47

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

"LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS MATEMATICOS ADITIVOS DURANTE EL 5o. GRADO DE PRIMARIA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADA EN PEDAGOGIA

P R E S E N T A :

IRMA VILLALPANDO HERNANDEZ

ASESORA: LIC. GUADALUPE GRACIA ABAN.

285603

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEX., AGOSTO DE 2000.

DEDICATORIAS

A MIS PADRES:

Porque aprendí de ti papá la fuerza y el carácter en las decisiones de vida, y de ti mamá la ternura y el amor que es lo que ahora me permite ser feliz.

LOS QUIERO MUCHO.

A JESÚS, JORGE E IRAM.

A Jesús por el amor que nos mantiene unidos.

TE AMO.

Jorge e Iram por ser el impulso más grande que motiva mi existencia.

INDICE

CAPITULO III. LA SUMA, LA RESTA Y LOS PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES.

SEGUNDA PARTE

CAPITULO IV. LA RESOLUCION DE PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES EN EL PLAN DE ESTUDIOS, 1995.

METODOLOGIA

INTRODUCCION

La problemática existente dentro del aprendizaje de las matemáticas es quizá el planteamiento que más ha influído la reestructuración de los planes y programas de estudio a nivel básico.Los múltiples problemas que se enfrentan al interior del aula y el poco herramental teórico con el que se cuenta impiden en muchas ocasiones optar por vías alternativas que faciliten el mejor aprovechamiento en esta área.

Las diversas investigaciones que se han hecho denotan que nuestro sistema educativo, al menos en este aspecto,no sólo no ha dado los frutos esperados, sino que por el contrario el problema ha ido en aumento.

Por otra parte hablar de un deficiente aprendizaje de las matemáticas nos remite a tratar su contraparte: La enseñanza. El docente juega -en este sentido- un papel primordial pues en su actuación diaria va definiendo razgos y características que se ven directamente reflejados en el alumno.

"...Parte del problema del aprendizaje de las matemáticas es como las concepciones del profesor le dan un sentido particular a lo que hace dentro del aula dándole relevancia no sólo a ciertos contenidos sino al cómo sitúan al alumno ante el conocimiento" (Balbuena Hugo,1991).

Un ejemplo de lo anterior, es la manera de introducir en matemáticas al alumno dentro de la resolución de problemas ya que se aborda separadamente, es decir, primero se le enseña a los niños a sumar y hasta que tiene dominado el algoritmo se procede a la enseñanza de la resta para pasar posteriormente a la ejecución de problemas, no logrando comprender a la sustracción dentro de la adición y viceversa. De aquí, que el manejo que se hace de la suma y de la resta no le permite al alumno darle significado a estos contenidos pues no parten de experiencias concretas con las que evidentemente viven día a día impidiendo, la abstracción en su momento de los diferentes modelos matemáticos.

Tradicionalmente las áreas del conocimiento se han dividido para su estudio en diversas ramificaciones que a su vez sufren nuevas subdivisiones en los aspectos que los conforman. Así pues, la matemática a menudo se ve seccionada en diferentes aspectos (cálculo mental,geometría,operaciones básicas etc.) y este manejo que se hace de los contenidos permite entender en cierto sentido, algunas de las dificultades que se tienen para su aprendizaje, pues el alumno no alcanza a integrar los contenidos entre sí y mucho menos con otras áreas del conocimiento, generando en el mejor de los casos conocimientos parciales y seccionados, faltos de coherencia. Esta forma rígida de abordar los conocimientos ha provocado, entre otras situaciones que sujetos con una trayectoria amplia a nivel básico como es el 5º grado de primaria reporten dificultades en la Resolución de Problemas Verbales Aditivos Simples (RPVAS). Esto nos hace reflexionar en torno a la significación que estos tienen tanto para los alumnos como para los docentes, así como la organización curricular en la que se soporta dicho contenido.

Ya en específico en cuanto al objeto investigativo ha de decirse que un problema es "Una historia breve en la que se narra alguna acción que debe realizar el protagonista a partir de ciertos datos" (Figueras Olimpia,1992) y un problema aditivo simple es "Aquel que requiere para llegar a su resolución una sola operación ya sea de suma o de sustracción" (Bermejo Vicente,1994).

Basándonos en los supuestos anteriores podemos inferir que no hay una forma típica de resolver los PVAS sino que por el contrario hay una gran variedad de distintos modos de proceder ante los mismos. De esta suerte que no se requiere que los alumnos ejecuten una sola forma de llegar al resultado exacto estableciendo el tipo de problema matemático que se le plantea, sino más bien que ensayen diferentes estrategias -las que le sean más propias- que les permitan acercarse al resultado.

La investigación se orientó hacia las dificultades que reportan los niños en la RPVAS en base a la estructura semántica establecida. En este sentido podemos decir que la problemática se abordó tratando de observar sobre el como ocurren los acontecimientos cotidianamente, ubicando la manera de proceder de los alumnos a partir de sus propios recursos y la interacción que se ejerce entre los miembros del grupo.

El desarrollo de la investigación se orientó en dos etapas: la primera abordó teóricamente los trabajos realizados por investigadores occidentales como Carpenter y Moser (1982), Ryley y Greeno (1988), Vergnaud (1988) y Bermejo (1991), los cuales orientan el análisis de las respuestas de los niños en los problemas de suma y resta adoptando para ello un marco teórico que les permite clasificarlos en función de su estructura semántica. Una segunda parte de la investigación conformó el trabajo práctico el cual contuvo las siguientes acciones:

1.-Se revisaron los problemas que los niños resolvieron en el grado inmediato inferior (4º grado); esto con el objetivo de partir desde un referente concreto basado en la experiencia escolar de los alumnos y por la otra para observar la tónica que se manejó en los problemas de nuestro interés.

2.-Se aplicó un cuestionario de PVAS a un grupo de 20 niños correspondientes al 5º año de acuerdo a lo que teóricamente habíamos descrito como factores importantes dentro de la resolución de problemas. Se eligió este grado escolar por considerarlo el adecuado ya que los niños han tenido experiencias en años anteriores sobre dicha temática y en el programa de estudios del curso siguiente estos contenidos se trabajan ya en menor proporción.

3.-Se realizaron visitas de observación no participante a grupos paralelos de 5º grado, pertenecientes al mismo instituto que del instrumento anterior.

Metodológicamente la investigación tuvo una orientación de corte etnográfico en tanto que la autora como maestra tomó un roll de investigador de los problemas que le aquejan en su labor profesional, intentando con esto unir el hiato existente entre investigación educativa y práctica docente (Woods Peter 1986, Hidalgo Juan Luis, 1991). De esta manera desde la práctica profesional como docente hay un proceso de inserción en la investigación misma por parte de la sustentante, construyendo sus propios objetos de estudio dándole el sentido e interés que la labor pedagógica le requieran.

Por último es importante mencionar que el trabajo realizado es un mero acercamiento a la problemática señalada que más allá de ser un análisis concluyente es la apertura a un campo más amplio, lleno de nuevas líneas de investigación que habrán de realizarse para contribuir al desarrollo de la matemática educativa a nivel básico.

C A P I T U L O I

RELACIONES MATEMATICAS: NIVELES DE COMPRENSION EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

RELACIONES MATEMATICAS

La noción de relación,es sin duda la noción matemática más general y primitiva,ya que abarca a la vez las actividades más simples de los niños y las más elaboradas.

Existen diferentes tipos de relaciones:

A)Las relaciones estáticas entre objetos,y las transformaciones que tienen un carácter dinámico.(Ver pag. 18).

B)Las relaciones cualitativas y cuantitativas.

C)Las relaciones entre objetos y las correspondencias entre conjuntos.

Cabe aclarar que el concepto que manejaremos de relación es muy amplio y no se limita como muchos matemáticos lo hacen a la noción de relación binaria (conjunto de partida y conjunto de llegada)sino el cálculo relacional basado en la comprensión de las relaciones a las que haremos referencia a lo largo de la investigación.

RELACIONES BINARIAS:Relacionan dos elementos entre sí:

El LAPIZ está sobre la MESA.

PEDRO está al lado de MERCEDES.

JUAN es el hijo del señor DURAN.

SIETE es mayor que TRES:

Los CONEJOS son MAMIFEROS.

Podemos observar en estos ejemplos que los elementos puestos en relación pueden ser de naturaleza muy diferente:

-Objetos inertes (lápiz,mesa)

-Personas (Pedro,Mercedes)

-Números (Siete,Tres)

-Conjuntos (Conejos,Mamíferos)

RELACIONES TERNARIAS:Relacionan tres elementos entre sí.

PEDRO está entre ANDRES y MERCEDES

SIETE es CUATRO unidades mayor que TRES

SEIS multiplicado por CINCO es TREINTA

RELACIONES CUATERNARIAS:Relacionan cuatro elementos entre sí.

LONDRES es a INGLATERRA lo que PARIS es a FRANCIA

ANTONIO es tan MORENO como ANA es tan RUBIA

Es interesante señalar que las relaciones ternarias aparecen a menudo bajo la forma de una relación binaria encabezada por una indicación sobre la naturaleza de la relación.Por ejemplo:

Relación binaria simple: 3 es mayor que 2 $3 > 2$

Relación Ternaria: 3 es una unidad mayor que 2 $2 + 1 = 3$

El esquema de representación mental que sigue a estas relaciones es:

Binaria $3 > 2$

Ternaria: $2 + 1 = 3$

Este tipo de representaciones nos permitiran más adelante tipificar a los PVAS de acuerdo al tipo de esquema que utilicen los niños en su resolución.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS

Los cálculos relacionales sólo tienen validez cuando se apoyan en las propiedades de las relaciones en juego.La clasificación es la siguiente:

SIMETRIA:Una relación binaria es simétrica sí y sólo sí cada vez que se cumple una relación entre un elemento X y un elemento Y,se cumple necesariamente la misma relación entre el elemento Y y el elemento X.

Ejemplo:

Si Andrés vive en la misma ciudad que Bernardo,Bernardo vive necesariamente en la misma ciudad que Andrés.

ANTISIMETRIA:Una relación binaria es antisimétrica sí y sólo sí cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y esta no se cumple entre el elemento Y y el elemento X.

Ejemplo:

Si Andrés es más grande que Bernardo,Bernardo no es más grande que Andrés.

TRANSITIVIDAD:Una relación binaria es transitiva sí y sólo sí cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y y un elemento Z por la otra,se cumple necesariamente la misma relación entre el elemento X y el elemento Z.

Ejemplo:

Si Andrés vive en la misma ciudad que Bernardo y Bernardo y Bernardo en la misma ciudad que Jesús,necesariamente Andrés vive en la misma ciudad que Jesús.

ANTITRANSITIVIDAD:Una relación binaria es antitransitiva sí y sólo sí cada vez que se cumple la relación entre un elemento X y un elemento Y ,y entre el elemento Y un elemento Z,no se cumple la relación entre el elemento X y el elemento Z.

Ejemplo:

Si Alicia ama a Carlos y Carlos ama a Cristina no puede ser que Alicia ame a Cristina.

REFLEXIBILIDAD:Una relación binaria es reflexiva sí y sólo sí todo elemento X esta necesariamente en relación consigo mismo.

Ejemplo:

Andrés vive en la misma ciudad que él mismo.

Esta propiedad ya no se usa en los cálculos relacionales establecidos en problemas matemáticos, a menos que sea para su verificación.Sin embargo,este tipo de razonamiento brinda al individuo riqueza de pensamiento y plasticidad en la construcción de conocimientos posteriores.

LA RELACION DE IGUALDAD O EQUIVALENCIA

La relación de igualdad es simétrica,transitiva y reflexiva.Es pues,una relación de equivalencia.Tiene la particularidad de afirmar que lo que está a la derecha del signo es igual a lo que está a la izquierda.

Ejemplo:

$$3 + 4 = 7$$

Las propiedades de las relaciones de equivalencia son todas verdaderas y utilizables.

SIMETRIA: $3 + 4 = 7$ $7 = 3 + 4$

TRANSITIVIDAD: $3 + 4 = 7$ y $7 = 5 + 2$ $3 + 4 = 5 + 2$

REFLEXIBILIDAD: $7 = 7$ $3 + 4 = 3 + 4$

RELACIONES TERNARIAS

Ya observamos que las relaciones ternarias son relaciones que,como su nombre lo indica,relacionan tres elementos que pueden ser de distinta naturaleza.Así,dentro de esta clasificación podemos encontrar los modelos siguientes:

1er Modelo.LEY DE LA COMPOSICION BINARIA

Es el establecimiento de una composición binaria y el resultado de esa composición.

Ejemplo:

$4 + 3 = 7$

$6 \times 5 = 30$ Se componen 2 elementos para dar origen a un tercero.

Este tipo de composiciones pueden presentar las propiedades de:

a)Asociatividad

b)Conmutatividad

c)Existencia del elemento neutro

d)Existencia del inverso para todo elemento

2do. Modelo.ELEMENTO,RELACION-ELEMENTO,ELEMENTO

Este modelo establece que dos elementos estan ligados por una relación,ella misma considerada como un elemento.Es decir,que la relación-elemento opera sobre el primer elemento para darnos el segundo.

Este modelo es el que generalmente sostienen los problemas de nuestro interés.

3	+	4	=	7
Elemento		Relacion-Elemento		Elemento

El 3 es estado,el 4 es la transformación ocurrida y el 7 es el estado producto de la transformación.

Aquí pues,llegamos a la noción de transformación que establecen los problemas dinámicos (Ver pág.21).

Cabe señalar al respecto que los elementos que intervienen en la relación ternaria estado-transformacion-estado no tienen exactamente la misma naturaleza porque dos términos son estado y el otro una transformación.

C A P I T U L O I I

LOS PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

LOS PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

Según Olimpia Figueras (Planes y Programas de estudio,1991) un PVAS es: "Cualquier enunciado verbal que matemáticamente pueda resolverse con cualquier operación".

En este sentido las investigaciones que se han hecho, han puesto de manifiesto 3 grandes líneas de investigación en cuanto a su resolución:

1.-Con respecto al lugar donde se sitúa la incógnita. (Ver pág.20)

2.-De acuerdo a la estructura, es decir, en función del número de palabras del problema de la secuencia de información o de la presencia de palabras especialmente significativas.

Ejemplo:

Andrés tenía 7 canicas le dio 4 a Tomás. ¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?

En cambio,si se plantea:

Andrés le dio 4 canicas a Tomas pero antes de dárselas tenía 7 . ¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?

3.-La clasificación de tipo semántico. Esta última perspectiva facilita la comprensión de los procesos implícitos en la resolución de los problemas aritméticos ya que, define el tipo de relaciones que establecen los niños con los datos del problema o lo que más tarde llamaremos esquema matemático.

Cabe señalar en este momento, que la clasificación que adoptaremos en el establecimiento de nuestro marco teórico referencial sería el de corte semántico sin infravalorar no obstante la incidencia de variables sintácticas y el lugar de la incógnita.

CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

La mayoría de los autores coinciden en que los problemas mantienen cuatro grandes relaciones semánticas que le subyacen y estos son: cambio, combinación, comparación e igualación. (Ver cuadro pág.23).

CAMBIO.

Se caracterizan por la presencia de una acción,de modo que esta acción implícita o explícita, modifica una cantidad inicial dando como resultado el incremento o decremento de esa cantidad.

En otras palabras se da una condicion inicial, que viene seguida de un cambio, que produce a su vez el estado final o la resolución del problema.

Este tipo de problemas al igual que los posteriores se clasifican en 3 subtipos mas de acuerdo al lugar de la incógnita. Es decir, si la incógnita se presenta en el tercer elemento de la operación a + b = ? si la incógnita aparece en el segundo sumando a + ? = c o si se encuentra en el primer sumando ? + b = c.

Veamos algunos ejemplos para clasificar el lugar de la incógnita en cada tipo de problemas.

Pedro tenía 8 caramelos, María le da 4 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Pedro?

En este problema se propone la cantidad inicial y la magnitud del cambio, teniendo el niño que calcular el estado final. El lugar de la incógnita se presenta de la siguiente manera: a + b = ?

Pedro tiene 6 caramelos ¿Cuántos necesita para tener 15 en total?

Aquí se da la cantidad inicial y el resultado del cambio, debiéndose hallar la magnitud del cambio. La ecuación sería: $6 + ? = 15$

Pedro tenía algunos caramelos, María le da 6 caramelos más. Ahora tiene 15 caramelos ¿Cuántos caramelos tenía al principio? $? + 6 = 15$. Aquí se conoce la cantidad inicial.

COMBINACION.

Los problemas de combinación presentan situaciones en las que se proponen 2 cantidades que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo sin que haya ningún tipo de acción. Hay de nuevo 3 subcategorías según el lugar en que se ubica la incógnita.

Veamos los ejemplos:

Pedro tiene 9 caramelos, María 4 ¿Cuántos caramelos tienen entre los 2? La ecuación sería: $a + b = ?$

Pedro tiene 8 caramelos: María también tiene algunos caramelos. Entre los dos tienen 13 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene María? $8 + ? = 13$

Pedro tiene algunos caramelos y María tiene 5. Entre los dos tienen 12 caramelos ¿Cuántos caramelos tiene Pedro?

COMPARACION

Los problemas de comparación, como su nombre lo indica,suponen la relación de dos cantidades, bien para determinar la diferencia entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. Aquí también encontramos 3 subtipos de problemas en función de la ubicación de la incógnita.

Ejemplos:

Pedro tiene 7 caramelos. María tiene 5 caramelos ¿Cuántos caramelos tiene Pedro más que María?

Pedro tiene 5 caramelos. María tiene 9 caramelos más que Pedro ¿Cuántos caramelos tiene María?

Pedro tiene 13 caramelos. Tiene 4 caramelos más que María. ¿Cuántos caramelos tiene María?

IGUALACION

Los problemas de igualación constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, ya que hay una acción implícita que tiene que aplicarse a uno de los conjuntos, como en los problemas de cambio.

Pedro tiene 11 caramelos. María tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tienen que dar a María para tener los mismos que Pedro?

Pedro tiene 3 caramelos. Si le dan 8 caramelos tendrá los mismos que María ¿Cuántos caramelos tiene María?

Ahora bien, entre esta clasificación que se hace de los problemas podemos identificar 2 grandes rubros que los ubican de acuerdo al tipo de acción que se ejerce sobre ellos. Los problemas de cambio e igualación describen una relación dinámica, ya que; para resolverlos hay que hacer transformaciones de incremento o decremento en los conjuntos.

Por otra parte los problemas de comparación y combinación sólo plantean una relación estática entre sus cantidades.

Ya vimos que a cada categoría le subyacen 3 posibles alternativas de acuerdo al lugar de la incógnita pero es necesario aclarar que en total serían 6 pues la resta entraría también dentro de la aditividad en los problemas.

Las ecuaciones en total quedarían de la siguiente manera:

$a + b = ?$	$a - b = ?$
$a + ? = c$	$a - ? = c$
$? + b = c$	$? - b = c$

EJEMPLOS DEL PATRON TEXTUAL DE LOS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

C A M B I O	I G U A L A C I O N
Iván tiene 4 caramelos. Luego, Tere le dio 5 caramelos mas. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 4 + 5 = x	Iván tiene 4 caramelos. Tere tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos necesita Iván para tener los mismos que Tere? 4 + x = 9
Iván tenía 9 caramelos. Luego, le dio 5 a Tere. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván? 9 - 5 = x	Iván tiene 9 caramelos. Tere tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos necesita perder (o comerse) Iván para tener los mismos que Tere. 9 - x = 4
Iván tenía 4 caramelos. Luego, Tere le dió algunos más. Ahora Iván tiene 9 caramelos . ¿Cuántos caramelos le dió Tere? 4 + x = 9	Iván tiene 4 caramelos, el necesita 5 caramelos más para tener los mismos que Tere. ¿Cuántos caramelos tiene Tere? 4 + 5 = x

Iván tenía 9 caramelos. Luego, le dió algunos a Tere. Ahora Iván tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dió a Tere? $9 - x = 4$	Iván tiene 9 caramelos. Necesita perder o comerse 5 para tener los mismos que Tere. ¿Cuántos caramelos tiene Tere. ¿Cuántos caramelos tiene Tere? $9 - 5 = x$
Iván tenía algunos caramelos. Luego, Tere le dió 5 caramelos más. Ahora Iván tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio? $x + 5 = 9$	Iván tiene 9 caramelos. Tere necesita 5 caramelos más para tener los mismos que Ivan. ¿Cuántos caramelos tiene Tere? $x + 5 = 9$
Iván tenía algunos caramelos. Luego, le dió 5 a Tere. Ahora Iván tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Iván al principio? $x - 5 = 4$	Iván tiene 4 caramelos. Tere necesita perder o comerse 5 para tener los mismos que Iván. ¿Cuántos caramelos tiene Iván? $x - 5 = 4$

COMPARACION	COMBINACION
Iván tiene 9 caramelos. Tere tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Iván más que Tere? $4 + x = 9$	Iván tiene 4 caramelos. Tere tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen los dos juntos?
Iván tiene 9 caramelos. Tere tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos menos tiene Tere que Iván? $9 - x = 4$	Iván y Tere tienen los dos juntos 9 caramelos.Iván tiene 4 caramelos y el resto son de Tere.¿Cuántos caramelos son de Tere?
Iván tiene 4 caramelos. Tere tiene 5 caramelos más que Iván ¿Cuántos caramelos tiene Tere? $4 + 5 = x$	Iván y Tere tienen los dos juntos 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Iván si 5 son de Tere?
Iván tiene 9 caramelos. Tere tiene 5 caramelos menos que Iván.¿Cuántos caramelos tiene Tere? $9 - 5 = x$	
Iván tiene 9 caramelos;el tiene 5 caramelos más que Tere.¿Cuántos caramelos tiene Tere? $x + 5 = 4$	

Iván tiene 4 caramelos;el tiene 5 caramelos menos que Tere. ¿Cuántos caramelos tiene Tere? $x - 5 = 4$	

FACTORES QUE CONDICIONAN LA COMPLEJIDAD DE LOS PROBLEMAS

Existen múltiples factores que determinan el grado de dificultad en RPVAS: A continuación se describen algunos de ellos:

*La mayoría de los autores aseguran que un factor determinante es el lugar donde está situada la incógnita,y coinciden en que el éxito en los niños es mayor, cuando el término desconocido se sitúa en el resultado, independientemente del tipo de problema planteado. En cambio, la dificultad aumenta en los problemas cuando la incógnita se situa en el punto de partida, en lugar de hacerlo en el conjunto de cambio o en el resultado. Asi mismo, el éxito de los niños desciende manifiestamente en los problemas de combinación y comparación cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos. Y esta dificultad alcanza su más alto nivel cuando se desconoce el primer sumando,según los resultados obtenidos en las más recientes investigaciones.

*Otro factor importante a considerar es el contexto del problema "Un problema resulta más fácil cuando se le vincula con elementos cotidianos y concretos del niño, por ejemplo: niños que juegan,señoras, y señores que compran,o los goles que anotan en un partido de futbol,tiempo de horas que trabaja un obrero, distancias que se recorren entre dos poblados desconocidos, minutos, metros etc." (Figuera Olimpia,1991).

*El cálculo numérico mayor o menor incide en el éxito o fracaso de los niños frente a los problemas, así podemos asegurar que los números grandes dan lugar a mayores dificultades que los pequeños;

los números decimales implican mayor dificultad que los enteros etc.

"Supongamos que en un problema dado en lugar de hablar de 63 809 y de 67 351 Km. se indicara 15 000 y 17 000 Km.,la solución del problema se habrá facilitado bastante" (Vergnaud Gérard,1991).

*La manera como se presentan las informaciones juega un papel muy importante en la complejidad de los problemas. Algunos autores consideran que al niño se le deben brindar solamente las informaciones que le sean estrictamente necesarias, mientras que otros piensan que el niño debe acostumbrarse a recibir informaciones inútiles y que en consecuencia deberá saber dejar de lado, así como enunciados en donde ciertas informaciones necesarias esten ausentes.

Partiendo de la idea de que el aprendizaje es un proceso gradual y constructivo la sustentante considera que en un principio al niño se le deben dar los enunciados precisos para más tarde y a medida que va realizando sus propias construcciones lógicas se le puede ir involucrando informaciones adicionales que le permitan analizar la situación y elegir las que sirven de las que no.

Ahora bien, las informaciones pertinentes para la resolución de los problemas pueden estar dadas de diferentes maneras:

-Informaciones ordenadas conforme al desarrollo temporal de hechos contados o, al contrario, proporcionadas en desorden o en orden inverso.

Veamos un ejemplo con orden inverso:

"En 1974 la población de París era de 2 844 000 habitantes;

disminuyó 187 000 personas en 5 años.¿Cuántos habitantes había en 1969?

Además de los factores antes mencionados en la dificultad de los problemas (semántica,sintaxis y lugar de la incógnita) señalan los investigadores que la formulación verbal puede facilitar o dificultar la tarea de los niños. Lindvall e Ibarra (1989), dicen que los problemas de combinación del subconjunto del tipo: Luis y Antonio tienen 7 caramelos ¿Cuántos caramelos tiene Antonio? son más fáciles cuando se formulan de la siguiente manera; Luis y Antonio tienen 7 caramelos en total ¿Cuántos caramelos tiene Antonio, si de Luis eran 4? Otro ejemplo de los mismos autores dice que si se les presenta a los niños una serie de dibujos 5 pájaros y 4 gusanos, se les pregunta ¿Cuántos pajaros hay más que gusanos? es considerablemente más complicado que si se les dice:imagina que los pájaros corrieran a coger un gusano cada uno. ¿Cuántos pájaros se quedan sin gusano? Vergnaud (1991), reconsidera al respecto y ejemplifica de la siguiente manera:

"Luis tiene 6 pelotas. Ana tiene 5 pelotas. ¿Cuántas pelotas más tiene Luis que Ana?

Una formulación más apropiada diría:

Hay 6 coches, pero sólo 5 conductores ¿Cuántos coches no tendrán conductor?

FACTORES QUE INTERVIENEN EN LA R P V A S

Dentro de la RPVAS intervienen una serie de factores internos y externos que determinan su desenvolvimiento dentro del aula. Como internos podemos identificar la concepción que tiene el maestro sobre lo que significa resolver un problema y por ende lo que representa esto para el alumno, siendo factores externos los curriculares, las exigencias sociales, (padres de familia), los intereses institucionales, etc. Así pues, todos estos elementos se mezclan dando lugar a un tipo de práctica escolar frente a la resolución de problemas.

De lo anterior podemos decir que, el modelo curricular que se ha venido realizando para introducir a los niños en la RPVAS, supone en primera instancia el aprendizaje de los números, el manejo convencional de los mismos, su dominio algorítmico etc.para pasar en un último momento -como si fuera la fase de culminación- hacia la resolución de problemas (Más adelante ahondaremos al respecto). Dentro de esta dinámica los niños van teniendo ciertas ideas acerca de lo que significa resolver un problema. "Un problema es algo que tiene que tener una respuesta y para encontrarla hay que hacer una operación utilizando los números del enunciado" (Carrasco Alma,1991). Frente a esto los niños establecen un tipo de práctica donde sólo centran su atención en la operación que deben de hacer y dejan de lado la reflexión del problema.

Ya en otro momento hemos hablado sobre la experiencia que los niños han ido acumulando a lo largo de la vida cotidiana fuera de la escuela al realizar situaciones de conteo numérico. Así pues, también se han enfrentado a ciertas situaciones problemáticas a las cuales les han tenido que dar solución.Sin embargo,la enseñanza institucionalizada muy a menudo deja de lado este tipo de conocimientos enfocándose constantemente sólo a la mecanización de los algoritmos y estos como único instrumento para llegar al resultado de un problema.

En este sentido, la RPVAS cobra significatividad sólo en la medida en que el niño logra dar respuesta exacta haciendo a un lado la comprensión de los conceptos fundamentales de suma y resta que se estan manejando dentro del problema. De aquí que se tendría que insistir más en la comprensión relacional que guarda por sí mismo el problema -el esquema del problema- que en la exactitud y rapidez computacional que depende cada vez menos del niño y más del uso de calculadoras y ordenadores.

Para concluir podemos decir que un problema no supone solamente la aplicación de la operación aritmética adecuada, razón por la cual el maestro no debería centrarse solamente en el logro de una respuesta acertada, sino en la comprensión misma del planteamiento. Con esto no sólo se lograría que el alumno fuera un buen resolutor de problemas matemáticos dentro y fuera de la escuela sino que, también las operaciones de suma y resta cobraran significado en la comprensión de los niños.

TRES NIVELES DE COMPRENSION EN LA R P V A S

De acuerdo con el modelo de Ryley (1990) y otros autores hay tres niveles de conocimiento en la resolución de problemas;

A)El esquema del problema

B)Los esquemas de acción que relacionan la representación de la situación de un problema con sus procedimientos de resolución.

C) Y el conocimiento de estrategias.

El éxito en la resolución de los problemas depende de la disponibilidad de la memoria de representaciones conceptuales o esquemas correspondientes a los problemas de diversos tipos, a lo que Ryley y otros llaman esquema del problema. Este esquema consiste en un "sistema organizado de elementos y relaciones, de modo que estos elementos están estructurados en términos de relaciones cuantitativas, temporales y lógicas". (Cobb 1987; Morales Shute y Peregrino,1985). Es decir, cuando el niño tiene disponible en su memoria un esquema apropiado puede hacer corresponder la información del problema con dicho esquema, asignando correctamente las cantidades específicas. Por lo tanto, las dificultades en la ejecución de un tipo determinado de problemas se deben a que el niño posee un esquema del problema incompleto,o bien a la presencia de obstáculos en el momento de llevar a cabo la correspondencia mencionada.

El modelo consta de tres niveles.

En el nivel I, los niños están limitados a representaciones externas de los problemas, utilizando objetos físicos para solucionarlos correctamente. Además pueden solucionar problemas en los que la información sobre conjuntos permite construir secuencialmente el modelo del problema, proposición por proposición tal como se presenta en el contexto verbal. Pero son incapaces de resolver los problemas con la incógnita en uno de los sumandos, asi como el emplear estrategias diferentes a la de contar todo, que consiste en representar ambos conjuntos mediante objetos contándolos todos. Por ejemplo, en un problema de combinación: Juan tiene 3 caramelos, Paty tiene 5 ¿Cuántos tienen entre los dos? Resuelven contando nuevamente los conjuntos.

El nivel II incluye un esquema que permite al niño darse cuenta de que los objetos tienen un doble papel ya que, están incluídos en un conjunto principal como en unos de los subconjuntos.

Esto es, construye redes semánticas que le permiten representar conjuntos que se mencionan en el texto del problema, pero que no tienen definidas las cantidades específicas. Dicho esquema facilita por tanto la solución de problemas en los que la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Por ejemplo en el siguiente problema de comparación. Pedro tiene 5 caramelos, María tiene 9 caramelos más que Pedro ¿Cuántos caramelos tiene María? la frase Pedro tiene 5 caramelos le conduce a una representación igual que los del nivel I; sin embargo, la frase María tiene 9 caramelos más que Pedro no puede ser representada por los niños del nivel II ya que requiere comprender la relación entre cantidades para determinar el conjunto de referencia, el conjunto de comparación y el conjunto de diferencia.

Por otro lado, en este nivel los niños utilizan estrategias consistentes en contar a partir de uno de los dos sumandos.

En el nivel III se añade un nuevo esquema, el esquema parte-todo para representar las relaciones entre todos los elementos del problema previa resolución del mismo. Al contrario que en los dos niveles precedentes el niño no precisa ahora la representación externa y utiliza cualquier tipo de estrategia incluyendo las memorísticas y las basadas en reglas.

Siguiendo esta misma línea Greeno en 1989 supone que en la realización de procesos constructivos de la representación semántica de los PVAS aparecen dos etapas principales. La primera consiste en construir un diagrama esquemático que recoga los principales datos o cantidades del problema y las relaciones existentes entre ambos o, en otras palabras en constituir una representación mental del problema planteado y la segunda estribaría en la aplicación de ese diagrama, es decir, la decisión del tipo de ecuación o procedimiento que hay que utilizar para calcular el resultado.

Cuando hablamos de que los alumnos realizaban meras prácticas de ejecución de algoritmos frente a los problemas se trataba de explicar cómo se pasa a la segunda parte -la de ejecución- sin haber resuelto la primera fase que tiene como principal cometido establecer no el cómo o que operación hacer sino el por qué se aplica uno u otro algoritmo de acuerdo a las relaciones semánticas que se manejan dentro del problema.

El siguiente esquema representa este nivel de comprensión a nivel semántico.

PROBLEMA DE CAMBIO

PARTE 1	PARTE 2	PARTE 3
Conjunto de partida	Conjunto cambio	Conjunto resultado
Poseedor obj. cantidad Poseído	Poseedor obj.cantidad Poseído	Poseedor obj.cant. Poseído
Pedro caramelos?	Pedro caramelos 6	Pedro caramelos 15

ERRORES PRINCIPALES QUE SE COMETEN EN LA R P V A S

"Cuando el niño resuelve un algoritmo de suma ha de tener en cuenta una serie de factores sintácticos y semánticos para llevar a feliz término su tarea" (Braun y Burton 1978,Resnick 1982). Los componentes sintácticos se refieren a las reglas que dirigen la actuación del niño, como por ejemplo, iniciar la suma por la primera columna de la derecha, proceder columna por columna etc. En cambio, los aspectos semánticos hacen referencia a conceptos básicos implicados en la elección del algoritmo a utilizar; suma, resta, multiplicación etc. de acuerdo al tipo de relación que establece con los datos del problema por ejemplo, los errores de los niños pueden afectar a uno u otro componente o a los dos. En este sentido en una de las investigaciones realizadas (Bermejo y Rodríguez,1986) con niños de segundo año sobre tareas aditivas y de conservación de la materia, encontraron errores pertenecientes a ambas categorias.

En cuanto a los problemas verbales, los autores antes mencionados ubican dos grandes categorías de errores; errores de ejecución y errores de representación. Los primeros se originan cuando el niño resuelve la operación aritmética correspondiente, es decir; la suma y por lo tanto aparacen los mismos errores que se mencionan más arriba.

De estos últimos tipos de errores (representación) hay diferentes modelos que se describen a continuación:

1.-Repetir una de las cantidades propuestas en el problema: Este tipo de error se observa con frecuencia en los problemas de comparación, cambio, combinación e igualación. En cuanto a los de comparación por ejemplo, en el problema "Javier tiene 6 globos, Mario tiene 9 globos más que Javier ¿Cuántos globos tiene Mario? niños de 3º y 4º responden a la pregunta diciendo que 9. Ryley y otros (1986) señalan que este fracaso se debe a una representación inapropiada de la historia del problema, debido a la ausencia del problema y a un esquema que le permita comprender el mismo. Así mismo Mayer (1982) apunta que esta representación deficiente se produce porque el niño interpreta una proposición de relación como una proposición de asignación.

En otras palabras, la proposición relacional "Mario tiene 9 globos más que Javier"es interpretada como una proposición de asignación "Mario tiene 9 globos", y por tanto esa es la solución que el niño procede como sigue: Ante la frase JUan tiene 3 caramelos, crea una red semántica y un conjunto con 3 caramelos; en la frase Luis tiene 7 caramelos; finalmente cuando se plantea la pregunta ¿Cuántos caramelos tienen entra los dos? tratan de encontrar la respuesta en la unión de los dos conjuntos, lo que le conduce a ejecutar acciones de conteo.

En los problemas de cambio los problemas surgen sobre todo porque los niños se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y cambio separadamente (Ryley y otros,1983). Por ejemplo en el problema "Maria tiene algunos lápices. Isabel le da 5. Ahora tiene 17 lápices ¿Cuántos lápices tenía María al principio. Cuando el niño recibe la frase "María tiene algunos lápices"se da cuenta que no sabe con exactitud los lápices que tiene, pero no crea un conjunto de partida desconocido para María. Ante la segunda proposición "Isabel le da 5", crea un conjunto con 5 lápices para María, pero al no haber representado el conjunto de partida inicial, no se concibe este conjunto como un cambio en el sumando inicial.

A continuación la tercera proposición. "Ahora María tiene 17 lápices" se interpreta como un incremento en el conjunto anterior. Por tanto, ante la pregunta ¿Cuántos lápices tenía María al principio? responden 5, esto es, el número que se representa el conjunto inicial para el niño.

En los problemas de combinación del tipo "Pedro tiene 3 manzanas. Ana también tiene algunas manzanas. Pedro y Ana tienen juntos 9 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Ana? algunos niños responden 9. Los modelos de Ryley y otros (1983) atribuyen estos fallos a una falta en la comprensión de la relacion parte-todo.

Es decir,los niños que no disponen de este esquema interpretan cada frase del problema separadamente, sin llegar a inferir las relaciones existentes entre los conjuntos.

2.-Inventar la respuesta. Aparece este tipo de error cuando el niño no entiende el problema o esta cansado.

3.-Selección de una operación inapropiada. Este aspecto aparece no sólo cuando los niños no eligen correctamente el tipo de algoritmo (suma,resta etc.)sino más aún, cuando no transfieren la forma adecuada del esquema que se le esta presentando. Por ejemplo, si utilizan la ecuación canónica de a + b = ? , cuando en el problema la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Este error se encuentra presente en las cuatro categorías de problemas y según Vicente Bermejo (1991), puede tener tres causas que a continuación resumiremos:

A)La primera de ellas reside en la dificultad para concebir el significado de la indefinición en uno de los sumandos, asignándole en consecuencia la cantidad que se propone a continuación.

B)La segunda se refiere a que no aprecian la información temporal contenida en el texto.

C)La proposición comparativa que determina el otro sumando resulta difícil para los niños.

Por último De Corte y Verschafell apuntan que este tipo de error se produce porque los niños procesan el texto superficialmente debido a que se centran en la palabra "clave" del problema (Ver cómo resuelven los niños problemas,pág.70). En lugar de construir una representación mental global del problema; o bien porque no lo comprenden y utilizan la operación aritmética que les resulta más fácil y conocida,la suma.

CAPITULO I I I

LA SUMA LA RESTA Y LOS PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS SIMPLES

NIVELES DE CONSTRUCCION DEL NUMERO EN EL NIÑO

Antes de establecer la relación entre la composición aditiva y los PVAS es pertinente precisar los niveles de construcción numérica que sigue el niño previos al aprendizaje de la suma y la resta, ya que en definitiva estos determinaran algunas de las fallas que pudieran detectarse posteriormente.

"El niño aprende los primeros números desde muy chico y con frecuencia fuera de la escuela. Desde los 2 o 3 años sabe decir uno y dos, donde dos tiene la significación de muchos". (Vergnaud Gerard,1991).

Así pues, esta serie numérica hablada aumenta progresivamente cuando el niño va creciendo, pero al situarse en dicha recitación de números puede ubicarse en dos niveles diferentes:

*El nivel de la simple recitación (canción). El niño se dedica a recitar palabras que sabe deben seguirse. Sin embargo, la actividad del conteo implica no solamente que el niño recite la serie numérica, sino que al mismo tiempo haga corresponder la recitación con la exploracion de un conjunto de objetos.

*El nivel de conteo propiamente dicho: La recitación del conteo numérico se acompaña de gestos manuales y movimientos de los ojos, que muestran que el niño ejerce su actividad al establecer una correspondencia entre el conjunto de objetos, por una parte y la serie numérica por la otra. Estos corresponderían ya a los componentes lógicos del numero y los ~~p~~podemos clasificar de la siguiente forma:

1er Componente: CLASE NUMERICA: Todos los números en sí representan clases numéricas: La clase del 1, la clase del 2 etc.

Siempre es necesario tener presente que las diferentes clases numéricas son abstracciones mentales el 2 no está en los objetos sino en la mente de nosostros mismos. Así pues, cuando evocamos un número lo que hacemos es identificar a que clase pertenece de acuerdo a la propiedad numérica, de lo contrario siempre tendríamos que estar viendo los objetos para relacionarlos con la numerosidad que poseen.

Ejemplo:

A los habitantes de un país no los podemos ver a todos reunidos pero podemos ubicar su numerosidad.

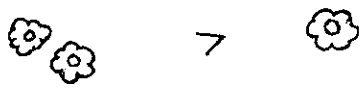
2º Componente. LA NOCION DE ORDEN: Cuando los niños cuentan deben colocar los objetos en orden ya sea física o mentalmente a fin de evitar contar dos veces uno mismo o dejar de contar alguno.

Dentro de la noción de orden se encuentra la relación de inclusión y clases. En otras palabras cuando contamos un número incluímos al menor en el mayor.

Ejemplo:

El número uno lo incluímos en el dos, el dos en el tres y así sucesivamente.

En este sentido el niño va comprendiendo que la posición de los números dentro de la serie numérica no es arbitraria, depende de las relaciones que ya anteriormente hayan establecido los niños con signos de mayor que y menor que.



El número ocupa una determinada posición en la serie de acuerdo a su magnitud. Así por ejemplo, el 3 se ubica después del 2 y antes del 4 porque es mayor que el primero y menor que el segundo.
Con lo anterior podemos afirmar que para que el niño tenga una conformación lógica del número debe fusionar las relaciones lógicas implicadas en la clasificación y seriación (1er y 2º componente respectivamente) ya que como vimos la clasificacion permite al nino entender la relación de clase numérica en función de la comparación entre sus distintas magnitudes.
Más tarde, el niño tiene que identificar que si bien es cierto el número es un elemento de la vida cotidiana presente en casi todo momento, su utilización en la vida diaria se manifiesta en diversas maneras. Esto es, el número puede tener diferentes significados en función del contexto particular que se emplea.
CONTEXTO DE MEDIDA: El número se aplica en este contexto cuando describe la cantidad de unidades en que se ha dividido una magnitud continua, tales como la capacidad y el peso. Esto es, una magnitud continua puede ser medida únicamente después de que ha sido dividida en unidades. Las unidades de medida pueden ser

convencionales como el litro, gramo etc. o bien arbitrarias.

CONTEXTO ORDINAL: En este contexto se usa el número para marcar la posición de un elemento dentro de un conjunto ordenado. Por ejemplo, en una competencia de carreras el que llega a la meta ocupara el 1er lugar, el que llegue después el 2º y asi sucesivamente.

CONTEXTO CARDINAL: El número se puede emplear para expresar una cantidad particular de objetos o sucesos, es decir, para denominar la cardinalidad de un conjunto. Ejemplo: dúo,terna etc.

CONTEXTO DE CONTEO: El número pronunciado guarda una correspondencia biunívoca con un objeto determinado. De esta manera física o mental cada elemento contado se va separando prograsivamente del conjunto de los elementos no contados.

CONTEXTO DE SECUENCIA: Aquí el número se emplea simplemente como una recitación verbal en el cual los números pronunciados no guardan ninguna relación con el objeto. Se trata solamente de una mera canción.

CONTEXTO DE CODIGO: Los números se emplean, algunas veces para distinguir diferentes clases de elementos como etiquetas o símbolos. En este contexto cada número representa los elementos que pertenecen a una misma clase. Ejemplo: cuando se hacen equipos dentro de un salón de clases se denomina la etiqueta del equipo 1 equipo 2 etc.No importando el número de elementos que los conforman.

CONTEXTOS COMBINADOS: El número puede encontrarse en cada uno de los contextos arriba mencionados por separado, o bien, combinando

2 o 3 significados descritos. Ejemplo: En un billete de lotería se pueden encontrar el numero de la serie como parte del codigo de identificación pero a la vez, indicando una posición relativa en la ordenación de todas las series de la misma fecha.

DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE SUMAR

"Los niños suelen entrar a la escuela con un alto desarrollo de conocimientos informales sobre aritmetica y en concreto la suma" Fuson y Hall,1983). Así pues, solucionan problemas simples del tipo N+1 y N-1 que al paso del tiempo van incrementando con sumandos superiores al valor de 1 por medio de procedimientos informales que,en un principio al menos necesitan la presencia de objetos para representar directamente la operación o la estructura semantica, si se trata de un problema verbal.

De aquí que, el desarrollo de la capacidad de sumar sea un proceso gradual que conlleve procesos cada vez más elaborados aunado a una flexibilidad mayor de estrategias que el niño debe ir adquiriendo. Resnick (1983) sugiere que, el paso a niveles de desarrollo superiores resulta de la comprensión del esquema parte-todo, que sufrirá diversas transformaciones como resultado de la instrucción formal. Esta autora distingue 3 periodos en el desarrollo:

El primero abarca la etapa del preescolar, el segundo constituye el primario inicial y el tercero se refiere al primario tardío. En el periodo preescolar la representación del número tiene como base el conteo y la comparación de cantidades, de modo que cuando los niños entran a la escuela, ya poseen una representación del número que se caracteriza por una secuencia numérica mental. Los números corresponden a posiciones en una cadena y se enlazan entre sí mediante una relación de siguiente, así como una indicación direccional que determina que las últimas posiciones de la secuencia son mayores. Todo ello constituye una gran ayuda para el niño con el fin de solucionar una gran variedad de problemas aritméticos.

Resnick considera que el mayor logro en el periodo primario temprano sería esta interpretación de los números en términos parte-todo, ya que este esquema específica que cualquier cantidad (el todo) puede ser dividida (las partes) siempre y cuando la suma de las partes sea igual al todo.

"La resolución de un problema se realiza mediante la representación del esquema parte-todo; esto es asignándoles la categoría parte o la de todo, lo que posibilita la identificación adecuada de la incógnita y la utilización de las estrategias de cómputo flexibles" (Carpenter,1986).

Los niños que se sitúan en este estadio pueden solucionar problemas que no son accesibles a niños más pequeños, pues gracias al conteo mental ya no requieren una representación observable del número.

Por último en el periodo primario tardío, se produce el aprendizaje del número decimal, como consecuencia de la elaboración sucesiva del esquema parte-todo, de modo que los números se interpretan inicialmente como compuestos por unidades y decenas, incluyendo luego las centenas y los millares, etc.

Weaber (1982), presenta una propuesta diferente a la de Resnick, sobre el desarrollo de los niños dentro de la aditividad pues el supone que la suma mantiene en un primer momento una concepción unitaria para pasar posteriormente al manejo de una concepción binaria. La concepción unitaria entiende a la suma como un cambio de estado, en el sentido que un conjunto inicial se hace mayor. Por ejemplo los niños interpretan 3 + 2 como el conjunto formado por 3 elementos al que añaden 2 mas, considerando a 3 + 2 y 2 + 3 como dos operaciones diferentes. Por otro lado la concepción binaria de la suma la entiende igualmente como la combinación del cardinal 3 mas el cardinal 2 siendo además conmutativa esta concepción.

Baroody y Ginsburg (1986) en algunas investigaciones que realizaron llegaron a la conclusión que los problemas de cambio reflejan una concepción unitaria de la suma (añadir una cantidad inicial a un poseedor), mientras que los de combinación reflejan una concepción binaria (dos conjuntos dos poseedores diferentes). Por ello se espera que el éxito de los niños pequeños sea mayor en los problemas de cambio.

Por otra parte Ryley y otros (1983) apuntan que los problemas aditivos en los que se desconoce el primer sumando resultan más difíciles que aquellos en los que el lugar de la incógnita se ubica en el segundo término, estos datos nos indican que el niño se encuentra en la fase de concepción unitaria de la suma.

"Los niños que poseen un esquema unitario de la suma presentan más dificultades en las tareas aditivas que tienen la incógnita en el primer sumando, debido a su incapacidad para intercambiar el lugar que ocupan los sumandos de modo que la incógnita se situe en el segundo término". (Bermejo Vicente,1991).

Por último algunos autores aseguran que existe una relación entre estrategias de resolución y el tipo de esquema aditivo que el niño posee, por tanto las estrategias basadas en el conteo obedecen a una concepción unitaria de la suma, mientras que estrategias más avanzadas como las de reglas y memoria se ubican dentro de la concepción binaria.

APRENDIZAJE E INSTRUCCION DE LA ADICION EN LA ESCUELA PRIMARIA

Resulta muy frecuente escuchar de problemas que presentan los ninos en educación básica en el área de matemáticas, ya hemos visto en otro momento (Pag.4) que en los programas de estudio tradicionales establecen en un primer momento el aprendizaje de la suma y de la resta como algoritmos aislados uno de otro para después "aplicarlos" a diferentes problemas que se le plantean al niño; sin embargo, las investigaciones más recientes en aritmética elemental sugieren que debería proponerse al mismo tiempo que el aprendizaje de suma y resta.

A continuación resumiremos los principales aportes que han tenido algunos investigadores en esta área:

La obra de Kamii (1986) se opone al aprendizaje memorístico de la suma y sugiere reemplazar este objetivo por otros que lleven al niño a realizar acciones mentales que supongan el establecimiento de relaciones entre los números. El objetivo central debería residir en la realizacion de tareas aditivas que tengan en cuenta la lógica infantil y el propio modo de pensar del niño, respetando al mismo tiempo su autonomía y mostrando su real capacidad creativa.

Por ejemplo, se sabe que para los niños de primer curso resulta más fácil recordar la operación 5 + 6 = 11 si el mismo lo relaciona con 5 + 5 = 10, que si se propone aisladamente, ya que al relacionar 5 + 6 con 5 + 5 el niño deduce por necesidad logica que 5 + 6 es igual a 10 + 1. De aquí la importancia de fomentar la construcción de este tipo de acciones conducirá al niño a establecer cada vez mas las relaciones entre los números, llegando a formar una red de relaciones progresivamente mas coherente y amplia.

Para construir este tipo de red Kamii propone los objetivos que a continuación resumimos:

1.-Adición de sumandos hasta 4; este objetivo se funda en el simple hecho que los números pequeños resultan más fáciles que los mayores.

2.-Adición de sumandos hasta 6; debido a que los niños de primer curso les gustan los juegos con dados y estos llegan hasta 6.

3.-Adición de dobles hasta 10; este objetivo se basa en el hecho empírico de que los dobles y las combinaciones en las que se añade 1 a un número parecen memorizarse más fácilmente que las otras combinaciones.

4.-Participación de conjuntos de sumas ya conocidas, y de 10 puede hacerse con 9 y 1, 8 y 2 etc. Para esto se requiere la construcción de nuevas relaciones que implican una compensación, en el sentido de que el incremento de un sumando va acompañado de la correspondiente disminucion del otro. Requiere además que los niños enfoquen su pensamiento en dirección opuesta a la suma, ya que en esta se combinan dos partes en un todo de orden superior, mientras que en la participación de conjuntos se separa un todo en dos partes.

5.-Pensar en 6, 7, 8,y 9 como si 5 + 1, 5 + 2, 5 + 3, y 5 + 4 y sumar sumandos hasta el 10; este principio tiene se origen en la investigación japonesa de Hatano (1982) que recomienda el uso del 5 como unidad intermedia de orden superior, para pensar en los numeros del 6 al 9 como resultado de 5+1 5+2 5+3, 5+4. Los niños japoneses llevan acabo operaciones aditivas reagrupando los números mentalmente en torno al 5 o al 10, haciendo por ejemplo (8+2) +5, mientras que otros lo hacen utilizando al 5 del modo siguiente (5+5) + 3+2.

Pero además este objetivo se justifica, según Kamii, desde el punto de vista piagetano por dos razones. En primer lugar porque los ninos construyen la serie numérica progresivamente. Los números del 6 al 10 son grandes y por lo tanto son mas difícil de concebir para los niños pequeños que los números perceptivos.

Por ello es conveniente que piensen en los números del 6 al 10 como 5+1, 5+2 5+3, 5+4 ,en segundo lugar, como se indica al principio porque el niño recuerda mejor los conocimientos que construye a partir de los que ya conoce, que si se aprenden aisladamente unos de otros.

Finalmente la capacidad de procesamiento de información podría ser otro factor a tener en cuenta en el rendimiento aritmético, segun los autores mencionados.

Por su parte Resnick y Omanson (1987) proponen 4 principios que constituiran la base para comprender perfectamente la operación de restar:

1.-La composición aditiva de las cantidades

2.-Los valores convencionales de la notación decimal

3.-La realización de calculos con las partes

4.-La recomposición y conservación de la cantidad del minuendo.

Con respecto al primero, se trata según los autores mencionados de un principio básico indispensable para poder operar con cantidades.Toda cantidad, así como todo número esta compuesto por otras cantidades,de modo que 5 por ejemplo no solo es el cardinal de un conjunto constituído por 5 elementos, sino que también representa el resultado de componer diferentes cantidades, tales como 3 y 2, 4 y 1 etc.

El segundo principio es una consecuencia del anterior, de modo que en la aritmética escrita los valores de los símbolos dependen de sus posiciones espaciales, siguiendo la convención de la notación decimal. Así, los números mayores de 9 se simbolizan como compuestos de cantidades, de tal manera que un número como el 5 tiene un valor diferente según se posicione antes o después de otro 95 o 59. "En el sistema decimal cada posición a la izquierda representa un valor diez veces mayor que el anterior, empezando por la unidades,despues por las centenas etc. "(Resnick y Omanson,1987). Un ejemplo de lo anterior es el caso del 0 pues los niños no entienden que en ocasiones funcionan como un valor nulo sin embargo, al ocupar una posición incide en el valor de los demás números.

Por ejemplo en el número 50 el valor de 5 se refiere a las decenas, gracias a que el 0 ocupa la posición de las unidades.

El tercer principio supone al igual que el primero que toda cantidad esta compuesta por otras cantidades, lo que permite la operacionalidad con el todo o con las partes. Así en la resta se pueden descomponer el minuendo y el sustraendo en unidades, decenas, centenas etc.

$$869 - 536 = (800+60+9) - (500+30+6) = (800-500)$$
$$(60-30) \quad + \quad (9-6)$$

En este principio hay que tener cuidado en que el minuendo nunca sea mayor que el sustraendo. Por ejemplo: 846-569 el niño se sentirá confundido al hacer:

846-569 = (800-500) + (40-60) + (6-9)

Resnick considera que los niños al entrar en contacto con estos principios se encuentran en dificultades no porque no prestan la debida atención a los principios expuestos, sino porque no consideran la significacion misma de estos símbolos; es decir, las cantidades representadas por ellos. Sin embargo, no podemos concluir generalizando sobre el por que de los errores cometidos en la sustracción, sólo podemos decir en base a las más recientes investigaciones que se han hecho, que para algunos alumnos puede ser un problema de desconocimiento de tales principios o fallas en su aplicación correcta sobre todo para aquellos que se inician en el aprendizaje de dicho algoritmo.

LA OPERACION DE RESTAR

Habitualmente la resta suele ser considerada como una operación más compleja que la suma, razón por la cual su enseñanza se posterga hasta tener el conocimiento algorítmico de la suma. Sin embargo, las investigaciones más recientes suponen que esto realmente no es así, pues los ninos que no han entrado en la fase de institucionalización del aprendizaje de la suma pueden resolver problemas de sustracción, lo que significa que la adquisición y por lo tanto el aprendizaje de esta operación no consiste en un proceso como lo llama Olimpia Figueras de "todo o nada", sino que por el contrario supone un largo caminar durante la escuela primaria para que el alumno vaya comprendiendo progresivamente y en toda su profundidad el sentido que tiene la resta.

Un aspecto importante para que se lleve a la practica lo que acabamos de mencionar es por un lado la planeación curricular y por otro la formación docente. Para organizar ambos aspectos es imprescindible conocer los principios o pilares básicos que fundamentan la sustracción, de modo que el niño pueda asimilarlos sin ambiguedades. En caso contrario los alumnos pueden aprender memorísticamente procedimientos o "trucos" para resolver tareas de restar, pero no llegan a comprender verdaderamente lo que significa esta operación, pues plantean preguntas como ¿Qué tengo que hacer sumar o restar?

Es importante dejar claro que el aprendizaje de la resta tiene que ver en primer lugar con el razonamiento lógico que tiene el nino de acuerdo a su nivel evolutivo. Así pues, Piaget y Szeminska (1941) suponen que para comprender dicha operación es necesario tener en cuenta principios fundamentales en la cognición del niño, como por ejemplo: La conservación del número, pues esta nos permite distinguir las transformaciones irrelevantes de aquellas otras que afectan a la cantidad numérica. Igualmente la relación parte-todo, que se manifiesta en ciertos problemas de suma y resta parece imprescindible para comprender perfectamente estas operaciones. El razonamiento transitivo es otra de las habilidades lógicas que intervienen en algunos problemas de suma y resta. (Ver pag.12).

PRINCIPALES ESTRATEGIAS INFANTILES EN LA RESOLUCION DE LA RESTA

Numerosos trabajos de investigación han puesto de manifiesto que los niños al realizar operaciones de resta presentan tres niveles basicos dentro de las estrategias que eligen en su resolución (Paq. 32). Así pues tenemos:

A)Estrategias que se utilizan usando los dedos u objetos físicos.

B)Estrategias basadas en la secuencia de numerales.

C)Estrategias fundadas en los recuerdos de hechos numéricos.

A partir de lo anterior se pueden encontrar múltiples opciones en la resolución de este algoritmo.

1.-SEPARAR DE: En este caso se presenta primeramente la cantidad menor, el niño forma el conjunto mayor de objetos, después separa de ellos, una sola vez un conjunto de objetos igual al sustraendo, y cuenta finalmente la cantidad de objetos restantes.

Ejemplo:

En la operación 5 - 3 = 2 el niño constituye primero el conjunto de 5 objetos separa después 3 de ellos, al final cuenta los objetos que le restan.

2.-CONTAR HACIA ATRAS A PARTIR DE: Es una estrategia parecida a la anterior pero esta se distingue porque se funda en el conteo. El niño en este nivel cuenta hacia atrás a partir del mayor de los números dados, retrocediendo tantas veces represente el número menor. El último número pronunciado en la secuencia hacia atrás es la respuesta buscada.

Ejemplo:

5 - 3 El niño a partir de 5 retrocede 5,4,3 = 2

3.-SEPARAR A: En este caso se separan los objetos del conjunto mayor hasta que queden exactamente en el número representado por el conjunto menor. Después se cuentan los objetos separados encontrando así la respuesta.

4.-CONTAR HACIA ATRAS: El niño cuenta hacia atrás desde el número mayor hasta que llega al numero menor, ahi se detiene contando los numerales emitidos durante el conteo para encontrar la respuesta.

5.-ANADIR A: Se forma primero el conjunto mayor después se constituye el conjunto menor, añadiéndose a esa cantidad sin contar, tantos objetos como sean necesario igualar ambos conjuntos. La respuesta aparece al contar los objetos o elementos añadidos.

6.-CONTAR A PARTIR DE LO DADO: El niño de esta estrategia cuenta a partir del número más pequeño hasta que alcanza el número mayor. Contando la cantidad de numerales por los que ha atravesado desde el menor al mayor número.

Ejemplo:

5 - 3 = 2   4, 5 = 2 numerales

7.-EMPAREJAMIENTO: Esta estrategia es propia de la utilización de objetos y consiste en que el niño forma dos conjuntos que representan los términos de la respuesta, formando correspondencias uno a uno entre ambos. Después obtiene la respuesta con los objetos no emparejados.

8.-ELECCION: Es una combinación de las estrategias dos y seis, de tal modo que el niño emplea la una o la otra en función de su eficiencia ante el problema planteado.

Es importante mencionar que el grado de dificultad de las estrategias es variable, de modo que los niños no las usan indistintamente, es decir, la estrategia elegida va a depender de variables como:

*La estructura del problema.

*Grado de abstracción de la tarea planteada.

*La edad misma de los niños.

Resulta pues evidente que a edades tempranas solo se pueden resolver problemas empleando dedos u objetos físicos para representar las cantidades y las relaciones existentes entre ellas. En este caso las estrategias más comunes son las de separar, añadir y emparejar. Posteriormente el niño es capaz de interiorizar las acciones que antes había realizado manifiestamente mediante objetos físicos adquiriendo una mayor flexibilidad y eficiencia en sus operaciones esto conlleva a ir prescindiendo del conteo con los dedos u objetos.

Por otra parte, el tipo de problema planteado puede incidir notablemente en la elección de la estrategia utilizada para su resolución. Así, por ejemplo, los problemas de cambio con la incógnita en el resultado favorecen el uso de la estrategia "Separar de " y de contar hacia atras "A partir de ". En cuanto a los problemas de comparación con la incógnita en la diferencia, la estrategia más propicia seria la de emparejamiento.

ERRORES TIPICOS EN LA SUSTRACCION.

La mayoría de las investigaciones se han centrado en el estudio de los errores cometidos por cada nino individual, no en grupo, encontrando que las estrategias utilizadas por los niños eran variadas y muy personales, de modo que frecuentemente no se atenían a los clásicos modelos recogidos por los textos de matemáticas. Más tarde, Brown y Burton 1978, tipifican de la siguiente manera los errores más frecuentes que cometen los ninos al operar con sustracción.

1.-El niño sustrae el número más pequeño del más grande, sin tener en cuenta la distinción entre el minuendo y el sustraendo

4628

3945

1323

2.-Cuando llevamos 1 de la columna del minuendo ocupara por el cero, el niño escribe 9, pero no se lleva otra unidad de la columna inmediatamente a su izquierda:

4603

2475

2228

3.-Cuando hay que restar un número de 0, la respuesta de los niños puede ser o bien el número que figura en el sustraendo o bien el mismo 0.

4608	4608
2475	2475
2273	2203

4.-Cuando hay que llevar 1 de la columna del minuendo ocupada por 0, el niño salta esta columna, llevándose la unidad de la columna siguiente:

4603

2475

2138

5.-Cuando la columna del sustraendo es 0, el nino escribe como respuesta el 0.

4679

2405

2204

6.-Cuando la columna del minuendo es menor que el sustraendo, el niño se limita a escribir 0 como respuesta:

4679

2795

2004

7.-Cuando hay que llevar 1 de una columna del minuendo ocupada por el 0, el niño la lleva de la misma columna del sustraendo.

4603

2475

2248

Hasta aquí los errores más comunes en los que caen los ninos al ejecutar el algoritmo de la sustracción.

Ahora bien, la explicación que se da a estos errores va a depender de la línea de investigación que se esta llevando, es decir, Downes y Pali (1958) opinaban que los errores mencionados muestran fallos en el recuerdo de compuestos numéricos, así como la escasez de práctica fatiga y falta de concentración.

Más tarde hacia el inicio de la década de los 80 s aparece otra teoría explicativa de los errores de los niños en la resta (Young 1981) argumentando que estos se deben en gran medida a que el niño pierde la habilidad de restar pues no ha constituído en forma interna las reglas del procedimiento que rigen dicho algoritmo.

Ahora bien, ambas teorías apuntan más al modo de aplicar convenientemente unas informaciones o reglas, que a la comprensión expresa de los principios matemáticos empleados en la resta. Al respecto Resnick y Omanson (1986) opinan: "Las teorías que explican los errores al sustraer cantidades conciernen a la estructura superficial del procedimiento, pues no reflejarían al menos necesariamente los principios básicos de esta operación".

S E G U N D A   P A R T E

CAPITULO IV

LA R P V A S EN EL NUEVO PLAN DE ESTUDIOS

LINEAS GENERALES DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS EN EL PLAN DE ESTUDIOS 1994.

En el nuevo plan de estudios se aclara que la selección que se hace de los contenidos matemáticos obedece al conocimiento que actualmente se tiene sobre el desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue a la adquisicion y construcción de conceptos matemáticos específicos.

Así pues, el universo matemático se ve seccionado para su estudio de la siguiente forma:

*Los números, sus relaciones y operaciones
*Medición
*Geometría
*Procesos de cambio
*Tratamiento de información
*Predicción y azar.

El objetivo central que sigue el planteamiento es la de desarrollar en los niños la capacidad de utilizar a las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.

De lo anterior se desglozarian diversos tipos de habilidades a desarrollar, tales como:

-La capacidad de anticipar y verificar el resultado
-La capacidad de comunicar e interpretar información matemática
-La imaginación espacial
-La habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones
-La destreza en el uso de ciertos instrumentos de medición, dibujo

y cálculo.

-Llegar al pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento entre otras la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

PROPUESTA DEL NUEVO PLAN DE ESTUDIOS CON RESPECTO A PROBLEMAS

En lo que concierne a los problemas se plantea la necesidad de acceder a ellos en un contexto que le permita al niño comprender el significado que tienen las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) como vía de acceso a la resolución de los mismos. Para comprender el significado de lo anterior, transcribiremos una pequeña historia presentada en la guía para el maestro de 1er grado.

Un día Susi visito a Roberta, su vecina.
Susi:¡Hola Roberta! ¿Quieres venir conmigo a jugar en mi casa?
Roberta: Me gustaría mucho, pero tengo que hacer mi tarea de matemáticas.
Susi: ¿Qué es lo que tienes que hacer?
Roberta: Tengo que resolver los problemas de sumar y restar
Susi: ¿Problemas de sumar y restar?. Si quieres te ayudo. Así terminas más rápido tu tarea y después nos van a jugar.
Roberta: Bueno
Roberta salió del cuarto y unos momentos después regresó con su cuaderno y algunos útiles escolares
Susi: A ver ¿Cómo dice tu problema
Roberta comenzo a leer el primer problema pero Susi la interrumpió.
Susi: Ah mira, pero si es muy fácil. Solo ve las palabras del problema. Si dice "más" pues todo lo que tienes que hacer es fijarte en los números y hacer una suma, y si dice "quedaron",

entonces haces una resta.

Roberta: ¿Si?

Susi: Si, mira el problema dice "Jorge tiene 4 corcholatas de refresco. Para poder conseguir un album de estampas debe juntar 10 corcholatas. ¿Cuántas corcholatas más necesita juntar Jorge". Aquí tu puedes ver la palabra "más", entonces, cuatro más 10 son 14. Fácil Roberta no estaba muy convencida de que esa era la respuesta correcta ¿Cómo podía Jorge necesitar catorce corcholatas si con 10 podía conseguir su album?

Roberta: ¿Estas segura de que así se pueden resolver todos los problemas?

Susi: Claro! Mira este otro,aqui dicen "quedaron",entonces la respuesta es...10 menos 2...8

El problema decía así: "A María se le perdieron 10 lápices de colores en la escuela. Después sus hermanos se quedaron con dos ¿Cuántos lápices perdió María?

Aunque a Roberta le parecía que la respuesta correcta debía ser doce, no dijo nada y dejo que Susi continuará con los siguientes problemas.

Susi: La respuesta para este que dice "más" es siete porque cinco más dos son siete. Y este otro dice "quedaron" entonces, ocho menos tres...son cinco. ¿Ves que fácil es?

Los dos últimos problemas decían así:

"Luis tiene cinco carritos y Daniel tiene dos carritos. ¿Cuántos carritos más tiene Luis que Daniel?

"A la hora del recreo 5 niños y 3 ninas tuvieron que permanecer en el salón para terminar su trabajo, ¿Cuántos alumnos se quedaron en el salón?

Roberta: Creo que después tendre que leer los problemas para estar segura de que esas son las respuestas correctas.

Susi: Bueno, si tu quieres hacerlo de la manera más tardada. Pero a mi siempre me resulta como yo la hago. Yo siempre saco buenas calificaciones en matemáticas.

Y era cierto, Susi siempre llegaba a la respuesta correcta mediante esta táctica porque los problemas que le aplicaba su maestra eran invariablemente como los siguientes:

Martín tenia 8 canicas, su papa le regaló 3 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Martín?

Perla tenia 9 dulces, se comió 3. ¿Cuántos dulces le quedaron?

Lo que se trata de ejemplificar con esta narración son las prácticas más comunes que siguen los ninos cuando se les presenta un PVAS.

Fijarse en los números, buscar la palabra "clave" en el problema como por ejemplo "más" y "quedaron" puede ser una técnica eficaz para resolverlos "correctamente" sobre todo si son como los que sigue la maestra de Susi.

Lo que se pretende con todo lo anterior es evidenciar por lo menos dos cosas que ocurren muy a menudo al interior del aula en cuanto a la resolución de problemas, y estas son:

A)El establecimiento de patrones únicos de planteamiento y resolución de problemas (problemas tipo) y las prácticas mecánicas que realizan los niños en la resolución de los mismos, dejando de lado el razonamiento que la circunstancia implica.

B)La separación que hacen los niños entre los problemas escolares y aquellos que les ocurren en la vida cotidiana al no contextualizar los primeros en una situación problemática factible a ellos mismos.

Al respecto podemos decir que el resolver un problema no supone solamente aplicar el algoritmo adecuado sino comprender el problema en si (lo que más adelante llamaremos esquema del problema esperado y/o alternativo).

M E T O D O L O G I A

INSTRUMENTOS DE INVESTIGACION DE LOS P V A S

La vertientes metodológicas de análisis que abrimos en la investigación fueron de diverso orden y se llevaron acabo en momentos alternos, pero siempre tratando de incorporar la información y no perder de vista, por una parte el panorama general -marco referencial teórico- y por el otro el objeto de estudio en forma concreta.

Se realizaron visitas de observación no participante a grupos paralelos de 5º grado que tenían en promedio a 20 alumnos en una escuela particular ubicada en Av. JInetes,61 Las Arboledas,Mex.

Se le pidió al docente que abordara cualquier problema de aditividad, y lo que a continuación se describe es una muestra representativa de lo que en términos generales se encontró en dichas visitas.

El maestro escribe el problema en el pizarrón y les indica a los niños que lo anoten en su cuaderno, después lo lee en voz alta:

"De México a Puebla hay 132 Km y de Puebla a Guadalajara 414 Km ¿Qué distancia hay entre México y Guadalajara?

A ver fíjense bien, vamos a analizarlo paso por paso ayudense con dibujitos (Dibuja la maestra en el pizarron)

Mex. 134 Km Puebla 414 Km Guadalajara

Ahora -continúa la maestra- ¿Qué distancia hay entre México y Guadalajara? ¿Qué hacemos?

No me digan ¡Háganlo!

Algunos niños escriben, otros se quedan pensando

-Miss no entiendo ¿Qué es lo que se tiene que hacer?

Yo no sé, tú debes saber

Silencio

La maestra lo observa y dice:

Fíjate bien, repite la ejemplificación pero varia su modulación de voz al decir: ¿Cuántos Km hay de Mexico a Guadalajara? encerrando al mismo tiempo el esquema que ella misma dibujo.

El niño no lo piensa más y resuelve el problema.

Lo anterior nos hace pensar que:

*El docente muy frecuentemente elabora los problemas y deja de lado la participación activa del nino dentro del mismo.

*El docente muy a menudo "explica" los problemas en el pizarrón definiendo en gran medida la estrategia de resolución.

*El alumno no cuestiona las circunstancias que rodean al problema sean estas ajenas o no a él.

*El maestro no posibilita el aprendizaje grupal pues la resolución de los problemas son a nivel individual así como la calificación de los mismos.

*El docente y el alumno establecen un tipo de comunicación no verbal en donde el segundo aprende a conocer al primero para entender que exactamente es lo que le quiere decir y no lo hace abiertamente. Así pues, el alumno establece códigos de comunicación con el docente interpretando el tono de su voz, sus ademanes etc.

El cuestionario a resolver de problemas aditivos se aplicó a dos grupos de 5º grado en la escuela antes mencioanda.

Como se describió en el marco teórico, una causa importante que incide en la correcta resolución de los problemas matemáticos es la cantidad que se le da al nino a resolver en una sola actividad o ejercicio ,pues a menudo los niños resuelven con mayor atención los 3 primeros que los posteriores.Así pues se optó por aplicar un problema por dia ocupando por tanto 7 dias en el instrumento.

Se trabajó cada problema en una hoja tamaño carta con el planteamiento ya impreso a máquina con la única instrucción para los niños que resolverlo no definiendo un tiempo específico.

Es importante también mencionar que a los niños que se les aplicó se encuentran en el 4º mes del primer semestre del ciclo escolar 1994-1995, razón por la cual el análisis que se haga del instrumento y de la investigación misma tenderá a explicar las prácticas que han tenido en anos anteriores y la repercusión que esto trae en su actuación durante el 5º grado.

Por otra parte, podemos decir que el orden en que se presentaron los problemas para su aplicación fue combinando los diferentes tipos que se seleccionaron para el instrumento de investigación, ya que se ha comprobado que si se mantiene un cierto orden en las tipologías existentes (primero estáticos y después dinámicos etc.) se corre el riesgo de que los niños actúen frente a los mismos mecánicamente.

La edad de los niños oscilaba entre los 9 y 10 anos y el sexo se presenta en la siguiente proporcionalidad: 11 ninos y 9 ninas.

El promedio grupal que los niños reportaban en el área de matemáticas durante el 5º grado (en los 4 meses transcurridos) es como sigue:

Septiembre: 8.2

Octubre: 8.5

Noviembre: 9.1

Dic-Ene: 9.2 La calificación de los dos meses se une pues al haber vacaciones en diciembre no se evalúa autonómamente el mes.

Los anteriores promedios aunque no sean específicos en problemas aditivos nos dan de alguna manera pautas a seguir no solo en el rendimiento que los ninos presentan en esta área sino también algunos elementos de análisis sobre las habilidades que el docente va evaluando en el alumno.

Los problemas que se plantean fueron retomados de algunas investigaciones recientes que se han hecho, principalmente de Bermejo y Lago (1990) y de Gerard Verganaud (1991); sin embargo,algunos han sido adapatados al nivel conceptual de los niños de nuestro interes,tomando en cuenta las prácticas que han tenido en anos anteriores y durante el curso actual.Así pues, Se describen los problemas aplicados y la justificación que se hace de los mimos tanto de orden como de contenido.

1.-Enrique acaba de encontrarse N$2.60 los pone en su monedero. En total tiene N$3.90 ¿Cuánto tenía en su monedero antes de encontrarse el dinero?

El esquema del problema es:

A	B		C
?	2.60	=	3.90

Corresponde a los problemas de tipo dinámico, específicamente de los de cambio, los cuales han sido a lo largo de la primaria la tipología más trabajada segun lo reportan los libros de texto y los cuadernos que se han revisado de grados anteriores, esta fue la razón que se tuvo para colocarlos en primer plano dentro de la serie de cuestionarios a aplicar.

Se eligieron con la incógnita en A porque al parecer es el más adecuado en cuanto al grado de dificultad que deben tener en 5º grado, pues el más sencillo es con la incógnita en C (Según el libro del maestro de Primer Grado, 1991) siguiéndole con la incógnita en B y por último con la incógnita en A.

El problema pertenece al test aplicado por Vergnaud en estudios a ninos de 4º grado de primaria (Las matemáticas y la realidad, 1990) quien obtiene resultados que se podrian corroborar o no con nuestra realidad.

2.-El verano pasado salimos de vacaciones mi familia y yo. A la salida de la ciudad el contador kilometrico de coche de mi papá marcaba 63,809, al regresar marcaba 67,351 ¿Cuántos kilómetros viajamos?

El esquema del problema es:

A	B	C
63,809	?	67,351

Pertenece a los problemas de cambio o transformación del tipo dinámico con la incógnita en B.

La estructura del problema se retoma del libro "Las matemáticas y la realidad" de Gerard Vergnaud, adaptándole las cantidades para niños de 5º ano (decenas de millar). Se plantea el problema con el uso del cero intermedio y con resta ya que a menudo los niños practican dicho algoritmo.

Por otra parte se formula dicho problema para detectar si los niños ubican que en una sustracción el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, pues las investigaciones más recientes (Bermejo y Lago, 1991) indican que los alumnos no reparan en este aspecto.

Se eligió con la incógnita en B para tener un panorama general de la resolución de problemas aditivos y para compararlos entre sí.

3.-En 1974 la población de París era de 2 844 000 habitantes, disminuyó 187 000 habitantes en 5 anos ¿Cuántos habitantes había en 1969?

El esquema del problema es:

A	B	C
1969		1974
?	187 000	2 844 000

Este problema representa una dificultad mayor que los anteriores principalmente por dos razones:

a) Es un problema muy poco abordado en la escuela primaria y...

b) Se presenta con espacio-temporalidad inversa. Es decir, se dan la cantidad actual, la magnitud del cambio y el niño tendrá que inferir el estado inicial. Por lo anterior podemos decir que pertenece a los problemas de transformación con incógnita en A.

El planteamiento del problema pertenece al test aplicado por Vergnaud en el libro mencionado anteriormente.

4.-Habían 149 personas en un salón de fiestas, entran 53 ¿Cuántos hay ahora?

El esquema del problema sería:

A	B	C
149	53	?

El problema pertenece a los de combinación del tipo estático con la incógnita en C.

Se espera que este problema sea más sencillo de todo el cuestionario por ser de combinación, estático y con la incógnita en C.

5.-Pablo al inicio del año tenía N$ 53.40, ahora tiene N$ 12.40, ¿Cuánto dinero ha gastado en el transcurso del año?

El esquema del problema es:

A	B	C
53.40	?	12.40

Se eligió este problema para detectar como los niños resuelven esta categoría, aclarando que se manejan cantidades decimales por considerarlas propias dentro de las vivencias diarias de los niños con el sistema monetario, además de ser ya abordadas algorítmicamente en los contenidos escolares. Ahora bien, este problema nos permitirá identificar la relación existente entre los datos del problema y la significación de la sustracción.

6.-Antonio tiene N$ 120.000 a Marcos le dan N$ 47.00 y con esto tiene lo mismo que Antonio. ¿Cuánto dinero tenía Marcos antes de que le dieran el dinero?

El esquema del problema es:

A	B	C
?	47.00	120.00

El problema corresponde al tipo de problemas dinámicos de igualación considerando que es un modelo típico que siguen los niños a lo largo de su vida escolar.

7.-A mí me dan N$ 45.00 de domingo, a mi hermana María le dan N$13.00 más que a mí ¿Cuánto le dan a mi hermana de domingo?

El esquema sería:

A	B	C
45.00	13.00	?

El problema es de comparación de la categoría de los estáticos con la incógnita en C.

Este tipo de problemas se empieza a manejar desde el 2º grado de primaria y es, después de los de combinación los más sencillos.

P R O B L E M A S	F U E N T E
1.Enrique acaba de encontrarse N$2.60, los pone en su monedero En total tiene N$3.90 ¿Cuánto tenía en su monedero antes de encontrarse el dinero?	"Las matemáticas y la realidad" Gerard Vergnaud.
2.El verano pasado salimos de vacaciones mi familia y yo. A la salida de la ciudad el contador km. marcaba 63,809 km. y al regresar marcaba 67 351 ¿Cuántos kilometros viajamos.	"Las matemáticas y la realidad" Gerard Vergnaud.
3.En 1974 la población de París era de 2 844 000 habitantes, disminuyó 187 habitantes en 5 anos.¿Cuántos habitantes había en 1969?	"Las matemáticas y la realidad" Gerard Vergnaud.
4.-Habían 149 personas en un salón de fiestas, entran 53.¿Cuántas personas hay ahora?	"El niño y la Aritmética" Vicente Bermejo.
5.-Pablo al inicio del año tenía N$53.40.Ahora tiene N$12.40 ¿Cuánto ¿Cuánto ha gastado en el transcurso del año?	"El niño y la aritmética" Vicente Bermejo.
6.-Antonio tiene N$120.00, si Marcos le dan N$47.00 tendra lo mismo que Antonio ¿Cuánto dinero tenia Marcos antes de que le dieran los N$ 47.00?.	Adaptación.
7.-A mí me dan N$45.00 de domingo, a mi hermana le dan N$13.00 más que a mi ¿Cuánto le dan a mi hermana de domingo?.	Adaptación.

ANALISIS DE RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS

El análisis que a continuación se presenta de los problemas aplicados se hizo bajo los criterios siguientes:

- Se planteó como esquema esperado las relaciones supuestas que el niño seguiría de acuerdo a su edad y grado de abstracción, a partir de esto se interpretó el esquema que eligió y posteriormente ejecutó.

-Las proporciones de éxito y fracaso en la resolución de problemas se expresaron en fracciones ya que se consideró que era una manera accesible para el manejo de datos en la interpertación de resultados.

PRIMER PROBLEMA

El primer problema presenta un alto indice de éxito en su resolución ya que solamente una décima parten de la población a quien se le aplicó tuvo error en el establecimiento del esquema. Lo anterior corrobora las tesis enunciadas por Olimpia Figueras (1991) cuando dice "...los problemas de cambio han sido la tipología mas trabajada en la escuela primaria".

Por otra parte se manifiesta que los niños se encuentran en el 2º nivel de comprensión en la RPVAS (Ryley y Greeno,1990) ya que establecen las relaciones implícitas en el planteamiento pero aún no son capaces de generar estrategias diversas que les permitan operar con el problema; Ahora bien, el algoritmo que los niños eligieron para resolver el problema fue el sustractivo ya que acomodaron las cantidades de tal forma que la incógnita se ubicara en el elemento C.

ESQUEMA ESPERADO	ESQUEMA UTILIZADO
? + 2.60 = 3.90	3.90 - 2.60 = ?

Observamos aquí una constante que se haría permanente en la resolución de los problemas aplicados y esta es el reacomodo que hace el niño de las cantidades en su interes por colocar a la incógnita en C cuando originalmente se encuentra en el elemento A. Podemos hablar entonces de que los alumnos siguen una estrategia inducida casi general ya practicada anteriormente, pues no logran acceder al 3er nivel en la comprensión de la RPVAS que implicaría la determinación del esquema con la incógnita en A y la generación de estrategias nuevas, diversas y más complejas.

Por último podemos decir que los niños al resolver, se situaron en el carácter unitario de la suma (Resnick y Omanson,1983) pues no lograron concebir a la suma como un medio para completar una información faltante ocurrida en el primer elemento-estado.

SEGUNDO PROBLEMA

Sólo una décima parte de los niños resolvieron con éxito el problema eligiendo no el esquema esperado sino uno alternativo que sitúa a la incógnita en C. Tres cuartas partes de los alumnos optaron también por este esquema pero ejecutaron con error. Pero antes de seguir definamos las características del planteamiento.

El problema presenta la interrogante en el segundo sumando y según Vergnaud (1991) se clasifica con dificultad media, accesible a ninos entre 9 y 10 años de edad; sin embargo, reporta una variante que influye en gran medida el éxito en su resolución ya que presenta una cantidad inicial (63 809) y una cantidad final (67

351) teniéndose que calcular la magnitud de la transformación, como las informaciones se presentan en el orden descrito los ninos codifican el esquema de la siguiente forma:

A) Acomoda la información a manera que la interrogante se sitúe en C y obviamente se resuleve con resta.

B) Al representar las cantidades en resta y transcribir las mismas, respeta el orden que el enunciado tiene pues coloca 63 809 y despues 67 351 dando una ejecucion erronea del esquema al operar sin sentido:

63 809

67 351

Esta última alternativa los clasifica en la concepción unitaria de la suma (Ryley y Greeno,1990) ya que son incapaces de discernir entre las cantidades que son parte (63 809) de las del todo (67 351) e identificar la parte restante.

Lo anterior es con respecto a la elección del esquema que los niños hacen (resta) pero aun asi, encontrando aunque primitivo válido este procedimiento, no lo resuleven con éxito pues reportan el tipo de dificultades mas frecuentes según Brown y Burton (1978),"...el niño sustrae el numero más pequeño del más grande, sin tener en cuenta la distinción del minuendo con el sustraendo".

En capítulos anteriores se habló que la explicación que se haga de los errores que los niños cometen al resolver restas va a depender de la línea de investigación que se este abordando; no obstante, la apreciación que hacen Resnick y Omanson (1986) ubican las causas que posibilitan estos fallos en la resta aludiendo a la carencia de una comprensión cabal de los principios sustractivos básicos: Una cantidad mayor que se ve modificada por la sustracción de una cantidad menor o en términos más técnicos dificultad en la identificación del esquema parte-todo.

TERCER PROBLEMA

Dos quintas partes de los niños que resolvieron este problema lo hicieron con éxito en su resolución aunque no atendiendo al esquema esperado; una quinta parte eligieron también un esquema alternativo pero ejecutaron erroneamente, y las dos quintas partes restantes codificaron con fracaso la información.

Cabe señalar que de los 7 problemas aplicados este era quizá el que representaba mayor grado de dificultad ya que contiene las siguientes características:

*La incógnita se sitúa en el primer sumando y es de tipo dinámico, además de que se plantea con espacio-temporalidad inversa.

*Las cantidades expuestas ascienden a unidades de millar.

No obstante lo anterior, se consideró que la dificultad mayor que tendrían los niños estribaría en el análisis de las informaciones y por consiguiente las cantidades de las mismas en el tiempo en que se sucedieron,ya que como se abordó anteriormente la manera en como se presentan estas juega un papel muy importante en la complejidad de los problemas.

Ahora bien, los niños que tuvieron éxito en la resolución lo hicieron adoptando el esquema de tipo sustractivo, organizando las cantidades a manera de que la incógnita se presente nuevamente en C.

284 400

187 000

Así pues, los que eligieron el esquema correcto pero ejecutaron sin éxito presentaron errores del tipo sintáctico correspondiente a la 2a y 3a categoría (Ver capitulo II pagina 36).

Los niños que equivocaron el esquema lo hicieron al situar la incógnita en C y tratarlo de resolver con suma.

284 400

187 000

La elección de este esquema de resolución denota que no hubo comprensión de las relaciones que se establecen en los datos del problema no logrando determinar el espacio y el tiempo en las informaciones evidenciando fallos en la ubicación del antes y después, parte y todo.

CUARTO PROBLEMA

El 4º problema es considerado el más sencillo en su resolución para que los niños de nuestro interés, pues es de cambio con la incógnita en C y estructurado en suma. Así pues, sólo un niño no logra hacer la representación esquemática adecuada, el resto elige bien el esquema a seguir pero una cuarta parte de estos ejecuta con error el algoritmo, cometiendo fallos del tipo que Kamii(1986) describe como falta de manejo creativo por parte de los ninos de la descomposición de cantidades mayores en menores según las reglas de valor posicional.

Ejemplo:

Habían 149 personas en un salón de fiestas, entran 53.

¿Cuantas son ahora?

Son varios los procedimientos que se podrían seguir, pero uno de los más viables a los niños de nuestro interés sería:

150 personas en un salón (en lugar de 149)

50 cntran (en lugar de 53)

+3 (los faltantes de las personas que entran)

-1 (el excedente de 150)

El redondeo de cantidades y la descomposición de estos en sus partes es una actividad que niños de esta edad podrían efectuar sin grandes dificultades.

Otra forma de redondear las cantidades sería a la centena más próxima:

100 + 50 + 52 =

Baroody y Ginsburg (1986) en algunas investigaciones que realizaron llegaron a la conclusión que los problemas de cambio reflejan la concepción unitaria de la suma (anadir una cantidad inicial a un poseedor) y por esto se espera que este tipo de problemas tenga un éxito mayor.

Con lo anterior podemos señalar que aun en los problemas que son más accesibles a los niños, estos no operan creativamente sobre ellos, es decir, no se generan estrategias diversas más largas o más cortas, más fáciles o difíciles no importa, solo interesa la capacidad que el alumno ejercitaría al buscar el camino que le sea más propio por experiencias anteriores, y que no solo se límite a seguir un procedimiento o una serie de reglas para sumar o para restar,porque como ya se ha visto si no existe un verdadero proceso constructivo del por qué y para que esas normas, se violan fácilmente y a menudo sin percatarse de ello.

Observamos también que el número de palabras que se utilizan en la redacción del problema lo hacen un planteamiento sencillo, y que las informaciones han sido ordenadas sucesivamente como ocurrieron en la realidad hipotética, siendo entonces menores las posibilidades de error en la representación del esquema esperado.

Cabe señalar que solo fue un niño que no eligió el esquema esperado, reportando la tipología de errores de selección de una operación inapropiada.

QUINTO PROBLEMA

Este problema se caracteriza por tener la incógnita en el segundo sumando y resolverse con resta.

El tipo de planteamiento es de cambio en donde el niño tiene la tarea de calcular la magnitud de la transformación que han sufrido las cantidades que componen el problema.

Los niveles de resolución con éxito disminuyeron con respecto al anterior porque la dificultad aumento: "Los problemas con la incognita en C son significativamente más sencillos que los que se situan en el 2º sumando, alcanzando el nivel más alto de complejidad aquellos que lo tienen en el primero". (Bermejo Vicente,1991).

Así pues, las tres quintas partes de los ninos eligen y ejecutan con éxito el esquema; una quinta parte no logra realizar la representación adecuada y la parte restante tuvo problemas para establecer la comparación entre el estado inicial 53.40 y el estado final 12.40.

Los niños que tienen éxito en la resolución mantienen la constante ya observada en los problemas anteriores donde la incognita se situa en uno de los sumandos:Cambiar la incógnita a C.

ESQUEMA ESPERADO	ESQUEMA UTILIZADO
53.40 - ? = 12.40	53.40 - 12.40 = ?

Lo importante de esta actividad no es, como podría pensarse, la de validar o no un determinado esquema, aunque sí podríamos calificar de más primitivo el 2º que el primero. Pero más allá de esto, es importante tomar en cuenta la uniformidad con la que los niños codifican este tipo de problemas, pues todo lo hacen de una misma forma poniendo en duda la comprensión o el manejo cabal que tienen de la sustracción, pues los alumnos no encuentran la manera de ubicar al sustraendo si ya existe el minuendo y la diferencia.

Lo anterior nos remitiría a indagar de manera exhaustiva la enseñanza de la sustracción en los grados anteriores, las experiencias que los niños llevan a cabo y en definitiva los problemas con los que han trabajado y las explicaciones que el docente daría al respecto.

SEXTO PROBLEMA

El problema número 6 es de igualación con dos esquemas opcionales de suma y resta, siendo el mejor estructurado semánticamente hablando el resuelto con suma. No obstante, la resolución en resta posibilita -como ya se ha visto- que los niños ocupen este algoritmo como una forma más sencilla de encontrar un dato faltante.

Así pues, tres quintas partes de los niños resuelven con exito eligiendo el esquema de tipo sustractivo y por tanto situando nuevamente la incógnita en C; una quinta parte de los niños aplicaron suma pero confundiendo el esquema, ya que no igualaron una cantidad con respecto a la otra sino que la combinaron.

Ejemplifiquemos esta representación para que se clarifiquen los datos:

ESQUEMA ESPERADO	ESQUEMA ALTERNATIVO RESTA	ESQUEMA UTILIZADO SUMA
? + 47 = 120	120 - 47 = 47	120 + 47 = ?

Podemos observar que nuevamente la incógnita en el primer sumando representa mayor dificultad, pues los niños tienden a ubicarla en el tercer elemento.

La quinta parte restante equivoca el esquema y por ende ejecuta con error al utilizar la multiplicación, lo que nos da a pensar una falta de comprensión en las relaciones planteadas en el problema o una ausencia de algún esquema en la cognicion del nino.

Los problemas de igualación tienen la peculiaridad de ser un tanto más complejos que las demás categorías ya que las relaciones establecidas con los datos del problema (semántica) se entablan en situaciones más elaboradas. Esto se dejo sentir en los índices de éxito en la resolución, ya que disminuyeron con respecto a los de combinación o de cambio.

La relación se considera ternaria al presentarse:

TRANSFORMACION-ELEMENTO-RELACION-ELEMENTO

Con lo anterior se maneja una nueva característica aunque siempre accesible al nivel conceptual que los niños de 5º grado tienen.

Es importante mencionar que los problemas de igualación son muy poco abordados en la escuela primaria (Bermejo Vicente,1991) y que el mayor peso del éxito en su resolución estriba en la comprensión existente de las relaciones que hay entre los datos.

SEPTIMO PROBLEMA

El problema manifiesta una cualidad muy importante dentro de la RPVAS ya que establece las cantidades relacionales más no asignadas, y esto sin duda alguna reporta un nivel de comprensión semántica diferente.

La resolución del problema es con suma, ubicando a la incógnita en C logrando tener a las tres cuartas partes de los niños con exito en esquema y aplicación del algoritmo, y la cuarta parte restante equivoca la representación al decidir que la cantidad relacional (N$13 mas) es el resultado.

El reporte anterior nos da a pensar que la mayoría de los niños que confundieron la condición del problema y no efectuaron operación muestran fallos en establecer un sistema relacional entre las cantidades del problema. Esta información cumple con el principal riesgo que teóricamente segun Lindvall e Ibarra (1986) se corre al abordar este tipo de planteamientos.

PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCION

1. A B C ? + 2.60 =3.90	El niño esta interpretando las relaciones semánticas en el problema de manera adecuada ya que ubica que el estado inicial es el que se encuentra en incógnita, y que el encuentro de este dato nos remitirá a la solución del problema
2. A B C 63809+ ? =67351	Aquí se da la cantidad inicial y final teniéndose que indagar la magnitud de la transformación expresada mediante una suma.También podría presentarse el problema con sustracción cambiando el orden de los datos,sin embargo,el esquema más apropiado de acuerdo a la semántica utilizada es el aditivo.
3. A B C 2844 -187 = ?	La elaboración del esquema en resta supone que el niño interpretó el problema en correspondencia al orden en que se le presentaron las informaciones en la redacción del planteamiento.Así pues no reconoció que se trataba de temporalidad inversa.

3. A B C ? + 187 =2844	Este esquema es el apropiado para nuestro problema y es el resultado del análisis de las informaciones presentadas razón por la cual su grado de dificultad es mayor ya que pone de maniefiesto habilidades de espacio y tiempo.
4. A B C 149 + 53 = ?	Se interpreta este esquema como de los más sencillos pretendiendo que para los niños con los que se trabajó no les sea difícil de identificar.Se trata pues de un estado inicial que sufre un incremento originando una cantidad mayor.
5. A B C 53.40- ? = 12.40	Sin mayor dificultad se habla de una cantidad inicial que sufre un decremento para dar origen a una cantidad menor.Por obviedad la representación se da en resta.
6. A B C 120 - 47 =12.40	El esquema representa las cantidades conforme fueron apareciendo en el problema,no obstante el razonamiento aunque un tanto primitivo es correcto,pues el niño establece lo que tiene Antonio,después lo que le dan a Marcos,para finalemente deducir lo que tenía antes de la transformación que sufrió.

6. A B C ? + 47 = 120	El niño acomoda las informaciones como sucedieron en la hipotética realidad y por tanto su razonamiento además de correcto es más lógico que el anterior.
7. A B C 45 + 13 = ?	Esta representación establece cantidades relacionales mas no asignadas y el niño debe identificar mentalmente tales correspondencias.

R E S U L T A D O S

P R O B L E M A S	UTILIZO EL ESQUEMA ESPERADO	UTILIZO OTRO ESQUEMA ADECUADAMENTE	REPRESENTARON CON ERROR EL ESQUEMA.
1.Enrique acaba de encontrarse N$2.60 los pone en su monedero,en total tiene N$3.90 ¿Cuánto dinero tenía antes de encontrarse el dinero?	A B C ? + 2.60=3.90 Ningún nino utilizó esta representación	A B C 3.90-2.60= ? 9/10 partes de los ninos usaron esta representa--ción.	A B C 3.90+2.60=? 1/10 parte representó de esta manera.
2.El verano pasado salimos de vacaciones mi familia y yo. A la salida el contador km. marcaba 63809, al regresar marcaba 67351 km.¿Cuántos km. viajamos?	A B C 63809+? =67351 Ningún nino utiliza este esquema.	A B C 67351-63809=? 1/10 parte de los ninos usaron esta representa - ción.	A B C 63809-67351=? 3/4 partes codofica de esta manera.
3.En 1974 la poblacion de Paris era de 2844000 hab. disminuyó 18700 hab. en 5 anos ¿Cuántos hab.había en 1969?	A B C ? +187000=2844 Ningún nino utilizó este esquema.	A B C 2844-1870 = ? 3/5 partes de los niños utilizaron esta representa - ción.	A B C 2844+1870=? 2/5 partes codificaron de esta manera.
4.Habían 149 personas en un salon de fiestas, entran 53 ¿Cuántas hay ahora.	A B C 149 + 53 = ? 39 de 40 niños eligen este esquema.	No se presentó ningún esquema alternativo.	A B C 149- 53 = ?
5.Pablo al inicio del año, tenía N$53.40, ahora tiene N$12.40 ¿Cuánto ha gastado?.	A B C 53.40- ? =1240 Ningún niño utiliza este esquema.	A B C 53.40-12.40=? 3/5 partes utilizan esta representa -- ción.	A B C 12.4+53.4=? 2/5 partes lo codifican asi.

6.Antonio tiene N$12.00, si a Marcos le dan N$47.00 tendrá lo mismo que Antonio ¿Cuánto tenía Marcos antes de que le dieran el dinero?	A B C ? + 47.00= 120 Ningún nino utilizó esta representación.	A B C 120 -47 = ? 3/5 partes utilizan esta representa -- ción.	A B C 120+47 = ? 120X47 = ? 1/5 parte de los niños eligen cada esquema.
7.A mí me dan N$45.00 de domingo, a mi hermana le dan N$13.00 más que a mi ¿Cuánto le dan a mi hermana?	A B C 45 + 13 = ? 3/4 partes de los ninos usan este esquema.	No se presentó ningún esquema alternativo.	A B C 45 + 0 = 13 1/4 partes elige este esquema.

PROBLEMAS RESUELTOS POR LOS NINOS EN EL GRADO ANTECEDENTE

Lo que a continuación se describe es una recopilación de los problemas que los niños de nuestro interés (5º grado) desarrollaron en su cuaderno de matemáticas en el año inmediato anterior, esto con el fin de tener en cuenta la experiencia antecedente más cercana y lograr una perspectiva más de análisis para explicar la RPVAS. La población es la que anteriormente describimos en la aplicación del cuestionario.

Cabe señalar al respecto que los niños resolvieron dichos problemas a lo largo de todo el ciclo escolar y fue su maestra quien se los proporcionó y calificó.

1.-Andrés se ayuda en sus gastos distribuyendo periódicos en su bicicleta.

En su colonia distribuye 24, en la que queda al norte 26 y en la que esta al sur 38. ¿Cuántos periodicos distribuye en total?

2.-Cuca fue a la tienda y compró N$15 de mantequilla, N$18 de azúcar N$15 de frutas en conserva. ¿Cuánto gasto por todo?

3.-El tío de Pablo compró un juego de sala nuevo. Si le reciben su juego usado en N$1380 y paga ademas N$5120. ¿En cuánto le dan el nuevo juego?

4.-La unión de ejidatarios de San Sebastián concedió 4 camiones de maíz a su distribuidora. El primer camión llevo 4 750 Kg. el segundo 5 032 Kg. y el tercero 4 908 Kg. y el cuarto 3 280 Kg.¿Cuántos Kg. de maiz remitieron en total?

Estos fueron todos los problemas de aditividad resueltos por los niños cuando iban en 4º grado. En lo que respecta a la multiplicación y división diremos que fueron 6 en total lo que suman en general un total de 10 problemas resueltos en el cuaderno a lo largo de todo el año.

Es importante mencionar que los problemas se abrodaron después de cada tema visto; es decir, después de trabajar el algoritmo de la suma y sus propiedades se resolvieron los planteamientos, asimismo los de multiplicación y división.

En cuanto al primer problema podemos decir que se esta partiendo de una situación muy poco común para los ninos a quienes se les esta aplicando. "un niño que vende periódicos" cuando la institución es privada y nadie se dedica a esta actividad. Sin embargo, esto no representa un gran obstáculo para su resolución pues el esquema del problema es muy sencillo.

$$A + B + C + D = E$$

Es del tipo de problemas de combinación de varios elementos que intenta saber el total. La relación semántica es sumamente sencilla para los niños de este grado escolar, pues se establece estaticidad en las relaciones y la clasica utilización de la suma.

El segundo problema pertenece a la misma familia de problemas que el anterior pero con diferentes elementos (frutas que se compran).

El tercer prblema es del tipo de combinación nuevamente pero mantiene otro tipo de relación entre sus elementos A + B = ? pero A no esta muy bien definido, pues el enfoque mismo que se le da al problema es un tanto difícil para la comprensión de los niños pues se dan por hecho ciertas cosas que no se tiene la certeza que el niño las sepa. Por ejemplo: que un juego de sala usado se de "a cuenta" del precio total de la sala o menos aún que los niños comprendan cabalmente que un juego de sala y una sala es lo mismo. Todas estas consideraciones son dignas de tomarse en cuenta al analizar la resolución de problemas pues definen en gran medida el éxito o el fracaso en su ejecución.

El cuarto problema es del mismo tipo que los anteriores (estático y de combinación) con la única observación que maneja palabras que podrían causar confusión o duda en los ninos como "ejidatarios" "remitieron" o por otra parte ¿dónde esta San Sebastian?

Lo anterior nos da a pensar a la RPVAS desde la óptica de cómo el docente lo concibe, pues esto es en definitiva, lo que percibe el niño.

Los puntos de análisis son los siguientes:

1.-Los problemas se resuelven como un pequeño apartado más o una actividad complementaria dentro de las operaciones básicas.

En la revisión que se hizo de los cuadernos de 4º grado se observó que el docente trabajo después de:

a)Haber escrito un pequeño resumen o

b)Haber practicado el algoritmo en sus diversas expresiones (horizontal y verticalmente, con punto decimal, cero intermedio etc.)

2.-Los problemas no se conciben como un instrumento que le permita al niño razonar sobre una situación determinada y así, ir construyendo la significatividad que tiene la adición en la vida diaria.

3.-Los problemas que aborda el docente son los llamados "problemas tipo", como los de la maestra Susi (Ver página 64), esto sin duda encuadra al niño en una lógica meramente mecanica que como ya dijimos limita con mucho su desarrollo en la construcción de conceptos matemáticos.

Por otra parte, es importante senalar que los niños aprenden que un prblema es algo que se tiene que ejecutar y no pensar, pues al situárselos despues de haber visto la suma deducen casi sin complicaciones que esta es la operación indicada para su resolución.

En diversas ocasiones como docente me ha pasado algo similar; recuerdo que un día abordamos el tema de razones y proporciones cuando al concluir la actividad decidi trabajar problemas de aditividad,mi sorpresa fue mayor al descubrir que un porcentaje elevado de los niños lo estaban representando en terminos de proporcionalidad. Esto sin duda me dio elementos de juicio en cuanto a la actitud ya aprendida de los niños con respecto a la resolución de problemas.

C O N C L U S I O N E S

Tratando de caracterizar las dificultades que los niños tienen en la RPVAS se ha ido de alguna manera identificando procesos, circunstancias y por que no, momentos que se atraviesan dentro de esta temática así como clasificando los diferentes modelos que hay de los problemas y sus diversos esquemas de representación. Dentro de esta tónica se plantearon principalmente relaciones binarias y ternarias las cuales dependen del número de elementos que las conforman, reconociendo la validez de estas solo en cuanto a las relaciones que mantienen en juego. Es decir:

1er Modelo. Ley de la Composición BInaria

4 + 3 = 7 Se componen 2 elementos para dar lugar a un 3º

2º Modelo. Elemento-Relación-Elemento.

Tengo 4 caramelos, si voy a comprar 3 ¿Cuántos tendré? 2 elementos estan ligados por una relación, ella misma considerada como un elemento.

Esta primera identificación de modelos nos permite comprender la clasificación estática y dinámica que retomamos de los problemas. Así pues, asentamos que un problema es: cualquier planteamiento verbal que pueda resolverse con una operación matemática, y el estudio de estos a nivel semántico define las relaciones que establece el niño con los datos del problema y su representación mediante el algoritmo que el eliga.

Enrique acaba de encontrarse $2.60,los pone en su monedero. En total tiene $3.90 ¿Cuánto tenía en su monedero antes de encontrarse el dinero?

El esquema semánticamente esperado es:

$$2.60 + ? = 3.90$$

A continuación se presenta el esquema que en su mayoría representaron los niños, la cual consistio en ubicar una cantidad final a la que le sustrae una cantidad inicial, que dará como resultado la incógnita:

$$3.90 - 2.60 = ?$$

Este esquema que elige el nino y la explicación que teóricamente se hizo de ella es lo que permitió el análisis en la RPVAS.

Se clasifican los problemas en cuanto a su estaticidad y a su capacidad de cambio, iendo los de comparación y combinación los del tipo estático y los de cambio e igualación aquellos que poseen una relación dinámica (Ver pag.19)

Se identifican como factores que condicionan la complejidad de los problemas los siguientes:

-El lugar donde se sitúa la incógnita, precisando que cuando se sitúa en el tercer elemento o "C" es la posibilidad más sencilla, aumentando al contenerse en el segundo elemento y alcanzando su mayor grado de dificultad cuando se encuentran en el primer elemento.

-El contexto del problema es fundamental para el éxito en la RPVAS entendiendo como contexto la vinculación que debe tener el planteamiento con los elementos cotidianos y concretos del niño.

-El tamaño del cálculo numérico que se pone en juego debe ser adecuado al nivel conceptual del niño y a las prácticas anteriores que este haya tenido.

-La manera en como se presentan las informaciones:

a) Espacio-temporalidad directa (En el orden en que sucedieron los acontecimientos).

b) Espacio-temporalidad inversa.(Primero se narra lo que sucedió al final para después calcular la situacion inicial).

c) Con la presencia de datos inútiles o faltantes.

También se abordaron 3 niveles de comprensión en la RPVAS, siguiendo la linea de Ryley y Greeno (1990) acotamos que los procesos que sigue el niño son:

Primer Nivel. El esquema del problema:La aplicación correcta de este aspecto tiene que ver con la disponibilidad de la memoria de representaciones conceptuales correspondientes a los problemas planteados. Es decir, cuando el niño tiene disponible en su memoria un esquema apropiado puede hacer corresponder la información del problema con dicho esquema, asignando correctamente las cantidades específicas. Por lo tanto las dificultades en ejecutar un tipo determinado de problema se dan bien a que el nino posee un esquema del problema incompleto o bien, a la presencia de obstáculos en el momento de llevar a cabo la correspondencia mencionada.

Segundo Nivel. Los esquemas de acción: Esto se relaciona a la representación de la situación de un problema con sus procedimientos de resolución. Es decir, la operación derivada del esquema representado.

Tercer Nivel. Estrategias de Resolución: Se refiere al conocimiento que el niño tiene de estrategias diversas de resolución sea cual fuere el esquema. Ahora bien, la estructura conceptual que el niño requiere para el esquema oportuno esta condicionado al grado o

periodo que ha desarrollado en la RPVAS, los cuales se determinan:
1.Los niños estan limitados, en esta etapa, a resolver problemas usando objetos físicos y donde la informacion aparece de manera secuencial o como fueron sucediendo en la realidad hipotética.
2.En esta segunda etapa se contemplan esquemas más complejos que permiten al niño darse cuenta que los objetos tienen un doble papel ya que, estan incluídos en el conjunto principal como en uno de los subconjuntos.
Ejemplo:

Mario tiene 14 canicas,de las cuales 8 son amarillas y el resto verdes.¿Cuántas canicas verdes tiene Mario?

3.Esta etapa incluye el esquema parte-todo para representar las relaciones entre todos los elementos del problema, previa resolución del mismo.
El niño utiliza cualquier estrategia incluída la memorística y la basada en reglas.
Basta decir al respecto que los niños de nuestro interés pertenecen por su edad y grado escolar a esta última etapa.
Como último comentario en este sentido,podemos considerar como idóneo el paso progresivo de un nivel a otro validando su igual importancia, y no, como más adelante puntualizaremos darle mayor peso a la ejecución del algoritmo que a la estructura del esquema.
En cuanto a los errores principales que cometen los niños en la RPVAS podemos identificar los sintácticos y los semánticos. Siendo los primeros aquellos que se refieren a reglas que dirigen la actuación del niño (iniciar la suma por la columna adecuada,

descomponer la cantidad en decenas,centenas etc.) y los segundos eluden a los conceptos básicos implicados en la selección del algoritmo a utilizar (suma,resta etc.)

Otros factores que intervienen en la RPVAS son los que denominamos internos y externos; considerando como internos aquellos que tienen que ver con las concepciones que tiene el maestro de aspectos como el aprendizaje, la enseñanza, las matemáticas y por que no los problemas mismos, siendo entonces los externos aquellos de tipo curricular, institucional y de padres de familia. Mezclando los dos tipos de factores vislumbramos algunos aspectos sobre la práctica que vive el niño con la resolución de problemas.

De lo anterior podemos decir que:

A)Un problema para un niño es algo que debe tener una respuesta y para encontrarla hay que hacer una operación utilizando los números del enunciado. Por lo tanto, los alumnos solo centran su atención en la operación que deben hacer y dejan de lado a menudo la reflexión del problema.

B) La enseñanza institucionalizada deja constantemente al margen los conocimientos que adquiere y ejercita el niño fuera de la escuela para enfocarse solo en la mecanización del algoritmo.

Así pues, un problema cobra significatividad sólo en la medida en que el niño logra dar una respuesta exacta, no logrando insertar la comprensión de conceptos fundamentales de suma y resta que se estan manejando dentro del planteamiento.

En cuanto al desarrollo de la capacidad de sumar podemos decir que es un proceso gradual que conlleva situaciones cada vez mas elaboradas aunadas a una flexibilidad mayor de estrategias que el nino debe ir adquiriendo. De aquí que se identifiquen 3 periodos en el desarrollo: el primero abarca la etapa del preescolar, el segundo constituye el periodo primario inicial y el tercero el primario tardio.

El periodo preescolar se caracteriza porque el número es la base del conteo, la comparación de cantidades y la secuencia numérica mental.

El periodo primario tiene como tarea identificar la interpretación de los niños en terminos parte-todo, ya que este esquema especifica que cualquier cantidad (el todo) puede ser dividida (las partes) siempre y cuando la suma de las partes sea igual al todo.

En el periodo primario tardio, se produce el aprendizaje de tipo decimal como consecuencia de la elaboracion sucesiva del esquema parte-todo.

Consideramos también la concepción unitaria y binaria de la suma, donde la primera la entiende como un cambio de estado en el sentido de que un conjunto inicial se hace mayor 3 + 2 = 5, no reconociendo a 2 + 3 = 5 un proceso de iguales características como lo hace la concepción binaria.

Así pues, por un lado tenemos que los problemas de cambio reflejan una concepción unitaria de la suma, mientras que los de combinación una de orden binario. Por ello se ha encontrado que el éxito en los niños pequeños sea mayor en los problemas de cambio.

En cuanto a la actividad creativa que el niño tendría que ejercitar quedaría enfocada a la construcción de operaciones relacionales que le sean mas propias, lo que posibilitará más adelante al dominio de una red de relaciones progresivamente más amplia y coherente, pues al operar:

$$28 + 17$$

Puede el realizar diversas estrategias o agrupamientos diferentes a los clásicos: 7 + 8 = 15 "llevamos 1"; 2 + 1 = 3 más 1 que llevamos 4 que da un total de 45, sino por el contrario manipula a su conveniencia agrupamientos como:

30 + 17 - 2 (los 2 agregados al 28) = 45

30 + 15 = 45 (los 2 del 17,se le transfieren al 28)

30 + 20 = 50 - 5 = 45 (-5 es la conjunción de 2 y 3 aumentados respectivamente a las cantidades).

Con lo anterior no sólo se esta ejercitando el cálculo numérico sino también el valor posicional de un número dentro de una cantidad determinada.

Por otra parte -pero en este mismo sentido- la resta encuentra sus principios básicos de resolución en 4 puntos vitales correlacionados a la suma.

1.-La composición aditiva de las cantidades.

2.-Los valores convencionales de la notación decimal.

3.-La realización de los cálculos con las partes.

4.-La recomposición y conservación de la cantidad del minuendo.

La primera obedece a la simple composición de los números, pues 10 es el resultado de combinar 5 + 5, 7 + 3, 8 + 2, 4 + 6 etc.

El 2º principio es consecuencia del anterior y establece que el valor del número depende de la posición que este tomando en la cantidad:

53 y 528 el 5 de la primera cifra equivale a 50 unidades, pero el de la segunda a 500 unidades.

El tercer principio supone -como el primero- que todas las cantidades estan formadas por otras más pequeñas y por tanto factibles de descomponerse en decenas, centenas etc.

8 6 9	8 0 0	6 0	9
4 2 5	4 0 0	2 0	5

Con lo anterior se pretende caracterizar algunos elementos importantes que inciden en la correcta resolución del algoritmo sustractivo.

Por otra parte el aprendizaje de la resta tiene que ver con el razonamiento lógico que tiene el niño de acuerdo a su nivel evolutivo. Así pues, para comprender dicha operación se deben tener en cuenta los siguientes principios:

A) Conservación del numero en el niño.

B) Relación parte-todo.

C) Pensamiento transitivo.

Piaget y Szeminska (1941) indagaron que estos factores influían directamente en el aprendizaje de la resta.

También concluímos que cuando el niño ejecuta con error dicho algoritmo presenta fallas en algunos de los principios arriba mencionados y el análisis que se haga de ellos va a permitir explicar el error existente dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.

Las tesis concluyentes en cuanto a la suma y a la resta se enfocan a continuación:

- La significación de la suma y de la resta es muy reducida, pues niños de 10 anos la conciben como una mera forma de juntar o quitar elementos de un conjunto a otro y esta concepción corresponde más bien a niños de 7 u 8 años (Ver concepción unitaria y binaria de la suma, página 50).
- Al no construir los niños las redes relacionales de diversos problemas caen en errores cuando el planteamiento convencional de la suma y de la resta es modificado por alternativas varias. De aquí que las redes relacionales que podría elaborar el niño se ven obstaculizadas por procedimientos rígidos redundantemente trabajados que dan como consecuencia una estaticidad en las estrategias de resolución.

En este sentido, las líneas de trabajo que se proponen dentro de la RP van encaminadas hacia:

A) La indagación exhaustiva del tipo de prácticas que los niños han tenido a lo largo de la vida escolar incorporando no solo la labor docente sino también los libros de texto y los exámenes como la unica forma de evaluación y validación del conocimiento.

En cuanto a los docentes podemos decir que no se duda que en algún momento de su vida académica o laboral hayan tenido antecedentes sobre la manera de abordar los problemas matemáticos, lo que si podemos cuestionar es su verdadero convencimiento sobre la construcción propia de conceptos matemáticos que tiene que ir haciendo el niño a partir de la RP.

Al observar los problemas que se abordaron en el 4º grado de primaria por los alumnos que hoy estudiamos y el trabajo que realizan los niños en esta área podemos inferir que:

* El docente no le da importancia a la RPVAS pues los ubica como ejercicios complementarios a un tema dado, los concibe como un medio que posibilite la generación de conocimientos nuevos y/o estrategias de resolución más significativas para el niño.

* El maestro parte -en el mejor de los casos- de "experiencias" factibles a los niños en el presente o en un futuro, esto se hace con la intención de relacionar los conocimientos escolares con los de la vida cotidiana; sin embargo, esta táctica a menudo se lleva a cabo para validar la enseñanza de los problemas y no para reflexionar sobre los diferentes tipos de situaciones problemáticas que existen.

* El alumno se acostumbra a dar respuestas automáticas (no razonadas) a pistas proporcionadas por el problema o por el propio maestro.

* El maestro no toma en cuenta el nivel de comprensión linguística que los niños poseen para interpretar la información matemática, menos aún pueden expresar una relación gramatical en información matemática y viceversa.

* La RPVAS no se concibe como un medio que puede tener el alumno de evaluación empírica de los conocimientos que ya posee y de comprobación de nuevos conocimientos.

* El docente no tiene claro el objetivo o propósito que persigue al abordar un problema, sólo los trata como una habilidad más a ejercitar dentro de los contenidos matemáticos.

* Generalmente se trabajan los denominados "problemas tipo" o modelos establecidos de resolución. Esto en si mismo trae un encuadramiento no solo al resolverlo sino en la construcción del concepto aditivo como instrumento de operacionalización de diversos problemas.

* Cuando se aborda un problema se queda en la especificidad del contenido no se le contextualiza con otros contenidos temáticos de esa u otra área del conocimiento. Los niños por tanto no aprenden a matematizar su vida cotidiana, se establece una linea divisoria entre el niño y la escuela.

* El docente se centra en la ejecución del problema y lo único que verifica es el resultado, no atiende el proceso de comprensión relacional que sigue el niño y esto le impide detectar problemas en la construcción de conceptos matemáticos fundamentales.

* El alumno se preocupa más por dar la respuesta acertada en el menor tiempo posible que el tratar de elaborar estrategias nuevas para su conveniencia en la RP.

* La relación que se establece entre el niño, el maestro y el problema define -como ya se ha mencionado- en gran medida el tipo de práctica que se lleva al interior del aula. Es decir, el papel que asume el docente, las funciones que ejerce, lo que hace y lo que dice cuando el alumno pregunta, o cuando observa que algunos no han comprendido el camino a seguir para la resolución. En este sentido, podemos decir que el nino "aprende" a conocer a su maestro, a tratar de entender lo que este le quiere decir y no se lo dice; para el es más sencillo ejercitar esta habilidad que el

razonar los planteamientos. Como consecuencia de lo anterior el niño aprende a manejar contenidos y no a comprenderlos.

* A nuestro parecer las situaciones problemáticas, su conceptualización fines y funciones dentro del aprendizaje de las matemáticas es uno de los planteamientos mejor articulados en la RPVAS dentro del plan de estudios vigente. Sin embargo, a menudo el docente no esta preparado para llevar a cabo esta tarea pues cae constantemente de forma consciente o inconsciente en prácticas muy específicas, como dirigir rígidamente el aprendizaje o dar las pautas de resolución impidiendo la generación de estrategias propias del niño.

Específicamente en cuanto al docente se proponen líneas de trabajo que se den a la tarea de indagar sobre el sistema de creencias que este tiene con respecto a los problemas, las cuales se orientarían hacia la explicación de preguntas como: ¿Qué es para él resolver un problema matemático? ¿Para qué sirve la suma y la resta? ¿Qué habilidades se tienen que desarrollar en los niños dentro del aprendizaje de las matemáticas? ¿Existe alguna relación entre los problemas abordados en la escuela y los que enfrenta el niño en su vida cotidiana?.

Por último podríamos decir que las matemáticas no deben ser vistas como algo estático y rígido sino como un producto abstracto de situaciones reales que se pueden entender al menos de más de una forma. El alumno las debe concebir como algo en movimiento y factible de ser modificable, debe actuar frente a ellos dinámicamente generando nuevas estrategias de comprensión, planteamiento y resolución para que las acciones que ejecute las haga realmente consciente del por que y para que las esta haciendo. La comprensión cabal de los supuestos matemáticos básicos no sólo posibilitará al niño a encontrar el sentido que guarda esta área del conocimiento en la vida cotidiana como una herramienta para la explicación del mundo actual; sino mas aún le daría al mismo una visión matricial para el análisis de situaciones diversas en donde ponga en juego aspectos tales como: flexibilidad, reversibilidad, análisis deductivos, inductivos, etc.

B I B L I O G R A F I A

ALVAREZ, Ma. del Carmen; BALBUENA, Hugo. Toda la escuela resuelve problemas. Boletín informativo num.4.DIE-CINESTAV- IPN, 1984.

ARMENTA M. Los niños de edad preescolar inventan y resuelven problemas de suma y resta. Tesis para obtener la Lic. en Educ.preescolar en la escuela Normal de Ecatepec, Edo.Mex.1980.

ARTIGUE, Michelle.Modelización y reproductibilidad en la enseñanza de las matemáticas. Cuaderno de didáctica de las matemáticas num.8, IREM de Paris VII, 1984.

BAROODY,J.,El pensamiento matemático en los niños, Visor, Madrid, 1988.

BERMEJO, Vicente, El niño y la aritmética, Paidós,Educador, Barcelona, 1990.

BROUSSEAU Guy, Proceso de matematizacion, IREM de Bordeaux, Francia, 1972.

CARPENTER, T. y J. MOSER. El desarrollo de las habilidades para resolver problemas de adición y sustracción en: Addition and substraction: A cognitive perspective,pp. 9-24. Lawrence Eribaum Associates; Hillsdale, N.J. 1982 (Traducción al español: Arana, A.Rios, R. y Torrero, M.

CASTRO E. y C. RICCO. Números y Operaciones:Fundamentos para una aritmética escolar.

DE CORTE, E. y L. VERSCHAFFEL. Los efectos de la estructura semánticas en las estrategias empleadas para resolver problemas verbales de adición y sustracción, en journal for reserch in mathematics education,1987 Vol.18, Num. 5 363-381 (Traduccion al espanol Rios R. y Arana A.)

FUENLABRADA, Irma; DAVILA, Martha; ESPINOSA, Cristina. Sistemas de Numeración Cuadernos de educacion, Num.1 DIE-CINESTAV, IPN, 1986.

GUINET, Raymond. Historia de las técnicas Operatorias, Revista Grant, Num.14 Francia, 1978.

KAMII, C. Juegos colectivos en la primera enseñanza Visor, Madrid, 1988.

LOVELL, K. Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños, Morata, Madrid, 1977.

RYLEY M, Desarrollo de las habilidades de los niños para la resolución de problemas aritméticos, en Ginsburg H. The development of mathematical thinking, Academic Press, New York, 1983.

VERGNAUD, G. El niño, las matematicas y la realidad, Mexico, Trillas, 1991. SEP, Libro para el maestro, Primer grado. México, 1980.

SEP, Estrategias pedagógicas para los niños de primaria con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Fascículo 2: Problemas y operaciones de suma y resta. Dirección General de Educación Especial, Mex. 1988.

SEP, Actividades de matemáticas en el nivel preescolar. Dirección General de Educación Preescolar, México, 1991.