00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍAS DE TORSIÓN EN SUBCATEGORÍAS CERRADAS DE *R-MOD*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :

SAÚL DÍAZ ALVARADO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ RÍOS MONTES

MÉXICO, D. F. FEBRERO, 2005

M341560

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

OFICIO FCIE/DEP/0629/04

ASUNTO: Asignación de Sinodales

DR. JOSÉ RÍOS MONTES
P r e s e n t e.

Por este conducto me permito comunicarle como Director(a) de Tesis del(a) **MAT. SAÚL DÍAZ ALVARADO**, quién desarrolló el Trabajo de Tesis titulado: **"Teorías de Torsión en Subcategorías Cerradas de R-Mod"** que el Comité Académico del Posgrado de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada, designó a los siguientes sinodales para dictaminar si el trabajo que ha desarrollado como tesis el(a) alumno(a) antes mencionado tiene los méritos para obtener el grado de **MAESTRO(A) EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS):**

PRESIDENTE	DR.	FRANCISCO FEDERICO RAGGI CÁRDENAS
PRIMER VOCAL	DR.	JOSÉ RÍOS MONTES
SEGUNDO VOCAL	DR.	HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
TERCER VOCAL	DR.	JAIME CASTRO PÉREZ
SECRETARIO	DR.	CARLOS SIGNORET POILLON
SUPLENTE	DR.	ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA
SUPLENTE	DRA.	MARÍA JOSÉ ARROYO PANIAGUA

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarles un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D. F. 14 de septiembre del 2004
LA COORDINADORA DEL PROGRAMA

Begoña Fernández

DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ

MABFF\ASR\grf*

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Teorías de Torsión en Subcategorías Cerradas de *R-Mod*

Saúl Díaz Alvarado

Índice general

Introducción I

1. Categorías de Grothendieck **1**

1.1. Categorías 1

1.2. Categorías Preaditivas 17

1.3. Categorías Abelianas 27

1.4. Categorías de Grothendieck 38

1.5. Objetos Inyectivos 44

2. Categorías $\sigma[A]$ **53**

2.1. Generadores y Subgeneradores 53

2.2. Subcategorías Cerradas de $R - Mod$ 60

2.3. Cápsulas Inyectivas en $\sigma[M]$ 67

2.4. V-Módulos en $\sigma[M]$ 76

3. Teorías de Torsión **89**

3.1. Clases de Pretorsión 90

3.2. Teorías de Torsión 94

3.3. Teorías de Torsión en $\sigma[M]$ 103

4. Filtros Lineales **109**

4.1. Filtros lineales 110

4.2. Anillos y módulos topológicos 113

4.3. Inyectividad Relativa a una Teoría de Torsión 121

4.4. Teorías de torsión estables 124

Bibliografía **129**

Introducción

La teoría de anillos surge con el estudio de dos importantes ejemplos, el Anillo de Polinomios en $n - variables$ y el anillo de los números enteros, fue Hilbert quien habló por primera vez del término de Anillo. Posteriormente, se inicio el estudio de los Anillos no necesariamente conmutativos, pioneros en esta dirección son Wedderburn, Artin y Noether en la primera mitad del siglo XX. Por otro lado, a mediados del siglo XX, se introdujeron los concepto de Categorías, Funtores y Transformaciones Naturales, por Eilenberg y Mac Lane; con el uso de este lenguaje se describe axiomáticamente la Homología y Cohomología de Espacios Topológicos. Este tipo de técnicas son también aplicadas a la Categoría de Módulos sobre un anillo, a un anillo R se le asocia la Categoría de $R - módulos\ izquierdos$ $R - Mod$, las propiedades de esta categoría inducen propiedades del anillo R y recíprocamente.

Un concepto muy importante en el estudio de Módulos sobre un Anillo es el de Teoría de Torsión y en particular el de Teoría de Torsión Hereditaria. Estos conceptos se han estudiado por diferentes investigadores en muchas partes del mundo y desde muchos puntos de vista. Se han estudiado su estructura de retícula, la relación que existe con la clase de Filtros Lineales y las diversas clases de Prerradicales entre otras. Los primeros trabajos acerca de Teorías de torsión en Categorías Abelianas y de Grothendieck fueron hechos por Dickson $[D]$ y se ha escrito mucho acerca del tema, ver por ejemplo $[S]$ y $[G]$.

Wisbauer introdujo las categorías del tipo $\sigma[M]$ y generalizó muchos conceptos de $R - Mod$ a estas categorías. En $[W2]$ aparece por primera vez el estudio de las teorías de torsión en categorías del tipo $\sigma[M]$.

En este trabajo profundizaremos en el estudio de Teorías de Torsión en las categorías del tipo $\sigma[M]$. En el principio, hacemos una introducción a

categorías de Grothendieck para explorar estos resultados y aplicarlos en el capítulo 2 a $\sigma[M]$. Probaremos, entre otras cosas, que en las categorías del tipo $\sigma[M]$, existen las cápsulas inyectivas, también haremos un estudio de los $V-$*módulos*. Después, en el capítulo 3, estudiamos Teorías de Torsión en $\sigma[M]$, damos morfismos de retículas de la clase de Teorías de Torsión en $R-Mod$ sobre la clase de Teorías de Torsión en $\sigma[M]$ y de la retícula de Teorías de Torsión Hereditarias en $R-Mod$ sobre la retícula de Teorías de Torsión Hereditarias en $\sigma[M]$. Describimos completamente las fibras de estos morfismos. Finalmente, en el capítulo 4, generalizamos los conceptos de Filtro Lineal y Filtros de Gabriel a $\sigma[M]$ y su relación con las teorías de torsión en $\sigma[M]$. Aplicamos estos conceptos al estudio de inyectividad relativa a una Teoría de Torsión y demostramos una generalización del teorema 4.1 de $[R]$.

El lenguaje y notación que usamos es el estándar de la Teoría de Conjuntos y supondremos cierto el Lema de Zorn. Supondremos conocido el material del capítulo 1 de $[AF]$.

Capítulo 1

Categorías de Grothendieck

En el presente trabajo estamos interesados en estudiar subcategorías de $R - Mod$ cuyos objetos están subgenerados por algún objeto fijo de la categoría. Éstas resultan ser las categorías de Grothendieck más pequeñas que contienen a dicho objeto. En el presente capítulo nos pondremos de acuerdo con la terminología de la Teoría de las categorías que usaremos. Nos interesa definir el concepto de categoría de Grothendieck.

1.1. Categorías

Una categoría C consta de una clase de objetos, llamada la clase de los objetos de C y de otra clase consistente en los morfismos de C, de tal forma que si A y B son objetos de C existe un conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ de morfismos de C y funciones relaciones composición

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \times Hom_{\mathbf{C}}(B, C) &\longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

para cualesquiera tres objetos A, B y C, con las siguientes propiedades:

C1. Si $(A, A') \neq (B, B')$ entonces $Hom_{\mathbf{C}}(A, A') \cap Hom_{\mathbf{C}}(B, B') = \varnothing$.

C2. Si A, B, C y D son objetos de C y $(f, g, h) \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \times Hom_{\mathbf{C}}(B, C) \times Hom_{\mathbf{C}}(C, D)$ se tiene

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

En caso que alguno de los conjuntos $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, $Hom_{\mathbf{C}}(B, C)$ ó $Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$ fuese vacío se toma la función de composición como la función vacía.

C3. Si A es un objeto de $\mathbf{C}$ existe $1_A \in Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ de tal manera que si B es un objeto de $\mathbf{C}$, $g \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ y $h \in Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ se cumplen

$$g \circ 1_A = g$$
$$1_A \circ h = h.$$

Una subcategoría de $\mathbf{C}$ es una categoría $\mathbf{C}$' donde los objetos de $\mathbf{C}$' son todos objetos de $\mathbf{C}$, y si A y B son objetos de $\mathbf{C}$', entonces el conjunto $Hom_{\mathbf{C}'}(A, B) \subset Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, las composiciones en $\mathbf{C}$' son la restricción de las composiciones en $\mathbf{C}$, es decir si $f \in Hom_{\mathbf{C}'}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathbf{C}'}(B, C)$ la composición $g \circ f$, en la categoría $\mathbf{C}$, es un morfismo en la categoría $Hom_{\mathbf{C}'}(A, C)$, de tal forma que la composición en $\mathbf{C}$' se toma como la composición en $\mathbf{C}$. Si para todo par de objetos A y B de $\mathbf{C}$' tenemos $Hom_{\mathbf{C}'}(A, B) = Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ diremos que la subcategoría es plena.

Si A y B son objetos de $\mathbf{C}$ y $f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ diremos que f es un morfismo de A en B y lo denotaremos por $f : A \to B$ o simplemente $A \xrightarrow{f} B$.

Ejemplo 1.1 *La categoría $R-Mod$ cuyos objetos son los $R-$módulos izquierdos y los morfismos son los morfismos entre $R-$módulos, con las composiciones usuales.*

Ejemplo 1.2 *La categoría Set cuyos objetos son los conjuntos y morfismos las funciones entre conjuntos, con las composiciones usuales.*

Ejemplo 1.3 *La categoría Top cuyos objetos son los espacios topológicos y morfismos las funciones continuas, con las composiciones usuales.*

Ejemplo 1.4 *Sea $(G, *)$ un grupo. La categoría $\mathbf{G}$ que consta de un solo objeto "$*$", (la operación del grupo) y $Hom_{\mathbf{G}}(*, *) = G$. La composición es del siguiente modo:*

$$x \circ y = x * y$$

aquí $1_* = e$ (el elemento neutro de G).

Ejemplo 1.5 *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. La categoría $\mathbf{P}$ cuyos objetos son los elementos de P y si x, y son objetos de $\mathbf{P}$, es decir elementos de P,*

$$Hom_{\mathbf{P}}(x, y) = \begin{cases} \{x \to y\} & \text{si } x \leq y \\ \varnothing & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con las composiciones como siguen:
Si $x \to y$ e $y \to z$ son morfismos de P

$$(y \to z) \circ (x \to y) = x \to z.$$

Notemos aquí que si $Hom_{\mathbf{P}}(x, y)$, $Hom_{\mathbf{P}}(y, z)$ son no vacíos, entonces $Hom_{\mathbf{P}}(x, z)$ es no vacío.

Un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se llama:

1. monomorfismo si para cualquier par de morfismos $D \xrightarrow{g} A$ y $D \xrightarrow{h} A$, $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$;

2. epimorfismo si para todo par de morfismos $B \xrightarrow{g} C$ y $B \xrightarrow{h} C$, $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$;

3. bimorfismo si f es monomorfismo y epimorfismo;

4. isomorfismo si existe un morfismo $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ tal que $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$.

En general un isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo.

Notemos que si f es isomorfismo, entonces f^{-1} es único y se llama inverso de f. De la unicidad se desprende que $(f^{-1})^{-1} = f$. Otro hecho importante es que si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son isomorfismos

$$g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = 1_C$$
$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = 1_A$$

es decir, $g \circ f$ es isomorfismo de A en C y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Para cualquier par de objetos A y B en la categoría de $\mathbf{C}$, se dice que A es isomorfo a B si existe un isomorfismo de A en B y en este caso lo denotaremos por $A \simeq B$.

Dado que 1_A es isomorfismo, inverso de un isomorfismo es isomorfismo y composición de isomorfismos es isomorfismo, deducimos que la relación "$\simeq$" es de equivalencia.

Un objeto I de $\mathbf{C}$ se llama inicial si para cualquier objeto A de $\mathbf{C}$ existe un único morfismo $I \to A$, un objeto F de $\mathbf{C}$ se llama final si para todo objeto B de $\mathbf{C}$ existe un único morfismo de $B \to F$ y un objeto Z se llama objeto cero si es inicial y final.

Ejemplo 1.6 *En la categoría $R-Mod$ el $R-$módulo que consta de un sólo elemento*

$\{0\}$ es objeto cero, dado que los únicos morfismos de $\{0\}$ a M y de N a $\{0\}$ son

$$f : \{0\} \to M$$
$$f(0) = 0$$
$$g : N \to \{0\}$$
$$g(x) = 0$$

Ejemplo 1.7 *En la categoría Set el conjunto $\varnothing$ es el único objeto inicial y para cualquier x el conjunto $\{x\}$ es final, ya que la única función de $\varnothing$ a un conjunto A es la función vacía y la única función de un conjunto no vacío B a $\{x\}$ es la función constante x. Esta categoría no tiene objeto cero pues el $\varnothing$ no es final y $\{x\}$ no es inicial.*

Ejemplo 1.8 *La categoría* **G** *tiene objeto inicial, final o cero si y solo si el grupo G tiene un único elemento.*

Ejemplo 1.9 *La categoría* **P** *tiene un objeto inicial si y sólo si el conjunto P tiene mínimo.* **P** *tiene objeto final si y sólo si P tiene máximo.* **P** *tiene objeto cero si y sólo si P tiene un único elemento.*

Los ejemplos anteriores indican que en una categoría puede haber objetos iniciales, finales u objetos cero, pero todos los objetos iniciales son isomorfos entre sí, lo mismo pasa para objetos finales y objetos cero.

Proposición 1.1 *En una categoría C se cumplen las siguientes afirmaciones:*
1. Los objetos iniciales son todos isomorfos.
2. Los objetos finales son todos isomorfos.

Dem: Sean I e I' objetos iniciales, por ser I inicial existe un morfismo único $I \xrightarrow{\varphi} I'$ y por ser I' inicial existe un morfismo único $I' \xrightarrow{\psi} I$ entonces tenemos los morfismos $I \xrightarrow{1_I, \psi\circ\varphi} I$, pero I es inicial, de donde $\psi \circ \varphi = 1_I$. Del mismo modo se prueba que $\varphi \circ \psi = 1_{I'}$.

2. Análogo al anterior. ■

Proposición 1.2 *Los objetos cero en una categoría son todos isomorfos.*

Dem: Es consecuencia de la proposición anterior. ■

Y también se cumple la siguiente proposición:

Proposición 1.3 *Sea C una categoría, entonces se cumple:*
1. Si existe objeto inicial I en C, entonces todo objeto en C isomorfo con I es objeto inicial.
2. Si existe objeto final F en C, entonces todo objeto en C isomorfo con F es objeto final.
3. Si existe objeto cero en C, digamos 0, entonces todo objeto en C isomorfo con 0 es objeto cero.

Dem: Sea A objeto en C isomorfo con I, es decir, existe un isomorfismo φ de A en I. Sean $A \xrightarrow{f,g} B$ morfismos de C entonces $f \circ \varphi^{-1}$ y $g \circ \varphi^{-1}$ son morfismos de I en B, como I es objeto inicial $f \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1}$, de donde $f = g$. Por lo tanto A es objeto inicial. Del mismo modo para objetos finales y objeto cero. ■

Notemos que si la categoría tiene objeto cero por ser inicial y final todos los objetos iniciales y finales son isomorfos con el objeto cero.

Dados los objetos A y B el morfismo $f : A \to B$ es un morfismo trivial si se puede factorizar por medio de un objeto inicial I o un objeto final F, es decir, si existe un morfismo $A \xrightarrow{g} I$ ó $F \xrightarrow{h} B$, tal que el diagrama correspondiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & I \\ & f \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I \\ & f \searrow & \downarrow h \\ & & B \end{array}$$

Entonces los morfismos triviales en C son composiciones de la forma

$$A \xrightarrow{f} I \longrightarrow B$$
$$A \longrightarrow F \xrightarrow{g} B$$

con I objeto inicial y F objeto final. Si 0 es un objeto cero de C al único morfismo $A \to 0 \to B$ lo llamaremos morfismo cero y se denota por $0 : A \to B$ o simplemente $A \xrightarrow{0} B$. El morfismo 0 es el único morfismo trivial de A en B, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.4 *Sean A, B objetos cualesquiera de la categoría C y 0 y $0'$ objetos cero en la misma categoría. Si 0 y $0'$ son los morfismos $A \xrightarrow{f_1} 0 \xrightarrow{f_2} B$ y $A \xrightarrow{f_1'} 0' \xrightarrow{f_2'} B$ respectivamente, entonces $0 = 0'$*

Dem: Como 0, 0′ son objetos cero son isomorfos, tomemos $\varphi : 0 \to 0'$ isomorfismo. Del hecho de ser 0 objeto inicial se sigue que

$$f_2 = f_2' \circ \varphi$$

y de ser 0′ objeto final tenemos

$$f_1' = \varphi \circ f_1$$

de donde,

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1 &= f_2' \circ \varphi \circ f_1 \\ &= f_2' \circ f_1', \end{aligned}$$

por lo que $0 = 0'$. ■

Si la categoría **C** tiene objeto cero entonces para todo par de objetos A y B de **C** se tiene que el morfismo cero, 0, es el único elemento trivial de $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ y además para un morfismo $B \xrightarrow{g} C$ se tiene $g \circ 0$ es el único morfismo trivial de $Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$ ya que si $0 = f_2 \circ f_1$ con $A \xrightarrow{f_1} 0 \xrightarrow{f_2} B$, tenemos

$$g \circ 0 = g \circ f_2 \circ f_1$$

y f_1, $g \circ f_2$ son los únicos morfismos $A \to 0$ y $0 \to C$ respectivamente, por lo que $g \circ 0$ es el morfismo trivial $A \to 0 \to C$. De la misma forma se puede probar que $0 \circ g$ es morfismo trivial. Esto lo podemos resumir diciendo:

Proposición 1.5 *Si la categoría* **C** *tiene objeto cero, entonces para cualquier morfismo f se cumple que*

$$\begin{aligned} f \circ 0 &= 0 \\ 0 \circ f &= 0. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Si $B \xrightarrow{f} A$ y $C \xrightarrow{g} A$ son monomorfismos en una categoría, diremos que (B, f) es equivalente a (C, g) si existe $B \xrightarrow{\varphi} C$ isomorfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Notemos que si φ' también cumple con que $g \circ \varphi' = f$, como g es monomorfismo entonces $\varphi = \varphi'$, lo que implica que el morfismo φ es el único que hace conmutativo el diagrama (1.1).

Proposición 1.6 *La relación anterior es de equivalencia.*

Dem:

1. Tomando 1_B se tiene que (B, f) es equivalente con (B, f);

2. Si $B \xrightarrow{\varphi} C$ es isomorfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

tomando $C \xrightarrow{\varphi^{-1}} B$ obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & A \\ B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

3. Si $B \xrightarrow{\varphi} C$ y $C \xrightarrow{\psi} D$ hacen conmutativos los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & A \\ D \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

entonces $B \xrightarrow{\psi \circ \varphi} D$ hace conmutativo el diagrama que sigue

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi \circ \varphi"'] & A \\ D \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \blacksquare$$

Un subobjeto de A es la clase de equivalencia de un monomorfismo (B, f).

Notemos de la definición que si (B, f) es equivalente con (C, g), entonces B es isomorfo con C. Inversamente, si D es isomorfo con B bajo el isomorfismo φ, (B, f)

es equivalente con $(D, f \circ \varphi)$, es decir, si B es subobjeto de A, todos los objetos isomorfos a B también son subobjetos de A, de hecho el mismo subobjeto. En adelante si (B, f) es subobjeto de A escribiremos $B \overset{f}{\subset} A$ o simplemente $B \subset A$ si no hace falta especificar el monomorfismo. Notemos también que si B esta acompañado de distintos monomorfismos puede representar subobjetos distintos, para ver esto observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.10 *Tomemos en cuenta el $\mathbb{R}-$ módulo $\mathbb{R}^2$ y el $\mathbb{R}-$ módulo*

$$X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Sean i, f los monomorfismos

$$\begin{aligned} i : X &\to \mathbb{R}^2 \\ i(x, 0) &= (x, 0) \\ f : X &\to \mathbb{R}^2 \\ f(x, 0) &= (0, x). \end{aligned}$$

Supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : X \to X$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\ \varphi \downarrow & \nearrow_f & \\ X & & \end{array}$$

y llamemos $(a, 0)$ a $\varphi(1, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} (1, 0) &= i(1, 0) \\ &= f \circ \varphi(1, 0) \\ &= f(a, 0) \\ &= (0, a), \end{aligned}$$

de donde, $1 = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto (X, i) y (X, f) representan subobjetos distintos de $\mathbb{R}^2$.

Sea A un objeto fijo en una categoría $\mathbf{C}$ y sean $B \overset{f}{\subset} A$ y $C \overset{g}{\subset} A$ subobjetos de A, diremos que $(B, f) \leq (C, g)$ si existe un morfismo $B \xrightarrow{\varphi} C$ que hace conmutativo el

siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi\downarrow & \nearrow_{g} & \\ C & & \end{array} \tag{1.2}$$

y por ser g monomorfismo φ es único.

Observemos que la relación "$\leq$" está bien definida, dado que si (B, f), (C, g) son subobjetos de A tales que existe un morfismo $B \xrightarrow{\varphi} C$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi\downarrow & \nearrow_{g} & \\ C & & \end{array}$$

y (B', f'), (C', g') representan los mismos subobjetos de A que (B, f) y (C, g), respectivamente, entonces tenemos isomorfismos $B \xrightarrow{\varphi_1} B'$ y $C \xrightarrow{\varphi_2} C'$ que hacen conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi_1\downarrow & \nearrow_{f'} & \\ B' & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & A \\ \varphi_2\downarrow & \nearrow_{g'} & \\ C' & & \end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned} f' &= f \circ \varphi_1^{-1} \\ &= g \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} \\ &= g' \circ \varphi_2 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}, \end{aligned}$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f'} & A \\ \varphi_2 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}\downarrow & \nearrow_{g'} & \\ C' & & \end{array} \qquad \blacksquare$$

Proposición 1.7 *El morfismo φ del diagrama (1.2) es monomorfismo.*

Dem: Sean $D \xrightarrow{h,\,k} B$ morfismos tales que $\varphi \circ h = \varphi \circ k$ aplicando a ambos lados de esta última igualdad el morfismo g tenemos $f \circ h = f \circ k$ y como f es monomorfismo concluimos que $h = k$. $\blacksquare$

De acuerdo con la proposición anterior si $B \leq C$ se tiene que $B \overset{\varphi}{\subset} C$, donde φ es el morfismo que aparece en el diagrama (1.2). Pero si $B \subset C$ no necesariamente $B \leq C$, como indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11 *Consideremos el $\mathbb{R}$ – módulo $\mathbb{R}^2$ y los $\mathbb{R}$ – módulos*

$$\begin{aligned} X &= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \\ Y &= \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Sean i, j los monomorfismos

$$\begin{gathered} i : X \to \mathbb{R}^2 \\ i(x,0) = (x,0) \\ j : Y \to \mathbb{R}^2 \\ j(0,y) = (0,y). \end{gathered}$$

con estos monomorfismos resulta que $X \overset{i}{\subset} \mathbb{R}^2$ e $Y \overset{j}{\subset} \mathbb{R}^2$. Notemos que el morfismo

$$\begin{gathered} \varphi : X \to Y \\ \varphi(x,0) = (0,x) \end{gathered}$$

es un monomorfismo, de donde $X \overset{\varphi}{\subset} Y$. Ahora, si existe un morfismo $X \overset{\psi}{\to} Y$ que haga conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\ \psi \downarrow & \nearrow_j & \\ Y & & \end{array}$$

haciendo $(0,a) = \psi(1,0)$, tendríamos que

$$\begin{aligned} (1,0) &= i(1,0) \\ &= j \circ \psi(1,0) \\ &= j(0,a) \\ &= (0,a), \end{aligned}$$

de donde, $1 = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto $(X,i) \not\leq (Y,j)$.

Proposición 1.8 *Sea A un objeto fijo en una categoría $\mathbf{C}$ entonces la relación "$\leq$",*

en la clase de los subobjetos de A, es relación de orden parcial,es decir, es reflexiva, antisimétrica y transitiva .

Dem: Sea $B_1 \overset{f}{\subset} A$, $B_2 \overset{g}{\subset} A$ y $B_3 \overset{h}{\subset} A$

1. Tomando 1_{B_1} se tiene $B_1 \leq B_1$.

2. Si $B_1 \leq B_2 \leq B_3$ existen φ y ψ morfismos que hacen conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & A \\ B_3 \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

de donde, $\psi \circ \varphi$ hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi \circ \varphi"'] & A \\ B_3 \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $B_1 \leq B_3$.

3. Si $B_1 \leq B_2 \leq B_1$ existen $B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2$ y $B_2 \xrightarrow{\psi} B_1$ tales que $f = g \circ \varphi$ y $g = f \circ \psi$ entonces $f = f \circ \psi \circ \varphi$ y $g = g \circ \varphi \circ \psi$, por otro lado $f = f \circ 1_{B_1}$ y $g = g \circ 1_{B_2}$ y como f y g son monomorfismos $\psi \circ \varphi = 1_{B_1}$ y $\varphi \circ \psi = 1_{B_2}$ entonces B_1 y B_2 representan el mismo subobjeto de A. ■

Proposición 1.9 *Si 0 es el objeto inicial de la categoría C, entonces para cualquier objeto A de C se tiene $0 \subset A$ y $A \subset A$.*

Dem: El único morfismo de 0 en A es monomorfismo. ■

Mas aún, como $f \circ 0 = 0$, se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 1.10 *Si 0 es el objeto cero de la categoría C, para cualquier objeto A y $B \overset{f}{\subset} A$. Se tiene que $0 \leq B \leq A$.*

Dem: La demostración se sigue de que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & A \\ B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & A \\ A \arrow[ur, "1_A"'] & \end{tikzcd} \qquad \blacksquare$$

Un objeto no inicial A de una categoría $\mathbf{C}$ es simple si sus únicos subobjetos son A y los objetos iniciales de la categoría $\mathbf{C}$.

Del mismo modo que definimos subobjetos podemos definir objetos cociente, como clases de equivalencia de epimorfismos y la relación siguiente:

Los epimorfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} C$ son equivalentes si existe un isomorfismo $B \xrightarrow{\varphi} C$ que cumple que $\varphi \circ f = g$.

Otro par de conceptos que estaremos usando son los de producto y coproducto de una familia de objetos.

Si Λ es un conjunto y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos de una categoría $\mathbf{C}$, un producto directo de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un objeto P junto con una familia de morfismos $P \xrightarrow{\pi_\lambda} A_\lambda$ que cumplen la siguiente propiedad universal:
Si P' es otro objeto con morfismos $P' \xrightarrow{\pi'_\lambda} A_\lambda$, existe un único morfismo $P' \xrightarrow{\varphi} P$ que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi'_\lambda"'] & & P \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

para toda $\lambda \in \Lambda$.

Proposición 1.11 *Sea C una categoría, si el producto directo de una familia de objetos de C existe, éste es único salvo isomorfismos.*

Dem: Sean P y P' productos directos de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con morfismos $P \xrightarrow{\pi_\lambda} A_\lambda$ y $P' \xrightarrow{\pi'_\lambda} A_\lambda$ respectivamente, entonces existen morfismos φ y ψ únicos que hacen conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\pi_\lambda"] & \\ P' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\pi'_\lambda"] & A_\lambda \\ P \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

y de aquí para todo $\lambda \in \Lambda$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varphi\circ\psi"] \arrow[dr, "\pi_\lambda"'] & & P \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

son conmutativos, pero 1_P tiene también la propiedad, de la unicidad tenemos que $\varphi \circ \psi = 1_P$ del mismo modo se prueba que $\psi \circ \varphi = 1_{P'}$. ■

De la propiedad universal se deduce que si P con los morfismos $P \xrightarrow{\pi_\lambda} A_\lambda$ es producto directo y $C \xrightarrow{f,g} P$ son dos morfismos tales que $\pi_\lambda \circ f = \pi_\lambda \circ g$ para todo λ entonces $f = g$, dado que f y g hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] \arrow[dr, "c_\lambda"'] & & P \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

donde $c_\lambda = \pi_\lambda \circ f = \pi_\lambda \circ g$. Con lo cual se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 1.12 *Si P es el producto directo de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en la categoría* C *y $B \xrightarrow{f,g} P$ son morfismos tales que $\pi_\lambda \circ f = \pi_\lambda \circ g$, entonces $f = g$.* ■

Si un objeto es isomorfo con el producto directo de una familia de objetos, éste, eligiendo morfismos adecuadamente, es a su vez un producto directo de la misma familia.

Proposición 1.13 *Sea C una categoría y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos de C. Supongamos que P con los morfismos $P \xrightarrow{\pi_\lambda} A_\lambda$ es producto directo de la familia y $P' \overset{\varphi}{\simeq} P$, entonces P' es producto directo de la familia con los morfismos $\pi_\lambda \circ \varphi$.*

Dem: Sea X un objeto de C con los morfismos $X \xrightarrow{x_\lambda} A_\lambda$, entonces existe un morfismo único tal que $\pi_\lambda \circ \psi = x_\lambda$. Sea $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$, entonces $\pi_\lambda \circ \varphi \circ \xi = \pi_\lambda \circ \psi = x_\lambda$.

Para probar la unicidad de ξ supongamos que ξ' es otro morfismo con la misma propiedad, entonces $\pi_\lambda \circ \varphi \circ \xi = \pi_\lambda \circ \varphi \circ \xi'$, de donde, $\varphi \circ \xi = \varphi \circ \xi'$ y como φ es isomorfismo $\xi = \xi'$. ■

En lo sucesivo a los productos directos de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ los denotaremos por $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y los morfismos π_λ los llamaremos proyecciones.

De manera dual definimos el coproducto de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ como el objeto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ junto con morfismos $A_\lambda \xrightarrow{\iota_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ que cumple la siguiente propiedad universal:
Si C es otro objeto con morfismos $A_\lambda \xrightarrow{\iota'_\lambda} C$, existe un morfismo único $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \xrightarrow{\varphi} C$ que hace conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} C & \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \arrow[l, "\varphi"'] \\ & A_\lambda \arrow[ul, "\iota'_\lambda"] \arrow[u, "\iota_\lambda"'] \end{tikzcd}$$

A los morfismos ι_λ les llamaremos inclusiones.

El coproducto cumple la siguiente proposición que es análoga a las proposiciones anteriores:

Proposición 1.14 *Sea C una categoría, entonces:*
1. Si el coproducto de una familia de objetos de C existe, este es único salvo isomorfismos;
2. los morfismos inclusión $\{\iota_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ satisfacen la siguiente propiedad, si $f\circ\iota_\lambda = g\circ\iota_\lambda$ para todo λ entonces $f = g$;
3. si S es isomorfo al coproducto de una familia, S es coproducto de la misma familia.
■

Ejemplo 1.12 *En la categoría Set para una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos, el conjunto y las funciones siguientes*

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda : \forall\lambda\in\Lambda, \quad f(\lambda)\in A_\lambda \right\} \\ \pi_\alpha &: \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\alpha \\ \pi_\alpha(f) &= f(\alpha) \end{aligned}$$

son el producto directo de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. En general a cada elemento $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ se le identifica sólo atendiendo a su imagen, así $f = (f(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ y con esto todos los elementos de $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ son de la forma $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con $x_\lambda \in A_\lambda$, para toda $\lambda\in\Lambda$.
Para construir el coproducto se considera para cada $\lambda\in\Lambda$

$$B_\lambda = A_\lambda \times \{\lambda\},$$

así el conjunto y las funciones siguientes

$$\begin{aligned} \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\ i_\alpha &: A_\alpha \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\ i_\alpha(x) &= (x,\alpha) \end{aligned}$$

es el coproducto.

Ejemplo 1.13 *En la categoría $R-Mod$, si $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de $R-$módulos izquierdos al conjunto $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ del ejemplo anterior se le puede dar estructura de $R-$módulo como sigue*

$$\begin{aligned} (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} &= (m_\lambda + n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \\ r(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} &= (rm_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{aligned}$$

y resulta que los π_λ son morfismos en la categoría $R-Mod$ y $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ es el producto de la familia.
El conjunto y morfismos siguientes

$$\begin{aligned} \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda &= \left\{ f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : f(\lambda) = 0 \ \text{ para casi todo } \lambda \right\} \\ &= \left\{ (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : m_\lambda = 0 \text{ para casi todo } \lambda \right\} \\ i_\alpha &: M_\alpha \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \\ i_\alpha(x)(\lambda) &= \begin{cases} x & \text{si } \lambda = \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

es el coproducto.

Ejemplo 1.14 *En la categoría* P *existe el producto de la familia $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si y solo si existe $inf\,\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, dado que si p es el producto entonces $p \leq x_\lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$, para cualquier $x \leq x_\lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$, existe $\varphi : x \to p$ tal que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi} & p \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & x_\lambda & \end{array}.$$

es decir, $x \leq p$; y viceversa. De igual modo el coproducto de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ existe si y sólo si existe $sup\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Proposición 1.15 *Sea C una categoría, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familias de objetos de C tales que para toda $\lambda \in \Lambda$ $\quad A_\lambda \simeq B_\lambda$.*
1. Si el producto $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ existe, entonces el producto de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ existe y es isomorfo a $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.
2. Si el coproducto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ existe, entonces el coproducto de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ existe y es isomorfo a $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Dem: 1. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $A_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} B_\lambda$ isomorfismo, consideremos los morfismos $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda\circ\pi_\lambda} B_\lambda$ y otro objeto X con morfismos $X \xrightarrow{x_\lambda} B_\lambda$, entonces los morfismos $\varphi_\lambda^{-1}\circ x_\lambda$ inducen un morfismo único ψ que hace conmutativos los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}\circ x_\lambda"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

de donde, $x_\lambda = \varphi_\lambda \circ \pi_\lambda \circ \psi$.

La unicidad de ψ es obvia.

2. Análogo al anterior. ■

Proposición 1.16 *Si C es una categoría, para todo objeto A y toda familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de objetos de C se cumplen:*
1. Si el producto de la familia existe, entonces $Hom_C(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_C(A, A_\lambda)$ como conjuntos.
2. Si el coproducto de la familia existe, entonces $Hom_C(\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, A) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_C(A_\lambda, A)$ como conjuntos.

Dem: 1. Definamos la función

$$\varphi : Hom_C(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_C(A, A_\lambda)$$
$$\varphi(f) = (\pi_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}$$

Si $\varphi(f) = \varphi(g)$ se cumple que $\pi_\lambda \circ f = \pi_\lambda \circ g$ para toda $\lambda \in \Lambda$, de donde $f = g$.

Sea $x = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con $A \xrightarrow{f_\lambda} A_\lambda$ morfismos, estos morfismos inducen un único ψ tal que $\pi_\lambda \circ \psi = f_\lambda$, de donde, $\varphi(\psi) = x$.

2. Considerando la función

$$\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, A) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A_\lambda, A)$$
$$\varphi(f) = (f \circ \iota_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

se tiene el resultado. ■

En lo sucesivo cuando se tiene una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de objetos de $\mathbf{C}$ con $A_\lambda = A$ para toda $\lambda \in \Lambda$ escribiremos $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A^\Lambda$ y $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A^{(\Lambda)}$.

1.2. Categorías Preaditivas

Una categoría $\mathbf{C}$ se llama preaditiva si para todo par de objetos A y B de $\mathbf{C}$ el conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y si $A \xrightarrow{f,g} B$, $B \xrightarrow{h} C$ y $D \xrightarrow{k} A$ son morfismos, entonces se cumplen las siguientes igualdades

$$h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$$
$$(f + g) \circ k = f \circ k + g \circ k$$

Ejemplo 1.15 *La categoría $R - Mod$ es preaditiva.*

Ejemplo 1.16 *Sea $(R, \cdot, +, 1)$ un anillo con uno y consideremos la categoría $\mathbf{R}$ cuyo único objeto es la operación "$\cdot$" y $Hom_{\mathbf{R}}(\cdot, \cdot) = R$. La composición es de la forma*

$$x \circ y = x \cdot y$$

con la estructura de anillo de R tenemos que $\mathbf{R}$ es preaditiva.

El neutro aditivo del grupo abeliano $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ es el morfismo 0, para probar este hecho primero probemos la siguiente proposición.

Proposición 1.17 *Sea $\mathbf{C}$ una categoría preaditiva, sean A, B y C objetos de $\mathbf{C}$, consideremos e_1, e_2 los neutros aditivos de los grupos $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ y $Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$ respectivamente, entonces para cualquier morfismo $B \xrightarrow{f} C$ se cumple que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e_1} & B \\ & \searrow_{e_2} & \downarrow f \\ & & C \end{array},$$

es decir,

$$f \circ e_1 = e_2.$$

Dem: Tenemos que $e_1 + e_1 = e_1$ aplicando f de ambos lados tenemos

$$f \circ (e_1 + e_1) = f \circ e_1$$

de donde

$$f \circ e_1 + f \circ e_1 = f \circ e_1$$

y cancelando tenemos $f \circ e_1 = e_2$. ■

Como consecuencia de esta proposición tenemos que si la categoría es preaditiva y tiene objeto cero, haciendo $B = 0$ y f el único morfismo $0 \to C$, del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & 0 \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= f \circ e_1 \\ &= e_2, \end{aligned}$$

es decir, el morfismo cero es el neutro aditivo de $Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$ para cualquier par de objetos A y C, por esta razón denotaremos en lo sucesivo a los neutros aditivos por 0.

Proposición 1.18 *Si $\mathbf{C}$ es una categoría preaditiva, entonces para cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se cumplen:*
1. f es monomorfismo si y sólo si para cualquier morfismo $D \xrightarrow{g} A$, $f \circ g = 0$ implica $g = 0$;
2. f es epimorfismo si y sólo si para cualquier morfismo $B \xrightarrow{h} C$, $h \circ f = 0$ implica $h = 0$.

Dem: Supongamos que f es monomorfismo entonces

$$f \circ g = 0 = f \circ 0$$

implica $g = 0$. Inversamente, si

$$f \circ k_1 = f \circ k_2$$

con k_1 y k_2 morfismos de D en A, se tiene

$$f \circ (k_1 - k_2) = 0$$

de donde $k_1 - k_2 = 0$, o bien $k_1 = k_2$.

Del mismo modo para epimorfismos. ■

Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en una categoría preaditiva, un núcleo de f es una pareja (K, κ) con κ un morfismo de K en A que cumple $f \circ \kappa = 0$ y la siguiente propiedad universal:
si (K', κ') es otra pareja con κ morfismo de K' en A tal que $f \circ \kappa' = 0$ existe un único morfismo $K' \xrightarrow{\varphi} K$ que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{\kappa'} & A \\ \varphi \downarrow & \nearrow_{\kappa} & \\ K & & \end{array} \tag{1.3}$$

Proposición 1.19 *En una categoría preaditiva los núcleos de un morfismo, en caso de existir, son únicos salvo isomorfismos.*

Dem: Supongamos que (K, κ) y (K', κ') son núcleos de f entonces tenemos φ y ψ que hacen conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} K' & & \\ & \overset{\kappa'}{\searrow} & \\ \varphi \downarrow & & \\ K & \xrightarrow{\kappa} & A \\ \psi \downarrow & \nearrow_{\kappa'} & \\ K' & & \end{array} \tag{1.4}$$

es decir, $\kappa' = \kappa \circ \varphi$ y $\kappa = \kappa' \circ \psi$ de donde $\kappa' = \kappa' \circ \psi \circ \varphi$, esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{\kappa'} & A \\ \psi \circ \varphi \downarrow & \nearrow_{\kappa'} & \\ K' & & \end{array}$$

es conmutativo. De la unicidad tenemos que $\psi \circ \varphi = 1_{K'}$ del mismo modo se prueba que $\varphi \circ \psi = 1_K$. ■

Proposición 1.20 *Sea C una categoría preaditiva y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo, si (K, κ) es núcleo de f entonces κ es monomorfismo y de aquí que el núcleo de f es un subobjeto de A.*

Dem: Sean $C \xrightarrow{g,\, h} K$ morfismos, supongamos que $\kappa \circ g = \kappa \circ h$, tenemos que

$$\begin{aligned} f \circ \kappa \circ g &= 0 \circ g \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces existe un morfismo único φ de C en K tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\kappa \circ g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ K \arrow[ur, "\kappa"'] & \end{tikzcd},$$

es decir, $\kappa \circ \varphi = \kappa \circ g$, pero g y h tienen la misma propiedad que φ. Por lo tanto $\varphi = h = g$. ■

Proposición 1.21 *Si C es categoría preaditiva, entonces dos núcleos del mismo morfismo representan un mismo subobjeto.*

Dem: Sean (K, κ) y (K', κ') núcleos de $A \xrightarrow{f} B$ entonces del diagrama (1.4) φ es isomorfismo que cumple que $\kappa \circ \varphi = \kappa'$. ■

De hecho el núcleo es el mayor, con el orden definido en la sección anterior, de los subobjetos de A que provienen de un monomorfismo que anula a f, como se indica en seguida.

Proposición 1.22 *Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo con núcleo (K, κ) en una categoría preaditiva y $C \overset{g}{\subset} A$ es tal que $f \circ g = 0$, entonces $(C, g) \leq (K, \kappa)$.* ■

Del mismo modo que definimos el núcleo de un morfismo podemos definir el conúcleo de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ como una pareja (C, c) donde c es un morfismo de B en C que cumple $c \circ f = 0$ y si hay otra pareja (C', c') con la misma propiedad, existe

un único morfismo φ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{c} & C \\ & \searrow_{c'} & \downarrow \varphi \\ & & C' \end{array}$$

y podemos probar que c es epimorfismo y el conúcleo es único salvo isomorfismos.

En adelante el núcleo y conúcleo de f los denotaremos por Nuf y $Conuf$ respectivamente y a los morfismos κ y c por nuf y $conuf$ respectivamente.

Proposición 1.23 *En una categoría preaditiva con objeto cero se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. Un morfismo f de A en B es monomorfismo si y solo si Nuf es cero.

2. Un morfismo f de A en B es epimorfismo si y solo si $Conuf$ es cero.

Dem: 1. Consideremos 0 el objeto cero de la categoría entonces $f \circ 0 = 0$, (el cero del lado izquierdo es el único morfismo de 0 en A) y si $C \xrightarrow{g} A$ es otro morfismo tal que $f \circ g = 0$ por ser f monomorfismo tenemos que $g = 0$ de donde el único morfismo de C en 0 hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{0} & A \\ \downarrow & \nearrow & \\ 0 & & \end{array}$$

de donde el núcleo de f es $(0, 0)$.

Por otro lado, si el núcleo de f es objeto cero de la categoría C y $C \xrightarrow{g} A$ es tal que $f \circ g = 0$, existe un morfismo φ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & A \\ \varphi \downarrow & \nearrow & \\ 0 & & \end{array}$$

pero 0 es objeto cero de la categoría, por lo tanto $\varphi = 0$, y finalmente $g = 0$.

2. Análogo al anterior. ■

Con respecto de los productos y coproductos tenemos:

Proposición 1.24 *Si C es categoría preaditiva, para todo objeto A y toda familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de objetos de C se cumplen:*

1. Si el producto de la familia existe, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A, A_\lambda)$, *como grupos abelianos.*
2. Si el coproducto de la familia existe, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, A) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A_\lambda, A)$, *como grupos abelianos.*

Dem: 1. Definamos la función

$$\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A, A_\lambda)$$
$$\varphi(f) = (\pi_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (\pi_\lambda \circ (f+g))_{\lambda\in\Lambda}\\ &= (\pi_\lambda \circ f + \pi_\lambda \circ g)_{\lambda\in\Lambda}\\ &= (\pi_\lambda \circ f)_{\lambda\in\Lambda} + (\pi_\lambda \circ g)_{\lambda\in\Lambda}\\ &= \varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

Si $\varphi(f) = 0$ se cumple que $\pi_\lambda \circ f = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, de donde $f = 0$.

Sea $x = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con $A \xrightarrow{f_\lambda} A_\lambda$ morfismos, estos morfismos inducen un único $A \xrightarrow{\psi} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $\pi_\lambda \circ \psi = f_\lambda$, es decir, $\varphi(\psi) = x$.

2. Considerando la función

$$\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, A) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A_\lambda, A)$$
$$\varphi(f) = (f \circ \iota_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

se tiene el resultado. ■

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son familias de objetos en la categoría preaditiva $\mathbf{C}$, con productos y coproductos $(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, $(\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \{i_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ y $(\coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda, \{j_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, y para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un morfismo $A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} B_\lambda$ tomando $g_\lambda = j_\lambda \circ f_\lambda$ y $h_\lambda = f_\lambda \circ \pi_\lambda$ existen morfismos únicos $\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ que hacen conmutativos los siguientes diagramas, para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \arrow[rr, "\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda \circ \pi_\lambda"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[dl, "p_\lambda"] \\ & B_\lambda & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \arrow[rr, "\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"] & & \coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[dl, "j_\lambda \circ f_\lambda"] \\ & A_\lambda \arrow[ul, "i_\lambda"] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.25 *Si* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *y* $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *son familias de objetos en la categoría preaditiva* $\mathbf{C}$ *tales que* $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *y* $\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *existen y para cada* $\lambda \in \Lambda$ *tenemos*

$A_\lambda \overset{f_\lambda}{\subset} B_\lambda$ entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ es monomorfismo y de aquí que $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es subobjeto de $\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

Dem: Sea $\varphi = \prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ y supongamos que $\varphi \circ h = \varphi \circ g$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se cumple $p_\lambda \circ \varphi \circ h = p_\lambda \circ \varphi \circ g$, de donde $q_\lambda \circ h = q_\lambda \circ g$ para toda $\lambda \in \Lambda$, es decir $f_\lambda \circ \pi_\lambda \circ h = f_\lambda \circ \pi_\lambda \circ g$ para toda $\lambda \in \Lambda$, como las f_λ's son monomorfismos $\pi_\lambda \circ h = \pi_\lambda \circ g$ para toda $\lambda \in \Lambda$ y de aquí $h = g$. Por lo que φ es monomorfismo. ■

De manera dual tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.26 *Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son familias de objetos en la categoría preaditiva $\mathbf{C}$ tales que $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $\coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ existen y para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos $A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} B_\lambda$ epimorfismo, entonces $\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ es epimorfismo y de esto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es cociente de $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.* ■

Observación 1.27 *Si en la categoría $R - Mod$ tomamos $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y denotamos $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$, tenemos para cada $\alpha \in \Lambda$ que*

$$\begin{aligned} y_\alpha &= p_\alpha\left((y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \\ &= \left(p_\alpha \circ \textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \\ &= \left(f_\alpha \circ \pi_\alpha\right)\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \\ &= f_\alpha(x_\alpha), \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \left(f_\lambda(x_\lambda)\right)_{\lambda\in\Lambda},$$

así si los morfismos $A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} B_\lambda$ son epimorfismos, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ es epimorfismo. Para el caso del coproducto, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, con $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}$ las coordenadas no cero, entonces

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{k=1}^{n} i_{\lambda_k}(x_{\lambda_k})$$

de donde

$$\begin{aligned}\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) &= \coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} i_{\lambda_k}(x_{\lambda_k})\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\circ i_{\lambda_k}\right)(x_{\lambda_k})\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(j_{\lambda_k}\circ f_{\lambda_k}\right)(x_{\lambda_k})\right)\\ &= (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\end{aligned}$$

con

$$y_\alpha = \begin{cases} f_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}) & \text{si } \alpha=\lambda_k,\ k\in\{1,\ldots,n\}\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$$

pero $f_\lambda(0)=0$ *para toda* $\lambda\in\Lambda$, *por lo que concluimos que*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$$

y si los morfismos $A_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} B_\lambda$ *son monomorfismos, entonces* $\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ *es monomorfismo.*

En una categoría preaditiva $\mathbf{C}$ el producto y el coproducto de una familia finita, en caso de existir se pueden tomar como iguales, como se explica en los siguientes resultados.

En lo que sigue, para una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de objetos en la categoría preaditiva $\mathbf{C}$, para cualquier par de elementos α,β de Λ los morfismos $A_\alpha \xrightarrow{\delta_{\alpha\lambda}} A_\lambda$ serán

$$\delta_{\alpha\lambda} = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda=\alpha;\\ 0 & \text{si } \lambda\neq\alpha.\end{cases}$$

Proposición 1.28 *Sean* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *una familia finita de objetos en la categoría preaditiva* $\mathbf{C}$, *con* $\Lambda=\{1,\ldots,n\}$, $\left(X,\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *una familia tal que* X *es un objeto de* $\mathbf{C}$ *y para cada* $\lambda\in\Lambda$, $f_\lambda\in Hom_{\mathbf{C}}(A_\lambda,X)$ *y* $g_\lambda\in Hom_{\mathbf{C}}(X,A_\lambda)$. *Si los* f_λ *y* g_λ *satisfacen*
i) $g_\alpha\circ f_\lambda=\delta_{\alpha\lambda}$;
ii) $f_1\circ g_1+f_2\circ g_2+\ldots+f_n\circ g_n=1_X$,
entonces $\left(X,\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *y* $\left(X,\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *son el producto y coproducto de la familia* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *respectivamente.*

Dem: Primero veamos que $\left(X,\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ es el producto.

Sea $(Y, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ con los $p_\lambda \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, A_\lambda)$. Hacemos $\varphi = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 + \ldots + f_n \circ p_n$, con lo que

$$\begin{aligned} g_\lambda \circ \varphi &= g_\lambda \circ (f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 + \ldots + f_n \circ p_n) \\ &= g_\lambda \circ f_1 \circ p_1 + g_\lambda \circ f_2 \circ p_2 + \ldots + g_\lambda \circ f_n \circ p_n \\ &= g_\lambda \circ f_\lambda \circ p_\lambda \\ &= p_\lambda \end{aligned}$$

esto es que para todo $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g_\lambda"'] & & Y \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "p_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

Si $\varphi' : Y \to X$ también cumple que $g_\lambda \circ \varphi' = p_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi' &= 1_X \circ \varphi' \\ &= (f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2 + \ldots + f_n \circ g_n) \circ \varphi' \\ &= f_1 \circ g_1 \circ \varphi' + f_2 \circ g_2 \circ \varphi' + \ldots + f_n \circ g_n \circ \varphi' \\ &= f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 + \ldots + f_n \circ p_n \\ &= \varphi \end{aligned}$$

Por lo tanto $(X, \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ es el producto en $\mathbf{C}$ de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

De manera análoga se prueba que $(X, \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ es el coproducto. ■

Fijando $\alpha \in \Lambda$, los morfismos $A_\alpha \xrightarrow{\delta_{\alpha\lambda}} A_\lambda$ inducen un único morfismo $A_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ de tal forma que para toda $\lambda \in \Lambda$ los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\delta_{\alpha\lambda}"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & A_\lambda & \end{tikzcd}$$

y de aquí que si $f \circ \pi_\alpha = g \circ \pi_\alpha$, entonces $f \circ \pi_\alpha \circ \varphi_\alpha = g \circ \pi_\alpha \circ \varphi_\alpha$, de donde $f \circ \delta_{\alpha\alpha} = g \circ \delta_{\alpha\alpha}$, por lo tanto $f = g$. De lo anterior concluimos que:

Proposición 1.29 *En una categoría preaditiva el morfismo $\pi_\alpha : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\lambda$ es epimorfismo para todo $\alpha \in \Lambda$.*

La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ induce un único morfismo φ que hace conmutativos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda & \xrightarrow{\varphi} & \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ {\scriptstyle i_\lambda}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle \varphi_\lambda} \\ & A_\lambda & \end{array}$$

para toda $\lambda \in \Lambda$. Hacemos $\pi'_\lambda = \pi_\lambda \circ \varphi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\lambda$, los cuales cumplen con

$$\begin{aligned} \pi'_\lambda \circ i_\alpha &= \pi_\lambda \circ \varphi \circ i_\alpha \\ &= \pi_\lambda \circ \varphi_\alpha \\ &= \delta_{\alpha\lambda} \end{aligned}$$

De donde

$$\pi'_\lambda \circ i_\alpha = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda = \alpha; \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \alpha. \end{cases}$$

por lo cual si $i_\alpha \circ f = i_\alpha \circ g$, se tiene que $\pi'_\alpha \circ i_\alpha \circ f = \pi'_\alpha \circ i_\alpha \circ g$, de donde $f = g$. Esto es:

Proposición 1.30 *Para todo $\lambda \in \Lambda$ i_α es monomorfismo.* ■

De manera dual también existen $i'_\lambda : A_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tales que

$$\pi_\alpha \circ i'_\lambda = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda = \alpha; \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \alpha. \end{cases}$$

Si Λ es finito digamos que $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_\alpha \circ (i'_1 \circ \pi_1 + i'_2 \circ \pi_2 + \ldots + i'_n \circ \pi_n) &= \pi_\alpha \circ i'_1 \circ \pi_1 + \pi_\alpha \circ i'_2 \circ \pi_2 + \ldots + \pi_\lambda \circ i'_n \circ \pi_n \\ &= \pi_\alpha \circ i'_\alpha \circ \pi_\alpha \\ &= \pi_\alpha \\ &= \pi_\alpha \circ 1_{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \Lambda$, por lo que

$$i'_1 \circ \pi_1 + i'_2 \circ \pi_2 + \ldots + i'_n \circ \pi_n = 1_{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$$

De todo lo anterior, en el caso de categorías preaditivas, si existen el producto y el coproducto de una familia finita, podemos tomarlos como objetos iguales con los

epimorfismos π_λ y monomorfismos i_λ que cumplan con

$$\pi_\alpha \circ i_\lambda = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda = \alpha; \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \alpha. \end{cases}$$

y

$$i_1 \circ \pi_1 + i_2 \circ \pi_2 + \ldots + i_n \circ \pi_n = 1$$

En este caso el producto y el coproducto sera denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

1.3. Categorías Abelianas

Sea C una categoría preaditiva y consideremos el siguiente diagrama de objetos y morfismos de C:

$$\begin{array}{ccccccc} Nuf & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \rightarrow & Conuf \\ & & \lambda \downarrow & & \uparrow \mu & & \\ & & Conu(nuf) & & Nu(conuf) & & \end{array}$$

con $\lambda = conu(nuf)$ y $\mu = nu(conuf)$. Como $conuf \circ f = 0$, existe un único morfismo $A \xrightarrow{\alpha} Nu(conuf)$ tal que $\mu \circ \alpha = f$ entonces $\mu \circ \alpha \circ nuf = f \circ nuf = 0$ de donde existe $\bar{f} : Conu(nuf) \rightarrow Nu(conuf)$ tal que $\mu \circ \bar{f} \circ \lambda = f$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Nuf & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \rightarrow & Conuf \\ & & \lambda \downarrow & & \uparrow \mu & & \\ & & Conu(nuf) & \xrightarrow{\bar{f}} & Nu(conuf) & & \end{array} \tag{1.5}$$

o bien, $f = \mu \circ \bar{f} \circ \lambda$.

Una categoría preaditiva con objeto cero C la llamaremos abeliana si satisface las siguientes condiciones:

A1 Toda familia finita de objetos en C tiene producto y coproducto.

A2 Todo morfismo en C tiene núcleo y conúcleo.

A3 Para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$, el morfismo $\bar{f}$ del diagrama (1.5) es isomorfismo.

Una categoría abeliana es completa si es cerrada bajo productos, esto es, toda familia de objetos de C tiene producto y es cocompleta si es cerrada bajo coproductos, es decir, toda familia de objetos de C tiene coproducto.

En la presente sección C representará una categoría abeliana.

Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en C, definimos la imagen de f como $Imf = Conu(nuf)$, entonces el morfismo f se factoriza como

$$A \xrightarrow{g} Imf \xrightarrow{h} B \tag{1.6}$$

con $g = conu(nuf)$, que resulta ser un epimorfismo y $h = \bar{f} \circ nu(conuf)$, que es monomorfismo, entonces (Imf, g) representa un cociente de A e (Imf, h) un subobjeto de B.

Lema 1.31 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en C, entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

1. Si f es monomorfismo podemos tomar a $(A, 1_A)$ como $Conu(nuf)$.

2. Si f es epimorfismo podemos tomar a $Nu(conuf)$ como $(B, 1_B)$.

Dem: 1. Tenemos que f monomorfismo implica Nuf es el objeto 0 con el morfismo 0, de donde $1_A \circ nuf = 0$ y si $A \xrightarrow{g} X$ es un morfismo tal que $g \circ nuf = 0$ el mismo g es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Nuf \arrow[r, "nuf"] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "g"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

Del mismo modo para 2. ■

Proposición 1.32 *Un morfismo en C es isomorfismo si y sólo si es bimorfismo.*

Dem: Ya se señaló que todo isomorfismo es bimorfismo. Para probar la otra parte sea $A \xrightarrow{f} B$ bimorfismo, por el lema (1.31) el diagrama (1.5) se ve como sigue

$$\begin{tikzcd} Nuf \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r] & Conuf \\ & A \arrow[r, "\bar{f}"] & B \arrow[u, "1_B"'] & \end{tikzcd}$$

con $\bar{f}$ isomorfismo. Factoricemos a f como $f = 1_B \circ \bar{f} \circ 1_A = \bar{f}$ como en el diagrama. ■

Como ya dijimos antes, todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se puede factorizar como $f = h \circ g$, con g y h como en el diagrama (1.6) y esta representación es única, como indica la siguiente proposición.

Proposición 1.33 *Si el morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se factoriza como*

$$A \xrightarrow{g'} C \xrightarrow{h'} B$$

con g' epimorfismo y h' monomorfismo, entonces (C, g') y (C, h') representan el mismo cociente y subobjeto que (Imf, g) e (Imf, h) respectivamente, con g y h los morfismos de (1.6).

Dem: Tenemos que,

$$0 = f \circ nuf = h' \circ g' \circ nuf$$

como h' es monomorfismo $g' \circ nuf = 0$, de donde existe un morfismo φ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Imf \\ & \searrow_{g'} & \downarrow \varphi \\ & & C \end{array}$$

y de este diagrama tenemos

$$\begin{aligned} h' \circ \varphi \circ g &= h' \circ g' \\ &= f \\ &= h \circ g \end{aligned}$$

pero g es epimorfismo, entonces $h' \circ \varphi = h$, de donde tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g} & Imf & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow_{g'} & \downarrow \varphi & \nearrow_{h'} & \\ & & C & & \end{array}$$

y de esto concluimos que φ es monomorfismo y epimorfismo. ∎

Si $B \overset{f}{\subset} A$ y $A \xrightarrow{g} C$ es un morfismo, denotamos por $g(B)$ a la imagen del morfismo $g \circ f$.

Si A es un objeto de $\mathbf{C}$ y $B \overset{f}{\subset} A$ denotamos por $\frac{A}{B}$ a $Conuf$ y con esto tenemos

$$B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{conuf} \frac{A}{B}$$

$$conuf \circ f = 0.$$

Notemos que si (B, f) y (B', f') representan el mismo subobjeto, existe un isomorfismo φ de B en B' tal que $f = f' \circ \varphi$, de donde

$$conuf \circ f' \circ \varphi = conuf \circ f = 0$$

y como φ es isomorfismo $conuf \circ f' = 0$, entonces existe un morfismo único ψ_1 que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xrightarrow{f'} & A & \xrightarrow{conuf'} & Conuf' \\ & & & \underset{conuf}{\searrow} & \downarrow \psi_1 \\ & & & & Conuf \end{array}$$

del mismo modo existe un morfismo único ψ_2 que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{conuf} & Conuf \\ & & & \underset{conuf'}{\searrow} & \downarrow \psi_2 \\ & & & & Conuf' \end{array}$$

y de este par de diagramas concluimos $\psi_1 \circ \psi_2 = 1_{conuf}$ y $\psi_2 \circ \psi_1 = 1_{conuf'}$, del diagrama anterior tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{conuf} & \frac{A}{B} \\ & \underset{conuf'}{\searrow} & \downarrow \psi_2 \\ & & \frac{A}{B'} \end{array}.$$

De todo esto concluimos que el cociente $\frac{A}{B}$ no depende del representante del subobjeto B que tomemos.

Y de gran importancia tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.17 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en C, entonces (Nuf, nuf) es subobjeto de A y el cociente*

$$\frac{A}{Nuf} = Conu(nuf) = Imf.$$

Si $\{(B_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subobjetos de A y el coproducto de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ existe, los morfismos f_λ inducen un morfismo único φ que hace conmutativos

los diagramas

$$\begin{tikzcd} A & \coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[l, "\varphi"'] \\ & B_\lambda \arrow[ul, "f_\lambda"] \arrow[u, "\iota_\lambda"'] \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Denotaremos por $\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ a $Im\varphi$ que llamaremos la suma de la familia. De todo lo anterior tenemos que φ se puede factorizar como

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \xrightarrow{\varphi_1} \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \xrightarrow{\varphi_2} A \tag{1.8}$$

con φ_1 es epimorfismo y φ_2 monomorfismo, entonces la suma es subobjeto de A, esto es, $\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \overset{\varphi_2}{\subset} A$. Si $X \overset{g,h}{\rightrightarrows} B_\lambda$ son morfismos tales que $\varphi_1 \circ \iota_\lambda \circ g = \varphi_1 \circ \iota_\lambda \circ h$, aplicando a ambos lados φ_2 tenemos que $\varphi \circ \iota_\lambda \circ g = \varphi \circ \iota_\lambda \circ h$ de donde $f_\lambda \circ g = f_\lambda \circ h$ y como f_λ es monomorfismo $g = h$, entonces $\varphi_1 \circ \iota_\lambda$ es monomorfismo de B_λ en $\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, esto es, para todo $\lambda \in \Lambda$ B_λ es subobjeto de la suma.

Notemos que si φ es monomorfismo, φ_1 es isomorfismo y en este caso diremos que la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es independiente y denotamos a $\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ por $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ y la llamaremos la suma directa de la familia, que es un objeto isomorfo al coproducto y como ya se vio antes la suma directa $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ con los morfismos $\varphi_1 \circ \iota_\lambda$ es también un coproducto de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

La suma de la familia de subobjetos $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el supremo de la familia como veremos a continuación.

Proposición 1.34 *Si el coproducto de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subobjetos existe, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $B_\lambda \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.*

Dem: Considerando el diagrama (1.8) tenemos los morfismos $B_\lambda \xrightarrow{\varphi_1 \circ \iota_\lambda} \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ que al componer con φ_2 tenemos $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \iota_\lambda = \varphi \circ \iota_\lambda = f_\lambda$, por lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_1 \circ \iota_\lambda"'] & A \\ \sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

para toda $\lambda \in \Lambda$. ■

Antes de probar la siguiente proposición recordemos que si $A \xrightarrow{f} B$ es monomorfismo, $Nu(conuf) \simeq Conu(nuf) \simeq Conu0$ que se puede tomar como (A, f).

Proposición 1.35 *Si $B \overset{f}{\subset} A$ y $\{(B_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subobjetos de A tales que, para todo $\lambda \in \Lambda$ $B_\lambda \leq B$, entonces $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \leq B$.*

Dem: Como $B_\lambda \leq B$, existe un monomorfismo φ_λ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\lambda"'] & A \\ B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

entonces

$$conuf \circ f_\lambda = conuf \circ f \circ \varphi_\lambda = 0 \circ \varphi_\lambda = 0$$

y el morfismo φ del diagrama (1.7) satisface $\varphi \circ \iota_\lambda = f_\lambda$, de donde $conuf \circ \varphi \circ \iota_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, es decir $conuf \circ \varphi = 0$ o bien factorizando $conuf \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, pero φ_1 es epimorfismo, luego $conuf \circ \varphi_2 = 0$ de donde existe un morfismo $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \xrightarrow{\psi} B$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & \\ B = Nu(conuf) \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "conuf"'] & \frac{A}{B}, \end{tikzcd}$$

de donde $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \leq B$. ■

De los dos resultados anteriores concluimos que la suma de una familia de subobjetos es el supremo de la familia en la clase de todos los subobjetos de A.

Del mismo modo que con la suma, si ahora consideramos los cocientes $\frac{A}{B_\lambda}$ con los morfismos $\eta_\lambda = conuf_\lambda$, estos inducen un morfismo ψ único que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\eta_\lambda"'] & & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \frac{A}{B_\lambda} \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & \frac{A}{B_\lambda} & \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

denotamos por $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ al $Nu\psi$ y lo llamaremos la intersección de la familia, entonces la intersección de la familia es un subobjeto de A.

De la definición de intersección tenemos que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$\eta_\lambda \circ nu\psi = \pi_\lambda \circ \psi \circ nu\psi = \pi_\lambda \circ 0 = 0$$

entonces existen morfismos γ_λ únicos que hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \arrow[rr, "nu\psi"] \arrow[dr, "\gamma_\lambda"'] & & A \\ & B_\lambda \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Si $\gamma_\lambda \circ g = \gamma_\lambda \circ h$, tenemos $f_\lambda \circ \gamma_\lambda \circ g = f_\lambda \circ \gamma_\lambda \circ h$ de donde $nu\psi \circ g = nu\psi \circ h$ y de aquí que $g = h$. Por lo tanto para todo $\lambda \in \Lambda$ los γ_λ son monomorfismos, es decir $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \leq B_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Proposición 1.36 *Si $\{(B_\lambda, f_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subobjetos de A y (B, f) es un subobjeto de A tal que $B \leq B_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $B \leq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.*

Dem: Como $B \leq B_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, para cada λ existe un monomorfismo φ_λ que hace conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\varphi_\lambda"'] & A \\ B_\lambda \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

considerando ψ del diagrama (1.9) tenemos

$$\psi \circ f = \psi \circ f_\lambda \circ \varphi_\lambda$$

y para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda \circ \psi \circ f = \pi_\lambda \circ \psi \circ f_\lambda \circ \varphi_\lambda = \eta_\lambda \circ f_\lambda \circ \varphi_\lambda = 0 \circ \varphi_\lambda = 0,$$

de donde $\psi \circ f = 0$, y de aquí se sigue que $B \leq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$. ■

Entonces la intersección de una familia de subobjetos de A es el ínfimo de la familia, en la clase de todos los subobjetos de A.

Una sucesión de objetos y morfismos

$$\ldots \xrightarrow{f_{-2}} A_{-2} \xrightarrow{f_{-1}} A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \ldots$$

en $\mathbf{C}$ es exacta en A_n si $Imf_{n-1} = Nuf_n$. Una sucesión exacta corta es una sucesión

de objetos y morfismos del siguiente tipo

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

esto es, f es monomorfismo, g es epimorfismo y $Nug = \mathrm{Im} f$, en este caso diremos que A es una extensión de A'' por A'. En este caso, como f es monomorfismo y g es epimorfismo, por el lema (1.31) $(A', 1_{A'})$ es $Im(f) = Nu(g)$ e $Im(g) = \frac{A}{Nu(g)}$ se puede tomar como $(A'', 1_{A''})$, por lo que toda sucesión exacta corta en una categoría abeliana se puede ver de la forma

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{B} \longrightarrow 0$$

y con esto tenemos que en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

(A', f) es el núcleo de g y (A'', g) el conúcleo de f. Con todo lo anterior tenemos que si $A \xrightarrow{f} B$ es monomorfismo completamos una sucesión exacta corta con el conúcleo de f

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{conuf} \frac{B}{A} \longrightarrow 0$$

y si epimorfismo completamos con el núcleo

$$0 \longrightarrow Nu(f) \xrightarrow{nuf} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0.$$

Sean $A_1 \xrightarrow{f} A$ y $A_2 \xrightarrow{g} A$ morfismos. Un producto fibrado de los morfismos f y g es una terna (P, π_1, π_2) donde P es un objeto, $P \xrightarrow{\pi_1} A_1$ y $P \xrightarrow{\pi_2} A_2$ y son tales que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

y si (X, ξ_1, ξ_2) es otra terna tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi_1} & A_1 \\ \xi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

existe un único $\varphi : X \to P$ tal que $\pi_1 \circ \varphi = \xi_1$ y $\pi_2 \circ \varphi = \xi_2$.

En toda categoría abeliana existen producto fibrado como indica el siguiente resultado.

Proposición 1.37 *Todo par de morfismos $A_1 \xrightarrow{f} A$ y $A_2 \xrightarrow{g} A$ en una categoría abeliana* C *tiene producto fibrado.*

Dem: Consideremos $p_1 : A_1 \times A_2 \to A_1$ y $p_2 : A_1 \times A_2 \to A_2$ las proyecciones y (P, κ) el núcleo del morfismo $g \circ p_2 - f \circ p_1 : A_1 \times A_2 \to A$. Sean $\pi_1 = p_1 \circ \kappa$ y $\pi_2 = p_2 \circ \kappa$. Probaremos que (P, π_1, π_2) es producto fibrado. Tenemos que $(g \circ p_2 - f \circ p_1) \circ \kappa = 0$, entonces $f \circ p_1 \circ \kappa = g \circ p_2 \circ \kappa$, es decir $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$. Sea (X, ξ_1, ξ_2) otra terna tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi_1} & A_1 \\ \xi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

Los morfismos ξ_1 y ξ_2 inducen un único $\psi : X \to A_1 \times A_2$ tal que $p_1 \circ \psi = \xi_1$ y $p_2 \circ \psi = \xi_2$, de donde $f \circ \xi_1 = f \circ p_1 \circ \psi$ y $g \circ \xi_2 = g \circ p_2 \circ \psi$, de donde $(g \circ p_2 - f \circ p_1) \circ \psi = 0$. Por la propiedad del núcleo existe un único $\varphi : X \to P$ tal que $\kappa \circ \varphi = \psi$ y además $\pi_1 \circ \varphi = p_1 \circ \kappa \circ \varphi = p_1 \circ \psi = \xi_1$ y $\pi_2 \circ \varphi = p_2 \circ \kappa \circ \varphi = p_2 \circ \psi = \xi_2$. Si $\varphi' : X \to P$ es otro morfismo tal que $\pi_1 \circ \varphi' = \xi_1$ y $\pi_2 \circ \varphi' = \xi_2$, entonces $p_1 \circ \kappa \circ \varphi' = \xi_1 = p_1 \circ \kappa \circ \varphi$ y $p_2 \circ \kappa \circ \varphi' = \xi_2 = p_2 \circ \kappa \circ \varphi$, entonces $\kappa \circ \varphi' = \kappa \circ \varphi$ y como κ es monomorfismo $\varphi' = \varphi$. ■

En general para decir que (P, π_1, π_2) es el producto fibrado de los morfismos $A_1 \xrightarrow{f} A$ y $A_2 \xrightarrow{g} A$ lo indicaremos diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array} \tag{1.11}$$

es un diagrama de producto fibrado. Notemos que si el diagrama (1.11) es un diagrama de producto fibrado, también

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_2} & A_1 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A_2 & \xrightarrow[f]{} & A \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado.

El producto fibrado cumple con las siguientes propiedades.

Proposición 1.38 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:
1. Si g es monomorfismo, entonces π_1 es monomorfismo;
2. Si g es epimorfismo, entonces π_1 es epimorfismo.
Lo mismo ocurre con f y π_2.

Dem: 1. Supongamos que g es monomorfismo y sea $h : X \to P$ tal que $\pi_1 \circ h = 0$, entonces $g \circ \pi_2 \circ h = f \circ \pi_1 \circ h = 0$, por lo que $\pi_2 \circ h = 0$, entonces h es el único morfismo inducido por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & A_1 \\ 0 \downarrow & & \downarrow f \\ A_2 & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

pero el morfismo 0 también cumple con la propiedad. Por lo tanto $h = 0$.

2. Supongamos que g es epimorfismo y asumamos la notación de la proposición (1.37). Si $h : A \to B$ es tal que $h \circ (g \circ p_2 - f \circ p_1) = 0$, entonces $h \circ f \circ p_1 = h \circ g \circ p_2$, componiendo por la inclusión $i_2 : A_2 \to A_2 \times A_1$ tenemos $h \circ g = 0$, de donde $h = 0$, de donde concluimos que $g \circ p_2 - f \circ p_1$ es epimorfismo, por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\kappa} A_1 \times A_2 \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\mu = g \circ p_2 - f \circ p_1$. Ahora, sea $\xi : A_1 \to X$ tal que que $\xi \circ \pi_1 = 0$, es decir $\xi \circ p_1 \circ \kappa = 0$, por la propiedad del conúcleo, existe un único $\varphi : A \to X$ tal que $\varphi \circ \mu = \xi \circ p_1$, pero $\varphi \circ g = \varphi \circ (g \circ p_2 - f \circ p_1) \circ i_2 = \xi \circ p_1 \circ i_2 = 0$, lo que implica que $\varphi = 0$, entonces $\xi \circ p_1 = 0$, de donde $\xi = 0$. ■

Corolario 1.38.1 *Si $A \overset{f}{\subset} B$, entonces todo subobjeto de $\frac{B}{A}$ es de la forma $\frac{L}{A}$, con L subobjeto de B que tiene a A como subobjeto.*

Dem: Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\eta} \frac{B}{A} \longrightarrow 0$$

y sea $T \overset{g}{\subset} \frac{B}{A}$. Sea (P, π_1, π_2) el producto fibrado de η y g

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P & \xrightarrow{\pi_1} & T & & \\ & & & & \pi_2 \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\eta} & \frac{B}{A} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

como η es epimorfismo, por la proposición (1.38), tenemos que π_1 es epimorfismo. Por otro lado, los morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{0} T$ inducen un único morfismo $\varphi : A \to P$, tal que $\pi_1 \circ \varphi = 0$ y $\pi_2 \circ \varphi = f$. Notemos que si $\xi : X \to A$ es tal que $\varphi \circ \xi = 0$, componiendo de ambos lados de la igualdad $\pi_2 \circ \varphi = f$, tenemos que

$$0 = \pi_2 \circ \varphi \circ \xi = f \circ \xi,$$

como f es monomorfismo, tenemos que $\xi = 0$, por lo tanto φ es monomorfismo. Por otro lado, la propiedad universal del núcleo implica que existe un único morfismo $\psi : X \to A$ tal que $f \circ \psi = \pi_2 \circ \xi$, de donde el morfismo $\varphi \circ \psi : X \to P$ es tal que

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \varphi \circ \psi &= 0 = \pi_1 \circ \xi \text{ y} \\ \pi_2 \circ \varphi \circ \psi &= f \circ \psi = \pi_2 \circ \xi, \end{aligned}$$

por la propiedad universal del producto fibrado $\xi = \varphi \circ \psi$, por lo tanto (A, φ) es el núcleo de π_1, por lo que la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{\pi_1} T \longrightarrow 0$$

es exacta, con lo que T es de la forma $\frac{P}{A}$ y el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & P & \xrightarrow{\pi_1} & T & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \pi_2 \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\eta} & \frac{B}{A} & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \blacksquare$$

De la demostración del corolario (1.38.1) tenemos que, para objetos $B \overset{\delta}{\subset} C \overset{\beta}{\subset} A$ y completando con los morfismos faltantes, un diagrama como el siguiente

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\delta} & C & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{C}{B} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & \frac{A}{B} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y en este diagrama todos los cuadros conmutan. Podemos completar el diagrama para obtener columnas exactas, como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\bar{g}} & C & \xrightarrow{f} & \frac{C}{B} & \longrightarrow 0 \\
 & & \| & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & \frac{A}{B} & \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \delta & & \downarrow \eta & \\
 & & & & \frac{A}{C} & & \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}} & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Ahora $\eta \circ f \circ \beta = \eta \circ \alpha \circ \bar{f} = 0$, pero $\left(\frac{A}{C}, \delta\right)$ es el conúcleo de β, por lo que existe un único $\varphi : \frac{A}{C} \to \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}}$ tal que $\varphi \circ \delta = \eta \circ f$. Por otro lado $\delta \circ g = \delta \circ \beta \circ \bar{g} = 0$ y $\left(\frac{A}{B}, f\right)$ es el conúcleo de g, de donde existe un único $\psi : \frac{A}{B} \to \frac{A}{C}$ tal que $\psi \circ f = \delta$. Ahora, $\psi \circ \alpha \circ \bar{f} = \psi \circ f \circ \beta = \delta \circ \beta = 0$ y como $\bar{f}$ es epimorfismo tenemos que $\psi \circ \alpha = 0$, entonces existe $\bar{\varphi} : \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}} \to \frac{A}{C}$ tal que $\bar{\varphi} \circ \eta = \psi$. Por lo tanto $\varphi \circ \bar{\varphi} \circ \eta = \varphi \circ \psi = \eta$, como η es epimorfismo tenemos que $\varphi \circ \bar{\varphi} = 1_{\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}}}$ y $\bar{\varphi} \circ \varphi \circ \delta = \bar{\varphi} \circ \eta \circ f = \psi \circ f = \delta$, con lo que $\bar{\varphi} \circ \varphi = 1_{\frac{A}{C}}$. Con todo esto hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 1.39 *Si $B \subset C \subset A$, entonces $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}} \simeq \frac{A}{C}$.* ■

1.4. Categorías de Grothendieck

Un objeto U de una categoría C genera a C si para todo par de morfismos $A \xrightarrow{f,g} B$ distintos existe $U \xrightarrow{h} A$ morfismo tal que $f \circ h \neq g \circ h$.

Ejemplo 1.18 *Sea X un conjunto no vacío y $A \xrightarrow{f,g} B$ dos funciones tales que $f \neq g$, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$, definamos h como sigue*

$$h : X \to A$$
$$h(x) = a$$

entonces para cada $x \in X$ tenemos

$$f \circ h(x) = f(a) \neq g(a) = g \circ h(x)$$

de donde $f \circ h \neq g \circ h$, *por lo que* X *genera a Set.*

Ejemplo 1.19 *Consideremos el anillo con uno* R *visto como* $R-$*módulo izquierdo. Sean* $M \xrightarrow{f,\, g} N$ *morfismos distintos entre* $R-$ *módulos izquierdos, entonces existe* $m \in M$ *tal que* $f(m) \neq g(m)$, *construimos* h *como*

$$h : R \to M$$
$$h(r) = rm$$

Entonces

$$f \circ h(1) = f(m) \neq g(m) = g \circ h(1),$$

de donde $f \circ h \neq g \circ h$. *Por lo tanto* R *genera la categoría* $R-Mod$.

Ejemplo 1.20 *Sea* $(G, *)$ *un grupo y* $x, y \in G$ *distintos, entonces* $x * e \neq y * e$ *por lo que* $*$ *genera la categoría* $\mathbf{G}$.

Ejemplo 1.21 *Si* P *es un conjunto parcialmente ordenado y* $x \in P$ *arbitrario, entonces* x *genera a la categoría* $\mathbf{P}$ *ya que si no la genera existen morfismos distintos* $a \xrightarrow{f,g} b$ *y un morfismo* $x \to a$ *tales que los morfismos* $x \to a \xrightarrow{f} b$ *y* $x \to a \xrightarrow{g} b$ *son distintos, lo cual no es posible pues en esta categoria todos los morfismos de* x *a* b *son iguales.*

Recordemos que si A es un objeto fijo en una categoría $\mathbf{C}$ y $B \overset{f}{\subset} A$ y $C \overset{g}{\subset} A$, $B \leq C$ si existe un morfismo $B \xrightarrow{\varphi} C$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

y esta relación es de orden parcial en la clase de subobjetos de A.

Proposición 1.40 *Si* A *es un objeto en una categoría abeliana* $\mathbf{C}$. $\{B_\lambda\}_\lambda$ *es una familia de subobjetos de* A. *Entonces para cualquier subobjeto* B *de* A

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B) \leq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \cap B$$

Dem: Tenemos que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$B_\lambda \cap B \leq B_\lambda \tag{1.12}$$

y

$$B_\lambda \cap B \leq B. \tag{1.13}$$

De la desigualdad (1.13) y proposición (1.35) tenemos

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B) \leq B \tag{1.14}$$

Por la prosición (1.34)

$$B_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \tag{1.15}$$

de (1.12) y (1.15) tenemos

$$B_\lambda \cap B \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \tag{1.16}$$

y de esta última desigualdad tenemos

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \tag{1.17}$$

Finalmente por (1.14), (1.17) y la proposición (1.36) tenemos

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B) \leq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \cap B. \blacksquare$$

La desigualdad

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \cap B \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B)$$

no necesariamente es cierta como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.22 *Consideremos la categoría* $\mathbb{R} - Mod$ *y en esta categoría el objeto* $A = \mathbb{R}^2$. *Sean*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \\ B_2 &= \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \\ B &= \{(z, z) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Entonces $(B_1 + B_2) \cap B = B$ *mientras que* $(B_1 \cap B) + (B_2 \cap B) = 0$.

Un conjunto parcialmente ordenado I es dirigido si para todo m, n en I existe k en I tal que $m \leq k$ y $n \leq k$.

Si D es un conjunto de subobjetos de A lo podemos ordenar parcialmente restringiendo la relación de orden parcial en la clase de subobjetos de A a D y diremos que D es dirigido si D como conjunto parcialmente ordenado es dirigido, es decir, si $B_1, B_2 \in D$ existe $B \in D$ tal que $B_1 \leq B$ y $B_2 \leq B$.

Una familia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subobjetos de A es una familia dirigida si vista como conjunto de subobjetos de A es dirigido, esto es, para cada par $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $B_{\lambda_1} \leq B_{\lambda_3}$ y $B_{\lambda_2} \leq B_{\lambda_3}$.

Si A es un objeto de la categoría $\mathbf{C}$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia dirigida de subobjetos de A, entonces a la suma $\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ le llamaremos la unión directa de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Una categoría abeliana cocompleta $\mathbf{C}$ es una categoría de Grothendieck si tiene un generador y dado cualquier objeto A de $\mathbf{C}$ la clase $L(A)$ de todos los subobjetos de A, (que posteriormente probaremos que es un conjunto, proposición (1.42)) con la relación anterior satisface que para cualquier familia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dirigida de subobjetos de A se cumple la siguiente relación:

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \cap B = \sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap B)$$

para todo B subobjeto de A.

Lema 1.41 *Sean* $A \xrightarrow{f} B$ *y* $B \xrightarrow{g} C$ *dos morfismos en la categoría abeliana* $\mathbf{C}$ *tales que* $Imf \leq Nug$, *entonces* $g \circ f = 0$.

Dem: Consideremos la factorización de f

$$A \xrightarrow{f_0} Imf \xrightarrow{f_1} B$$

como $Imf \leq Nug$ existe un morfismo $Imf \xrightarrow{\psi} Nug$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im} f & \xrightarrow{f_1} & B \\ \psi \downarrow & \underset{nug}{\nearrow} & \\ Nug & & \end{array}$$

es decir $nug \circ \psi = f_1$, de donde

$$\begin{aligned} g \circ f &= g \circ f_1 \circ f_0 \\ &= g \circ nug \circ \psi \circ f_0 \\ &= 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Diremos que una categoría $\mathbf{C}$ es localmente pequeña, si la clase de subobjetos de cada objeto de $\mathbf{C}$, es un conjunto.

Con la siguiente proposición obtendremos toda una familia de ejemplos de este tipo de categorías.

Proposición 1.42 *Si C una categoría abeliana con un generador, entonces C es localmente pequeña.*

Dem: Sea A un objeto de $\mathbf{C}$ y U generador de $\mathbf{C}$, para cada subobjeto (B, g) de A tomemos el conjunto

$$\langle g \rangle = \{ f \in Hom_{\mathbf{C}}(U, A) : \text{existe } U \xrightarrow{h} B \text{ tal que } f = g \circ h \} \subseteq Hom_{\mathbf{C}}(U, A)$$

y definamos la correspondencia de los subobjetos de A en la familia de subconjuntos de $Hom_{\mathbf{C}}(U, A)$

$$(B, g) \longmapsto \langle g \rangle$$

Primero veamos que esta correspondencia no depende del representante del subobjeto:

Si (B, g) y (B', g') representan el mismo subobjeto y $f \in \langle g \rangle$, entonces existe $U \xrightarrow{h} B$ tal que $f = g \circ h$ tomando el isomorfismo φ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\ B' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

tenemos que $f = g' \circ \varphi \circ h$ y $\varphi \circ h$ es un morfismo de U en B', es decir $f \in \langle g' \rangle$. Del mismo modo la otra contención.

Ahora probaremos que la correspondencia es inyectiva:

Sean (B, g) y (B', g') subobjetos distintos de A. Consideremos los monomorfismos canónicos $B \cap B' \xrightarrow{\gamma} B$ y $B \cap B' \xrightarrow{\gamma'} B'$ del diagrama (1.10) que si ambos fueran isomorfismos tendríamos el isomorfismo $B \xrightarrow{\gamma' \circ \gamma^{-1}} B'$ que cumple que $g' \circ \gamma' \circ \gamma^{-1} = nu\psi \circ \gamma^{-1} = g$ de donde (B, g) y (B', g') representan el mismo subobjeto, lo cual no

es posible. Entonces γ ó γ' no es isomorfismo. Supongamos que γ no es isomorfismo, entonces

$$Conu\gamma = \frac{B}{B \cap B'} = \frac{B}{Nu\gamma} = \mathrm{Im}\gamma.$$

Como γ es monomorfismo no puede ser epimorfismo, entonces $Conu\gamma \neq 0$, por ser U generador existe $U \xrightarrow{h} B$ tal que

$$conu\gamma \circ h \neq 0. \tag{1.18}$$

Consideremos el morfismo $f = g \circ h \in \langle g \rangle$ y supongamos que $f \in \langle g' \rangle$, entonces $f = g' \circ h'$ con h' de U en B', factorizando h y h' como

$$\begin{array}{c} U \xrightarrow{h_0} Imh \xrightarrow{g_0} B \\ U \xrightarrow{h'_0} Imh' \xrightarrow{g'_0} B' \end{array}$$

tenemos las factorizaciones de $f = g \circ g_0 \circ h_0 = g' \circ g'_0 \circ h'_0$, de donde Imh e Imh' representan el mismo objeto, entonces $Imh \leq B \cap B'$, con lo cual existe φ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}h \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g_0"] & \\ B \cap B' \arrow[r, "\gamma"'] & B \end{tikzcd}$$

con lo que también conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "h_0"] & & & \\ & \mathrm{Im}h \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g_0"] & & \\ & B \cap B' \arrow[r, "\gamma"'] & B \arrow[r, "conu\gamma"] & \frac{B}{B \cap B'} \end{tikzcd}$$

de donde,

$$conu\gamma \circ h = conu\gamma \circ g_0 \circ h_0 = conu\gamma \circ \gamma \circ \varphi \circ h_0 = 0$$

lo cual contradice (1.18). ■

Observación 1.43 *De esta proposición concluimos que una categoría de Grothendieck es localmente pequeña y de aquí que para cualquier objeto A de esta categoría, $L(A)$*

es una retícula completa y superiormente continua, esto es

$$B \wedge \left(\bigvee_{C \in D} C \right) = \bigvee_{C \in D} (B \wedge C)$$

para cualquier conjunto dirigido D de subobjetos y cualquier subobjeto B de A, (aquí el símbolo $\vee$ es $\sum$ y el símbolo $\wedge$ es $\cap$).

Ejemplo 1.23 *$R-Mod$ es categoría de Grothendieck. Para probar esta afirmación sólo hay que probar que en $R-Mod$ se cumple*

$$\left(\sum_{D \in \mathcal{D}} D \right) \cap N = \sum_{D \in \mathcal{D}} (D \cap N)$$

para cualquier conjunto dirigido $\mathcal{D}$ de subobjetos de un $R-$módulo M y un subobjeto N de M. La proposición (1.40) nos da la contención

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} (D \cap N) \subseteq \left(\sum_{D \in \mathcal{D}} D \right) \cap N$$

Para la otra contención tomemos $x \in \left(\sum_{D \in \mathcal{D}} D \right) \cap N$, entonces $x \in N$ y $x = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ con $d_1 \in D_1 \in \mathcal{D}$, $d_2 \in D_2 \in \mathcal{D}, \ldots, d_n \in D_n \in \mathcal{D}$, como el conjunto $\mathcal{D}$ es dirigido existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $d_i \in D$, para toda $i = 1, \ldots, n$, con lo que $x \in D \cap N \subset \sum_{D \in \mathcal{D}} (D \cap N)$. ■

1.5. Objetos Inyectivos

Ahora analizaremos el concepto de objeto inyectivo, este concepto se puede ver de manera general, sin embargo nos limitaremos a decir algunas cosas sobre objetos inyectivos en una categoría de Grothendieck. En lo que sigue **C** será una categoría de Grothendieck.

Antes de la definición probemos la siguiente proposición.

Proposición 1.44 *Si $C \xrightarrow{f} A$ es monomorfismo y para todo $C \xrightarrow{g} B$ existe $A \xrightarrow{\bar{g}} B$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ B & & \end{array}$$

entonces para cualquier pareja (C', f') *equivalente a* (C, f) *y cualquier morfismo* $C' \xrightarrow{h} B$, *existe* $A \xrightarrow{\bar{h}} B$ *que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f'} & A \\ h\downarrow & \swarrow \bar{h} & \\ B & & \end{array}$$

Dem: Tomemos el isomorfismo $\varphi : C \to C'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi\downarrow & \nearrow f' & \\ C' & & \end{array}$$

Entonces existe $\bar{\varphi} : A \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\bar{\varphi} \\ C' & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Entonces $\bar{\varphi} \circ f = h \circ \varphi$, y de esta igualdad concluimos que

$$h = \bar{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} = \bar{\varphi} \circ f' \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \bar{\varphi} \circ f',$$

con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f'} & A \\ h\downarrow & \swarrow \bar{\varphi} & \\ B & & \end{array} \qquad \blacksquare$$

Sean A y B objetos en $\mathbf{C}$, diremos que B es $A - \textit{inyectivo}$ si para cualquier monomorfismo $C \xrightarrow{f} A$ y morfismo $C \xrightarrow{g} B$ existe un morfismo $A \xrightarrow{\bar{g}} B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g\downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ B & & \end{array}$$

B es inyectivo si es A inyectivo para todo objeto A de $\mathbf{C}$.

Por la proposición (1.44) se puede reescribir la definición de $A - \textit{inyectivo}$ como sigue:

Sean A y B objetos en $\mathbf{C}$, diremos que B es $A-$ *inyectivo* si para cualquier subobjeto $C \overset{f}{\subset} A$ y morfismo $C \xrightarrow{g} B$ existe un morfismo $A \xrightarrow{\bar{g}} B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g\downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ B & & \end{array}$$

B es inyectivo si es A inyectivo para todo objeto A de $\mathbf{C}$.

Proposición 1.45 *Si $B \overset{f}{\subset} A$ y E es $A-$ inyectivo, entonces E es $B-$ inyectivo.*

Dem: Sea $h : K \to B$ un monomorfismo y $g : K \to E$ un morfismo cualquiera, entonces $f \circ h$ es monomorfismo de K en A, como E es $A-$*inyectivo* existe un morfismo $\varphi : A \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{h} & B \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ E & \xleftarrow[\varphi]{} & A \end{array}$$

Basta tomar $\bar{g} = \varphi \circ f$. ■

Corolario 1.45.1 *Si A es un objeto isomorfo a A', entonces E es $A-$ inyectivo si y sólo si E es $A'-$ inyectivo.* ■

Proposición 1.46 *Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos de $\mathbf{C}$ y A un objeto fijo de $\mathbf{C}$. Entonces cada E_λ es $A-$ inyectivo si y sólo si $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es $A-$ inyectivo.*

Dem: Sea $B \overset{f}{\subset} A$ y $B \xrightarrow{g} \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ morfismo, consideremos los morfismos $\pi_\lambda \circ g : B \to E_\lambda$, entonces existen morfismos $\varphi_\lambda : A \to E_\lambda$ de tal forma que para toda $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ g\downarrow & & \downarrow \varphi_\lambda \\ \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda & \xrightarrow[\pi_\lambda]{} & E_\lambda \end{array}$$

y los φ_λ inducen un morfismo $\bar{g} : A \to \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ tal que $\pi_\lambda \circ \bar{g} = \varphi_\lambda$, de donde

$$\pi_\lambda \circ \bar{g} \circ f = \varphi_\lambda \circ f = \pi_\lambda \circ g$$

por lo que $\bar{g} \circ f = g$.

Para la otra implicación tomemos $B \overset{f}{\subset} A$ y $B \xrightarrow{g} E_\lambda$ morfismo, recordemos que existen morfismos $i'_\lambda : E_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ de tal forma que

$$\pi_\alpha \circ i'_\lambda = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda = \alpha; \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \alpha. \end{cases}$$

entonces existe un morfismo $\varphi : A \to \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow \varphi \\ E_\lambda & \xrightarrow[i'_\lambda]{} & \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \end{array}$$

Haciendo $\bar{g} = \pi_\lambda \circ \varphi$ tenemos

$$\bar{g} \circ f = \pi_\lambda \circ \varphi \circ f = \pi_\lambda \circ i'_\lambda \circ g = g. \blacksquare$$

Proposición 1.47 *Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de objetos de* C *y A un objeto fijo de* C. *Si $\coprod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es $A-$ inyectivo, entonces cada E_λ es $A-$ inyectivo.*

Dem: Sea $\lambda \in \Lambda$, $B \overset{f}{\subset} A$ y $B \xrightarrow{g} E_\lambda$ morfismo, consideremos los morfismos $i_\lambda \circ g : B \to \coprod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, entonces existen morfismos $\varphi : A \to E_\lambda$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow \varphi \\ E_\lambda & \xrightarrow[i_\lambda]{} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \end{array}$$

Sea $\pi'_\lambda : \coprod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \to E_\lambda$ tal que para toda $\alpha \in \Lambda$ cumple con

$$\pi'_\lambda \circ i_\alpha = \begin{cases} 1_{A_\lambda} & \text{si } \lambda = \alpha; \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \alpha. \end{cases}$$

y $\bar{g} = \pi'_\lambda \circ \varphi$, entonces

$$\bar{g} \circ f = \pi'_\lambda \circ \varphi \circ f = \pi'_\lambda \circ i_\lambda \circ g = g$$

por lo que $\bar{g} \circ f = g$. $\blacksquare$

En general, la suma directa de $R-$ *módulos* inyectivos no es inyectivo, en el

capítulo siguiente daremos un ejemplo de este hecho en la categoría $R-Mod$.

Ejemplo 1.24 *Un grupo abeliano G es divisible si para toda $n \in \mathbb{N}$ e $y \in G$ existe $x \in G$ tal que $nx = y$.*
Si G y H son grupos abelianos, G es divisible y $G \xrightarrow{f} H$ es epimorfismo, entonces H es divisible, pues si $n \in \mathbb{N}$ e $y \in H$, entonces existe $b \in G$ tal que $f(b) = y$, tomando $a \in G$ tal que $na = b$ se tiene $nf(a) = y$.
El grupo abeliano G es divisible si y sólo si G es $\mathbb{Z}-$inyectivo en la categoría $\mathbb{Z}-Mod$.
Para probar esto primero supongamos que G es $\mathbb{Z}-$inyectivo en $\mathbb{Z}-Mod$ y sean $n \in \mathbb{N}$ e $y \in G$, tomando

$$g : n\mathbb{Z} \to G$$
$$g(nm) = my$$

existe $\bar{g} : \mathbb{Z} \to G$ tal que $\bar{g}(nm) = g(nm)$, haciendo $x = \bar{g}(1)$ tenemos

$$nx = n\bar{g}(1) = \bar{g}(n) = g(n) = y.$$

Para la otra implicación sea $g : n\mathbb{Z} \to G$ con G divisible. Queremos definir $\bar{g} : \mathbb{Z} \to G$ tal que $\bar{g}(nm) = g(nm)$ para toda $m \in \mathbb{Z}$. Sea $x \in G$ de tal forma que $nx = g(n)$ y la fijamos, definamos

$$\bar{g} : \mathbb{Z} \to G$$
$$\bar{g}(m) = mx$$

entonces $\bar{g}(nm) = nmx = mg(n) = g(nm)$.

Ejemplo 1.25 *$\mathbb{Q}$ y $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ son $\mathbb{Z}-$inyectivos, pues son divisibles.*

Ejemplo 1.26 *Como $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$, con $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los primos, entonces para todo primo p tenemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es $\mathbb{Z}-$inyectivo.*

Un monomorfismo $f : A \to B$ se dice esencial si dado cualquier morfismo $h : B \to C$ que hace de $h \circ f$ un monomorfismo es monomorfismo.

Un subobjeto $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial si dado cualquier subobjeto $K \overset{g}{\subset} A$, $K \cap B = 0$ implica que $K = 0$.

Aquí estamos definiendo, por un lado, monomorfismos esenciales y, por otro lado, subobjetos esenciales, como es de esperarse estos dos conceptos son equivalentes en

cierta forma, este hecho lo probaremos mas adelante y para esto probemos primero los siguientes resultados.

Lema 1.48 *Si $f : A \to B$ monomorfismo, entonces $f = 0$ si y sólo si $A = 0$.*

Dem: Si $A = 0$ el único morfismo de A en B es el morfismo 0. Supongamos ahora que $f = 0$ entonces el morfismo $A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B$ es el morfismo 0 y como f es monomorfismo $1_A = 0$. Por lo que $A = 0$. ■

Proposición 1.49 *Un subobjeto $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial si y sólo si para cualquier morfismo $h \in Hom_{\mathbf{C}}(A, K)$ $Nu(h) \cap B = 0$ implica $Nu(h) = 0$.*

Dem: Si $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial, por definición $Nu(h) \cap B = 0$ implica $Nu(h) = 0$. Ahora supongamos que para cualquier morfismo $h \in Hom_{\mathbf{C}}(A, K)$, $Nu(h) \cap B = 0$ implica $Nu(h) = 0$ y supongamos $K \overset{g}{\subset} A$ es tal que $K \cap B = 0$, consideremos el morfismo canónico $A \xrightarrow{\gamma} \frac{A}{K}$, esto es $\gamma = conu(g)$. Entonces $(K, 1_K) = Nu(\gamma)$, es decir $Nu(\gamma) \cap B = 0$, con lo que $K = Nu(\gamma) = 0$. ■

Proposición 1.50 *Un monomorfismo $f : B \to A$ es esencial si y sólo si el subobjeto $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial.*

Dem: Supongamos que $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial y sea $h : A \to K$ de tal forma que $h \circ f$ sea monomorfismo, tomando ψ, γ_1 y γ_2 análogos a los morfismos de los diagramas (1.9) y (1.10) tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Nuh \arrow[dr, "nuh"] & \\
Nuh \cap B \arrow[ur, "\gamma_1"] \arrow[rr, "nu\psi"] & & A \\
 & B \arrow[ul, "\gamma_2"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

de donde deducimos que $nuh \circ \gamma_1 = f \circ \gamma_2$, por lo que $h \circ f \circ \gamma_2 = 0$, pero $h \circ f$ es monomorfismo, entonces $\gamma_2 = 0$ y monomorfismo, lo que implica que $Nuh \cap B = 0$ y de aquí $Nuh = 0$. Por lo tanto h es monomorfismo.

Supongamos ahora que $f : B \to A$ es un monomorfismo esencial y sea $h : A \to K$ tal que $Nuh \cap B = 0$. Queremos probar que $Nuh = 0$, para esto basta

probar que h es monomorfismo. Considerando el subobjeto de A representado por $(Nu(h \circ f), f \circ nu(h \circ f))$, como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Nu(h \circ f) & \xrightarrow{f \circ nu(h \circ f)} & A \\ nu(h \circ f) \downarrow & \nearrow_{f} & \\ B & & \end{array}$$

conmuta,

$$(Nu(h \circ f), f \circ nu(h \circ f)) \leq (B, f). \tag{1.19}$$

La igualdad $h \circ f \circ nu(h \circ f) = 0$ implica que existe un único morfismo $\varphi : Nu(h \circ f) \to Nuh$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} Nu(h \circ f) & & & & \\ \varphi \downarrow & & \overset{f \circ nu(h \circ f)}{\searrow} & & \\ Nu(h) & & \xrightarrow{nuh} & A & \xrightarrow{h} K, \end{array}$$

por lo que

$$(Nu(h \circ f), f \circ nu(h \circ f)) \leq (Nu(h), nuh), \tag{1.20}$$

tomando en cuenta la proposición (1.36) y las desigualdades (1.19) y (1.20) obtenemos $Nu(h \circ f) \leq Nu(h) \cap B = 0$, esto implica que $h \circ f$ es monomorfismo, como f es esencial, finalmente, h es monomorfismo. ■

En vista de las proposiciones anteriores, da lo mismo hablar de subobjetos esenciales que de monomorfismos esenciales. Si $B \overset{f}{\subset} A$ es esencial lo abreviaremos escribiendo $B \overset{f}{\trianglelefteq} A$ o simplemente $B \trianglelefteq A$, si no hace falta especificar el monomorfismo esencial f.

Proposición 1.51 *Si $A \subset B \subset C$ son objetos de* $\mathbf{C}$, *entonces $A \trianglelefteq C$ si y sólo si $A \trianglelefteq B \trianglelefteq C$.*

Dem: Supongamos que $A \trianglelefteq B \trianglelefteq C$ y sea K subobjeto de C tal que $A \cap K = 0$, entonces $B \cap A \cap K = 0$, con lo que $B \cap K = 0$ y de aquí que $K = 0$.

Ahora, si $A \trianglelefteq C$ y $K \subset B$ tal que $A \cap K = 0$, entonces K también es subobjeto de C que cumple que $A \cap K = 0$, por lo tanto $K = 0$, por lo que $A \trianglelefteq B$. Sea $L \subset C$ tal que $B \cap L = 0$. Tenemos que $A \cap L \subset A \subset B$ y $A \cap L \subset L$, con lo que $A \cap L \subset B \cap L = 0$, por lo que $A \cap L = 0$, pero $A \trianglelefteq C$, por lo tanto $L = 0$. ■

Proposición 1.52 *Si $A \overset{f}{\trianglelefteq} B$ y E es un inyectivo tal que $A \overset{g}{\subset} E$, entonces B es subobjeto de E.*

Dem: De la inyectividad de E existe $\bar{g} : B \to E$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ B & & \end{array}$$

es decir $\bar{g} \circ f = g$, pero f es esencial y g monomorfismo, entonces $\bar{g}$ es monomorfismo. ■

Notemos que si $A \overset{f}{\trianglelefteq} B$ y A es $B-$*inyectivo* entonces existe $g : B \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ 1_A\downarrow & \swarrow g & \\ A & & \end{array}$$

e igual que en la demostración de la proposición anterior g es monomorfismo y $g \circ f = 1_A$, entonces $g \circ f \circ g = 1_A \circ g = g = g \circ 1_B$, de donde $f \circ g = 1_B$. Por lo tanto $A \simeq B$. Esto lo podemos resumir diciendo que B no tiene subobjetos propios $B-$*inyectivos*.

Una cápsula inyectiva del objeto A es una pareja (E, f) con E un objeto inyectivo y $A \overset{f}{\trianglelefteq} E$.

De la definición de cápsula inyectiva y la proposición (1.51) se sigue la siguiente proposición.

Proposición 1.53 *Si $A \trianglelefteq B$, entonces (E, f) es cápsula inyectiva de A si y sólo si (E, f) es cápsula inyectiva de B.*

Dem: Para la demostración primero supongamos que (E, f) es cápsula inyectiva de B, entonces $A \trianglelefteq B \trianglelefteq E$, con lo que $A \trianglelefteq E$. Ahora si (E, f) es cápsula inyectiva de A tenemos que $A \subset B \subset E$ y $A \trianglelefteq E$, por lo que $B \trianglelefteq E$. ■

Proposición 1.54 *Si el objeto A tiene una cápsula inyectiva (E, f) y Q es un inyectivo tal que $A \overset{g}{\subset} Q$, entonces E es subobjeto de Q.*

Dem: La demostración se sigue directamente de la proposición (1.52). ■

En el siguiente capítulo probaremos que todo $R-$*módulo* tiene una cápsula inyectiva.

Capítulo 2

Categorías $\sigma[A]$

En el presente capítulo introduciremos la noción de subcategorías cerradas de $R-Mod$, las cuales son del tipo $\sigma[M]$ y analizaremos algunas de las propiedades que, como categoría, tienen. Probaremos que en las categorías del tipo $\sigma[M]$ todo objeto tiene una cápsula inyectiva. Finalmente estudaremos $V-$ *módulos*, que son módulos M donde todo simple en $\sigma[M]$ es inyectivo.

2.1. Generadores y Subgeneradores

Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $\mathcal{U}$ una subclase de objetos de $\mathbf{C}$, decimos que un objeto A de $\mathbf{C}$ es $\mathcal{U}-$*generado* (de manera dual: $\mathcal{U}-$*cogenerado*) si para todo par de morfismos $A \xrightarrow{f,g} B$ ($B \xrightarrow{f,g} A$) distintos, existe U objeto de $\mathcal{U}$ y un morfismo $U \xrightarrow{h} A$ ($A \xrightarrow{h} U$) tal que $f \circ h \neq g \circ h$ ($h \circ f \neq h \circ f$) $\mathcal{U}$ genera (cogenera) a $\mathbf{C}$ si todos los objetos de $\mathbf{C}$ son $\mathcal{U}-$generados ($\mathcal{U}-$cogenerados).

Si $\mathcal{U}$ consta solo de un objeto U diremos que A es $U-$generado y $U-$cogenerado en vez de $\mathcal{U}-$generado y $\mathcal{U}-$cogenerado, respectivamente.

Proposición 2.1 *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto de objetos de $\mathbf{C}$ de tal forma que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un conjunto de objetos $\mathcal{V}_U$ de $\mathbf{C}$ tal que U es $\mathcal{V}_U-$ generado. Si A es un objeto $\mathcal{U}-$ generado de $\mathbf{C}$, entonces A es $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{V}_U-$ generado.*

Dem: Sean $A \xrightarrow{f,g} B$ morfismos distintos, entonces existe U objeto de $\mathcal{U}$ y un morfismo $U \xrightarrow{h} A$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$, por lo que existe $V \in \mathcal{V}_U \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{V}_U$ y un morfismo $V \xrightarrow{\varphi} U$ tal que $f \circ h \circ \varphi \neq g \circ h \circ \varphi$. Por lo tanto $V \xrightarrow{h\circ\varphi} A$ cumple con lo requerido. ■

Proposición 2.2 *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto de objetos de C de tal forma que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un conjunto de objetos $\mathcal{V}_U$ de C tal que U es $\mathcal{V}_U$ − cogenerado. Si A es un objeto $\mathcal{U}$ − cogenerado de C, entonces A es $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U$ − cogenerado.* ■

De estas dos proposiciones podemos concluir que si N es $\mathcal{U}$ − *generado*, respectivamente $\mathcal{U}$ − *cogenerado*, y cada elemento de $\mathcal{U}$ es $\mathcal{V}$ − *generado*, respectivamente cada elemento de $\mathcal{U}$ es $\mathcal{V}$ − *cogenerado*, entonces N es $\mathcal{V}$ − *generado* o $\mathcal{V}$ − *cogenerado*, según corresponda.

Proposición 2.3 *Sea C una categoría y $\mathcal{U}$ una subclase de objetos de C, si A es un objeto de C, el cual es $\mathcal{U}$−generado, entonces todos sus cocientes son $\mathcal{U}$−generados.*

Dem: Consideremos B un cociente de A con epimorfismo $A \xrightarrow{f} B$, sean $B \xrightarrow{g,\,k} C$ morfismos distintos, como f es epimorfismo $g \circ f \neq k \circ f$, entonces por ser A $\mathcal{U}$−generado existe U objeto de $\mathcal{U}$ y $U \xrightarrow{h} A$ tal que $g \circ f \circ h \neq k \circ f \circ h$, de donde tenemos que B es $\mathcal{U}$−generado. ■

Proposición 2.4 *Sea C una categoría y $\mathcal{U}$ una subclase de objetos de C, si A es un objeto de C, el cual es $\mathcal{U}$−cogenerado, entonces todos sus subobjetos son $\mathcal{U}$−cogenerados.*

Dem: Consideremos $B \overset{f}{\hookrightarrow} A$, sean $C \xrightarrow{g,\,k} B$ morfismos distintos, como f es monomorfismo $f \circ g \neq f \circ k$, entonces por ser A $\mathcal{U}$−cogenerado existe U objeto de $\mathcal{U}$ y $U \xrightarrow{h} A$ tal que $h \circ f \circ g \neq h \circ f \circ k$, de donde tenemos que B es $\mathcal{U}$−cogenerado. ■

Proposición 2.5 *Sean C una categoría y A, B objetos de C isomorfos, entonces A es $\mathcal{U}$−generado si y sólo si B lo es.*

Dem: Como A y B son cocientes uno del otro el resultado se sigue de la proposición (2.3). ■

Proposición 2.6 *Sean C una categoría y A, B objetos de C isomorfos, entonces A es $\mathcal{U}$−cogenerado si y sólo si B lo es.* ■

Si $\mathcal{U}$ es una subclase de objetos de una categoría C, la subcategoría generada por $\mathcal{U}$, $G[\mathcal{U}]$, es la subcategoría plena de C de todos los objetos $\mathcal{U}$−generados y $CG[\mathcal{U}]$ es la subcategoría plena de C de todos los objetos $\mathcal{U}$−cogenerados.

Por los resultados anteriores tenemos que $G[\mathcal{U}]$ es cerrada bajo cocientes y copias isomorfas, además todos los objetos de $\mathcal{U}$ son objetos de $G[\mathcal{U}]$ y la categoría $CG[\mathcal{U}]$ es cerrada bajo subobjetos y copias isomorfas.

Proposición 2.7 *Si C es una categoría cerrada bajo coproductos, entonces para cualquier objeto A de C y $\mathcal{U}$ conjunto de objetos de C, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. A es $\mathcal{U}-$generado;

2. Existe un conjunto Λ y $\coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \xrightarrow{\varphi} A$ un epimorfismo con los $U_\lambda \in \mathcal{U}$.

Dem: 1) $\Rightarrow$ 2) Consideremos para cada U en $\mathcal{U}$ el conjunto $\Lambda_U = Hom_C(U, A)$, para cada $f \in Hom(U, A)$ hacemos $U_f = U$, entonces tenemos la colección de morfismos $U_f \xrightarrow{f} A$ que induce un morfismo f_U que hace conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A & \coprod_{f\in\Lambda_U} U_f \arrow[l, "f_U"'] \\ U_f \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\iota_f"'] & \end{tikzcd}$$

haciendo para cada $U \in \mathcal{U}$ $\quad A_U = \coprod_{f\in\Lambda_U} U_f$ tenemos la colección de morfismos $A_U \xrightarrow{f_U} A$ que induce un morfismo φ que hace conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A & \coprod_{U\in\mathcal{U}} A_U \arrow[l, "\varphi"'] \\ A_U \arrow[ul, "f_U"] \arrow[ur, "j_U"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $A \xrightarrow{g,h} B$ morfismos distintos, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ y $U \xrightarrow{f} A$ tal que $g \circ f \neq h \circ f$, de donde $g \circ f_U \circ \iota_f \neq h \circ f_U \circ \iota_f$ y de aquí $g \circ \varphi \circ j_U \circ \iota_f \neq h \circ \varphi \circ j_U \circ \iota_f$, de donde concluimos que $g \circ \varphi \neq f \circ \varphi$, es decir, φ es epimorfismo.

2) $\Rightarrow$ 1) Consideremos Λ un conjunto y φ epimorfismo que satisfacen (2), sean $A \xrightarrow{f,g} B$ morfismos distintos, por ser φ epimorfismo $f \circ \varphi \neq g \circ \varphi$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f \circ \varphi \circ \iota_\lambda \neq g \circ \varphi \circ \iota_\lambda$. Por lo tanto A es $\mathcal{U}-$generado. ■

Proposición 2.8 *Si C es una categoría cerrada bajo coproductos, entonces para cualquier objeto A de C y $\mathcal{U}$ conjunto de objetos de C, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. A es $\mathcal{U}-$cogenerado;

2. Existe un conjunto Λ y $A \xrightarrow{\varphi} \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ un monomorfismo con los $U_\lambda \in \mathcal{U}$.

Dem: La demostración se hace de manera dual a la anterior. ■

De la demostración de las proposiciones anteriores notemos que si la categoría $\mathbf{C}$ es cerrada bajo productos y coproductos y el objeto A es $\mathcal{U}-$generado o bien $\mathcal{U}-$cogenerado, con $\mathcal{U}$ conjunto de objetos de $\mathbf{C}$, entonces A es $\coprod_{U\in\mathcal{U}} U-$generado o, respectivamente, $\prod_{U\in\mathcal{U}} U-$cogenerado, es decir:

Proposición 2.9 *Si $\mathbf{C}$ es cerrada bajo productos y coproductos y $\mathcal{U}$ es un conjunto de objetos de $\mathbf{C}$, entonces existe un objeto A de $\mathbf{C}$ tal que $G[\mathcal{U}]$ coincide con la categoría $G[A]$ y un objeto B tal que $CG[\mathcal{U}]$ es la categoría $CG[B]$.* ■

Como ejemplo importante tenemos el siguiente.

Ejemplo 2.1 *En la categoría $R-Mod$, para un módulo M, el morfismo*

$$\varphi : R^{(M)} \to M$$
$$\varphi\left((r_m)_{m\in M}\right) = \sum r_m m,$$

es epimorfismo, de donde todo $R-$módulo es $R-$generado y de aquí $G[R] = R-Mod$.

Ejemplo 2.2 *Recordemos que un grupo abeliano es de torsión si todos sus elementos tienen orden finito y es libre de torsión si el único elemento de orden finito es 0. Sea M un grupo libre de torsión, para cada $x \in M$ no cero definamos el morfismo*

$$g_x : \langle x\rangle \to \mathbb{Q}$$
$$g_x(mx) = m,$$

el cual esta bien definido, pues si $mx = m'x$ tenemos $(m-m')x = 0$, de donde, $m - m' = 0$. Es obvio que es morfismo y $g_x(x) = 1$. Mas abajo probaremos que $\mathbb{Q}$ es inyectivo en la categoría $\mathbb{Z}-Mod$, este hecho nos indica que existe un morfismo $f_x : M \to \mathbb{Q}$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \langle x\rangle & \hookrightarrow & M \\ g_x \downarrow & \swarrow f_x & \\ \mathbb{Q} & & \end{array}$$

Entonces $f_x(x) = 1$. Tomando f_0 como el morfismo cero, la familia $\{f_x\}_{x\in M}$ induce

un único morfismo $M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}^M$ *tal que para todo* $x \in M$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_x"'] & & \mathbb{Q}^M \arrow[dl, "\pi_x"] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Entonces si $z \in Nu\varphi$ *tenemos* $0 = \pi_z \circ \varphi(z) = f_z(z)$, *con lo que* $z = 0$. *Por lo tanto* φ *es monomorfismo y con esto concluimos que* M *es* $\mathbb{Q}-$*cogenerado.*

Si $\mathbf{C}$ es una categoría completa (cocompleta) diremos que el objeto A es finitamente generado (cogenerado), si dado un epimorfismo (monomorfismo) $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \longrightarrow A$ $\left(f : A \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)$ existe un conjunto $\Delta \subset \Lambda$, con Δ finito tal que la composición $\coprod_{\lambda\in\Delta} U_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \longrightarrow A$ $\left(A \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Delta} U_\lambda\right)$ sigue siendo epimorfismo (monomorfismo).

Ejemplo 2.3 *Si* M *es un* $R-$*módulo y existen* $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ *tales que para cada* $m \in M$ *existen* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ *que hacen que* $m = r_1m_1 + r_2m_2 + \ldots + r_nm_n$, *es decir que* M *es finitamente generado en el sentido usual. Sea* $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \longrightarrow M$ *un epimorfismo y para cada* m_i *tomemos* $u_i \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ *tal que* $f(u_i) = m_i$, *si* $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in_i}$ *son las coordenadas no cero de* u_i, *con* $u_{ij} \in U_{ij}$, *entonces podemos pensar a los* u_i *como elementos de* $\coprod U_{ij}$ *y la composición* $\coprod U_{ij} \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \longrightarrow M$ *sigue siendo epimorfismo.*
Inversamente, supongamos que M *es finitamente generado, en el sentido categórico, sabemos que*

$$f : \coprod_{x\in M} \langle x\rangle \longrightarrow M$$
$$f\left((rx)_{x\in M}\right) = \sum rm$$

es epimorfismo, entonces existen $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ *tales que la composición*

$$\coprod_{i=1}^{n} \langle m_i\rangle \longrightarrow \coprod_{x\in M} \langle x\rangle \longrightarrow M$$

sigue siendo epimorfismo, es decir para cada $m \in M$ *existen* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ *tales que* $r_1m_1 + r_2m_2 + \ldots + r_nm_n = f\left((r_1m_1, r_2m_2, \ldots, r_nm_n)\right) = m$.

Un objeto A de $\mathbf{C}$ es cíclico (cocíclico) si dado cualquier monomorfismo (epimorfismo) $\varphi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \to A$ ($\varphi : A \to \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\varphi \circ i_{\lambda_0} : U_{\lambda_0} \to A$ ($\pi_0 \circ \varphi : A \to U_{\lambda_0}$) es monomorfismo (epimorfismo).

También en una categoría completa y cocompleta las subcategorías del tipo $G[\mathcal{U}]$ son cocompletas y las subcategorías $CG[\mathcal{U}]$ son completas, como lo indica el siguiente resultado:

Proposición 2.10 *Si $\mathbf{C}$ es categoría completa y cocompleta y A un objeto de $\mathbf{C}$, entonces para cualquier familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de objetos en $G[A]$ el coproducto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un objeto de $G[A]$ y para cualquier familia $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de objetos en $CG[A]$ el producto $\prod_{\delta\in\Lambda} B_\delta$ es un objeto de $CG[A]$.*

Dem: Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos el epimorfismo $A^{(I_\lambda)} \xrightarrow{\varphi_\lambda} A_\lambda$, entonces los morfismos $\iota_\lambda \circ \varphi_\lambda$ inducen un morfismo φ

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda & & \coprod_{\lambda\in\Lambda} A^{(I_\lambda)} \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& A^{(I_\lambda)} \arrow[ul, "\iota_\lambda \circ \varphi_\lambda"] \arrow[ur, "j_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $f \circ \varphi = g \circ \varphi$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ $\quad f \circ \varphi \circ j_\lambda = g \circ \varphi \circ j_\lambda$, de donde $f \circ \iota_\lambda \circ \varphi_\lambda = g \circ \iota_\lambda \circ \varphi_\lambda$, como φ_λ es epimorfismo tenemos que $f \circ \iota_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$, de aquí concluimos que $f = g$, es decir φ es epimorfismo. De manera dual se prueba la otra afirmación. ■

Proposición 2.11 *Si $\mathbf{C}$ es cerrada bajo productos y coproductos, entonces para cualquier conjunto $\mathcal{U}$ de objetos de $\mathbf{C}$, la categoría $G[\mathcal{U}]$ es la mínima subcategoría plena de $\mathbf{C}$ cerrada bajo cocientes y coproductos que contiene a todos los objetos en $\mathcal{U}$ y $CG[\mathcal{U}]$ es la mínima subcategoría plena de $\mathbf{C}$ cerrada bajo subobjetos y productos que contiene a todos los objetos de $\mathcal{U}$, mínima en el siguiente sentido:*
Si $\mathbf{C}'$ es una subcategoría plena de $\mathbf{C}$ cerrada bajo cocientes y coproductos que contiene a todos los objetos de $\mathcal{U}$, entonces todos los objetos de $G[\mathcal{U}]$ son objetos de $\mathbf{C}'$.

Dem: Sea $\mathbf{C}$' subcategoría de $\mathbf{C}$ cerrada bajo cocientes y coproductos que contenga a $\mathcal{U}$, como todo objeto de $G[\mathcal{U}]$ es cociente de un coproducto de los elementos de $\mathcal{U}$ tenemos que todo objeto de $G[\mathcal{U}]$ es objeto de $\mathbf{C}$'. La segunda afirmación se demuestra de forma análoga. ■

Consideremos un objeto A de $G[\mathcal{U}]$ y sean $L_{\mathbf{C}}(A)$ y $L_{G[\mathcal{U}]}(A)$ las colecciones de subobjetos de A en $\mathbf{C}$ y $G[\mathcal{U}]$ respectivamente, las cuales en general no coinciden, como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4 *En la categoría de grupos abelianos $G[\mathbb{Z}]$, los enteros $\mathbb{Z}$ son un subgrupo de $\mathbb{Q}$, pero $\mathbb{Z}$ no es $\mathbb{Q}-$generado pues si existiera un conjunto Λ y un epimorfismo*

$$\varphi : \mathbb{Q}^{(\Lambda)} \to \mathbb{Z},$$

entonces hay un $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \mathbb{Q}^{(\Lambda)}$ tal que $\varphi(x) = 1$, de donde

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(x) \\ &= \varphi\left(2\left(\frac{x_\lambda}{2}\right)_{\lambda\in\Lambda}\right) \\ & \quad 2\varphi\left(\left(\frac{x_\lambda}{2}\right)_{\lambda\in\Lambda}\right) \end{aligned}$$

y de esto se concluye que 2 divide a 1, lo cual no es posible. Por lo tanto $L_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Q}) \neq L_{G[\mathbf{Q}]}(\mathbb{Q})$, pues $\mathbb{Z}$ ni siquiera es un objeto en $G[\mathbb{Q}]$.

Si $\mathbf{C}$ es una categoría y $\mathcal{U}$ una subclase de objetos de $\mathbf{C}$, decimos que un objeto A de $\mathbf{C}$ es $\mathcal{U}-$subgenerado si A es subobjeto de un objeto $\mathcal{U}-$generado. Si $\mathcal{U}$ consta solo del objeto U diremos $U-$subgenerado en vez de $\mathcal{U}-$subgenerado. $\mathcal{U}$ subgenera a la categoría $\mathbf{C}$ si subgenera todos los objetos de esta.

Denotamos por $\sigma[\mathcal{U}]$ a la subcategoría plena de $\mathbf{C}$ de los objetos $\mathcal{U}-$subgenerados.

Proposición 2.12 *La categoría $G[\mathcal{U}]$ es subcategoría plena de $\sigma[\mathcal{U}]$.*

Dem: El resultado se sigue del hecho de que todo objeto de $G[\mathcal{U}]$ es subobjeto de sí mismo. ■

De la definición tenemos que $\sigma[\mathcal{U}]$ es cerrada bajo subobjetos y copias isomorfas.

Consideremos una categoría abeliana cocompleta $\mathbf{C}$, entonces tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.13 *Para una categoría abeliana $\mathbf{C}$ y una subclase $\mathcal{U}$ de objetos de $\mathbf{C}$ se cumple que A es objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$ si y sólo si A es isomorfo al núcleo de un morfismo en $G[\mathcal{U}]$.*

Dem: Supongamos que A es objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$ entonces existe F objeto de $G[\mathcal{U}]$ tal que $A \overset{f}{\subset} F$ entonces $(A, 1_A)$ es el $Conu(nuf) \simeq Nu(conuf)$ y $conuf$ es un epimorfismo en $G[\mathcal{U}]$.

Ahora supongamos que A es isomorfo al núcleo del morfismo $B \xrightarrow{f} C$ en $G[\mathcal{U}]$, digamos que $A \overset{\varphi}{\simeq} Nuf$ entonces $A \overset{nuf\circ\varphi}{\subset} B$, por lo cual A es objeto en $\sigma[\mathcal{U}]$. ■

Proposición 2.14 *Para cualquier conjunto $\mathcal{U}$ de objetos de la categoría abeliana* C, *se cumple que $\sigma[\mathcal{U}]$ es una subcategoría cerrada bajo subobjetos, coproductos y cocientes.*

Dem: Si A es un objeto en $\sigma[\mathcal{U}]$ y $f : B \to A$ monomorfismo, entonces existe F objeto de $G[\mathcal{U}]$ y un monomorfismo $g : A \to F$, por lo que $g \circ f : B \to F$ es monomorfismo, y con esto B es objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$.

Sea A un objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$ y F objeto en $G[\mathcal{U}]$ tal que A sea subobjeto de F, entonces para cualquier subobjeto B de A se tiene que $\frac{A}{B}$ es subobjeto de $\frac{F}{B}$ que es objeto de $G[\mathcal{U}]$, por lo que $\frac{A}{B}$ es objeto en $\sigma[\mathcal{U}]$. De manera más general: si $A \xrightarrow{f} B$ es epimorfismo con A objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$ entonces $B \simeq \frac{A}{Nuf}$ que es un objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$.

Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos de C, entonces para cada $\lambda \in \Lambda$ existe F_λ objeto de $G[\mathcal{U}]$ y un monomorfismo $f_\lambda : A_\lambda \to F_\lambda$ entonces $\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ es monomorfismo. Por lo que $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es objeto de $\sigma[\mathcal{U}]$. ■

Proposición 2.15 *Para cualquier conjunto $\mathcal{U}$ de objetos de* C *tenemos que $\sigma[\mathcal{U}]$ es la mínima subcategoría plena de* C *cerrada bajo cocientes, subobjetos y coproductos que contiene a todos los objetos en $\mathcal{U}$.*

Dem: Sea C' una subcategoría plena de C tal que $\mathcal{U}$ es un conjunto de objetos de C' y C' es cerrada bajo cocientes, subobjetos y coproductos. Por ser C' cerrada bajo cocientes y coproductos tenemos que $G[\mathcal{U}]$ es subcategoría de C', de donde concluimos que si $A \subset B$ con B objeto de $G[\mathcal{U}]$, entonces A es objeto de C'. De aquí que $\sigma[\mathcal{U}]$ es una subcategoría de C'. ■

2.2. Subcategorías Cerradas de $R - Mod$

Una subcategoría cerrada de $R - Mod$ es una subcategoría plena de $R - Mod$ que es cerrada bajo submódulos, sumas directas (coproductos) y cocientes.

Todas las subcategorías del tipo $\sigma[\mathcal{U}]$, con $\mathcal{U}$ un conjunto de $R-$ *módulos*, son subcategorías cerradas de $R-Mod$ e inversamente, toda subcategoría cerrada de $R-Mod$ es del tipo $\sigma[\mathcal{U}]$ como lo indican los siguientes resultados. Notemos que como la subcategoría $\sigma[\mathcal{U}]$ es subcategoría plena de $R-Mod$ y es cerrada bajo coproductos, los coproductos de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, tanto en $R-Mod$ como en $\sigma[\mathcal{U}]$ coinciden.

Proposición 2.16 *Si C es subcategoría cerrada de $R-Mod$, entonces $\mathbf{C}$ es la categoría $\sigma[M]$, donde*

$$M = \coprod\left\{\frac{R}{I} : \frac{R}{I} \text{ es objeto de } \mathbf{C}\right\}.$$

Dem: Como $\mathbf{C}$ es cerrada bajo submódulos, sumas directas, cocientes y M es objeto de $\mathbf{C}$, entonces $\sigma[M]$ es subcategoría de $\mathbf{C}$.

Por otro lado tenemos para cada $R-$ *módulo* N el epimorfismo,

$$\varphi : \bigoplus_{x\in N}\langle x\rangle \to N$$
$$\varphi\left((rx)_{x\in N}\right) = \sum rx$$

es decir, N está generado por sus submódulos cíclicos. Entonces si N es un objeto de $\mathbf{C}$

$$N \simeq \frac{\bigoplus_{x\in N}\langle x\rangle}{Nu\varphi}$$

Por otro lado para cada $x \in N$ tenemos que $\langle x\rangle$ es objeto de $\mathbf{C}$ y el morfismo

$$f : R \to \langle x\rangle$$
$$f(r) = rx$$

es epimorfismo, con lo que $\langle x\rangle \simeq \frac{R}{Nuf} \overset{i_{\frac{R}{Nuf}}}{\subset} M$, entonces $\langle x\rangle$ es objeto de $\sigma[M]$. Como $\sigma[M]$ es subcategoría cerrada, resulta que $\frac{\bigoplus_{x\in N}\langle x\rangle}{Nu\varphi}$ es objeto de $\sigma[M]$ y esto último implica que N es objeto de $\sigma[M]$. ■

De esta última proposición podemos concluir:

Proposición 2.17 *Toda subcategoría cerrada de $R-Mod$ es del tipo $\sigma[M]$, para algún módulo M fijo.* ■

Ejemplo 2.5 *Si I es un ideal bilateral de R, $\sigma\left[\frac{R}{I}\right]$ es la clase de todos los $R-$ módulos M tales que $IM = 0$, que se puede identificar con la categoría de módulos*

$\frac{R}{I}-Mod$. *En efecto, si* N *es un objeto de* $\sigma\left[\frac{R}{I}\right]$ *existe un objeto* F *de* $G\left[\frac{R}{I}\right]$ *tal que* $N \overset{f}{\subset} F$. *Consideremos* $\varphi : \left(\frac{R}{I}\right)^{(\Lambda)} \to F$ *epimorfismo y* $n \in N$, *entonces existe* $(r_\lambda + I)_{\lambda\in\Lambda} \in \left(\frac{R}{I}\right)^{(\Lambda)}$ *tal que* $\varphi\left((r_\lambda + I)_{\lambda\in\Lambda}\right) = f(n)$. *Si* $s \in I$, *entonces*

$$f(sn) = sf(n) = s\varphi\left((r_\lambda + I)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \varphi\left(s(r_\lambda + I)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \varphi\left((sr_\lambda + I)_{\lambda\in\Lambda}\right) = 0$$

y como f *es monomorfismo* $sn = 0$. *Ahora si* M *es un* $R-$*módulo tal que* $IM = 0$ *tomemos el morfismo*

$$\varphi : \left(\frac{R}{I}\right)^{(M)} \to M$$
$$\varphi\left((r_m + I)_{m\in M}\right) = \sum r_m \cdot m$$

Primero veamos que φ *esta bien definido:*
Si $r_m - r'_m \in I$ *entonces* $(r_m - r'_m)m = 0$ *y de aquí que,* $r_m \cdot m = r'_m \cdot m$. *Como* $r_m \in I$ *para casi todo* $m \in M$, $\sum r_m \cdot m$ *es una suma finita. Es fácil verificar que* φ *es epimorfismo, entonces* M *es un objeto de* $G\left[\frac{R}{I}\right]$ *y en particular de* $\sigma\left[\frac{R}{I}\right]$.

Ejemplo 2.6 $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}] = \{p-grupos\}$. *Es claro que todo objeto de* $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}]$ *es un* $p-grupo$. *Ahora si* M *es un* $p-grupo$ *y* $m \in M$ *con orden* p^k, *entonces* $\langle m\rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^k}$. *Consideremos la función*

$$\varphi : \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$$
$$\varphi\left(a + p^k\mathbb{Z}\right) = \frac{a}{p^k} + \mathbb{Z}$$

la cual esta bien definida pues si $a + p^k\mathbb{Z} = a' + p^k\mathbb{Z}$ *tenemos* $a - a'$ *es múltiplo de* p^k, *por lo que* $\frac{a}{p^k} - \frac{a'}{p^k} = \frac{a-a'}{p^k} \in \mathbb{Z}$. *Si* $\frac{a}{p^k} + \mathbb{Z} = 0$, *esto es* $\frac{a}{p^k} \in \mathbb{Z}$, *entonces* $a + p^k\mathbb{Z} = 0$, *esto implica que* φ *es monomorfismo. Por lo tanto* $\bigoplus_{m\in M}\langle m\rangle$ *es objeto en* $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}]$ *y como* M *es cociente de* $\bigoplus_{m\in M}\langle m\rangle$ *se tiene que* M *es un objeto de* $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}]$.

Otro hecho importante es que toda categoría del tipo $\sigma[M]$ es del tipo $G[M]$, lo cual se deduce inmediatamente del la siguiente proposición.

Proposición 2.18 $\sigma[M]$ *tiene un generador.*

Dem: Consideremos el conjunto de todos los submódulos cíclicos de $M^{(N)}$

$$\mathcal{U} = \left\{\langle m\rangle : m \in M^{(N)}\right\}$$

Si N es un objeto en $\sigma[M]$, podemos tomar un objeto F en $G[M]$ de tal forma que N sea un submódulo de F. Sea

$$\varphi : M^{(\Lambda)} \to F$$

un epimorfismo y $n \in N$, consideremos $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M^{(\Lambda)}$ de tal forma que $\varphi\left((m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = n$, y sean $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \ldots m_{\lambda_k}$ las coordenadas de $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ distintas de cero, con estas coordenadas construimos el elemento $m = (m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \ldots m_{\lambda_k}, 0, 0, \ldots) \in M^{(\mathbb{N})}$ y el morfismo

$$\begin{aligned} \phi : \langle m\rangle &\to \langle n\rangle \\ \phi(rm) &= \varphi\left(r\,(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \end{aligned}$$

que es epimorfismo. Por lo tanto todo submódulo cíclico de N es $\mathcal{U}-$*generado* y como N está generado por todos sus submódulos cíclicos, entonces N es $\mathcal{U}-$*generado* para todo objeto de $\sigma[M]$. Finalmente por la prosición (2.9) $\sigma[M]$ tiene un generador, a saber $\bigoplus_{U\in\mathcal{U}} U$. ■

$\sigma[M]$ no necesariamente es cerrada bajo extensiones en $R-Mod$, como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo **2.7** *Consideremos la siguiente sucesión exacta en* $\mathbb{Z}-Mod$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

con

$$\begin{aligned} f(a+2\mathbb{Z}) &= 2a+4\mathbb{Z} \\ g(a+4\mathbb{Z}) &= a+2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2$ *es un objeto de* $\sigma[\mathbb{Z}_2]$ *pero* $\mathbb{Z}_4$ *no es objeto en* $\sigma[\mathbb{Z}_2] = \sigma\left[\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right]$, *pues* $(2\mathbb{Z})\,\mathbb{Z}_4$ *no es cero.*

$\sigma[M]$ no necesariamente es cerrada bajo productos directos, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo **2.8** $\mathbb{Z}_{p^n}$ *es un objeto de* $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}]$ *pero* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ *no es objeto en* $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}]$, *pues* $\mathbb{Z}$ *es isomorfo a un submódulo de* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ *y por lo tanto* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ *no es* $p-$*grupo.*

A pesar de que $\sigma[M]$ como clase de módulos no es cerrado bajo extensiones y productos, tiene como categoría, producto directo como probaremos a continuación.

Si M es $R-$*módulo* y $\mathcal{U}$ una clase de $R-$*módulos*, definimos la Traza y el Rechazo de $\mathcal{U}$ en M como

$$\begin{aligned} Tr(\mathcal{U}, M) &= \sum \{Imf : f \in Hom_R(U, M), U \in \mathcal{U}\} \\ Rej(\mathcal{U}, M) &= \bigcap \{Nuf : f \in Hom_R(M, U), U \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

Notemos que aun cuando $\mathcal{U}$ no sea un conjunto, tanto la suma en la traza como la intersección en el rechazo, se hacen en una familia de subconjuntos de M, por lo cual $Tr(\mathcal{U}, M)$ y $Rej(\mathcal{U}, M)$ están bien definidos.

Proposición 2.19 *Para un $R-$módulo M y una clase de $R-$módulos $\mathcal{U}$ se cumplen:*
1. $Tr(\mathcal{U}, M)$ es el mayor submódulo de M que es $\mathcal{U}-$generado.
2. $Rej(\mathcal{U}, M)$ es el menor submódulo de M tal que $\frac{M}{Rej(\mathcal{U}, M)}$ es $\mathcal{U}-$cogenerado.

Dem: 1. Como para todo objeto U en $\mathcal{U}$ y f en $Hom_R(U, M)$ se tiene que Imf es $\mathcal{U}-$*generado*, entonces $Tr(\mathcal{U}, M)$ es $\mathcal{U}-$*generado*.

Sea K es un submódulo de M que sea $\mathcal{U}-$*generado*, entonces existe un conjunto Λ y un epimorfismo

$$\varphi : \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \to K,$$

para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos el morfismo $f_\lambda = j \circ \varphi \circ i_\lambda$, con j la inclusión de K en M e i_λ la $\lambda-$inclusión de U_λ en $\coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Sea $x \in K$ y tomemos $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ tal que $\varphi\left((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right) = x$, entonces

$$\begin{aligned} x &= \varphi\left((m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda(m_\lambda)\right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi \circ i_\lambda(m_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} j \circ \varphi \circ i_\lambda(m_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(m_\lambda) \\ &\in Tr(\mathcal{U}, M), \end{aligned}$$

de donde, $K \leq Tr(\mathcal{U}, M)$.

2. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y $f \in Hom_R(M, U)$ tenemos que $\frac{M}{Nuf} \simeq \mathrm{Im} f \leq U$, entonces $\frac{M}{Nuf}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*. Como $CG[\mathcal{U}]$ es cerrada bajo productos y subobjetos $\prod \frac{M}{Nuf}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*. Por otro lado definamos

$$\varphi : \frac{M}{Rej(\mathcal{U}, M)} \to \prod \frac{M}{Nuf}$$
$$\varphi(x + Rej(\mathcal{U}, M)) = (x + Nuf)_f .$$

Si $x - y \in Rej(\mathcal{U}, M)$, entonces $x - y \in Nuf$ para toda $U \in \mathcal{U}$ y $f \in Hom_R(M, U)$, por lo tanto φ está bien definida y es claro que es morfismo. Ahora, si $\varphi(x + Rej(\mathcal{U}, M)) = 0$, tenemos $x + Nuf = 0$ para toda $U \in \mathcal{U}$ y $f \in Hom_R(M, U)$, es decir $x \in Rej(\mathcal{U}, M)$, por lo que φ es monomorfismo y con esto $\frac{M}{Rej(\mathcal{U},M)}$ es submódulo de $\prod \frac{M}{Nuf}$. Por lo tanto $\frac{M}{Rej(\mathcal{U},M)}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*.

Sea K un submódulo de M de tal forma que $\frac{M}{K}$ sea $\mathcal{U}$ – *cogenerado*, entonces existe un conjunto Λ y un monomorfismo $f : \frac{M}{K} \to \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, con los U_λ en $\mathcal{U}$. Sea $x \in Rej(\mathcal{U}, M)$ y consideremos $\eta : M \to \frac{M}{K}$ canónico, entonces $x \in Nu(\pi_\lambda \circ f \circ \eta)$ para toda $\lambda \in \Lambda$, es decir, $\pi_\lambda \circ f \circ \eta(x) = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, por lo cual $f \circ \eta(x) = 0$, pero f es monomorfismo, entonces $\eta(x) = 0$, por lo que $x \in K$. Por lo tanto $Rej(\mathcal{U}, M) \leq K$. ■

Corolario 2.19.1 *M es $\mathcal{U}$ – generado si y sólo si $Tr(\mathcal{U}, M) = M$.*

Dem: Si $Tr(\mathcal{U}, M) = M$, entonces M es $\mathcal{U}$ – *generado*. Supongamos que M es $\mathcal{U}$ – *generado*, Entonces $M \leq Tr(\mathcal{U}, M)$, pero $Tr(\mathcal{U}, M)$ siempre es submódulo de M. ■

Corolario 2.19.2 *M es $\mathcal{U}$ – cogenerado si y sólo si $Rej(\mathcal{U}, M) = 0$.*

Tenemos que $Rej(\mathcal{U}, M)$ es tal que $\frac{M}{Rej(\mathcal{U},M)}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*, entonces si se cumple que $Rej(\mathcal{U}, M) = 0$ concluimos que $M \simeq \frac{M}{Rej(\mathcal{U},M)}$, con lo que M es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*. Supongamos que M es $\mathcal{U}$ – *cogenerado* o equivalentemente $\frac{M}{0}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*, por la proposición anterior, tenemos $Rej(\mathcal{U}, M)$ es el mínimo submódulo de M tal que $\frac{M}{Rej(\mathcal{U},M)}$ es $\mathcal{U}$ – *cogenerado*, con lo que $Rej(\mathcal{U}, M) = 0$.

Proposición 2.20 *Si N es un generador de $\sigma[M]$, (el cual existe por la proposición (2.18)), $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de objetos en $\sigma[M]$ y $\left(\prod_\Lambda N_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$ es el producto directo en $R - Mod$ de $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, entonces*

$$\left(Tr\left(N, \prod_\Lambda N_\lambda\right), \left\{\pi_\lambda |_{Tr\left(N, \prod_\Lambda N_\lambda\right)}\right\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$$

es el producto directo de $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $\sigma[M]$.

Dem: Para probar que $\left(Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda), \left\{\pi_\lambda|_{Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda)}\right\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ es el producto directo de $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\sigma[M]$, probaremos que $Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda)$ satisface la propiedad universal del producto.

Para cada $\lambda\in\Lambda$, consideremos $p_\lambda = \pi_\lambda|_{Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda)}$ y sea $\left\{X \xrightarrow{f_\lambda} N_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de morfismos en $\sigma[M]$. Vista la familia $\left\{X \xrightarrow{f_\lambda} N_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $R-Mod$, induce un único morfismo $\varphi : X \to \prod_\Lambda N_\lambda$, en $R-Mod$, tal que para toda $\lambda\in\Lambda$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \\ f_\lambda \searrow & & \swarrow \pi_\lambda \\ & N_\lambda & \end{array}$$

Entonces $Im\varphi \leq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ y como X es un objeto de $\sigma[M]$, también $Im\varphi$ es un objeto de $\sigma[M]$, de donde $Im\varphi$ es $N-generado$. Como $Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda)$ es el mayor de los submódulos de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ que es $N-generado$, tenemos que $\operatorname{Im}\varphi \leq Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda)$. Es claro ahora que, para cada $\lambda\in\Lambda$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Tr(N,\prod_\Lambda N_\lambda) \\ f_\lambda \searrow & & \swarrow p_\lambda \\ & N_\lambda & \end{array}$$

conmuta, que es lo que queríamos probar. ■

Este último resultado junto con la proposición (2.14) indican que la subcategorías de $R-Mod$ del tipo $\sigma[M]$ son completas y cocompletas.

Proposición 2.21 *$\sigma[M]$ es una categoría de Grothendieck.*

Dem: Por todo lo dicho antes es claro que $\sigma[M]$ es categoría abeliana, cocompleta y tiene un generador. Sean A un objeto en $\sigma[M]$, $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia dirigida de subobjetos de A y B subobjeto de A, como se dijo en el ejemplo (1.23) la igualdad

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)\cap B = \sum_{\lambda\in\Lambda}(B_\lambda\cap B)$$

se cumple en la categoría $R-Mod$, por lo que se sigue cumpliendo en $\sigma[M]$. Por lo tanto $\sigma[M]$ es categoría de Grothendieck. ■

2.3. Cápsulas Inyectivas en $\sigma[M]$

Recordemos que si A y B son objetos en una categoría $\mathbf{C}$, decimos que B es $A-$ *inyectivo* si para cualquier monomorfismo $C \xrightarrow{f} A$ y morfismo $C \xrightarrow{g} B$ existe un morfismo $A \xrightarrow{\bar{g}} B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g\downarrow & \swarrow \bar{g} & \\ B & & \end{array}$$

y B es inyectivo en la categoría $\mathbf{C}$ si es A inyectivo para todo objeto A de $\mathbf{C}$.

De la definición se sigue inmediatamente que si $\mathbf{C}'$ es una subcategoría plena de $\mathbf{C}$, un objeto E de $\mathbf{C}'$ que sea inyectivo en la categoría $\mathbf{C}$ sigue siendo inyectivo en la categoría $\mathbf{C}'$, pero el recíproco no es cierto en general, es decir que un objeto que sea inyectivo en $\mathbf{C}'$ no necesariamente es inyectivo en $\mathbf{C}$.

Con respecto a los objetos inyectivos en $\sigma[M]$ tenemos los siguientes resultados:

Proposición 2.22 *Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos. Si E es $M_\lambda-$ inyectivo, para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces E es $\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda-$ inyectivo.*

Dem: Sean $M = \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, N un submódulo de M y $g : N \to E$. Consideremos el conjunto

$$\Im = \left\{(K,h) : N \subset K \subset M,\ K \xrightarrow{h} E \text{ y } h\,|_N = g\right\}$$

ordenado parcialmente como sigue

$$(K,h) \leq (K',h') \text{ si y sólo si } K \subseteq K' \text{ y } h'\,|_K = h$$

Si $\mathfrak{C} = \{(K_\lambda, h_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cadena del conjunto $\Im$, tomemos $S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$, que es un $R-$ *módulo*, pues $\mathfrak{C}$ es cadena. Sea $h : S \to E$ de tal forma que si $x \in S$, con $x \in K_\lambda$, entonces $h(x) = h_\lambda(x)$. h esta bien definida, pues si x es elemento de K_{λ_1} y de K_{λ_2}, con $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$, se tiene que $h_{\lambda_2}\,|_{K_{\lambda_1}} = h_{\lambda_1}$, y es fácil ver que h es morfismo que cumple con $h\,|_N = g$. Es obvio que (S,h) es cota superior de $\Im$.

Consideremos un máximo (K_0, h_0) en $\Im$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & K_0 & \hookrightarrow & M \\ g\downarrow & \swarrow h_0 & & & \\ E & & & & \end{array}$$

Para terminar la demostración basta probar que $K_0 = M$. Sea $\lambda \in \Lambda$ arbitrario, como E es $M_\lambda - inyectivo$ existe $h_\lambda : M_\lambda \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K_0 \cap M_\lambda & \hookrightarrow & M_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow h_\lambda \\ K_0 & \xrightarrow{h_0} & E \end{array}$$

Sea

$$h : K_0 + M_\lambda \to E$$
$$h(k+m) = h_0(k) + h_\lambda(m)$$

Notemos que h está bien definida, pues si $k + m = 0$ entonces $k = -m \in K_0 \cap M_\lambda$ y

$$\begin{aligned} h_\lambda(m) &= -h_\lambda(k) \\ &= -h_0(k), \end{aligned}$$

de donde $h_0(k) + h_\lambda(m) = 0$. Es claro que h es morfismo, $h\mid_{K_0} = h_0$ y $h\mid_N = h_0\mid_N = g$, es decir $(K_0 + M_\lambda, h) \in \Im$, por la maximalidad de (K_0, h_0) tenemos $K_0 + M_\lambda = K_0$. Por lo tanto $M_\lambda \subset K_0$, para toda $\lambda \in \Lambda$, y con esto se concluye que $M \subset K_0$. ■

Proposición 2.23 *Si E es $M - inyectivo$ y $\varphi : M \to N$ es epimorfismo, entonces E es $N - inyectivo$.*

Dem: Basta probar que si N es submódulo de M y E es $M - inyectivo$ entonces es $\frac{M}{N} - inyectivo$.

Sea $\frac{K}{N}$ submódulo de $\frac{M}{N}$ y $g : \frac{K}{N} \to E$. Llamemos η al epimorfismo canónico de K en $\frac{K}{N}$. El que E sea $M - inyectivo$ implica que existe $\varphi : M \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & M \\ g \circ \eta \downarrow & \swarrow \varphi & \\ E & & \end{array}$$

Por otro lado, si $x \in N \subset K$, tenemos $\varphi(x) = g \circ \eta(x) = 0$, por lo que se puede

definir

$$\bar{g} : \frac{M}{N} \to E$$
$$\bar{g}(m + N) = \varphi(m)$$

y si $k \in K$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{g}(k + N) &= \varphi(k) \\ &= g \circ \eta(k) \\ &= g(k + N). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.24 *E es $M-$ inyectivo si y sólo si E es $N-$ inyectivo para todo objeto N de $\sigma[M]$.*

Dem: Si E es $N-$ *inyectivo* para todo objeto N de $\sigma[M]$, entonces E es $M-$ *inyectivo.*

Supongamos que E es $M-$ *inyectivo* y sea N un objeto de $\sigma[M]$, $K \xrightarrow{f} N$ un monomorfismo y $K \xrightarrow{g} E$ un morfismo. Sea F un objeto en $G[M]$ y $N \overset{h}{\subset} F$, entonces existe $\varphi : M^{(\Lambda)} \to F$ epimorfismo. Como E es $M-$ *inyectivo* entonces es $M^{(\Lambda)}-$ *inyectivo*, de aquí que E sea $F-$ *inyectivo*, entonces existe $\phi : F \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ E & \underset{\phi}{\leftarrow} & F \end{array}$$

La demostración se completa tomando $\bar{g} = \phi \circ h$. $\blacksquare$

Lo que nos dice la proposición anterior es que un objeto E en $\sigma[M]$ es inyectivo en la categoría $\sigma[M]$ si y sólo si E es $M-$ *inyectivo* en la categoría $R-Mod$.

Como corolario tenemos el criterio de Baer.

Proposición 2.25 (Criterio de Baer) *E es inyectivo en la categoría $R-Mod$ si y sólo si E es $R-$ inyectivo.* $\blacksquare$

Proposición 2.26 *Si E es $R-$ inyectivo, es decir, si E es inyectivo en $R-Mod$, entonces $Tr(M, E)$ es $M-$ inyectivo.*

Dem: Sea $N \xrightarrow{f} M$ un monomorfismo y $N \xrightarrow{g} Tr(M,E)$ un morfismo cualquiera, tomando el morfismo $N \xrightarrow{i \circ g} E$ tenemos un morfismo $\bar{g} : M \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Tr(M,E) & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

pero $Im(\bar{g}) \subset Tr(M,E)$, por lo que $\bar{g}$ se puede pensar como un morfismo de M en $Tr(M,E)$ y hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & \swarrow & \bar{g} \\ Tr(M,E) & & \end{array}$$

que es lo que se quería probar. ■

Recordemos que una cápsula inyectiva de un objeto A en una categoría de Grothendieck C es una pareja (E,f) con E un objeto inyectivo en C y $f : A \to E$ un monomorfismo esencial. Ahora probaremos que todo objeto de $\sigma[M]$ tiene cápsula inyectiva en $\sigma[M]$, para esto probemos los siguientes resultados.

Lema 2.27 *Sean M, N objetos de una categoría preaditiva C y $N \overset{f}{\subset} K$. Entonces existe un monomorfismo $\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(M,N) \to Hom_{\mathbf{C}}(M,K)$, en la categoría de grupos abelianos.*

Dem: Consideremos

$$\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(M,N) \to Hom_{\mathbf{C}}(M,K)$$
$$\varphi(g) = f \circ g$$

Si $\varphi(g) = \varphi(h)$, tenemos que $f \circ g = f \circ h$, pero f es monomorfismo, entonces $g = h$, de donde concluimos que φ es inyectiva. Ahora $\varphi(g+h) = f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h = \varphi(g) + \varphi(h)$. ■

Lema 2.28 *Si M es un grupo abeliano, es decir un objeto en $\mathbb{Z} - Mod$, entonces para cualquier anillo con uno R se cumplen:*
1. $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ tiene estructura de $R - Módulo$ izquierdo.
2. Si además M es un objeto en $R - Mod$, entonces $Hom_R(R,M)$ es $R - submódulo$ de $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$.

Dem: Recordemos que la estructura de grupo abeliano $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ esta dada del siguiente modo: Si $f, g \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, definamos $f + g$ como:

Si $x \in R$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

1. Para darle estructura de $R-$*módulo izquierdo* a $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, definamos para $r \in R$ y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, rf como sigue:
   Si $x \in R$
   $$(rf)(x) = f(xr)$$
   Primero probemos que $rf \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, para esto tomemos $x, y \in R$, entonces $(rf)(x+y) = f((x+y)r) = f(xr+yr) = f(xr) + f(yr) = (rf)(x) + (rf)(y)$.
   Ahora probemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ es $R-$*módulo.* Sean $f, g \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ y $r, s \in R$:
   Si x es un elemento cualquiera de R tenemos que:

   a) $(r(f+g))(x) = (f+g)(xr) = f(xr) + g(xr) = (rf)(x) + (rg)(x) = (rf+rg)(x)$. Por lo que $r(f+g) = rf + rg$.

   b) $((r+s)f)(x) = f(x(r+s)) = f(xr+xs) = f(xr) + f(xs) = (rf)(x) + (sf)(x) = (rf+sf)(x)$. Por lo tanto $(r+s)f = rf + sf$.

   c) $((rs)f)(x) = f(x(rs)) = f((xr)s) = (sf)(xr) = (r(sf))(x)$. De donde $(rs)f = r(sf)$.

   d) $(1f)(x) = f(x1) = f(x)$. Entonces $1f = f$.

2. Es claro que $Hom_R(R, M)$ es subgrupo de $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, para que sea submódulo, basta probar que para cualquier $f \in Hom_R(R, M)$ y $r \in R$ se cumple que $rf \in Hom_R(R, M)$. Para esto, sean $f \in Hom_R(R, M)$ y $x, r, s \in R$, entonces $(rf)(sx) = f((sx)r) = f(s(xr)) = s(f(xr)) = s((rf)(x))$. ■

Lema 2.29 *Si R es anillo con uno y Q es un grupo abeliano $\mathbb{Z}-$inyectivo, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es $R-$inyectivo.*

Dem: Sea I ideal izquierdo de R y $h \in Hom_R(I, Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q))$. Consideremos

$$\gamma : I \to Q$$

definido como;

$$\gamma(a) = [h(a)](1).$$

Tenemos que para todas $a, b \in I$ se cumple $\gamma(a+b) = [h(a+b)](1) = [h(a) + h(b)](1) = [h(a)](1) + [h(b)](1) = \gamma(a) + \gamma(b)$, con lo cual γ es un morfismo en $\mathbb{Z} - Mod$, como Q es $\mathbb{Z} - inyectivo$ existe un morfismo en $\mathbb{Z} - Mod$, $\bar{\gamma} : R \to Q$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 \to I & \hookrightarrow & R \\ \gamma \downarrow & \swarrow \bar{\gamma} & \\ Q & & \end{array}$$

Ahora definamos

$$\bar{h} : R \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$$
$$\bar{h}(r) = r\bar{\gamma}$$

Si $a \in I$, tenemos para toda $x \in R$ que $[\bar{h}(a)](x) = (a\bar{\gamma})(x) = \bar{\gamma}(xa) = \gamma(xa) = [h(xa)](1) = [xh(a)](1) = [h(a)](x)$, por lo que $\bar{h}(a) = h(a)$, para toda $a \in I$, esto es que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} 0 \to I & \hookrightarrow & R \\ h \downarrow & \swarrow \bar{h} & \\ Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q) & & \end{array}$$

Por lo tanto $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es $\mathbb{Z} - inyectivo$. ■

Lema 2.30 *Si M es un objeto en $R - Mod$, entonces $M \simeq Hom_R(R, M)$.*

Dem: Sea $f : M \to Hom_R(R, M)$ de tal forma que para toda $m \in M$ y $x \in R$

$$[f(m)](x) = xm.$$

Entonces para todos $m, n \in M$ y $x \in R$ tenemos $[f(m+n)](x) = x(m+n) = xm + xn = [f(m)](x) + [f(n)](x) = [f(m) + f(n)](x)$, por lo que $f(m+n) = f(n) + f(n)$. Ahora si r es otro elemento de R tenemos que $[f(rm)](x) = x(rm) = (xr)m = [f(m)](xr) = [r(f(m))](x)$, es decir $f(rm) = r(f(m))$. Por lo tanto f es morfismo.

Supongamos que $f(m) = f(n)$, entonces $[f(m)](1) = [f(n)](1)$, de donde $m = n$. Por último, si $\gamma \in Hom_R(R, M)$, hacemos $m = \gamma(1)$, entonces $[f(m)](x) = xm = x\gamma(1) = \gamma(x)$, por lo que $f(m) = \gamma$. ■

Proposición 2.31 *Todo $R-$módulo M es submódulo de un $R-$módulo inyectivo.*

Dem: Sea M un $R-$*módulo* y considerémoslo como $\mathbb{Z}-$*módulo*, esto es M es un objeto en $G[\mathbb{Z}]$, entonces existe un conjunto Λ y un epimorfismo $f:\mathbb{Z}^{(\Lambda)}\to M$ en $\mathbb{Z}-Mod$, de donde $M\simeq\frac{\mathbb{Z}^{(\Lambda)}}{Nuf}$ en $\mathbb{Z}-Mod$. Por otro lado, $\mathbb{Z}$ es un subgrupo del grupo divisible $\mathbb{Q}$, con lo que $\mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ es subgrupo de $\mathbb{Q}^{(\Lambda)}$ que a su vez es subgrupo de $\mathbb{Q}^{\Lambda}$, este último grupo es producto directo de grupos divisibles por lo que también es divisible. Por lo tanto M es subobjeto del grupo divisible $\frac{\mathbb{Q}^{\Lambda}}{Nuf}$. Llamemos $Q=\frac{\mathbb{Q}^{\Lambda}}{Nuf}$, entonces M se considera como subgrupo del grupo $\mathbb{Z}-$*inyectivo* Q. Para terminar la demostración notemos que $M\simeq Hom_R(R,M)\subset Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)\subset Hom_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ y este último es $R-$*inyectivo*. ■

Como consecuencia de esta proposición tenemos el mismo resultado para las categorías del tipo $\sigma[M]$, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 2.32 *Si N es un objeto en $\sigma[M]$, entonces existe un inyectivo E en $\sigma[M]$ tal que $N\subset E$.*

Dem: Por la proposición (2.31) para todo $R-$*módulo* T existe un módulo inyectivo Q en $R-Mod$ y un monomorfismo $T\xrightarrow{f}Q$.

Sea N un objeto en $\sigma[M]$, entonces existe F un $R-$*módulo* $M-$*generado* y un monomorfismo $N\xrightarrow{f}F$. Sea Q un $R-$*módulo* $R-$*inyectivo* tal que $F\overset{g}{\subset}Q$, entonces $Tr(M,Q)$ es un inyectivo en $\sigma[M]$ y es el mayor submódulo de Q $M-$*generado*, por lo cual $F\subset Tr(M,Q)$. Por lo tanto $N\subset Tr(M,Q)$. ■

Sean $\mathbf{C}$ es una categoría de Grothendieck y Q un objeto de $\mathbf{C}$. Si $A\overset{f}{\subset}Q$ hacemos

$$\Im=\left\{(K,g):K\overset{g}{\subset}Q \text{ y } K\cap A=0\right\}.$$

Podemos restringir el orden de la retícula $L(Q)$ a $\Im$, esto es:

Si $(K_1,g_1),(K_2,g_2)\in\Im$ tenemos $(K_1,g_1)\leq(K_2,g_2)$ si y sólo si existe $\varphi\in Hom_{\mathbf{C}}(K_1,K_2)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{g_1} & Q \\ \varphi\downarrow & \nearrow_{g_2} & \\ K_2 & & \end{array}$$

Con este orden, tenemos que $\Im$ esta parcialmente ordenado. Si $\mathfrak{C}$ es una cadena en $\Im$, como todo $C\leq Q$, tenemos que $C\leq\sum_{C\in\mathfrak{C}}C\leq Q$ y, como $\mathfrak{C}$ es una cadena, $\mathfrak{C}$

es un conjunto dirigido, por lo que $\left(\sum_{C\in\mathfrak{C}} C\right)\cap A = \sum_{C\in\mathfrak{C}}(C\cap A) = 0$, es decir $\sum_{C\in\mathfrak{C}} C$ es cota superior de $\mathfrak{C}$. Por el Lema de Zorn $\Im$ tiene máximos, a estos máximos se les llama $Q-$ *complementos* de A.

Los $Q-$ *complementos* de N en $\sigma[M]$ tienen las siguientes propiedades.

Lema 2.33 *Sea Q un objeto en $\sigma[M]$. Entonces si N es submódulo de Q y N' es submódulo de Q máximo con la propiedad de que $N\cap N'=0$, entonces:*
1. $N\oplus N' \trianglelefteq Q$;
2. $\frac{N\oplus N'}{N'} \trianglelefteq \frac{Q}{N'}$.

Dem: 1. Sea L submódulo de Q tal que $L\cap(N\oplus N')=0$, entonces si $x\in N\cap(N'+L)$ tenemos que $x\in N$ y $x=y+l$ con $y\in N'$ y $l\in L$, de donde $l=x-y\in L\cap(N\oplus N')$, por lo que $l=0$, por lo que $x\in N\cap N'=0$, por lo tanto $N\cap(N'+L)=0$, por la maximalidad de N' tenemos que $N'+L=N'$, por lo que $L\subset N'\subset N\oplus N'$ y de aquí que $L=L\cap(N\oplus N')=0$.

2. Sea L submódulo de Q que contenga a N' y tal que $\frac{L}{N'}\cap\left(\frac{N\oplus N'}{N'}\right)=0$. Si $x\in L\cap N$ tenemos que $x\in L$ y $x\in N\subset N\oplus N'$, entonces $x+N'\in\frac{L}{N'}\cap\left(\frac{N\oplus N'}{N'}\right)$, por lo tanto $x\in N'$, de donde $x\in N\cap N'=0$, por lo tanto $L\cap N=0$. Por la maximalidad de N' tenemos que $L=N'$, es decir $\frac{L}{N'}=0$. ■

Proposición 2.34 *Todo objeto en $\sigma[M]$ tiene cápsula inyectiva en $\sigma[M]$.*

Dem: Sea N un objeto en $\sigma[M]$ y Q en $\sigma[M]$ un objeto $M-$ *inyectivo* que contenga a N. Sea

$$\Im=\{K\leq Q : N\trianglelefteq K\},$$

como $N\trianglelefteq N$, entonces $\Im\neq\varnothing$ y queda ordenado parcialmente por contención. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\Im$, afirmamos que el módulo $\sum_{C\in\mathfrak{C}} C\in\Im$. En efecto, supongamos que $L\leq\sum_{C\in\mathfrak{C}} C$ es tal que $L\cap N=0$. Sea $x\in L$, entonces existen $C_1,C_2,\ldots,C_n\in\mathfrak{C}$ y $c_1\in C_1$, $c_2\in C_2,\ldots,c_n\in C_n$ tales que $x=c_1+c_2+\ldots+c_n$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $C_1\leq C_2\leq\ldots\leq C_n$, de donde $x\in C_n$, con lo que $\langle x\rangle\subset C_n$ y $\langle x\rangle\cap N\subset L\cap N=0$, pero $N\trianglelefteq C_n$, entonces $\langle x\rangle=0$, es decir $x=0$. Por lo tanto $L=0$. Sea E un máximo en $\Im$ y E' un $Q-$ *complemento* de E, por el lema (2.33) $\frac{E\oplus E'}{E'}\trianglelefteq\frac{Q}{E'}$. Sea $g:\frac{E\oplus E'}{E'}\to E$ el isomorfismo natural $g((e+e')+E')=e$, como Q es $M-$ *inyectivo* y $\frac{Q}{E'}$ es un objeto en $\sigma[M]$, existe $\bar{g}:\frac{Q}{E'}\to Q$ tal que el

siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \frac{E\oplus E'}{E'} & \xrightarrow{i} & \frac{Q}{E'} \\ g\downarrow & & \downarrow\bar{g} \\ E & \xrightarrow[i]{} & Q \end{array}$$

del hecho de ser $\frac{E\oplus E'}{E'} \trianglelefteq \frac{Q}{E'}$, g monomorfismo y $E \subset Q$ tenemos que $\bar{g}$ es monomorfismo, es decir, $\frac{Q}{E'}$ se puede considerar como subobjeto de Q que contiene esencialmente a N, por la maximalidad de E tenemos que $\frac{E\oplus E'}{E'} = \frac{Q}{E'}$, de donde $Q = E \oplus E'$, por lo tanto E es $M - inyectivo$ y $N \trianglelefteq E$, entonces E es la cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$. ■

Corolario 2.34.1 *Todo objeto en $R - Mod$ tiene cápsula inyectiva.* ■

De la demostración de la proposición (2.34) observamos que la cápsula inyectiva de N es el máximo módulo que contiene de manera esencial a N y, como ya habíamos dicho en el capítulo 1, todo inyectivo que contenga a N contiene una copia isomorfa a la cápsula inyectiva, por lo que la cápsula inyectiva es el mínimo inyectivo que contiene a N.

Si N es un objeto de $\sigma[M]$ y $E(N)$ su cápsula inyectiva en $R - Mod$ no necesariamente $E(N)$ será un objeto de $\sigma[M]$ y por ende la cápsula inyectiva de N en $R - Mod$ no coincide con la cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9 *Tenemos que $\mathbb{Z}_2$ es objeto en $\sigma[\mathbb{Z}_2]$, además $\mathbb{Z}_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ en $\mathbb{Z} - Mod$ y como $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ es inyectivo en $\mathbb{Z} - Mod$ tenemos que $E(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_{2^\infty}$, que no es objeto de $\sigma[\mathbb{Z}_2]$.*

En lo sucesivo si N es un objeto de $\sigma[M]$ a la cápsula inyectiva de N es la categoría $\sigma[M]$, la llamaremos la cápsula $M - inyectiva$, para poderla diferenciar de su cápsula inyectiva en $R - Mod$. A la cápsula inyectiva de N en $R - Mod$, la seguiremos denotando por $E(N)$ y a la cápsula $M - inyectiva$ por $\hat{E}(N)$ y la relación que existe entre $E(N)$ y $\hat{E}(N)$ se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.35 *Si N es un objeto de $\sigma[M]$ y $E = E(N)$ entonces $\hat{E}(N) = Tr(M, E)$.*

Dem: Notemos que si K es submódulo de N y N submódulo de M son tales que $K \trianglelefteq M$, entonces $K \trianglelefteq N$ y $N \trianglelefteq M$. Si L es un submódulo no cero de N entonces

es un submódulo no cero de M, con lo que $L \cap K \neq 0$. Y si L es un submódulo no cero de M, entonces $L \cap K \neq 0$, pero $L \cap K \subset L \cap N$.

De esta observación se sigue que si N es un objeto en $\sigma[M]$, entonces $Tr(M, E(N))$ es extensión esencial de N y es un inyectivo en $\sigma[M]$. ■

En la proposición (1.44) del capítulo 1 probamos que si $\coprod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es inyectivo entonces E_λ es inyectivo, al final de la sección siguiente podremos dar algunos ejemplos de este hecho.

2.4. V-Módulos en $\sigma[M]$

Un $R-$*módulo* M es $V-$*módulo* si todo módulo simple en $\sigma[M]$ es $M-$*inyectivo* El anillo R es $V-$*anillo* si visto como $R-$*módulo izquierdo* es $V-$*módulo*, es decir, si todo módulo simple es inyectivo.

Consideremos en adelante a $\mathcal{S}$ como un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de la clase de todos los $R-$*módulos* simples, es decir $\mathcal{S}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Todo módulo en $\mathcal{S}$ es simple;
2. Si S y T son elementos de $\mathcal{S}$, entonces $S \simeq T$ si y sólo si $S = T$;
3. Si T es un módulo simple existe S en $\mathcal{S}$ tal que $T \simeq S$.

Del mismo modo, sea $\mathcal{S}_M$ un conjunto completo de representantes de la clase de isomorfismo de la clase de módulos simples en $\sigma[M]$, por ejemplo $\mathcal{S} \cap \sigma[M]$.

Definimos el Zoclo de K como

$$Soc(K) = Tr(\mathcal{S}, K)$$

y el radical de K como

$$Rad(K) = Rej(\mathcal{S}, K)$$

Antes de seguir hagamos las siguientes observaciones acerca del Zoclo y el Radical:

Sea N un objeto en $\sigma[M]$, si S es un $R-$*módulo* simple y $f : S \to N$, entonces $Nuf = 0$ o $Nuf = S$. Si $Nuf = S$, tenemos que $Imf = 0$, con lo cual Imf no contribuye en el Zoclo de N y si $Nuf = 0$, entonces f es monomorfismo y con esto $f(S)$ es un objeto simple de la categoría $\sigma[M]$, es decir, para objetos de $\sigma[M]$ tenemos

$$Soc(N) = Tr(\mathcal{S}_M, N).$$

Por su parte, para el Radical tomemos $g : N \to S$ y de nuevo tenemos dos posibilidades, $Img = 0$ o $Img = S$. Si $Img = 0$, entonces $Nug = N$ y Nug no afecta al radical de N, pero si $Img = S$, entonces S esta en $\sigma[M]$ y tenemos que

$$Rad(N) = Rej(S_M, N).$$

Como ya dijimos antes, si $f : S \to N$ es morfismo con S simple, entonces la Imagen de f es submódulo de N cero o simple, con lo cual

$$Soc(N) = \sum \{S \leq N : S \text{ es simple}\}$$

y si $g : N \to S$, entonces g es cero o epimorfismo, si g es epimorfismo $S \simeq \frac{N}{Nug}$, de donde Nug es submódulo de N máximo, por otro lado si K es submódulo de N máximo, tenemos que $\frac{N}{K}$ es simple y el morfismo canónico $\eta : N \to \frac{N}{K}$ es tal que $Nu\eta = K$, con lo que

$$Rad(N) = \bigcap \{K \leq N : K \text{ es máximo}\}.$$

Proposición 2.36 *El Zoclo y el Radical de un $R-$módulo K están bien definidos, esto es, que no dependen del conjunto de representantes de la clase de módulos simples que tomemos.*

Dem: Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ conjuntos mínimos de representantes de la clase de módulos simples en $\sigma[M]$ y N un objeto de $\sigma[M]$. Primero probemos que $Tr(\mathcal{S}, N) = Tr(\mathcal{T}, N)$. Tenemos que $Tr(\mathcal{S}, N)$ es un submódulo de N $\mathcal{S}-$*generado*, entonces existe un conjunto Λ y un epimorfismo $\varphi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to Tr(\mathcal{S}, N)$, con $S_\lambda \in \mathcal{S}$ para toda $\lambda \in \Lambda$, por otro lado, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $T_\lambda \in \mathcal{T}$ de tal forma que $T_\lambda \overset{f_\lambda}{\simeq} S_\lambda$, entonces $\coprod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \overset{\psi}{\simeq} \coprod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, con $\psi = \coprod f_\lambda$, por lo que $\varphi \circ \psi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \to Tr(\mathcal{S}, N)$ es un epimorfismo, de donde $Tr(\mathcal{S}, N)$ es $\mathcal{T}-$*generado*, por lo tanto $Tr(\mathcal{S}, N) \leq Tr(\mathcal{T}, N)$. Del mismo modo se prueba que $Tr(\mathcal{T}, N) \leq Tr(\mathcal{S}, N)$.

Ahora probemos que $Rej(\mathcal{S}, N) = Rej(\mathcal{T}, N)$. Tenemos que $Rej(\mathcal{S}, N)$ es un submódulo de N tal que $\frac{N}{Rej(\mathcal{S},N)}$ es $\mathcal{S}-$*cogenerado*, entonces existe un conjunto Λ y un monomorfismo $\varphi : \frac{N}{Rej(\mathcal{S},N)} \to \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, con $S_\lambda \in \mathcal{S}$ para toda $\lambda \in \Lambda$, por otro lado, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $T_\lambda \in \mathcal{T}$ de tal forma que $S_\lambda \overset{f_\lambda}{\simeq} T_\lambda$, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \overset{\psi}{\simeq} \prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$, con $\psi = \prod f_\lambda$, por lo que $\psi \circ \varphi : \frac{N}{Rej(\mathcal{S},N)} \to \prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ es un monomorfismo, de donde $\frac{N}{Rej(\mathcal{S},N)}$ es $\mathcal{T}-$*cogenerado*, pero $Rej(\mathcal{T}, N)$ es el menor submódulo de N tal que $\frac{N}{Rej(\mathcal{T},N)}$ es que es $\mathcal{T}-$*cogenerado*, por lo tanto

$Rej(\mathcal{T}, N) \leq Rej(\mathcal{S}, N)$ Del mismo modo se prueba que $Rej(\mathcal{S}, N) \leq Rej(\mathcal{T}, N)$. ■

Directamente de la definición y de los corolarios (2.19.1) y (2.19.2) tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.37 *Para un $R-$ módulo M se cumplen las siguientes condiciones:*
1. M está generado por la clase de módulos simples si y sólo si $Soc(M) = M$;
2. M está cogenerado por la clase de módulos simples si y sólo si $Rad(M) = 0$. ■

Como cualquier módulo simple es isomorfo con un módulo del conjunto $\mathcal{S}$, la proposición anterior es equivalente a la siguiente afirmación.

Para un $R-$ *módulo* M se cumplen las siguientes condiciones:
1. M es $\mathcal{S}-$ *generado* si y sólo si $Soc(M) = M$;
2. M es $\mathcal{S}-$ *cogenerado* si y sólo si $Rad(M) = 0$.

Un $R-$ *módulo* N es semisimple si $N = \coprod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, con S_λ simple para toda $\lambda \in \Lambda$, o equivalentemente N es semisimple si $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda$, con S'_λ submódulo simple de N.

Notemos que si N es semisimple, con $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda$, entonces N es un objeto en $\sigma[M]$ si y sólo si S'_λ es objeto de $\sigma[M]$ para toda $\lambda \in \Lambda$.

Antes de dar algunas caracterizaciones de los módulos semisimples probemos el siguiente resultado acerca de los módulos que son suma de simples.

Lema 2.38 *Si $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, con S_λ submódulo de N simple para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces para cada submódulo K de N existe $\Lambda_K \subset \Lambda$ tal que $N = K \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_K} S_\lambda\right)$.*

Dem: Sea K submódulo de N y consideremos el conjunto

$$\Im = \left\{\Delta \subset \Lambda : \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Delta} \text{ es independiente y } K \cap \left(\sum_{\lambda\in\Delta} S_\lambda\right) = 0\right\}$$

(independiente en el sentido que para toda $\alpha \in \Delta$ se cumple que $S_\alpha \cap \left(\sum_{\substack{\lambda\in\Delta\\ \lambda\neq\alpha}} S_\lambda\right) = 0$ o equivalentemente que $\sum_{\lambda\in\Delta} S_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Delta} S_\lambda$). Aceptando que $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\varnothing}$ es independiente y $\sum_{\lambda\in\varnothing} S_\lambda = 0$, tenemos que $\varnothing \in \Im$, es decir $\Im \neq \varnothing$. Podemos ordenar parcialmente a $\Im$ por contención. Sean $\mathfrak{C}$ una cadena en $\Im$ y $A = \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{C}} \Delta$. Tomemos $\alpha \in A$ y

$x \in S_\alpha \cap \left(\sum_{\substack{\lambda \in A \\ \lambda \neq \alpha}} S_\lambda \right)$, entonces $\alpha \in \Delta_0$, para algún $\Delta_0 \in \Im$, por lo tanto existen $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2} \ldots, S_{\lambda_n} \in \{S_\lambda\}_{\lambda \in A \setminus \{\alpha\}}$ tales que $S_\alpha \ni x = s_{\lambda_1} + s_{\lambda_2} + \ldots + s_{\lambda_n}$, para algunos $s_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}, s_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_n} \in S_{\lambda_n}$. Como $\mathfrak{C}$ es cadena existe $\Delta_n \in \mathfrak{C}$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Delta_n$, por lo que $x \in S_\alpha \cap \left(\sum_{\substack{\lambda \in \Delta_n \\ \lambda \neq \alpha}} S_\lambda \right) = 0$. Por lo tanto la familia $\{S_\lambda\}_{\lambda \in A}$ es independiente. Del mismo modo podemos probar que $K \cap \left(\sum_{\lambda \in A} S_\lambda \right) = 0$. Entonces $A \in \Im$ y claramente A es cota superior de $\mathfrak{C}$. Sea Λ_K máximo en $\Im$ y probemos que $N = K \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_K} S_\lambda \right)$. Sea $L = K \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_K} S_\lambda \right) \subset N$. Notemos que para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $S_\lambda \cap L \leq S_\lambda$, por lo que $S_\lambda \cap L = 0$ o $S_\lambda \cap L = S_\lambda$, así si tomamos $\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_K$ y suponemos que $S_\mu \cap L = 0$ tendríamos que $S_\mu \cap \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_K} S_\lambda \right) \subset S_\mu \cap L = 0$ y para toda $\alpha \in \Lambda_K$ si tomamos $x \in S_\alpha \cap \left(\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_K \cup \{\mu\} \\ \lambda \neq \alpha}} S_\lambda \right)$, entonces $x = s + t$, con $s \in \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_K \\ \lambda \neq \alpha}} S_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \Lambda_K} S_\lambda$ y $t \in S_\mu$, entonces $t \in S_\mu \cap \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_K} S_\lambda \right) = 0$ y $s \in S_\alpha \cap \left(\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_K \\ \lambda \neq \alpha}} S_\lambda \right) = 0$. Por lo tanto $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_K \cup \{\mu\}}$ es independiente y del mismo modo se prueba que $K \cap \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_K \cup \{\mu\}} S_\lambda \right) = 0$. Esto último implica que $\Lambda_K \cup \{\mu\} \in \Im$, lo cual no es posible. Por lo que deducimos que para todo $\mu \notin \Lambda_K$ se cumple que $S_\mu \cap L = S_\mu$, es decir $S_\mu \subset L$ y es claro que para toda $\alpha \in \Lambda_K$ tenemos que $S_\alpha \subset L$. Por lo tanto $M \subset L$. ■

Proposición 2.39 *Para un R – módulo N las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *N es suma de submódulos simples de N;*
2. *N es semisimple;*
3. *Para cada submódulo K de N existe K' submódulo de N tal que $N = K \oplus K'$;*
4. *N no tiene submódulos propios esenciales;*
5. *Todo R – módulo es N – inyectivo.*

Dem: 1 implica 2. Se sigue de lema (2.38) tomando $K = 0$.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

2 implica 3. Si $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ y K es submódulo de N, entonces existe $\Lambda_K \subset \Lambda$ tal que $N = K \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_K} S_\lambda\right)$, haciendo $K' = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_K} S_\lambda$ tenemos la demostración.

3 implica 1. Primero, notemos que si x es un elemento no cero de N, el conjunto

$$\Im = \{K \leq \langle x\rangle : x \notin K\}$$

es no vacío, por que $0 \in \Im$, y ordenamos a $\Im$ por contención. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\Im$, entonces $\bigcup_{K\in\mathfrak{C}} K$ es submódulo de $\langle x\rangle$ que no tiene a x, por lo tanto $\bigcup_{K\in\mathfrak{C}} K$ es cota superior de $\Im$. Sea K máximo en $\Im$, por (3) existe K' submódulo de N tal que $N = K \oplus K'$. Supongamos que $x = k + k'$, con $k \in K$ y $k' \in K'$. Como $K \cap \langle k'\rangle \subset K \cap K'$ tenemos que $K \cap \langle k'\rangle = 0$ y si $r \in R$, entonces $rx = rk + rk' \in K \oplus \langle k'\rangle$, es decir $\langle x\rangle \subset K \oplus \langle k'\rangle$. Por otro lado $k' = x - k \in \langle x\rangle$, lo cual implica que $K \oplus \langle k'\rangle \subset \langle x\rangle$, de este último hecho deducimos que $\langle x\rangle = K \oplus \langle k'\rangle$. Tenemos que $\langle k'\rangle \simeq \frac{\langle x\rangle}{K} \neq 0$ y si $L \leq \frac{\langle x\rangle}{K}$, existe $L' \leq \langle x\rangle$ que contiene a K tal que $L = \frac{L'}{K}$, por ser K máximo deducimos que $L' = K$ o $L' = \langle x\rangle$, esto es que $\frac{\langle x\rangle}{K}$ es simple.

Con todo lo anterior hemos probado que todo submódulo no cero de N contiene un submódulo simple.

Sea $\mathfrak{S} = \{S \leq N : S \text{ es simple}\}$ y $P = \sum_{S\in\mathfrak{S}} S$, entonces existe P' submódulo de N tal que $N = P \oplus P'$. P' tiene que ser cero, de lo contrario existe S simple tal que $S \subset P'$ y de esto $S \subset P \cap P'$, lo cual no es posible. Por lo tanto $N = \sum_{S\in\mathfrak{S}} S$.

3 implica 4. Sea K es submódulo propio de N, por (3) existe $K' \leq N$ tal que $N = K \oplus K'$ y por ser $K \neq N$ tenemos que $K' \neq 0$ y $K \cap K' = 0$. Por lo tanto K no es esencial.

4 implica 3. Sea K submódulo de N y K' un $N-$*complemento* de K, entonces $K \oplus K' \trianglelefteq N$ y por (4) $N = K \oplus K'$

3 implica 5. Sean L un $R-$*módulo* cualquiera, $K \leq N$ y $f : K \to L$ un morfismo. Por (3) existe K' tal que $N = K \oplus K'$. Sea $\bar{f} = f \circ \pi_K$, es claro que $\bar{f}|_K = f$, por lo tanto L es $N-$*inyectivo.*

5 implica 3. Sea $K \leq N$ entonces existe $f : N \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & N \\ 1_K \downarrow & \swarrow f & \\ K & & \end{array}$$

Si $x \in K \cap Nuf$, tenemos que $0 = f(x) = x$, es decir $K \cap Nuf = 0$. Sea $x \in N$,

entonces $f(x) \in K$, de donde $f(f(x)) = f(x)$, de aquí $x - f(x) \in Nuf$. Además $x = f(x) + (x - f(x))$. Por lo tanto $N = K \oplus Nuf$. ■

Corolario 2.39.1 *Un $R-$ módulo N es semisimple si y sólo si todo submódulo de N es semisimple.*

Dem: Si N es semisimple y K submódulo de N, por (5) del teorema anterior, todo $R-$ *módulo* es M inyectivo, por la proposición (1.42), todo $R-$ *módulo* es $K-$ *inyectivo*. Por lo tanto K es semisimple. ■

Ejemplo 2.10 *Para cualquier $R-$ módulo N se tiene que $Soc(N)$ es semisimple.*

Con respecto de los módulos cocíclicos tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.40 *Dado cualquier módulo N cíclico no cero, existe $S \in \mathcal{S}$, que depende de N, y $f : N \to S$ un epimorfismo.*

Dem: Sabemos que como N es cíclico no cero existe I ideal izquierdo propio de R tal que $N \simeq \frac{R}{I}$, sea J ideal máximo de R tal que $I \subseteq J$ y definamos

$$\varphi : \frac{R}{I} \to \frac{R}{J}$$
$$\varphi(r + I) = r + J$$

φ está bien definida pues si $x - y \in I$, entonces $x - y \in J$. Es obvio que φ es epimorfismo y como J es máximo $\frac{R}{J}$ es simple. ■

Notemos que en el lema (2.40) si N, además de ser cíclico, es un objeto en $\sigma[M]$ entonces $\frac{R}{J}$ es también un objeto en $\sigma[M]$, con lo que existe $S \in \mathcal{S}_M$ y un epimorfismo $f : N \to S$.

Recordemos que un objeto A de una categoría $\mathbf{C}$ es cocíclico si dado cualquier epimorfismo $\varphi : A \to \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\pi_0 \circ \varphi : A \to U_{\lambda_0}$ es epimorfismo.

Proposición 2.41 *Para todo $R-$ módulo N no cero son equivalentes:*

1. N es cocíclico;

2. Existe $n_0 \in N$ no cero tal que si $\varphi : N \to K$ es un morfismo tal que $n_0 \notin Nu\varphi$, entonces φ es monomorfismo;

3. La intersección de todos los submódulos no cero de N es no cero;

4. N contiene un módulo simple que esta contenido en todos los submódulo no cero de N;

5. N es extensión esencial de un módulo simple.

Dem: 2 implica 1. Sean $n_0 \in N$ tal que si $\varphi : N \to K$ es un morfismo que cumple que $n_0 \notin Nu\varphi$, entonces φ es monomorfismo y $f : N \to \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ un monomorfismo. Si $n_0 \in Nu(\pi_\lambda \circ f)$ para toda $\lambda \in \Lambda$ tenemos $\pi_\lambda \circ f(n_0) = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, es decir $f(n_0) = 0$ lo cual no es posible pues f es monomorfismo y $n_0 \neq 0$, por lo tanto existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\pi_{\lambda_0} \circ f(n_0) \neq 0$ y por (2) $\pi_{\lambda_0} \circ f$ es monomorfismo.

1 implica 3. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los submódulos no cero de N y supongamos que $\bigcap_{K \in \mathcal{A}} K = 0$. Consideremos el morfismo

$$\varphi : N \to \prod_{K \in \mathcal{A}} \frac{N}{K}$$
$$\varphi(x) = (x + K)_{K \in \mathcal{A}}$$

entonces $x \in Nu\varphi$ si y sólo si $x \in K$ para todo $K \in \mathcal{A}$, es decir $Nu\varphi = \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K = 0$. Como N es cocíclico existe $K_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\pi_{K_0} \circ \varphi$ es monomorfismo, por lo que $0 = Nu(\pi_{K_0} \circ \varphi) = K_0$ lo cual no es posible.

3 implica 4. Si S es la intersección de todos los submódulos no cero de N, tenemos que S es simple y esta contenido en todos los submódulos no cero de N.

4 implica 2. Sean S un módulo simple que cumple (4) y n_0 un elemento no cero de S. Supongamos que $\varphi : N \to K$ es un morfismo tal que $n_0 \notin Nu\varphi$, entonces $S \not\subset Nu\varphi$, por lo que $Nu\varphi = 0$, es decir φ es monomorfismo.

Para probar 4 si y sólo si 5 supongamos primero que N contiene un módulo simple S que esta contenido en todos los submódulos no cero de N, entonces se cumple que si $K \leq N$ tal que $K \cap S = 0$ tenemos que $K = 0$, de lo contrario $S \subset K$ y $K \cap S = S$. Supongamos ahora que N es extensión esencial de un módulo simple S, entonces todo K submódulo no cero de N cumple con $K \cap S \neq 0$. El que S sea simple implica que $K \cap S = S$, es decir $S \subset K$. ■

Notemos que si N es cocíclico y S es un submódulo simple de N que esta contenido en todo submódulo no cero de N, entonces S es el único submódulo simple que tiene N, por lo que tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.41.1 *Si N es cocíclico y S es un submódulo simple de N, entonces $Soc(N) = S$.* ■

Corolario 2.41.2 *Si S es simple en $\sigma[M]$ y $\hat{S}$ es su cápsula $M-$inyectiva, entonces $Soc\left(\hat{S}\right) = S$.*

Dem: Si K es submódulo no cero de $\hat{S}$, entonces $K \cap S \neq 0$, de donde $K \cap S = S$, por lo tanto $S \subset K$, de donde $\hat{S}$ es cocíclico, de donde $Soc\left(\hat{S}\right) = S$. ■

Proposición 2.42 *Para todo $R-$ módulo M son equivalentes*

1. M es $V-$ módulo;

2. Todo objeto N en $\sigma[M]$ finitamente cogenerado es semisimple;

3. Todo cociente de M finitamente cogenerado es semisimple;

4. Todo cociente de M tiene radical cero;

5. $Rad(N) = 0$ para todo N objeto de $\sigma[M]$.

Dem: 1 implica 5. Supongamos que todo módulo simple en $\sigma[M]$ es $M-$ *inyectivo* y sea N un objeto cualquiera de $\sigma[M]$. Sea $x \in Rad(N)$, recordemos que

$$Rad(N) = \bigcap \{Nuf : f \in Hom_R(N, S), S \in S_M\}.$$

y supongamos que $x \neq 0$. Sea $f : \langle x \rangle \to S$ un epimorfismo con $S \in S_M$, como S es simple y f es epimorfismo tenemos que $f(x) \neq 0$. Por ser S un módulo $M-$ *inyectvo* existe $\bar{f} : N \to S$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle & \hookrightarrow & N \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ S & & \end{array}$$

y como $x \in Rad(N)$ entonces $0 = \bar{f}(x) = f(x) \neq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Rad(N) = 0$.

5 implica 4. Si K es submódulo de M entonces $\frac{M}{K}$ es objeto en $\sigma[M]$, por lo que $Rad\left(\frac{M}{K}\right) = 0$.

4 implica 3. Supongamos que todo cociente de M tiene radical cero y sea K un cociente de M finitamente cogenerado. Como $Rad(K) = 0$, entonces K esta cogenerado por S_M y por ser K finitamente cogenerado existen $S_1, S_2, \ldots, S_n \in S_M$ y $f : K \to \prod_{i=1}^{n} S_i = \coprod_{i=1}^{n} S_i$, por lo que K se puede ver como submódulo del semisimple $\coprod_{i=1}^{n} S_i$. Por lo tanto K es semisimple.

3 implica 1. Sean S un módulo simple $M-$ *subgenerado*, $\hat{S}$ su cápsula $M-$ *inyectiva*, K submódulo de M y $f : K \to S$ un morfismo cualquiera, entonces existe

un morfismo $f : M \to \hat{S}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & M \\ f\downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ S & \hookrightarrow & \hat{S} \end{array}$$

Entonces $\bar{f}(M)$ es cocíclico pues $\hat{S}$ lo es, por lo tanto $\bar{f}(M)$ es finitamente cogenerado. Por (3) $\bar{f}(M)$ es semisimple y entonces $\bar{f}(M) \subset Soc\left(\hat{S}\right) = S$.

5 implica 2. Análogo a 4 implica 3.

2 implica 3. Obvio. ■

Proposición 2.43 *El $R-$ módulo M es $V-$ módulo si y sólo si, todo submódulo propio de M es intersección de submódulos máximos de M.*

Dem: Supongamos que M es $V-$ *módulo* y sea K submódulo propio de M, entonces K esta contenido en un submódulo máximo de M. Sea

$$\mathcal{F} = \{L \leq M : L \text{ es máximo y } K \subset L\}$$

Sea $N = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L$, entonces $K \subset N$. Sea $x \in N$ y $\frac{L}{K}$ submódulo máximo de $\frac{M}{K}$ arbitrario. Notemos que $L \in \mathcal{F}$ pues si $L \leq L' \leq M$ entonces $\frac{L}{K} \leq \frac{L'}{K} \leq \frac{M}{K}$, por lo tanto $x \in L$, es decir $x + K \in \frac{L}{K}$, por lo que $x + K \in Rad\left(\frac{M}{K}\right) = 0$, pues M es $V-$ *módulo*.

Supongamos que todo submódulo propio de M es intersección de submódulos máximos de M. Probaremos que todo cociente de M tiene radical cero. Sea $K \leq M$, si $K = M$ no hay nada que probar. Supongamos que K es submódulo propio de M y sea $x + K \in Rad\left(\frac{M}{K}\right)$, entonces $K = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, con M_λ submódulo de M máximo para todo $\lambda \in \Lambda$. Como los M_λ son máximos, tenemos que $\frac{M_\lambda}{K}$ es submódulo máximo de $\frac{M}{K}$, entonces $x + K \in \frac{M_\lambda}{K}$ para toda $\lambda \in \Lambda$, con lo que $x \in M_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$, es decir $x \in K$. Por lo tanto $Rad\left(\frac{M}{K}\right) = 0$. ■

Proposición 2.44 *Si R es anillo conmutativo entonces R es $V-$ anillo si y sólo si $I^2 = I$ para todo I ideal de R.*

Dem: Supongamos que R es un $V-$ *anillo* e I ideal de R, entonces $I^2 \subset I$. Supongamos que $I^2 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ con I_λ ideal máximo de R. Supongamos que existe $r \in I$ tal que $r \notin I^2$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $r \notin I_{\lambda_0}$. Como I_{λ_0} es máximo entonces

$R = I_{\lambda_0} + \langle r \rangle$, de donde $1 = x + sr$ para algunos $x \in I_{\lambda_0}$ y $s \in R$, por lo que $r = rx + rsr$, pero $rx \in I_{\lambda_0}$ y $rsr \in I^2 \subset I_{\lambda_0}$, entonces $r \in I_{\lambda_0}$, lo cual no es posible.

Supongamos que $I^2 = I$ para todo ideal I de R. Primero notemos que para cualquier $x \in R$ y $a, b \in \langle x \rangle$ tenemos que $ab = rxsx = xrsx$, es decir existe $t \in R$ tal que $ab = xtx$. Como $x \in \langle x \rangle = \langle x \rangle^2$, de donde $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} x t_i x = x \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) x$, para ciertos $t_i \in R$. Por lo tanto para todo $x \in R$ existe $t \in R$ tal que $x = x^2 t$. Para completar la demostración tomemos I ideal de R y sea $x + I \in Rad\left(\frac{R}{I}\right)$ arbitrario. Sea $b \in R$, si $\langle (1 - xb) + I \rangle \neq \frac{R}{I}$ (vistos como $R-$*módulos*), entonces $(1 - xb) + I \in \frac{J}{I}$ con J ideal máximo de R que contiene a I, por lo que $1 - xb \in J$, con lo que $1 \in J$, lo cual no es posible, entonces $\langle (1 - xb) + I \rangle = \frac{R}{I}$, es decir existe $r \in R$ tal que $(r - rxb) + I = 1 + I$, para cualquier $b \in R$. Por otro lado, como $x = xtx$, para algún $t \in R$, existe $r_0 \in R$ tal que $r_0 - r_0 xt - 1 \in I$, entonces $r_0 x - r_0 xtx - x \in I$, pero $r_0 x - r_0 xtx = 0$, por lo que $x \in I$. De todo lo anterior tenemos que $Rad\left(\frac{R}{I}\right) = 0$. ■

Ahora estamos en condiciones de dar ejemplos familias $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$de $R-$ *módulos* inyectivos tales que $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ no sea inyectivo.

Ejemplo 2.11 *Consideremos S el anillo producto $\mathbb{Z}_2^{\aleph_0}$ y R el subanillo de S generado por $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)} \cup \{1\}$. Sea I un ideal de R, como $x^2 = x$ para toda $x \in R$, tenemos que $I^2 = I$, es decir R es $V-$anillo, por lo que todos los $R-$módulos simples son inyectivos. Notemos que $\mathbb{Z}_2$ se puede identificar con los ideales de R generados los $x \in R$ que tienen un 1 en una coordenada y cero en todas las demás. Por otro lado, si S es ideal simple de R, entonces existe $0 \neq x \in S$, x tiene por lo menos una coordenada 1, digamos la $i-$ésima. Si $y \in R$ es tal que la $i-$ésima coordenada es 1 y todas las demás cero entonces $yx \in S$ y yx tiene a 1 en la $i-$ésima coordenada y cero en todas las demás, también tenemos que $S = \langle yx \rangle$, por lo que S es del tipo $\mathbb{Z}_2$. Finalmente, supongamos que I es un ideal de R tal que $I \cap \mathbb{Z}_2 = 0$. Sea $x \in I$ e $i \in \mathbb{N}$, tomemos $y \in R$ tal que la $i-$ésima coordenada sea 1 y las demás cero, entonces $yx \in I \cap \mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$, por lo que $yx = 0$, de donde la $i-$ésima coordenada de x es 0 para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)} \trianglelefteq R$, con lo cual $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$ no es inyectivo.*

Proposición 2.45 *Sea E un objeto en $\sigma[M]$, $M-$inyectivo. Entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes.*

1. E es cogenerador de la categoría $\sigma[M]$;

2. $Hom(T, E) \neq 0$, para todo T en $\sigma[M]$ simple;

3. E cogenera todo módulo simple en $\sigma[M]$.

Dem: 1) $\Rightarrow$ 3) es obvio.

3) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que E cogenera a todo simple de $\sigma[M]$. Sea T simple en $\sigma[M]$ y $f : T \to E^{\Lambda}$ monomorfismo. Si para todo $\lambda \in \Lambda$, $\pi_{\lambda} \circ f = 0$, entonces $f = 0$, lo que implica $T = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\pi_{\lambda} \circ f \neq 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea N un objeto cualquiera de $\sigma[M]$, basta probar que $Rej(E, N) = 0$. Sea $x \in Rej(E, N) = \bigcap \{Nuf : f \in Hom_R(N, S), S \in S_M\}$ y supongamos que $x \neq 0$, sea $f : \langle x \rangle \to S$ epimorfismo, con $S \in S_M$, y $g : S \to E$ no cero, entonces $g \circ f \neq 0$, de hecho $g \circ f(x) \neq 0$. Como E es $M - inyectivo$ existe $h : N \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle & \hookrightarrow & N \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

de donde, $0 = h(x) = g \circ f(x) \neq 0$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $x = 0$. ■

Para finalizar este capítulo veremos que en general, suma directa de inyectivos no tiene por que ser inyectivo.

Recordemos que un anillo R es neteriano izquierdo si para toda cadena ascendente

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$$

de ideales izquierdos de R existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq n$ $I_m = I_n$.

Probemos, ahora, que un anillo R es neteriano izquierdo si y sólo si toda suma directa de $R - módulos$ inyectivos es inyectivo.

En efecto, supongamos que toda suma directa de $R - módulos$ inyectivos es inyectivo e

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$$

es una cadena de ideales izquierdos de R. Sea $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, el cual es un ideal izquierdo de R. Si $a \in I$ existe un natural i tal que $a \in I_i$, entonces para toda $j \geq i$ se tiene que $a \in I_j$, o equivalentemente, $a \in I_i$ para todas las i en $\mathbb{N}$, excepto quizá para una cantidad finita de estos. Sea

$$f : I \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{R}{I_i}\right)$$
$$f(a) = (a + I_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

(aquí estamos suponiendo que todo $R - módulo$ se puede ver contenido en su cápsula inyectiva) y como $a \in I_i$ para todas las i en $\mathbb{N}$ excepto quizá para una cantidad finita de estos, $a + I_i = 0$ para casi todo $i \in \mathbb{N}$, por lo cual $(a + I_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{R}{I_i}\right)$ y con

esto f está bien definida. Por hipótesis $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{R}{I_i}\right)$ es inyectivo, entonces existe

$$\bar{f} : R \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{R}{I_i}\right)$$

de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ f\downarrow & \swarrow_{\bar{f}} & \\ \bigoplus_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{R}{I_i}\right) & & \end{array}$$

es decir que para todo $a \in I$ se tiene que $\bar{f}(a) = f(a)$. Hacemos $x = \bar{f}(1)$ y supongamos que $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ son las coordenadas no cero de x, si perdida de generalidad podemos suponer que $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. El elemento x cumple que para toda $a \in I$

$$\begin{aligned} ax &= a\bar{f}(1) \\ &= \bar{f}(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

y para toda $m > i_n$ $\pi_m(x) = 0$. Por lo tanto si $m > i_n$ y $a \in I$ se cumple que

$$\begin{aligned} a + I_m &= \pi_m(f(a)) \\ &= \pi_m(ax) \\ &= a\pi_m(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que implica que $a \in I_m$. Entonces $I = I_m$ para toda $m > i_n$ y de aquí concluimos que $I_m = I_{i_n}$ para todo $m > i_n$.

Ahora supongamos que R es neteriano izquierdo, algo que es fácil probar es que ser neteriano es equivalente a que todo ideal izquierdo de R es finitamente generado. Por lo tanto, si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de módulos inyectivos, I ideal izquierdo de$R$ y $f : I \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es un morfismo cualquiera, por ser I finitamente generado existe $F \subset \Lambda$ finito tal que $\operatorname{Im} f \subset \bigoplus_{\lambda\in F} E_\lambda = \prod_{\lambda\in F} E_\lambda$ que es inyectivo, con esto existe $\bar{f} : R \to \bigoplus_{\lambda\in F} E_\lambda$ tal que $\bar{f}\mid_I = f$ y $\bar{f}$ se puede ver como un morfismo de R en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.

Capítulo 3

Teorías de Torsión

Si $\mathbf{C}$ es una categoría abeliana, una clase de torsión hereditaria en $\mathbf{C}$, es una clase de objetos de $\mathbf{C}$ cerrada bajo coproductos, cocientes, subobjetos y extensiones. El objetivo de este capítulo es exponer resultados alrededor de las clases de torsión hereditarias en categorías del tipo $\sigma[M]$. Para que los resultados sean generales, supondremos siempre que la categoría $\mathbf{C}$ es una categoría de Grothendieck y cuando se trate de la categoría $\sigma[M]$ lo diremos explícitamente.

Antes de iniciar esta sección primero recordemos que una categoría es localmente pequeña si para todo objeto A se tiene que la clase

$$L(A) = \{B : B \text{ es subobjeto de } A\}$$

es un conjunto. Toda categoría de Grothendieck es localmente pequeña. $L(A)$ está parcialmente ordenado de la siguiente manera: si $B_1 \overset{f}{\subset} A$ y $B_2 \overset{g}{\subset} A$, entonces $B_1 \leq B_2$ si y solo si existe $B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi \downarrow & \nearrow_{g} & \\ B_2 & & \end{array}$$

como habíamos visto en el capítulo 1. $L(A)$ es retícula completa, el ínfimo y el supremo del conjunto $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ y $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, respectivamente, aquí $\inf L(A) = 0$ y $\sup L(A) = A$.

3.1. Clases de Pretorsión

Una clase $\mathcal{T}$ de objetos de $\mathbf{C}$ se llama clase de pretorsión si es cerrada bajo coproductos y cocientes. Una clase de pretorsión $\mathcal{T}$ es hereditaria si dado un objeto A en $\mathcal{T}$, entonces todos sus subobjetos también están en $\mathcal{T}$.

Ejemplo 3.1 *Si $\mathcal{U}$ es una clase de objetos de la categoría $\mathbf{C}$, las subcategorías $G[\mathcal{U}]$ y $\sigma[\mathcal{U}]$ son clases de pretorsión. $\sigma[\mathcal{U}]$ es hereditaria.*

Ejemplo 3.2 *La clase de objetos de $\mathbf{C}$ es por sí misma una clase de pretorsión hereditaria.*

Ejemplo 3.3 *Sea $\mathcal{U}$ es una clase de objetos de la categoría $\mathbf{C}$ y*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \{T \text{ objeto de } \mathbf{C} \colon Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0, \text{ para toda } U \text{ en } \mathcal{U}\}$$

es clase de pretorsión. En efecto, si T es un objeto en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y $f : T \to T'$ es epimorfismo, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0$ para toda U en $\mathcal{U}$. Sea U en $\mathcal{U}$ y $g \in Hom_{\mathbf{C}}(T', U)$, esto implica que $g \circ f \in Hom_{\mathbf{C}}(T, U)$, por lo que $g \circ f = 0$ y como f es epimorfismo, tenemos que $g = 0$, es decir, $Hom_{\mathbf{C}}(T', U) = 0$, de donde T' es un objeto en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Sea ahora $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de objetos en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y U un objeto en $\mathcal{U}$. Tenemos que $Hom_{\mathbf{C}}(T_\lambda, U) = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, luego $\prod_{\lambda \in \Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(T_\lambda, U) = 0$ y de esto concluímos que $Hom_{\mathbf{C}}\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda, U\right) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ es clase de pretorsión.

Observación 3.1 *Si $\mathcal{U}$ es una clase de objetos en $\mathbf{C}$, T es un objeto de $\mathbf{C}$ y $A \overset{f}{\subset} T$, de tal forma que A y $\frac{T}{A}$ son objetos en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, entonces T también estará en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Para probar esto tomemos un objeto U en $\mathcal{U}$ y un morfismo $g : T \to U$, entonces $g \circ f : A \to U$, por lo que $g \circ f = 0$. Por la propiedad universal del conúcleo, existe un único $\varphi : \frac{T}{A} \to U$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & T \arrow[r, "conuf"] \arrow[dr, "g"'] & \frac{T}{A} \arrow[d, "\varphi"] \\ & & U \end{tikzcd}$$

pero $\varphi = 0$, con lo que podemos concluir que $g = 0$. Este tipo de clases de pretorsión les llamaremos clases de torsión, las cuales estudiaremos más adelante.

Sea $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión. Si A es un objeto en $\mathcal{T}$ diremos que A es de $\mathcal{T}$ – *torsión*. Un objeto B de $\mathbf{C}$ es $\mathcal{T}$–libre de torsión si no existen morfismos no

triviales de los objetos de $\mathcal{T}$ en B, esto significa que si A es un objeto en $\mathcal{T}$ y $f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, entonces $f = 0$.

Observación 3.2 *Si $\mathcal{T}$ es clase de pretorsión, entonces para cualquier familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de objetos de $\mathcal{T}-$torsión, por definición el coproducto de la familia es de $\mathcal{T}$ $-$torsión, así, si cada objeto B_λ es subobjeto de un objeto fijo A, (A no necesariamente objeto en $\mathcal{T}$), entonces $\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es también de $\mathcal{T}-$torsión.*

Si $\mathcal{T}$ es una clase de pretorsión en $\mathbf{C}$, definimos para un objeto A la parte de torsión de A como:

$$\mathcal{T}(A) = \sum\{B \subset A : B \text{ es de } \mathcal{T} - torsión\}$$

el subobjeto mayor de A que es de $\mathcal{T} - torsión$.

Ejemplo 3.4 *Consideremos en $R - Mod$, la clase $\mathcal{T}$ de todos los módulos semisimples. Es claro que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo coproductos. Sea $f : M \to N$ un epimorfismo, donde $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, con S_λ simple para toda $\lambda \in \Lambda$. Como $Nuf \leq M$ existe $\Delta \subset \Lambda$ tal que $M = Nuf \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\Delta} S_\lambda\right)$, con lo que $N \simeq \frac{M}{Nuf} \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Delta} S_\lambda$. Entonces $\mathcal{T}$ es clase de pretorsión y como un submódulo de semisimple es semisimple, $\mathcal{T}$ es clase de pretorsión hereditaria. Aquí $\mathcal{T}(N) = Soc(N)$.*

Proposición 3.3 *Para cualquier objeto A de $\mathbf{C}$ se cumplen*
1. A es de $\mathcal{T}-$torsión si y sólo si $A = \mathcal{T}(A)$.
2. A es $\mathcal{T}-$libre de torsión si y sólo si $\mathcal{T}(A) = 0$.

Dem: 1. Es claro.

2. Si A es $\mathcal{T}-$libre de torsión y $B \overset{f}{\subset} A$ de $\mathcal{T}-$torsión entonces f es el morfismo cero, de donde $B = 0$.

Supongamos que $\mathcal{T}(A) = 0$, sea T un objeto de $\mathcal{T}-$torsión y $T \xrightarrow{f} A$ morfismo, factorizando f tenemos

$$T \xrightarrow{g} Imf \xrightarrow{h} A$$

con g epimorfismo y h monomorfismo, entonces Imf es subobjeto de $\mathcal{T}-$torsión de A, pero $\mathcal{T}(A) = 0$, por lo que $Imf = 0$, es decir $f = 0$. ■

Observación 3.4 *Si $A \xrightarrow{f} B$ es morfismo entonces $f(\mathcal{T}(A))$ es subobjeto de B de $\mathcal{T}-$torsión, pero $\mathcal{T}(B)$ es el mayor subobjeto de B que es de $\mathcal{T}-$torsión. Por lo tanto $f(\mathcal{T}(A))$ es subobjeto de $\mathcal{T}(B)$.*

Hemos definido, hasta este momento objetos de $\mathcal{T}-$torsión y objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión, estos dos conceptos son duales como lo muestra el siguiente teorema.

Proposición 3.5 *La clase de los objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión en una categoría es cerrada bajo subobjetos y si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de objetos $\mathcal{T}-$libre de torsión, entonces el producto de esta familia es $\mathcal{T}-$libre de torsión.*

Dem: Sea F $\mathcal{T}-$libre de torsión y $B \overset{f}{\subset} F$, entonces por la observación (3.4) $\mathcal{T}(B)$ es subobjeto de $\mathcal{T}(F)$, pero $\mathcal{T}(F) = \mathbf{0}$, por lo tanto $\mathcal{T}(B) = \mathbf{0}$.

Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión. Como

$$Hom_{\mathbf{C}}(T, \prod A_\lambda) \simeq \prod Hom(T, A_\lambda)$$

$Hom(T, A_\lambda) = 0$ para toda T de $\mathcal{T}-torsión$ y $\lambda \in \Lambda$. Por lo que $Hom_{\mathbf{C}}(T, \prod A_\lambda) = 0$ y así $\prod A_\lambda$ es $\mathcal{T}-$libre de torsión. ■

Notemos de la proposición (3.5) que en el caso de que la categoría $\mathbf{C}$ sea una categoría del tipo $\sigma[A]$ y $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión en $\sigma[A]$, para una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $R-$ *módulos* en $\sigma[A]$ $\mathcal{T}-$libres de torsión, el producto $\prod_\Lambda A_\lambda$ en $R-Mod$ no necesariamente es $\mathcal{T}-$libre de torsión, pero $Tr(N, \prod_\Lambda A_\lambda)$ es $\mathcal{T}-$libres de torsión, para todo generador N de $\sigma[A]$, ya que $Tr(N, \prod_\Lambda A_\lambda)$ es el producto de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\sigma[A]$.

Proposición 3.6 *Para cualquier clase de pretorsión la clase de objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión es cerrada bajo extensiones.*

Dem: Consideremos la sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \to A \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} B \to \mathbf{0}$$

con A y B $\mathcal{T}-$libres de torsión, T un objeto de $\mathcal{T}-$torsión y $T \xrightarrow{h} F$ morfismo, entonces $g \circ h = 0$, entonces existe $\varphi : T \to A$ tal que $f \circ \varphi = h$, pero $\varphi = 0$, por ser T de $\mathcal{T}-$torsión y A $\mathcal{T}-$libre de torsión, por lo que $h = 0$. Po lo tanto F es $\mathcal{T}-$libre de torsión.

Proposición 3.7 *Sea $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión en la categoría $\mathbf{C}$ y $\mathcal{F}$ la clase de objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión. Entonces se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. Para todo T en $\mathcal{T}$ y F en $\mathcal{F}$ se cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$.

2. Si F es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$, entonces F está en $\mathcal{F}$.

Dem: 1. Directo de la definición.

2. Sea F es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{T}(F), F) = 0$, entonces el monomorfismo $\mathcal{T}(F) \subset F$ es cero. Por lo tanto $\mathcal{T}(F) = 0$. ■

De manera dual podemos definir una clase libre de torsión en la categoría $\mathbf{C}$ como una clase de objetos $\mathcal{F}$ que es cerrada bajo subobjetos, productos y extensiones.

Ejemplo 3.5 *Si $\mathcal{T}$ es una clase de pretorsión, entonces la clase de todos los objetos $\mathcal{T}-$ libres de torsión es una clase libre de torsión.*

Ejemplo 3.6 *Si M es un $R-$ módulo, un elemento $m \in M$ es singular si*

$$An(m) = \{r \in R : rm = 0\}$$

es un ideal izquierdo esencial de R. M es no singular si el único elemento singular de M es 0.
Notemos que $I \trianglelefteq R$ si y sólo si para toda $x \in R$ no cero existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in I$.
Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los $R-$ módulos no singulares.
Es claro que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo submódulos.
Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de módulos no singulares y $m = (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un elemento de $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ singular. Sea $\lambda \in \Lambda$ y $x \in R$ no cero, entonces existe $r \in R$ tal que $rx \neq 0$ y $rxm = 0$, con lo que $rxm_\lambda = 0$, esto es que $rx \in An(m_\lambda)$, por lo que $An(m_\lambda) \trianglelefteq R$. Por lo tanto $m_\lambda = 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, por lo que $m = 0$. Por lo tanto $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es no singular.
Sean M' y M'' no singulares y

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

exacta, sea $m \in M$ no singular. Si $x \in R$ no cero, existe $r \in R$ tal que $rx \neq 0$ y $rxm = 0$, entonces $rxg(m) = 0$, con lo que $An(g(m)) \trianglelefteq R$, es decir que $g(m) = 0$, o bien $m \in Nug = \operatorname{Im} f$, entonces existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m$ y $f(rxm') = 0$, por lo que $rxm' = 0$, es decir $rx \in An(m')$. Por lo tanto $An(m') \trianglelefteq R$, entonces $m' = 0$, lo que implica que $m = 0$. Entonces M es no singular.
Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión en $R-Mod$.

Si $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión, podemos definir para un objeto A de una categoría de Grothendieck $\mathbf{C}$

$$\mathcal{F}(A) = \bigcap \left\{ B \text{ subobjeto de } A : \frac{A}{B} \text{ está en } \mathcal{F} \right\}$$

$\mathcal{F}(A)$ está bien definido pues $A \in \left\{ B \text{ subobjeto de } A : \frac{A}{B} \text{ está en } \mathcal{F} \right\}$ y

$$\left\{ B \text{ subobjeto de } A : \frac{A}{B} \text{ está en } \mathcal{F} \right\}$$

es un subconjunto de $L(A)$.

$\mathcal{F}(A)$ es el menor subobjeto de A tal que $\frac{A}{\mathcal{F}(A)}$ está en $\mathcal{F}$. Es obvio que $\mathcal{F}(A) = \mathbf{0}$ si y sólo si A está en $\mathcal{F}$.

3.2. Teorías de Torsión

Una clase de pretorsión $\mathcal{T}$ en $\mathbf{C}$ es una clase de torsión si, además de ser cerrada bajo cocientes y coproductos, es cerrada bajo extensiones. Esto último lo podemos decir de dos maneras; la primera: si T es un objeto de $\mathbf{C}$ y $A \overset{f}{\subset} T$ tal que A y $\frac{T}{A}$ son objetos en $\mathcal{T}$, entonces T está en $\mathcal{T}$; la segunda: si en la sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \to A \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} B \to \mathbf{0}$$

los objetos A y B están en $\mathcal{T}$ entonces T esta en $\mathcal{T}$.

Directo de la definición tenemos el siguiente hecho.

Proposición 3.8 *Si $\mathcal{T}$ en $\mathbf{C}$ es una clase de torsión, entonces para todo objeto A en $\mathbf{C}$ el cociente $\frac{A}{\mathcal{T}(A)}$ es $\mathcal{T}$-libre de torsión.*

Dem: Sea $\frac{B}{\mathcal{T}(A)}$ subobjeto de $\frac{A}{\mathcal{T}(A)}$ de $\mathcal{T}$-torsión,

$$\mathbf{0} \to \mathcal{T}(A) \to B \to \frac{B}{\mathcal{T}(A)} \to \mathbf{0}$$

se sige que B es de $\mathcal{T}$-torsión, con lo que $B \subset \mathcal{T}(A)$ y con esto $\frac{B}{\mathcal{T}(A)} = 0$. ■

Una teoría de torsión τ es una pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases de objetos de $\mathbf{C}$ de tal forma que

T1 Para todo T en $\mathcal{T}$ y F en $\mathcal{F}$ se cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$;

T2 Si F es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$, entonces F está en $\mathcal{F}$.

T3 Si T es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo F en $\mathcal{F}$, entonces T está en $\mathcal{T}$.

Directamente de la definición tenemos que si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es teoría de torsión, entonces A está en $\mathcal{T}$ y en $\mathcal{F}$, al mismo tiempo, si y sólo si $A = \mathbf{0}$.

La clase de todas las teorías de torsión en la categoría $\mathbf{C}$ será denotada por $\mathbf{C} - Tors$ y en el caso de las categorías $R - Mod$ y $\sigma[M]$ simplemente por $R - Tors$ y $M - Tors$, respectivamente.

Ejemplo 3.7 *Si G es un objeto en la categoría $\mathbb{Z} - Mod$, $x \in G$ es de orden finito si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx = 0$. Definimos el conjunto*

$$t(G) = \{x \in G \mid x \text{ es de orden finito}\}$$

$t(G)$ es subgrupo de G. Al subgrupo $t(G)$ se le llama la parte de torsión de G. Diremos que un grupo T es de torsión si $t(T) = T$, es decir si todo elemento de T tiene orden finito, y F es libre de torsión si $t(F) = 0$, esto es que el único elemento de orden finito de F es 0. Notemos que para cualquier grupo abeliano G, si $x + t(G)$ tiene orden finito existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(x + t(G)) = 0$, es decir que $nx \in t(G)$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mnx = 0$, por lo tanto $x \in t(G)$, de donde concluimos que $\frac{G}{t(G)}$ es libre de torsión.
Si T es grupo de torsión, F es grupo libre de torsión y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(T, F)$, entonces para cualquier $x \in T$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx = 0$, entonces $nf(x) = f(nx) = 0$, por lo que $f(x) = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbb{Z}}(T, F) = 0$.
Si H es un grupo cualquiera tal que $Hom_{\mathbb{Z}}(T, H) = 0$ para todo T de torsión, en particular $i : t(H) \hookrightarrow H$ es cero, por lo que H es libre de torsión.
Si G es un grupo cualquiera tal que $Hom_{\mathbb{Z}}(G, F) = 0$ para todo F grupo libre de de torsión, en particular el epimorfismo canónico $\eta : G \to \frac{G}{t(G)}$ es cero, entonces $\frac{G}{t(G)} = \mathbf{0}$, es decir que $G = t(G)$ o bien que G es de torsión.
Entonces si $\mathcal{T}$ es la clase de grupos abelianos de torsión y $\mathcal{F}$ la clase de los grupos abelianos libres de torsión, tenemos que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es teoría de torsión.

Ejemplo 3.8 *Un elemento x de un grupo G es divisible si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in G$ tal que $ny = x$. Se dice que un grupo es divisible si todos sus elementos son*

divisibles. Definamos para un grupo G

$$d(G) = \sum\{H \mid H \text{ es subgrupo de } G \text{ divisible}\}.$$

$d(G)$ es divisible pues si $y \in d(G)$, existen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ subgrupos divisibles de G e $y_1 \in H_1, y_2 \in H_2, \ldots, y_m \in H_m$ tales que $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$, ahora si $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2, \ldots, x_m \in H_m$ tales que $nx_1 = y_1, nx_2 = y_2, \ldots, nx_n = y_n$, por lo que $n(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m = y$. Por lo tanto $d(G)$ es el máximo subgrupo divisible de G.
D es divisible si y sólo si $d(D) = D$.
Decimos que el grupo G es reducido si $d(G) = 0$, esto quiere decir que el único subgrupo divisible de G es $\mathbf{0}$.
$\frac{G}{d(G)}$ es reducido, pues si $\frac{K}{d(G)} \leq \frac{G}{d(G)}$ divisible, entonces para todo $y \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in K$ tal que $n(x + d(G)) = y + d(G)$, es decir $nx - y \in d(G)$, con lo que existe $x' \in d(G) \subset K$, tal que $nx' = nx - y$, esto es $y = n(x - x')$. Por lo tanto K es divisible, lo que implica que $K \subset d(G)$, de donde $\frac{K}{d(G)} = \mathbf{0}$.
Notemos que si $f : D \to G$, con D divisible, entonces $f(D)$ es divisible, ya que si $y \in f(D)$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $b \in D$ tal que $f(b) = y$ y $a \in D$ tal que $na = b$, de donde $y = f(b) = f(na) = nf(a)$.
Si D es grupo divisible y H es reducido tenemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(D, H) = 0$, ya que si $f : D \to H$ entonces $f(D)$ es subgrupo divisible de H y H es reducido.
Sea H un grupo cualquiera que cumple $Hom_{\mathbb{Z}}(D, H) = 0$ para todo D divisible, en particular el morfismo $i : d(H) \hookrightarrow H$ es cero, con lo que $d(H) = \mathbf{0}$. Por lo tanto H es reducido.
Si D es un grupo cualquiera tal que $Hom_{\mathbb{Z}}(D, H) = 0$, para todo H reducido, en particular el morfismo $\eta : D \to \frac{D}{d(D)}$ es cero, con lo que $\frac{D}{d(D)} = \mathbf{0}$ y de aquí que D es divisible.
Si $\mathcal{D}$ es la clase de los grupos abelianos divisibles y $\mathcal{R}$ la clase de los grupos abelianos reducidos, entonces $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ es teoría de torsión en $\mathbb{Z} - Mod$.

Podemos ordenar parcialmente a $\mathbf{C} - Tors$ de la siguiente manera: si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y $\upsilon = (\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ están en $\mathbf{C} - Tors$ decimos que $\tau \leq \upsilon$ si y sólo si todo objeto en $\mathcal{T}$ es un objeto en $\mathcal{T}'$.

Proposición 3.9 *La relación anterior define una relación de orden parcial en la clase $\mathbf{C} - Tors$.*

Dem: Sean $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$, $\upsilon = (\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ y $\rho = (\mathcal{T}'', \mathcal{F}'')$ elementos de $\mathbf{C} - Tors$.

Es claro que $\tau \leq \tau$ y si $\tau \leq \upsilon \leq \rho$, entonces $\tau \leq \rho$.

Supongamos que $\tau \leq \upsilon$ y $\upsilon \leq \tau$, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Sea F en $\mathcal{F}$, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, de donde F está en $\mathcal{F}'$. Del mismo modo se prueba que todo objeto en $\mathcal{F}'$ es objeto en $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\tau = \upsilon$. ■

También podemos dar la relación de orden en $\mathbf{C} - Tors$ en términos de las clases libres de torsión como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 3.10 *Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y $\upsilon = (\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ son elementos de $\mathbf{C}-Tors$, entonces $\tau \leq \upsilon$ si y sólo si todo objeto en $\mathcal{F}'$ es objeto en $\mathcal{F}$.*

Dem: Supongamos que $\tau \leq \upsilon$ y sea F en $\mathcal{F}'$, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ para todo T en $\mathcal{T}'$, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$, de donde se deduce que F está en $\mathcal{F}$.

Supongamos ahora que todo objeto en $\mathcal{F}'$ es objeto en $\mathcal{F}$ y sea T en $\mathcal{T}$, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ para todo F en $\mathcal{F}$, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ para todo F en $\mathcal{F}'$, es decir que T está en $\mathcal{T}'$. ■

Ejemplo 3.9 *Sea $\mathcal{U}$ es una clase de objetos de $\mathbf{C}$ y*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{U}} &= \{T : Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0, \ \forall U \text{ objeto en } \mathcal{U}\} \\ \mathcal{F}_{\mathcal{U}} &= \{F : Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0, \ \forall T \text{ objeto en } \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\}. \end{aligned}$$

Entonces $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ es la mayor teoría de torsión tal que todo U en $\mathcal{U}$ cumple con ser un objeto en $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Para probar este hecho notemos que de la definición de $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ tenemos que para todo T en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y F en $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ se cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ y si F es un objeto de $\mathbf{C}$ tal que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, entonces F está en $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, en particular si U es un objeto en $\mathcal{U}$, tenemos que $Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0$, para todo T objeto en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, entonces $\mathcal{U}$ es subclase de $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Ahora, si T es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo F en $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0$, para todo U objeto en $\mathcal{U}$, de donde T está en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión tal que todo objeto en $\mathcal{U}$ cumple con ser un objeto en $\mathcal{F}$ y $T \in \mathcal{T}$, entonces $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo F objeto en $\mathcal{F}$, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(T, U) = 0$, para todo U objeto en $\mathcal{U}$, es decir T está en $\mathcal{T}$, por lo que $\tau \leq (\mathcal{T}_{\mathcal{U}}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$.

A la teoría de torsión $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}})$ le llamaremos la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{U}$ y la denotaremos por $Q(\mathcal{U})$.

Ejemplo 3.10 *Del mismo modo que la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{U}$ se puede definir la teoría generada por $\mathcal{U}$ como la pareja $(\mathcal{T},\mathcal{F})$, con*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{F : Hom_{\mathbf{C}}(U,F) = 0 \text{ para toda } U \text{ en } \mathcal{U}\}\\ \mathcal{T} &= \{T : Hom_{\mathbf{C}}(T,F) = 0 \text{ para toda } F \text{ en } \mathcal{F}\}\end{aligned}$$

y si η es otra teoría de torsión tal que todo elemento de $\mathcal{U}$ es de $\eta-$torsión, entonces para cualquier F $\eta-$libre de torsión, se cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T,F) = 0$, para todo T de $\eta-$torsión, en particular $Hom_{\mathbf{C}}(U,F) = 0$ para todo U en $\mathcal{U}$, es decir F está en $\mathcal{F}$. Por lo tanto $(\mathcal{T},\mathcal{F}) \leq \eta$, es decir $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es la mínima teoría de torsión tal que todo U en $\mathcal{U}$ es de torsión.

A la teoría de torsión generada por $\mathcal{U}$ la denotaremos por $\Xi(\mathcal{U})$.

Sea $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de teorías de torsión y consideremos

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \{T \text{ objeto de } \mathbf{C} : T \text{ es de } \tau_\lambda - \textit{torsión} \text{ para algún } \lambda \in \Lambda\}\\ \mathbb{F} &= \{F \text{ objeto de } \mathbf{C} : F \text{ es } \tau_\lambda - \textit{libre de torsión} \text{ para algún } \lambda \in \Lambda\}\end{aligned}$$

entonces si T es de $\tau_\lambda - \textit{torsión}$, es decir, si T está en $\mathbb{T}$, entonces T es de $\Xi(\mathbb{T}) - \textit{torsión}$, esto es que $\tau_\lambda \leq \Xi(\mathbb{T})$ para todo $\lambda \in \Lambda$. De la construcción de $\Xi(\mathbb{T})$ tenemos que si η es otra teoría de torsión tal que $\tau_\lambda \leq \eta$ que todo elemento de $\mathbb{T}$ es de $\eta - \textit{torsión}$, implica que $\Xi(\mathbb{T}) \leq \eta$. Por lo tanto $\Xi(\mathbb{T}) = \sup\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Del mismo modo se ve que $Q(\mathbb{F}) = \inf\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. De todo esto podemos concluir que $\mathbf{C} - Tors$ se comporta como retícula completa.

Ejemplo 3.11 $(\mathbf{C},\{0\})$ *y* $(\{0\},\mathbf{C})$ *son teorías de torsión, además* $(\mathbf{C},\{0\})$ *es el supremo de de la clase de todas las teorías de torsión y* $(\{0\},\mathbf{C})$ *el ínfimo de la clase de todas las teoría de torsión.*

Los conceptos de clase de torsión y teoría de torsión son equivalentes como indica la siguiente proposición.

Proposición 3.11 *Una pareja $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ de clases de subobjetos de $\mathbf{C}$ es teoría de torsión si y sólo si $\mathcal{T}$ es clase de torsión y $\mathcal{F}$ la clase de todos los objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión.*

Dem: De la proposición (3.7) tenemos que si $\mathcal{T}$ es clase de torsión y $\mathcal{F}$ la clase de los objetos $\mathcal{T}-$libres de torsión, entonces $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ cumple T1 y T2. Para probar

T3, tomemos T es un objeto que cumple que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo F en $\mathcal{F}$ en particular $Hom_{\mathbf{C}}\left(T, \frac{T}{\mathcal{T}(T)}\right) = 0$, por lo que el epimorfismo canónico $T \to \frac{T}{\mathcal{T}(T)}$ es el morfismo cero, con lo que $\frac{T}{\mathcal{T}(T)} = 0$, es decir $T = \mathcal{T}(T)$, esto es que T está en $\mathcal{T}$.

Supongamos ahora que $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es teoría de torsión.

Sea T en $\mathcal{T}$ y $f : T \to T'$ un epimorfismo, entonces si F es un objeto en $\mathcal{F}$ y $g : T' \to F$ entonces $g \circ f : T \to F$ es el morfismo 0 y como f es epimorfismo tenemos que $g = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbf{C}}(T', F) = 0$ para todo F en $\mathcal{F}$, es decir T' esta en $\mathcal{T}$.

Sea $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de objetos en $\mathcal{T}$ y F en $\mathcal{F}$, entonces $Hom_{\mathbf{C}}\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda, F\right) \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(T_\lambda, F) = 0$, por lo que $\coprod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ está en $\mathcal{T}$.

Supongamos que la sucesión

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es exacta, con A y C en $\mathcal{T}$. Sean F en $\mathcal{F}$ y $h : B \to F$, entonces $h \circ f = 0$ y por la propiedad del conúcleo existe $\varphi : C \to F$ tal que $\varphi \circ g = h$, pero C está en $\mathcal{T}$, por lo que $\varphi = 0$, de donde $h = 0$. Por lo tanto B está en $\mathcal{T}$. ■

Corolario 3.11.1 *Sea $\mathcal{T}$ una clase de objetos de $\mathbf{C}$. Entonces $\mathcal{T}$ es una clase de torsión si y sólo si existe una única teoría de torsión tal que $\mathcal{T}$ es su clase de torsión.*

Dem: Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es teoría de torsión, por la proposición anterior tenemos que $\mathcal{T}$ es clase de torsión.

Supongamos que $\mathcal{T}$ es clase de torsión y sea $\tau = \Xi(\mathcal{T}) = (\mathcal{T}', \mathcal{F})$. Por definición tenemos que todo objeto en $\mathcal{T}$ es objeto en $\mathcal{T}'$. Sea A un objeto en $\mathcal{T}'$ y consideremos $B = \mathcal{T}(A)$, el mayor subobjeto de A que está en $\mathcal{T}$. Claramente $\frac{A}{B}$ está en $\mathcal{T}'$. Si $f : T \to \frac{A}{B}$, con T en $\mathcal{T}$, factorizando f tenemos $T \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im} f \xrightarrow{f_2} \frac{A}{B}$, entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\mathcal{T}$ y es subobjeto de $\frac{A}{B}$, es decir $\operatorname{Im} f$ es de la forma $\frac{C}{B}$ con C subobjeto de A que contiene a B, de la sucesión exacta

$$0 \to B \longrightarrow C \longrightarrow \frac{C}{B} \to 0$$

y del hecho de ser $\mathcal{T}$ cerrada bajo extensiones tenemos que C está en $\mathcal{T}$, por lo que $B = C$, de donde $\operatorname{Im} f = 0$, esto es que $f = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbf{C}}\left(T, \frac{A}{B}\right) = 0$, para todo T en $\mathcal{T}$, esto es que $\frac{A}{B}$ está en $\mathcal{F}$, entonces $\frac{A}{B} = 0$, y de aquí $A = B$ que está en $\mathcal{T}$.

La unicidad se sigue del hecho que dos teorías de torsión son iguales si y sólo si tienen la misma clase de torsión asociada. ■

En adelante si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, que T sea un objeto de $\mathcal{T}$ lo indicaremos diciendo que T es de $\tau - torsión$ y los objetos de $\mathcal{F}$ los denominaremos objetos $\tau - libres$ de $torsión$, así

$$\tau(A) = \sum \{B \subset A : B \text{ es de } \tau - torsión\}.$$

Proposición 3.12 *Si $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión, entonces existe una única teoría de torsión de tal forma que $\mathcal{F}$ es su clase libre de torsión.*

Dem: Sea $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión y sea $\tau = Q(\mathcal{F}) = (\mathcal{T}, \mathcal{F}')$, la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{F}$. Por definición todo objeto de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}'$. Sea A un objeto en $\mathcal{F}'$ y consideremos $B = \mathcal{F}(A)$, el menor subobjeto de A tal que $\frac{A}{B}$ está en $\mathcal{F}$. Claramente B está en $\mathcal{F}'$. Si $f : B \to F$, con F en $\mathcal{F}$, factorizando f tenemos $B \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im} f \xrightarrow{f_2} F$, como f_2 es monomorfismo, entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\mathcal{F}$ e $\operatorname{Im} f \simeq \frac{B}{Nuf_1}$, de la sucesión exacta

$$0 \to \frac{B}{Nuf_1} \longrightarrow \frac{A}{Nuf_1} \longrightarrow \frac{\frac{A}{Nuf_1}}{\frac{B}{Nuf_1}} \simeq \frac{A}{B} \to 0$$

y del hecho de ser $\mathcal{F}$ cerrada bajo extensiones tenemos que $\frac{A}{Nuf_1}$ está en $\mathcal{F}$, por lo que $B = Nuf_1$, de donde $\operatorname{Im} f = 0$, esto es que $f = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbf{C}}(B, F) = 0$, para todo F en $\mathcal{F}$, esto es que B está en $\mathcal{T}$, entonces $B = 0$, y de aquí A está en $\mathcal{F}$. La unicidad se sigue del hecho que dos teorías de torsión son iguales si y sólo si tienen la misma clase libre de torsión asociada. ■

Ejemplo 3.12 *En $R - Mod$, la teoría de torsión de Goldie es la teoría de torsión cuya clase libre de torsión es la clase de los módulos no singulares.*

Para lo que sigue consideremos A un objeto fijo de la categoría de Grothendieck $\mathbf{C}$ y, como ya indicamos, $\mathbf{C} - Tors$ la clase de teorías de torsión en la categoría $\mathbf{C}$ y $A - Tors$ la clase de teorías de torsión en $\sigma[A]$. Sea "$\leq$" y "$\preceq$" las relaciones de orden en $\mathbf{C} - Tors$ y $A - Tors$, respectivamente.

Si τ está en $\mathbf{C} - Tors$, consideremos $\tau^* = (\mathcal{T}_{\tau^*}, \mathcal{F}_{\tau^*})$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\tau^*} &= \{T \text{ en } \sigma[A] : T \text{ es de } \tau - torsión\} \\ \mathcal{F}_{\tau^*} &= \{F \text{ en } \sigma[A] : F \text{ es } \tau - libre\ de\ torsión\} \end{aligned}$$

Teorema 3.1 *Si τ pertenece a $\mathbf{C} - Tors$, entonces τ^* pertenece a $A - Tors$.*

Dem: Supongamos que τ es teoría de torsión en $\mathbf{C}$.

1. Sean T en $\mathcal{T}_{\tau^*}$ y F en $\mathcal{F}_{\tau^*}$, entonces T es de $\tau - torsión$ y F es $\tau - libre\ de\ torsión$, con lo que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$.

2. Sea T un objeto de $\sigma[A]$ tal que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ para toda F en $\mathcal{F}_{\tau^*}$. Sea G un objeto $\tau - libre\ de\ torsión$ arbitrario y $f \in Hom_{\mathbf{C}}(T, G)$, factoricemos a f como
$$T \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im} f \xrightarrow{f_2} G$$
con f_1 epimorfismo y f_2 monomorfismo. Como T es un objeto en $\sigma[A]$ entonces $\operatorname{Im} f$ es objeto en $\sigma[A]$ y como G es $\tau - libre\ de\ torsión$ e $\operatorname{Im} f \overset{f_2}{\subset} G$ entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\mathcal{F}_{\tau^*}$, con lo que $f_1 = 0$, de donde $f = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbf{C}}(T, G) = 0$ para todo G $\tau - libre\ de\ torsión$, es decir T es de $\tau - torsión$ y como T es objeto en $\sigma[A]$, concluimos que T está en $\mathcal{T}_{\tau^*}$.

3. Sea F un objeto de $\sigma[A]$ tal que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$ para toda T en $\mathcal{T}_{\tau^*}$. Sea H un objeto de $\tau - torsión$ arbitrario y $f \in Hom_{\mathbf{C}}(H, F)$, factoricemos a f como
$$H \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im} f \xrightarrow{f_2} F$$
con f_1 epimorfismo y f_2 monomorfismo. Como F es un objeto en $\sigma[A]$ entonces $\operatorname{Im} f$ es objeto en $\sigma[A]$ y como H es de $\tau - torsión$ e $\operatorname{Im} f$ es cociente de H entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\mathcal{T}_{\tau^*}$, con lo que $f_2 = 0$, de donde $f = 0$. Por lo tanto $Hom_{\mathbf{C}}(H, F) = 0$ para todo H de $\tau - torsión$, es decir F es $\tau - libre\ de\ torsión$ y como F es objeto en $\sigma[A]$, concluimos que F está en $\mathcal{F}_{\tau^*}$. ■

Teorema 3.2 *La relación*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} - Tors & \rightarrow & A - Tors \\ \tau & \longmapsto & \tau^* \end{array}$$

determina una correspondencia suprayectiva que respeta el orden.

Dem: Sea τ en $A - Tors$, con $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y sea $\tau_0 = \Xi(\mathcal{T})$ la teoría de torsión en $\mathbf{C} - Tors$ generada por $\mathcal{T}$, entonces todo objeto T de $\mathcal{T}$ es de $\tau_0 - torsión$ y como $\mathcal{T}$ es una subclase de objetos de $\sigma[A]$, todo T en $\mathcal{T}$ es de $\tau_0^* - torsión$, es decir $\tau \preceq \tau_0^*$. Por otro lado, sea F un objeto en $\mathcal{F}$ que cumple con $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo T

en $\mathcal{T}$. Puesto que la clase de los objetos $\tau_0 - libres\ de\ torsión$ es

$$\{F \text{ objeto de } \mathbf{C} : Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0\ \forall T \text{ en } \mathcal{T}\}$$

y $\mathcal{F}$ es una clase de objetos de $\sigma[A]$, podemos concluir que todo objeto en $\mathcal{F}$ es $\tau_0^* - libre\ de\ torsión$, es decir $\tau_0^* \preceq \tau$. Por lo tanto $\tau_0^* = \tau$.

Sean τ y υ en $\mathbf{C} - Tors$ tales que $\tau \leq \upsilon$. Si T es de $\tau^* - torsión$, entonces T es de $\tau - torsión$ y objeto en $\sigma[A]$, de donde T es objeto de $\upsilon - torsión$ y está en $\sigma[A]$, por lo que T es de $\upsilon^* - torsión$. Por lo tanto $\tau^* \preceq \upsilon^*$ ■

De la proposición anterior tenemos que dada cualquier teoría de torsión τ en $A - Tors$ existe una teoría de torsión en υ en $\mathbf{C} - Tors$ tal que $\upsilon^* = \tau$, pero υ no tiene por que ser única. En general cuando tenemos una correspondencia φ de la clase $\mathcal{U}$ en la clase $\mathcal{V}$, la fibra de la correspondencia φ en el elemento V en $\mathcal{V}$ es

$$\varphi^{-1}(V) = \{U \text{ en } \mathcal{U} : \varphi(U) = V\},$$

por supuesto que estas fibras son ajenas dos a dos y la correspondencia φ está completamente determinada por estas fibras.

Teorema 3.3 *Para toda $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $A-Tors$, la fibra de τ bajo la correspondencia "$*$" es el intervalo cerrado*

$$[\tau_0, \tau_1] = \{\upsilon \text{ en } \mathbf{C} - Tors : \tau_0 \leq \upsilon \leq \tau_1\}$$

con $\tau_0 = \Xi(\mathcal{T})$ y $\tau_1 = Q(\mathcal{F})$.

Dem: Primero notemos que todo F en $\mathcal{F}$ es $\tau_1 - libre\ de\ torsión$ y es objeto de $\sigma[A]$, por lo que todo F en $\mathcal{F}$ es $\tau_1^* - libre\ de\ torsión$, es decir que $\tau_1^* \preceq \tau$. Por otro lado, si T es un objeto en $\mathcal{T}$, tenemos que $Hom_{\mathbf{C}}(T, F) = 0$, para todo F en $\mathcal{F}$, pero $\mathcal{F}$ cogenera a τ_1 con lo que T es de $\tau_1 - torsión$ y está en $\sigma[A]$, entonces T es de $\tau_1^* - torsión$. Por lo tanto $\tau \preceq \tau_1^*$. Con todo esto concluimos que $\tau_1^* = \tau$.

Sea υ en $\mathbf{C} - Tors$ tal que $\upsilon^* = \tau$, entonces todo T en $\mathcal{T}$ es de $\upsilon - torsión$, con lo que $\tau_0 = \Xi(\mathcal{T}) \leq \upsilon$, también todo F en $\mathcal{F}$ es $\upsilon - libe\ de\ torsión$, por lo cual $\upsilon \leq Q(\mathcal{F}) = \tau_1$. Por lo tanto todo elemento en la fibra de τ está en $[\tau_0, \tau_1]$.

Supongamos ahora que $\tau_0 \leq \upsilon \leq \tau_1$, de donde $\tau = \tau_0^* \preceq \upsilon^* \preceq \tau_1^* = \tau$. Por lo tanto $\upsilon^* = \tau$. ■

Una teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria si $\mathcal{T}$ es hereditaria, es decir si $A \overset{f}{\subset} T$, con T de $\tau - torsión$ implica que A es de $\tau - torsión$. La clase de todas las

teoría de torsión hereditarias en $\mathbf{C}$ será denotada por $\mathbf{C} - tors$ y en el caso de las categorías $R-Mod$ y $\sigma[M]$ las denotaremos por $R-tors$ y $M-tors$, respectivamente.

Ejemplo 3.13 *La teoría de torsión del ejemplo (3.7) es hereditaria.*

Ejemplo 3.14 *Si $\mathcal{D}$ es la clase de los grupos abelianos divisibles y $\mathcal{R}$ la clase de los grupos abelianos reducidos, entonces la teoría de torsión $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ no es hereditaria, pues $\mathbb{Q}$ es divisible mientras que $\mathbb{Z}$ no es divisible.*

Para teorías de torsión tenemos la siguiente equivalencia.

Proposición 3.13 *τ en $\mathbf{C} - Tors$ es hereditaria si y sólo si para todo objeto A de $\mathbf{C}$ y todo subobjeto B de A tenemos que $\tau(B) = \tau(A) \cap B$.*

Dem: Supongamos que τ es teoría de torsión hereditaria y $B \subset A$, entonces $\tau(A) \cap B \leq \tau(A)$ y $\tau(A) \cap B \leq B$, con lo que $\tau(A) \cap B$ es subobjeto de B de $\tau - torsión$, por lo tanto $\tau(A) \cap B \leq \tau(B)$.

Supongamos ahora que para todo objeto A de $\mathbf{C}$ y todo subobjeto B de A tenemos que $\tau(B) = \tau(A) \cap B$, entonces si A es de $\tau - torsión$ $\tau(B) = \tau(A) \cap B = A \cap B = B$, con lo que B es de $\tau - torsión$. ■

Teorema 3.1 *Si τ está en $\mathbf{C} - tors$, entonces τ^* está en $A - tors$.*

Dem: Sea τ en $\mathbf{C} - tors$ y T en $\sigma[A]$ de $\tau^* - torsión$, entonces si $S \subset T$, tenemos que S está en $\sigma[A]$ y es de $\tau - torsión$, es decir S es de $\tau^* - torsión$. Por lo tanto τ^* está en $A - tors$. ■

3.3. Teorías de Torsión en $\sigma[M]$

En lo que sigue M es un $R - módulo$ fijo.

Recordemos que las categorías del tipo $\sigma[M]$ no son cerradas bajo productos directos cuando las consideramos como clases de $R - módulos$, pero como categoría si tiene sus propios productos directos. De hecho si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de objetos de $\sigma[M]$, el producto directo $\prod_M A_\lambda$ en $\sigma[M]$ es el $R - módulo$ $Tr\left(N, \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$, con N un generador de la categoría $\sigma[M]$.

Por otro lado, $\sigma[M]$ cumple que para todo par de objetos A, B en $\sigma[M]$, los grupos abelianos $Hom_{\sigma[M]}(A, B)$ y $Hom_{R-Mod}(A, B)$ son iguales. En general en una

categoría de Grothendieck $\mathbf{C}$, para un objeto A y una familia de objetos $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, los grupos abelianos $Hom_{\mathbf{C}}\left(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$ y $\prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\mathbf{C}}(A, B_\lambda)$ son isomorfos. Sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de objetos de $\sigma[M]$, para cualquier objeto A de $\sigma[M]$, tenemos:

$$Hom_{\sigma[M]}\left(A, \prod_M B_\lambda\right) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{\sigma[M]}(A, B_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} Hom_{R-Mod}(A, B_\lambda) \simeq Hom_{R-Mod}\left(A, \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right).$$

Proposición 3.14 *Una teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\sigma[M]$ es hereditaria si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas $M-$ inyectivas.*

Dem: Supongamos que τ es hereditaria y sea F en $\mathcal{F}$, entonces $\tau\left(\hat{E}(F)\right) \leq \hat{E}(F)$. Tenemos que $\tau\left(\hat{E}(F)\right) \cap F \leq \tau\left(\hat{E}(F)\right)$, por lo que $\tau\left(\hat{E}(F)\right) \cap F$ es un subobjeto de F de $\tau-$ *torsión*, entonces $\tau\left(\hat{E}(F)\right) \cap F = 0$, pero F es esencial en $\hat{E}(F)$, por lo tanto $\tau\left(\hat{E}(F)\right) = \mathbf{0}$, es decir $\hat{E}(F)$ está en $\mathcal{F}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas $M-$ *inyectivas* y sean T un objeto en $\sigma[M]$ de $\tau-$ *torsión* y $A \leq T$ entonces existe $\varphi : T \to \hat{E}\left(\frac{A}{\tau(A)}\right)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \frac{A}{\tau(A)} & \hookrightarrow & \hat{E}\left(\frac{A}{\tau(A)}\right) \end{array}$$

y como $\hat{E}\left(\frac{A}{\tau(A)}\right)$ está en $\mathcal{F}$ entonces $\varphi = 0$, con lo que $\frac{A}{\tau(A)} = \mathbf{0}$, es decir $\tau(A) = A$. Por lo tanto τ es hereditaria. ■

Proposición 3.15 *Una teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\sigma[M]$ es hereditaria si y sólo si τ está cogenerada por un módulo $M-$ inyectivo.*

Dem: Sea E inyectivo en $\sigma[M]$ y $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ la teoría de torsión en $\sigma[M]$ cogenerada por E. Consideremos $A \leq T$ con T de $\tau-$ *torsión* y $f : A \to E$, entonces existe $\bar{f} : T \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & T \\ f\downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ E & & \end{array}$$

pero $\bar{f} = 0$, de donde $f = 0$. Por lo tanto A es de $\tau-$ *torsión*.

Supongamos ahora que $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria y sea

$$\mathcal{U} = \{\langle x \rangle \text{ en } \sigma[M] : \langle x \rangle \text{ es } \tau - \text{libre de torsión}\}$$

consideremos $E = Tr\left(N, \prod_{U \in \mathcal{U}} \hat{E}(U)\right)$, con N un generador de $\sigma[M]$, es decir E es el producto directo de $\left\{\hat{E}(U)\right\}_{U \in \mathcal{U}}$ en la categoría $\sigma[M]$, entonces E es $M - inyectivo$ y es $\tau-$libre de torsión. Sea η la teoría de torsión cogenerada por E y T de $\tau-$torsión, entonces $Hom_R(T, E) = 0$, pues E es $\tau-$libre de torsión, de donde T es de $\eta-$torsión, esto es $\tau \leq \eta$.

Sea T es un objeto en $\sigma[M]$ tal que $Hom_R(T, E) = 0$ y supongamos que T no es de $\tau-$torsión, entonces existe F $\tau-$libre de torsión y $f : T \to F$ no cero, sea $x \in T$ tal que $f(x) \neq 0$, como $\langle f(x) \rangle \leq F$, $\langle f(x) \rangle \in \mathcal{U}$, entonces existe $\alpha : \langle f(x) \rangle \to E$ monomorfismo. Definamos $g : \langle x \rangle \to \langle f(x) \rangle$ dada por

$$g(rx) = rf(x),$$

que claramente es epimorfismo, y como E es $M - inyectivo$, existe $h : T \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle & \hookrightarrow & T \\ \alpha \circ g \downarrow & \swarrow h & \\ E & & \end{array},$$

pero $h = 0$, entonces $\alpha \circ g = 0$, de aquí que $\alpha = 0$, por lo que $\langle f(x) \rangle = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto T es de $\tau-$torsión, con esto concluimos que $\eta \preceq \tau$. Por lo tanto $\eta = \tau$. ■

$M - tors$ está parcialmente ordenada por la misma relación de orden de $M - Tors$, con el material que estudiaremos en el siguiente capítulo, podremos deducir que $M - tors$ es un conjunto y con la siguiente proposición podremos probar que $M - tors$ es una retícula completa.

Proposición 3.16 *Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de objetos $M - inyectivos$ de $\sigma[M]$, entonces $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} (Q(E_\lambda)) = Q(\prod_M E_\lambda)$.*

Dem: Sea $E = \prod_M E_\lambda$ el producto directo de $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $\sigma[M]$ y $\eta = Q(E)$. Si T es un objeto en $\sigma[M]$ de $\eta - torsión$, entonces $0 = Hom_R(T, E) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} Hom_R(T, E_\lambda)$, por lo que $Hom_R(T, E_\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo que T es

de $Q(E_\lambda)-$ *torsión* para todo $\lambda \in \Lambda$, de donde $\eta \preceq Q(E_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Ahora, sea υ otra teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ tal que $\upsilon \preceq Q(E_\lambda)$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Sea T de $\upsilon-$ *torsión* y $f : T \to E$, entonces $\pi_\lambda \circ f = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo que $f = 0$, por lo tanto T es de $\eta-$ *torsión*, de donde $\upsilon \preceq \eta$. Por lo tanto $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} (Q(E_\lambda)) = Q(\prod_M E_\lambda)$. ■

Proposición 3.17 *Sea $\mathfrak{C}$ es una clase contenida en $M-tors$ y supongamos que para cada τ en $\mathfrak{C}$, $\mathcal{T}_\tau$ es la clase de torsión de τ, entonces $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$ es una clase de torsión hereditaria y es la clase de torsión que corresponde a $\bigwedge_{\tau\in\mathfrak{C}} \tau$.*

Dem: Sea $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de elementos de $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $T_\lambda \in \mathcal{T}_\tau$ para toda τ en $\mathfrak{C}$, por lo que $\coprod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ está en $\mathcal{T}_\tau$ para toda $\lambda \in \Lambda$, es decir que $\coprod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ está en $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$. Si T está en $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$ y $K \leq T$, entonces T está en $\mathcal{T}_\tau$ para todo τ en $\mathfrak{C}$, por lo que tanto K como $\frac{T}{K}$ están en $\mathcal{T}_\tau$ para todo τ en $\mathfrak{C}$, es decir K y $\frac{T}{K}$ están en $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$. Así $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$ es clase de torsión hereditaria. Sea υ la teoría de torsión cuya clase de torsión es $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$. $\upsilon \preceq \tau$ para toda τ en $\mathfrak{C}$, pues $\bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau \subset \mathcal{T}_\tau$ para toda τ en $\mathfrak{C}$. Ahora, si η es otra teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$, con clase de torsión $\mathcal{T}_\eta$ y tal que $\eta \preceq \tau$ para toda τ en $\mathfrak{C}$, entonces $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{T}_\tau$ para toda τ en $\mathfrak{C}$, es decir $\mathcal{T}_\eta \subset \bigcap_{\tau\in\mathfrak{C}} \mathcal{T}_\tau$, con lo que $\eta \preceq \upsilon$, es decir $\upsilon = \bigwedge_{\tau\in\mathfrak{C}} \tau$. ■

Proposición 3.18 *Todo conjunto de teorías de torsión hereditarias en $\sigma[M]$ tiene ínfimo.*

Dem: Sea $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de teorías de torsión hereditarias y supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$ la teoría de torsión τ_λ está cogenera por el $M-$ *inyectivo* E_λ, es decir $\tau_\lambda = Q(E_\lambda)$. Por la proposición anterior, $Q(\prod_M E_\lambda)$ es el ínfimo de $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. ■

Claramente las teorías de torsión $\varsigma = (\sigma[M], 0)$ y $\xi = (0, \sigma[M])$ son hereditarias y $\xi \preceq \tau \preceq \varsigma$ para toda τ en $M-tors$.

Con respecto de la teoría de torsión $\xi = (0, \sigma[M])$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.19 *Sea E un objeto inyectivo en $\sigma[M]$. Entonces E cogenera a $\xi = (0, \sigma[M])$ si y sólo si E cogenera a la categoría $\sigma[M]$.*

Dem: Supongamos que E cogenera a $\xi = (0, \sigma[M])$, es decir, si $Hom_R(T, E) = 0$, entonces $T = 0$. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo no cero en $\sigma[M]$, con factorización

$A \xrightarrow{f_1} \operatorname{Im} f \xrightarrow{f_2} B$, donde f_1 es epimorfismo y f_2 monomorfismo. Si $\alpha : \operatorname{Im} f \to E$ es un morfismo cualquiera existe $\bar{\alpha} : B \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \xrightarrow{f_2} & B \\ \alpha \downarrow & \swarrow \bar{\alpha} & \\ E & & \end{array}$$

pero $0 = \bar{\alpha} \circ f = \bar{\alpha} \circ f_2 \circ f_1$, con lo que $0 = \bar{\alpha} \circ f_2 = \alpha$, por lo tanto $\operatorname{Im} f = 0$, lo cual no es posible, de donde existe $h : B \to E$ tal que $h \circ f$ es distinto de cero. Por lo tanto E cogenera a $\sigma[M]$.

Supongamos ahora que E es un objeto $M - inyectivo$ cogenerador de $\sigma[M]$. Queremos probar que E cogenera a $\xi = (0, \sigma[M])$, para esto, sea T un objeto en $\sigma[M]$ tal que $Hom_R(T, E) = 0$, si $T \neq 0$, existe $x \in T$ no cero, entonces el morfismo inclusión $f : \langle x \rangle \to T$ es no cero, pero E cogenera a $\sigma[M]$, por lo que existe $h : T \to E$ tal que $h \circ f \neq 0$, lo cual no es posible pues $h \in Hom_R(T, E) = 0$. Por lo tanto $T = 0$, de donde E cogenera a $\xi = (0, \sigma[M])$. ■

Como consecuencia directa de la proposición anterior, tenemos que la categoría $\sigma[M]$ tiene un cogenerador inyectivo y por la proposición (3.15), éste es el producto directo en la categoría $\sigma[M]$ de las cápsulas $M - inyectivas$ de todos los cíclicos de $\sigma[M]$.

Con respecto a la correspondencia "$*$" de la sección anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Si restringimos la relación "$*$" a $R - tors$, tenemos una correspondencia suprayectiva que respeta el orden de $R - tors$ a $M - tors$.*

Dem: Sea

$$\varphi : R - tors \to M - tors$$
$$\varphi(\tau) = \tau^*$$

Recordemos que $\tau^* = (\mathcal{T}^*, \mathcal{F}^*)$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\tau^*} &= \{T \text{ en } \sigma[A] : T \text{ es de } \tau - torsión\} \\ \mathcal{F}_{\tau^*} &= \{F \text{ en } \sigma[A] : F \text{ es } \tau - libre\ de\ torsión\}, \end{aligned}$$

por el teorema (3.1) tenemos que si τ está en $R - tors$, entonces τ^* es elemento de $M - tors$, con lo que φ es una correspondencia de $R - tors$ a $M - tors$ y como

"$*$" respeta el orden φ también lo hace. Falta probar que φ es suprayectiva. Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \in M - tors$, probaremos que la clase de los módulos $\Xi(\mathcal{T}) - libres\ de\ torsión$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea F $\Xi(\mathcal{T}) - libre\ de\ torsión$ y supongamos que existe $f : T \to E(F)$ no cero, para algún T en $\mathcal{T}$, recordemos que la clase de los módulos $\Xi(\mathcal{T}) - libres\ de\ torsión$ es

$$\{F \text{ en } R - Mod : Hom_R(T, F) = 0\ \forall T \text{ en } \mathcal{T}\},$$

entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\mathcal{T}$ y como F es esencial en $E(F)$ tenemos que $\operatorname{Im} f \cap F \neq 0$ e $\operatorname{Im} f \cap F$está en $\mathcal{T}$ y en $\mathcal{F}$, lo cual no es posible. Por lo tanto $Hom_R(T, E(F)) = 0$ para todo T en $\mathcal{T}$, es decir $E(F)$ es $\Xi(\mathcal{T}) - libre\ de\ torsión$. ■

Sea τ en $M - tors$, entonces existe F inyectivo en $\sigma[M]$ que cogenera a τ. Sea $E = E(F)$, la cápsula inyectiva de F en $R - Mod$ y $\tau_1' = Q(E)$, por lo cual τ_1' está en $R - tors$. Si T es de $\tau - torsión$ y $f : T \to E$ entonces $\operatorname{Im} f$ está en $\sigma[M]$ y es de $\tau - torsión$, como τ es hereditaria $\operatorname{Im} f \cap F$ es de $\tau - torsión$ y como $\operatorname{Im} f \cap F$ es submódulo de F tenemos que $\operatorname{Im} f \cap F$ es $\tau - libre\ de\ torsión$, por lo tanto $\operatorname{Im} f \cap F = 0$, de donde $\operatorname{Im} f = 0$. Por lo tanto $\tau \preceq \tau_1'^*$.

Sea T de $\tau_1'^* - torsión$, entonces T está en $\sigma[M]$ y es de $\tau_1' - torsión$, por lo que $Hom_R(T, E) = 0$. Sea $f : T \to F$ entonces si $i : F \to E$ es monomorfismo $i \circ f = 0$, de donde $f = 0$. Por lo tanto $Hom_R(T, F) = 0$, es decir T es de $\tau - torsión$. Entonces $\tau_1'^* \preceq \tau$. Por todo lo anterior τ_0 y τ_1' están en la fibra de τ de φ.

Teorema 3.4 *Si τ es teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ cogenerada por el inyectivo F en $\sigma[M]$, entonces la fibra de τ de la correspondencia φ es el intervalo $[\tau_0, \tau_1']$ de $R - tors$.*

Dem: Sea υ en $R - tors$ tal que $\upsilon^* = \tau$. Entonces todo módulo en $\sigma[M]$ $\tau - libre\ de\ torsión$ es $\upsilon - libre\ de\ torsión$, en particular F es $\upsilon - libre\ de\ torsión$, por lo que $E = E(F)$ es $\upsilon - libre\ de\ torsión$, pero τ_1' es la mayor teoría de torsión tal que E es libre de torsión, por lo que $\upsilon \preceq \tau_1'$. Ya sabíamos que si $\upsilon^* = \tau$, entonces $\tau_0 \preceq \upsilon$. ■

Capítulo 4

Filtros Lineales

En lo que sigue, consideramos N un $R-$ *módulo* izquierdo, K un submódulo de N y $x \in N$. El ideal izquierdo de R

$$(K : x) = \{r \in R : rx \in K\}$$

es llamado el conductor de x en K. En particular, al conductor $(\mathbf{0} : x)$ se le llama el Anulador de x y se denota por $An\,(x)$.

Un conjunto $\Im$ de ideales izquierdos del anillo R se llama filtro lineal izquierdo de R si cumple con los siguientes axiomas:

1. Si $I \in \Im$ y J es un ideal izquierdo de R tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \Im$.

2. Si I y J son elementos de $\Im$ entonces $I \cap J \in \Im$.

3. Si $I \in \Im$ entonces para todo $x \in R$ el ideal $(I : x) \in \Im$.
   Un filtro lineal izquierdo $\Im$ de R se llama filtro de Gabriel si además se cumple que:

4. Si I es ideal izquierdo de R y existe $J \in \Im$ tal que para todo $x \in J$ el ideal izquierdo $(I : x) \in \Im$ se tiene que I es elemento de $\Im$.

En [S] se da una correspondencia biyectiva entre los filtros lineales de R con la clase de todas las familias de $R-$ *módulos* que son cerradas bajo submódulos, sumas directas y cocientes, (clases de pretorsión hereditarias) y otra entre los filtros de Gabriel y $R-$ *tors*.

En esta parte extenderemos estas nociones a $\sigma\,[M]$.

En adelante a un filtro lineal izquierdo lo denominaremos simplemente filtro lineal.

4.1. Filtros lineales

Sean τ en $M-tors$ y K un $R-módulo$ izquierdo. Un submódulo L de K es $\tau-M-denso$ en K si el cociente K/L es un objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$. En el caso que K sea un objeto en $\sigma[M]$ diremos que L es $\tau-denso$ en K, en vez de $\tau-M-denso$ y si τ es la teoría de torsión $(\sigma[M],0)$ diremos $M-denso$ en vez de $\tau-M-denso$.

Sea τ en $M-tors$ y consideremos

$$\Im_\tau=\{I\leq R: I\ es\ \tau-M-denso\ en\ R\}$$

y si $\varsigma=(\sigma[M],0)$ denotaremos por $\Im_M$ a $\Im_\varsigma$.

Teorema 4.1 *Para cualquier τ en $M-tors$, $\Im_\tau$ es filtro lineal en R.*

Dem: 1. Sea $I\in\Im_\tau$ y $J\supseteq I$ entonces tenemos el epimorfismo

$$\begin{gathered}\varphi:\tfrac{R}{I}\longrightarrow\tfrac{R}{J}\\ \varphi(x+I)=x+J\end{gathered}$$

como $\sigma[M]$ es cerrada bajo cocientes R/J es objeto en $\sigma[M]$ y es de $\tau-torsión$, es decir, J está en $\Im_\tau$.

2. Si I y J están en $\Im_\tau$ consideremos el monomorfismo

$$\begin{gathered}\varphi:\tfrac{R}{I\cap J}\longrightarrow\tfrac{R}{I}\oplus\tfrac{R}{J}\\ \varphi(x+(I\cap J))=(x+I,x+J)\end{gathered}$$

entonces $(I\cap J)\in\Im_\tau$.

3. Sea $I\in\Im_\tau$ y $x\in R$ entonces tenemos el monomorfismo

$$\begin{gathered}\varphi:\tfrac{R}{(I:x)}\longrightarrow\tfrac{R}{I}\\ \varphi(y+(I:x))=yx+I\end{gathered}$$

entonces $(I:x)\in\Im_\tau$. ■

Teorema 4.2 *Para cualquier teoría de torsión τ en $M-tors$ se cumple la propiedad siguiente:*
4. Si $I\in\Im_M$ y existe $J\in\Im_\tau$ tal que para toda $x\in J$ se tiene $(I:x)\in\Im_\tau$ entonces $I\in\Im_\tau$.

Dem: Sea $I \in \Im_M$ y $J \in \Im_\tau$ tal que para toda $x \in J$ se tiene $(I : x) \in \Im_\tau$.

Si $x \in J$ y $r \in (I : x)$ entonces $rx \in I$ y como J es ideal izquierdo entonces $rx \in J$, es decir, $rx \in I \cap J$, de donde $r \in (I \cap J : x)$. Por otro lado, como $I \cap J \subset I$ se tiene que $(I : x) \supseteq (I \cap J : x)$.

De este par de hechos tenemos que para toda $x \in J$ se satisface $(I : x) = (I \cap J : x)$ y de aquí que $(I \cap J : x) \in \Im_\tau$, de donde, $R/(I \cap J : x)$ es objeto de $\sigma[M]$ de $\tau -$ *torsión*. Para cada $x \in J$ consideremos el morfismo

$$\begin{array}{c} \varphi_x : \frac{R}{(I\cap J:x)} \longrightarrow \frac{J}{I\cap J} \\ r + (I \cap J : x) \mapsto rx + (I \cap J) \end{array}$$

estos morfismos inducen el morfismo

$$\begin{array}{c} \varphi : \bigoplus_{x\in J} \frac{R}{(I\cap J:x)} \longrightarrow \frac{J}{I\cap J} \\ \varphi\left((r_x + (I \cap J : x))_{x\in J}\right) = \sum (r_x x + (I \cap J)) \end{array}$$

el cual es epimorfismo, y como $\sigma[M]$ es cerrada bajo sumas directas y cocientes y τ es una teoría de torsión, tenemos que $J/(I \cap J)$ es objeto de $\tau -$ *torsión* en $\sigma[M]$.

Por otro lado como R/J está en $\sigma[M]$ y es de $\tau -$ *torsión* y

$$\frac{R}{I+J} \simeq \frac{\frac{R}{J}}{\frac{I+J}{J}}$$

tenemos que $R/(I + J)$ es un objeto $\sigma[M]$ de $\tau -$ *torsión*.

Finalmente, como I es $M -$ *denso* R/I está en $\sigma[M]$.

De lo anterior tenemos la siguiente sucesión de módulos y morfismos

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \frac{J}{I\cap J} \xrightarrow{f} \frac{R}{I} \xrightarrow{g} \frac{R}{I+J} \longrightarrow 0 \\ f(x + (I \cap J)) = x + I \\ g(x + I) = x + (I + J) \end{array}$$

que es una sucesión exacta en $\sigma[M]$ y como τ es cerrada bajo extensiones de $\sigma[M]$ R/I es de $\tau -$ *torsión*, es decir, $I \in \Im_\tau$. ■

Ahora tomemos $\Im$ un filtro lineal para R que cumpla la propiedad (4) del teorema anterior y supongamos que $\Im$ consta sólo de ideales izquierdos $M -$ *densos* en R y

$$\mathcal{T}_\Im = \{N \text{ objeto de } \sigma[M] : \text{para toda } x \in N,\ An(x) \in \Im\}$$

Teorema 4.3 *$\mathcal{T}_\Im$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas, extensiones y submódu-*

los. Por lo tanto, existe una única teoría de torsión hereditaria $\tau_{\Im}$ en $\sigma[M]$, para la cual $\mathcal{T}_{\Im}$ es su clase de torsión.

Dem: 1. Sea N en $\mathcal{T}_{\Im}$ y $K \leq N$, si $x \in N$, entonces $An(x) \subset An(x+K)$. Como $An(x) \in \Im$, tenemos que $An(x+K) \in \Im$, esto es, $N/K \in \mathcal{T}_{\Im}$.

2. Sea $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un conjunto de objetos en $\mathcal{T}_{\Im}$, sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_\lambda N_\lambda$, sean x_{λ_1}, $x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}$ las coordenadas de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ distintas de cero, entonces $An\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} An(x_{\lambda_i})$, de donde concluimos que $\bigoplus_\lambda N_\lambda \in \mathcal{T}_{\Im}$.

3. Consideremos la siguiente sucesión exacta en $\sigma[M]$

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow \frac{N}{N'} \longrightarrow 0$$

con N' y $\frac{N}{N'}$ en $\mathcal{T}_{\Im}$, sea $x \in N$, entonces $An(x+N') \in \Im$ y para todo $r \in An(x+N')$ $rx \in N'$, de donde $An(rx) \in \Im$.

Por otro lado, si $r \in An(x+N')$ tenemos que $s \in (An(x):r)$ es decir, $sr \in An(x)$, lo que equivale a $(sr)x = 0$, si y sólo si, $s(rx) = 0$, de donde, $s \in An(rx)$. Concluimos que $(An(x):r) \in \Im$ para toda $r \in An(x+N')$, es decir $An(x) \in \Im$. Por lo tanto, $N \in \mathcal{T}_{\Im}$.

4. Sea N en $\mathcal{T}_{\Im}$ y $K \leq N$, entonces si $x \in K$ tenemos que $x \in N$, de donde, $An(x) \in \Im$, esto es, $K \in \mathcal{T}_{\Im}$. ■

A un filtro lineal que consta de ideales $M-densos$ lo llamaremos filtro $M-lineal$. Si cumple además con la propiedad del teorema (4.2), lo llamaremos filtro de $M-Gabriel$.

Denotemos por $M-Gab$ al conjunto de todos los filtros de $M-Gabriel$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.4 *Existe una correspondencia biyectiva entre $M-Gab$ y $M-tors$.*

Dem: Consideremos

$$\Phi : M-Gab \to M-tors$$
$$\Phi(\Im) = \tau_{\Im}$$

y

$$\Psi : M-tors \to M-Gab$$
$$\Psi(\tau) = \Im_\tau$$

Sea τ en $M-tors$ y sea N un objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$ y $x \in N$. Entonces $\langle x \rangle$ es un objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$. Como $\langle x \rangle \simeq R/An(x)$, tenemos que $An(x) \in \Im_\tau$ y por lo tanto N es de $\tau_{\Im_\tau}-torsión$, esto es $\tau \leq \tau_{\Im_\tau}$. ■

Sea N de $\tau_{\Im_\tau}-torsión$ en $\sigma[M]$, entonces para toda $x \in N$ se tiene que $An(x) \in \Im_\tau$, de donde $\langle x \rangle \simeq R/An(x)$ es un objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$. Así, $\bigoplus_{x \in N} \langle x \rangle$ es objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$, por lo que N es de $\tau-torsión$. Por lo tanto $\tau_{\Im_\tau} \leq \tau$.

De lo anterior se deduce que $\Phi \circ \Psi = 1_{M-tors}$.

Sea $\Im$ en $M-Gab$ e $I \in \Im$, entonces R/I esta en $\sigma[M]$ y si $r+I \in R/I$ tenemos que $An(r+I) = (I:r)$ está en $\Im$, es decir, R/I es de $\tau_{\Im}-torsión$, esto es, $I \in \Im_{\tau_{\Im}}$. Por lo tanto $\Im \subseteq \Im_{\tau_{\Im}}$.

Sea $I \in \Im_{\tau_{\Im}}$ entonces R/I es objeto de $\sigma[M]$ y es de $\tau_{\Im}-torsión$, entonces para toda $\tau \in R$ tenemos $An(r+I) \in \Im$, es decir, $(I:r) \in \Im$ para toda $r \in R$, en particular $I = (I:1) \in \Im$, de donde, $\Im_{\tau_{\Im}} \subseteq \Im$.

Por lo tanto $\Im = \Im_{\tau_{\Im}}$ y de esto $\Psi \circ \Phi = 1_{M-Gab}$. ■

4.2. Anillos y módulos topológicos

Un anillo topológico es un anillo R que consta de una topología de tal forma que las funciones

$$\varphi : R \times R \to R$$
$$\varphi(x,y) = x+y$$

y

$$\psi : R \times R \to R$$
$$\psi(x,y) = xy$$

son continuas, considerando a $R \times R$ con la topología producto.

Si R es anillo topológico, decimos que un $R-módulo\ izquierdo\ M$ es un módulo topológico si M tiene una topología tal que las siguientes funciones

$$\mu : M \times M \to M$$

$$\mu(x,y) = x+y$$

y

$$\nu : R \times M \to M$$

$$\nu(r, x) = rx$$

son continuas.

Proposición 4.1 *Si R es un anillo topológico, M es un módulo topológico, $r \in R$ y $m \in M$ fijos, entonces las funciones*

$$\pounds_r : R \to R$$
$$\pounds_r(x) = r + x$$

$$\begin{aligned} L_m &: M \to M \\ L_m(x) &= m + x \end{aligned}$$

son homeomorfismos.

Dem: Probaremos que $\pounds_r$ es homeomorfismo, ya que la prueba de la segunda parte es análogala.

Sea $x \in R$ y $A \subset R$ abierto tal que $r+x \in A$, como φ es continua, existen $V \subset R$ y $W \subset R$ abiertos tales que, $r \in V$ y $x \in W$ y $\varphi(V \times W) \subset A$, es decir, para cualquier $y \in W$ tenemos que $(r, y) \in V \times W$ y por lo tanto $r + y \in A$, por lo que $\pounds_r(W) \subset A$ y de aquí $\pounds_r$ es continua. Por último, notemos que $\pounds_r^{-1} = \pounds_{-r}$ que es de la misma forma que $\pounds_r$ y por lo tanto continua. ■

De la proposición anterior se desprende que $A \subset R$ (respectivamente $A \subset M$) es abierto, si y sólo si, $r + A$ ($m + A$ resp.) es abierto. De esto último, si $x \in R$ ($x \in M$ rep.) cualquiera y V es una vecindad de x, si y sólo si, existe W una vecindad del cero tal que $x + W = V$. Es decir, la topología para R (resp. M) está completamente determinada por las vecindades del cero. Entonces para darle una topología a R (M resp.) basta con dar las vecindades del cero.

Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una base de vecindades x es una familia β de vecindades de x tal que para cualquier vecindad N de x existe $A \in \beta$ tal que $A \subset N$. Así, si R es anillo topológico, M es $R-$*módulo* topológico y $\beta \subset M$ es una base de vecindades del 0, entonces $B \subset M$ es abierto, si y sólo si, para todo $b \in B$, existe $V \in \beta$ tal que $x + V \subset B$.

En lo que sigue usaremos la notación y conceptos estándar de la teoría básica sobre espacios topológicos, la cual no desarrollaremos aquí, nos limitaremos a probar solo los resultados necesarios para nuestro trabajo.

Proposición 4.2 *Si R es anillo topológico, M es módulo topológico, β base de vecindades de 0 que consta sólo de submódulos de M y A un subconjunto de M, entonces la cerradura de A es:*

$$\bar{A} = \cap \{A + V : V \in \beta\}.$$

Por lo tanto $\bar{0} = \bigcap_{V \in \beta} V$.

Dem: Sea $b \in \bar{A}$, entonces cualquier vecindad de b intersecta a A, por lo cual para toda $V \in \beta$ tenemos $A \cap (b + V) \neq \emptyset$. Sea $V \in \beta$ y $a \in A \cap (b + V)$, entonces $a = b + v$, con $v \in V$, de donde $b = a - v \in A + V$. Por lo tanto $\bar{A} \subset \cap \{A + V : V \in \beta\}$.

Sea $b \in \cap \{A + V : V \in \beta\}$ y sea B abierto tal que $b \in B$, entonces existe $V \in \beta$ tal que $b + V \subset B$, entonces $b = a + v$, con $a \in A$ y $v \in V$, con lo que $a = b - v \in b + V \subset B$, por lo tanto $a \in A \cap B$ y de aquí que $b \in \bar{A}$. De donde $\cap \{A + V : V \in \beta\} \subset \bar{A}$. ■

Proposición 4.3 *Si $\Im$ es filtro lineal para el anillo R, existe una única topología para R de tal forma que R es anillo topológico y $\Im$ es base de vecindades del cero.*

Dem: Consideremos $\mathbb{T} \subset 2^R$ definido con la siguiente propiedad:
$A \in \mathbb{T}$ si $A = \emptyset$ o si para cada $x \in A$ existe $I \in \Im$ tal que $x + I \subset A$.
Primero probemos que $\mathbb{T}$ es topología.

1. Es claro que $\emptyset$ y R están en $\mathbb{T}$.

2. Sean A y B en $\mathbb{T}$ y $x \in A \cap B$ entonces existen I y J en $\Im$ tales que $x + I \subset A$ y $x + J \subset B$. Como $\Im$ es filtro lineal $I \cap J \in \Im$. Sea $y \in x + (I \cap J)$, entonces existe $r \in I \cap J$, tal que $y = x + r \in (x + I) \cap (x + J) \subset A \cap B$, esto es $x + (I \cap J) \subset A \cap B$ y por lo tanto $A \cap B \in \mathbb{T}$.

3. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un conjunto de elementos de $\mathbb{T}$ y $x \in \bigcup_\Lambda A_\lambda$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$ y existe $I \in \Im$ tal que $x + I \subset A_\lambda$ y por lo tanto $x + I \subset \bigcup_\Lambda A_\lambda$.

Ahora si A es vecindad de cero existe $A' \in \mathbb{T}$ tal que $0 \in A' \subset A$ y existe $I \in \Im$ tal que $I = 0 + I \subset A' \subset A$, es decir, $\Im$ es base de vecindades del cero.

Para ver la continuidad de las operaciones primero consideremos $x, y \in R$ y A un abierto, tal que $x + y \in A$. Entonces existe $I \in \Im$ tal que $(x + y) + I \in A$, sea

$(r,s) \in (x+I) \times (y+I)$, existen t_1 y t_2 en I tales que $r = x + t_1$ y $s = y + t_2$, de donde $r + s = x + y + t_1 + t_2 \in (x+y) + I \subset A$.

Sean, nuevamente, $x, y \in R$ y A abierto tal que $xy \in A$, entonces existe $I \in \Im$ tal que $(xy) + I \subset A$, como $\Im$ es filtro lineal $(I : y) \in \Im$, consideremos ahora $(r,s) \in (x + (I : y)) \times (y + I)$ entonces existen $t_1 \in (I : y)$ y $t_2 \in I$ tales que $r = x + t_1$ y $s = y + t_2$, de donde, $rs = xy + xt_2 + t_1 y + t_1 t_2 \in xy + I \subset A$.

Finalmente, si existe $\mathbb{S}$ topología para R, esdecir $(R, \mathbb{S})$ es un anillo topológico, con base de vecindades del cero $\Im$. Para ver que $\mathbb{T} = \mathbb{S}$ basta probar que ambas topologías tienen las mismas vecindades abiertas del cero. Sea $V_{\mathbb{T}}$ vecindad abierta del cero con respecto de $\mathbb{T}$, entonces existe $I \in \Im$ tal que $I \subset V_{\mathbb{T}}$ pero $\Im$ es base de vecindades del cero con respecto de $\mathbb{S}$ entonces $V_{\mathbb{T}}$ es vecindad del cero con respecto de $\mathbb{S}$. Del mismo modo se prueba que una vecindad del cero con respecto de $\mathbb{S}$ es vecindad del cero con respecto de $\mathbb{T}$. ■

A una topología para R que tiene como base de vecindades del cero un filtro lineal la llamaremos topología lineal y en virtud de esta definición da lo mismo hablar de topología lineal que de filtro lineal.

Consideremos ahora M un $R-$ *módulo izquierdo*, $\Im \subset \Im_M$ y definamos

$$\Im(N) = \{K \leq N : \textit{para toda } x \in N,\ (K : x) \in \Im\}$$

Entonces $\Im(N)$ cumple con el siguiente teorema:

Teorema 4.5 *1. Si $K, L \in \Im(N)$, entonces $K \cap L \in \Im(N)$.*
2. Si $K \in \Im(N)$ y $L \leq N$ tal que $K \subset L$, entonces $L \in \Im(N)$.
3. Si $K \in \Im(N)$ y $x \in N$, se tiene que $(K : x) \in \Im(N)$.
Si además $\Im$ es filtro de $M-$ Gabriel, tenemos:
4. Si $K \leq N$ y existe $L \in \Im(N)$ tal que para toda $x \in L$ tenemos $(K : x) \in \Im$, entonces $K \in \Im(N)$.

Dem: 1. Si $x \in N$ entonces $r \in (K \cap L : x)$, si y sólo si, $rx \in K \cap L$, o bien, $r \in (K : x)$ y $r \in (L : x)$, es decir $(K \cap L : x) = (K : x) \cap (L : x)$. De lo anterior, tenemos que si $K, L \in \Im(N)$, entonces $K \cap L \in \Im(N)$.

2. Si $K \subset L$, $x \in N$ y $r \in (K : x)$, entonces $rx \in K \subset L$, de donde, $r \in (L : x)$. Así, $(K : x) \subset (L : x)$.

3. Se sigue directo de la definición.

Supongamos ahora que $\Im$ es de $M-$ *Gabriel*.

4. Sea $K \leq N$ y sea $L \in \Im(N)$ tal que para toda $x \in L$, tenemos que $(K : x) \in \Im$.

Sea $y \in N$ y consideremos $J = (L : y)$, como $L \in \Im(N)$ $J \in \Im$, sea $r \in J$ entonces $s \in ((K : y) : r)$ si y sólo si $sr \in (K : y)$, ésto equivale a decir que $(sr)y \in K$, equivalentemente, $s(ry) \in K$, si y sólo si $s \in (K : ry)$. Por lo que, $((K : y) : r) = (K : ry)$. Como $r \in J$, tenemos que $ry \in L$, por lo tanto $(K : ry) \in \Im$. Finalmente, como $\Im$ es de $M - Gabriel$ $(K : y) \in \Im$ de donde K esta en $\Im(N)$. ■

Tomando en cuenta la proposición anterior se puede hacer una demostración análoga a la de la proposición (4.3) para la proposición siguiente:

Proposición 4.4 *Si $\Im$ es filtro $M-lineal$ para el anillo R y N es un objeto en $\sigma[M]$ existe una única topología para N de tal forma que N es módulo topológico y $\Im(N)$ es base de vecindades del cero.* ■

A la topología de la proposición anterior le llamaremos la $\Im-$topología para N. En adelante a todo N objeto de $\sigma[M]$ lo consideraremos como espacio topológico con la $\Im-$topología.

Los elementos de $\Im(N)$ cumple con ser abiertos y cerrados como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 4.5 *Todo $K \in \Im(N)$ es cerrado.*

Dem: Sea $K \in \Im(N)$, entonces para toda $x \in N$ tenemos que la clase lateral $x + K$ es un abierto. Recordemos que N es la unión ajena de las clases laterales módulo K, por lo tanto $N \setminus K = \bigcup_{x \notin K} (x + K)$, es decir $N \setminus K$ es abierto, de donde K es cerrado. ■

Proposición 4.6 *Sea N un objeto de $\sigma[M]$. Para todo K submódulo de N, se tiene que*

$$\bar{K} = \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L.$$

Por lo tanto,

$$\bar{0} = \bigcap_{L \in \Im(N)} L.$$

Dem: Por la proposición (4.2) tenemos que $\bar{K} = \cap \{K + L : L \in \Im(N)\}$. Por otro lado, si $L \in \Im(N)$, entonces $K + L$ es un elemento de $\Im(N)$ que contiene a K y si L es un elemento de $\Im(N)$ que contiene a K, entonces $L = K + L$, por lo que $\bar{K} = \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L$. ■

Otras propiedades que cumple $\Im(N)$ nos la da el siguiente resultado.

Proposición 4.7 *1. Si N es un objeto en $\sigma[M]$ y $K \leq N$, entonces $\Im(N) \subset \Im(K)$.*
2. $\frac{L}{K} \in \Im\left(\frac{N}{K}\right)$ si y sólo si $L \in \Im(N)$ y $K \leq L$.

Dem: 1. Sea $L \in \Im(N)$, entonces para toda $x \in N$ se tiene $(L : x) \in \Im$, en particular $(L : x) \in \Im$ para toda $x \in K$, por lo que $L \in \Im(K)$.

2. El resultado se sigue del hecho que para toda $x \in N$ y $K \leq L \leq N$, tenemos $r \in \left(\frac{L}{K} : x + K\right)$, si y sólo si, $rx + K \in \frac{L}{K}$, si y sólo si, $rx \in L$, si y sólo si, $r \in (L : x)$, es decir $\left(\frac{L}{K} : x + K\right) = (L : x)$. ■

En la siguiente proposición se da una caracterización de los objetos de torsión en $\sigma[M]$, para una teoría de torsión $\tau \in M - tors$, en términos de la $\Im_\tau$−topología.

Proposición 4.8 *Si τ esta en $M - tors$ y N es un objeto de $\sigma[M]$, entonces N es de $\tau - torsión$ si y sólo si $\Im_\tau(N) = L(N)$.*

Dem: Supongamos que N es de $\tau - torsión$. La contención $\Im_\tau(N) \subset L(N)$ siempre se da. Sea $K \leq N$ y $x \in N$. Como N es de torsión, N/K es de torsión y es cíclico generado por $x + K$, pero $\langle x + K\rangle \simeq R/(K : x)$, por lo tanto $(K : x) \in \Im_\tau$, esto es, $K \in \Im_\tau(N)$.

Ahora asumamos la igualdad $\Im_\tau(N) = L(N)$ y consideremos $\tau(N)$ la parte de $\tau - torsión$ de N y supongamos que existe $x \in N \setminus \tau(N)$, como $\Im_\tau(N) = L(N)$, tenemos que $\tau(N) \in \Im_\tau(N)$, de donde $(\tau(N) : x) \in \Im_\tau$, es decir, $R/(\tau(N) : x)$ es de torsión, por lo tanto $\langle x + \tau(N)\rangle$ es de torsión y libre de torsión, pues $N/\tau(N)$ es libre de torsión, de donde concluimos que $x + \tau(N) = 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $N = \tau(N)$. ■

Sea $\Im$ un filtro de $M-Gabriel$ y N un objeto en $\sigma[M]$, definamos $cN = \bigcap_{K \in \Im(N)} K$.

Por la proposición (4.7) tenemos que si $K \leq N$, entonces $\Im(N) \subset \Im(K)$, por lo que si $x \in cK$, entonces $x \in L$ para toda $L \in \Im(K)$, en particular $x \in L$ para toda $L \in \Im(N)$, por lo que $x \in cN$. Por lo tanto $cK \leq cN$.

Proposición 4.9 *Si consideramos a N con la $\Im - topología$ tenemos que N es de Hausdorff si y sólo si $cN = \{0\}$.*

Dem: Supongamos que N es de Hausdorff y supongamos que existe $x \in cN$ no cero entonces $x \in K$ para toda $K \in \Im(N)$. Por otro lado, N Hausdorff implica que existen A y B subconjuntos abiertos de N ajenos tal que $0 \in A$ y $x \in B$ y como $\Im(N)$ es base de vecindades de 0 existe $K_0 \in \Im(N)$ tal que $K_0 \subset A$ por lo tanto $x \notin K_0$ lo cual no es posible, por lo tanto $x = 0$.

Supongamos $cN = \{0\}$ y sean $x, y \in N$ distintos entonces $x - y \neq 0$, existe $K_0 \in \Im(N)$ tal que $x - y \notin K_0$, si existe $z \in (x + K_0) \cap (y + K_0)$ entonces existen $k_1, k_2 \in K_0$ tal que $z = x + k_1 = y + k_2$, de donde, $x - y = k_2 - k_1 \in K_0$ lo cual no pasa, por lo tanto $(x + K_0) \cap (y + K_0) = \emptyset$, esto es, N es de Hausdorff. ■

Proposición 4.10 *Si $\Im$ un filtro de M – Gabriel y N un objeto en $\sigma[M]$, entonces $K \leq N$ es cerrado si y sólo si $c\left(\frac{N}{K}\right) = 0$.*

Dem: Si K es cerrado, entonces $K = \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L$, por lo que, si $x + K \in c\left(\frac{N}{K}\right) = \bigcap_{\frac{L}{K} \in \Im\left(\frac{N}{K}\right)} \frac{L}{K}$, entonces $x \in L$ para toda $L \in \Im(N)$ tal que $K \leq L$, por lo que $x \in \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L = K$.

Supongamos ahora que $c\left(\frac{N}{K}\right) = 0$ y sea $x \in \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L$, entonces $x + K \in \bigcap_{\frac{L}{K} \in \Im\left(\frac{N}{K}\right)} \frac{L}{K} = 0$, por lo tanto $x \in K$. De todo esto concluimos que $K = \bigcap_{\substack{L \in \Im(N) \\ K \leq L}} L$, de donde K es cerrado. ■

Si $\Im$ es un filtro de M – *Gabriel*, definimos

$$\mathbb{H} = \{N \in \sigma[M] : cN = 0\}$$

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que $K \leq N$ cerrado, considerando a N con la $\Im$–topología, si y sólo si $\frac{N}{K} \in \mathbb{H}$.

Proposición 4.11 *Si $\tau \in M - tors$ entonces $\Im_\tau$ es un filtro de M – Gabriel y, para este caso, si N es objeto de τ – torsión en $\sigma[M]$, entonces $N \in \mathbb{H}$.*

Dem: Sea N objeto de τ – *torsión* en $\sigma[M]$, entonces por la proposición (4.8) $\Im_\tau(N) = L(N)$, con lo que $cN = \bigcap_{K \leq N} K = 0$. ■

Proposición 4.12 *Si $\tau \in M - tors$, entonces para todo objeto N en $\sigma[M]$ tenemos que*

$$\Im_\tau(N) = \left\{K \leq N : \frac{N}{K} \text{ de } \tau - \text{torsión}\right\}.$$

Dem: Sea $K \in \Im_\tau(N)$, entonces para toda $x \in N$ tenemos que $(K : x) \in \Im_\tau$, es decir $\frac{R}{(K:x)}$ es de τ – *torsión* y como $\langle x + K \rangle \simeq \frac{R}{(K:x)}$ tenemos que para todo

$x + K \in \frac{N}{K}$ el cíclico generado por $x + K$ es de $\tau - torsión$, como todo módulo es cociente de la suma directa de todos sus submódulos cíclicos, concluimos que $\frac{N}{K}$ es de $\tau - torsión$.

Inversamente, si $K \leq N$ tal que $\frac{N}{K}$ es de $\tau - torsión$, entonces para toda $x \in N$ se cumple que $\langle x + K \rangle$ es de $\tau - torsión$, por lo que $\frac{R}{(K:x)}$ es de $\tau - torsión$, de donde $(K : x) \in \Im_\tau$ para todo $x \in N$, por lo que $K \in \Im_\tau(N)$. ■

Proposición 4.13 *Si $\tau \in M - tors$, entonces tomando en cuenta que*

$$\mathbb{H} = \{N \text{ objeto de } \sigma[M] : cN = 0\}$$

tenemos que: $N \in \mathbb{H}$ si y sólo si existe una familia $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de objetos de $\tau - torsión$ en $\sigma[M]$ y un monomorfismo $\varphi : N \to \prod_M T_\lambda$.

Dem: Supongamos que $N \in \mathbb{H}$, entonces $cN = 0$, es decir $\bigcap_{K \in \Im_\tau(N)} K = 0$. Recordemos que $\bigcap_{K \in \Im_\tau(N)} K$ es el núcleo del morfismos

$$\varphi : N \to \left(\prod_{K \in \Im_\tau(N)} \right)_M \frac{N}{K}$$

inducido por la familia de proyecciones canónicas $\left\{\eta_K : N \to \frac{N}{K}\right\}_{K \in \Im_\tau(N)}$. Como sabemos que $\bigcap_{K \in \Im_\tau(N)} K = 0$, concluimos que φ es monomorfismo y $\frac{N}{K}$ es de $\tau - torsión$ para todo $K \in \Im_\tau(N)$.

Supongamos que existe un monomorfismo $\varphi : N \to \prod_M T_\lambda$ con T_λ de $\tau - torsión$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces $0 = Nu\varphi = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Nu(\pi_\lambda \circ \varphi)$. Por otro lado, para todo $\lambda \in \Lambda$, $\operatorname{Im}(\pi_\lambda \circ \varphi) \simeq \frac{N}{Nu(\pi_\lambda \circ \varphi)}$ y como $\operatorname{Im}(\pi_\lambda \circ \varphi) \leq T_\lambda$, $\frac{N}{Nu(\pi_\lambda \circ \varphi)}$ es de $\tau - torsión$, por lo tanto $Nu(\pi_\lambda \circ \varphi) \in \Im_\tau(N)$ para toda $\lambda \in \Lambda$, por lo que $cN \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Nu(\pi_\lambda \circ \varphi)$, de donde $cN = 0$, es decir $N \in \mathbb{H}$. ■

Corolario 4.13.1 *Para toda $\tau \in M - tors$, la clase de objetos de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ cogenera a $\mathbb{H}$.* ■

4.3. Inyectividad Relativa a una Teoría de Torsión

Sea τ en $M-tors$, un módulo N en $\sigma[M]$ es $\tau-$*inyectivo* si para toda sucesión exacta en $\sigma[M]$

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} L'' \longrightarrow 0$$

con L'' de $\tau-$*torsión* y todo morfismo $f: L' \to N$ existe un morfismo $\bar{f}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{\alpha} & L \\ & f & \downarrow & \swarrow & \bar{f} \\ & & N & & \end{array}$$

Notemos que este concepto es más general que el concepto conocido de inyectivo.

Ejemplo 4.1 *Si N es objeto inyectivo en la categoría $\sigma[M]$, entonces N es $\tau-$inyectivo para todo τ en $M-tors$.*

Ejemplo 4.2 *Sea τ_G la teoría de torsión de Goldie, entonces N es τ_G-inyectivo si y sólo si N es inyectivo.*
Para probar esto, primero notemos que si N es inyectivo, también N es τ_G-inyectivo. Supongamos ahora que N es τ_G-inyectivo. Para probar que N es inyectivo, tomemos I un ideal izquierdo de R y $f: I \to N$ un morfismo cualquiera. Sea J un $R-$complemento de I, entonces $I \oplus J \trianglelefteq R$, definamos $\bar{f}: I \oplus J \to N$ como $\bar{f}(x+y) = f(x)$ para toda $x \in I$ e $y \in J$, $\bar{f}$ está bien definida pues los elementos de $I \oplus J$ se expresan de manera única. Es claro que $\bar{f}$ es morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \oplus J \\ f \downarrow & \swarrow & \bar{f} \\ N & & \end{array}$$

Del hecho que $I \oplus J$ es ideal izquierdo esencial de R, tenemos que $\frac{R}{I \oplus J}$ es de τ_G-torsión y como N es τ_G-inyectivo, existe $\bar{\bar{f}}: R \to N$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I \oplus J & \longrightarrow & R \\ \bar{f} \downarrow & \swarrow & \bar{\bar{f}} \\ N & & \end{array}$$

por lo que

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & R \\ f\downarrow & \swarrow \bar{\bar{f}} & \\ N & & \end{array}$$

conmuta. Por lo tanto N es inyectivo.

En lo que sigue probaremos algunos resultados que nos serán útiles, que si los restringimos a la teoría de torsión trivial en $\sigma[R]$ darán lo ya conocido para $R-Mod$.

En el siguiente resultado probaremos que para cualquier τ en $M-tors$ y N objeto de $\sigma[M]$, si N es inyectivo con respecto de toda sucesión exacta del tipo

$$0 \to I \to R \to \frac{R}{I} \to 0,$$

con R/I en $\sigma[M]$ de $\tau-$*torsión*, entonces N es $\tau-$*inyectivo*.

Teorema 4.6 *Sea τ en $M-tors$ y N un objeto en $\sigma[M]$ que cumple la siguiente propiedad:*
Para todo $I \in \Im_\tau$ y todo morfismo $f: I \to N$ existe $\bar{f}: R \to N$ tal que $\bar{f}\mid_I = f$.
Entonces N es $\tau-$inyectivo.

Dem: Consideremos K' $\tau-$*denso* en K y $f: K' \to N$.

Sea

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{array}{c} (L,g): K' \leq L \leq K,\ g: L \to N \text{ y} \\ g\mid_{K'} = f \end{array} \right\}$$

ordenado de la siguiente manera:

$$(L,g) \leq (L',g') \overset{def}{\Leftrightarrow} L \leq L' y g'\mid_L = g.$$

Se puede ver fácilmente que este conjunto es parcialmente ordenado y cumple con las hipótesis del lema de Zorn. Sea (L_0, g_0) un máximo de $\mathbb{A}$, notemos que $K' \leq L_0 \leq K$ y de aquí que L_0 sea un objeto de $\sigma[M]$ y $g_0\mid_{K'} = f$, para concluir con la demostración probaremos que $L_0 = K$.

Supongamos que $L_0 \neq K$ y consideremos $x \in K \setminus L_0$ e $I = (L_0 : x)$.

Notemos que $\langle x + K' \rangle \leq K/K'$, de donde $\langle x + K' \rangle$ esta en $\sigma[M]$ y es de $\tau-$*torsión*, además $(K' : x) \simeq An(x + K')$ y $\langle x + K' \rangle \simeq R/An(x + K')$. De todo esto $(K' : x) \in \Im_\tau$.

Si $r \in (K' : x)$ entonces $rx \in K' \subset L_0$, es decir $(K' : x) \subset (L_0 : x)$ y por lo tanto $(L_0 : x) \in \Im_\tau$.

Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi &: I \to N \\ \varphi(r) &= g_0(rx) \end{aligned}$$

por hipótesis existe $\bar{\varphi} : R \to N$ tal que $\bar{\varphi}\mid_I = \varphi$, definamos

$$\begin{aligned} g_1 &: L_0 + Rx \to N \\ g_1(y + rx) &= g_0(y) + \bar{\varphi}(r) \end{aligned}$$

y con esto $(L_0, g_0) \lneq (L_0 + Rx, g_1)$ lo cual es un absurdo. ■

Teorema 4.7 *Si N es un objeto $\tau - inyectivo$ en $\sigma[M]$, con τ en $M - tors$ y N $\tau - denso$ en L en $\sigma[M]$, entonces existe N' en $\sigma[M]$ tal que $L = N \bigoplus N'$.*

Dem: Considerando la sucesión

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \hookrightarrow & L & \to & L/N & \to & 0 \\ & 1_N & \downarrow & & & & & & \\ & & N & & & & & & \end{array}$$

como N es de $\tau - denso$ en L entonces L/N es de torsión, de donde obtenemos un morfismo $f : L \to N$ que restringido a N nos da 1_N. Por lo tanto $L \simeq N \bigoplus L/N$. ■

Si N es un objeto de $\sigma[M]$ y τ está en $M - tors$, la cápsula $\tau - inyectiva$ de N es un objeto $\tau - inyectivo$ que contiene esencialmente a N.

Si consideramos la cápsula $M - inyectiva$ $\hat{E}(N)$ de N, tenemos $\tau\left(\hat{E}(N)/N\right) \leq \hat{E}(N)/N$, de donde existe K tal que $N \leq K \leq \hat{E}(N)$ y $K/N = \tau\left(\hat{E}(N)/N\right)$. Como N es esencial en $\hat{E}(N)$ también N es esencial en K, para ver que K es $\tau - inyectivo$ consideremos el siguiente diagrama, con L'' de $\tau - torsión$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L' & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & L'' & \to & 0 \\ & f & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \to & K & \hookrightarrow & \hat{E}(N) & \longrightarrow & \frac{\hat{E}(N)}{K} & \to & 0 \end{array}$$

por ser $\hat{E}(N)$ $M - inyectivo$ existe $\bar{f} : L \to \hat{E}(N)$ tal que $\bar{f} \circ \alpha = f$, definiendo $g : L'' \to \hat{E}(N)/K$ construida del siguiente modo: si $x \in L''$, existe $y \in L$ de tal

forma que $\beta(y) = x$, entonces definimos $g(x) = \bar{f}(y) + K$. La definición de g no depende de la elección que hagamos de la y, pues si $y' \in L$ es tal que $\beta(y) = \beta(y')$, $y - y' \in Nu\beta = Im\alpha$, es decir, existe $z \in L'$ tal que $\alpha(z) = y - y'$, de aquí

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) - \bar{f}(y') &= \bar{f}(y - y') \\ &= \bar{f} \circ \alpha(z) \\ &= f(z) \in K. \end{aligned}$$

Se ve fácil que g es morfismo y que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L' & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & L'' & \to & 0 \\ & f & \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow g & & \\ 0 & \to & K & \hookrightarrow & \hat{E}(N) & \longrightarrow & \frac{\hat{E}(N)}{K} & \to & 0 \end{array}$$

Por otro lado, como $\hat{E}(N)/K = \dfrac{\hat{E}(N)/N}{K/N} = \dfrac{\hat{E}(N)/N}{\tau\left(\hat{E}(N)/N\right)}$, que es libre de torsión y L'' de torsión, tenemos que $g = 0$, de donde para toda $x \in L$, $\bar{f}(x) \in K$. Por lo tanto K es $\tau - inyectivo$ y como contiene esencialmente a N es su cápsula $\tau - inyectiva$. ■

En adelante para un objeto N en $\sigma[M]$ denotaremos por $\hat{E}_\tau(N)$ a cualquiera de sus cápsulas $\tau - inyectivas$.

Observación: Como $\hat{E}_\tau(N)/N$ es de torsión entonces N es $\tau - denso$ en $\hat{E}_\tau(N)$

4.4. Teorías de torsión estables

Una teoría de torsión τ en $\sigma[M]$ es estable si la clase de módulos en $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ es cerrada bajo cápsulas $M - inyectivas$.

En seguida daremos una caracterización de estabilidad.

Ejemplo 4.3 *Si τ_G es la teoría de torsión de Goldie, tenemos que si $K \trianglelefteq N$, entonces $\frac{N}{K}$ es de $\tau_G - torsión$. En efecto, supongamos que $K \trianglelefteq N$ y sea $f : \frac{N}{K} \to F$, con F $\tau_G - libre\ de\ torsión$, probaremos que $f = 0$. Sea $x + K \in \frac{N}{K}$ arbitrario y hacemos $y = f(x + K)$. Tomemos $s \in R$ no cero, si $sx \in K$, entonces $sy = 0$, por lo que $1s \in An(y)$, ahora, si $sx \notin K$, entonces $(sx) \cap K \neq 0$, por lo que existe $r \in R$ no cero, tal que $rsx \in K$, de donde $rsy = 0$, es decir $rs \in An(y)$. Por lo tanto $An(y) \trianglelefteq R$, pero F es no singular, entonces $y = 0$, de todo esto concluimos que*

$f = 0$.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que si N es de τ_G – torsión, como $N \trianglelefteq E(N)$, entonces $\frac{E(N)}{N}$ es de τ_G – torsión y con esto $E(N)$ es de τ_G – torsión. Por lo tanto τ_G es estable.

Lema 4.14 *Si $\tau \in M-tors$ y N es un objeto en $\sigma[M]$, entonces N es $\tau-$inyectivo si y solo si $N = \hat{E}_\tau(N)$.*

Dem: Supongamos que N es $\tau-$*inyectivo*. Como N es $\tau-$*denso* en $\hat{E}_\tau(N)$ por el teorema (4.7) existe N' en $\sigma[M]$ tal que $\hat{E}_\tau(N) = N \bigoplus N'$, pero N es esencial en $\hat{E}_\tau(N)$, entonces $N' = 0$.

Si $N = \hat{E}_\tau(N)$ es claro que N es $\tau-$*inyectivo*. ■

Teorema 4.8 *τ en $M-tors$ es estable si y sólo si todo módulo en $\sigma[M]$ de $\tau-$torsión y τ – inyectivo es M – inyectivo.*

Dem: Supongamos que τ es estable y sea N en $\sigma[M]$ de τ – *torsión* y τ – *inyectivo*, entonces $\hat{E}(N)$ es de torsión y de esto también $\hat{E}(N)/N$ es de torsión. Por otro lado como $N = \hat{E}_\tau(N)$

$$0 = \frac{\hat{E}_\tau(N)}{N} = \tau\left(\frac{\hat{E}(N)}{N}\right)$$

de donde $N = \hat{E}(N)$.

Sea N de τ – *torsión*. De la sucesión exacta

$$0 \to N \to \hat{E}_\tau(N) \to \frac{\hat{E}_\tau(N)}{N} \to 0$$

tenemos que $\hat{E}_\tau(N)$ es de torsión y por el lema anterior $\hat{E}_\tau(N)$ es M – *iyectivo* y como contiene esencialmente a N, $\hat{E}_\tau(N) = \hat{E}(N)$. ■

Finalmente demostraremos el siguiente teorema que es la generalización del teorema 4.1. de [R].

Teorema 4.9 *Para una teoría de torsión τ en $M-tors$ estable, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) Todo módulo simple en $\sigma[M]$ de τ – torsión es M – inyectivo;

b) Todo módulo simple en $\sigma[M]$ de τ – torsión es τ – inyectivo;

c) Todo módulo en $\sigma[M]$ de τ – torsión tiene radical cero;

d) Todo módulo cíclico en $\sigma[M]$ de $\tau-torsión$ tiene radical cero;
e) Si I está en $\Im_\tau$, entonces I es intersección de ideales izquierdos máximos;
f) Si N es un objeto de $\sigma[M]$ y $K \in \Im_\tau(N)$ entonces K es intersección de submódulos máximos de N;
g) cN es intersección de submódulos máximos de N, para todo N en $\sigma[M]$;
h) Todo elemento de $\mathbb{H}$ tiene radical cero;
i) Si N es un objeto de $\sigma[M]$, entonces cada submódulo cerrado de N, considerando a N con la $\Im_\tau-topología$, es intersección de submódulos máximos de N;
j) $\mathbb{H}$ tiene un cogenerador en $\sigma[M]$ que es suma directa de módulos simples en $\sigma[M]$.

Dem: a) implica b) Se deduce de que todo inyectivo en $\sigma[M]$ es $\tau-inyectivo$.

b) implica c) Sean N en $\sigma[M]$ de $\tau-torsión$ y $x \in Rad(N)$, supongamos que $x \neq 0$, sea $N_0 \leq N$ máximo con la propiedad $x \notin N_0$ y consideremos

$$K = \cap\{L \leq N : N_0 \subsetneq L \neq N\}.$$

Por ser N_0 máximo tal que $x \notin N_0$, tenemos que $x \in L$ para toda L que cumple con $N_0 \subsetneq L \neq N$, por lo que $x \in K \neq N$, claramente $N_0 \leq K$. Si $\frac{L}{N_0} \leq \frac{K}{N_0}$ tenemos dos casos: si $x \notin L$, entonces $N_0 = L$, el otro caso es que $x \in L$, con lo que $N_0 \subsetneq L \neq N$, es decir $K \leq L$, de donde $L = K$. Por estos dos casos, tenemos que $\frac{K}{N_0}$ es simple y como $\frac{K}{N_0} \leq \frac{N}{N_0}$, $\frac{K}{N_0}$ es de $\tau-torsión$, por lo que $\frac{K}{N_0}$ es $\tau-inyectivo$. Por la proposición (4.7) existe N_1 tal que $N_0 \leq N_1 \leq N$ que satisface $\frac{N}{N_0} = \frac{K}{N_0} \oplus \frac{N_1}{N_0}$. Si $x \in N_1$, entonces $x + N_0 \in \frac{K}{N_0} \cap \frac{N_1}{N_0} = 0$, es decir $x \in N_0$, lo cual no es posible, por lo tanto $x \notin N_1$, de donde $N_1 = N_0$, por lo que $\frac{N}{N_0} = \frac{K}{N_0}$ que es simple, con esto tenemos que N_0 es submódulo máximo de N, entonces $x \in N_0$, lo cual no es posible. Por lo tanto $x = 0$.

c) implica d) Es obvio.

d) implica e) Sea I en $\Im_\tau$, es decir $\frac{R}{I}$ es objeto de $\tau-torsión$ en $\sigma[M]$, por lo que $Rad\left(\frac{R}{I}\right) = 0$. Sea

$$\mathcal{M} = \{J \leq R :_R J \text{ es máximo tal que } I \leq J\}.$$

Claramente $I \subset \bigcap_{J \in \mathcal{M}} J$. Para la otra contención primero recordemos que $\frac{J}{I}$ es máximo en $\frac{R}{I}$ si y sólo si J es ideal máximo de R con la propiedad $I \leq J$, es decir, $\frac{J}{I}$ es máximo en $\frac{R}{I}$ si y sólo si $J \in \mathcal{M}$. Sea $x \in \bigcap_{J \in \mathcal{M}} J$, entonces $x + I \in Rad\left(\frac{R}{I}\right) = 0$, por lo que $x \in I$.

e) implica b) Sea S objeto simple de $\sigma[M]$ de $\tau-torsión$, hay que probar que S

es inyectivo con respecto de toda sucesión del tipo

$$\mathbf{0} \to I \to R \to \frac{R}{I} \to \mathbf{0},$$

con $\frac{R}{I}$ es objeto en $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$. Sea $I \leq R$ tal que $\frac{R}{I}$ es objeto en $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ y $f : I \to S$, si $f = 0$, el morfismo cero hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ f\downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

Supongamos que $f \neq 0$, entonces f es epimorfismo, con lo que $S \simeq \frac{I}{Nuf}$ y Nuf es submódulo máximo de I. Sabemos que $\frac{R}{I} \simeq \frac{\frac{R}{Nuf}}{\frac{I}{Nuf}}$ y por lo que $\frac{R}{Nuf}$ es objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, entonces $Nuf \in \Im_\tau$, por lo que Nuf es intersección de ideales izquierdos máximos. Notemos que si J es uno de los intersectandos en Nuf, entonces $Nuf \subset J$, por lo que $J \in \Im_\tau$, es decir $\frac{R}{J}$ es objeto de $\tau - torsión$ en $\sigma[M]$. Por otro lado, si $I \subset J$, para toda J que interviene el la intersección de Nuf entonces $I \subset Nuf$, con lo que $f = 0$, lo cual no es posible, por lo tanto existe I_0 ideal izquierdo de R máximo tal que $\frac{R}{I_0}$ es objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, $Nuf \subset I_0$ e $I \not\subset I_0$. $I + I_0$ también es elemento de $\Im_\tau$ tal que $Nuf \subset I + I_0$ e $I \not\subset I + I_0$, por lo que $R = I + I_0$, además $Nuf \subset I \cap I_0$ y si $x \in I \cap I_0$ tal que $x \notin Nuf$, entonces $I = Nuf + \langle x \rangle \subset I_0$, lo cual no es posible, por lo tanto $I \cap I_0 = Nuf$. Definamos $\bar{f} : R \to S$ como sigue: si $x \in I$ y $x_0 \in I_0$, entonces $\bar{f}(x + x_0) = f(x)$, notemos que si $x + x_0 = x' + x_0'$, entonces $x - x' = x_0' - x_0 \in I \cap I_0 = Nuf$, por lo que $f(x - x') = 0$, es decir $f(x) = f(x')$, por lo tanto $\bar{f}$ está bien definida. Es claro que $\bar{f}$ es un morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \hookrightarrow & R \\ f\downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ S & & \end{array}$$

Por lo tanto S es $\tau - inyectivo$.

b) implica a) Sea S objeto simple de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, entonces S es $\tau - inyectivo$, dado que τ es estable, por el teorema (4.8) S es $M - inyectivo$.

c) implica f) Sea N un objeto de $\sigma[M]$ y $K \in \Im_\tau(N)$, entonces para toda $x \in N$ tenemos que $(K : x) \in \Im_\tau$, es decir $\frac{R}{(K:x)}$ es un objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, pero $\frac{R}{(K:x)}$ es isomorfo al submódulo cíclico de $\frac{N}{K}$ generado por $x + K$, por lo tanto todo submódulo cíclico de $\frac{N}{K}$ es de $\tau - torsión$, y como todo módulo es cociente del

coproducto de todos sus submódulos cíclicos, tenemos que $\frac{N}{K}$ es de $\tau - torsión$, por (c) $Rad\left(\frac{N}{K}\right) = 0$. Sea

$$\mathcal{M} = \{L \leq N : L \text{ es máximo tal que } K \leq L\}.$$

Claramente $K \subset \bigcap_{L \in \mathcal{M}} L$. Para la otra contención primero recordemos que $\frac{L}{K}$ es máximo en $\frac{N}{K}$ si y sólo si L es submódulo máximo de N con la propiedad $K \leq L$, es decir $\frac{L}{K}$ es máximo en $\frac{N}{K}$ si y sólo si $L \in \mathcal{M}$. Sea $x \in \bigcap_{L \in \mathcal{M}} L$, entonces $x + K \in Rad\left(\frac{N}{K}\right) = \mathbf{0}$, por lo que $x \in K$.

f) implica g) Sea N objeto de $\sigma[M]$, entonces $cN = \bigcap_{K \in \Im_\tau(N)} K$, como cada $K \in \Im_\tau(N)$ es intersección de submódulos máximos de N, tenemos que cN es intersección de submódulos máximos de N.

g) implica h) Sea $N \in \mathbb{H}$, entonces $cN = 0$, pero cN es intersección de submódulos máximos de N, por lo que $Rad(N) \subset cN$, por lo tanto $Rad(N) = \mathbf{0}$.

h) implica i) Sea N objeto de $\sigma[M]$ y $K \leq N$ cerrado, entonces $\frac{N}{K} \in \mathbb{H}$, de donde $Rad\left(\frac{N}{K}\right) = 0$ y por lo tanto K es intersección de submódulos máximos de N.

i) implica c) Sea N objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, por la proposición (4.11) $N \in \mathbb{H}$, por lo que $Rad(N) = \mathbf{0}$.

a) implica j) Sea $\mathfrak{C}$ un conjunto completo de representantes de la clase de módulos simples en $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, entonces $C = \coprod_{S \in \mathfrak{C}} S$ es objeto de $\sigma[M]$de $\tau - torsión$. Por el corolario (4.13.1) basta probar que C cogenera a todo módulo de $\tau - torsión$. Sea N objeto en $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ y $x \in N$ no cero, entonces existe $f_x : \langle x \rangle \to S$ epimorfismo (basta tomar un submódulo máximo de $\langle x \rangle$), $f_x(x) \neq 0$. Como N es de $\tau - torsión$, entonces $\langle x \rangle$ es de $\tau - torsión$, por lo que S es de $\tau - torsión$, de donde S es $M - inyectivo$, entonces existe $\bar{f}_x : N \to S$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle & \hookrightarrow & N \\ f_x \downarrow & \swarrow \bar{f}_x & \\ S & & \end{array}$$

como $f_x(x) \neq 0$, también $\bar{f}_x(x) \neq 0$. Consideremos la familia $\{g_x\}_{x \in N \setminus \{0\}}$ donde $g_x : N \to C$ dada por $g_x = i \circ \bar{f}_x$. $\{g_x\}_{x \in N \setminus \{0\}}$ induce un morfismo $\varphi : N \to C^{N \setminus \{0\}}$ en $\sigma[M]$. Sea $a \in Nu\varphi$ y supongamos que $a \neq 0$, entonces $\varphi(a) = 0$, de donde, para toda $x \in N \setminus \{0\}$ tenemos $g_x(a) = \pi_x \circ \varphi(a) = 0$, en particular $g_a(a) = 0$, es decir $\bar{f}_a(a) = 0$ lo cual no es posible. Por lo tanto $a = 0$, lo que implica que φ es monomorfismo.

j) implica a) Supongamos que $\mathbb{H}$ tiene un cogenerador $C = \coprod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, con S_λ objeto de $\sigma[M]$ simple para toda $\lambda \in \Lambda$. Sea S en $\sigma[M]$ simple de $\tau - torsión$, como τ es estable tenemos que $\hat{E}(S)$ es de $\tau - torsión$, de donde $\hat{E}(S)$ está en $\mathbb{H}$. Como C es cogenerador de $\mathbb{H}$, existe un conjunto Δ y un monomorfismos $\varphi : \hat{E}(S) \to C^{\Delta}$. Sea $x \in S$ no cero, si para toda $\alpha \in \Delta$, $\pi_\alpha \circ \varphi(x) = 0$, tenemos que $\varphi(x) = 0$, de donde $x = 0$, lo cual no es posible, por lo tanto existe $\alpha \in \Delta$ tal que $\pi_\alpha \circ \varphi(x) \neq 0$. Por otro lado, como S es simple $Nu(\pi_\alpha \circ \varphi) \cap S = 0$ o $Nu(\pi_\alpha \circ \varphi) \cap S = S$, si $Nu(\pi_\alpha \circ \varphi) \cap S = S$, entonces $S \subset Nu(\pi_\alpha \circ \varphi)$, por lo que $\pi_\alpha \circ \varphi(x) = 0$, lo cual es imposible, por lo tanto $Nu(\pi_\alpha \circ \varphi) \cap S = 0$ y $S \trianglelefteq \hat{E}(S)$ implica que $Nu(\pi_\alpha \circ \varphi) = 0$, es decir $\pi_\alpha \circ \varphi : \hat{E}(S) \to C$ es monomorfismo, con lo que tenemos que $\hat{E}(S)$ es semisimple, entonces $\hat{E}(S) = S \oplus K$, para algún submódulo K de $\hat{E}(S)$, pero $K \cap S = 0$ implica que $K = 0$, por lo tanto $\hat{E}(S) = S$, de donde concluimos que S es $M - inyectivo$. ■

Con respecto a los $V - módulos$ estudiados en el capítulo 2 y como consecuencia del teorema (4.9) tenemos los siguientes resultados.

Corolario 4.14.1 *Si τ es un elemento de $M - tors$ estable que cumple con los incisos del teorema (4.9), entonces todo objeto N de $\tau - torsón$ en $\sigma[M]$ es $V - módulo$.*

Antes de la demostración de este corolario, observemos que si M es un $R - módulo$, como $\sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cocientes, para todo N objeto de $\sigma[M]$ tenemos que $\sigma[N]$, visto como clase de módulos está contenida en $\sigma[M]$; de la misma forma, para todo τ en $M - tors$, como la clase de los objetos de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cocientes, si N es un objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$, entonces todo objeto de $\sigma[N]$ es de $\tau - torsión$ en $\sigma[M]$.

Dem: Sean τ es un elemento de $M - tors$ estable que cumlpe con los incisos del teorema (4.9), N objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsón$ y T un objeto de $\sigma[N]$, entonces T es objeto de $\sigma[M]$ de $\tau - torsión$ y por el inciso (c) del teorema (4.9) $Rad(T) = 0$, es decir todo objeto de $\sigma[N]$ tiene radical cero, con lo que concluimos que N es $V - módulo$. ■

Corolario 4.14.2 *M es $V - módulo$ si y sólo si la teoría de torsión $(\sigma[M], 0)$ cumple con los incisos del teorema (4.9).* ■

Bibliografía

[AF] Anderson F. and Fuller K. Rings and Categories of Modules. Second Edition. Springer-Verlag (1992).

[D] Dikson S. E. A Torsion Theory for Abelian Categories. Trans. Amer. Math. Soc. 121, 223-235 (1966).

[DHSW] Dung, Huynh, Smith and Wisbauer. Extending Modules. Pitman Research Notes in Mathematics. Serie, 313, (1994).

[G] Golan J. Torsion Theories. Logman Scientific & Technical (1986).

[RRW1] Raggi F., Ríos J. and Wisbauer R. The Lattice Structure of Hereditary Pretorsion Classes. Comm. Algebra 29(1), 131-140 (2001).

[RRW2] Raggi F., Ríos J. and Wisbauer R. Coprime Preradicals and Modules. Por aparecer en Journal of Pure and Applied Algebra.

[R] Ríos Montes José. Sobre Filtros Estables de Gabriel VII (Algunos Relaciones Entre Teorías de Torsión en $A - mod$ y teorías de Torsión en $Mod - A$. Pubicacions Sección Matemàtiques. Vol. 27 Num. 2 (1983).

[S] Stenström Bo. Rings of Quotients. Springer-Verlag (1975).

[V] Van den Berg J. and Wisbauer R. Duprime and Dusemiprime Modules. Pure Appl. Algebra 165, 337-356 (2001).

[Wa] Warner S. Topological Rings. North-Holland, Mathematics Studies 178, (1993).

[W1] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach Science Publishers (1991).

[W2] Wisbauer R. Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras. Addison Wesley Longman, Pitman Monographs 81 (1996).