



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EXPLORANDO LAS SIMETRÍAS DE SABOR DE  
GRUPOS MODULARES DE CONGRUENCIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

SEBASTIAN ROJAS MORALES

TUTOR

DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2025





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Rojas  
Morales  
Sebastian  
55 3678 0960  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
113003093

2. Datos del tutor

Dr  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dra  
Myriam  
Mondragón  
Ceballos

4. Datos de sinodal 2

Dr  
José David  
Vergara  
Oliver

5. Datos del sinodal 3

Dr  
Mariano  
Chernicoff  
Minsberg

6. Datos del sinodal 4

Dr  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar

7. Datos del trabajo escrito

Explorando las simetrías de sabor de grupos modulares de congruencia  
60 p  
2025

*Es un honor dedicar esta tesis a mis padres, María de los Ángeles Morales García y Gerardo Rojas Bautista, cuyo amor, sacrificio y apoyo incondicional han sido la base sobre la que he construido cada uno de mis logros. Gracias por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia. Esta tesis es tanto mía como suya, porque sin ustedes, este camino no habría sido posible.*



# Agradecimientos

A mis padres y a mi familia, quienes siempre han sido un apoyo para mí en todas mis metas y aspiraciones. Gracias por su amor incondicional, su confianza en mí y por enseñarme lo que se puede lograr a través del esfuerzo. Todo lo que soy se los debo a ustedes.

Al Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez, por todo su tiempo, sus observaciones y su guía. Más allá de todo el conocimiento, agradezco el respeto con el que siempre me trató, su paciencia, los recursos que me aportó y siempre estar al pendiente de mi trabajo. De verdad que esta tesis no habría sido posible sin usted.

A Jade, gracias por todo tu amor y tu comprensión, gracias por confiar en mí incluso cuando yo dudaba, por estar presente y celebrar conmigo cada pequeño avance que he hecho para la realización de esta tesis. Tú fuiste fundamental en este proceso.

A mis amigos, gracias por su compañía, sus palabras de ánimo y las risas que hemos compartido. Ustedes hicieron que este camino no fuera tan difícil, y que incluso en los días más difíciles hubiera algo de diversión. Este trabajo es el reflejo de muchas manos que me sostuvieron.

También quiero agradecer a todas esas personas con las que me crucé en la carrera, gracias a quienes compartieron apuntes, dudas, risas y quienes me dieron una palabra de aliento sin saber cuánto la necesitaba.

Muchas gracias a la Dra. Myriam Mondragón Ceballos, al Dr. José David Vergara Oliver, al Dr. Mariano Chernicoff Minsberg y al Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar por formar parte de mi sínodo, por su paciencia y por sus observaciones a mi trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Física que me dieron la oportunidad de estudiar lo que me apasionaba y por los recursos brindados hacia mi persona a través de todos estos años.

Esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa UNAM-PAPIIT IN113223. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



# Índice general

<b>1. Introducción y Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos de la teoría de grupos</b>	<b>5</b>
2.1. Grupos y subgrupos	5
2.2. Clases laterales y subgrupos normales	6
2.3. Grupos no abelianos	7
2.4. Representación de un grupo	10
2.5. Productos tensoriales	12
2.6. Presentación de un grupo	13
2.7. El grupo $S_3$	13
<b>3. El Modelo Estándar de partículas elementales</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción al SM	17
3.2. El grupo de simetría $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	19
3.3. El Lagrangiano del SM	20
3.3.1. El Mecanismo de Higgs	21
3.4. Las Matrices CKM y PMNS en la Física de Partículas	23
3.4.1. La matriz CKM	23
3.4.2. La matriz PMNS	24
3.5. El problema del sabor y sus posibles soluciones	25
<b>4. Simetrías de sabor modulares</b>	<b>27</b>
4.1. El grupo $SL(2, \mathbb{Z})$	27
4.2. El grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$	29
4.3. Formas modulares/Formas modulares vector valuadas	30
4.4. Relación de los grupos modulares con la física de sabor	31
4.5. Forma de los modelos con grupos modulares	32
4.6. Modelo basado en $A_4$	33
4.7. Modelo basado en $S_3$	35
<b>5. Grupos cocientes de <math>\bar{\Gamma}_0(2)</math></b>	<b>39</b>
5.1. Grupos cocientes de $SL(2, \mathbb{Z})$	39
5.1.1. Instrucciones generales de GAP	39
5.1.2. Aplicación para $SL(2, \mathbb{Z})$	41

5.2. Presentación del grupo $\overline{\Gamma}_0(2)$ . . . . .	42
5.3. Grupos cocientes de $\overline{\Gamma}_0(2)$ . . . . .	46
5.3.1. Grupos cocientes hasta índice 12 . . . . .	46
5.3.2. Grupos cocientes no abelianos hasta índice 24 . . . . .	47
<b>6. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Formas modulares de <math>\Gamma/\mathcal{N} \simeq A_4</math></b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción y Motivación

El Modelo Estándar de la física de partículas (SM, por sus siglas en inglés) [1–5] es la teoría que describe las interacciones fundamentales entre las partículas elementales que componen toda la materia conocida mediante tres de las cuatro fuerzas fundamentales: la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil, con excepción de la gravedad. Para esto, agrupa y describe las interacciones entre los fermiones, que constituyen la materia, y los bosones mediadores, que transmiten las fuerzas fundamentales, es decir, el fotón [2,6–8] (electromagnética), los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  [9–11] (interacción débil), y los gluones [12–14] (interacción fuerte). Además, incorpora el mecanismo de Higgs [1, 2, 15], que explica cómo las partículas adquieren masa. Sin embargo, a pesar de su éxito experimental y su poder predictivo, el SM presenta limitaciones al no ofrecer explicaciones completas para algunos aspectos fundamentales de la teoría. Entre estas limitaciones, destacan la ausencia de una explicación para la jerarquía de masas de los quarks y leptones, la estructura de mezcla en los sectores leptónico y hadrónico, descrita por las matrices de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [16–18] y Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [19–22], la existencia de tres generaciones de fermiones sin una justificación clara en el SM [23] o el hallazgo de que los neutrinos poseen masa y pueden mezclarse, evidenciado a través de experimentos de oscilación de neutrinos [24–26]. Todo esto, entre otras cosas, ha impulsado significativamente la búsqueda de física más allá del SM.

Una posible forma de entender estos patrones es la física de sabor [27], la cual estudia las propiedades de transformación entre las distintas familias de fermiones. En este contexto, se han propuesto las llamadas simetrías de sabor [28–30], es decir, ciertas estructuras matemáticas subyacentes que podrían explicar las relaciones entre las masas y los ángulos de mezcla de los quarks y leptones. Estas simetrías pueden ofrecer un marco teórico más profundo para comprender la organización de la materia y podrían conectar con modelos de nueva física que extiendan el SM.

Un elemento crucial que se tiene en los modelos de física de sabor son los *acoplamientos de Yukawa* [31], términos de interacción entre los fermiones y el campo de Higgs. Estos acoplamientos desempeñan un papel crucial en la generación de las masas de los quarks y leptones tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil. El trabajo pionero de Feruglio [32] introdujo el uso de las *formas modulares* [33] como acoplamientos de Yukawa, ofreciendo un enfoque innovador para comprender las estructuras de sabor en el SM. Esto impulsó el estudio de ciertos grupos, como  $S_3$ ,  $A_4$  o  $S_4$ , cuyas simetrías han sido ampliamente exploradas en la construcción de modelos de sabor [29, 32, 34–41].

Las propiedades de las formas modulares están determinadas por sus transformaciones bajo ciertos grupos conocidos como grupos modulares. De hecho, bajo la acción de estos grupos modulares, una forma modular se

puede transformar en otra. En la propuesta de Feruglio, esta observación implica que distintos acoplamientos de Yukawa están relacionados por los grupos modulares. Entonces, en este contexto, los grupos modulares funcionan como herramientas matemáticas prometedoras para describir las simetrías de sabor.

El grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z}) = \Gamma$  está compuesto por matrices  $2 \times 2$  con entradas enteras y determinante igual a uno [42], actuando sobre el semiplano superior complejo mediante transformaciones fraccionarias lineales. Por otro lado,  $PSL(2, \mathbb{Z})$  es la versión proyectiva de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , es decir, trata a las matrices  $\gamma$  y  $-\gamma$  como equivalentes. Estos grupos y sus subgrupos poseen una rica estructura algebraica que los hace útiles para explorar simetrías en teorías físicas. En particular, Feruglio [32] y Liu-Ding [41] estudiaron las formas modulares asociadas a  $SL(2, \mathbb{Z})$  y los grupos cocientes descritos como  $SL(2, \mathbb{Z})/N$  (donde  $N$  representa un subgrupo normal de  $SL(2, \mathbb{Z})$ ) y sus aplicaciones en modelos fenomenológicos. En concreto, se encontró que los grupos cocientes asociados tenían la estructura de grupos bien conocidos en la física de sabor, como  $S_3$ ,  $T'$  o  $A_4$ , y que las formas modulares construyen representaciones no triviales de éstos. Exigiendo que no sólo los acoplamientos de Yukawa sino que los campos de materia también formen representaciones de los grupos cocientes, estos pueden servir para definir las simetrías sabor de la teoría. De esta manera, al definir un grupo cociente modular como la simetría de sabor de un modelo de quarks y leptones, se puede llegar a predicciones que concuerden con los datos experimentales [26].

A partir de estos resultados, surge la pregunta de si es posible emplear otros grupos modulares para obtener nuevos modelos o replicar los existentes. En este sentido,  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$  poseen diversos subgrupos modulares que podrían ser candidatos interesantes para modelos de física de sabor. Entre estos, se encuentran los denominados  $\Gamma(N)$ ,  $\Gamma_0(N)$ ,  $\Gamma_1(N)$ , entre otros. Es interesante que los grupos  $\Gamma_0(N)$  y  $\bar{\Gamma}_0(N)$  han permanecido prácticamente inexplorados.

Los grupos  $\Gamma_0(N)$  son subgrupos de congruencia del grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , definidos mediante

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (1.1)$$

Por otro lado, los grupos  $\bar{\Gamma}_0(N)$  son subgrupos de congruencia del grupo  $PSL(2, \mathbb{Z})$  que se definen como

$$\bar{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (1.2)$$

Una pregunta natural que surge es si sus grupos cocientes, análogos a los grupos  $SL(2, \mathbb{Z})/N$  explorados abundantemente [37–41], poseen una estructura que permita la construcción de nuevos modelos fenomenológicos.

El objetivo de este trabajo es avanzar en esta línea de investigación, centrándonos en el grupo de congruencia  $\bar{\Gamma}_0(2)$ . En particular, se utilizará el programa GAP [43], que proporciona un algoritmo para determinar los subgrupos normales de un grupo y sus grupos cocientes. Para ello, el algoritmo necesita conocer la presentación del grupo, la cual se define como el conjunto mínimo de relaciones que satisfacen los generadores del grupo. En esta tesis, se llevará a cabo un análisis matemático detallado para obtener la presentación explícita de  $\bar{\Gamma}_0(2)$ . Finalmente, se determinarán sus subgrupos normales y los grupos cocientes asociados, junto con su estructura algebraica. Con estos resultados, se espera a más largo plazo obtener las formas modulares de este grupo y sus representaciones bajo los grupos cocientes encontrados, y con esto desarrollar modelos fenomenológicos que permitan realizar predicciones en física de sabor.

## Organización del trabajo

En el capítulo 2 se proporcionan ciertas bases matemáticas acerca de la teoría de grupos, las cuales son necesarias para entender el resto del trabajo. Se explican conceptos como la definición de un grupo, un subgrupo, un subgrupo normal, presentaciones y representaciones. Estos conceptos son fundamentales para el trabajo de los grupos  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $\bar{\Gamma}_0(2)$  y sus cocientes.

El capítulo 3 presenta una descripción general del modelo estándar, destacando sus componentes fundamentales: quarks, leptones y los bosones gauge. Además, se tiene una discusión acerca de las limitaciones del SM en relación con el problema del sabor, como la incapacidad para predecir las masas de las partículas o los parámetros de mezcla observados en las matrices CKM y PMNS.

En el capítulo 4 se introducen a los grupos modulares, como  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , y su relación con las simetrías de sabor. También se explican los conceptos de formas modulares y sus aplicaciones en modelos físicos, incluyendo un par de modelos basados en los grupos  $A_4$  y  $S_3$ . Además, se describe cómo estos grupos modulares pueden extenderse y adaptarse para modelar fenómenos observados.

En el capítulo 5, nos centramos en el análisis detallado de los grupos cocientes de  $\bar{\Gamma}_0(2)$ . Se presentan resultados sobre la estructura algebraica de estos grupos, así como las técnicas utilizadas para obtenerlos. Además, se discuten las relaciones entre estos grupos y las simetrías de sabor, destacando su potencial aplicación en un futuro.

Finalmente, en el capítulo 6 resumimos nuestros resultados más relevantes y posibles líneas de investigación futuras.



# Capítulo 2

## Fundamentos de la teoría de grupos

La teoría de grupos es una rama fundamental de las matemáticas y de la física que estudia las estructuras conocidas como grupos, las cuales están formadas por un conjunto no vacío y una operación que satisface ciertos axiomas: asociatividad, elemento neutro e inverso, y clausura [44–46]. Los grupos son de los objetos algebraicos más importantes y versátiles, ya que permiten modelar una gran variedad de fenómenos matemáticos y físicos, en particular, es un pilar fundamental en la formulación del SM. En este capítulo se introduce la teoría de grupos desde su definición general hasta conceptos más avanzados como un subgrupo normal, un grupo cociente, la representación y la presentación de un grupo, además de dar una introducción a ciertos grupos no abelianos que serán fundamentales para comprender los contenidos de los capítulos 4 y 5. Estos conceptos no sólo permiten describir de forma rigurosa las estructuras algebraicas involucradas en las simetrías modulares, sino que también resultan esenciales para trabajar con grupos como  $SL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\bar{\Gamma}_0(2)$  y sus cocientes. La comprensión profunda de estas nociones facilitará el análisis computacional posterior, en el que se requerirá manipular presentaciones de grupos y caracterizar su estructura a través de representaciones explícitas. Así, este capítulo actúa como una introducción a la matemática abstracta para poder comprender las aplicaciones físicas que se desarrollarán más adelante.

### 2.1. Grupos y subgrupos

**Definición 2.1.** Un grupo  $(G, *)$ , es una estructura algebraica que consiste en un conjunto  $G$  junto con una operación binaria  $* : G \times G \rightarrow G$  que satisface las siguientes propiedades [44]:

1. **Cerradura**

$$\forall a, b \in G, \quad a * b \in G. \quad (2.1)$$

2. **Asociatividad**

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in G. \quad (2.2)$$

3. **Elemento identidad**

$$\exists e \in G \mid e * a = a * e = a, \quad \forall a \in G. \quad (2.3)$$

4. **Existencia del inverso**

$$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \mid a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \quad (2.4)$$

Por convención, se denotara al grupo  $(G, *)$  simplemente como  $G$ .

**Definición 2.2.** Se define como el **orden** de un grupo  $G$ , a la cardinalidad del conjunto  $G$ . Comúnmente se denota por  $|G|$ . Si la cardinalidad del conjunto  $G$  es finita, entonces  $G$  es un grupo finito.

**Definición 2.3.** Si la operación de un grupo  $G$  cumple con

$$g * h = h * g, \quad \forall g, h \in G, \quad (2.5)$$

entonces llamaremos a  $G$  un **grupo abeliano**.

**Definición 2.4.** Sea  $G$  un grupo. Un subconjunto  $H \neq \emptyset$  de  $G$  es un subgrupo de  $G$  si  $H$  es en sí mismo un grupo  $H$  bajo la operación de  $G$ .

Observemos que los conjuntos  $\{e\}$  y  $G$  de un grupo  $G$ , son subgrupos de este. A estos subgrupos se les conoce como subgrupos triviales.

## 2.2. Clases laterales y subgrupos normales

**Definición 2.5.** Sea  $G$  un grupo. Si  $g \in G$  y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces se le denomina al conjunto

$$gH = \{g * h \mid h \in H\}, \quad (2.6)$$

una **clase lateral izquierda** de  $G$  con respecto a  $H$ .

**Definición 2.6.** Sea  $G$  un grupo. Si  $g \in G$  y  $H$  es un subgrupo de  $G$ . Al conjunto

$$Hg = \{h * g \mid h \in H\}, \quad (2.7)$$

se le denomina una **clase lateral derecha** de  $G$  con respecto a  $H$  [47].

En cualquier caso, al elemento  $g$  se le denomina como **representante de la clase**.

Aunque se podría suponer que las clases laterales derechas e izquierdas, en general, son completamente distintas, en la mayoría de los casos estas clases cuentan con una propiedad bastante útil, la cual se ve en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces el orden (o cardinalidad) del conjunto de clases laterales derechas de  $H$  en  $G$  es igual al orden del conjunto de clases laterales izquierdas de  $H$  en  $G$ .

**Definición 2.7.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . El índice de  $H$  en  $G$ , es el orden del conjunto de clases laterales derechas (o izquierdas) de  $H$  en  $G$ . Se le denota usualmente por  $[G : H]$ .

**Definición 2.8.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Decimos que  $H$  es normal a  $G$  si

$$g^{-1}Hg = H, \quad \forall g \in G. \quad (2.8)$$

Por convención, se denota a esto como  $H \trianglelefteq G$ .

**Teorema 2.2.** Todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal.

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo abeliano y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces  $\forall g \in G, h \in H$ , se tiene que,

$$g^{-1}hg = g^{-1}gh = eh = h. \quad (2.9)$$

□

**Teorema 2.3.**  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  si y sólo si  $Hg = gH, \forall g \in G$ .

*Demostración.* Supongamos que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  y tomemos un elemento  $g$  de  $G$ , entonces,

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\} = H. \quad (2.10)$$

□

**Definición 2.9.** Sea  $a^h = e$ , con  $a, e \in G$  y  $h$  corresponde al orden del elemento  $a$ .

Observe que los elementos  $\{e, a, a^2, \dots, a^{h-1}\}$  constituyen un subgrupo abeliano y finito de orden  $h$ .

**Definición 2.10.** Sea  $g \in G$ , a los elementos de la forma  $g^{-1}ag$ , se les denomina usualmente como *elementos conjugados al elemento  $a$* . Al conjunto conformado por todos los elementos conjugados a un elemento  $a \in G$ , es decir,  $\{g^{-1}ag, \forall g \in G\}$  se le denomina como una **clase de conjugación**.

**Definición 2.11.** Dado un grupo  $G$  y un subgrupo normal  $\mathcal{N}$  de  $G$ ,  $\mathcal{N} \trianglelefteq G$ , el grupo cociente o grupo factor de  $G$  sobre  $\mathcal{N}$  (denotado como  $G/\mathcal{N}$ ) es el grupo definido como el conjunto de clases laterales izquierdas de  $\mathcal{N}$  en  $G$ , esto es

$$G/\mathcal{N} = \{g\mathcal{N} \mid g \in G\}. \quad (2.11)$$

Estas definiciones son importantes debido a que en el capítulo 5 calcularemos los grupos normales y los grupos cocientes de los grupos  $SL(2, \mathbb{Z}) = \Gamma$  y  $\bar{\Gamma}_0(2)$  los cuales definiremos con más detalle en el capítulo 4.

## 2.3. Grupos no abelianos

Uno de los conceptos más significativos es la clasificación de los grupos en abelianos y no abelianos. Como vimos, un grupo es una estructura algebraica que satisface las propiedades de **cerradura**, **asociatividad**, **elemento identidad** y **existencia del inverso**.

Como vimos en la definición 2.3, un grupo es **abeliano** (o conmutativo) si, además de las propiedades anteriores, satisface la propiedad de conmutatividad

### ■ Conmutatividad

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G. \quad (2.12)$$

En contraposición, un grupo es **no abeliano** si no siempre se cumple la conmutatividad, es decir, si existen al menos dos elementos  $a, b \in G$  tales que  $a * b \neq b * a$ . Los grupos no abelianos son de gran interés tanto teórico como práctico en diversas ramas de la matemática y la física.

A continuación, se presentan algunos grupos no abelianos que son relevantes en la construcción de diversos modelos de simetrías de sabor.

- **El grupo  $S_n$**

Se le llama  $S_n$  al grupo simétrico de grado  $n$  [29, 48]. Este es el grupo formado de todas las posibles permutaciones de  $n$  objetos de un conjunto  $\{x_i\}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$  bajo la acción de un elemento del grupo, de modo que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \quad (2.13)$$

donde  $x_{i_k}$  representa la imagen de  $x_i$  bajo la acción de un elemento del grupo  $S_n$ . Este elemento debe ser biyectivo y actuar dentro del mismo conjunto. Si el conjunto sobre el que actúa el grupo tiene  $n$  elementos, entonces  $S_n$  posee  $n!$  elementos.

Tomando el caso donde  $n = 3$ , el grupo se conformaría de las aplicaciones biyectivas del conjunto  $\{x_1, x_2, x_3\}$  sobre sí mismo, es decir,

$$e : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3), \quad (2.14a)$$

$$a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3), \quad (2.14b)$$

$$a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1), \quad (2.14c)$$

$$a_3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2), \quad (2.14d)$$

$$a_4 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2), \quad (2.14e)$$

$$a_5 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1). \quad (2.14f)$$

- **El grupo  $A_n$**

Este grupo está compuesto por todas las permutaciones pares del grupo  $S_n$  (el conjunto de todas las permutaciones posibles de  $n$  objetos). En otras palabras, los elementos de  $S_n$  que realizan permutaciones pares en el conjunto  $x_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , los elementos de  $A_n$ . Por ejemplo, para el caso de  $n = 3$ , el conjunto  $\{e, a_4, a_5\}$  de  $S_3$  son los elementos que conforman  $A_3$ .

El grupo  $A_n$  tiene orden  $\frac{n!}{2}$ .

Como veremos en el capítulo 4, los grupos  $S_n$  y  $A_n$  son de mucha importancia debido a que se han desarrollado distintos modelos de física de sabor basados en ellos [29, 32, 34, 36, 37], dando predicciones teóricas a la masa de las distintas partículas del SM y de los ángulos de mezcla de las matrices CKM y PMNS.

- **Grupo  $Q_n$**

$Q_n$ , donde  $n$  es par, es un grupo conocido como el grupo diedral binario, el cual se constituye de los elementos  $a^m b^k$  con  $m = 1, \dots, n$  y  $k = 1, 2$ , donde estos generadores satisfacen las condiciones [29]

$$a^n = e, \quad b^2 = a^{n/2}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}. \quad (2.15)$$

Su orden es igual a  $2n$ .

- **El grupo diédrico  $D_n$**

El grupo diédrico  $D_n$  es un grupo que describe las simetrías de un polígono regular de  $n$  lados. Estas simetrías incluyen rotaciones y reflexiones las cuales dejan invariante al polígono [49].

Para un polígono regular de  $n$  lados este grupo tiene  $n$  posibles rotaciones, incluyendo el elemento identidad y  $n$  reflexiones posibles respecto a los ejes de simetría. Por lo tanto, es un grupo de orden  $2n$ .

Por ejemplo, para  $n = 4$  tenemos que sus elementos son de la forma

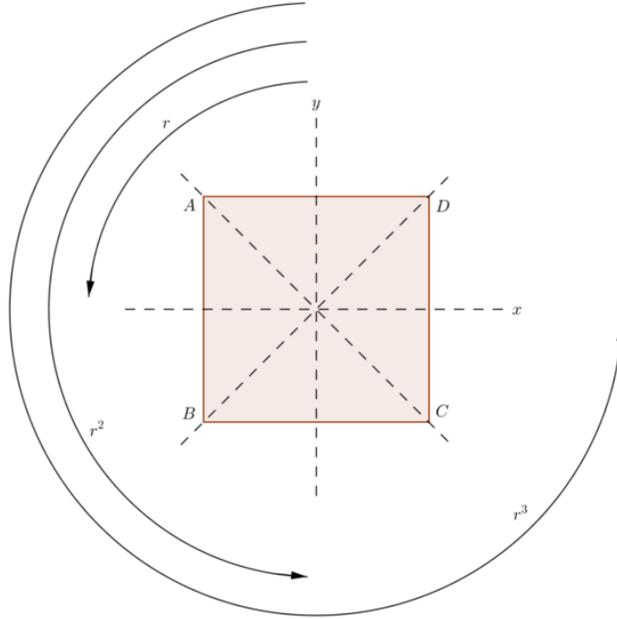


Figura 2.1: *Elementos del grupo  $D_4$* . Los elementos  $r_1, r_2, r_3$  representan las rotaciones del polígono en los ángulos  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ . Los elementos  $s_1, s_2$  están asociados a las reflexiones respecto a los ejes  $x$  y  $y$ . El elemento  $s_3$  está asociado a la reflexión respecto a la diagonal de los vértices  $A, C$  y  $s_4$  es el elemento que representa a la reflexión respecto a la diagonal formada entre los vértices  $B$  y  $D$ . Imagen tomada de [50].

- El elemento identidad  $e$ .
- Los elementos  $r, r^2, r^3$  los cuales están asociados a las rotaciones del polígono en los ángulos  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  respectivamente.
- Los elementos  $s_1$  y  $s_2$  correspondientes a las reflexiones del polígono respecto a los ejes  $x$  y  $y$ .
- Los elementos  $s_3$  y  $s_4$  corresponden a las reflexiones respecto a los ejes diagonales del polígono.

En la figura 2.1 se pueden apreciar estos elementos.

#### ■ Grupo general lineal

El grupo general lineal  $GL(2, \mathbb{R})$  es el grupo formado por el conjunto de todas las matrices invertibles de  $n \times n$  con entradas en los reales, con la operación de multiplicación de matrices. Como ejemplo, podemos tomar a  $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ , con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

por lo que se tendrá

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Notemos que no necesariamente se cumple que  $AB = BA$  para todos los casos. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Con lo que  $AB \neq BA$  y por lo tanto,  $GL(2, \mathbb{R})$  es no abeliano. Este grupo en particular es fundamental en el álgebra lineal y en la teoría de representaciones.

## 2.4. Representación de un grupo

**Definición 2.12.** Al mapeo,  $D$ , de elementos de un grupo  $G$ , en un conjunto de operadores lineales el cual cumple con las siguientes características [45]

1.  $D(e) = 1$ , con  $e \in G$ , el elemento identidad del grupo y 1 es el operador identidad en el espacio en el cual los operadores actúan.
2.  $D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$ , es decir, la ley de multiplicación del grupo es mapeada sobre la multiplicación natural en el espacio sobre el que actúan los operadores lineales.

Se le denomina una **representación**.

**Ejemplo 2.1** ( $\mathbb{Z}_3$ ). Tomemos al grupo cíclico de orden 3,  $\mathbb{Z}_3$ , con elementos  $\{e, a, b\}$ . Podemos organizar el producto de los elementos como se observa en la tabla 2.1.

○	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tabla 2.1: Tabla de multiplicación de  $\mathbb{Z}_3$ .

Note que cada fila y columna de la tabla de multiplicación debe contener cada elemento del grupo exactamente una vez. Esto debe ser así por la existencia de la inversa.

De este grupo se puede dar una representación con la siguiente forma

$$D(e) = 1, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}, \quad D(b) = e^{4\pi i/3}. \quad (2.20)$$

Observe que esta representación cumple con las propiedades de la definición 2.12.

**Definición 2.13.** El **espacio de representación** es el espacio vectorial  $v_j$  sobre el cual actúa una representación. La cantidad de dimensiones de este espacio determina la *dimensión de la representación*.

**Definición 2.14.** Una representación es **reducible** si tiene un subespacio invariante, lo que significa que la acción de cualquier  $D(g)$  sobre cualquier vector del subespacio sigue estando en el subespacio. Una representación **irreducible** es aquella que no es reducible.

**Definición 2.15.** A una representación se le denomina como *representación unitaria* si para toda  $D(g)$  se tiene que  $D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$ .

**Definición 2.16.** Una representación es completamente reducible si es equivalente a una representación cuyos elementos matriciales tienen la siguiente forma [45]

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_r(g) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

donde cada  $D_j(g)$  es irreducible  $\forall j$ . A esto se denomina matriz diagonal por bloques.

Se dice que una representación en forma de una matriz diagonal por bloques es la suma directa de las subrepresentaciones,  $D_j(g)$ ,

$$\sum_{\alpha=1}^r \oplus D_\alpha = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots . \quad (2.22)$$

Al transformar una representación en una matriz diagonal por bloques, estamos descomponiendo la representación original en una suma directa de sus componentes irreducibles. Por tanto, otra forma de definir una representación completamente reducible es decir que una representación completamente reducible puede descomponerse en una suma directa de representaciones irreducibles.

**Definición 2.17.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo  $F$  y sea  $D$  una representación de un grupo  $G$  en  $V$ . Se le llama carácter de  $D$  a la función  $\chi_D : G \rightarrow F$  dada por

$$\chi_D(g) = \text{Tr}(D(g)) = \sum_i D(g)_{ii}. \quad (2.23)$$

Los caracteres tienen la importante propiedad de ser ortogonales entre sí, lo que se expresa a través de la **relación de ortogonalidad de los caracteres**, la cual es fundamental para el análisis de las representaciones irreducibles. Esta relación se puede escribir como

$$\sum_{g \in G} \chi_{D_\alpha}(g) \chi_{D_\beta}(g) = N_G \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

donde  $N_G$  representa el orden del grupo  $G$ .

**Teorema 2.4.** Los elementos de una clase de conjugación asociados a un elemento  $a \in G$  tienen caracteres iguales.

*Demostración.* Sea  $g^{-1}ag$  un elemento de una clase de conjugación asociada al elemento  $a \in G$ . Entonces su carácter es de la forma

$$\begin{aligned} \chi_D(g^{-1}ag) &= \text{Tr}(D(g^{-1}ag)) = \text{Tr}(D(g^{-1})D(a)D(g)) \\ &= \text{Tr}(D(g^{-1})) \text{Tr}(D(a)) \text{Tr}(D(g)) \\ &= \text{Tr}(D(g^{-1})) \text{Tr}(D(g)) \text{Tr}(D(a)) \\ &= \text{Tr}(D(a)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

□

A pesar de esto, el carácter de diferentes representaciones irreducibles son ortogonales y diferentes entre sí. Por lo que, también se tiene una relación de ortogonalidad que las clases de conjugación deben de cumplir, dada por

$$\sum_{\alpha} \chi_{D_{\alpha}}(g_i) \chi_{D_{\alpha}}(g_j) = \frac{N_G}{n_i} \delta_{C_i C_j}, \quad (2.26)$$

con  $C_i$  la clase de conjugación del elemento  $g_i$  y  $n_i$  representa el número de elementos en la clase de conjugación  $C_i$ .

Suponga  $m_n$  representaciones  $n$ -dimensionales irreducibles. Por un lado, el carácter de la clase de conjugación  $C_1 = e$ , es  $\chi_{D_{\alpha}}(C_1) = n$  para esta representación. Por lo que, al utilizar la relación (2.26) obtenemos que

$$\sum_{\alpha} (\chi_{D_{\alpha}}(C_1))^2 = \sum_n m_n n^2 = \frac{N_G}{n_i} \delta_{C_i C_j} = N_G, \quad (2.27)$$

con  $m_n$  es el número de representaciones irreducibles.

Finalmente,  $m_n$ , satisface con la condición

$$\sum_n m_n = n_c, \quad (2.28)$$

donde  $n_c$  es el número de clases de conjugación y  $m_n \geq 0$ .

Las representaciones de un grupo son bastante importantes en física debido a que permiten podernos hacer entender y describir ciertas simetrías de manera precisa. Por ejemplo, en mecánica cuántica, las representaciones del grupo  $SU(2)$  nos ayudan a entender el momento angular y el espín. Por otro lado, las formas modulares de nivel  $N$  pueden organizarse en representaciones de distintos grupos [29,34–40], como  $S_n$  o  $A_n$ , lo que permite usarlas en física de sabor.

## 2.5. Productos tensoriales

Hemos visto que se puede descomponer representaciones reducibles en sumas directas de representaciones más pequeñas, ahora bien, también se puede hacer lo contrario, combinar representaciones más pequeñas para formar representaciones más grandes.

**Definición 2.18.** Sea  $G$  un grupo. Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos representaciones de  $G$  que actúan sobre los espacios vectoriales  $V_1$  y  $V_2$  entonces el **producto tensorial** de estas representaciones, el cual es denotado como  $D_1 \otimes D_2$ , es una representación que actúa sobre el producto tensorial de los espacios vectoriales  $V_1 \otimes V_2$ . Si  $\{v_i\}$  es una base de  $V_1$  y  $\{w_j\}$  es una base de  $V_2$ , entonces la base del espacio tensorial  $V_1 \otimes V_2$  consiste en todos los pares ordenados  $v_i \otimes w_j$ .

El producto tensorial de las representaciones se define mediante la acción del grupo  $G$  sobre los elementos del espacio tensorial

$$(D_1 \otimes D_2)(g)(v_i \otimes w_j) = (D_1(g)v_i) \otimes (D_2(g)w_j), \quad (2.29)$$

donde en este caso  $D_1(g)$  y  $D_2(g)$  denotan las matrices que representan la acción de  $g \in G$  en las representaciones  $D_1$  y  $D_2$ .

La dimensión de la representación  $D_1 \otimes D_2$  estará dada por el producto de las dimensiones de  $D_1$  y  $D_2$ . De esta forma, si  $D_1$  tiene dimensión  $m$  y  $D_2$  tiene dimensión  $n$ , entonces la representación tensorial tendrá dimensión  $m \times n$ .

## 2.6. Presentación de un grupo

La presentación de un grupo consiste en definir el grupo  $G$  mediante un conjunto de generadores y relaciones. La presentación de un grupo  $G$  usualmente se escribe de la forma

$$G = \langle S | R \rangle, \quad (2.30)$$

en donde

- $S = \{g_1, g_2, \dots\}$  es el conjunto de los generadores. Esto quiere decir que todo elemento del grupo  $G$  puede expresarse como una combinación de los elementos de  $S$ .
- $R = \{R_1, R_2, \dots\}$  es el conjunto de las relaciones, es decir, las igualdades entre elementos del grupo. En las relaciones suele omitirse la igualdad y el elemento neutro.

**Ejemplo 2.2.** Si la presentación de un grupo  $G$  es de la forma

$$G = \langle a, b, c, d \mid a^4, (bc)^3, cbc^{-1}b^{-1} \rangle. \quad (2.31)$$

Esta presentación nos dice que el grupo  $G$  está generado por los elementos  $a, b, c, d$  y el conjunto de relaciones nos indica que  $a^4 = e$ , es decir,  $a$  es de orden 4,  $bc$  es de orden 3, y que  $c$  y  $b$  conmutan.

**Ejemplo 2.3.** El grupo diédrico  $D_n$ , que representa las simetrías de un polígono regular de  $n$  lados, tiene la presentación

$$D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, (rs)^2, (sr)^2 \rangle, \quad (2.32)$$

en donde podemos ver que  $r$  es el generador de las rotaciones y  $r^n = e$  nos indica que al rotar el polígono  $n$  veces regresamos a la identidad,  $s$  es el generador de las reflexiones y  $s^2$  nos indica que una doble reflexión nos da la misma figura y  $(rs)^2, (sr)^2$  expresa la relación entre las reflexiones y rotaciones.

Como veremos en los capítulos 4 y 5, la presentación de un grupo es bastante importante debido a que con ella podemos definir un grupo que queramos analizar a través de ella. Con esto podemos estudiar este grupo y obtener sus subgrupos, subgrupos normales u otras propiedades mediante el uso de algoritmos computacionales [51].

## 2.7. El grupo $S_3$

Como vimos en la sección 2.3 el grupo  $S_3$  está conformado por todas las posibles permutaciones de  $n$  objetos de un conjunto  $\{x_i\}$  donde  $i = 1, 2, 3$ , por lo que, en este caso,  $S_3$  está formado por los siguientes elementos [29]

$$e : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3), \quad (2.33a)$$

$$a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3), \quad (2.33b)$$

$$a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1), \quad (2.33c)$$

$$a_3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2), \quad (2.33d)$$

$$a_4 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2), \quad (2.33e)$$

$$a_5 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1). \quad (2.33f)$$

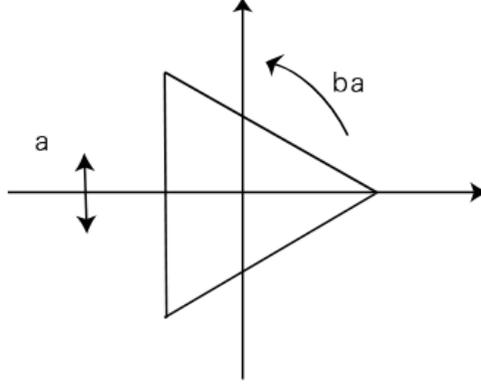


Figura 2.2: El grupo  $S_3$ . Los elementos  $a, b, bab$  representan las reflexiones de un triángulo equilátero. Mientras que los elementos  $ab, ba$  están asociados a las rotaciones de  $120^\circ$  de este. Imagen obtenida de [29].

Observemos que al combinar dos elementos del grupo obtenemos otro de este mismo conjunto, es decir, se cumple la propiedad de cerradura

$$a_1 a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) = a_5, \quad (2.34a)$$

$$a_2 a_1 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) = a_4, \quad (2.34b)$$

$$a_4 a_2 = a_2 a_1 a_2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) = a_3. \quad (2.34c)$$

Por lo tanto, si tomamos a  $a_1 = a$  y  $a_2 = b$  podemos expresar a los elementos de  $S_3$  de la siguiente manera

$$\{e, a, b, bab, ba, ab\}. \quad (2.35)$$

Es decir, el grupo  $S_3$  puede ser generado por estos dos elementos, los cuales satisfacen las siguientes relaciones

$$a^2 = b^2 = (bab)^2 = e, \quad (2.36a)$$

$$(ab)^3 = (ba)^3 = e. \quad (2.36b)$$

Es decir, el grupo  $S_3$  es equivalente al grupo que representa las diferentes simetrías de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura 2.2. En este sentido, los elementos  $a, b, bab$  corresponden a una reflexión y los elementos  $ab, ba$  a una rotación. Su tabla de multiplicación de este grupo se observa en la tabla 2.2.

Entonces, podemos obtener las siguientes clases de conjugación

$$C_1 : \{e\}, \quad C_2 : \{ab, ba\}, \quad C_3 : \{a, b, bab\}. \quad (2.37)$$

Con esto, utilizando la ecuación (2.28) obtenemos que

$$\sum_n m_n = 3, \quad (2.38)$$

es decir, existen tres representaciones irreducibles para este grupo. Suponiendo que las representaciones  $m_n$  son  $n$ -dimensionales, entonces utilizando la ecuación (2.27),

$$\sum_\alpha (\chi_{D_\alpha}(C_1))^2 = \sum_n m_n n^2 = N_G = 6. \quad (2.39)$$

$e$	$e$	$a$	$b$	$ab$	$ba$	$bab$
$a$	$a$	$e$	$ab$	$b$	$bab$	$ba$
$b$	$b$	$ba$	$e$	$bab$	$a$	$ab$
$ab$	$ab$	$bab$	$a$	$ba$	$e$	$b$
$ba$	$ba$	$b$	$bab$	$e$	$ab$	$a$
$bab$	$bab$	$ab$	$ba$	$a$	$b$	$e$

Tabla 2.2: Tabla de multiplicación del grupo  $S_3$  con presentación  $a^2 = b^2 = (bab)^2 = e$ ,  $(ab)^3 = (ba)^2 = e$ .

Esta ecuación tiene como soluciones

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1 \quad \text{o} \quad m_1 = 6, \quad m_2 = 0. \quad (2.40)$$

Sin embargo, debido a la ecuación (2.38) tendríamos que  $m_1 = 2$  y  $m_2 = 1$ . Es decir, las representaciones irreducibles de  $S_3$  están formadas por dos singletes y un doblete. A los singletes se les denota usualmente como  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{1}'$  y al doblete como  $\mathbf{2}$  [29].

Una base real para los generadores  $a$  y  $b$  en estas representaciones serían

$$\mathbf{1} : \quad a = 1, \quad b = 1, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{1}' : \quad a = -1, \quad b = -1. \quad (2.42)$$

Por otro lado, para el doblete, tomando que  $a$  se puede representar de la forma

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

entonces, con ayuda de las relaciones (2.36) podemos escribir a  $b$  como

$$b = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

con  $\theta$  un cierto ángulo. De esta manera los elementos restantes de  $S_3$  tienen las siguientes representaciones

$$bab = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}, \quad ab = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Observamos que la traza de las matrices de  $ab$  y  $ba$  es igual a

$$2 \cos(\theta) = -1, \quad (2.46)$$

$$\therefore \theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \end{cases}. \quad (2.47)$$

Usualmente se toma  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ , con lo que se obtiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & a &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & b &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ ab &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & ba &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & bab &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.48)$$



## Capítulo 3

# El Modelo Estándar de partículas elementales

Este capítulo presenta el marco teórico del SM, sus elementos constitutivos y su estructura basada en el grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , así como el mecanismo de Higgs que permite la generación de masas. A pesar del éxito del SM en describir con gran precisión las interacciones fundamentales y el contenido de partículas conocido, esta teoría presenta limitaciones significativas. Entre ellas se encuentra la incapacidad para explicar de forma natural el patrón jerárquico de masas de quarks y leptones, la existencia de tres generaciones de fermiones, y la estructura de mezcla contenida en las matrices CKM y PMNS. El objetivo de este capítulo es dar una introducción a algunos elementos esenciales del SM así como una introducción a los problemas que han motivado la búsqueda de extensiones del SM y sus posibles soluciones, siendo una de ellas la búsqueda de simetrías de sabor a partir de formas modulares.

### 3.1. Introducción al SM

Todo lo que hemos observado en el universo hasta el momento está conformado de unos cuantos bloques básicos, a los cuales llamamos “partículas fundamentales”. Estas partículas interactúan entre sí mediante cuatro fuerzas fundamentales. Nuestra mejor herramienta de cómo estas partículas interactúan entre sí se encuentra en el Modelo Estándar de física de partículas (SM) [1–4], el cual explica tres de las cuatro fuerzas fundamentales: la electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte, sin incluir hasta el momento a la gravedad. Desarrollado en la década de 1970, el SM ha logrado explicar casi todos los resultados experimentales conocidos y ha hecho predicciones precisas de una gran variedad de fenómenos.

Las partículas elementales se dividen en dos grupos principales: los fermiones y los bosones. A su vez, los fermiones se dividen en quarks y leptones. Los quarks son partículas las cuales se combinan para formar otro tipo de partículas subatómicas, como los protones ( $\sim 938.272 \text{ MeV}/c^2$ ) [52], neutrones ( $\sim 939.57 \text{ MeV}/c^2$ ) [53, 54], mesones, entre otros. Mientras que los leptones son partículas fundamentales entre los que se encuentran los electrones ( $\sim 0.511 \text{ MeV}/c^2$ ) [55], los muones ( $\sim 105.7 \text{ MeV}/c^2$ ) [56] o los neutrinos. Como se observa en la figura 3.1, hay doce tipos de partículas fermiónicas, organizadas en 3 generaciones. Las partículas de la primera generación son las más ligeras (con masas del orden de  $0.5$  a  $5 \text{ MeV}/c^2$ ) y estables (con vidas medias mayores a  $10^{26}$  años), mientras que las de la segunda y tercera generación son más pesadas

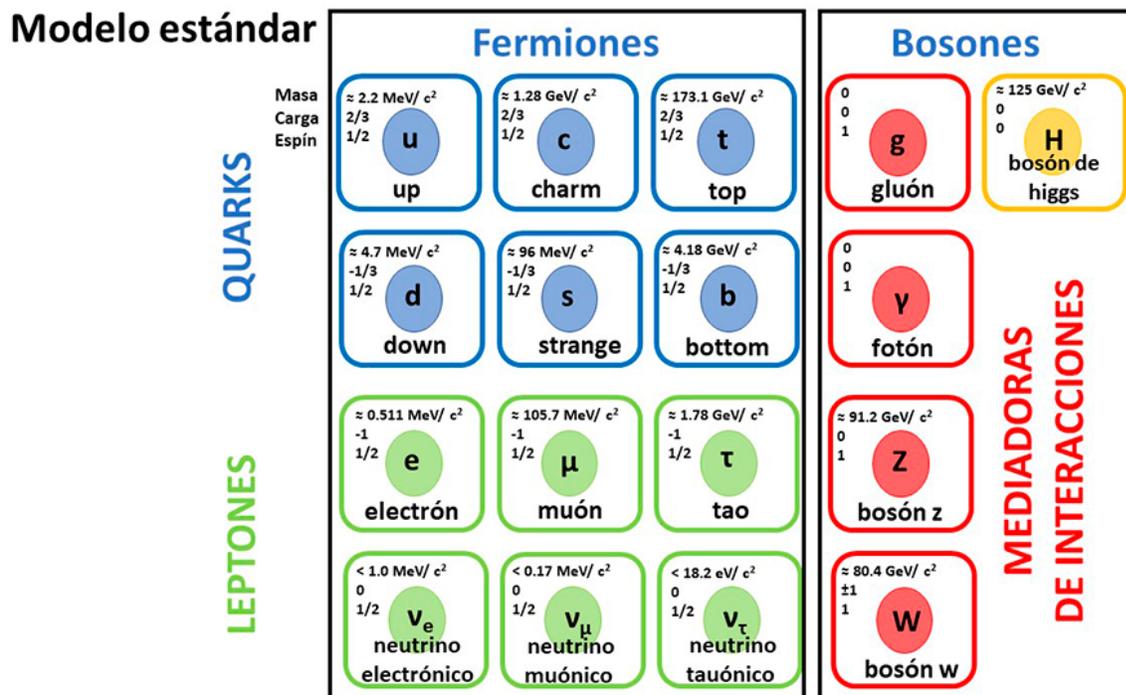


Figura 3.1: El Modelo Estándar de la física de partículas elementales. La carga eléctrica está expresada como un múltiplo de la carga eléctrica del electrón. Las masas se expresan en unidades de energía dividida por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío. Se puede observar un patrón en las generaciones formadas por un quark tipo up, un quark tipo down, un leptón tipo electrón y un neutrino asociado a este. Imagen extraída de [58].

(con masas desde  $\sim 100 \text{ MeV}/c^2$  hasta más de  $170 \text{ GeV}/c^2$ ) y menos estables (con vidas medias que van desde microsegundos hasta fracciones de picosegundo). Toda la materia estable del universo está compuesta por partículas de la primera generación, ya que las más pesadas tienden a desintegrarse rápidamente en partículas más ligeras y estables.

Existen seis diferentes tipos de quarks [57], el quark up (u) y el quark down (d) están la primera generación, seguido por el quark charm (c) y el quark strange (s) en la segunda y finalmente están el quark top (t) y el quark down (d), los cuales forman parte la tercera generación. Los seis leptones se disponen de manera similar en tres generaciones, el electrón y el neutrino electrónico forman parte de la primera generación, el muón y el neutrino muónico están la segunda generación, y el tau y el neutrino tau la tercera generación. Algunas propiedades de estas partículas, como sus masas o carga eléctrica, se pueden observar en la figura 3.1.

Por otro lado, como ya dijimos, en el universo existen cuatro fuerzas fundamentales: la gravedad, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte.

La gravedad es la más débil entre las fuerzas fundamentales, pero tiene un alcance infinito. Es la responsable de mantener unidos a los planetas, las estrellas y las galaxias. Sin embargo, esta no está descrita por el SM.

La fuerza electromagnética es mucho más intensa que la gravedad (alrededor de  $10^{36}$  veces más fuerte) y también tiene un alcance infinito. Es responsable de fenómenos como la luz, la electricidad, el magnetismo y ciertas interacciones químicas. Se describe mediante la teoría de la electrodinámica cuántica (QED) [2, 6–8] y es mediada por el fotón ( $\gamma$ ).

La fuerza nuclear débil actúa a distancias muy cortas (del orden de  $10^{-18}$  m) y es responsable de fenómenos como la desintegración beta en núcleos atómicos. Aunque más fuerte que la gravedad, es más débil que las fuerzas electromagnética y fuerte. Es mediada por los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  [9–11], cuyas masas están en el orden de los  $80 - 92$  GeV/ $c^2$ . Su relevancia aparece a escalas del orden de los 100 GeV, como en los grandes colisionadores de partículas.

La fuerza nuclear fuerte es la más intensa de las cuatro fuerzas, pero de alcance muy corto (alrededor de  $10^{-15}$  m). Es la responsable de mantener unidos a los protones y neutrones en el núcleo atómico. Está mediada por los gluones y se describe por la teoría de la cromodinámica cuántica (QCD) [12–14].

El bosón de Higgs también juega un papel importante en el modelo estándar, ya que el campo asociado a él es el mecanismo a través del cual todas las partículas del SM adquieren masa. En el año 2012, dos experimentos ATLAS y CMS del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN anunciaron que habían observado una partícula que estaba en el rango de los 125 GeV [59, 60], confirmando la existencia del bosón de Higgs.

### 3.2. El grupo de simetría $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

El SM unifica las tres de las cuatro interacciones fundamentales en un marco teórico basado en la simetría del grupo

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (3.1)$$

en donde se tiene que C, L, Y representan color (C), quiralidad izquierda (Left-Handed, por sus siglas en inglés) e hipercarga. El grupo  $SU(3)_C$  describe la interacción fuerte mediada por ocho gluones, descrita mediante la Cromodinámica Cuántica (QCD) [12–14]. Mientras que el producto  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  es el responsable de la descripción de la interacción electrodébil [9–11], con cuatro bosones como mediadores y que actúa solamente en las partículas que presentan quiralidad izquierda.

Los quarks se agrupan en tripletes bajo  $SU(3)_C$ , esto debido a que estos tienen carga de color, la cual tiene tres diferentes tipos: rojo, verde y azul. Por otro lado, bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  los fermiones de quiralidad izquierda serán agrupados en dobletes mientras que los de quiralidad derecha serán singletes.

De esta forma a los quarks se les puede representar de la siguiente manera

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iR} \end{pmatrix}, \quad u_{iR}, d_{iR} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

en donde el subíndice  $L$  hace referencia a los quarks de quiralidad izquierda y  $R$  para los quarks con quiralidad derecha. Mientras que  $u$  se refiere quarks tipo up, es decir al propio up, al quark charm y al quark top y  $d$  hace referencia a los quarks tipo down, strange y bottom, mientras que el subíndice  $i = 1, 2, 3$  se refiere justamente a la generación a la que pertenece el tipo de quark. Los leptones no tienen carga de color y por lo tanto serán singletes bajo  $SU(3)_C$ .

Mientras que a los leptones se les puede ver de la siguiente manera

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix}, \quad e_{iR} \quad i = 1, 2, 3$$

## 20 CAPÍTULO 3. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

Multipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	I	II	III
Quarks	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$	$u_R$	$c_R$	$t_R$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$	$d_R$	$s_R$	$b_R$
Leptones	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	$\nu_{eR}$	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$

Tabla 3.1: Multipletes del Modelo Estándar.

donde  $e_{iL}$  hace referencia a los tres tipos de leptones cargados, es decir, al electrón, al muón y al tau y  $\nu_i$  a los tres tipos de neutrinos izquierdos. Observar que en el SM no se incluyen neutrinos derechos. En la tabla 3.1 se puede observar mejor los multipletes en el SM.

A bajas energías (por debajo de los 100 GeV aproximadamente), la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  se rompe de manera espontánea [61, 62] debido al llamado mecanismo de Higgs [15]. Este mecanismo conduce a la ruptura de simetría

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q, \quad (3.3)$$

con  $Q$  es la carga eléctrica. Dicha ruptura espontánea de simetría es provocada por el campo  $H$ , un doblete escalar complejo bajo  $SU(2)_L$  con hipercarga  $Y = 1/2$ , al que se le conoce como el doblete de Higgs. Este proceso es el que separa la fuerza electromagnética de la débil.

### 3.3. El Lagrangiano del SM

Hay cuatro bosones gauge electrodébiles, tres bosones  $W^{1\mu}, W^{2\mu}, W^{3\mu}$  que forman un triplete bajo  $SU(2)_L$  y un  $B^\mu$  el cual está asociado a  $U(1)_Y$ . También hay ocho bosones asociados a la fuerza fuerte, o gluones, etiquetados como  $G^{1, \dots, 8 \mu}$ .

El Lagrangiano del SM se puede escribir de la siguiente forma [1, 2]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}, \quad (3.4)$$

es decir, se puede descomponer en una combinación de contribuciones diferentes.

El término  $\mathcal{L}_{\text{Gauge}}$  corresponde a la energía cinética de los bosones gauge (teoría de Yang–Mills). Este término se escribe como

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

donde  $G_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$  y  $B_{\mu\nu}$  son los tensores de los campos asociados a  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  y  $(U(1)_Y)$ , respectivamente.

El término  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  se refiere a las interacciones cinéticas del contenido fermiónico del SM. Este lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}^a(i\gamma^\mu D_\mu)\psi_a, \quad (3.6)$$

donde el índice  $a$  se corre por todos los campos fermiónicos, y  $D_\mu$  es la derivada covariante definida como

$$D_\mu := \partial_\mu - ig_s G_\mu^a \lambda^a - ig W_\mu^a \tau^a - iY g' B_\mu, \quad (3.7)$$

con  $g_s$ ,  $g$  y  $g'$  constantes de acoplamiento,  $\lambda_a$  y  $\tau_a$  los generadores de  $SU(3)_C$  y  $SU(2)_L$  en la representación correspondiente al campo  $\psi$  y donde  $Y$  es la hipercarga de  $\psi$ , dada por [63]

$$Y = Q - I_3 \quad (3.8)$$

con  $Q$  la carga eléctrica de la partícula e  $I_3$  la tercera componente de isospín.

### 3.3.1. El Mecanismo de Higgs

Este mecanismo explica cómo las partículas que median las interacciones electrodébiles, como los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ , adquieren masa, mientras que el fotón permanece sin masa. El Mecanismo de Higgs introduce un campo escalar complejo  $\Phi$ , que es un doblete bajo el grupo  $SU(2)_L$  y cuya interacción con los campos de gauge genera masas para estos. El lagrangiano de la teoría que incorpora el campo de Higgs está dado por [1, 2, 15]

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (3.9)$$

con  $D_\mu$  dada en este caso por

$$D_\mu := \partial_\mu - ig W_\mu^a \tau^a - iY g' B_\mu, \quad (3.10)$$

con los parámetros definidos anteriormente. Mientras que el potencial de Higgs tiene la forma

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (3.11)$$

donde  $\lambda > 0$ . Observar que si  $\mu^2 > 0$ , el lagrangiano describiría un campo escalar real con masa  $\mu$ . Para que ocurra la ruptura espontánea de simetría, se requiere que  $\mu^2 < 0$ , lo que da lugar a un valor de expectación en el vacío (VEV, por sus siglas en inglés) no trivial para el campo de Higgs

$$\langle \Phi \rangle = \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (3.12)$$

con

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \sim 246 \text{ GeV}. \quad (3.13)$$

La ruptura espontánea de simetría [15, 61, 62] ocurre cuando el estado de menor energía (el vacío) del campo de Higgs no respeta la simetría del lagrangiano del sector electrodébil del Modelo Estándar. Aunque el lagrangiano de Higgs de la ecuación (3.9) es invariante bajo la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , el valor de expectación en el vacío (VEV) del campo de Higgs rompe esta simetría de manera espontánea, reduciéndola a  $U(1)_{\text{EM}}$ , la simetría del electromagnetismo. Como consecuencia, tres de los bosones de gauge  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$  adquieren masa a través del mecanismo de Higgs, mientras que el fotón permanece sin masa, preservando la invariancia de  $U(1)_{\text{EM}}$ .

Para visualizar esto, expandimos el campo de Higgs en torno a su VEV [1, 2]

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

## 22 CAPÍTULO 3. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

donde  $h$  es una pequeña perturbación alrededor del VEV y corresponde al bosón de Higgs.

Los bosones de gauge adquieren masa a través de su interacción con el campo de Higgs. Al introducir la derivada covariante  $D_\mu$ , definida en (3.10), la parte cinética del lagrangiano de Higgs genera términos de masa para los bosones de gauge tras la ruptura espontánea de simetría. En particular, se generan los siguientes términos de masa para los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ :

$$M_W = \frac{1}{2}gv \sim 80 \text{ GeV}, \quad M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v \sim 91 \text{ GeV}. \quad (3.15)$$

El campo de gauge asociado al fotón,  $A_\mu$ , permanece sin masa debido a que la simetría electromagnética  $U(1)_{\text{em}}$  no se rompe por el valor de expectación del campo de Higgs.

De esta manera, los bosones mediadores  $W^\pm$  y  $Z^0$ , adquieren masas proporcionales al valor de expectación en el vacío  $v$ , mientras que el fotón permanece sin masa. Esto es consistente con las observaciones experimentales.

El campo escalar después de la ruptura de simetría,  $h(x)$ , corresponde al bosón de Higgs. La masa del bosón de Higgs está relacionada con los parámetros del potencial a través de la relación

$$m_h = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda}v \sim 125 \text{ GeV}. \quad (3.16)$$

La búsqueda del bosón de Higgs fue una de las principales metas de los experimentos en física de altas energías durante décadas. Finalmente, en 2012 el experimento ATLAS y CMS [59, 60] en el LHC anunciaron el descubrimiento de una nueva partícula con una masa de aproximadamente 125 GeV, consistente con las predicciones para el bosón de Higgs del Modelo Estándar. Este descubrimiento completó experimentalmente el SM y proporcionó evidencia directa del mecanismo que genera las masas de las partículas elementales.

Finalmente, el término  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  describe las interacciones de Yukawa entre los campos fermiónicos y escalares. El lagrangiano de Yukawa en el SM es responsable de generar las masas de los fermiones tras la ruptura espontánea de simetría electrodébil. Este lagrangiano se expresa como

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = Y_{ij}^e \bar{L}_i H e_{Rj} + Y_{ij}^u \bar{Q}_i \tilde{H} u_{Rj} + Y_{ij}^d \bar{Q}_i H d_{Rj} + \text{h.c.}, \quad (3.17)$$

donde  $i, j$  son los índices que indican la generación,  $Y^a$  son matrices de acoplamiento de Yukawa de dimensión  $3 \times 3$ , y  $\tilde{H} = i\sigma^2 H^*$  es el doblete de Higgs conjugado cargado, con hipercarga  $Y = -\frac{1}{2}$ . Aquí,  $\sigma^2$  se refiere a la segunda matriz de Pauli. Los campos en la ecuación (3.17) están escritos en la base de sabor (o base de interacción), no como eigenestados de masa.

Después de la ruptura espontánea de simetría, el campo de Higgs adquiere un valor de expectación en el vacío, las matrices de masa fermiónicas se obtienen como

$$M_{ij}^a = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^a, \quad a = \{e, u, d\}. \quad (3.18)$$

Estas matrices de masa pueden diagonalizarse mediante transformaciones unitarias

$$V^{a\dagger} M^a U^a = M_D^a := \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad (3.19)$$

donde  $m_i$  son las masas físicas de los fermiones. En el caso de los leptones cargados, dado que en el SM los neutrinos son considerados sin masa, es posible redefinir los campos de leptones cargados para hacer su matriz de masas diagonal. Sin embargo, para los quarks, tanto los de tipo  $u$  como  $d$  se acoplan al Higgs, lo que impide una diagonalización simultánea en la base de sabor.

Redefiniendo los campos de quarks en términos de las matrices unitarias que diagonalizan las matrices de masa

$$u_L = V^u u'_L, \quad d_L = V^d d'_L, \quad u_R = U^u u'_R, \quad d_R = U^d d'_R, \quad (3.20)$$

donde el apóstrofe indica eigenestados de masa, la corriente cargada débil de quarks se expresa como

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \bar{u}'_{iL} \gamma^\mu V_{ij}^{\text{CKM}} d'_{jL} W_\mu^+ + \text{h.c.}, \quad (3.21)$$

donde  $V^{\text{CKM}} = V^{u\dagger} V^d$  es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), que describe la mezcla entre los sabores de quarks en las interacciones débiles.

### 3.4. Las Matrices CKM y PMNS en la Física de Partículas

Una matriz de mezcla describe cómo las partículas de un tipo pueden mezclarse o transformarse entre sí. La matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [16–18] describe cómo se mezclan los quarks y la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [19–22] se encarga de la mezcla de neutrinos.

La matriz CKM se introdujo para explicar cómo los quarks se mezclan y cómo ocurre la violación de la simetría CP (carga-paridad) en este sector. En el SM, los quarks se organizan en tres generaciones, cada una formada por un quark tipo up (up, charm y top) y un quark tipo down (down, strange y bottom). La matriz CKM describe cómo los quarks cambian de sabor cuando interactúan a través de la interacción débil. Por otro lado, la matriz PMNS se puede ver como una extensión de la matriz CKM pero para los neutrinos, es decir, se utiliza para describir la mezcla de los estados de sabor de los neutrinos.

#### 3.4.1. La matriz CKM

La matriz CKM es una matriz unitaria que describe la probabilidad de transición entre diferentes tipos de quarks a través de las interacciones débiles. Matemáticamente, se representa como

$$V_{CKM} \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

donde  $V_{ij}$  representa la magnitud de la transición entre los quarks de tipo  $i$  y  $j$ .

Nicola Cabibbo [16] introdujo la idea de que las interacciones débiles podían mezclarse entre quarks, postulando el ángulo de Cabibbo ( $\theta_C$ ), que mide la mezcla entre los quarks de la primera y la segunda generación. Este ángulo se relaciona con los elementos de la matriz CKM como sigue

$$\cos(\theta_C) = V_{ud}, \quad \sin(\theta_C) = V_{us}. \quad (3.23)$$

Kobayashi y Maskawa [17] extendieron el trabajo de Cabibbo para incluir las tres generaciones de quarks, introduciendo tres ángulos de mezcla y una fase compleja que permite la violación CP.

Por lo tanto, la matriz CKM es una matriz  $3 \times 3$  que puede ser parametrizada por cuatro parámetros: tres ángulos de mezcla y una fase que introduce la violación de CP. De los muchos posibles valores que puede

## 24 CAPÍTULO 3. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

tomar, una opción estándar se ha convertido [18]

$$\begin{aligned}
 V_{CKM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ , y  $\delta$  es la fase responsable de todos los fenómenos que violan CP en los procesos de cambio de sabor en el SM. Los ángulos  $\theta_{ij}$  se pueden elegir para que se encuentren en el primer cuadrante, con lo que  $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$ .

### 3.4.2. La matriz PMNS

El SM incluye tres generaciones de neutrinos, conocidos como  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ , en función de los leptones cargados con los que interactúan. Estos tres estados de la interacción débil constituyen una base completa y ortonormal para los neutrinos dentro del SM. De manera similar, se puede construir un estado cuántico a partir de tres estados de neutrinos con masas definidas  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  y  $\nu_3$ , los cuales diagonalizan el hamiltoniano del neutrino libre. Las observaciones de oscilaciones de neutrinos [24, 25] han demostrado experimentalmente que, al igual que en los quarks, estos dos conjuntos de estados no son iguales, sino que están rotados entre sí. Cada estado de sabor puede expresarse como una superposición de estados de masa, y viceversa. La matriz PMNS [19–22] cuyas componentes son,  $U_{\alpha,i}$  representan la amplitud de masa del estado  $i$  en un sabor  $\alpha$ , parametrizando así la transformación unitaria entre las dos bases. Matemáticamente, se expresa de la siguiente forma [64],

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

El vector de la izquierda de la ecuación (3.25) hace referencia a la representación a un neutrino en la base de sabor, mientras que a la derecha, se tiene a la matriz PMNS multiplicada por un vector, el cual es el mismo neutrino pero en la base de estados de masa. Un neutrino de sabor específico es una combinación de estados de neutrinos con diferentes masas. Si se pudiera medir directamente la masa del neutrino, se encontraría una masa  $m_i$  con una probabilidad  $|U_{\alpha i}|^2$  [64]. La matriz PMNS para antineutrinos es la misma que la matriz para neutrinos bajo la simetría CPT.

Debido a las dificultades para detectar neutrinos, es mucho más complicado determinar los coeficientes individuales en comparación con la matriz equivalente para los quarks, es decir, la matriz CKM. A pesar de esto, al igual que la matriz CKM, la matriz PMNS puede parametrizarse en términos de tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  y una fase de violación de la simetría CP ( $\delta_{CP}$ ) [64]

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3/2} \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

donde  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $\alpha_i$  son fases CP de Majorana. De esta forma tendríamos que la diferencia en el cuadrado de las masas se da mediante

$$\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2, \tag{3.27a}$$

Parámetro	Ordenamiento normal (NO)	Ordenamiento invertido (IO)
$\delta m^2 / 10^{-5} eV^2$	$7.49^{+0.19}_{-0.19}$	$7.49^{+0.19}_{-0.19}$
$ \Delta m^2  / 10^{-3} eV^2$	$2.534^{+0.025}_{-0.023}$	$-2.510^{+0.024}_{-0.025}$
$\text{sen}^2(\theta_{12})$	$0.307^{+0.012}_{-0.011}$	$0.308^{+0.012}_{-0.011}$
$\text{sen}^2(\theta_{13})$	$0.02195^{+0.00054}_{-0.00065}$	$0.02224^{+0.00058}_{-0.00066}$
$\text{sen}^2(\theta_{23})$	$0.561^{+0.012}_{-0.015}$	$0.562^{+0.012}_{-0.015}$
$\delta_{CP}/^\circ$	$177^{+19}_{-20}$	$285^{+25}_{-28}$

Tabla 3.2: Valores de mejor ajuste y rangos de  $1\sigma$  en experimentos con ordenamiento normal y ordenamiento invertido [26].

$$\Delta m^2 = m_3^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2}, \quad (3.27b)$$

con  $m_i$  el eigenvalor de masa de  $\nu_i$ .

Diversos experimentos [26, 65–67] han permitido determinar con mayor precisión los ángulos de mezcla y las diferencias de masas al cuadrado entre los distintos tipos de neutrinos. Los valores experimentales con ordenamiento normal (NO) y ordenamiento invertido (IO) se muestran en la tabla 3.2. Con

- **Ordenamiento normal (NO):**  $m_1 < m_2 < m_3$ ,
- **Ordenamiento invertido (IO):**  $m_3 < m_1 < m_2$ ,

en donde  $|\Delta m|^2 > 0$  representa el ordenamiento normal, y  $|\Delta m|^2 < 0$  el ordenamiento invertido.

En los experimentos de oscilación de neutrinos únicamente se pueden medir las diferencias de masas al cuadrado, definidas como en las ecuaciones (3.27). Dado que existen tres eigenestados de masa, solo se pueden definir dos diferencias independientes de masas al cuadrado. De esta forma, los experimentos de oscilación de neutrinos dependen de seis parámetros fundamentales: tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$ , la fase CP  $\delta_{CP}$  y las dos diferencias de masas al cuadrado  $\delta m^2$  y  $|\Delta m|^2$ .

Vale la pena mencionar que el valor de  $\delta$  no se mide directamente, sino que se deduce mediante análisis globales de datos experimentales. Actualmente,  $\theta_{23}$  y  $\delta_{CP}$  son los parámetros de oscilación menos determinados con exactitud, además, el signo de  $|\Delta m|^2$  aún representa un desafío. Se espera que esta situación mejore con los resultados de próximos experimentos como NOvA e Hyper-Kamiokande.

### 3.5. El problema del sabor y sus posibles soluciones

El SM es una de las teorías más exitosas de la física moderna, ya que describe con gran precisión las interacciones fundamentales entre las partículas elementales, como los quarks y los leptones. Ha demostrado una capacidad sobresaliente para predecir y explicar una gran cantidad de resultados experimentales relacionados con la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil y la electromagnética. A pesar de su rotundo éxito, el SM sigue presentando limitaciones importantes. En particular, no ofrece una explicación fundamental para los valores de las masas de los fermiones ni para los parámetros de mezcla observados en las matrices CKM y PMNS. A este conjunto de incógnitas se le conoce como el “problema del sabor” o el “rompecabezas del sabor” [68–70]. Este problema refleja la incapacidad del SM para justificar por qué los fermiones presentan un espectro jerárquico de masas, así como por qué los ángulos de mezcla entre generaciones de partículas toman

## 26 CAPÍTULO 3. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

los valores específicos que se observan experimentalmente. Además, el modelo no contiene un mecanismo que explique fenómenos como las oscilaciones de neutrinos observados experimentalmente [24–26], las cuales implican que los neutrinos tienen masas no nulas y mezclas importantes en el sector leptónico.

Estas cuestiones motivan la búsqueda de extensiones del SM que puedan explicar estas situaciones. De las líneas más activas de investigación para resolver estos problemas es la introducción de simetrías discretas no abelianas para explicar los patrones de mezcla observados. En particular, muchas investigaciones han trabajado extensamente en modelos basados en el grupo  $A_4$  o  $S_4$  [28, 34, 71, 72].

También, se han analizado el papel de las simetrías discretas no sólo en la mezcla de neutrinos sino también en la violación CP leptónica [73–75]. En estos trabajos se explora cómo ciertas simetrías pueden llevar a predicciones concretas para las fases CP, que podrán ser testeadas en experimentos de oscilación de neutrinos.

Otro enfoque ha sido el desarrollar modelos unificados supersimétricos, mediante la reducción de acoplamientos [76–78]. En estos trabajos se demuestra que estos modelos pueden predecir masas fermiónicas, como la del quark top, de manera consistente con las observaciones experimentales. Estas teorías también establecen relaciones entre los parámetros de Yukawa y los acoplamientos gauge, reduciendo el número de parámetros libres y aportando una posible solución al problema de sabor.

Otra estrategia ha sido el uso de mecanismos seesaw combinados con simetrías discretas. En estos modelos, las masas de los neutrinos se generan a partir de escalas altas de masas de neutrinos pesados de mano derecha. Al imponer simetrías de ciertos grupos no abelianos como  $S_3$  o  $A_5$ , se pueden obtener patrones predictivos para las masas y mezclas. Por ejemplo, se ha demostrado que modelos seesaw de tipo I con simetría  $S_4$  pueden acomodar los datos actuales de oscilaciones de neutrinos, incluyendo la violación CP [79].

Una propuesta innovadora es el uso de simetrías modulares en la construcción de modelos de sabor. A diferencia de las simetrías discretas tradicionales, en estos modelos los acoplamientos de Yukawa no son parámetros arbitrarios, sino funciones modulares que transforman bajo el grupo modular  $\Gamma$ . Esto reduce significativamente el número de parámetros libres y genera relaciones predictivas entre masas y ángulos de mezcla. Esta idea se ha desarrollado en diversos artículos [29, 32, 34–37]. En donde se propone usar ciertos grupos modulares como  $\Gamma_3 \cong A_4$  para formar acoplamientos de Yukawa como funciones modulares de un parámetro  $\tau$ . Al fijar  $\tau$  en un valor complejo adecuado, se obtienen patrones realistas de mezcla leptónica. Posteriormente, se han desarrollado modelos con simetrías modulares más amplias, como  $\Gamma_4 \cong S_4$  o  $\Gamma_5 \cong A_5$ , entre otros, aplicándolos tanto al sector leptónico como al de quarks [38–40, 80–83]. Estas extensiones han permitido obtener buenas coincidencias con los datos experimentales actuales, incluyendo predicciones para la fase CP leptónica.

Es en esta última línea de investigación en la que nos centramos, es por ello que en el siguiente capítulo se dará una introducción de los grupos modulares, así como la relación con la física de sabor y se dará un ejemplo de un modelo basado en estas simetrías y su contraste con los datos experimentales.

# Capítulo 4

## Simetrías de sabor modulares

La búsqueda de explicaciones profundas para el problema del sabor ha llevado al desarrollo de modelos basados en simetrías discretas, entre las cuales los grupos modulares han cobrado un interés creciente. En este capítulo se introduce el grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$  y su versión proyectiva  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , así como sus subgrupos, cuyas propiedades algebraicas y transformaciones sobre el semiplano superior complejo permiten definir las denominadas formas modulares. Estas formas, al ser utilizadas como acoplamientos de Yukawa, proporcionan una buena estructura para desarrollar modelos de sabor. Se presentan ejemplos concretos de modelos construidos con grupos como  $A_4$  y  $S_3$ , los cuales surgen como cocientes de subgrupos modulares y que han mostrado compatibilidad con los datos experimentales. Este capítulo justifica el enfoque adoptado en esta tesis: estudiar subgrupos menos explorados como  $\bar{\Gamma}_0(N)$ , en particular  $\bar{\Gamma}_0(2)$ , con la expectativa de encontrar nuevas estructuras algebraicas útiles para construir modelos fenomenológicos novedosos.

### 4.1. El grupo $SL(2, \mathbb{Z})$

El grupo  $SL(2, \mathbb{Z}) \equiv \Gamma$ , también conocido como el grupo modular homogéneo, se define como el grupo bajo la multiplicación de matrices de  $2 \times 2$  sobre  $\mathbb{Z}$  que tienen determinante 1 [42],

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.1)$$

Este es un grupo discreto infinito y puede ser generado por dos generadores  $S$  y  $T$  que obedecen las relaciones

$$S^4 = (ST)^3 = \mathbb{1}, \quad S^2T = TS^2. \quad (4.2)$$

Donde a  $S$  y  $T$  se les puede representar mediante las matrices [32]

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Notar que en esta representación  $S^2 = -I_2$ , en donde  $I_2$  es la matriz identidad dos-dimensional. Con todo lo anterior, nos damos cuenta que se puede escribir al grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  con la presentación

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^4, (ST)^3, S^2TS^{-2}T^{-1} \rangle \quad (4.4)$$

**Principal Subgrupo de congruencia  $\Gamma(\mathbf{N})$** 

El principal subgrupo de congruencia  $\Gamma(N)$  de nivel  $N$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$  consta de todas las matrices de la forma [32]

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (4.5)$$

Observemos que  $\Gamma = \Gamma(1)$ , además, se cumple que los grupos  $\Gamma(N)$  ( $N \geq 2$ ) son subgrupos normales infinitos de  $\Gamma$ .

**Subgrupo de congruencia  $\Gamma_0(\mathbf{N})$** 

El subgrupo de congruencia  $\Gamma_0(N)$  de nivel  $N$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$  consta de todas las matrices de la forma [84]

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.6)$$

el cual también se puede representar de la siguiente manera

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (4.7)$$

**Subgrupo de congruencia  $\Gamma_1(\mathbf{N})$** 

El subgrupo de  $SL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\Gamma_1(N)$ , de nivel  $N$  consta de todas las matrices con la forma [84]

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.8)$$

el cual también se puede definir de la siguiente manera

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (4.9)$$

**Subgrupo de congruencia  $\Gamma^0(\mathbf{N})$** 

También se pueden definir grupos mediante un superíndice. A pesar de esto, no son tan diferentes a los grupos con subíndice, por ejemplo, el subgrupo  $\Gamma^0(\mathbf{N})$  se define como el grupo de matrices  $2 \times 2$  que tienen la forma [85]

$$\Gamma^0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.10)$$

o escrito de otra forma

$$\Gamma^0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (4.11)$$

**Subgrupo de congruencia  $\Gamma^1(\mathbf{N})$** 

De forma similar, el subgrupo  $\Gamma^1(\mathbf{N})$  se define como [85]

$$\Gamma^1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.12)$$

$$\Gamma^1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}. \quad (4.13)$$

## 4.2. El grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$

El grupo  $PSL(2, \mathbb{Z})$  [32, 42] se puede definir como el cociente de  $SL(2, \mathbb{Z})$  por su subgrupo central  $\{\pm I\}$ , en donde  $I$  es la matriz identidad:

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}. \quad (4.14)$$

En otras palabras, en  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , tomamos a las matrices  $A$  y  $-A$  como iguales.

El grupo modular  $\bar{\Gamma}$  actúa sobre la mitad superior del semiplano complejo  $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$  mediante la transformación lineal

$$\gamma(\tau) \equiv \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma. \quad (4.15)$$

El grupo  $PSL(2, \mathbb{Z})$  tiene una presentación sencilla en términos de dos generadores y relaciones. Estos generadores,  $S$  y  $T$  son los mismos que para  $SL(2, \mathbb{Z})$  y se pueden representar por las matrices:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

las cuales corresponden a las transformaciones [32]

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad T : \tau \rightarrow \tau + 1. \quad (4.17)$$

Y donde se satisfacen las siguientes relaciones

$$S^2 = \mathbf{1}, \quad (ST)^3 = \mathbf{1}. \quad (4.18)$$

De esta forma,  $PSL(2, \mathbb{Z})$  es isomorfo al grupo generado por  $S$  y  $T$  con las relaciones anteriores:

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle. \quad (4.19)$$

A su vez se pueden definir los grupos  $\bar{\Gamma}(N)$ ,  $\bar{\Gamma}_0(N)$  y  $\bar{\Gamma}_1(N)$  como subgrupos de congruencia del grupo  $PSL(2, \mathbb{Z}) \equiv \bar{\Gamma}$ ,

$$\bar{\Gamma}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.20)$$

$$\bar{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (4.21)$$

$$\bar{\Gamma}_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.22)$$

$$\bar{\Gamma}^0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (4.23)$$

$$\bar{\Gamma}^1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (4.24)$$

### 4.3. Formas modulares/Formas modulares vector valuadas

Las formas modulares son importantes en física debido a que se han usado para modelar distintos fenómenos en distintas áreas como teoría de cuerdas, teoría de números aplicada a la física, teorías de gran unificación o en el estudio de partículas fundamentales y sus sabores que es el área que nos interesa por el momento [32, 37–41].

**Definición 4.1.** Sea  $k$  un entero y sea  $H$  el semiplano complejo positivo. Una **forma modular** de peso  $k$ , para el grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , es una función  $f : H \rightarrow \mathbb{C}$  que cumple con [33, 86, 87]

1.  $f$  es una función holomorfa sobre  $H$ .
2. Para cualquier  $\tau \in H$  y cualquier matriz  $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$  se tiene que

$$f(\gamma(\tau)) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau). \quad (4.25)$$

3.  $f$  es holomorfa si  $\text{Im}(\tau) \rightarrow +\infty$ .

Las formas modulares son funciones con varias características interesantes:

- **Simetría bajo Transformaciones Modulares:** La propiedad más destacada de las formas modulares es su invariancia bajo el grupo modular. Es decir, si  $\tau$  pertenece al plano complejo, al aplicar una transformación modular la función resultante es proporcional a la original [87].
- **Expansión en Series de Fourier:** Una forma modular,  $f(\tau)$ , se puede expresar como una serie de Fourier [87]

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}. \quad (4.26)$$

Aquí, los coeficientes  $a_n$  suelen contener información aritmética importante sobre la forma modular.

- **Crecimiento Controlado:** Cuando la parte imaginaria de  $\tau$  tiende a infinito, las formas modulares siguen un patrón de crecimiento predecible [33].
- **Relación con las Series Theta:** En muchos casos, las formas modulares están estrechamente relacionadas con las series theta, funciones que involucran sumas de exponentes cuadráticos y que aparecen en distintas áreas de las matemáticas y la física [33].

Las formas modulares tradicionales son funciones escalares que obedecen una transformación específica bajo la acción del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Sin embargo, este concepto puede extenderse a funciones vectoriales, lo que da lugar a las llamadas formas modulares vectoriales (VVMF, por sus siglas en inglés). En este caso, cada evaluación de una VVMF [32] produce un vector, cuyas componentes siguen reglas de transformación bien definidas. Este enfoque resulta especialmente útil en el estudio de simetrías dentro de las teorías de sabor, donde es necesario representar estructuras más complejas que las descritas por funciones escalares.

Las VVMF están caracterizadas por su comportamiento bajo la acción de elementos del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . En particular, cada una de sus componentes se transforma según reglas específicas cuando se aplica una transformación modular.

Matemáticamente, si una VVMF tiene peso  $k$  y está asociada a una representación  $\rho$  del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ , entonces satisface la relación [32]

$$Y(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k \rho(\gamma) Y(\tau), \quad (4.27)$$

## 4.4. RELACIÓN DE LOS GRUPOS MODULARES CON LA FÍSICA DE SABOR

donde  $\gamma$  es un elemento de  $SL(2, \mathbb{Z})$  con coeficientes enteros que cumplen ciertas condiciones algebraicas. Esta ecuación describe cómo cambia cada componente de la VVMF cuando se somete a la acción del grupo, proporcionando así una herramienta útil para modelar simetrías en distintos contextos matemáticos y físicos.

### 4.4. Relación de los grupos modulares con la física de sabor

La relación entre los grupos  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$  y la física de sabor se basa en la simetría modular y su conexión con la descripción de las propiedades de mezcla y las masas del Modelo Estándar. Este enfoque está motivado por los intentos de entender el patrón observado en las masas y ángulos de mezcla de los quarks y los neutrinos, algo que no está explicado directamente por el SM.

Los grupos  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$  tienen subgrupos cocientes importantes conocidos como subgrupos de congruencia  $\Gamma(N)$  y  $\bar{\Gamma}(N)$ , definidos en las secciones 4.1 y 4.2. Los cocientes  $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma(N)$  o  $PSL(2, \mathbb{Z})/\bar{\Gamma}(N)$  tienen una estructura isomorfa a grupos que son utilizados regularmente en modelos de sabor. Esto se puede ver con mayor claridad en la tabla 4.1. Estos grupos son importantes debido a que pueden actuar como simetrías discretas en el sector de los leptones y quarks. En particular, los subgrupos normales de  $SL(2, \mathbb{Z})$  permiten desarrollar modelos [29, 37–41] en los que las masas y mezclas de los neutrinos emergen como una consecuencia natural de la simetría modular como se puede apreciar en [41]. Esta relación se establece de la siguiente manera: los leptones, como los neutrinos y electrones, se asignan a representaciones irreducibles de los grupos modulares, por ejemplo, como tripletes o singletes en estructuras como  $A_4$  o  $S_3$ . Los parámetros de acoplamiento, incluyendo las masas y las mezclas, dependen de formas modulares con un peso determinado, las cuales se transforman de acuerdo con las representaciones del grupo modular.

Un aspecto relevante de este enfoque es que las matrices de mezcla, como la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [22], pueden derivarse a partir de los acoplamientos definidos por las formas modulares. Esto establece relaciones entre los ángulos de mezcla y las fases CP, las cuales pueden ser observadas experimentalmente. Además, los subgrupos normales imponen restricciones sobre la estructura de las matrices de masa de los neutrinos y leptones cargados, lo que reduce significativamente el número de parámetros libres del modelo. Como resultado, se facilita la conexión entre las predicciones teóricas y los valores experimentales.

En el modelo basado en el grupo  $\Gamma(3) \simeq A_4$  [29, 32, 37, 41] que se analizará en la Sección 4.6, los neutrinos se asignan a tripletes dentro del grupo modular  $A_4$ . La matriz de masa se construye a partir de formas modulares que se transforman como tripletes bajo  $A_4$ , con el objetivo de reproducir los valores experimentales de los ángulos de mezcla.

En el modelo basado en  $\Gamma(2) \simeq S_3$  [29, 32, 37, 41], de la sección 4.7 los leptones se dividen en singletes y dobletes bajo este grupo, y la simetría modular dicta las relaciones entre las entradas de la matriz de masa.

Aunque los modelos basados en  $A_4$  y  $S_3$  tienen limitaciones para reproducir algunos parámetros experimentales, destacan cómo las simetrías de los grupos cocientes de  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$  pueden proporcionar una base para los patrones observados en la física de sabor.

Una pregunta natural es si se puede hacer un procedimiento similar al de  $SL(2, \mathbb{Z})$  y  $PSL(2, \mathbb{Z})$  para los subgrupos de congruencia  $\Gamma_0(N)$ ,  $\Gamma_1(N)$ ,  $\bar{\Gamma}_0(N)$  o  $\bar{\Gamma}_1(N)$ . Es decir, obtener sus subgrupos normales y con ello obtener los grupos cocientes generados por estos para obtener grupos modulares de los cuales se puedan construir nuevos modelos fenomenológicos. El objetivo de este trabajo es avanzar en este sentido, centrándonos en el grupo de congruencia  $\bar{\Gamma}_0(2)$ .

Subgrupo normal ( $\mathcal{N}$ )			Grupo modular finito $\frac{\Gamma}{\mathcal{N}}$	
Índice	Nombre	Relatores adicionales	Estructura de grupo	GAP Id
6	$\Gamma(2)$	$T^2$	$S_3$	[6, 1]
12	-	$S^2T^2$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong 2D_3$	[12, 1]
	$\pm\Gamma(3)$	$S^2, T^3$	$A_4$	[12, 3]
18	-	$ST^{-2}ST^2$	$\mathbb{Z}_3 \times S_3$	[18, 3]
24	$\Gamma(3)$	$T^3$	$T'$	[24, 3]
	-	$S^2T^3$		
	$\pm\Gamma(4)$	$S^2, T^4$	$S_4$	[24, 12]
	-	$S^2, (ST^{-1}ST)^2$	$A_4 \times \mathbb{Z}_2$	[24, 13]
36	-	$S^3T^{-2}ST^2$	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4) \times \mathbb{Z}_3$	[36, 6]
42	-	$T^6, (ST^{-1}S)^2TST^{-1}ST^2$	$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_6$	[42, 1]
	-	$T^6, ST^{-1}ST(ST^{-1}S)^2T^2$		
48	-	$S^2T^4$	$2O$	[48, 28]
	-	$T^8, ST^4ST^{-4}$	$GL(2, 3)$	[48, 29]
	$\Gamma(4)$	$T^4$	$A_4 \times \mathbb{Z}_4 \cong S'_4$	[48, 30]
	-	$(ST^{-1}ST)^2$	$A_4 \times \mathbb{Z}_4$	[48, 31]
	-	$S^2(ST^{-1}ST)^2$	$T' \times \mathbb{Z}_2$	[48, 32]
	-	$T^{12}, ST^3ST^{-3}$	$((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3$	[48, 33]
54	-	$T^6, (ST^{-1}ST)^3$	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_6$	[54, 5]
60	$\pm\Gamma(5)$	$S^2, T^5$	$A_5$	[60, 5]

Tabla 4.1: Los subgrupos normales de  $SL(2, \mathbb{Z})$  con índice igual o menor que 60 y el correspondiente grupo modular finito. Se define a  $\pm\Gamma(N) = \{\pm\gamma, \gamma \in \Gamma(N)\}$ . El grupo cociente  $\Gamma/\mathcal{N}$  se produce cuando se imponen los relatores adicionales junto con  $S^4 = (ST)^3 = 1$  y  $S^2T = TS^2$  [41].

## 4.5. Forma de los modelos con grupos modulares

En esta sección, estudiaremos la forma de algunos modelos basados en simetrías de sabor para lograr dar predicciones acerca de las masas de los neutrinos y los ángulos de mezcla de la matriz PMNS. En los modelos que estudiaremos se considera que la matriz de masas de los leptones cargados es diagonal. En estos modelos, la matriz de masas de los neutrinos  $m_\nu$  se escribe como [32, 37]

$$m_\nu = U^* \text{diag}(m_1, m_2, m_3) U^\dagger, \quad (4.28)$$

donde  $U$  es la matriz PMNS. Además, es posible descomponer  $m_\nu$  en términos de tres contribuciones, las cuales están asociadas a los eigenvalores de la masa  $m_i$  y sus eigenvectores correspondientes  $\vec{U}_i$  de la matriz  $U$ , según las expresiones

$$m_\nu^{(1)} = m_1 (\vec{U}_1^* \cdot \vec{U}_1^\dagger), \quad (4.29a)$$

$$m_\nu^{(2)} = m_2 e^{-i\alpha_2} (\vec{U}_2^* \cdot \vec{U}_2^\dagger), \quad (4.29b)$$

$$m_\nu^{(3)} = m_3 e^{-i\alpha_3} (\vec{U}_3^* \cdot \vec{U}_3^\dagger). \quad (4.29c)$$

con lo que  $m_\nu$  se puede expresar como

$$m_\nu = m_\nu^{(1)} + e^{-i\alpha_2} m_\nu^{(2)} + e^{-i\alpha_3} m_\nu^{(3)}. \quad (4.30)$$

En esta formulación, las matrices  $m_\nu^{(i)}$  son simétricas y sus magnitudes están determinadas principalmente por las masas  $m_i$ , sin depender explícitamente de las fases de Majorana  $\alpha_i$  [32, 37].

Para una jerarquía de masas normal (NO), caracterizada por  $m_1 \simeq m_2 \ll m_3$ , la matriz  $m_\nu$  puede aproximarse por la contribución dominante,  $m_\nu^{(3)}$ , que se expresa como

$$m_\nu \simeq m_\nu^{(3)} = m_3 \begin{pmatrix} s_{13}^2 e^{2i\delta_{\text{CP}}} & c_{13} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13} s_{13} c_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}} \\ c_{13} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}^2 s_{23}^2 & c_{13}^2 c_{23} s_{23} \\ c_{13} s_{13} c_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}^2 c_{23} s_{23} & c_{13}^2 c_{23}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Los elementos de esta matriz satisfacen las siguientes relaciones

$$(m_\nu)_{11}(m_\nu)_{22} = (m_\nu)_{12}^2, \quad (m_\nu)_{11}(m_\nu)_{33} = (m_\nu)_{13}^2, \quad (m_\nu)_{22}(m_\nu)_{33} = (m_\nu)_{23}^2, \quad (4.32)$$

$$\frac{(m_\nu)_{22}}{(m_\nu)_{33}} = t_{23}^2, \quad \frac{(m_\nu)_{11}}{(m_\nu)_{22} + (m_\nu)_{33}} = t_{13}^2 e^{2i\delta_{\text{CP}}}, \quad (4.33)$$

donde  $t_{ij} = \tan \theta_{ij}$ .

En el caso del ordenamiento invertido (IO) con  $m_3 \ll m_1 \simeq m_2$ , la matriz de masas  $m_\nu$  se puede aproximar como

$$m_\nu \simeq m_\nu^{(1)} + e^{-i\alpha_2} m_\nu^{(2)}. \quad (4.34)$$

Dado que  $\alpha_2$  no ha sido determinada experimentalmente, este caso incluye un parámetro adicional en comparación con el ordenamiento normal.

## 4.6. Modelo basado en $A_4$

En esta sección, se hablará acerca del modelo construido en [37], el cual es un modelo con simetría de sabor  $\Gamma(3) \simeq A_4$  [29, 32, 37, 41]. A este grupo lo podemos definir mediante dos generadores y las siguientes relaciones

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad (ST)^3 = 1. \quad (4.35)$$

El grupo  $A_4$  tiene asociados tres singletes  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}'$ ,  $\mathbf{1}''$  y un triplete  $\mathbf{3}$ .

La Tabla 4.2 muestra las representaciones bajo  $A_4$  y los pesos modulares  $k$  de los supercampos leptónicos ( $L_i$ ,  $e_{Ri}^c$ ) y de los campos de Higgs ( $H_u$ ,  $H_d$ ). El supercampo  $\phi$  es un campo de sabor que también es un triplete bajo  $A_4$ . Los pesos modulares se eligen como  $k_\phi = 3$ ,  $k_{H_u} = k_{H_d} = 0$ ,  $k_L = 1$ , y  $k_{ei} = -4$ . Esta elección asegura que las masas de los leptones cargados no dependan del parámetro modular  $\tau$ , y que el campo  $\phi$  no aparezca en el operador de Weinberg.

El superpotencial responsable de las masas de los leptones cargados se expresa mediante [32, 37]

$$W_e = \alpha_1 e_{R1}^c H_d (L\phi)_1 + \alpha_2 e_{R2}^c H_d (L\phi)_{1'} + \alpha_3 e_{R3}^c H_d (L\phi)_{1''}, \quad (4.36)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son constantes. Bajo la suposición de que el triplete adquiere un valor esperado de vacío (VEV) de la forma  $\langle \phi \rangle = (u, 0, 0)$  y que la componente neutral de  $H_d$  tiene un VEV  $v_d$ , se obtiene una

	$SU(2)_L \times U(1)_Y$	$A_4$	$k$
$e_{R1}^c$	$(\mathbf{1}, 1)$	$\mathbf{1}$	$k_{e1}$
$e_{R2}^c$	$(\mathbf{1}, 1)$	$\mathbf{1}''$	$k_{e2}$
$e_{R3}^c$	$(\mathbf{1}, 1)$	$\mathbf{1}'$	$k_{e3}$
$L$	$(\mathbf{2}, -1/2)$	$\mathbf{3}$	$k_L$
$H_u$	$(\mathbf{2}, 1/2)$	$\mathbf{1}$	$k_{H_u}$
$H_d$	$(\mathbf{2}, -1/2)$	$\mathbf{1}$	$k_{H_d}$
$\phi$	$(\mathbf{1}, 0)$	$\mathbf{3}$	$k_\phi$

Tabla 4.2: Representaciones de  $A_4$  y pesos modulares  $k$  de los supercamos de leptones  $e_{Ri}^c$ ,  $L$  y los supercamos de Higgs  $H_{u,d}$ .

matriz de masas diagonal para los leptones cargados

$$m_e = uv_d \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Aquí los valores experimentales de las masas de los leptones ( $m_e$ ,  $m_\mu$ ,  $m_\tau$ ) se pueden obtener escogiendo ciertos valores para los coeficientes  $\alpha_i$ .

La masa de los neutrinos está relacionada con el operador de Weinberg, el cual se incluye en el superpotencial [37]

$$W_\nu = \frac{1}{\Lambda} (H_u H_u L L Y(\tau))_1, \quad (4.38)$$

donde  $Y(\tau) = (Y_1, Y_2, Y_3)$  es un triplete de peso 2 bajo  $A_4$ . Estas formas modulares están definidas según [37]

$$Y_1(\tau) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - 27 \frac{\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \quad (4.39)$$

$$Y_2(\tau) = -\frac{i}{\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \quad (4.40)$$

$$Y_3(\tau) = -\frac{i}{\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \quad (4.41)$$

donde  $\omega = e^{2\pi i/3}$ , ver Apéndice A.

La matriz de masas de los neutrinos que resulta de este operador es

$$m_\nu^{\text{modelo}} = \frac{v_u^2 u}{\Lambda} \begin{pmatrix} 2Y_1 & -Y_3 & -Y_2 \\ -Y_3 & 2Y_2 & -Y_1 \\ -Y_2 & -Y_1 & 2Y_3 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

donde  $v_u$  representa el VEV de la componente neutral de  $H_u$ . Dado que la matriz de masas de los leptones es diagonal, los ángulos de mezcla y las fases CP son determinados exclusivamente por la matriz de masas de los neutrinos.

	$SU(2)_L \times U(1)_Y$	$S_3$	$k$
$e_{Ra}^c$	( <b>1</b> , 1)	<b>1</b>	-3
$e_{Rb}^c$	( <b>1</b> , 1)	<b>1</b>	-4
$e_{Rc}^c$	( <b>1</b> , 1)	<b>1'</b>	-4
$L^{(1)}$	( <b>2</b> , -1/2)	<b>1</b>	1
$L^{(2)}$	( <b>2</b> , -1/2)	<b>2</b>	1
$H_u$	( <b>2</b> , 1/2)	<b>1</b>	0
$H_d$	( <b>2</b> , -1/2)	<b>1</b>	0
$\phi^{(1)}$	( <b>1</b> , 0)	<b>1</b>	2
$\phi^{(2)}$	( <b>1</b> , 0)	<b>2</b>	3

Tabla 4.3: Representaciones de  $S_3$  y pesos modulares  $k$  de los supercampos de leptones  $e_{Ri}^c$ ,  $L^{(i)}$  y los supercampos de Higgs  $H_{u,d}$ .

Para el caso del ordenamiento normal, la matriz de masa de los neutrinos debe cumplir las restricciones descritas en las ecuaciones (4.29). Utilizando las relaciones de la segunda línea de (4.29), se obtiene que [37]

$$t_{13}^2 e^{2i\delta_{CP}} = \frac{Y_1}{Y_2 + Y_3} = \left[ \frac{4}{\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}\right) \frac{Y_2}{Y_3}} \right]^{-1} = \frac{1}{4t_{23}^2(1 + t_{23}^2)}. \quad (4.43)$$

Esto es una predicción teórica de este modelo. Al sustituir los valores experimentales dentro de un intervalo de  $\pm 3\sigma$ , los lados izquierdo y derecho de la ecuación anterior se convierten en

$$|t_{13}^2 e^{2i\delta_{CP}}| \sim 0.02, \quad \frac{1}{4t_{23}^2(1 + t_{23}^2)} \sim 0.2. \quad (4.44)$$

Sin embargo, esta predicción teórica no es consistente con los datos experimentales. Por lo tanto, este modelo no reproduce los resultados experimentales para el caso del ordenamiento normal.

## 4.7. Modelo basado en $S_3$

En esta sección, se presentan modelos basados en la simetría de sabor  $\Gamma(2) \simeq S_3$  [29,32,37,41], inspirados en el modelo  $A_4$ , pero con diferencias notables en la asignación de las generaciones de leptones.

Los campos  $L^{(1)}$  y  $L^{(2)}$  representan un singlete y un doblete bajo  $S_3$ , respectivamente, mientras que los campos  $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$  complementan la estructura de las masas. Las configuraciones específicas se detallan en la Tabla 4.3. Para distinguir entre  $e_{Ra}$  y  $e_{Rb}$ , se asignan diferentes pesos modulares. Esto puede lograrse mediante una simetría adicional, como  $\mathbb{Z}_2$ . Los valores de  $k$  se seleccionan para garantizar que la matriz de masas de los leptones cargados sea diagonal, similar al modelo  $A_4$ . Así, el superpotencial en el sector de leptones cargados se escribe como [37]

$$W_e = \alpha_a e_{Ra}^c H_d (L^{(1)} \phi^{(1)})_1 + \alpha_b e_{Rb}^c H_d (L^{(2)} \phi^{(2)})_1 - \alpha_c e_{Rc}^c H_d (L^{(2)} \phi^{(2)})_{1'}, \quad (4.45)$$

Modelo	$L^{(1)}$	$L^{(2)}$	$m_\nu^{\text{modelo}}$
1	$L_3$	$(L_1, L_2)$	$\begin{pmatrix} dY_2 + cY & dY_1 & aY_1 \\ dY_1 & -dY_2 + cY & aY_2 \\ aY_1 & aY_2 & bY \end{pmatrix}$
2	$L_2$	$(L_1, L_3)$	$\begin{pmatrix} dY_2 + cY & aY_1 & dY_1 \\ aY_1 & bY & aY_2 \\ dY_1 & aY_2 & -dY_2 + cY \end{pmatrix}$
3	$L_1$	$(L_2, L_3)$	$\begin{pmatrix} bY & aY_1 & aY_2 \\ aY_1 & -dY_2 + cY & dY_1 \\ aY_2 & dY_1 & dY_2 + cY \end{pmatrix}$

Tabla 4.4: Tres configuraciones de modelos  $S_3$  con asignaciones y matrices de masas de neutrinos.

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son constantes. Asumimos que los campos  $\phi^{(i)}$  adquieren valores esperados de vacío (VEV) dados por:

$$\langle \phi^{(1)} \rangle = u_1, \quad \langle \phi^{(2)} \rangle = (u_2, 0). \quad (4.46)$$

Con estos VEV, la matriz de masas de los leptones cargados se vuelve diagonal una vez que el componente neutral de  $H_d$  también adquiere un VEV. Seleccionando valores adecuados para los parámetros  $\alpha_i$ , se pueden reproducir las masas experimentales de los leptones cargados ( $m_e, m_\mu, m_\tau$ ).

El operador de Weinberg para las masas de los neutrinos en el superpotencial toma la forma [37]

$$W_{\text{ef}}^\nu = \frac{1}{\Lambda} \left[ dHH(L^{(2)}L^{(2)})_2 Y^{(2)} + aHH(L^{(1)}L^{(2)})_2 Y^{(2)} + bHH(L^{(1)}L^{(1)})_1 Y^{(1)} + cHH(L^{(2)}L^{(2)})_1 Y^{(1)} \right], \quad (4.47)$$

donde  $a, b, c, d$  son coeficientes.  $Y^{(1)}$  y  $Y^{(2)}$  son formas modulares con peso 2, correspondientes a un singlete y un doblete bajo  $S_3$ . Cabe señalar que  $(L^{(2)}L^{(2)})_{1'} = 0$  debido a su naturaleza antisimétrica.

Existen 6 posibles maneras de asignar las tres generaciones de leptones ( $L_i$ ) al singlete  $L^{(1)}$  y al doblete  $L^{(2)}$ . Sin embargo, algunas asignaciones resultan equivalentes al intercambiar componentes del doblete, lo que nos deja básicamente con 3 configuraciones diferentes. Estas configuraciones se muestran en la Tabla 4.4 junto con las respectivas matrices de masas para los neutrinos.

En el caso de ordenamiento normal, analizamos las tres configuraciones de asignación en  $S_3$ . Para el Modelo 1, la matriz de masas de los neutrinos se expresa como

$$m_\nu^{\text{modelo}} = \begin{pmatrix} C + dY_2 & dY_1 & aY_1 \\ dY_1 & C - dY_2 & aY_2 \\ aY_1 & aY_2 & B \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Dado que la matriz de masas de los leptones cargados es diagonal, la mezcla de neutrinos y las fases CP dependen únicamente de la matriz de masas de los neutrinos. Las condiciones que se deben de cumplir son

$$(C + dY_2)(C - dY_2) = (dY_1)^2, \quad B(C + dY_2) = (aY_1)^2, \quad B(C - dY_2) = (aY_2)^2, \quad (4.49)$$

$$\frac{C - dY_2}{B} = t_{23}^2, \quad \frac{C + dY_2}{B + (C - dY_2)} = t_{13}^2 e^{2i\delta_{\text{CP}}}. \quad (4.50)$$

Estas relaciones conducen a la siguiente predicción teórica para el Modelo 1 [37]:

$$t_{13}^2 e^{2i\delta_{\text{CP}}} = 3s_{23}^2. \quad (4.51)$$

Al comparar con los valores experimentales,  $t_{13}^2 = O(10^{-2})$  y  $3s_{23}^2 = O(1)$ , resulta evidente que este modelo no es consistente con las observaciones. Los análisis de los Modelos 2 y 3 conducen a predicciones similares que tampoco son compatibles con los datos experimentales.

Si bien los modelos basados en formas modulares han mostrado gran potencial para describir patrones en el sector de sabor, aún enfrentan desafíos importantes. Una de las principales limitaciones está relacionada con el número de parámetros libres involucrados en la construcción de los acoplamientos de Yukawa. Aunque las formas modulares permiten reducir significativamente el número de parámetros en comparación con enfoques tradicionales, los modelos modulares aún requieren la elección de pesos modulares, asignaciones específicas para los campos de materia, y a menudo involucran una o varias modulaciones complejas (como el parámetro modular  $\tau$ ), cuya elección no está completamente fijada por principios teóricos. Esto introduce una degeneración de modelos que pueden ajustarse a los datos pero con diferentes estructuras internas.

Una solución posible a este problema consiste en restringir la forma del superpotencial mediante condiciones de invariancia más estrictas, o bien considerar extensiones supersimétricas o teorías de cuerdas donde el parámetro modular adquiere un valor de expectación determinado por mecanismos dinámicos. Otra estrategia es reducir el grupo modular empleado, o bien imponer subgrupos de congruencia más pequeños y menos degenerados que generen formas modulares con menos libertad estructural. Este último enfoque es precisamente el que motiva el análisis de  $\bar{\Gamma}_0(2)$ , cuyo estudio podría eventualmente proporcionar estructuras más predictivas y con menos parámetros libres, manteniendo al mismo tiempo compatibilidad con los datos fenomenológicos.



# Capítulo 5

## Grupos cocientes de $\bar{\Gamma}_0(2)$

Habiendo establecido el papel de los grupos modulares y sus cocientes en la construcción de modelos de sabor, este capítulo se enfoca en una contribución original de esta tesis, el análisis del grupo  $\bar{\Gamma}_0(2)$ , un subgrupo de congruencia del grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  que ha sido poco estudiado en el contexto de la física de sabor. Como veremos, se realiza una presentación explícita del grupo  $\Gamma_0(2)$ , paso necesario para su implementación computacional, y se utilizan herramientas del programa GAP para determinar sus subgrupos normales y calcular los grupos cocientes correspondientes. Se exploran estos cocientes hasta índice 12 y 24, identificando cuáles de ellos son no abelianos y por tanto potencialmente relevantes para construir nuevas representaciones de formas modulares. Este estudio representa un primer paso hacia el uso de  $\bar{\Gamma}_0(2)$  como base para nuevos modelos fenomenológicos, y abre la puerta a futuras investigaciones centradas en calcular sus formas modulares y explorar sus implicaciones físicas.

### 5.1. Grupos cocientes de $SL(2, \mathbb{Z})$

#### 5.1.1. Instrucciones generales de GAP

En primer lugar, se buscó replicar los resultados de la tabla 4.1, la cual originalmente se encuentra en [41]. En esta tabla se tienen distintos grupos modulares a partir de los cocientes de  $SL(2, \mathbb{Z}) = \Gamma$  con sus subgrupos normales. Para replicar estos resultados, se usó el programa GAP [43] y su paquetería LINS [51], la cual proporciona un algoritmo para calcular los subgrupos normales de un grupo y sus cocientes a partir de una presentación finita. Para utilizar este algoritmo se necesita la presentación del grupo al que se quiera obtener sus subgrupos normales. Si un grupo  $G$  con generadores tiene una presentación de la forma

$$G = \langle g_1, g_2, \dots \mid R_1, R_2, \dots \rangle \quad (5.1)$$

entonces primero se define un grupo libre mediante el siguiente comando

```
f:=FreeGroup("g_1", "g_2", ...);.
```

Luego, se incorporan las relaciones que definen al grupo

```
G:=f/[R_1, R_2, ...];,
```

Aquí, las relaciones  $R_1, R_2, \dots$  se especifican reemplazando  $g_1$  por  $f_1$ ,  $g_2$  por  $f_2$ , y así sucesivamente.

Por ejemplo, si  $G$  es un grupo con dos generadores  $a, b$  y una única relación dada por

$$R_1 = a^2b, \tag{5.2}$$

entonces el grupo se expresa en GAP mediante

```
f:=FreeGroup("g_1","g_2");
G:=f/[f_1^2 f_2];.
```

Por otro lado, para calcular los subgrupos normales, se utiliza el siguiente algoritmo

```
LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(G,n);,
```

en donde  $n$  representa el índice de los subgrupos normales deseados. Los subgrupos normales se pueden listar con

```
List(LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(G,n));.
```

Se puede asignar un nombre a este conjunto de subgrupos normales, por ejemplo

```
normal:=LowIndexNormalSubs(G,n);.
```

De esta forma, se tendría que `normal[i]` representa al subgrupo normal de  $G$  con índice  $i$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

Además, para calcular un grupo cociente  $G/N$  se puede hacer uso del comando

```
FactorGroup(G,N);,
```

donde  $N$  representa un subgrupo normal. En el caso en el que se tengan varios subgrupos normales, podemos obtener el cociente de la forma

```
FactorGroup(G,normal[i]);,
```

con  $i = 1, \dots, n$ .

GAP también proporciona herramientas para describir la estructura de los grupos. Por ejemplo, el comando

```
StructureDescription(G);.
```

devuelve la estructura de  $G$  en términos de grupos conocidos. Por su parte

```
IdGroup(G);.
```

proporciona la clasificación de  $G$  según su base de datos interna.

Si se desea determinar las relaciones adicionales de los grupos cocientes, se puede utilizar el comando

```
TzPrintRelators(G);.
```

5.1.2. Aplicación para  $SL(2, \mathbb{Z})$ 

Para el caso de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , se tomó la presentación usual que mencionamos en el capítulo 4

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^4, (ST)^3, S^2TS^{-2}T^{-1} \rangle. \quad (5.3)$$

De esta manera, tendríamos que se puede definir al grupo libre y a su grupo presentado de forma finita (fp group) de la forma

```
f:=FreeGroup("S","T");
gamma1:=f/[f.1^4,(f.1*f.2)^3,f.1^2*f.2*f.1^2*f.2^-1];.
```

Con esto, se calcularon los subgrupos normales y sus cocientes hasta índice 60

```
maxorder:=60;
List(LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(gamma1,maxorder));
normal:=LowIndexNormalSubs(gamma1,maxorder);.
```

Finalmente, se diseñó un algoritmo para calcular los cocientes asociados a cada subgrupo normal, junto con su estructura y GAP Id

```
for i in [2..Size(normal)] do Print("i= ", i, ": ",
IdGroup(FactorGroup(normal[1],normal[i])), "->",
StructureDescription(FactorGroup(normal[1],normal[i])), "\n"); od;
```

Si se desean las relaciones adicionales de los subgrupos normales, se emplea

```
for i in [2..Size(normal)] do Print("i= ", i, ": ",
IdGroup(FactorGroup(normal[1],normal[i])), "->",
StructureDescription(FactorGroup(normal[1],normal[i])));
TzPrintRelators(PresentationViaCosetTable(FactorGroup(normal[1],normal[i]))); od;
```

Los resultados de este proceso se pueden observar en la tabla 5.1. La parte sombreada hace referencia a los grupos que coinciden con la tabla 4.1 de [41]. Al comparar los resultados de la tabla 5.1 con los del artículo original, se observa una replicación exitosa de los hallazgos de este. Observe que en la tabla original se omiten los subgrupos normales cuyos cocientes son grupos abelianos, específicamente aquellos con índices 2, 3, 4, 6 y 12. Creemos que esto es debido a que estos no llevan a modelos en los que se puede replicar completamente los tripletes del modelo estándar. Además, nuestros resultados revelan un relator adicional no mencionado en el trabajo de Xiang-Gan y Gui-Jun:  $S^2 = 1$ . Este relator aparece en los grupos cocientes asociados a los subgrupos normales de índices 6, 18, 42, 48 y 54. Creemos que tal vez se hizo caso omiso de este al tomarlo como un relator trivial para estos casos. Además, observemos que hay algunos relatores que no tienen la misma expresión que en la tabla 4.1, sin embargo, al ponerlos en su representación matricial se puede verificar que ambos resultados coinciden.

En cuanto a otros patrones que se tienen en la tabla 5.1, se pueden mencionar algunas cosas interesantes. En primer lugar, algunos relatores como  $S^2 = 1$  y  $T^n = 1$  se repiten en varios cocientes, indicando una relación estructural entre los subgrupos normales.

Otra cosa a mencionar es que los grupos cocientes presentan estructuras como  $S_3$ ,  $A_4$ ,  $D_n$  y  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ . Esto refleja ciertas simetrías rotacionales y traslacionales en los grupos cocientes obtenidos.

Se puede observar una tendencia a los grupos con forma  $\mathbb{Z}_n$ , estas estructuras pueden representar ciertas simetrías discretas, por lo que el uso de estos grupos como modelos podría ser prometedor incluso en un contexto diferente al de la física de sabor.

Como sabemos, el principal uso de los grupos no abelianos, como  $S_3$ ,  $A_4$  o  $A_5$ , sería modelar las matrices de mezcla debido a sus propiedades, como lo vimos en la sección 4. Los grupos  $A_4$  o  $A_5$  han sido ampliamente utilizados para parametrizar matrices de masas y mezclas de neutrinos, especialmente en el contexto de la matriz PMNS. Mientras que los grupos, como  $S_3$  o  $S_4$ , podrían modelar la jerarquía entre generaciones de quarks. Finalmente, los grupos cocientes más complejos se podrían utilizar para representar simetrías adicionales necesarias en extensiones del modelo estándar.

## 5.2. Presentación del grupo $\bar{\Gamma}_0(2)$

Si se quieren replicar los resultados anteriores a algún grupo modular diferente tenemos que saber la presentación de este mismo. En este caso se optó por encontrar los grupos cocientes de algún grupo de la forma  $\bar{\Gamma}_0(N)$ . Recordemos que estos grupos están definidos de la siguiente manera

$$\bar{\Gamma}_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (5.4)$$

El grupo  $\bar{\Gamma}_0(N)$  puede ser generado por los siguientes generadores [88, 89]

$$G = \{T, U, V_k, 1 \leq k \leq N-1, V_{m,j}, m \in \mathbf{M}, 1 \leq j \leq n(m)-1\}, \quad (5.5)$$

en donde

$$U = ST^N S, \quad (5.6a)$$

$$V_k = ST^k ST^{-k^*} S, \quad kk^* \equiv -1 \pmod{N}, \quad (5.6b)$$

$$V_{m,j} = ST^M ST^j ST^{-k} S \quad (m, j) \sim k. \quad (5.6c)$$

Con  $\mathbf{P}$  definido de la siguiente manera

$$\mathbf{P} = \{k \in \{1, 2, \dots, N-1\} \mid (k, N) = 1\}. \quad (5.7)$$

Y con el conjunto  $\mathbf{M}$  definido como

$$\mathbf{M} = \bigcup_{\substack{d|N \\ 1 < d < N}} M_d, \quad (5.8)$$

donde los conjuntos  $M_d$  y  $A_d$  se definen como

$$M_d = \{d \ m_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\}, \quad (5.9a)$$

$$A_d = \{m_{d,1}, m_{d,2}, \dots, m_{d,\phi(\omega)}\}, \quad (5.9b)$$

Con  $\omega = (d, \frac{N}{d})$  y  $\phi$  denota la función de Euler. Todo esto de tal forma que  $0 < m_{d,j} < \frac{N}{d}$  y  $(m_{d,j}, \frac{N}{d}) = 1$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, \phi(\omega)\}$ .

**Ejemplo 5.1.** El ejemplo más sencillo es si  $N = 2$ . Notemos que en este caso no tenemos divisores  $d$  para  $N = 2$  tales que cumplan con la condición  $1 < d < 2$ , por lo que

$$\mathbf{M} = \emptyset. \quad (5.10)$$

**Ejemplo 5.2.** Supongamos que tomamos  $N = 6$  y  $d = 2$  tendremos que  $\frac{N}{d} = 3$ ,  $\omega = (d, \frac{N}{d}) = (2, 3) = 1$  y por tanto  $\phi(\omega) = \phi(1) = 1$ , entonces

$$A_2 = \{m_{2,1}\}. \quad (5.11)$$

Como  $0 < m_{2,1} < \frac{N}{d} = 3$  y  $(m_{2,1}, \frac{N}{d} = 3) = 1$ , tomemos que

$$m_{2,1} = 2 \Rightarrow A_2 = 2, \quad (5.12)$$

con lo que tendremos

$$\begin{aligned} M_2 &= \{dm_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\} = \{2 \cdot m_{2,j} \mid m_{2,j} \in A_2\} = \{2 \cdot 2\} \\ &= \{4\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ahora, tomando  $d = 3$ , tenemos que  $\frac{N}{d} = 2$ ,  $\omega = (d, \frac{N}{d}) = (3, 2) = 1$ . Entonces  $\phi(\omega) = \phi(1) = 1$ , con lo que,

$$\begin{aligned} A_3 &= \{m_{3,1}, m_{3,2}, \dots, m_{3,\phi(\omega)}\} \\ &= \{m_{3,1}\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

como  $0 < m_{3,1} < \frac{N}{d} = 2$  y  $(m_{3,1}, \frac{N}{d} = 2) = 1$ , tomemos que

$$m_{3,1} = 1 \Rightarrow A_3 = 1. \quad (5.15)$$

Por lo que tendremos

$$\begin{aligned} M_3 &= \{3m_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\} = \{3 \cdot m_{3,j} \mid m_{3,j} \in A_3\} = \{3 \cdot m_{3,1}\} = \{3 \cdot 1\} \\ &= \{3\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \bigcup_{\substack{d|N \\ 1 < d < N}} M_d = \bigcup_{\substack{d|6 \\ 1 < d < 6}} M_d = M_2 \cup M_3 \\ &= \{3, 4\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

**Ejemplo 5.3.** Por otro lado, si  $N = 16$  y  $d = 2$ , tendremos entonces  $\frac{N}{d} = \frac{16}{2} = 8$ ,  $\omega = (d, \frac{N}{d}) = (2, 8) = 2$ ,  $\phi(\omega) = \phi(2) = 1$  y por lo tanto

$$A_2 = \{m_{d,1}, m_{d,2}, \dots, m_{d,\phi(\omega)}\} = \{m_{2,1}\}. \quad (5.18)$$

Como se tiene que cumplir que  $0 < m_{d,j} < \frac{N}{d}$  y  $(m_{d,j}, \frac{N}{d}) = 1$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, \phi(\omega)\}$  entonces para  $d = 2$  tendremos que  $0 < m_{2,1} < 8$  y  $(m_{2,1}, 8) = 1$ . Por esta razón se podría tener a  $m_{2,1} = 1$  y por tanto

$$A_2 = \{1\}, \quad (5.19)$$

con lo que

$$\begin{aligned} M_2 &= \{d \ m_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\} = \{2 \cdot m_{2,j} \mid m_{2,j} \in A_2\} = \{2 \cdot 1\} \\ &= \{2\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Esto lo podemos hacer para todos los divisores de  $N = 16$ , con lo que se puede obtener que

$$\mathbf{M} = \{2, 4, 8, 12\}. \quad (5.21)$$

Además, se define a  $n(x)$  como el entero más pequeño tal que

$$n(x)x^2 \equiv 0, \quad \text{mód } N. \quad (5.22)$$

Tenemos además una serie de relaciones con estos generadores [89]

$$R_1 = V_k V_{k^*}, \quad k \in \mathbf{P}, \quad (5.23a)$$

$$R_2 = V_k V_{m,j}, \quad k \sim (m, j), \quad (5.23b)$$

$$R_3 = V_{m,j} V_{m',j'}, \quad (m, j) \sim (m', j'), \quad (5.23c)$$

$$R_4 = V_1 U T, \quad (5.23d)$$

$$R_5 = V_{k_1} V_{k_2} V_{k_3}, \quad (k_{i+1}) = k_i^* + 1, \quad i = 1, 2, \quad (5.23e)$$

$$k_3^* + 1 = k_1,$$

$$R_6 = V_k V_{k-1}, \quad k \in \mathbf{P}, \quad k-1 \in \mathbf{M}, \quad (5.23f)$$

$$k^* + 1 = k-1, \quad n(k-1) = 1,$$

$$R_7 = V_k V_{k_1,1}, \quad k \in \mathbf{P}, \quad k_1 = k^* + 1, \quad (5.23g)$$

$$(k_1, 1) \sim k-1,$$

$$R_8 = V_k V_{k_1} V_{m,j}, \quad k \in \mathbf{P}, \quad k_1 = k^* + 1, \quad (5.23h)$$

$$k_1 \sim (m, j-1), \quad (m, j) \sim k-1,$$

$$R_9 = V_k V_{k_1} V_{k-1}, \quad k \in \mathbf{P}, \quad k_1 = k^* + 1, \quad (5.23i)$$

$$k_1 \sim (k-1, n-1), \quad n = n(k-1),$$

$$R_{10} = V_{m,1} V_{m-1}, \quad (m, 1) \sim (m-1, n-1), \quad (5.23j)$$

$$n = n(m-1), \quad n(m) > 1,$$

$$R_{11} = V_{m,1} V_{m',j'+1}, \quad (m, 1) \sim (m', j'), \quad (5.23k)$$

$$(m', j'+1) \sim m-1, \quad n(m) > 1,$$

$$R_{12} = V_k V_{m,j+1} V_{m',j'+1}, \quad k \sim (m, j), \quad (5.23l)$$

$$(m, j+1) \sim (m', j'),$$

$$(m', j'+1) \sim k-1,$$

$$R_{13} = V_k V_{m,j+1} V_{k-1}, \quad k \sim (m, j), \quad n = n(k-1), \quad (5.23m)$$

$$(m, j+1) \sim (k-1, n-1),$$

$$R_{14} = V_{m_1, j_1} V_{m_2, j_2+1} V_{m_3, j_3+1}, \quad (m_1, j_1) \sim (m_2, j_2), \quad (5.23n)$$

$$(m_2, j_2+1) \sim (m_3, j_3),$$

$$(m_3, j_3+1) \sim (m_1, j_1-1).$$

Como ya vimos, para  $N = 2$  tenemos que

$$\mathbf{P} = \{1\}, \quad \mathbf{M} = \emptyset, \quad (5.24)$$

con lo que, tendríamos que los generadores de  $\Gamma_0(2)$  son de la forma

$$G = \{T, U, V_1\}. \quad (5.25)$$

Notemos que no hay elementos de la forma  $V_{m,j}$  y en donde  $U$  y  $T$  están dados de la siguiente manera

$$U = ST^2S, \quad V_1 = STST^{-1}S, \quad (5.26)$$

donde se ha tomado a  $k^* = 1$ . Con esto, las relaciones que podríamos tomar serían  $R_1$  Y  $R_4$ . Veamos en particular que

$$R_1 = V_k V_{k^*} = V_1 V_1 = V_1^2. \quad (5.27)$$

Por otro lado, tenemos que la relación  $R_4$  quedaría de la forma

$$R_4 = V_1 UT. \quad (5.28)$$

Por lo que, la presentación de  $\bar{\Gamma}_0(2)$  se puede ver de la siguiente manera

$$\bar{\Gamma}_0(2) = \langle U, T \mid (V_1)^2, V_1 UT \rangle, \quad (5.29)$$

con

$$\begin{aligned} U &= ST^2S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, & T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ V_1 &= STST^{-1}S = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Además, según [89], se puede obtener una forma más compacta de una presentación del grupo  $\bar{\Gamma}_0(N)$  de la siguiente manera

$$\langle T, V_k, k \in \mathbf{P}, V_{m,j}, (1 - mj, N) > 1 \mid R_1, R_3, R_5, R_{14} \rangle. \quad (5.31)$$

Por ejemplo, si tenemos a  $\Gamma_0(16)$ , vemos que para  $N = 16$  podemos elegir a  $\mathbf{M}$  de la siguiente manera

$$\mathbf{M} = \{2, 4, 8, 12\}. \quad (5.32)$$

Notemos que no va a haber generadores de la forma  $V_{m,j}$  ya que,  $(1 - mj, 16) > 1$ .

Por tanto, la presentación de  $\Gamma_0(16)$  es

$$\langle T, V_5, V_9, V_{13}, V_{15} \mid R_1, R_3, R_5, R_{14} \rangle, \quad (5.33)$$

en donde las relaciones  $R_1, R_3, R_5, R_{14}$  aún quedarían pendientes por calcular.

## 5.3. Grupos cocientes de $\bar{\Gamma}_0(2)$

### 5.3.1. Grupos cocientes hasta índice 12

Para obtener los grupos cocientes de  $\bar{\Gamma}_0(2)$ , se sigue un procedimiento similar al realizado para  $SL(2, \mathbb{Z})$ . En primer lugar, definimos el grupo libre basado en la presentación dada en la sección 5.2

$$\bar{\Gamma}_0(2) = \langle U, T \mid (V_1)^2, V_1UT \rangle. \quad (5.34)$$

En este caso, el grupo libre se representaría en GAP mediante

```
g:=FreeGroup("U", "T", "V_1");
```

Y su grupo finitamente presentado se define mediante el comando

```
gamma0_2:=g/[g.3^2, (g.3*g.1*g.2)];
```

Para trabajar con subgrupos normales, fijamos inicialmente un índice máximo de 12 con

```
maxorder:=12;
```

y listamos los subgrupos normales usando

```
List(LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(gamma0_2,maxorder));
```

Además, asignamos el conjunto de subgrupos normales a una variable

```
normal:=LowIndexNormalSubs(gamma0_2,maxorder);
```

A continuación, para obtener la descripción del grupo cociente asociado a cada subgrupo normal, junto con sus relatores adicionales, utilizamos

```
for i in [2..Size(normal)] do Print("i= ", i, ": ", IdGroup(FactorGroup(normal[i],normal[i])), "->",
StructureDescription(FactorGroup(normal[i],normal[i])));
TzPrintRelators(PresentationViaCosetTable(FactorGroup(normal[i],normal[i]))); od;
```

Con este procedimiento, se obtuvieron los resultados presentados en la tabla 5.2. En esta tabla, observamos que abundan los grupos cocientes con una estructura de grupo abeliano, como es el caso de los subgrupos normales de índice 2 y todos aquellos con índice impar. Por otro lado, también aparecen grupos cocientes con estructuras similares a los grupos bien conocidos  $S_3$  y  $A_4$ .

Notar que hay dos grupos cocientes de índice 6 con una estructura similar a la de  $S_3$ , cuyos relatores presentan una simetría interesante. Por un lado, se tienen los relatores  $T^2$  y  $U^3$ , mientras que por otro, aparecen los relatores  $T^3$  y  $U^2$ . Este patrón de simetría también se observa en grupos de índices 8, 10 y 12.

Además, destacan las estructuras diedrales ( $D_8, D_{10}, D_{12}$ ), que son relevantes por su naturaleza no abeliana y su relación con simetrías espaciales. Recordemos que los grupos  $D_n$  están asociados a las simetrías de reflexión y rotación de un polígono regular de  $n$  lados. Por lo tanto, estos grupos podrían ser utilizados para construir modelos de simetrías de sabor. En particular, las representaciones irreducibles de  $D_n$  podrían ser útiles para describir acoplamientos de Yukawa en modelos de sabor donde se requiere un comportamiento no abeliano.

Notar que aparecen ciertas combinaciones de productos directos ( $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ), sin embargo no tenemos productos semi-directos como en el caso de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , al menos hasta índice 12. Asimismo, se identifican ciertos grupos abelianos de la forma  $\mathbb{Z}_n$ , similares a los que aparecen en el caso de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , que podrían tener aplicaciones en otros tipos de modelos.

### 5.3.2. Grupos cocientes no abelianos hasta índice 24

Dado que en la fenomenología de sabor los grupos con estructura no abeliana son de particular interés, se decidió extender el análisis hasta índice 24 para identificar estructuras más complejas. Aplicando el siguiente algoritmo

```
maxorder := 24;
List(LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(gamma0_2, maxorder));
normal := LowIndexNormalSubs(gamma0_2, maxorder);
for i in [2..Size(normal)] do
  Print("i= ", i, ": ", IdGroup(FactorGroup(normal[i], normal[i])), "->",
  StructureDescription(FactorGroup(normal[i], normal[i])));
  TzPrintRelators(PresentationViaCosetTable(FactorGroup(normal[i], normal[i])));
od;
```

Con esto, se obtuvieron los resultados presentados en la tabla 5.3, omitiendo aquellos grupos con estructura abeliana.

En primer lugar, se identifican nuevas relaciones, como  $(UT^{-1})^2$ , que aparecen de manera recurrente en varios grupos cocientes. Esta repetición sugiere que algunos de estos cocientes podrían estar vinculados a través de simetrías específicas, lo que abre la posibilidad de utilizarlos en la construcción de modelos relacionados con el Modelo Estándar.

Otro aspecto notable es la frecuente aparición de grupos diedrales  $D_n$ , lo que refuerza la idea de que los cocientes de  $\bar{\Gamma}_0(2)$ , los cuales están fuertemente ligados a simetrías de reflexión y rotación. Este vínculo destaca su potencial aplicación en modelos de sabor dentro de la física de partículas.

Un hallazgo interesante es la presencia del grupo  $QD_{16}$ , conocido como el grupo cuasi-diédrico de orden 16. Este grupo es una extensión del grupo diédrico  $D_8$  y se puede describir mediante la siguiente presentación

$$QD_{16} = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle. \quad (5.35)$$

En este caso,  $a$  representa una rotación en el plano, mientras que  $b$  corresponde a una reflexión. Las relaciones entre estos elementos indican que  $a$  tiene orden 8 y  $b$  tiene orden 2, y además, el grupo es no abeliano debido a la no conmutatividad de sus generadores. Este tipo de estructura algebraica podría desempeñar un papel relevante en modelos que requieren simetrías más elaboradas que las que ofrecen los grupos diedrales convencionales.

También se observa la repetición de grupos como  $S_3$ , el cual suele asociarse con la clasificación de dobletes y singletes en modelos físicos. Por otro lado, la aparición de grupos como  $S_4$  y  $A_4$  sugiere aplicaciones directas en modelos de neutrinos, particularmente en aquellos diseñados para describir jerarquías específicas de masas.

Finalmente, grupos más complejos como  $\mathbb{Z}_3 \times S_3$  o  $\mathbb{Z}_2 \times A_4$  proporcionan una base sólida para explorar simetrías extendidas en la fenomenología del sabor. A futuro, sería valioso investigar cocientes de mayor índice para identificar estructuras aún más ricas que puedan revelar nuevos patrones de simetrías relevantes para el Modelo Estándar. Además, un análisis más profundo de las representaciones de estos grupos podría contribuir a establecer conexiones con modelos que expliquen las jerarquías de mezclas y los patrones de masa de los fermiones dentro del marco de teorías más allá del Modelo Estándar.

Subgrupo normal ( $\mathcal{N}$ )	Grupo modular $\Gamma/\mathcal{N}$		
Índice	Relatores adicionales	Estructura de grupo	GAP Id
2	$S^2, T^2, ST$	$\mathbb{Z}_2$	[2, 1]
3	$S, T^3$	$\mathbb{Z}_3$	[3, 1]
4	$ST$	$\mathbb{Z}_4$	[4, 1]
6	$S^2, T^2$	$S_3$	[6, 1]
	$S^2, T^{-2}ST^{-1}$	$\mathbb{Z}_6$	[6, 2]
12	$S^2T^2$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$	[12, 1]
	$ST^3$	$\mathbb{Z}_{12}$	[12, 2]
	$S^2, T^3$	$A_4$	[12, 3]
18	$S^2, ST^2ST^{-2}$	$\mathbb{Z}_3 \times S_3$	[18, 3]
24	$T^3$	$SL(2, 3)$	[24, 3]
	$S^2T^{-3}$		
	$S^2, T^4$	$S_4$	[24, 12]
	$S^2, T^6$	$\mathbb{Z}_2 \times A_4$	[24, 13]
36	$ST^2S^{-1}T^{-2}$	$\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$	[36, 6]
42	$S^2, T^6, STST^{-1}ST^2ST^{-2}$	$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_6$	[42, 1]
	$S^2, T^6, T^{-1}ST^{-3}ST^2ST^{-1}$		
48	$T^{-1}S^2T^{-3}$	$\mathbb{Z}_2.S_4 \cong SL(2, 3).\mathbb{Z}_2$	[48, 28]
	$S^2, T^8, (T^{-1}ST^{-3})^2$	$GL(2, 3)$	[48, 29]
	$T^4$	$A_4 \times \mathbb{Z}_4$	[48, 30]
	$T^{-1}S^2T^{-5}, (STS^{-1}T^{-1})^2$	$\mathbb{Z}_4 \times A_4$	[48, 31]
	$T^6, STS^{-1}T^{-1}S^{-1}TS^{-1}T^{-1}$	$\mathbb{Z}_2 \times SL(2, 3)$	[48, 32]
	$S^2, ST^3ST^{-3}$	$((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3$	[48, 33]
54	$S^2, T^6, (T^{-1}ST^{-2})^3$	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_6$	[54, 5]
60	$S^2, T^5$	$A_5$	[60, 5]

Tabla 5.1: Los subgrupos normales de  $SL(2, \mathbb{Z})$  con índice igual o menor que 60 y el correspondiente cociente. La parte sombreada hace referencia a los grupos que coinciden con la tabla en [41]. Observese que algunos relatores no tienen la misma expresión que en la tabla original, sin embargo, al poner a estos en su representación matricial ambos resultados coinciden.

Subgrupo normal ( $\mathcal{N}$ )	Grupo modular $\bar{\Gamma}_0(2)/\mathcal{N}$		
Índice	Relatores adicionales	Estructura de grupo	GAP Id
2	$U, T^2, TV_1$	$\mathbb{Z}_2$	[2, 1]
	$T, U^2, UV_1$		
	$V_1, U^2, T^2, UT$		
3	$V_1, UT, U^3$	$\mathbb{Z}_3$	[3, 1]
4	$UT^{-1}, U^2V_1$	$\mathbb{Z}_4$	[4, 1]
	$V_1, UT, U^4$		
	$U^2, T^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	[4, 2]
5	$V_1, UT, U^5$	$\mathbb{Z}_5$	[5, 1]
6	$T^2, U^3$	$S_3$	[6, 1]
	$U^2, T^3$		
	$U^3, UT^{-2}$	$\mathbb{Z}_6$	[6, 2]
	$U^2T^{-1}$		
	$V_1, UT, U^6$		
7	$V_1, UT, U^7$	$\mathbb{Z}_7$	[7, 1]
8	$V_1, UT, U^8$	$\mathbb{Z}_8$	[8, 1]
	$UV_1T, U^3T^{-1}$		
	$UV_1T, U^4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	[8, 2]
	$T^2, U^4$	$D_8$	[8, 3]
$U^2, T^4$			
9	$V_1, UT, U^9$	$\mathbb{Z}_9$	[9, 1]
10	$T^2, U^5$	$D_{10}$	[10, 1]
	$U^2, T^5$		
	$UV_1T, U^5$	$\mathbb{Z}_{10}$	[10, 2]
	$UV_1T, U^4T^{-1}$		
	$V_1, UT, U^{10}$		
11	$V_1, UT, U^{11}$	$\mathbb{Z}_{11}$	[11, 1]
12	$V_1, UT, U^{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	[12, 2]
	$UV_1T, U^5T^{-1}$		
	$U^3, T^3$	$A_4$	[12, 3]
	$T^2, U^6$	$D_{12}$	[12, 4]
	$U^2, T^6$		
	$UV_1T, U^6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	[12, 5]

Tabla 5.2: Todos los subgrupos normales de  $\bar{\Gamma}_0(2)$  con índice menor que 12 y el correspondiente grupo modular finito. Los grupos sombreados son los grupos con una estructura no abeliana.

Subgrupo normal ( $\mathcal{N}$ )	Grupo modular $\bar{\Gamma}_0(2)/\mathcal{N}$		
Índice	Relatores adicionales	Estructura de grupo	GAP Id
6	$T^2, U^3$	$S_3$	[6, 1]
	$U^2, T^3$		
8	$T^2, U^4$	$D_8$	[8, 3]
	$U^2, T^4$		
10	$T^2, U^5$	$D_{10}$	[10, 1]
	$U^2, T^5$		
12	$U^3, T^3$	$A_4$	[12, 3]
	$T^2, U^6$	$D_{12}$	[12, 4]
	$U^2, T^6$		
14	$T^2, U^7$	$D_{14}$	[14, 1]
	$U^2, T^7$		
16	$U^4, (UT^{-1})^2, T^4$	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$	[16, 3]
	$U^2 T^{-2}$	$\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	[16, 6]
	$T^2, U^8$	$D_{16}$	[16, 7]
	$U^2, T^8$		
	$(UT^{-1})^2, T^4, U^3 V_1 T$	$QD_{16}$	[16, 8]
	$U^4, (UT^{-1})^2, TU^{-1} T^{-1} V_1 T$		
18	$T^2, U^9$	$D_{18}$	[18, 1]
	$U^2, T^9$		
	$U^3, UT^{-1} V_1 T^2$	$\mathbb{Z}_3 \times S_3$	[18, 3]
	$T^3, U^2 V_1 U^{-1} T$		
20	$U^4, T^4, UT^{-1} U V_1 T$	$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$	[20, 3]
	$U^4, T^4, U^{-2} T^{-1} V_1 T$		
	$U^2, T^{10}$	$D_{20}$	[20, 4]
	$T^2, U^{10}$		
22	$T^2, U^{11}$	$D_{22}$	[22, 1]
	$U^2, T^{11}$		
24	$(UT^{-1})^2, T^4, U^5 V_1 T$	$\mathbb{Z}_4 \times S_3$	[24, 5]
	$U^4, (UT^{-1})^2, TU^{-1} T^{-3} V_1 T$		
	$T^2, U^{12}$	$D_{24}$	[24, 6]
	$U^2, T^{12}$		
	$(UT^{-1})^2, T^4, U^6$	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$	[24, 8]
	$(UT^{-1})^2, U^4, T^6$		
	$U^2 V_1 U^{-1} T, UT^{-1} V_1 T^2, U^4 T^{-2}$	$(\mathbb{Z}_3 \times D_8)$	[24, 10]
	$U^2 V_1 U^{-1} T, UT^{-1} V_1 T^2, U^6$		
	$U^3, T^4$	$S_4$	[24, 12]
	$T^3, U^4$		
	$U^2 V_1 T^2, U^6$	$\mathbb{Z}_2 \times A_4$	[24, 13]
$T^3, U^6, (U^2 T^{-1})^2$			
$U^3, (UT^{-1})^2 V_1 T$			

Tabla 5.3: Los subgrupos normales de  $\bar{\Gamma}_0(2)$  con índice menor que 24 y el correspondiente grupo cociente cuya estructura es no abeliana.

# Capítulo 6

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo, hemos visto que el estudio de los grupos modulares es de gran relevancia, ya que estos permiten construir modelos que profundizan nuestra comprensión de las simetrías de sabor presentes en el SM de la física de partículas. Estas ideas se conectan directamente con investigaciones previas, como el trabajo pionero de Feruglio [32], quien planteó que los acoplamientos de Yukawa pueden describirse mediante formas modulares.

En este trabajo, logramos replicar con éxito algunos de los resultados obtenidos por Xiang-Gan Liu y Gui-Jun Ding [41], quienes estudiaron los grupos modulares finitos descritos como cocientes de la forma  $SL(2, \mathbb{Z})/N$ . Algo a mencionar es que en este trabajo se encontraron algunos relatores adicionales a la tabla original de Liu y Ding. Este esfuerzo no solo valida dichos resultados, sino que también amplía su alcance al explorar el caso del grupo  $\bar{\Gamma}_0(2)$ .

Como se detalló en el capítulo 5, se obtuvo una presentación explícita del grupo  $\bar{\Gamma}_0(2)$ . Esto es un paso fundamental para obtener los subgrupos normales  $\bar{\Gamma}_0(2)$  y sus respectivos cocientes según nuestro algoritmo. A partir de esto, se identificaron los subgrupos normales y los correspondientes grupos cocientes hasta índice 24, cuyos resultados se presentan en la tabla 5.3. Estos grupos cocientes proporcionan una base sólida para explorar nuevas simetrías que podrían integrarse en modelos físicos más generales, especialmente en la fenomenología de sabor.

De manera destacada, los grupos diedrales  $D_n$ , como  $D_8$ ,  $D_{10}$  y  $D_{12}$ , aparecen recurrentemente en el estudio de simetrías de sabor. Estos grupos, asociados a las simetrías de reflexión y rotación de polígonos regulares, ofrecen una estructura algebraica rica y no abeliana que resulta especialmente útil para modelar la jerarquía de masas y los patrones de mezcla en extensiones del Modelo Estándar.

Una de las razones por las que los grupos diedrales son interesantes en este contexto es que no aparecen como cocientes del grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , lo que los sitúa en una vía alternativa para construir modelos de sabor basados en simetrías discretas. Además, sus representaciones permiten acomodar de forma natural a los fermiones en dobletes y tripletes, lo que facilita la imposición de restricciones geométricas sobre la matriz de masas mediante relaciones entre los acoplamientos de Yukawa.

Por otro lado, la estructura de los grupos diedrales admite generalizaciones que pueden abrir nuevas posibilidades en la fenomenología del sabor. Un ejemplo notable es el grupo cuasi-diédrico  $QD_{16}$ , que puede entenderse como una extensión de  $D_8$ . Su estructura algebraica más rica permite introducir mecanismos novedosos para explicar la jerarquía de masas y transiciones de sabor poco convencionales.

Explorar la implementación de  $D_n$  y sus extensiones en modelos fenomenológicos no solo puede ayudar

a entender mejor la estructura del espectro de masas de los fermiones, sino que también puede proporcionar nuevas herramientas para abordar problemas abiertos en la física del sabor.

Asimismo, observamos la presencia de grupos como  $S_3$ ,  $A_4$  y  $S_4$ , que han sido utilizados ampliamente en modelos de sabor para describir patrones de mezclas y jerarquías en las matrices de masa de quarks y neutrinos. Grupos más complejos como  $\mathbb{Z}_3 \times S_3$  y  $\mathbb{Z}_2 \times A_4$  ofrecen una base prometedora para explorar simetrías extendidas en modelos más allá del SM. En particular, sería interesante investigar si alguno de estos pueden jugar el papel de simetrías tipo CP.

Finalmente, este trabajo establece un marco para el análisis de simetrías modulares y su conexión con la fenomenología de sabor. Sin embargo, queda mucho por explorar. Futuras investigaciones podrían enfocarse en extender el análisis a índices más altos, así como en estudiar las formas modulares asociadas a estos grupos y sus representaciones bajo los grupos encontrados y, con estos, sus posibles aplicaciones en modelos físicos. Sin embargo, como se dijo en el capítulo 4, a pesar del éxito conceptual de los modelos modulares para abordar el problema del sabor, aún se enfrenta la dificultad de controlar completamente el número de parámetros libres en dichos modelos. Esto limita su poder predictivo y deja abierta la posibilidad de que diferentes combinaciones de parámetros reproduzcan los mismos datos experimentales, debido a esto, sería interesante el estudio de nuevas técnicas para reducir este número de parámetros y con esto tener un mayor poder predictivo.

## Apéndice A

# Formas modulares de $\Gamma/\mathcal{N} \simeq A_4$

En este anexo, se seguirán los procedimientos expresados en [32, 37] para encontrar las formas modulares de peso 2 para  $\Gamma/\mathcal{N} \simeq A_4$ . En primer lugar, la forma modular  $f_i(\tau)$  de peso  $k_i$  se deben de transformar mediante

$$f_i(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^{k_i} f_i(\tau), \quad (\text{A.1})$$

entonces, se puede encontrar que

$$\frac{d}{d\tau} \log(f(\tau)) \rightarrow (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \log f(\tau) + kc(c\tau + d). \quad (\text{A.2})$$

El término inhomogéneo se puede remover al combinar diferentes  $f_i(\tau)$  con pesos  $k_i$

$$\frac{d}{d\tau} \sum_i \log(f_i(\tau)) \rightarrow (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \sum_i \log(f_i(\tau)) + \left( \sum_i k_i \right) c(c\tau + d) \quad (\text{A.3})$$

De esta forma,  $\frac{d}{d\tau} \sum_i f_i(\tau)$  es una forma modular de peso 2 siempre que la suma de los pesos desaparezca, es decir,

$$\sum_i k_i = 0. \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado, al considerar la función eta de Dedekind  $\eta(\tau)$ , definida sobre el plano complejo superior

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q \equiv e^{i2\pi\tau}, \quad (\text{A.5})$$

la cual satisface con las relaciones

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau). \quad (\text{A.6})$$

En particular, bajo  $S$  tendríamos que se tienen las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \eta(3\tau) &\rightarrow \sqrt{\frac{-i\tau}{3}} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \\ \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) &\rightarrow \sqrt{-3i\tau} \eta(\tau), \\ \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) &\rightarrow e^{-i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \\ \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) &\rightarrow e^{i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right), \end{aligned} \tag{A.7}$$

mientras que para  $T$  tenemos las transformaciones

$$\begin{aligned} \eta(3\tau) &\rightarrow e^{i\pi/4} \eta(3\tau), \\ \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) &\rightarrow \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right), \\ \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) &\rightarrow \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \\ \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) &\rightarrow e^{i\pi/12} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \end{aligned} \tag{A.8}$$

Se puede construir las formas modulares de peso 2 de acuerdo a

$$Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau) = \frac{d}{d\tau} \left( \alpha \log \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) + \beta \log \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) + \gamma \log \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) + \delta \log \eta(3\tau) \right), \tag{A.9}$$

donde  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ . Estas funciones se transformarían bajo  $S$  y  $T$  de la forma

$$\begin{aligned} S : Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau) &\rightarrow \tau^2 Y(\delta, \gamma, \beta, \alpha | \tau), \\ T : Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau) &\rightarrow Y(\gamma, \alpha, \beta, \delta | \tau). \end{aligned} \tag{A.10}$$

Sabemos que para el grupo  $\Gamma/\mathcal{N} \simeq A_4$  se satisfacen las relaciones

$$(\rho(S))^2 = I, \quad (\rho(S)\rho(T))^3 = I, \quad (\rho(T))^3 = I, \tag{A.11}$$

por lo que, buscamos tres formas modulares independientes  $Y_i(\tau)$  que se transformen en la representación tri-dimensional de  $A_4$

$$Y(-1/\tau) = \tau^2 \rho(S)Y(\tau), \quad Y(\tau+1) = \rho(T)Y(\tau), \tag{A.12}$$

cuyas representaciones matriciales en este caso son

$$\rho(S) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

donde  $\omega = e^{2\pi i/3}$ .

Al usar estas matrices y tomando en cuenta  $Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau)$ , buscamos un triplete en  $A_4$  el cual satisfaga las relaciones

$$\begin{pmatrix} Y_1(-1/\tau) \\ Y_2(-1/\tau) \\ Y_3(-1/\tau) \end{pmatrix} = \tau^2 \rho(S) \begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \\ Y_3(\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14a})$$

$$\begin{pmatrix} Y_1(\tau+1) \\ Y_2(\tau+1) \\ Y_3(\tau+1) \end{pmatrix} = \tau \rho(T) \begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \\ Y_3(\tau) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14b})$$

Cuyas soluciones bajo  $T$  requieren que

$$Y_1(\tau) = c_1 Y(1, 1, 1, -3 | \tau), \quad Y_2(\tau) = c_2 Y(1, \omega^2, \omega, 0 | \tau), \quad Y_3(\tau) = c_3 Y(1, \omega, \omega^2, 0 | \tau), \quad (\text{A.15})$$

y en donde la transformación bajo  $S$  fija los coeficientes  $c_i$  a un factor común  $c$

$$c_1 = 3c, \quad c_2 = -6c, \quad c_3 = -6c, \quad (\text{A.16})$$

por lo que

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= 3c Y(1, 1, 1, -3 | \tau), \\ Y_2(\tau) &= -6c Y(1, \omega^2, \omega, 0 | \tau), \\ Y_3(\tau) &= -6c Y(1, \omega, \omega^2, 0 | \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Por conveniencia se toma  $c = i/2\pi$  y se tiene explícitamente por tanto que

$$Y_1(\tau) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - 27 \frac{\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \quad (\text{A.18})$$

$$Y_2(\tau) = -\frac{i}{\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \quad (\text{A.19})$$

$$Y_3(\tau) = -\frac{i}{\pi} \left( \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right). \quad (\text{A.20})$$



# Bibliografía

- [1] P. Langacker, *The standard model and beyond*, 2010.
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [3] T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1984.
- [4] B. R. Martin and G. Shaw, *Particle physics*, 2008.
- [5] P. Ramond, *Group theory: A physicist's survey*, 2010.
- [6] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford University Press, 2014.
- [7] W. Greiner, Lect. Notes Phys. **231** (1985), 95–226.
- [8] E. T. Garcia Alvarez and F. H. Gaioli, Found. Phys. **28** (1998), 1529–1538, [hep-th/9807132].
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264–1266.
- [10] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961), 579–588.
- [11] A. Salam, Conf. Proc. C **680519** (1968), 367–377.
- [12] M. Gell-Mann, Acta Phys. Austriaca Suppl. **9** (1972), 733–761.
- [13] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47** (1973), 365–368.
- [14] T. Hagiwara and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D **11** (1975), 2223.
- [15] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964), 132–133.
- [16] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 531–533.
- [17] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 652–657.
- [18] A. Ceccucci, Z. Ligeti, and Y. Sakai, (2008).
- [19] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1957), 247.
- [20] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53** (1967), 1717–1725.
- [21] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28** (1962), 870–880.

- [22] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 1802.
- [23] H. Arason, D. J. Castano, B. Keszthelyi, S. Mikaelian, E. J. Piard, P. Ramond, and B. D. Wright, *Phys. Rev. D* **46** (1992), 3945–3965.
- [24] Super-Kamiokande, D. Kielczewska, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **81** (2000), 133–142.
- [25] N. Schmitz, *The Discovery of neutrino masses*, in *10th International Workshop on Multiparticle Production: Correlations and Fluctuations in QCD (CF2002)*, 11 2002, pp. 5–20.
- [26] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler, J. a. P. Pinheiro, and T. Schwetz, *JHEP* **12** (2024), 216, [2410.05380].
- [27] J. Zupan, *CERN Yellow Rep. School Proc.* **6** (2019), 181–212, [1903.05062].
- [28] G. Altarelli and F. Feruglio, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010), 2701–2729, [1002.0211].
- [29] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada, and M. Tanimoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **183** (2010), 1–163, [1003.3552].
- [30] F. Feruglio and A. Romanino, *Rev. Mod. Phys.* **93** (2021), no. 1, 015007, [1912.06028].
- [31] A. Santamaria, *Phys. Lett. B* **305** (1993), 90–97, [hep-ph/9302301].
- [32] F. Feruglio, *Are neutrino masses modular forms?*, 227–266, 2019, pp. 227–266.
- [33] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, and K. Ranestad, *The 1-2-3 of modular forms*, 2008.
- [34] J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Rodriguez-Jauregui, *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003), 795–807, [hep-ph/0302196], [Erratum: *Prog.Theor.Phys.* 114, 287–287 (2005)].
- [35] O. Felix, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Peinado, *Rev. Mex. Fis. Suppl* **52N4** (2006), 67–73, [hep-ph/0610061].
- [36] R. Gonzalez Felipe, H. Serodio, and J. P. Silva, *Phys. Rev. D* **88** (2013), no. 1, 015015, [1304.3468].
- [37] T. Kobayashi, K. Tanaka, and T. H. Tatsuishi, *Phys. Rev. D* **98** (2018), no. 1, 016004, [1803.10391].
- [38] T. Kobayashi, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto, and T. H. Tatsuishi, *JHEP* **02** (2020), 097, [1907.09141].
- [39] M. Abbas, *Phys. Rev. D* **103** (2021), no. 5, 056016, [2002.01929].
- [40] Y. Almunin, M.-C. Chen, V. Knapp-Pérez, S. Ramos-Sánchez, M. Ratz, and S. Shukla, *JHEP* **05** (2021), 078, [2102.11286].
- [41] X.-G. Liu and G.-J. Ding, *JHEP* **03** (2022), 123, [2112.14761].
- [42] K. Conrad, *Sl 2 (z)*, (2009).
- [43] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0*, 2024.
- [44] D. Dummit and R. Foote, *Abstract algebra*, Wiley, 2003.
- [45] H. Georgi, *Lie Algebras In Particle Physics : from Isospin To Unified Theories*, Taylor & Francis, Boca Raton, 2000.

- [46] E. Schenkman, *Group theory*, University series in higher mathematics, Van Nostrand, 1965.
- [47] I. Herstein and F. Coba, *Algebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de galois*, Biblioteca de Matemática Superior, Trillas, 1990.
- [48] N. Jacobson, *Basic algebra i: Second edition*, Basic Algebra, Dover Publications, 2009.
- [49] J. Humphreys, *A course in group theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, 1996.
- [50] P. wiki.org, *Dihedral group  $d_4$* , (2023), [https://proofwiki.org/wiki/Definition:Dihedral\\_Group\\_D4](https://proofwiki.org/wiki/Definition:Dihedral_Group_D4)[Accedido:(25-11-2025)].
- [51] F. Rober, *LINS, provides an algorithm for computing the normal subgroups of a finitely presented group up to some given index bound., Version 0.9*, <https://gap-packages.github.io/LINS/>, Mar 2024, GAP package.
- [52] I. V. Kortunov, S. Alighanbari, M. G. Hansen, G. S. Giri, V. I. Korobov, and S. Schiller, *Nature Phys.* **17** (2021), no. 5, 569–573, [2103.11741].
- [53] R. C. Greenwood and R. E. Chrien, *Phys. Rev. C* **21** (1980), 498–502.
- [54] G. L. Greene, E. G. Kessler, R. D. Deslattes, and H. Boerner, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 819–822.
- [55] J. Zatorski, B. Sikora, S. G. Karshenboim, S. Sturm, F. Köhler-Langes, K. Blaum, C. H. Keitel, and Z. Harman, *Phys. Rev. A* **96** (2017), no. 1, 012502, [1703.10649].
- [56] B. Sikora, H. Cakir, N. Michel, V. Debierre, N. S. Oreshkina, N. A. Belov, V. A. Yerokhin, C. H. Keitel, and Z. Harman, *Phys. Rev. D* **97** (2018), no. 11, 111301, [1801.02501].
- [57] F. Halzen and A. D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*, 1984.
- [58] E. Marín, *Revista avance y perspectiva*, (2022), <https://avanceyperspectiva.cinvestav.mx/atomos-y-atomos/>[Accedido:(30-10-2025)].
- [59] CMS, S. Chatrchyan et al., *Phys. Lett. B* **716** (2012), 30–61, [1207.7235].
- [60] ATLAS, G. Aad et al., *Phys. Lett. B* **716** (2012), 1–29, [1207.7214].
- [61] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 585–587.
- [62] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 321–323.
- [63] M. Gell-Mann, *Nuovo Cim.* **4** (1956), no. S2, 848–866.
- [64] C. Giganti, S. Lavignac, and M. Zito, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **98** (2018), 1–54, [1710.00715].
- [65] T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle, *New J. Phys.* **10** (2008), 113011, [0808.2016].
- [66] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A. M. Rotunno, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), 141801, [0806.2649].
- [67] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, and J. Salvado, *JHEP* **04** (2010), 056, [1001.4524].
- [68] S. Weinberg, *Trans. New York Acad. Sci.* **38** (1977), 185–201.

- [69] H. P. Nilles and S. Ramos-Sanchez, *Int. J. Mod. Phys. A* **39** (2024), no. 09n10, 2441003, [2308.14810].
- [70] G. Abbas, R. Adhikari, E. J. Chun, and N. Singh, *Eur. Phys. J. Plus* **140** (2025), no. 1, 73, [2308.14811].
- [71] G. Altarelli and F. Feruglio, *Nucl. Phys. B* **720** (2005), 64–88, [hep-ph/0504165].
- [72] G. Altarelli, F. Feruglio, L. Merlo, and E. Stamou, *JHEP* **08** (2012), 021, [1205.4670].
- [73] J. T. Penedo, S. T. Petcov, and A. V. Titov, *JHEP* **12** (2017), 022, [1705.00309].
- [74] S. T. Petcov, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018), no. 9, 709, [1711.10806].
- [75] T. Higaki, T. Kobayashi, K. Nasu, and H. Otsuka, *JHEP* **09** (2024), 024, [2405.18813].
- [76] K. S. Babu, T. Kobayashi, and J. Kubo, *Phys. Rev. D* **67** (2003), 075018, [hep-ph/0212350].
- [77] S. Heinemeyer, M. Mondragon, and G. Zoupanos, *Int. J. Mod. Phys. A* **29** (2014), 1430032, [1412.5766].
- [78] M. Mondragon, S. Heinemeyer, J. Kalinowski, W. Kotlarski, G. Patellis, N. Tracas, and G. Zoupanos, *PoS CORFU2022* (2023), 055.
- [79] J. C. Gómez-Izquierdo, C. Espinoza, L. E. G. Luna, and M. Mondragón, (2024), 2411.03392.
- [80] G.-J. Ding and S. F. King, *Rept. Prog. Phys.* **87** (2024), no. 8, 084201, [2311.09282].
- [81] Y. Abe, T. Higaki, J. Kawamura, and T. Kobayashi, *Phys. Lett. B* **842** (2023), 137977, [2302.11183].
- [82] T. Kobayashi and M. Tanimoto, *Int. J. Mod. Phys. A* **39** (2024), no. 09n10, 2441012, [2307.03384].
- [83] G.-J. Ding, J.-N. Lu, S. T. Petcov, and B.-Y. Qu, *JHEP* **01** (2025), 191, [2408.15988].
- [84] C. Baxa, *Stein, w.: Modular forms, a computational approach*, 2009, pp. 401–401.
- [85] A. Dooms, E. Jespers, O. Konovalov, and H. Verrill, *Congruence, congruence subgroups of  $sl(2, integers)$ , Version 1.2.7*, <https://gap-packages.github.io/congruence>, Aug 2024, GAP package.
- [86] S. Lang, *Introduction to modular forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [87] S. C. F. Rose, *arXiv: Number Theory* (2014), 423–444.
- [88] Y. Chuman, *Journal of Mathematics of Kyoto University* **13** (1973), no. 2, 381–390.
- [89] A. Lascurain Orive, *Conform. Geom. Dyn.* **6** (2002), 33–60.