}\right|dA(z)=\frac{1}{\pi\mid w\mid^2}\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{zw}{z-w}\right|dA(z)\leq\frac{2}{\mid w\mid^2}.$$

de modo que

$$\| f \|\leq 4\pi^2,$$

Es decir que

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|(\mathcal{C}g)(z)-(\mathcal{C}g)_{\mathbb{D}}|\,dA(z)\leq\frac{1}{\pi}\| g \|_2\| f \|_2\leq 2\| g \|_2 .$$

O en otras palabras

$$(\mathcal{C}g) \in VMO(\mathbb{C}).$$

3.3. Operador de Beurling.

Como bien sabemos hasta ahora, el operador de Cauchy y el operador $\overline{\partial}$ son de hecho operadores inversos. Pero cuando tratamos la ecuación de Beltrami hemos de preguntarnos también por la acción del operador ∂ sobre el operador de Cauchy. Para esto pensemos en una función $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ (ó $S(\mathbb{C})$) entonces se satisface que:

$$\partial(\mathcal{C}g)(z) = (\mathcal{C}\partial g)(z).$$

Esto debido a que por un lado

$$\widehat{\partial(\mathcal{C}g)}(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{\xi}\hat{g} = \widehat{(\mathcal{C}\partial g)}(\xi),$$

que por la fórmula de recuperación

$$\partial(\mathcal{C}g)(z) = (\mathcal{C}\partial g)(z),$$

por otro lado tenemos que

$$\partial(\mathcal{C}g)(z) = \partial(K * g)(z) = (\partial K * g)(z) = -(K^2 * g)(z).$$

Cabe aclarar que $K^2(z)$, donde $K(z) = \frac{1}{(z-w)^2}$ como núcleo presenta una discontinuidad importante en el origen por lo que tomando el valor principal obtenemos lo siguiente.

Definición 54. Considerando $g \in S(\mathbb{C})$ y definimos el operador de Beurling de la forma

$$(\mathcal{B}g)(z) = -\frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|z-w|\geq\varepsilon}\frac{g(w)}{(z-w)^2}dA(w).$$

Por la manera en la que obtuvimos este operador y por lo visto con anterioridad con el operador de Cauchy podemos observar que:

- $\partial(\mathcal{C}g)(z) = (\mathcal{C}\partial g)(z) = (\mathcal{B}g)(z)$.
- $\overline{\partial}(\mathcal{B}g)(z) = (\mathcal{B}\overline{\partial}g)(z) = \partial g(z)$.

En consecuencia de estas relaciones podemos decir que, cuando $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ entonces su imagen bajo el operador de Cauchy y el operador de Beurling son C^∞, ya que los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ aplicados al Beurling y al Cauchy recaen en g. Es decir, en el caso del operador de Cauchy vemos que, $\mathcal{C} : C_c^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$.

También podemos ver que, si $g \in L^2(\mathbb{C})$ entonces

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |\ \partial(\mathcal{C}g)\ |^2\ dA(z) = \int\limits_{\mathbb{C}}\partial(\mathcal{C}g)(z)\ \overline{\partial(\mathcal{C}g)}(z)dA(z)) = \int\limits_{\mathbb{C}}\overline{\partial}(\mathcal{C}g)(z)\ \partial\overline{(\mathcal{C}g)}(z)dA(z),$$

es decir que

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |\ \partial(\mathcal{C}g)(z)\ |^2\ dA(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} |\ g(z)\ |^2\ dA(z).$$

Lo que indica que al ser $\partial(\mathcal{C}g)(z) = (\mathcal{B}g)(z)$, entonces se satisface que

$$\mathcal{B} : \big(L^2(\mathbb{C}), \|\ \|_2\big) \to \big(L^2(\mathbb{C}), \|\ \|_2\big)$$

es una isometría.

3.4. Potencial logarítmico.

De igual manera podemos pensar en una ecuación en términos del operador de Laplace y abordarla de la misma forma con las herramientas con las que hemos trabajado. Pensemos en la siguiente ecuación

$$\overline{\partial}\partial f(z) = g(z) \tag{3.4.1}$$

donde $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$. De este modo, por lo estudiado con anterioridad respecto al operador de Cauchy, podemos ver que en la ecuación (3.4.1) satisface que

$$\partial f(z) = (K * g)(z). \tag{3.4.2}$$

De esta forma si suponemos la existencia de un núcleo η de tal forma que

$$f(z) = (\eta * g)(z),$$

donde al evaluarlo en la ecuación (3.4.2) y bajo el argumento de la convergencia dominada entonces obtenemos que $\partial f(z) = \partial(\eta * g)(z) = (\partial\eta * g)(z) = (K * g)(z)$, entonces vemos que una solución de esto se presenta si $\partial\eta = K$. Así obtenemos

$$\eta(z) = \frac{1}{\pi i}\log \mid z \mid,$$

por lo que concluimos que una solución para la ecuación (3.4.1) tiene la forma

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}} g(w)\log \mid z - w \mid dA(w).$$

Definición 55. Definimos el potencial logarítmico de una función $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ como el operador

$$(\mathcal{L}g)(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}} g(w)\log \mid z - w \mid dA(w).$$

De las discusiones anteriores respecto a los operadores de Cauchy y Beurling podemos observar las siguientes propiedades:

- $\partial(\mathcal{L}g)(z) = (\mathcal{C}g)(z)$.
- $\partial\partial(\mathcal{L}g)(z) = (\mathcal{B}g)(z)$.
- $\bar{\partial}\partial(\mathcal{L}g)(z) = g(z)$.

Por último, veamos que estos operadores pueden entenderse también en términos de la teoría de distribuciones. Para ello consideremos $g \in C_c^\infty$, observemos que por *Fubini*

$$\langle \mathcal{C}f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{z-w}dA(w)\right)\overline{g(z)}dA(z) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\left(\overline{\frac{1}{i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{\overline{w-z}}dA(z)}\right)dA(w)$$

en otras palabras $\langle \mathcal{C}f, g\rangle = -\langle f, \mathcal{C}^*g\rangle$. Además, bajo el mismo argumento tenemos que $\langle \mathcal{C}^*f, g\rangle = -\langle f, \mathcal{C}g\rangle$. Y del mismo modo para el operador de Beurling vemos que

$$\langle \mathcal{B}f, g\rangle = \langle \partial\mathcal{C}f, g\rangle = -\left\langle \mathcal{C}f, \overline{\partial}g\right\rangle = \left\langle f, \mathcal{C}^*\overline{\partial}g\right\rangle = \langle f, \mathcal{B}^*g\rangle.$$

3.5. Un vistazo a la ecuación de Beltrami.

Como recordaremos, en la introducción de la sección anterior, presentamos la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial}f = \mu\partial f, \tag{3.5.1}$$

donde el parámetro μ medible, pertenece a algún espacio de funciones. Entonces es válido pensar que las condiciones de dicho parámetro sean un factor importante para poder describir las soluciones de la ecuación de Beltrami. Además de eso, podemos observar algunas otras propiedades sobre la misma. En la siguiente sección veremos la existencia de las soluciones de la ecuación de Beltrami bajo ciertos parámetros, por el momento pensemos en lo siguiente.

Supongamos que u es una solución de la ecuación de Beltrami de la forma $\overline{\partial}f = \mu\partial f$. Además, consideremos una función conforme ϕ, entonces podemos observar que por la regla de la cadena se satisface que

$$\partial(u\circ\phi) = (\partial u\circ\phi)\partial\phi + (\overline{\partial}u\circ\phi)\partial\bar{\phi} = (\partial u\circ\phi)\partial\phi$$

y

$$\overline{\partial}(u\circ\phi) = (\partial u\circ\phi)\overline{\partial}\phi + (\overline{\partial}u\circ\phi)\overline{\partial}\bar{\phi} = (\overline{\partial}u\circ\phi)\overline{\partial\phi}.$$

Entonces es claro que $(u\circ\phi)$ es solución de la ecuación de Beltrami de la forma $\overline{\partial}f = \mu_0\partial f$, donde $\mu_0 = \mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\right)$ y se observa que $\mid\mu\mid=\mid\mu_0\mid$. Por otro lado, observamos que $(\phi\circ u)$ es solución de la ecuación de la forma $\overline{\partial}f = \mu\partial f$. Para esto simplemente basta con ver que

$$\partial(\phi\circ u) = (\partial\phi\circ u)\partial u + (\overline{\partial}\phi\circ u)\partial\overline{u} = (\partial\phi\circ u)\partial u$$

y

$$\overline{\partial}(\phi\circ u) = (\partial\phi\circ u)\overline{\partial}u + (\overline{\partial}\phi\circ u)\overline{\partial u} = (\partial\phi\circ u)\overline{\partial}u = (\partial\phi\circ u)\mu\partial u,$$

por lo que $\overline{\partial}(\phi\circ u) = \mu\partial(\phi\circ u)$.

En la literatura, a las soluciones de la ecuación de Beltrami se les llama *cuasiregulares*, además, si una función *cuasiregular* es también homeomorfa, se le conoce como función *cuasiconforme*, más adelante se expondrán de manera formal, por ahora, solo las nombramos para poder hablar sobre ellas.

Como es bien sabido, las funciones *conformes* son aquellas que preservan ángulos, de donde podemos deducir que una función conforme manda circunferencias en circunferencias. Las funciones *cuasiregulares* o *cuasiconformes* no satisfacen de igual manera esa condición. Para observar esto, consideremos la aplicación $f(z) = az + b\bar{z}$ lineal sobre $\mathbb{R}$, entonces podemos ver que, por un lado $f(z)$ es solución de la ecuación de Beltrami de la forma $\overline{\partial}f = \mu\partial f$, donde $\mu(z) = \frac{b}{a}$, entonces podemos entender a $\mu(z)$ como un coeficiente de *excentricidad*, esto como una motivación geométrica. De aquí podemos analizar lo que ocurre con las imágenes de circunferencias bajo la función $f(z)$ dependiendo del valor que tome $\mid\mu(z)\mid\in[0,1)$.

3.6. Operador de Beltrami.

En la búsqueda de una solución no trivial de la ecuación de Beltrami $\overline{\partial}f = \mu\partial f$, donde $f\in S(\mathbb{C})$ y $\mu\in C_c^1$. Al aplicar el operador ∂ a la ecuación de Beltrami, obtenemos que $\partial\overline{\partial}f = \partial(\mu\partial f)$. Es decir, por regla de la cadena temos que

$$\partial\overline{\partial}f = (\partial\mu)(\partial f) + \mu(\partial\partial f),$$

que dividiendo ambos lados de la igualdad por ∂f obtenemos

$$\overline{\partial}\log(\partial f) = \partial\mu + \mu\partial\log(\partial f).$$

Ahora si pensamos $G = log(\partial f)$, se puede expresar la ecuación de Beltrami en la forma $\overline{\partial}G = \partial\mu + \mu\partial G$, o similarmente $\overline{\partial}G - \mu\partial G = \partial\mu$. Que en término de operadores, se puede caracterizar de la forma

$$(I-\mu\mathcal{B})(g) = \partial\mu. \tag{3.6.1}$$

Debido a los propiedades del operador de Beurling. Este problema se resume en saber invertir el operador $(I-\mu\mathcal{B})$, y de ser posible nos encontraríamos con que la solución de la ecuación de Beltrami sería de la forma $g = (I-\mu\mathcal{B})^{-1}(\partial\mu)$.

Para ello se propone lo siguiente:

Teorema 56. *Consideremos $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$, de tal forma que $\parallel\mu\parallel_\infty< 1$, entonces el operador de Beltrami, a saber $(I-\mu\mathcal{B}) : L^2(\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{C})$, es invertible.*

Demostración. En primer lugar veamos que efectivamente se tiene esa regla de correspondencia. Para ellos véase que:

- $I : L^2(\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{C})$.
- $\mu\mathcal{B} : L^2(\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{C})$.

La primer regla de correspondencia es inmediata por ser I el operador identidad, para la segunda podemos observar que si $g \in L^2(\mathbb{C})$, entonces

$$\|(\mu\mathcal{B})g\|_2^2 = \int_{\mathbb{C}} |\, \mu(z)(\mathcal{B}g)(z)\,|^2\, dA(z) \leq \|\mu\|_\infty^2 \,\|\, \mathcal{B}g\,\|_2^2 < \infty. \tag{3.6.2}$$

Es decir, que efectivamente el operado de Beltrami satisface la regla de correspondencia descrita. Ahora, supongamos que $(I-\mu\mathcal{B})g = h$, donde $g,\ h : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$ entonces $\left(\sum_{n=0}^{k} (\mu\mathcal{B})^n\right)(I-\mu\mathcal{B})(g) = \left(\sum_{n=0}^{k} (\mu\mathcal{B})^n\right)(h)$. En otras palabras

$$\left(I+\mu\mathcal{B}+...+(\mu\mathcal{B})^k\right)(I-\mu\mathcal{B})(g) = \left(\sum_{n=0}^{k} (\mu\mathcal{B})^n\right)(h),$$

de donde

$$(I-\mu\mathcal{B}^{k+1})(g) = \left(\sum_{n=0}^{k} (\mu\mathcal{B})^n\right)(h).$$

Es decir que

$$g = (\mu\mathcal{B})^{k+1}(g) + \left(\sum_{n=0}^{k} (\mu\mathcal{B})^n\right)(h).$$

Por último nos resta ver que $(\mu\mathcal{B})^k(g) \to 0$ cuando $k \to \infty$, para lo cual hacemos la siguiente observación. Primero $(\mu\mathcal{B})^k(g) \in L^2(\mathbb{C})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Esto es sencillo mediante una inducción, ya que si $k = 1$ se cumple por (3.6.2), entonces nuestra hipótesis de inducción sería que se satisface $\mu\mathcal{B}^k \in L^2(\mathbb{C})$ para $k = m$ y restaría demostrar que se cumple para $k = m+1$. Para esto vemos que

$$\left\|(\mu\mathcal{B})^{m+1}\right\|_2 \leq \|\mu\|_\infty \|\mathcal{B}(\mu\mathcal{B})^m\|_2 = \|\mu\|_\infty \|(\mu\mathcal{B})^m\|_2 < +\infty. \tag{3.6.3}$$

Que es debido a que el operador de Beurling es isometría en $L^2(\mathbb{C})$ y a la hipótesis de inducción, de este modo afirmamos que $(\mu\mathcal{B})^k \in L^2(\mathbb{C})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, haciendo recursivamente lo visto en (3.6.3) podemos ver que

$$\left\|(\mu\mathcal{B})^{k+1}\right\|_2 \leq \|\mu\|_\infty^{k+1} \|g\|_2 \tag{3.6.4}$$

y como por hipótesis $\|\mu\|_\infty < 1$, entonces $\|\mu\|_\infty^k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Así por (3.6.2), tenemos que efectivamente $(\mu\mathcal{B})^k(g) \to 0$ si $k \to \infty$. Luego de esto, se concluye inmediatamente que $g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mu\mathcal{B})^n\right)(h)$. □

El teorema 56 aplicado a la expresión (3.6.1) vemos que la solución a la ecuación de Beltrami sería $g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mu\mathcal{B})^n\right)(\partial\mu)$, donde luego de esto vendría la recuperación de la función f descrita en (3.6.1). Aunque lo visto en el teorema 56 es suficiente para convencernos de la existencia de las soluciones de la ecuación de Beltrami. Desde otra perspectiva, retomando la ecuación $\overline{\partial} f = \mu\partial f$, tal que $\mu \in L_c^\infty(\mathbb{C})$ y además $\|\ \mu\ \|_\infty < 1$, entonces proponemos como solución a la función $f \in L_c^2$ definida como $f = z + \mathcal{C}(\phi)$, con $\phi \in L_c^2(\mathbb{C})$, de este modo $\overline{\partial} f = \phi$ y $\partial f = 1 + \mathcal{B}(\phi)$. Por lo que sustituyendo en la ecuación de Beltrami obtenemos la siguiente ecuación

$$\phi = \mu + \mu(\mathcal{B}\phi).$$

Equivalentemente, el problema se resume en invertir el siguiente operador

$$(I-\mathcal{B})\phi = \mu.$$

Por el teorema 56 obtenemos que la solución es de la forma:

$$\phi = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mu\mathcal{B})^n\right)(\mu).$$

Como se pudo observar, es de gran importancia especificar el conjunto en el que se buscan las soluciones de la ecuación de Beltrami, ya que para el teorema 56 hicimos uso

del hecho de que el operador de Beurling era isometría en $L^2(\mathbb{C})$, además de que las condiciones para la μ permitían un decaimiento necesario para la invertibilidad mediante *series de Neuman*. Este tipo de cuestionamientos llevaron a la formulación de la siguiente conjetura.

CONJETURA 57. *(De Iwaniec) Para $1 < p < +\infty$ entonces*

$$\|\mathcal{B}\|_{L^p \to L^p} := \begin{cases} p-1, & si\ p \geq 2, \\ \frac{1}{p-1}, & si\ p < 2, \end{cases}$$

donde

$$\| \mathcal{B} \|_{L^p \to L^p} := \sup_{\psi \in L^p} \left\{ \frac{\| (\mathcal{B}\psi) \|_p}{\| \psi \|_p} \right\},$$

es la norma usual de un operador lineal. Ante esto, el estudio del operador de Beurling sobre las funciones $L^p(\mathbb{C})$ comienza a tomar importancia y entonces, para profundizar en su estudio veamos ahora como actuá el operador de Beurling sobre los L^p.

PROPOSICIÓN 58. *Consideremos un disco $\mathbb{D}$ de radio r y con centro en el origen, entonces pensemos en la función $\phi = \mid z \mid^B \chi_{\mathbb{D}}$ donde $B \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{\| \mathcal{B}\phi \|_p}{\| \phi \|_p} = \frac{1}{p-1} \quad donde\ p \in (1, 2].$$

DEMOSTRACIÓN. Primero consideremos

$$g(z) = \begin{cases} \frac{2}{B+2} \mid z \mid^B, & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ \\ \left(\frac{2}{B+2}\right) \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}, \end{cases}$$

entonces

$$\overline{\partial} g(z) = \begin{cases} \mid z \mid^B, & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ 0, & \text{si } z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}. \end{cases}$$

Por lo que podemos afirmar que $\phi(z) = \overline{\partial} g(z)$, es decir $(\mathcal{C}\phi)(z) = g(z)$, entonces

$$\mathcal{B}\phi = \partial(\mathcal{C}\phi) = \frac{2}{B+2} \left(B \mid z \mid^B \frac{\bar{z}}{z} \chi_{\mathbb{D}}(z) - \frac{2}{z^2} \chi_{\mathbb{C} \backslash \mathbb{D}}(z) \right).$$

De este modo

$$\| \mathcal{B}\phi \|_p^p = \frac{1}{\mid B+2 \mid^p} \int_{\mathbb{C}} \left| B \mid z \mid^B \frac{\bar{z}}{z} \chi_{\mathbb{D}}(z) - \frac{2}{z^2} \chi_{\mathbb{C} \backslash \mathbb{D}}(z) \right|^p dA(z).$$

O equivalentemente

$$\| \mathcal{B}\phi \|_p^p = \frac{1}{\mid B+2 \mid^p} \left\{ \mid B \mid^p \int_{\mathbb{D}} \mid z \mid^{pB} dA(z) + 2 \int_{\mathbb{C} \backslash \mathbb{D}} \frac{dA(z)}{\mid z \mid^{2p}} \right\}.$$

Que por el lema 16 nos asegura

$$\| \mathcal{B}\phi \|_p^p = \frac{1}{\mid B+2 \mid^p} \left\{ \mid B \mid^p 2\pi \left(\frac{r^{2+pB}}{2+pB} \right) + 4\pi \left(\frac{r^{2-2p}}{2-2p} \right) \right\}.$$

Por otro lado de igual forma por el lema 16

$$\| \phi \|_p^p = \int_{\mathbb{D}} \mid z \mid^{pB} dA(z) = 2\pi \frac{r^{2+pB}}{2+pB}.$$

Entonces

$$\frac{\| \mathcal{B}\phi \|_p^p}{\| \phi \|_p^p} = \frac{1}{\mid B+2 \mid^p} \left\{ \mid B \mid^p + 2 \left(\frac{2+Bp}{2-2Bp} \right) r^{-(2p+Bp)} \right\}.$$

Por último si $B \to -\frac{2}{p}$ entonces es claro que

$$\frac{\| \mathcal{B}\phi \|_p^p}{\| \phi \|_p^p} = \left(\frac{1}{p-1}\right)^p$$

□

Es decir que tenemos al menos una cota de la forma $\frac{1}{p-1} \leq \| \mathcal{B} \|_{L^p \to L^p}$. Es decir, de poder acotar por arriba de igual forma por $\frac{1}{p-1}$, tendríamos entonces la conjetura de *Iwaniec* resuelta en $p \in (1,2]$, pero eso no es para nada sencillo.

Antes de continuar, hay que mencionar el hecho de que en este estudio hicimos uso de cierto tipo de operadores descritos mediante convoluciones, los cuales nos han sido de mucha ayuda. Es por eso que es de suma importancia presentar algunos conceptos y resultados sobre operadores de esta forma.

DEFINICIÓN 59. Diremos que una función $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un núcleo, si es una función localmente integrable en $\mathbb{C} \backslash \triangle$ donde $\triangle := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z = w\right\}$.

DEFINICIÓN 60. Un núcleo K es del *tipo Calderón-Zygmund*,denotado como $C - Z$, si existe una constante $C_K \in \mathbb{R}^+$ tal que :

- $\mid K(z,w) \mid \leq \frac{C_K}{|z-w|^2}$.
- $\mid \partial_z K(z,w) \mid + \mid \partial_w K(z,w) \mid \leq \frac{C_K}{|z-w|^3}$.

DEFINICIÓN 61. Llamaremos operador del tipo $C - Z$ al operador $T : S(\mathbb{C}) \to S(\mathbb{C})$ de la forma

$$T(f) = \int_{\mathbb{C}} f(w) K(z,w) dA(w),$$

donde $K(z,w)$ es un núcleo de tipo $C - Z$.

Con esto en mente es inmediato que el operador de Beurling es un operador del tipo $C - Z$, lo que es bastante útil al conocer el siguiente teorema.

TEOREMA 62. *Los operadores T del tipo C-Z son acotados.*

Para el lector que quiera profundizar en este resultado se recomienda revisar [**11**, pág. 29].

TEOREMA 63. *Un operador lineal entre espacios normados es acotado si y sólo si es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto primero consideremos $T : (X, \| \ \|_1) \to (Y, \| \ \|_2)$. Un operador lineal acotado, entonces observemos que $\| T(x) - T(x_0) \|_2 \leq M \| x - x_0 \|_1$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, de este modo obtenemos que $\| x - x_0 \|_1 < \delta$ implica que $\| T(x) - T(x_0) \|_2 < \varepsilon$, por lo que el operador resulta ser continuo. Por otro lado pensemos al operador T lineal y continuo, en particular tenemos que existe $\delta > 0$, tal que si $\| x \|_1 < \delta$, entonces $\| T(x) \|_2 < 1$. De este modo hacemos

$$x_0 = \left(\frac{\delta}{\delta + 1}\right)\left(\frac{x}{\| x \|_1}\right),$$

entonces como $\| x_0 \|_1 < \delta$, ocurre que $\| T(x_0) \|_2 = \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)\left(\frac{1}{\|x\|_1}\right) \| T(x) \|_2 < 1$. De donde concluimos que $\| T(x) \|_2 < \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right) \| x \|_1$. Es decir, el operador resulta ser acotado. □

Finalmente, podemos finalizar esta sección afirmando que

$$\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C}).$$

Más aún, podemos afirmar que dicho operador es continuo y ambas propiedades pueden extenderse hasta afirmar lo mismo para el operador de Beltrami

$$I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C}).$$

3.7. Intervalo crítico del operador de Beltrami.

Finalizamos la sección anterior mostrando que

$$I - \mu\mathcal{B} : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C}) \tag{3.7.1}$$

por lo que es lógico pensar que existen ciertas condiciones bajo las cuales, para ciertos $p \in (1, +\infty)$ sea posible invertir el operador (3.7.1). Para ello consideremos lo siguiente.

Definición 64. Dado $0 \leq k < 1$, el intervalo crítico (q_k, p_k), donde $1 \leq q_k < 2 < p_k \leq \infty$, es el intervalo mas grande tal que, para cada $p \in (q_k, p_k)$ y para cada función medible μ tal que $\| \mu \|_\infty \leq k$, el operador $I - \mu\mathcal{B}$ es invertible en $L^p(\mathbb{C})$.

Además de esta noción, se requerirá de algunos tópicos para poder abordar el estudio de la definición 63. En primer lugar, será importante presentar el siguiente conjunto.

Definición 65. Decimos que una función de peso $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ pertenece a la clase $\mathcal{A}_p$ si

$$\| \omega \|_{\mathcal{A}_p} = \sup_{\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}} \left(\frac{1}{A(\mathbb{D})} \int_{\mathbb{D}} \omega(z) dA(z) \right) \left(\frac{1}{A(\mathbb{D})} \int_{\mathbb{D}} \omega^{\frac{1}{(1-p)}}(z) dA(z) \right)^{p-1} < +\infty,$$

donde $p \in (1, +\infty)$ y el supremo se toma sobre todos los discos $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$.

Este tipo de funciones son conocidas como funciones de peso en la literatura y suelen ser de gran ayuda para la caracterización de otros conjuntos de funciones. Algunas características importantes es el hecho de que $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$ siempre que $p \leq q$, esto derivado de la *desigualdad de Hölde*r. Además, se tiene por definición que $\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{p<+\infty} \mathcal{A}_p$.

Otro resultado interesante alrededor de estos conjuntos se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 66. *Consideremos $p \in (1, +\infty)$, entonces un operador del tipo Calderón-Zygmund (en particular el operador de Beurling) son acotados en el siguiente sentido:*

$$L^p_\omega(\mathbb{C}) = \left\{ f \text{ medible tal que } \| f \|_{L^p_\omega} = \left(\int_{\mathbb{C}} | f(z) |^p \, \omega dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

si y solo si $\omega \in \mathcal{A}_p$. El lector interesado en el tema puede consultar [**8**, pág. 281].

Además, en términos del trabajo aquí presentado será de gran ayuda para esta sección el siguiente resultado

Teorema 67 (de Coifman-Fefferman). *Para cada $p \in (1, +\infty)$ existe una constante C_p que depende de p, de tal forma que*

$$\| \mathcal{B}g \|_{L^p_\omega} \leq C_p \| \omega \|_{\mathcal{A}_p} \| g \|_{L^p_\omega}$$

para todo $\omega \in \mathcal{A}_p$ y para todo $g \in L^p_\omega(\mathbb{C})$.

El teorema 69 usará en gran medida el resultado del teorema 66 descrito en [**3**, pág. 241]. Pero antes debemos de tener algunos conceptos en mente.

Definición 68. Decimos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es *K-cuasiconforme* si f es homeomorfa y es solución de la ecuación de Beltrami de la forma

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f.$$

Donde $K = \frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty}$, el cual entenderemos como coeficiente de distorsión.

También, haremos uso del siguiente resultado en torno a los espacios $\mathcal{A}_p$ y su relación (acotaciones) con el *jacobiano* de ciertas funciones.

TEOREMA 69. *Supongamos que $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función K-cuasiconforme y consideremos*

$$\omega(z)=J(z,f)^s,\qquad s\in\left(\frac{-1}{K-1},\frac{K}{K-1}\right),$$

entonces ω es localmente integrable. Más aún, $\omega\in\mathcal{A}_p$ para todo p de la forma

$$p>\begin{cases}1+s(K-1), & 0\leq s\leq\frac{K}{K-1},\\ 1-\frac{s}{K}(K-1), & \frac{-1}{K-1}<s\leq 0.\end{cases}$$

Se recomienda consultar el teorema 69 en [**1**, pág. 345], por ahora solo nos concentraremos en demostrar lo siguiente.

TEOREMA 70. *Considere $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\|\mu\|_\infty\leq k<1$, entonces el operador $I-\mu\mathcal{B}:L^p\to L^p$ está acotado inferiormente. Es decir, para toda $g\in L^p(\mathbb{C})$, existe $C\in\mathbb{R}$ tal que*

$$\|g-\mu\mathcal{B}g\|_p\geq C\,\|g\|_p, \tag{3.7.2}$$

donde $p\in(\frac{2K}{K+1},\frac{2K}{K-1})$ y $K=\frac{1+k}{1-k}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $g\in C_c^\infty(\mathbb{C})$, ya que al ser $C_c^\infty(\mathbb{C})$ denso sobre los conjuntos $L^p(\mathbb{C})$, nos da el argumento para extender el teorema en este segundo espacio. Además, pensemos en $w=\mathcal{C}g$ donde $w\in C^\infty(\mathbb{C})$ por las propiedades del operador de Cauchy, entonces la expresión $h=g-\mu(\mathcal{B}g)$, es equivalente en términos de la función w, a la expresión

$$\overline{\partial}w=h+\mu\partial w. \tag{3.7.3}$$

Podemos observar que demostrar la desigualdad (3.7.2) se resume en demostrar que

$$\|\overline{\partial}w\|_p\leq C^{-1}\,\|h\|_p\,.$$

Ahora, pensemos en f una función $K-cuasiconforme$, entonces $\overline{\partial}f=\mu\partial f$ y si consideramos $u=w\circ f^{-1}$, por la regla de la cadena

$$\overline{\partial}w=(\partial u\circ f)\overline{\partial}f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f}, \tag{3.7.4}$$

$$\partial w=(\partial u\circ f)\partial f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial}f. \tag{3.7.5}$$

Al sustituir (3.7.4) y (3.7.5) en (3.7.3) entonces

$$(\partial u\circ f)\overline{\partial}f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f}=h+\mu\left\{(\partial u\circ f)\partial f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial}f\right\},$$

lo que implica que $h=(\partial u\circ f)(\overline{\partial}f-\mu\partial f)+(\overline{\partial}u\circ f)(\overline{\partial f}-\mu\overline{\overline{\partial}f})$ y como $\overline{\partial}f-\mu\partial f=0$, entonces $h=(\overline{\partial}u\circ f)(\overline{\partial f}-\mu\overline{\overline{\partial}f})$, de modo que

$$h=(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f}\left(1-\mu\frac{\overline{\overline{\partial}f}}{\overline{\partial f}}\right), \tag{3.7.6}$$

de donde podemos observar que si $\overline{\partial}f=\mu\partial f$, entonces $\overline{\overline{\partial}f}=\overline{\mu\partial f}$, lo que implica que $\frac{\overline{\overline{\partial}f}}{\overline{\partial f}}=\overline{\mu}$, por lo que la expresión (3.7.6) finalmente nos queda de la forma

$$\frac{h}{1-|\mu|^2}=(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f}. \tag{3.7.7}$$

Entonces, podemos observar que

$$\int_{\mathbb{C}}|(\overline{\partial}u\circ f)(z)\overline{\partial f}(z)|^p\,dA(z)=\int_{\mathbb{C}}\left|\frac{h}{1-|\mu(z)|^2}\right|^p dA(z)\leq(1-k^2)^{-p}\,\|h\|_p^p\,. \tag{3.7.8}$$

Por otro lado, como $\overline{\partial}f = \mu\partial f$ entonces $\mid \overline{\partial}f \mid^2 = \mid \mu \mid^2 \mid \partial f \mid^2 \leq k^2 \mid \partial f \mid^2$, lo que implica que $\mid \overline{\partial}f \mid^2 - \mid \partial f \mid^2 \leq k^2 \mid \partial f \mid^2 - \mid \partial f \mid^2$, o como es igual, $-J(z,f) \leq \mid \partial f \mid^2 (k^2-1)$ y finalmente obtenemos

$$\mid \partial f \mid^2 \leq \mid \overline{\partial}f \mid^2 \leq (1-k^2)^{-1} J(z,f). \tag{3.7.9}$$

Ahora observemos que por (3.7.9) y aplicando el *teorema de cambio de variable*

$$\int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\overline{\partial}f(z) \mid^p dA(z) \leq \int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\partial f(z) \mid^p dA(z)$$

y como

$$\int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\partial f(z) \mid^p dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \mid \partial u(z) \mid^p \mid (\partial f \circ f^{-1})(z) \mid^p J(z, f^{-1}) dA(z),$$

entonces

$$\int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\overline{\partial}f(z) \mid^p dA(z) \leq \int_{\mathbb{C}} \mid \partial u(z) \mid^p \mid (\partial f \circ f^{-1})(z) \mid^p J(z, f^{-1}) dA(z)$$

además, nuevamente por la relación (3.7.9)

$$\int_{\mathbb{C}} \mid \partial u(z) \mid^p \mid (\partial f \circ f^{-1})(z) \mid^p J(z, f^{-1}) dA(z)$$

$$\leq (1-k^2)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \mid \partial u(z) \mid^p \mid (\partial f \circ f^{-1})(z) \mid^{p-2} J(z, f^{-1}) J(z,f) dA(z)).$$

ya que $J(z,f)J(z,f^{-1}) = 1$ por *teorema de la función inversa*. Entonces hasta este punto podemos afirmar lo siguiente

$$\int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\overline{\partial}f(z) \mid^p dA(z) \leq (1-k^2)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \mid \partial u(z) \mid^p \theta dA(z),$$

donde $\theta = \mid \partial f \circ f^{-1} \mid^{p-2}$. De aquí notamos que θ es comparable con $J(z,f^{-1})^s$ donde $s = 1 - \frac{p}{2} \in (\frac{-1}{K-1}, \frac{K}{K-1})$, esto teniendo en cuenta el teorema 69, y así deducimos que $\theta \in \mathcal{A}_p$ y de esta manera podemos hacer uso del *teorema de Coifman − Fefferman* como sigue.

$$\| \partial u \|_{L^p_\theta} = \| \mathcal{B}\overline{\partial}u \|_{L^p_\theta} \leq C_p \| \theta \|_{\mathcal{A}_p} \| \overline{\partial}u \|_{L^p_\theta},$$

entonces por comodidad pensemos $\lambda^p_\theta = C_p \| \theta \|_{\mathcal{A}_p}$ y podemos ver que al usar nuevamente el *teorema de cambio de variable* se deduce que

$$\lambda^p_\theta \int_{\mathbb{C}} \mid \overline{\partial}u(z) \mid^p \mid (\partial f \circ f^{-1})(z) \mid^{p-2} dA(z) = \lambda^p_\theta \int_{\mathbb{C}} \mid (\overline{\partial}u \circ f)(z) \mid^p \mid \partial f(z) \mid^{p-2} J(z,f) dA(z),$$

y como $J(z,f) \leq \mid \partial f \mid^2$ tenemos que $\| \partial u \|^p_{L^p_\theta} \leq \lambda^p_\theta \int_{\mathbb{C}} \mid (\overline{\partial}u \circ f)(z)\partial f(z) \mid^p dA(z)$, que por (3.7.7) obtenemos $\| \partial u \|^p_{L^p_\theta} \leq \frac{\lambda^p_\theta}{(1-k^2)^p} \| h \|^p_p$. Es decir,

$$\int_{\mathbb{C}} \mid (\partial u \circ f)(z)\overline{\partial}f(z) \mid^p dA(z) \leq (1-k^2)^{-(p+1)} \lambda^p_\theta \| h \|^p_p, \tag{3.7.10}$$

entonces de (3.7.10) y (3.7.8) podemos observar que

$$\| g \|_p = \| \overline{\partial}w \|_p \leq \| (\overline{\partial}u \circ f)\overline{\partial f} \|_p + \| (\partial u \circ f)\overline{\partial}f \|_p \leq 2K^2 \lambda_\theta \| h \|_p$$

□

Como pudimos observar en la prueba del teorema 70, se satisface que el operador $I-\mu\mathcal{B}$ es acotado inferiormente y más aún, pudimos ver que dicha constante depende de dos parámetros $C(k,p)$. Además, las hipótesis necesarias que nos permitieron aplicar el teorema 69, nos indican que el teorema 70 es válido siempre y cuando $p\in(1+k,1+\frac{1}{k})$. Por otro lado, podemos observar que lo que hemos probado en el teorema 70 nos indica que $I-\mu\mathcal{B}$ tiene por núlceo al conjunto $\{0\}$, lo que implica que el operador es inyectivo, por lo que solo resta probar la suprayectividad del operador $I-\mu\mathcal{B}$ para garantizar la invertibilidad sobre el rango descrito, para ello es necesario tener presente las siguientes consideraciones.

DEFINICIÓN 71. Consideremos un espacio métrico (X,d) y una función $f:(X,d)\to(X,d)$, decimos que f es *contractiva*, si se satisface que, para todo $x,\ y\in X$

$$d(f(x),f(y))\leq kf(x,y)\quad k\in[0,1)$$

TEOREMA 72. *(Del punto fijo de Banach) Consideremos un operador lineal contractivo $T:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$, y que además X sea completo. Entonces existe $x\in X$ tal que $T(x)=x$.*[1]

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $x_0\in X$ arbitrario y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $x_n=T^n(x_0)$, de este modo observemos que

$$\|\ x_n-x_{n-1}\ \|\leq k\ \|\ x_{n-1}-x_{n-2}\ \|\leq\cdots\leq k^n\ \|\ x_1-x_0\ \|, \tag{3.7.11}$$

por otro lado obtenemos

$$\|\ x_m-x_n\ \|\leq\|\ x_n-x_{n-1}\ \|+\|\ x_{n-1}-x_{n-2}\ \|+\cdots+\|\ x_{m+1}-x_m\ \|$$

$$\leq(k^{n-1}+k^{n-2}+\cdots+k^m)\ \|\ x_1-x_0\ \|$$

es decir

$$\|\ x_m-x_n\ \|\leq\frac{k^m}{1-k}\ \|\ x_1-x_0\ \|\to 0\ \text{ cuando }\ n,\ m\in\mathbb{N}\ \text{ son suficientemente grandes,}$$

entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como X es completo entonces $\{x_n\}\to x$ para algún $x\in X$, donde finalmente vemos que x es un punto fijo y además es único, ya que si suponemos que existe $y\neq x$ tal que $T(y)=y$, entonces observamos que $\|\ x-y\ \|=\|\ T(x)-T(y)\ \|<k\ \|\ x-y\ \|$, lo cual es una contradicción debido a que $k\in[0,1)$, entonces afirmamos que el punto fijo es además único. □

PROPOSICIÓN 73. *Consideremos un operador lineal continuo $T:(X,\|\ \|_X)\to(Y,\|\ \|_Y)$, entonces si se satisface que $T(X)$ es denso en Y, podemos afirmar que T es suprayectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $y\in Y$ arbitrario y sea $\varepsilon>0$, por densidad existe $y_0\in T(X)$ de tal forma que $\|\ y_0-y\ \|_Y<\varepsilon$. Teniendo en mente que $y_0\in T(X)$ entonces $T(x_0)=y_0$ para algún $x_0\in X$, podemos decir que $\|\ y-T(x_0)\ \|_Y<\varepsilon$ y finalmente por continuidad se tiene que $T(x_0)=y$. □

En este momento estamos en condiciones para probar que el operador $I-\mu\mathcal{B}$ es también suprayectivo.

TEOREMA 74. *Considerando el operador $I-\mu\mathcal{B}$ como en el teorema 70, entonces dicho operador es suprayectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Para un $h\in L^2(\mathbb{C})\cap L^p(\mathbb{C})$ arbitrario definimos el operador

$$\tilde{o}_h(g)=h(z)+\mu(z)\mathcal{B}(g),$$

y observamos que si $g_1,\ g_2\in L^2(\mathbb{C})$ entonces

$$\|\ \tilde{o}_h(g_1)-\tilde{o}_h(g_2)\ \|_2=\|\ (h(z)+\mu(\mathcal{B}g_1))-(h(z)+\mu(\mathcal{B}g_2))\ \|_2,$$

[1]El teorema del punto fijo de Banach es válido si en lugar de un espacio normado se considera un espacio métrico y una aplicación f contractiva y la demostración sería idéntica, es decir, nos fijamos en la sucesión de elementos de la forma $f(f(\cdots f(x)))$.

es decir que $\| \tilde{o}_h(g_1) - \tilde{o}_h(g_2) \|_2 = \| \mu(\mathcal{B}(g_1 - g_2)) \|_2 \leq k \| g_1 - g_2 \|_2$, por lo que afirmamos que el operador $\tilde{o}_h$ es contractivo. Entonces, por el teorema 72 tenemos que existe $g \in L^2(\mathbb{C})$ de tal manera que $\tilde{o}_h(g) = g$ o equivalentemente

$$h(z) = g(z) - \mu(z)(\mathcal{B}g)(z), \tag{3.7.12}$$

entonces por el teorema 70 tenemos que $\| g \|_p \leq C^{-1}(k,p) \| h \|_p$, lo que nos indica que $g \in L^p(\mathbb{C})$, que en conjunto con la expresión (3.7.12) implican que $h \in (I - \mu\mathcal{B})(L^p(\mathbb{C}))$ (h es la imagen de una función L^p bajo el operador de Beltrami). Hasta aquí hemos demostrado que $L^2(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C}) \subseteq (I - \mu\mathcal{B})(L^p(\mathbb{C})) \subseteq L^p(\mathbb{C})$, y como $L^2(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C})$ es denso en $L^p(\mathbb{C})$, entonces $(I - \mu\mathcal{B})(L^p(\mathbb{C}))$ es denso en $L^p(\mathbb{C})$ y por la proposición 73 obtenemos que $I - \mu\mathcal{B}$ es suprayectivo. □

Finalmente del teorema 70 y del teorema 74 deducimos que el operador $I - \mu\mathcal{B}$ es invertible siempre y cuando $p \in (1 + k, 1 + \frac{1}{k})$.

Bibliografía

[1] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane (PMS-48)*. Princeton University Press, 2008. 3.1, 3.7

[2] James Ward Brown, Ruel Vance Churchill, et al. *Complex variables and applications*. Boston: McGraw-Hill Higher Education„ 2009. 2.1

[3] Ronald Coifman and Charles Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Mathematica*, 51(3):241–250, 1974. 3.7

[4] Guillermo Grabinsky. *Teoría de la medida/por Guillermo Grabinsky*. Number 515.42 G7. 2010. 0.1, 1.7

[5] John K Hunter. Measure theory. *University Lecture Notes, Department of Mathematics, University of California at Davis. http://www. math. ucdavis. edu/˜ hunter/measure_ theory*, 2011. 0.1

[6] Antonio Lascuarain Orive. *Curso básico de variable compleja*. UNAM, 2007. 2.1

[7] James R Munkres. *Topología, 2. a edición*. Prentice Hall Inc, 2002. 18

[8] Stefanie Petermichl, Alexander Volberg, et al. Heating of the ahlfors-beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular. *Duke Mathematical Journal*, 112(2):281–305, 2002. 66

[9] Michael Renardy and Robert C Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2006. 2.4

[10] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006. 1.4, 2.3, 2.3

[11] Elias M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 2. Princeton university press, 1970. 3.6

[12] Terence Tao. *An introduction to measure theory*, volume 126. American Mathematical Society Providence, 2011. 1.6