



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

POLICÍAS Y LADRONES SOBRE
GRÁFICAS DE FICHAS DE
ÁRBOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
HUMBERTO LOZANO CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2025



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Lozano
Apellido materno	Chávez
Nombre(s)	Humberto
Teléfono	81 24 19 09 74
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	421119459

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Omar
Apellido paterno	Antolín
Apellido materno	Camarena

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Ana Laura
Apellido paterno	Trujillo
Apellido materno	Negrete

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ruy
Apellido paterno	Fabila
Apellido materno	Monroy

6. Datos del sinodal 4

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

7. Datos del trabajo escrito

Título	Policías y ladrones sobre gráficas de fichas de árboles
Número de páginas	95 p.
Año	2025

Agradecimientos

A mis padres, Baudelio y Eréndira, y a mi hermano Andrés, por su incondicional apoyo y constante motivación para seguir adelante ante las adversidades. Agradezco también su interés y su dedicación en mi educación, por siempre estar para mí desde el comienzo y darme alas cuando las necesité para cumplir mis sueños. También dedico este trabajo en memoria de Cokie, Sally, y a mis familiares que fallecieron antes de verme cumplir mi meta: Chato, Mary y Bau.

A Vianey, por sus invaluable ideas, su escucha activa y su infinita comprensión. Aprecio demasiado el cariño y comprensión que tanto ella como su familia me han brindado, encontrando en ellos un segundo hogar. Gracias a ella, que me ha cambiado la vida y me ha hecho crecer como persona. Gracias por permitirme compartir mi felicidad y mis logros, gracias por amarme tanto.

A mis amigos, Alex, Dani, Héctor, Paco, Mario, Roberto, Rodrigo, Sebas y Vitos; y a mis amigas, Ana Pau, Guadalupe y Mariana. Les agradezco su inagotable energía y su invaluable apoyo, tanto académico como emocional. Sin ustedes, este proceso no habría sido tan divertido y ameno; me siento afortunado de tenerlos en mi vida, no pude haber deseado mejor grupo de amistades.

A Ericka, quien, a pesar de la distancia, me acompañó en mi etapa universitaria de principio a fin, fortaleciendo nuestra amistad en el proceso. Gracias por ser mi soporte emocional.

A César, por sus enseñanzas académicas y su mentoría personal. Gracias por creer en mí y alentarme cuando me sentía perdido. No tengo palabras para expresar lo tan afortunado que soy de tenerlo como amigo y colega de trabajo. Y claro, le agradezco por haber hecho esta plantilla.

Finalmente, agradezco a mis maestros, mis maestras, y a todas las personas que han moldeado mi camino hasta este punto. Que sepan que lo que hoy soy se debe al producto de su pasión como docentes y guías.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA101423. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Prefacio

Existe esta creencia, tanto dentro como fuera del gremio, de que aquellas personas que nos dedicamos a las matemáticas no hacemos otra cosa mas que pensar en ellas. Si bien no concuerdo del todo con esta creencia (y no lo digo solo por ser un *casi matemático*), algo que no puedo negar es que, por más ridículo que parezca, trataremos de involucrar nuestra área de estudio en casi cualquier situación de nuestras vidas.

Guiados quizás por nuestra inagotable curiosidad o simplemente por la necesidad de un reto en nuestro día, es impresionante lo tan capaces que somos para plantearnos preguntas que, si alguien en algún momento se habrá cuestionado, dudo que éste encuentre divertido invertirle horas y horas solo por la satisfacción de decir *“listo, no podía quedarme con la duda”*.

En mi experiencia, la mina de oro de donde surgen estas preguntas pueden ser situaciones tan simples como una reunión de amigos para disfrutar de un juego de mesa. No es casualidad que esta actividad que disfruto tanto dispare mi creatividad con interrogantes respecto a estrategias y partidas óptimas (y, de vez en cuando, debates sobre las injusticias de la vida). En mi opinión, es aquí donde la combinatoria sale a relucir como una rama de las matemáticas tan sencilla de comprender mediante ejemplos, pero tan compleja de domar en su totalidad.

En ese espíritu, esta tesis trata precisamente de cómo un juego tradicional, como lo es policías y ladrones, puede recibir el tratamiento metódico y riguroso de las matemáticas en busca un conocimiento más profundo del mismo. Las respuestas descubiertas en este trabajo pretenden esclarecer los secretos detrás de un juego universal, de modo que, al estilo de un mago en su truco de magia, podemos retar a aquellas personas no tan versadas en el tema a partidas en las que, gracias al dios de las matemáticas, siempre ganaremos. Al final del día, si no quieres quedarte con la duda de si te están estafando o no, puede que sea pertinente que comiences a pensar como matemático.

Así pues, el texto inicialmente revisa las bases del juego y su funcionamiento a través de la teoría de gráficas, de las cuales se obtienen los resultados clásicos del área. En busca de expandir dichos resultados, introducimos el juego sobre las gráficas de fichas como una variante por equipos, de manera que podemos deducir parámetros de gráficas grandes en función de propiedades de gráficas pequeñas. De nuestro trabajo en gráficas de fichas de árboles podemos dar cotas para el número policiaco de una partida de policías y ladrones sobre esa familia de gráficas. Además, obtenemos algoritmos fáciles que nos ayudarán, a manera de exploración, a determinar con exactitud el número de policía de una gráfica de fichas de un árbol. Finalmente, agregamos, a manera exploración en una gráfica, una cota junto con una estrategia para el número policiaco de la gráfica de 2 fichas de Petersen.

Índice general

Agradecimientos	V
Prefacio	VII
1. Introducción	1
1.1. Gráficas	1
1.2. Árboles	6
1.3. Emparejamientos	8
1.4. Gráficas de fichas	11
1.5. Policías y ladrones	12
2. Policías y ladrones sobre gráficas de fichas de árboles	17
2.1. Estrellas	17
2.2. Estrellas subdivididas	32
2.3. Estrellas de grado bajo subdivididas	38
2.4. Árboles	59
3. Policías y ladrones sobre gráficas de fichas de interés	69
3.1. Petersen	69
4. Conclusión	85
Bibliografía	95

Capítulo 1

Introducción

Con el objetivo de tener todos los ingredientes necesarios para la abstracción del juego de policías y ladrones, antes de adentrarnos a las reglas que rigen una de estas partidas debemos sentar las bases que nos ayudarán a describir el funcionamiento de este. En este caso, la noción de un *tablero* se puede abstraer mediante una gráfica, dotando al juego de toda la estructura matemática que esta conlleva. Así pues, las definiciones de las siguientes tres secciones vienen de [3] y [4].

1.1. Gráficas

Dado un conjunto finito no vacío V , definimos una **gráfica** G como un par ordenado (V_G, E_G) con V_G un conjunto no vacío y E_G un subconjunto de $\binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$, donde

$$\binom{V}{k} = \{e \subseteq V : |e| = k\}.$$

Llamamos **vértices** de G a los elementos de V_G y **orden** de G a la cardinalidad de dicho conjunto. De forma similar, llamamos **aristas** de G y **tamaño** de G a los elementos y cardinalidad de E_G respectivamente. Por convención, si $e = x, y$ con $x, y \in V_G$ distintos, denotamos por xy a la arista e . Decimos que una gráfica G es **trivial** si tiene orden 1 y tamaño 0, de lo contrario, esta es **no trivial**.

En busca de facilitar el estudio de las propiedades de las gráficas, representamos estas estructuras a través de un dibujo en el plano, donde el conjunto de vértices corresponde a puntos distintos y cada arista es una curva que une los puntos correspondientes a los vértices en los que incide (ver la Figura 1.1).

Dada una arista e en E_G , decimos que un vértice u **incide** en e , y que e incide en u , si $u \in e$. Decimos que $e, f \in E_G$ distintas son **incidentes** si existe $u \in V_G$

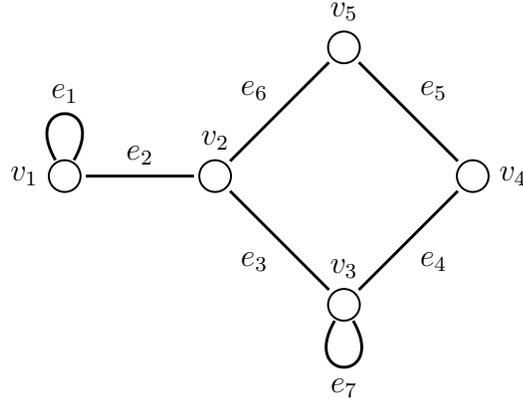


Figura 1.1: El dibujo de una gráfica G .

incidente en ambas e y f , y decimos que estas son no incidentes en caso contrario. Dos vértices distintos u y v que inciden en una misma arista son **adyacentes**, de manera que u es *vecino* de v y viceversa. En la Figura 1.1, v_1 es incidente en e_2 y e_2 es incidente en v_1 , mientras que e_1 y e_2 son aristas incidentes y v_1 y v_2 son vértices adyacentes.

Si $e \in E_G$ es tal que existe $u \in V_G$ con $e = \{u\}$, decimos que e es un **lazo** y u tiene un lazo, mientras que G es **reflexiva** si $\{u\} \in E_G$ para cada $u \in V_G$. Llamamos **vecindad** de v al conjunto $N_G(v)$ de vértices de G adyacentes a v ; sus elementos serán llamados vecinos de v . Además, definimos la vecindad **cerrada** de v , $N_G[v]$, como la unión de $N_G(v)$ y $\{v\}$. Si v no tiene lazo, denotamos por $d_G(v)$ a la cardinalidad de $N_G(v)$, de lo contrario, $d_G(v) = |N_G(v)| + 2$. Este valor recibe el nombre de **grado** de v . Asimismo, representamos por δ_G al grado mínimo sobre los vértices de G , mientras que Δ_G es el grado máximo sobre los vértices de G . De forma similar, para $S \subseteq X$, denotamos por $N_G(S)$ a la vecindad del conjunto S , definida como

$$N_G(S) = \bigcup_{x \in S} N_G(x).$$

Así, en la Figura 1.1, v_1 tiene un lazo (e_1) y su grado es 3, donde $N_G(v_1) = \{v_2\}$. Además, G no es reflexiva pues v_2 no tiene un lazo. Si $S = \{1, 2\}$, entonces $N_G(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$. Además, pasando sobre todos los vértices de G se obtiene que $\delta_G = 2$ y $\Delta_G = 4$.

Dada G una gráfica, decimos que H es una **subgráfica** de G si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$ donde para cada $e \in E_H$, $e \subseteq V_H$. Adicionalmente, decimos que H es una subgráfica **inducida** de G si para cada $e \in E_G$ tal que $e \subseteq V_H$, $e \in E_H$.

Alternativamente, si $\emptyset \neq S \subseteq V_G$, denotamos por $G[S]$ a la subgráfica inducida de G cuyo conjunto de vértices es S y cuyo conjunto de aristas tiene a todas las aristas incidentes únicamente en vértice en S . De forma similar, para $\emptyset \neq E \subseteq E_G$, denotamos por $G[E]$ a la subgráfica de G cuyo conjunto de aristas es E y su conjunto de vértices son todos aquellos vértices tales que inciden en al menos una arista de E .

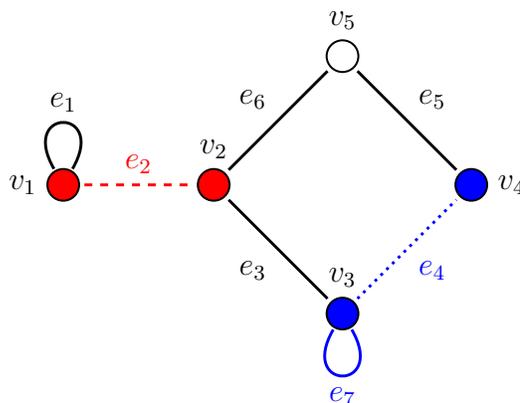


Figura 1.2: La gráfica determinada por los vértices y arista rojas, H , es una subgráfica de G . No obstante, esta no es inducida pues $G[\{v_1, v_2\}]$ también incluye el lazo e_1 . Por otro lado $H = G[\{e_2\}]$. En tanto, la gráfica inducida por los vértices y aristas en azul, H' , sí es una subgráfica inducida de G , a saber, $H' = G[\{v_3, v_4\}]$.

Un **homomorfismo** de una gráfica G en una gráfica H es una función $f: V_G \rightarrow V_H$ tal que $f(u)f(v) \in E_H$ para toda $uv \in E_G$. Si adicionalmente pedimos que f sea biyectiva y que $f(u)f(v) \in E_H$ si y solo si $uv \in E_G$, decimos que f es un **isomorfismo** de gráficas y que G y H son **isomorfas**. Escribimos $G \cong H$ para referirnos a que G y H son isomorfas. En la Figura 1.2, existe un homomorfismo de $G[\{v_3, v_4\}]$ en la gráfica $G[\{v_3\}]$, a saber, aquel que fija v_3 y que manda v_4 a v_3 . No obstante, estas gráficas no son isomorfas pues existe una única función de $\{v_3, v_4\}$ en $\{v_3\}$, la cual no es biyectiva. Por otro lado, $G[\{v_1, v_2\}] \cong G[\{v_3, v_4\}]$.

Decimos que G es **completa** si $E_G = \binom{V}{2}$. Nótese que cualesquiera dos gráficas completas de orden n son isomorfas, por lo que denotamos por K_n a la gráfica completa de orden n . Una gráfica G es **bipartita** si V_G puede partirse en dos subconjuntos ajenos X y Y tales que toda arista incide en un vértice en X y en un vértice en Y . Tal partición (X, Y) es llamada una bipartición de la gráfica y X y Y son sus partes. Denotamos a una gráfica bipartita G con una partición (X, Y) por $G[X, Y]$. Si $G[X, Y]$ es tal que ambos X y Y son distintos del vacío y todo vértice de X es adyacente a todo vértice de Y , decimos que G es una gráfica **bipartita completa**. En la Figura 1.2, $X = \{v_5\}$ y $Y = \{v_2, v_4\}$ forman una partición (X, Y) de la

gráfica $G[\{v_2, v_4, v_5\}]$, que de hecho es bipartita completa. Por otra parte, $X = \{v_2\}$ y $Y = \{v_4\}$ forman una partición (X, Y) de $G[\{v_2, v_4\}]$, pero esta no es bipartita completa.

Una **trayectoria** es una gráfica G cuyos vértices admiten un orden total tal que dos vértices son adyacentes en G si y solo si son consecutivos en el orden. Si P es una trayectoria de orden n , suponemos sin pérdida de generalidad que $V_P = \{v_1, \dots, v_n\}$, de manera que denotamos a las trayectorias a través del orden de sus vértices, de modo que $P = (v_1, \dots, v_n)$. De lo anterior es claro que, si P y P' son dos trayectorias de orden n con $n \geq 1$, entonces $P \cong P'$, donde el isomorfismo es el que manda un vértice de P en la i -ésima posición al vértice de P' en la i -ésima posición. Así pues, denotamos por P_n a la trayectoria de orden n . Similarmente, un **ciclo** consiste de una trayectoria en la que su primer y último vértice del orden son adyacentes. Por el mismo argumento, existe un único ciclo de orden n , al que denotamos C_n . La **longitud** de una trayectoria o un ciclo es el tamaño de dicha gráfica. Diremos que un ciclo o una trayectoria son pares o impares acorde a la paridad de su longitud. Por otra parte, sean G una gráfica y $u, v \in V_G$. Decimos que $W = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un **uv -camino** en G si $v_i v_{i+1} \in E_G$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Si adicionalmente $v_i \neq v_j$ cada para $i \neq j$, decimos que $P = (v_1, \dots, v_n)$ es una **uv -trayectoria** en G . Si $i \leq j$, denotamos por $v_i P v_j$ al segmento de la trayectoria P que comienza en v_i y termina en v_j . Adicionalmente, si $v_j x \in E_G$, denotamos por $v_i P v_j x$ a la subgráfica de G inducida por las aristas del segmento $v_i P v_j$ y la arista $v_j x$. Análogamente se define un ciclo en G como $C = (v_1, \dots, v_n, v_1)$, donde $v_i v_{i+1} \in E_G$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $v_n v_1 \in E_G$ y $v_i \neq v_j$ para cada $i \neq j$. Continuando con los ejemplos en la Figura 1.2, $P = (v_2, v_5, v_4)$ es una $v_2 v_4$ -trayectoria en G , y es tal que $P \cong P_3$. Por otro lado, $v_2 P v_4 v_3 v_2$ es un ciclo par de longitud 4 isomorfo a C_4 .

Pasamos ahora a demostrar el siguiente teorema básico que nos da una condición suficiente para que una gráfica contenga a un ciclo como sugráfica.

Teorema 1.1.1. *Si G es una gráfica tal que $\delta_G \geq 2$, entonces G contiene un ciclo.*

Demostración. Si G tiene un lazo en un vértice v , $C = (v, v)$ es un ciclo en G . Supóngase entonces que G no tiene lazos. Sea $P = (v_1, \dots, v_n)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Por ser P de longitud máxima, $N_G(v_n) \subseteq \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Además, $v_n v_{n-1} \in E_G$ y no hay lazo en v_n , por lo que

$$2 \leq \delta_G \leq d_G(v_n) = |N_G(v_n)| = 1 + |N_G(v_n) \cap \{v_1, \dots, v_{n-2}\}|.$$

Así, existe $i \in \{1, \dots, n-2\}$ tal que $v_n v_i \in E_G$. Luego, $v_i P v_n v_i$ es un ciclo en G . ■

El teorema anterior nos permite demostrar un resultado similar que nos asegura la existencia de un ciclo en G . Dadas dos gráficas G y H , con conjuntos de vértices no necesariamente ajenos, definimos la **unión** de G y H , $G \cup H$, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_G \cup V_H$ y con conjunto de aristas $E_G \cup E_H$.

Proposición 1.1.2. *Sean $P = (v_1, \dots, v_n)$ y $Q = (u_1, \dots, u_m)$ trayectorias distintas en G tales que $v_1 = u_1$ y $v_n = u_m$. Entonces $P \cup Q$ contiene un ciclo.*

Demostración. Como $E_P \neq E_Q$ por ser P y Q trayectorias distintas, se puede considerar $H = G[E_P \Delta E_Q]$. Se afirma que $\delta_H \geq 2$. En efecto, sea $v \in V_H$. Si $v = v_1$ o $v = v_n$, dado que el grado de v es 1 tanto en P como en Q , debe suceder que la arista de P incidente en v es distinta de la arista de Q incidente en v , por lo que $d_H(v) \geq 2$.

Así pues, supóngase que v es un vértice distinto de los extremos de P . Como $v \in V_H$, existe, sin pérdida de generalidad, $e \in E_P$ incidente en v y $e \notin E_Q$. Al ser v un vértice distinto de los extremos de P , existe $h \neq e$ arista de P incidente en v . Si $h \notin E_Q$, entonces $d_H(v) \geq 2$. De lo contrario, nuevamente por ser v distinto de los extremos de Q , existe $e' \in E_Q$ distinta de h incidente en v . Nótese que $e' \neq e$ pues $e \notin E_Q$. Luego, como v tiene grado 2 en P , $e' \notin E_P$, por lo que $e' \in E_H$. Así, $d_H(v) \geq 2$.

Esto implica que $\delta_H \geq 2$, por lo que, en virtud del Teorema 1.1.1, $P \cup Q$ contiene un ciclo. ■

Pasamos ahora a definir una propiedad fundamental de las gráficas. Una gráfica G es **conexa** si para cualquier par de vértices u y v , existe una uv -trayectoria en G . Además, llamaremos **componente conexa** a una subgráfica inducida maximal de G con la propiedad de ser conexa. Si u y v son dos vértices en una gráfica conexa G , denotamos por $d_G(x, y)$ a la longitud de la xy -trayectoria más pequeña en G . Decimos que G es acíclica si esta no tiene ciclo alguno como una subgráfica. Así, en la Figura 1.1 es claro que G es conexa, mientras que $G[\{v_2, v_4\}]$ no lo es. No obstante, G no es acíclica, mientras que $G[\{v_2, v_4\}]$ sí lo es. Además, algunas distancias entre vértices de G son $d_G(v_1, v_1) = 0$, $d_G(v_1, v_2) = 1$ y $d_G(v_2, v_4) = 2$.

El siguiente teorema caracteriza las componentes conexas de una gráfica G tal que $\Delta_G \leq 2$.

Teorema 1.1.3. *Si G es una gráfica con $\Delta_G \leq 2$ y C es una componente conexa de G , entonces C es una trayectoria o un ciclo.*

Demostración. Sea $P = (v_1, \dots, v_n)$ una trayectoria de longitud máxima en C . Si $1 = n$, entonces C es la gráfica trivial, y por tanto una trayectoria, o es la gráfica con un vértice y un lazo, por lo que es un ciclo. Luego, si $1 \neq n$, al ser P de longitud máxima se tiene que $N_G(v_n) \subseteq \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Nótese que para cada $i \in \{2, \dots, n-2\}$ y para cualquier vértice u distinto de v_{i-1} y v_{i+1} , $uv_i \notin E_G$ pues, de lo contrario,

$$2 \geq \Delta_G \geq d_G(v_i) \geq 3,$$

lo cual es una contradicción. Así, $N_G(v_n) \subseteq \{v_{n-1}, v_1\}$ y $N_G(v_1) \subseteq \{v_n, v_2\}$, mientras que $N_G(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ para cualquier $i \in \{2, \dots, n-2\}$. Además, ningún vértice en C tiene lazos pues $\Delta_G \leq 2$, por lo que C es una trayectoria si $v_1v_n \notin E_G$, o es un ciclo si $v_1v_n \in E_G$. ■

1.2. Árboles

Una gráfica G es un **árbol** si esta es conexa y acíclica (ver la Figura 1.3). Por ser acíclica, automáticamente tenemos que G no tiene lazos. Más aún, de la Proposición 1.1.2 se tiene el siguiente corolario inmediato.

Corolario 1.2.1. *Sea T un árbol, y sean u y v vértices de T . Entonces existe una única uv -trayectoria en T .*

El Teorema 1.1.1 implica que en un árbol no trivial existe al menos un vértice de grado 1. Llamamos **hojas** a los vértices de grado 1 en un árbol.

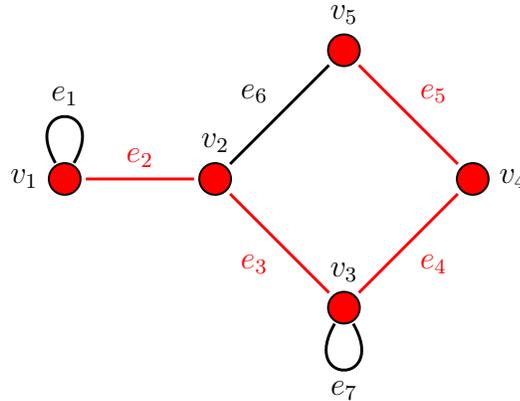


Figura 1.3: Las aristas de rojo inducen la gráfica $G[\{e_2, e_3, e_4, e_5\}]$, la cual es un árbol y tiene a v_1 y v_5 como hojas.

Dada una gráfica G , podemos añadir o eliminar vértices a G para generar una nueva gráfica a partir de G . Si $u \in V_G$, y $V_G \setminus \{u\} \neq \emptyset$ denotamos por $G - u$ a la subgráfica inducida $G[V_G \setminus \{u\}]$. Similarmente, si e es una arista con $e = \{x, y\}$, decimos que H se obtiene de G al subdividir la arista e si $V_H = V_G \cup \{v_e\}$ con $v_e \notin V_G$ y $E_H = E_G \cup \{v_e x, v_e y\} \setminus \{xy\}$.

Una observación inmediata es que si x es una hoja de T y P es una trayectoria en T que no utiliza a x entonces P es una trayectoria en $T - x$. Así, por el Corolario 1.2.1, la uv -trayectoria en T con $u \neq x \neq v$ no utiliza a x pues $d_T(x) = 1$ y el grado (en P) de todo vértice en P distinto de los extremos es 2. Además, dado que T es acíclica, es claro que $T - x$ también lo es, por lo que tiene lugar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.2. *Si T es un árbol y x es una de sus hojas, entonces $T - x$ es un árbol.*

De la misma manera, si e es una arista de T , la gráfica obtenida de la subdivisión de e , T' también da lugar a un árbol pues todas las trayectorias en T que no usaban a e siguen siendo trayectorias en T' , mientras que las que la usaban se convierten en trayectorias de un vértice más al usar las dos aristas incidentes en v_e (ver la Figura 1.4). En tanto, de haber un ciclo en T' , este utilizaría a v_e y a sus dos aristas, por lo que un ciclo de un vértice menos existiría en T , contradiciendo que este es un árbol.

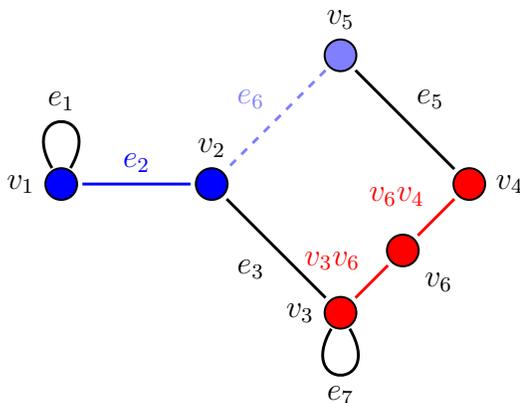


Figura 1.4: Al árbol $G[\{e_2, e_6\}]$ se le elimina la hoja v_5 , resultado en un árbol. Por otra parte, al árbol $G[\{e_4\}]$ se le subdivide la arista e_4 para generar otro árbol.

Así pues, se llega al siguiente corolario.

Corolario 1.2.3. *Si T es un árbol y e es una de sus aristas, entonces la gráfica obtenida al subdividir e es un árbol.*

1.3. Emparejamientos

Dada una gráfica G , decimos que $S \subseteq V_G$ es un conjunto **dominante** de G si todo vértice fuera de S es adyacente a al menos un vértice de S ; al mínimo de las cardinalidades sobre todos los conjuntos dominantes de G le llamamos **número de dominancia** y lo denotamos por $\gamma(G)$. Similarmente, $M \subseteq E_G$ es un **emparejamiento** en G si M no contiene lazos y cualesquiera dos aristas e y f en M son no incidentes. Si M es un emparejamiento, decimos que los dos extremos de una arista en M están *emparejados* bajo M , mientras que, para cualquier vértice incidente en una arista de M , decimos que el vértice está **saturado** por M . Un **emparejamiento perfecto** es un emparejamiento que satura a todos los vértices de la gráfica, mientras que un emparejamiento es **máximo** si satura la mayor cantidad de vértices de entre todos los emparejamientos. Denotamos por $\alpha'(G)$ al **número de emparejamiento** de G , es decir, la cardinalidad de un emparejamiento máximo en G .

Dado un emparejamiento M en una gráfica G , definimos una M -trayectoria **alternante** en G como una trayectoria cuyas aristas alternan, siguiendo el orden de la trayectoria, entre aristas en M y en $E_G \setminus M$. Si tanto el inicio como el final de la trayectoria no están saturados por M , decimos que esta es una M -trayectoria **aumentable** (ver la Figura 1.5).

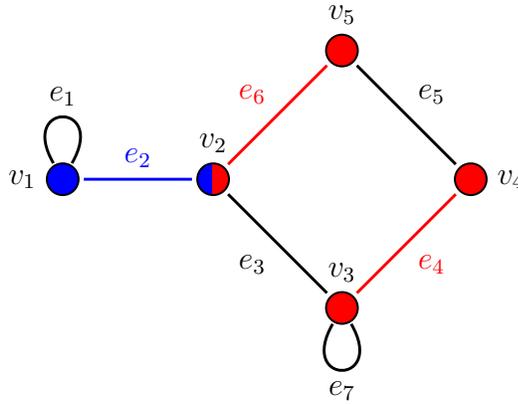


Figura 1.5: El conjunto de aristas azules, $\{e_2\}$, es un emparejamiento M en G que empareja a v_1 y v_2 y los satura. Más aún, M no es máximo pues $M^* = \{e_4, e_6\}$ es un emparejamiento de cardinalidad mayor. Este sí es máximo en G , más no es un emparejamiento perfecto. No obstante, M^* sí es un emparejamiento perfecto en $G - v_1$. Además, (v_1, v_2, v_5) es una M^* -trayectoria alternante, mientras que (v_3, v_4) es una M -trayectoria aumentable. Finalmente, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto dominante, pero $\gamma(G) = 2$ pues $\{v_2, v_4\}$ también lo es.

El siguiente teorema relaciona la existencia de M -trayectorias aumentables con los emparejamientos máximos.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Berge). *Un emparejamiento M en una gráfica G es máximo si y solo si G no contiene M -trayectorias aumentables.*

Demostración. Sea M un emparejamiento en G . Supóngase que G contiene una M -trayectoria aumentable, P . Véase que $M' = M \Delta E_P$ es un emparejamiento en G . En efecto, M' no contiene lazos pues ni M ni P los contienen. Por otro lado, para $e, f \in M'$, si ambas aristas se encuentran en $M \setminus E_P$, entonces estas son no incidentes. Si ambas aristas están en $E_P \setminus M$, entonces estas son no incidentes pues P alterna entre aristas en M y en $E \setminus M$. Finalmente, si $e \in M \setminus E_P$ y $f \in E_P \setminus M$, estas son no incidentes ya que, de lo contrario, f y e inciden en un vértice no saturado por M (si dicho vértice es el inicial o final de P) o inciden en un vértice saturado por M a través de una arista en P distinta de e , contradiciendo que M es un emparejamiento.

Así, M' es un emparejamiento y, dado que P es M -alternante, este tiene exactamente una arista más en $E \setminus M$ de las que tiene en M , por lo que $|M'| = |M| + 1$, contradiciendo que M era un emparejamiento máximo en G .

Recíprocamente, supóngase que M es un emparejamiento en G y que este no es máximo. Sea M^* un emparejamiento máximo en G , de manera que $|M^*| > |M|$. Sea $H = G[M \Delta M^*]$.

Obsérvese que cada vértice de H tiene grado (en H) 1 o 2 pues este puede ser incidente en a lo más una arista de M y a lo más una arista de M^* . Así, $\Delta_H \leq 2$, por lo que, en virtud de el Teorema 1.1.3, cada componente conexa de H es un ciclo o es una trayectoria. Más aún, si es un ciclo, este es par pues alterna entre aristas en M y M^* por ser estos emparejamientos, mientras que la trayectoria alterna entre aristas en M y M^* por la misma razón.

Como $|M^*| > |M|$, la subgráfica H contiene más aristas en M^* que en M , por lo que debe existir en H una componente conexa P que consiste de una trayectoria que alterna entre aristas en M^* y M y cuyas primera y última arista están en $M^* \setminus M$. Así, ambos el vértice inicial y final de P no están saturados por M , de manera que P es una M -trayectoria aumentable. ■

En gráficas bipartitas es sencillo dar una condición necesaria y suficiente para que exista un emparejamiento que sature a todos los vértices en una de las partes de la bipartición.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Hall). *Una gráfica bipartita $G[X, Y]$ tiene un emparejamiento que satura todos los vértices en X si y solo si*

$$|N(S)| \geq |S|$$

para cada $S \subseteq X$.

Demostración. Sea $G[X, Y]$ una gráfica bipartita con un emparejamiento M que satura todos los vértices en X . Sea $S \subseteq X$. Los vértices en S están emparejados bajo M a distintos vértices en $N(S)$, por lo que $|N(S)| \geq |S|$.

Supóngase ahora que $G[X, Y]$ es una gráfica bipartita y supóngase que G no tiene un emparejamiento que sature a todos los vértices en X . Sea M^* un emparejamiento máximo en G y $u \in X$ no saturado por M^* . Sea Z el conjunto de todos los vértices tales que, si $z \in Z$, existe una M^* -trayectoria alternante que comienza en u y termina en z . Como M^* es un emparejamiento máximo, se sigue del Teorema 1.3.1 que u es el único vértice en Z no saturado por M^* . Sean $R = X \cap Z$ y $B = Y \cap Z$.

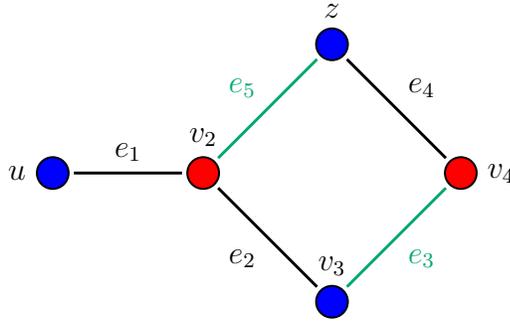


Figura 1.6: La gráfica G es bipartita con la partición (X, Y) dada por la coloración de los vértices, de manera que los vértices azules están en X y los rojos en Y . Las aristas verdes forman un emparejamiento máximo M^* por el Teorema 1.3.1. Además, utilizando las trayectorias M^* -alternantes se obtiene que $Z = \{u, v_2, z, v_4, v_3\}$. Así, $R = \{u, z, v_3\}$ y $B = \{v_2, v_4\}$.

Claramente los vértices en $R \setminus \{u\}$ están emparejados bajo M^* a vértices en B . Así, $|B| \geq |R| - 1$, mientras que cada vértice en B está saturado por M^* ya que, de lo contrario, la M^* trayectoria alternante de u a y sería M^* -aumentable, contradiciendo que M^* es máximo por el Teorema 1.3.1. Luego, $|B| = |R| - 1$. Por otro lado, $B \subseteq N(R)$ pues, dado $y \in B$, el penúltimo vértice de una uy -trayectoria M^* -alternante está en R . En tanto, todo vértice y en $N(R)$ tiene un vecino x que es alcanzado por u a través de una M^* -trayectoria alternante P cuyo último vértice es x . Si y es un vértice interno de P , $y \in B$, mientras que si no, $uPxy$ es una trayectoria

M^* -alternante pues x está saturado por M^* , de manera que $xy \notin M^*$. Por tanto, $B = N(R)$ y

$$|N(R)| = |B| = |R| - 1 < |R|,$$

de manera que la condición dada por el teorema falla para $S = R$. ■

1.4. Gráficas de fichas

Dada una gráfica G , estamos interesados en obtener una estructura que nos permita estudiar *configuraciones* de G . No es de sorprender que esa estructura que buscamos es también una gráfica. Así, en [5], Fabila et al. introducen el concepto de *gráfica de fichas* de una gráfica G y estudian sus propiedades básicas como gráfica en términos de las propiedades de G . Por tanto, las siguientes definiciones y resultados se obtienen de dicho trabajo.

Dado X un conjunto y $k \leq |X|$, decimos que $S \subseteq X$ es un k -conjunto de X si $|S| = k$. Además, dados dos conjuntos A y B , recordemos que la **diferencia simétrica** de A y B , denotada por $A \Delta B$, se define como

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Así, dada una gráfica G sin lazos y un entero k tal que $1 \leq k \leq |V_G|$, definimos la **gráfica de k fichas** de G , $F_k(G)$, cuyo conjunto de vértices consiste de todos los k -conjuntos de V_G , mientras que dos de estos k -conjuntos, A y B , son adyacentes si y solo si $A \Delta B \in E_G$ (ver la Figura 1.7).

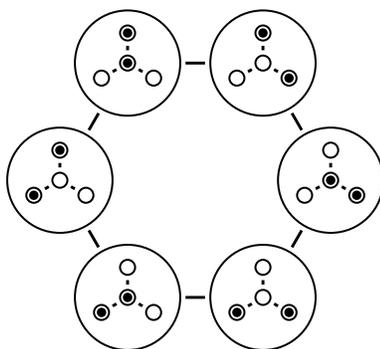


Figura 1.7: Se muestra $F_2(G)$, la gráfica de 2 fichas de la gráfica bipartita completa $G[X, Y]$ con $|X| = 1$ y $|Y| = 3$. Dentro de cada vértice de $F_2(G)$ se dibujó a G junto con un 2-conjunto de sus vértices identificado por los puntos. Nótese que los vértices adyacentes a un vértice de $F_2(G)$ corresponden a aquellas configuraciones que se alcanzan al “deslizar” una ficha a lo largo de una arista de G .

Una observación inmediata de la definición es que, si G es una gráfica sin lazos, G es isomorfa a su gráfica de 1 ficha, es decir, $G \cong F_1(G)$. Esto es inmediato al ver que los 1-conjuntos de V_G son los unitarios de los vértices y que dos 1-conjuntos son adyacentes en $F_1(G)$ si y solo si su diferencia simétrica es una arista en G , es decir, si estos son adyacentes en G .

El siguiente lema reduce los casos a estudiar para las gráficas de fichas.

Lema 1.4.1. *Sean k y n enteros positivos. Si G es una gráfica sin lazos de orden n y $k < n$, entonces $F_k(G) \cong F_{n-k}(G)$.*

Demostración. Se propone la función $\varphi: V_{F_k(G)} \rightarrow V_{F_{n-k}(G)}$ dada por la regla de correspondencia $\varphi(A) = V \setminus A$. Dicha función está bien definida pues $|V \setminus A| = n - k$. Por tanto, resta demostrar que dicha función da un isomorfismo entre $F_k(G)$ y $F_{n-k}(G)$.

Si $AB \in E_{F_k(G)}$, entonces $A \Delta B = \{a, b\} \in E_G$ con $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Así,

$$\begin{aligned} f(A) \Delta f(B) &= (V \setminus A) \Delta (V \setminus B) \\ &= (V \setminus A \setminus (V \setminus B)) \cup (V \setminus B \setminus (V \setminus A)) \\ &= ((V \setminus A) \cap B) \cup ((V \setminus B) \cap A) \\ &= \{b\} \cup \{a\} = \{a, b\} \in E_G. \end{aligned}$$

Luego, $f(A)f(B) \in E_{F_{n-k}(G)}$. Por la misma razón, si $f(A)f(B) \in E_{F_{n-k}(G)}$, entonces $AB \in E_{F_k(G)}$, por lo que se concluye que $F_k(G) \cong F_{n-k}(G)$. ■

1.5. Policías y ladrones

Llegamos finalmente a la definición del juego de policías y ladrones. Como objeto de estudio matemático, la versión de policías y ladrones que hoy en día conocemos es de alrededor de 1980. El parámetro que nos dedicaremos a estudiar a lo largo del texto, el *número policiaco*, fue introducido por Aigner y Fromme en [1]. Por otra parte, en [2], Bonato y Nowakowski realizan una revisión documental de todos los resultados que se tienen respecto al juego.

Así pues, **policías y ladrones** es un juego de evasión-persecución sobre una gráfica en el cual dos jugadores, C y R (del inglés, *cops & robbers*), toman turnos alternadamente para conseguir su objetivo. Por una parte, C controla a una cantidad fija c de policías tales que estos ocupan vértices no necesariamente distintos de G y, en cada turno, todos se mueven a través de una arista incidente al vértice en el

que se encontraban previamente. Por otro lado, R controla a un único ladrón cuyas reglas de movimiento son las mismas que las descritas para los policías de C . Por tanto, el objetivo de C es que al menos uno de sus policías ocupe el mismo vértice que el ladrón, momento en el que diremos que dicho policía **captura** a R y termina el juego de inmediato con la victoria de C . En tanto, el objetivo de R es evitar su captura, de manera que R gana el juego si puede hacer esto de forma indefinida. Por convención, C comienza el juego al escoger posiciones iniciales para cada uno de sus policías, mientras que, posteriormente, R en su primer turno decide en qué vértice colocar a su ladrón.

Diremos que un jugador tiene una **estrategia ganadora** si cuenta con un conjunto de reglas a seguir tal que, sin importar lo que haga su contrincante, este es capaz de ganar el juego. Por tanto, C tiene una estrategia ganadora si puede eventualmente capturar a R tras un número finito de movimientos y sin importar los movimientos que este realice, mientras que R tiene una estrategia ganadora si puede evadir su captura sin importar los movimientos que realice C .

La versión antes descrita es la llamada versión “activa” del juego. Hay una versión “pasiva” en la que, en su turno, cada policía y el ladrón pueden pasar, de modo que estos mantienen su posición. No obstante, esta variante del juego puede emularse con la versión activa al jugar sobre gráficas reflexivas, de manera que, si algún policía o el ladrón buscan pasar, estos se mueven a través del lazo asociado al vértice en el que se encuentran. Así, a lo largo del trabajo examinaremos el juego tradicional únicamente sobre gráficas reflexivas aún cuando nos referiremos a dichas gráficas como sus versiones sin lazos.

Dada una gráfica G de orden n , es claro que si C tiene n policías, entonces tiene una estrategia ganadora, a saber, en su primer turno coloca cada policía en un vértice distinto de G , de manera que, sin importar cuál vértice escoja R , este pasa a ser capturado inmediatamente. Por tanto, cabe preguntarse, dada una gráfica G , cuál es el mínimo número de policías que C necesita para capturar a R . A este parámetro lo llamaremos el **número policiaco** de G y lo denotaremos por $c(G)$.

Dadas una gráfica G y H una de sus subgráficas inducidas, decimos que H es un **retracto** de G si existe un homomorfismo f de G en H tal que $f(x) = x$ para cualquier $x \in V_H$. A través de esta noción, podemos dar una cota inferior para el número policiaco de una gráfica en función de sus retractos.

Lema 1.5.1. *Si H es un retracto de G , entonces $c(H) \leq c(G)$.*

Demostración. Supóngase que k policías tienen una estrategia ganadora en G y sea f un homomorfismo de G a H tal que $f(x) = x$ para cada $x \in V_H$. Se consideran dos partidas independientes en paralelo de policías y ladrones: una jugada sobre G y otra sobre H . El juego en H puede considerarse como un juego sobre G pues H es una subgráfica inducida de G . La estrategia ganadora de C con k policías en G puede no ser suficiente para capturar a R en H , por ejemplo, puede que R tenga que salir de H para ser capturado en la parte de G que no está en H .

Así pues, se considera la siguiente estrategia de sombras: los policías jugando la partida en G siguen la estrategia usual, mientras que los policías jugando la partida en H realizan los movimientos dados por las imágenes bajo f de los policías en G . Por simplicidad, se denota por $f(c)$ a las imágenes de las posiciones de los policías en G . Así, si un policía c_i en G se mueve de un vértice u a v , entonces un policía $f(c_i)$ en H se mueve de $f(u)$ a $f(v)$, el cual es un movimiento válido por ser f un homomorfismo.

Se afirma que la estrategia descrita es ganadora para los policías en H . En efecto, considérese que los policías juegan en G y R está restringido a H . Si los policías están a punto de ganar en G , debe suceder que el vértice en el que se encuentra R y todos sus vecinos, tanto en H como en G , son adyacentes a un policía. Luego, si u es el vértice en el que se encuentra R y v es un vértice adyacente a este, el homomorfismo f manda la arista $uv \in E_G$ a la arista $uf(v) \in E_H$. Luego, como f es homomorfismo, si c_i es el policía en un vértice adyacente a v en G , $f(c_i)$ es un policía adyacente a $f(v)$ en H . Lo mismo sucede con el policía en G que está en un vértice adyacente al vértice en el que se encuentra R . Por tanto, todos los posibles movimientos de R son tales que un policía en H le captura en a lo más su siguiente turno, de modo que k policías bastan para capturar a R en H . ■

Lema 1.5.2. *Si G es una gráfica, entonces $c(G) \leq \gamma(G)$.*

Demostración. Sea $S \subseteq V_G$ un conjunto dominante de G de cardinalidad $\gamma(G)$. Así, si C tiene $\gamma(G)$ policías, este pone uno de ellos en cada vértice de S en su primer turno. Supóngase que R se posiciona en v . Si $v \in S$, hay un policía en v , por lo que el juego termina. De lo contrario, existe una arista que incide en v y es tal que su otro extremo, u está en S por ser este dominante. Así, el policía que se encuentra en u procede a capturar a R en su siguiente turno. ■

A manera de exploración, demostramos el siguiente teorema para árboles.

Teorema 1.5.3. *Si T es un árbol, entonces $c(T) = 1$.*

Demostración. Si T es trivial, el resultado es claro. Por tanto, supóngase que es no trivial. Se dará una estrategia ganadora para C que controla a un único policía. Se denotará por C al policía que controla C , de modo que este se posicione en un vértice arbitrario de T . De la misma forma, se denotará por R al ladrón que controla R . En los siguientes turnos, dado que T es un árbol, por el Corolario 1.2.1 se tiene que existe una única trayectoria en T del vértice en el que se encuentra C al vértice en el que se encuentra R . Así, una estrategia para C es mover al segundo vértice de la única trayectoria entre su posición actual y la posición de R .

Esto implica que, posterior al turno de R , la distancia entre C y R no aumenta nunca. Más aún, dicha distancia debe disminuir eventualmente pues si R evita que eso pase, este llega eventualmente a una hoja, que existe por ser T no trivial. Luego, inductivamente se tiene que la distancia entre C y R eventualmente disminuye de 1 a 0, por lo que C captura a R . ■

Dada una gráfica G sin lazos y $k \geq 1$, podemos considerar un juego de policías y ladrones sobre su gráfica de k fichas, recordando que el juego se desarrolla sobre la versión reflexiva de $F_k(G)$. No obstante, en lugar de trabajar sobre $F_k(G)$ para obtener estrategias ganadoras, podemos recurrir a la misma gráfica para plantear una modificación del juego tradicional, de manera que se puede emular una partida clásica sobre $F_k(G)$. Esta variante la introduce Fernández-Velázquez en [6]. Para una partida tradicional de policías y ladrones sobre $F_k(G)$, considérese una partida de policías y ladrones por equipos en G , donde cada policía de C y el ladrón tienen un equipo de k fichas tales que, por cada policía y el ladrón, sus k fichas determinan un k -conjunto de V_G . Además, en su turno, cada policía y el ladrón escogen una de sus k fichas y la mueven de un vértice a otro a través de una arista, de manera que posterior a su movimiento estos siguen determinando un k -conjunto de V_G . Por otra parte, la acción de que un policía o el ladrón pase el turno representa, en la gráfica de fichas, que el respectivo policía o el ladrón no mueva alguna de sus fichas en G . En esta ocasión, C gana si en su turno logra que las k fichas de uno de sus policías determinen el mismo k -conjunto que las k fichas del ladrón, mientras que el ladrón gana si puede evitar indefinidamente que esto suceda. En algunas ocasiones nos referiremos a los vértices de $F_k(G)$ como **configuraciones**.

De este punto en adelante, denotamos por c_i al i -ésimo policía de C , mientras que al ladrón, controlado por R , lo denotamos por r . Nos interesa distinguir entre las fichas de r , por lo que, para cada $1 \leq j \leq k$ denotamos por r_j a la j -ésima ficha de r . Asimismo, distinguimos las fichas de cada policía c_i , de modo que, para cada

$1 \leq j \leq k$, denotamos por $c_{i,j}$ a la j -ésima ficha del i -ésimo policía. Decimos que un policía c_i **domina** una configuración $S \in V_{F_k(G)}$ si este se encuentra en S o en una configuración adyacente a S . Además, decimos que una ficha $c_{i,j}$ de c_i **captura** a r_j si estas se encuentran en el mismo vértice. En algunos casos abusaremos del vocabulario al decir que c_i *captura* a r_j si una ficha de c_i le captura. Finalmente, c_i **captura en la gráfica de fichas** a r si ambos determinan el mismo k -conjunto de V_G . Nuevamente abusando del vocabulario, diremos que C *captura* a R si c_i captura a r para algún índice i .

Capítulo 2

Policías y ladrones sobre gráficas de fichas de árboles

2.1. Estrellas

Una **estrella** es una gráfica bipartita completa $G[X, Y]$ en la que $|X| = 1$ o $|Y| = 1$. Si $|X| = 1$ y $|Y| = n$, decimos que $G[X, Y]$ es la estrella de n picos y la denotamos por S_n . Además, sin pérdida de generalidad supondremos que $V_G = [n]$ con $X = \{0\}$ y $Y = \{1, \dots, n\}$, donde

$$[n] = \{0, \dots, n\}.$$

Al vértice 0 le llamamos el **centro** de la estrella, observando que $d_{S_n}(0) = n$.

Consideremos n un entero positivo fijo. Antes de estudiar las gráficas de fichas una estrella S_n , queremos determinar, respecto a n , cuáles valores de k debemos considerar para cubrir en su totalidad todos los posibles números de fichas sin trabajar todas ellas. Nótese que el orden de S_n es $n + 1$ por lo que, en virtud del Lema 1.4.1

$$F_k(S_n) \cong F_{|V_{S_n}|-k}(S_n) = F_{n+1-k}(S_n).$$

Luego, si $k > \frac{n+1}{2}$, se tiene que

$$n + 1 - k < n + 1 - \frac{n + 1}{2} = \frac{n + 1}{2}.$$

Por tanto, si $s = n + 1 - k$, $F_k(S_n) \cong F_s(S_n)$ y $s \leq \frac{n+1}{2}$, la la invarianza del número policiaco bajo isomorfismo tiene como consecuencia que $c(F_k(S_n)) = c(F_s(S_n))$. Así, basta determinar $c(F_k(S_n))$ para los enteros k tales que $k \leq \frac{n+1}{2}$. Además, siempre

consideramos $2 \leq k$ pues, para $k = 1$, $F_1(S_n) = S_n$, de modo que del Teorema 1.5.3 se sigue que $c(F_1(S_n)) = 1$.

En busca de determinar una cota inferior para el número policiaco en este caso, proponemos el siguiente lema respecto a una desigualdad.

Lema 2.1.1. *Para cualquier $k \geq 2$, $\binom{2k-1}{k-1} > k(k-1)$.*

Demostración. Desarrollando de la formula del binomio,

$$\begin{aligned} \binom{2k-1}{k-1} - k(k-1) &= \frac{(2k-1)!}{(k-1)!(2k-1-(k-1))!} - k(k-1) \\ &= \frac{(2k-1)!}{(k-1)!(k)!} - k(k-1) \\ &= \frac{(2k-1) \cdots (k+1)}{(k-1)!} - \frac{k(k-1)(k-1)!}{(k-1)!} \\ &= \frac{(2k-1) \cdots (k+1) - k(k-1)(k-1)!}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente demostrar que el numerador de la última igualdad es mayor que cero. Así pues, véase que

$$k(k-1)(k-1)! = (2k-2) \cdot \underbrace{(k \cdot (k-1) \cdots 4 \cdot 3)}_{k-2 \text{ términos}}.$$

Luego, como $k \geq 2$ se tiene que $k+r \geq 2+r$ para cualquier $r \in \mathbb{N}$, de manera que los últimos $k-2$ términos de la expresión

$$(2k-1) \cdots (k+1)$$

son mayores o iguales a los últimos $k-2$ términos de $k(k-1)(k-1)!$. Más aún, $2k-1 > 2k-2$, de modo que

$$(2k-1) \cdots (k+1) > k(k-1)(k-1),$$

concluyendo así que

$$\binom{2k-1}{k-1} - k(k-1) > 0.$$

■

Ahora estamos listos para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. Si n y k son enteros positivos tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$, $c(F_k(S_n)) \geq k$.

Demostración. Como $k \leq \frac{n+1}{2}$, despejando se tiene que $2k - 1 \leq n$. Basta demostrar que R tiene una estrategia ganadora jugando sobre $F_k(S_{2k-1})$ contra $k - 1$ policías, notando que para $n > 2k - 1$, el ladrón realiza los mismos movimientos, ignorando las hojas adicionales.

Primero se demuestra que dada cualquier configuración inicial de fichas de los $k - 1$ policías, R siempre puede escoger vértices para posicionar sus fichas de manera que ningún policía le captura $k - 1$ fichas en las hojas. En efecto, nótese que el número de $(k - 1)$ -conjuntos formados únicamente por hojas de S_{2k-1} es $\binom{2k-1}{k-1}$. Por otra parte, si un policía coloca sus k fichas sobre las hojas, este domina $\binom{k}{k-1}$ de estos $(k - 1)$ -conjuntos. En este orden de ideas, los $k - 1$ policías pueden dominar, conjuntamente, hasta $k(k - 1)$ de los $(k - 1)$ -conjuntos formados por hojas, de manera que, por el Lema 2.1.1, R puede escoger una configuración de $k - 1$ hojas tal que ningún policía le captura esas $k - 1$ fichas, escogiendo el vértice 0 para posicionar su última ficha y sobreviviendo su primer turno.

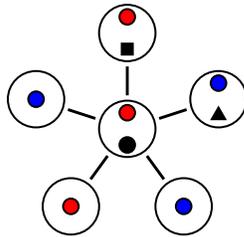


Figura 2.1: Una posible elección de configuración inicial de R para $k = 3$. Nótese que ninguno de los $k - 1$ policías, cuyas posiciones de fichas están representadas por los puntos azules y rojos, están capturando dos fichas de R en las hojas, representadas como el punto, el triángulo y el cuadrado negros.

Determinada la disposición inicial de las fichas, nótese que R no puede ser capturado en el siguiente movimiento de los policías pues, dada la elección de configuración, si existe $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ tal que c_i está capturando a $k - 1$ de las fichas de R , entonces necesariamente una de las fichas de c_i está en el centro, de manera que necesita al menos 2 movimientos para capturar todas las fichas de r (uno para capturar la hoja que le falta y uno para recapturar la ficha del centro). Por tanto, R sobrevive al turno de C y revisa si ha quedado con $k - 1$ fichas en las hojas capturadas por un mismo policía. De no ser así, R asegura su supervivencia hasta su siguiente turno al igual que posterior a la elección de configuración inicial, por lo que se limita a pasar. De lo contrario, este debe mover la ficha de r en 0.

Nótese que en un mismo turno varios policías pudieron haber completado sus $k - 1$ capturas en las hojas donde se encuentran las fichas de r . Sea m un entero positivo y supóngase sin pérdida de generalidad que c_1, \dots, c_m son los policías que han capturado las $k - 1$ fichas de r en las hojas. Dado que cada c_i pasó de no estar capturando a capturar las $k - 1$ fichas de R en hojas, entonces necesariamente en esta nueva instancia dichos policías no tienen una ficha en 0 (pues una de sus fichas se movió de ahí para capturar la hoja que les faltaba, respectivamente). Así, por cada uno de estos policías, R tiene una hoja menos a la cual puede mover la ficha de r en 0, pues perdería el juego inmediatamente. De este modo, en el peor de los casos, hay $m + k - 1$ hojas no disponibles de las $2k - 1$, donde las $k - 1$ corresponden a las hojas en las que R ya tiene una ficha.

Luego, el resto de hojas disponibles pueden estar ocupadas por alguna ficha de c_{m+1}, \dots, c_{k-1} , quienes al final de su turno no estaban capturando las $k - 1$ fichas en hojas de r . Si alguno de estos policías tiene una de sus fichas en 0 y está capturando $k - 2$ de las $k - 1$ fichas en hojas de R , entonces R tiene una hoja menos a la cual puede moverse, pues de hacerlo, este provocaría que tal policía le capture $k - 1$ fichas en hojas y bastaría con mover su ficha en 0 a la hoja que le falta capturar. Nuevamente el peor de los casos implicaría que hay otras $k - 1 - m$ hojas no disponibles para R (una correspondiente a cada c_i con $i > m$). Así, R tiene a lo más $m + k - 1 + k - 1 - m = 2k - 2$ hojas no disponibles de las $2k - 1$, por lo que este siempre tendrá al menos una hoja a la cual se puede mover de manera que no incremente la cantidad de policías que se encuentran capturando $k - 1$ fichas en sus hojas.

En el siguiente turno, si ninguno de los c_i con $i \in \{1, \dots, m\}$ mueve su última ficha que no está capturando a 0, R pasa. Nótese que los policías c_{m+1}, \dots, c_{k-1} pueden seguir moviendo sus fichas y, eventualmente, pueden llegar a agregarse al conjunto de policías que están capturando $k - 1$ fichas en las hojas, por lo que en cada uno de los movimientos de los policías puede que m aumente (o disminuya) y haya que realizar un reetiquetado de los policías para identificar cuáles son los más cercanos a capturar. En caso de que m aumente, cada policía que se encuentra capturando $k - 1$ fichas de r en las hojas no tiene una ficha en 0, pues debió haber usado esa para capturar, asegurando que R puede sobrevivir un turno más.

En el peor caso, los policías c_1, \dots, c_m mueven su ficha que no está capturando a 0. Se afirma que r tiene una ficha que está capturada, simultáneamente, por una ficha de cada c_i con $i \in \{1, \dots, m\}$. En efecto, al ser $k - 1$ policías y al estar capturando $k - 1$ fichas de las k del ladrón, en el peor caso se tiene que a cada policía le falta una ficha distinta por capturar, de manera que, sin pérdida de generalidad, a c_i le falta capturar la ficha r_i . Finalmente, como $m \leq k - 1$, entonces cada c_i está capturando la ficha r_k , de manera que R procede a mover a la ficha r_k a 0. De este modo, R vuelve

a la situación inicial en la que ningún policía le está capturando $k - 1$ fichas en las hojas, por lo que el ladrón puede iterar este algoritmo para nunca ser capturado por algún policía. Se concluye entonces que $c(F_k(S_{2k-1})) \geq k$. ■

Anexamos a continuación el desarrollo de una partida en la que R utiliza la estrategia descrita en el Teorema 2.1.2.

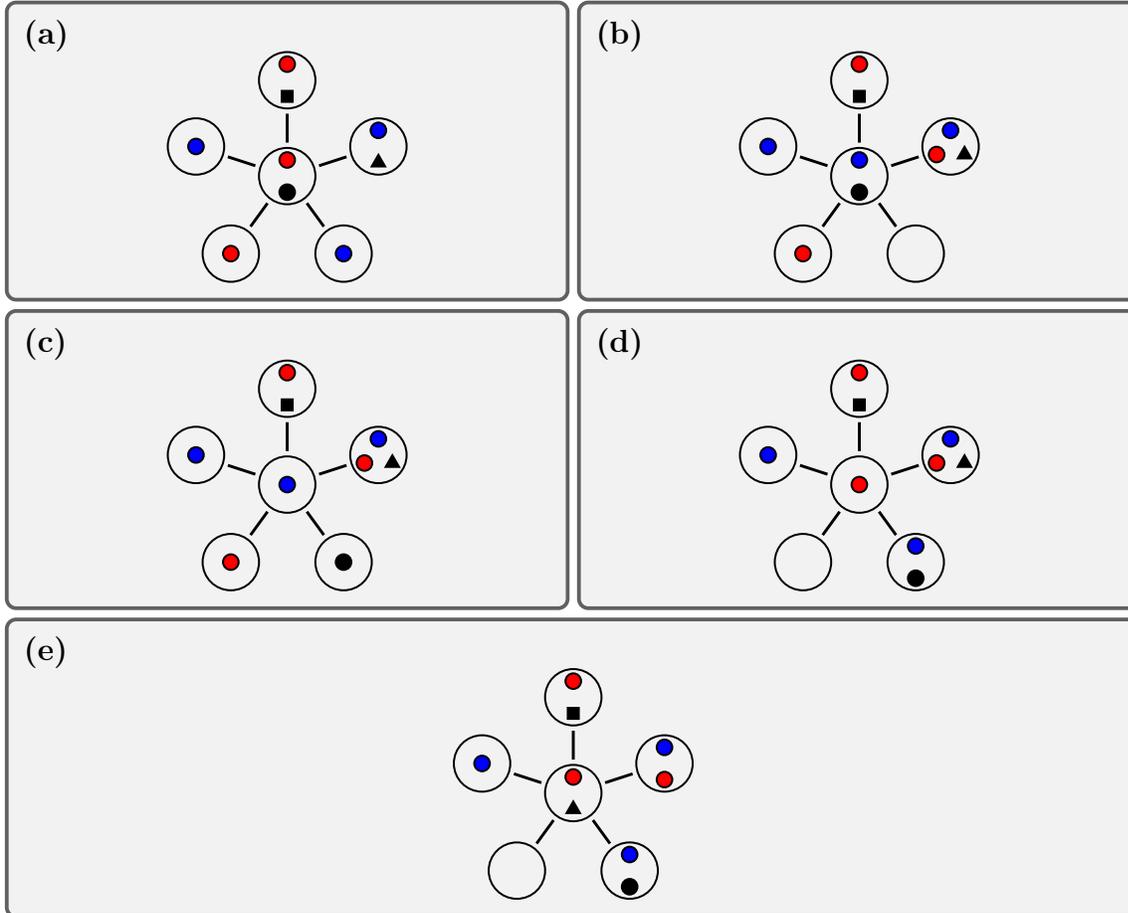


Figura 2.2: Se presenta una partida de policías y ladrones sobre S_5 con 3 fichas. Las escenas se leen siguiendo la numeración, de manera que las imágenes en la columna derecha muestran las situaciones posteriores al turno de C y las de la columna izquierda son posteriores al turno de R . En (b), R tiene dos fichas capturadas en hojas, por lo que debe mover su ficha del centro a alguna hoja. En (d), R se ve forzado a mover una vez más, lo cual puede hacer pues existe al menos una de sus fichas que es capturada por los dos policías. En este punto R regresa a una posición en la que ningún policía le captura dos fichas en las hojas, que es justo el objetivo de la estrategia.

Dado este resultado, nuestra nueva meta es determinar con exactitud el número policiaco para las gráficas de fichas de las estrellas. Para ello, es de nuestro interés definir un objeto matemático que recupere toda la información esencial respecto a las posiciones de C y R en un juego de policías y ladrones. Así, dada una gráfica G y un juego de policías y ladrones sobre la gráfica de k fichas de G contra m policías, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$ denotamos por $c_{i,j}$ a la j -ésima ficha del i -ésimo policía. Esto último implica que las fichas de cada uno de los policías recibirán un etiquetado (arbitrario) al inicio de la partida, pues será importante que podamos diferenciar entre dos fichas de un mismo policía para dar instrucciones de movimiento acorde a ese etiquetado. Adicionalmente, denotamos por $[c_i]$ al conjunto de todas las fichas de c_i , es decir, $[c_i] = \{c_{i,1}, \dots, c_{i,k}\}$. Análogamente, $[r] = \{r_1, \dots, r_k\}$ (las fichas de R también recibirán un etiquetado arbitrario). Denotamos por $c_{i,j}(t)$ al vértice de G en el que la j -ésima ficha del i -ésimo policía se encuentra al momento t . Con esto podemos definir la posición de c_i al momento t como el subconjunto $c_i(t)$ de $[c_i] \times V_G$ dado por

$$c_i(t) = \{(c_{i,1}, c_{i,1}(t)), \dots, (c_{i,k}, c_{i,k}(t))\}.$$

De forma similar se define $r(t)$ para la posición del ladrón al momento t . Así pues, definimos el **turno** t del juego, $I(t)$, como la unión de las posiciones de todos los policías y el ladrón, es decir,

$$I(t) = \bigcup_{i=1}^k c_i(t) \cup r(t).$$

La **instancia** I se define como la sucesión, posiblemente infinita, $(I(0), I(1), \dots)$. Notemos que las instancias describen toda la información relevante entre los policías y el ladrón en $F_k(G)$ pues el conjunto de las segundas entradas de cada elemento en $c_i(t)$ es un conjunto de vértices de cardinalidad k , donde esto último se debe a que dos fichas del mismo policía no pueden ocupar un mismo vértice en G . Si denotamos por $\pi_2 [c_i(t)]$ a dicho k -conjunto de V_G , entonces este conjunto determina la posición del i -ésimo policía en la gráfica de k fichas de G . Para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $t \in \mathbb{N}$, decimos que la posición $c_i(t+1)$ *se obtiene legalmente* de $c_i(t)$, o que c_i *hace un movimiento legal* en el turno $I(t)$, si la diferencia simétrica de $\pi_2 [c_i(t)]$ y $\pi_2 [c_i(t+1)]$ es una arista de G o es vacía. Análogamente se define un movimiento legal en el turno $I(t)$ para r . Para alguna instancia I , decimos que un turno $I(t+1)$ *se obtiene legalmente* de $I(t)$ si r y cada c_i hacen un movimiento legal en el turno $I(t)$.

Finalmente, dado c_i un policía (fijo, pero arbitrario), se puede considerar la función $o_i: [c_i] \rightarrow [r]$, tal que $c_{i,j} \mapsto r_j$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$; llamamos a r_j el **objetivo** de $c_{i,j}$ y o_i es la función objetivo de c_i . Definimos dos distancias del i -ésimo

policía al ladrón en el turno $I(t)$ a través de su función objetivo y dependiendo de la gráfica en la que se analiza el juego. Definimos $d_G(c_i, r)$ como la suma de las distancias en G entre cada ficha de c_i y su objetivo al turno $I(t)$, es decir,

$$d_G(c_i(t), r(t)) = \sum_{j=1}^k d_G(c_{i,j}(t), r_j(t)).$$

Por otra parte, puede considerarse naturalmente la distancia de $c_i(t)$ a $r(t)$ en la gráfica de k fichas de G , $d_{F_k(G)}(c_i(t), r(t))$. Resulta intuitivamente claro que

$$d_{F_k(G)}(c_i(t), r(t)) \leq d_G(c_i(t), r(t)) \quad (2.1)$$

pero la justificación formal se hará evidente después de introducir el concepto de obstrucción entre dos fichas del mismo equipo.

Con estos preliminares, procedemos a describir una estrategia que será utilizada recurrentemente en las siguientes demostraciones. Considérese un turno $I(t)$ del juego de policías y ladrones sobre la gráfica de k fichas de un árbol T . Se dice que una ficha $c_{i,j}$ está **obstruida** si no se encuentra capturando a su objetivo en el turno $I(t)$ (i.e., $c_{i,j}(t) \neq r_j(t)$) y existe $s \in \{1, \dots, k\}$ tal que $c_{i,s}(t)$ es el segundo vértice de la única $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria en T , recordando que esta es única debido al Corolario 1.2.1. En este caso se dice que $c_{i,s}$ es una **obstrucción** para $c_{i,j}$ en el turno $I(t)$ (ver la Figura 2.3). Si además $c_{i,j}$ es una obstrucción para $c_{i,s}$ en el turno $I(t)$, se dice que $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ se obstruyen mutuamente y esta es una **obstrucción mutua**.



Figura 2.3: Diagrama de la ficha $c_{i,j}$ obstruida por la ficha $c_{i,s}$.

En caso de que $c_{i,j}$ esté obstruida, c_i es incapaz de acercar su j -ésima ficha hacia r_j sin antes remover $c_{i,s}$ del vértice $c_{i,s}(t)$. Así, el Algoritmo 1 da una respuesta a cómo atender esta situación de manera que la suma de las distancias de las fichas de c_i a sus objetivos, $d_G(c_i(t), r(t))$, disminuye (cuando el policía c_i aún no se encuentra capturando a r).

Algoritmo 1: DESOBSTRUCCIÓN

Input: Un entero positivo k , un árbol T , un turno $I(t)$ de un juego de policías y ladrones con k fichas sobre un árbol T y $c_{i,s}$ una obstrucción para $c_{i,j}$ en el turno $I(t)$.

Output: Una posición $c_i(t+1)$ obtenida legalmente de $c_i(t)$ tal que $d_G(c_i(t+1), r(t)) < d_G(c_i(t), r(t))$.

```

1 if  $c_{i,j}$  y  $c_{i,s}$  se obstruyen mutuamente then
2    $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t)), (c_{i,s}, c_{i,s}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, c_{i,s}(t)), (c_{i,s}, c_{i,j}(t))\}$ ;
3 else
4   if  $c_{i,s}(t) = r_j(t)$  then
5     if  $c_{i,s}$  está obstruido por algún  $c_{i,u}$  then
6        $c_i(t+1) \leftarrow \text{DESOBSTRUCCIÓN}(k, T, I(t), c_{i,u}, c_{i,s})$ ;
7     else
8        $v_{i,s} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria;
9        $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,s}, c_{i,s}(t))\}) \cup \{(c_{i,s}, v_{i,s})\}$ ;
10  else
11     $I(t) \leftarrow (I(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t)), (c_{i,s}, c_{i,s}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, c_{i,s}(t)), (c_{i,s}, c_{i,j}(t))\}$ ;
12    if  $c_{i,j}$  está obstruido por algún  $c_{i,u}$  then
13       $c_i(t+1) \leftarrow \text{DESOBSTRUCCIÓN}(k, T, I(t), c_{i,u}, c_{i,j})$ ;
14    else
15       $v_{i,j} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria;
16       $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, v_{i,j})\}$ ;
17 return  $c_i(t+1)$ 

```

En este orden de ideas, el siguiente lema demuestra la validez del Algoritmo 1. Previamente, notemos que ya estamos en posición de esclarecer la desigualdad en 2.1. Al turno $I(t)$, el policía c_i necesita a lo más $d_G(c_i(t), r(t))$ movimientos para que sus fichas capturen a sus respectivos objetivos en G , posiblemente utilizando reetiquetados como el utilizado en el Algoritmo 1, de manera que, después de esos movimientos, la distancia en $F_k(G)$ entre la posición de c_i y r es 0. Notemos que la igualdad en 2.1 siempre se cumple si reetiquetamos a las fichas de c_i para minimizar $d_G(c_i(t), r(t))$.

Lema 2.1.3. *El Algoritmo 1 es correcto.*

Demostración. Se identifican los siguientes casos dependiendo del tipo de obstrucción:

1. Si $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ se obstruyen mutuamente (ver la Figura 2.4), nótese que basta que se intercambien las etiquetas de estas fichas pues esto propicia que la distancia de ambas fichas a sus respectivos objetivos se reduzca en 1 y $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ dejan de obstruirse una a la otra.

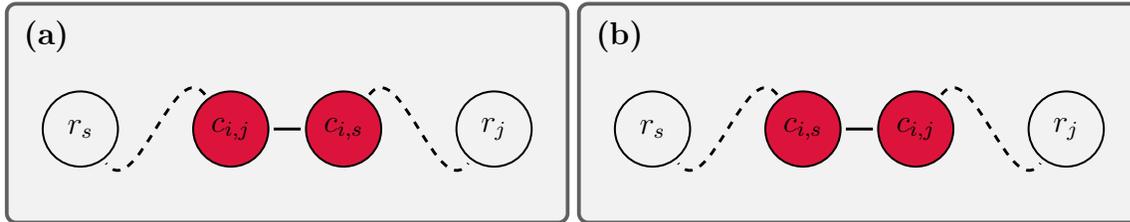


Figura 2.4: Si $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ se obstruyen mutuamente, entonces intercambian etiquetas (y por lo tanto objetivos). Las demás fichas se mantienen sin cambio.

2. Si $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ no se obstruyen mutuamente, se generan dos subcasos:

- a) Si $r_j(t) = c_{i,s}(t)$, entonces $c_{i,s}$ aún no se encuentra capturando su respectivo r_s y la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria, P , no contiene a $c_{i,j}(t)$, de manera que c_i puede mover su s -ésima ficha al segundo vértice de P . Si $c_{i,s}$ no se encuentra obstruida, entonces avanza a dicho vértice, reduciendo la distancia a su objetivo y dejando libre el paso para $c_{i,j}$ tal como se muestra en la Figura 2.5. De lo contrario, la nueva obstrucción entre $c_{i,s}$ y $c_{i,u}$ se resuelve con una llamada recursiva (ver la Figura 2.6).

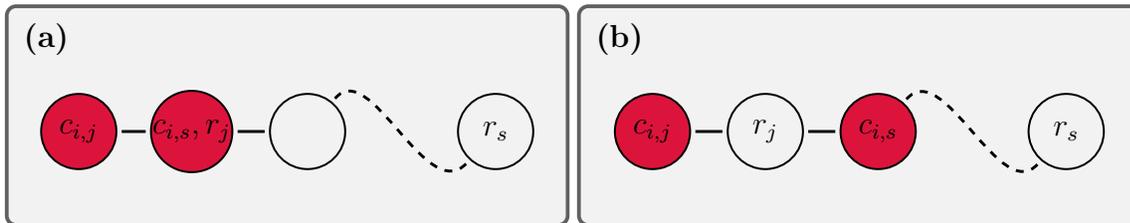


Figura 2.5: Al no haber obstrucción mutua entre $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$, $c_{i,s}$ debe avanzar (de ser posible) siguiendo la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria.

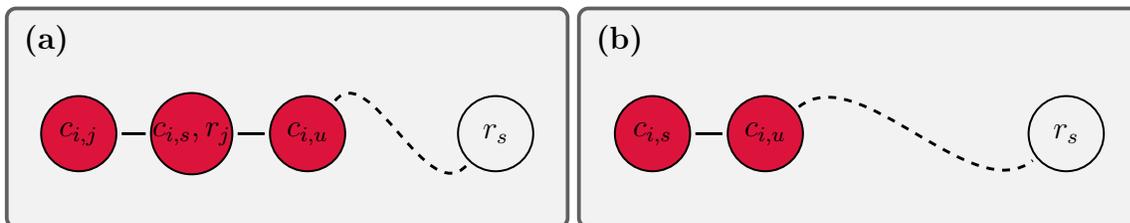


Figura 2.6: Como $c_{i,s}$ está obstruido, el algoritmo pasa a enfocarse a resolver la obstrucción para $c_{i,s}$, $c_{i,u}$.

- b) Si $r_j(t) \neq c_{i,s}(t)$, $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ intercambian sus etiquetas, de modo que $c_{i,s}$ aumenta la distancia a su objetivo en 1 y $c_{i,j}$ reduce la distancia a su objetivo en 1 tal como se muestra en la Figura 2.7. Si $c_{i,j}$ no se encuentra obstruida, entonces esta ficha se mueve al segundo vértice de la $c_{i,s}(t)r_j(t)$ -trayectoria (que coincide con el tercer vértice de la $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria que se tenía en el turno $I(t)$), reduciendo la distancia a su objetivo otra unidad adicional. De lo contrario, el algoritmo se llama recursivamente para resolver la nueva obstrucción entre $c_{i,j}$ y $c_{i,u}$.

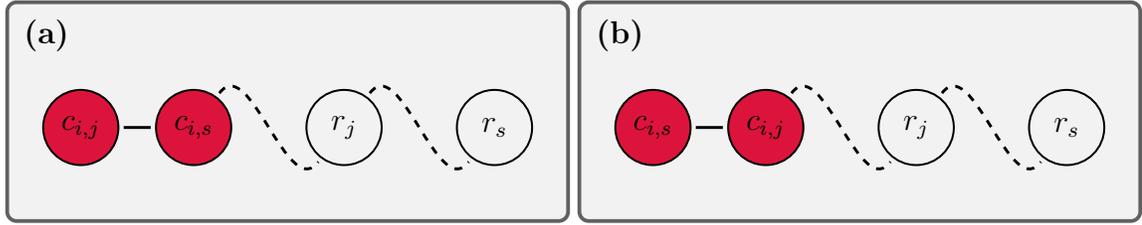


Figura 2.7: Las fichas $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ intercambian sus etiquetas, de manera que $c_{i,j}$ se acerca en uno a su objetivo, pero $c_{i,s}$ se aleja en uno (notando que lo mismo sucede si r_s aparece antes de r_j en la trayectoria). De aquí, el algoritmo decide qué hacer con $c_{i,j}$ dependiendo de si ésta se encuentra obstruida o no siguiendo la estrategia mostrada en la Figura 2.5 o en la Figura 2.6 (sustituyendo $c_{i,s}$ por $c_{i,j}$).

Véase que el algoritmo tiene una ejecución finita pues las llamadas recursivas de la línea 13 generan nuevas instancias en las que $c_{i,j}$ recorre la $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria inicial a través de reetiquetados de fichas, de manera que en cada uno de esos pasos $d_G(c_i(t+1), r(t)) = d_G(c_i(t), r(t))$. Si en alguna de las llamadas recursivas sucede que $c_{i,j}$ deja de estar obstruida, entonces esta podrá ejecutar la instrucción de la línea 16, reduciendo su distancia a r_j en 1 y, por tanto, $d_G(c_i(t+1), r(t)) = d_G(c_i(t), r(t)) - 1$.

De lo contrario, se tiene que $c_{i,j}$ llega a través de reetiquetados hasta estar a distancia 1 de r_j , por lo que, o $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ se obstruyen mutuamente, en cuyo caso ya se vio que $d_G(c_i(t+1), r(t)) = d_G(c_i(t), r(t)) - 2$, o no se obstruyen mutuamente, de manera que en la siguiente llamada recursiva la ejecución entra al `if` de la línea 4.

Al igual que en el caso anterior, si $c_{i,s}$ no está obstruida, entonces esta puede avanzar al siguiente vértice de la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria, reduciendo la distancia a su objetivo en 1 y, a su vez, reduciendo la suma de distancias de las fichas del policía a sus objetivos en 1 (i.e., $d_G(c_i(t+1), r(t)) = d_G(c_i(t), r(t)) - 1$). Por otra parte, si $c_{i,s}$ está obstruida, entonces esta ficha toma el lugar de $c_{i,j}$ en el algoritmo, de manera que la nueva meta es acercarse a $c_{i,s}$ a su objetivo r_s , ya sea a través de reetiquetados

o avanzando la ficha una posición sobre la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria. Como en la última pasada recursiva no se entró al `if` de la primera línea, la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria no tiene a vértice alguno de la $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria salvo $c_{i,s}(t) = r_j(t)$, por lo que el algoritmo no vuelve a encontrarse con obstrucciones que ya ha reetiquetado. Esto implica que existe un momento en el que el algoritmo reetiqueta dos fichas que se obstruyen mutuamente o es capaz de mover una ficha del policía a un vértice en el que no había una ficha de él, concluyendo así que el algoritmo finaliza y regresa una instancia en la que $d_G(c_i(t+1), r(t)) < d_G(c_i(t), r(t))$. ■

Finalmente, en aras de la demostración del teorema principal del capítulo, introducimos la siguiente definición junto con un lema auxiliar. Considérese un juego de k policías contra un ladrón en $F_k(S_n)$. Nótese que, al haber $\binom{k}{k-1} = k$ posibles $(k-1)$ -conjuntos de $\{c_1, \dots, c_k\}$, se pueden biyectar dichos $(k-1)$ -conjuntos con las k fichas de r . Más aún, dado que cada policía tiene k fichas, es posible que a cada uno de estos $(k-1)$ -conjuntos se les asignen, sin repetir, $k-1$ fichas, una por cada c_i que aparezca en tal conjunto. En este sentido, a cada ficha r_i se le puede asociar un conjunto de $k-1$ fichas de policías distintos, $\bar{c}_i = \{c_{1,i}, \dots, c_{k,i}\} \setminus \{c_{i,i}\}$. De este modo, como cada c_i tiene una ficha en todos los \bar{c}_j salvo para el $j = i$, entonces existe exactamente una ficha por cada policía, $c_{i,i}$, a la que no se le asoció ficha alguna de R . Así, $c_{i,i}$ es la **ficha libre** del policía c_i . Obsérvese que esta asignación induce, por cada policía, una función objetivo dada por las etiquetas de las fichas de c_i y r_i (el objetivo de $c_{i,j}$ es r_j), la cual será utilizada cuando sea necesario resolver obstrucciones. En las siguientes demostraciones utilizaremos este etiquetado y asignaciones de objetivos.

Decimos que el i -ésimo policía tiene **bajo asedio** a r en el turno $I(t)$ si cada ficha de c_i distinta de su ficha libre está capturando a su objetivo al turno $I(t)$, es decir, $c_{i,j}(t) = r_j(t)$ para cada $j \neq i$. Adicionalmente, decimos que r está **bajo asedio** en el turno $I(t)$ si cada policía tiene bajo asedio a r (en el mismo turno $I(t)$). El siguiente lema asegura que es posible poner bajo asedio a r .

Lema 2.1.4. *Sean n y k enteros positivos tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ y considérese un juego de policías y ladrones en $F_k(S_n)$ contra k policías. Si el ladrón juega de forma óptima, entonces C logra poner a r bajo asedio en un número finito de turnos.*

Demostración. En la estrategia descrita a continuación, cada policía c_i ignora a r_i y se dedica a mover sus fichas para capturar a los r_j con $j \neq i$, mientras que su ficha libre solo se moverá (salvo por aplicaciones del Algoritmo 1) si no está obstruida y hasta que el resto de sus fichas se encuentren capturando a su objetivo.

Así pues, dado un turno $I(t)$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, si c_i tiene al menos una ficha distinta de su ficha libre, $c_{i,j}$, que no se encuentra capturando a su objetivo r_j , entonces c_i procede a mover la ficha de este tipo cuyo índice j -ésimo sea mínimo, resolviendo obstrucciones con el Algoritmo 1 en caso de ser necesario. Esto implica que, en su turno, cada uno de los policías redujo la suma de las distancias de sus fichas a sus objetivos en al menos 1, es decir, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$d_G(c_i(t+1), R(t)) < d_G(c_i(t), R(t)).$$

Luego, si R mueve r_j (o pasa), esta se aleja a lo más 1 de distancia de las $k-1$ fichas que buscan capturarla (todas las $c_{i,j}$ con $j \neq i$), mientras que, como c_j ignora a r_j , posterior al turno de R se tiene que

$$\sum_{i \neq j} d_{S_n}(c_{j,i}(t+1), r_i(t+1)) = \sum_{i \neq j} d_{S_n}(c_{j,i}(t+1), r_i(t)) < \sum_{i \neq j} d_{S_n}(c_{j,i}(t), r_i(t))$$

de manera que, en cada turno, al menos un policía reduce la suma de la distancia de sus fichas a sus objetivos (sin contar la distancia de su ficha libre a su objetivo), mientras que el resto la mantiene constante.

Siguiendo esta estrategia es claro que existe un momento a partir del cual las fichas de un policía c_i (salvo su ficha libre) ya están capturando a sus correspondientes objetivos, i.e., c_i tiene bajo asedio a r . Si en este caso R se limita a mover r_i , entonces el resto de policías no podría reducir en cada turno la distancia de sus fichas no libres a sus objetivos (pues r_i es el objetivo de sus i -ésimas fichas). No obstante, c_i podría mover su ficha libre a 0 (pues si R está moviendo únicamente a r_i , entonces en el centro de la estrella no hay una ficha que obstruya a $c_{i,i}$), de manera que c_i captura en a lo más un turno, contradiciendo que R juega de forma óptima. Este razonamiento puede utilizarse de forma recursiva para ver que si R juega de forma óptima, entonces todos los policías logran que sus fichas no libres capturen a sus correspondientes objetivos, lo que implica que r está bajo asedio. ■

Llegamos así al resultado principal de la sección.

Teorema 2.1.5. *Si n y k son enteros positivos tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$, $c(F_k(S_n)) = k$.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.2, basta demostrar que $c(F_k(S_n)) \leq k$, es decir, que C puede capturar a R con k policías. Por el Lema 2.1.4, podemos asumir sin pérdida de generalidad que r se encuentra bajo asedio. Se consideran los siguientes casos:

1. Si es turno de C y

- a) r tiene una ficha en 0, supóngase sin pérdida de generalidad que es r_k , entonces c_k es un policía que no tiene una ficha capturando a r_k pero el resto de sus fichas está capturando a las demás fichas de r en hojas. Más aún, la ficha libre de c_k , $c_{k,k}$, se encuentra en una hoja, por lo que basta moverla a 0 para que c_k capture a r .
- b) r no tiene ficha en 0, entonces los policías proceden a llevar sus fichas libres a 0. En esta instancia, r queda acorralado puesto que mover cualquier r_i a 0 haría que c_i le terminara de capturar con su ficha libre. Por tanto, R se ve obligado a pasar y al siguiente turno cualquiera de los policías captura a r moviendo $c_{i,i}$ al vértice en donde se encuentre r_i .

2. Si es turno de R y

- a) r no tiene una ficha en 0, R está obligado a mover para no regresar al caso 1b). Si mueve r_i a 0, c_i procede a mover $c_{i,i}$ a 0, capturando a r .
- b) r tiene una ficha en 0, r_i , el ladrón está obligado a mover para no regresar al caso 1a). Nótese que no puede mover r_i a la hoja donde esté $c_{i,i}$, pues este se haría perder inmediatamente.

Así, si se mueve a una hoja que tenga la ficha $c_{j,j}$ con $j \neq i$, en este momento c_j pasa a capturar $k - 1$ de las fichas de r y es tal que tiene una ficha en 0, por lo que puede moverla a la hoja donde esté r_j para terminar de capturar a r .

De lo contrario, si r_i se mueve a una hoja vacía, entonces \bar{c}_i recaptura. Así, esta instancia se reduce al caso 2a).

Se concluye pues que $c(F_k(S_n)) = k$. ■

Presentamos a continuación el Algoritmo 2 para que C capture a R , el cual es tal que la configuración inicial de cada uno de los policías es la misma y corresponde a tener una ficha en el centro y el resto en las hojas de S_n — denotamos por C_0 a dicha configuración. Además, las fichas inician con un etiquetado ya establecido, de manera que las j -ésimas fichas de todos los policías inician en el mismo vértice.

Algoritmo 2: CAPTURA

Input: Dos enteros positivos k y n tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$, una configuración inicial para el ladrón en un juego de policías y ladrones sobre la gráfica de k fichas de S_n junto con un etiquetado de sus fichas.

Output: Un turno $I(t)$ en la que C captura a R .

```

1  $I(0) \leftarrow$  la posición en la que  $C$  y  $R$  se encuentran en su configuración inicial;
2  $t \leftarrow 0$ ;
3 while  $C$  no esté capturando a  $R$  al turno  $I(t)$  do
4   foreach  $1 \leq i \leq k$  do
5     if existe  $j \neq i$  tal que  $c_{i,j}$  no está capturando a  $r_j$  then
6        $j \leftarrow$  el mínimo índice tal que  $c_{i,j}$  no está capturando a  $r_j$ ;
7        $v_{i,j} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria;
8       if existe  $s$  tal que  $c_{i,s}(t) = v_{i,j}$  then
9         if  $s = i$  y  $v_{i,j} = r_j(t)$  then
10           $c_i(t+1) \leftarrow$ 
11             $(c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t)), (c_{i,s}, c_{i,s}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, c_{i,s}(t)), (c_{i,s}, c_{i,j}(t))\}$ ;
12          else
13             $c_i(t+1) \leftarrow$  DESOBSTRUCCIÓN( $k, S_n, I(t), c_{i,s}, c_{i,j}$ );
14          else
15             $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, v_{i,j})\}$ ;
16          else
17             $v_{i,i} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,i}(t)r_i(t)$ -trayectoria;
18            if existe  $s$  tal que  $c_{i,s}(t) = v_{i,i}$  then
19               $c_i(t+1) \leftarrow c_i(t)$ ;
20            else
21               $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,i}, c_{i,i}(t))\}) \cup \{(c_{i,i}, v_{i,i})\}$ ;
22           $t \leftarrow t+1$ ;
23           $I(t) \leftarrow r(t-1) \cup \bigcup_{i=1}^k c_i(t)$ ;
24          if  $C$  está capturando a  $R$  then
25            continue;
26          else
27             $I(t) \leftarrow (I(t) \setminus r(t-1)) \cup r(t)$ ;
28 return  $I(t)$ 

```

En la Figura 2.8 anexamos una partida en la que C utiliza la estrategia dada por el Algoritmo 2. Los colores y las figuras inducen un etiquetado, de manera que 1, 2 y 3 corresponden a azul, verde y rojo respectivamente, mientras que \bullet , \triangle y \square corresponden a punto, triángulo y cuadrado respectivamente.

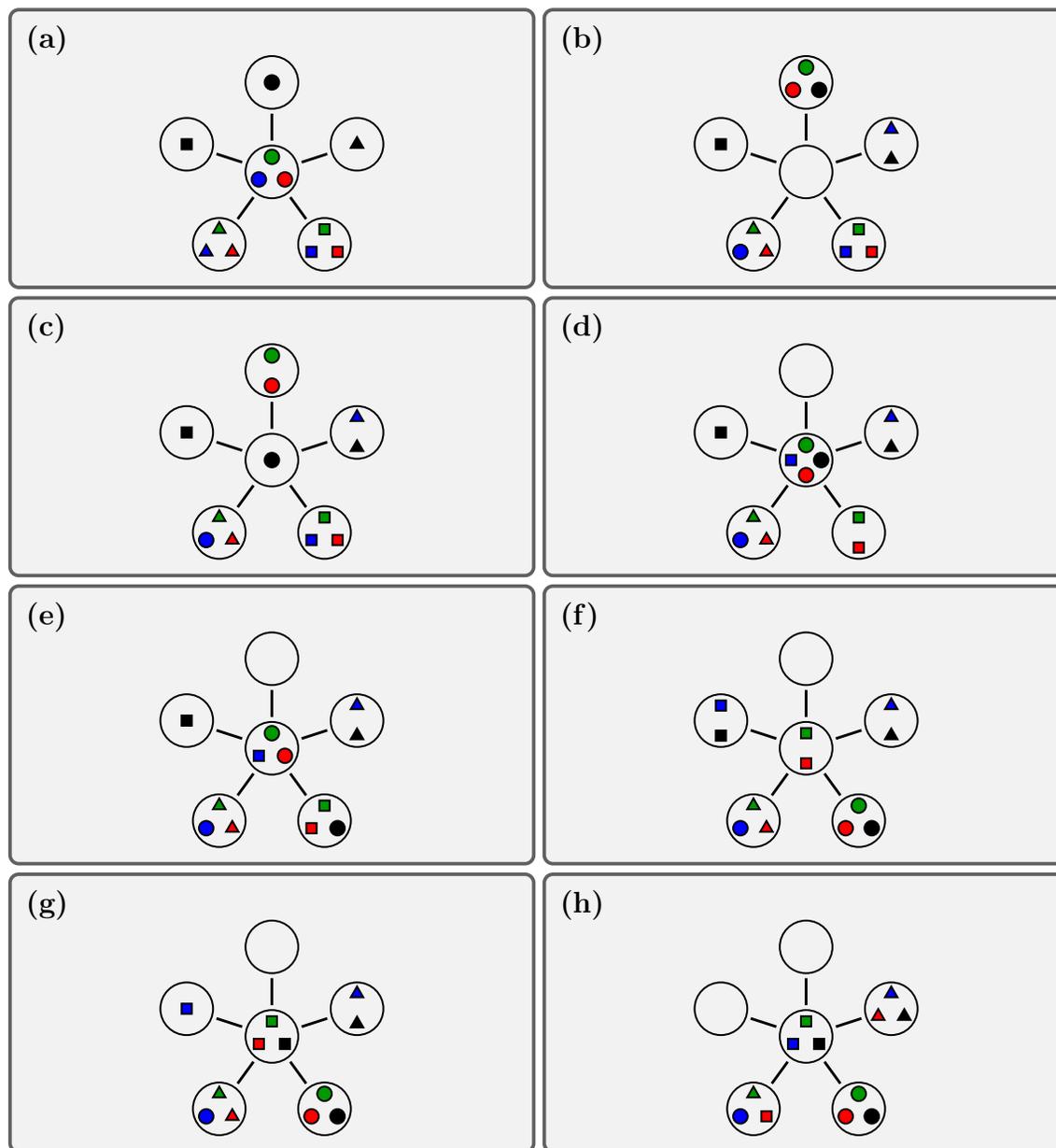


Figura 2.8: Se muestra una partida de policías y ladrones sobre S_5 con 3 fichas. Las escenas se leen siguiendo la enumeración, donde cada una representa la situación posterior al movimiento de uno de los jugadores. En (h), r se encuentra bajo asedio (todas las fichas salvo las libres de cada policía se encuentran capturando a sus respectivos objetivos).

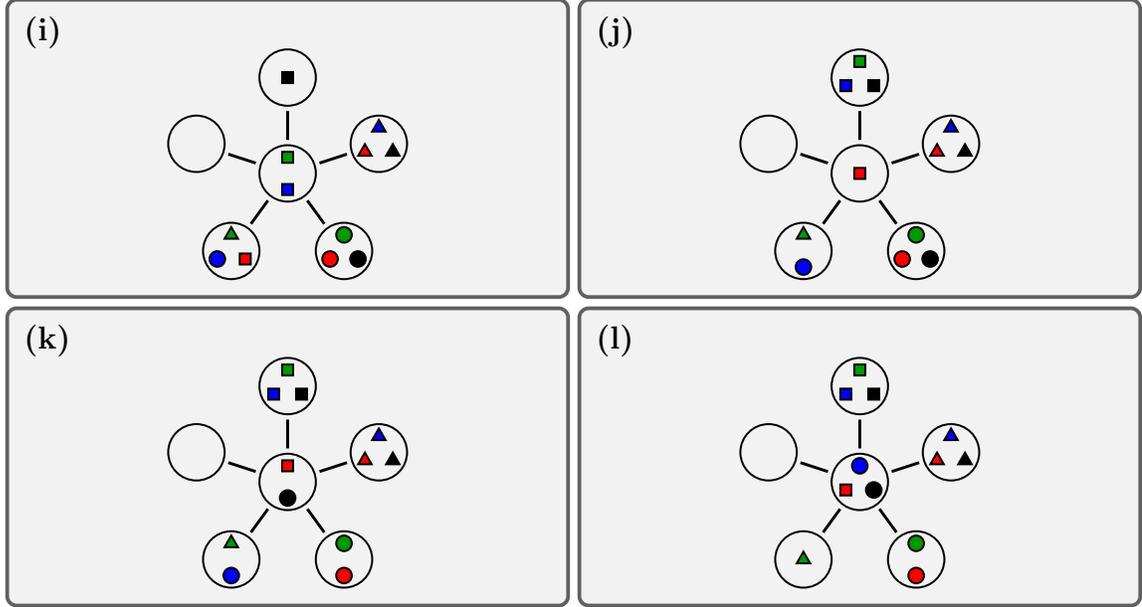


Figura 2.8: Finalmente, C termina por capturar dos turnos después con su policía azul.

2.2. Estrellas subdivididas

En busca de que el resultado anterior dé información acerca de más gráficas, procedemos a definir una generalización de las estrellas trabajadas en la última sección. Dado $n \in \mathbb{N}^+$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tomemos un $m_i \in \mathbb{N}$. Así, definimos una **estrella de n ramas subdivididas**, $S(m_1, \dots, m_n)$, que consiste en tomar la gráfica S_n y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, subdividir la arista $0i$ m_i veces. Véase que $S(0, \dots, 0) = S_n$. Más concisamente, $S(m_1, \dots, m_n) = (V, E)$, donde

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^n \{i_j : j \in \{0, \dots, m_i\}\} \right) \cup \{0\}$$

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^n \{i_j i_{j+1} : j \in [m_i] \setminus \{m_i\}\} \right) \cup \{0i_0 : i \in [n] \setminus \{0\}\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, llamaremos a la trayectoria (i_0, \dots, i_{m_i}) la **i -ésima rama** y la denotamos por P_i . Asimismo, nos referiremos por **vértice soporte de la i -ésima rama** al vértice inicial de P_i , i_0 . Dado $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $S_{n,m}$ a la gráfica $S(m_1, \dots, m_n)$ donde $m_i = m$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así llamaremos a $S_{n,m}$ la **estrella de n ramas con m subdivisiones**.

En busca de una cota inferior para el número policiaco de las gráficas de k fichas de las estrellas subdivididas, el primer objetivo de esta sección es dar una estrategia para R en función de la estrategia dada en el Teorema 2.1.2. Así pues, si T es un árbol y $x \in V_T$, sea $H = G[N_T[x]]$. Definimos una función s' de V_T en V_H dada por la regla de correspondencia

$$s'(v) = u_v,$$

donde u_v es el vértice de H que minimiza $d(v, u)$ para cada u vértice de H . Nótese que f está bien definida pues si $v \in V_H$, $s'(v) = v$. Por otra parte, si $v \notin V_H$, por ser T un árbol se tiene, por el Corolario 1.2.1, que existe una única vx -trayectoria en T , por lo que $f(v)$ es precisamente el penúltimo vértice de la vx -trayectoria. Definimos la función $s: V_{F_k(T)} \rightarrow \bigcup_{i=1}^k (V_H^i)$ dada por la regla de correspondencia

$$s(C) = \{s'(v): v \in C\}.$$

Notemos que esta función está bien definida pues s' lo está y la imagen de s consiste de un conjunto con al menos un elemento de V_H . Llamamos a $s(C)$ la **sombra** de C sobre H . De forma similar, dada una partida de policías y ladrones sobre la gráfica de k fichas de un árbol T , para cada c_i , podemos considerar la sombra de c_i sobre H , c_i^s , como un policía cuya j -ésima ficha está sobre la sombra de la posición de $c_{i,j}$, es decir

$$c_{i,j}^s(t) = s'(c_{i,j}(t)).$$

Nótese que puede pasar que c_i^s no determine un k -conjunto de V_H , pues s' no necesariamente es inyectiva. No obstante, esta definición de la sombra de un policía nos ayuda a describir la estrategia buscada para R .

Lema 2.2.1. *Si S es una estrella subdividida de n ramas y k es tal que $k \leq \frac{n+1}{2}$, entonces $c(F_k(S)) \geq c(F_k(S_n)) = k$.*

Demostración. Considérese un juego de policías y ladrones sobre $F_k(S)$ con $k - 1$ policías. Sea H la subgráfica inducida de S isomorfa a S_n . Por lo dicho en la demostración del Teorema 2.1.2, R puede escoger una configuración inicial sobre H con una ficha en 0 y de manera que ningún policía le captura $k - 1$ fichas en los vértices soporte de las ramas de S . Más aún, esto se cumple también para las sombras de cada policía pues, en caso de que c_i^s no determine un k -conjunto de S , este debe tener al menos dos fichas sobre una misma rama, por lo que c_i determina a lo más k conjuntos de $k - 1$ fichas en los vértices soporte de las ramas de S al igual que en el Teorema 2.1.2. Esto asegura que R sobrevive a su primer turno y, cuando C mueva sus policías, las sombras de estos no capturan a R pues:

- Si la ficha de c_i que se movió lo hizo sobre una rama de S , c_i^s no cambia su configuración.
- Si c_i movió una ficha fuera de una rama hacia 0, c_i^s aún no captura $k - 1$ fichas sobre las ramas y R tiene una ficha en 0, por lo que c_i^s no captura a R en su siguiente turno.
- Si c_i movió una ficha de 0 a una rama, c_i^s aun tiene que recapturar a 0 con otra ficha.

En los siguientes turnos, R pasa hasta que la sombra de al menos un policía le captura $k - 1$ fichas en los vértices soporte de las ramas de S . Nótese que R puede hacer esto pues, si algún c_i estuviera a un turno de capturarlo, sucede una de dos cosas:

1. Si la ficha r_j que aún no captura $c_{i,j}$ está en el vértice soporte de la i -ésima rama, dado que r tiene una ficha en 0, debe suceder que $c_{i,j}$ está en la i -ésima rama, por lo que c_i^s ya capturaba a R , contradiciendo que c_i^s no capturaba a R inicialmente.
2. Si la ficha r_j que no captura $c_{i,j}$ está en 0, entonces previamente c_i^s ya capturaba $k - 1$ fichas de R en ramas, lo cual es una contradicción pues inicialmente ello no sucedía.

Este argumento prueba que, si al final del turno de R , ningún policía tiene a su sombra capturando $k - 1$ fichas en vértices soporte de las ramas, entonces R sobrevive a su siguiente turno, por lo que se probará que R siempre puede volver a una de estas situaciones.

Supóngase que R tiene las $k - 1$ de sus fichas en vértices soporte capturadas por las sombras de policías c_1^s, \dots, c_m^s y sea r_1 la ficha de r en 0. Dado que en el turno anterior estos no capturaban las fichas de R en vértices soporte de las ramas, c_i^s no tiene ficha en 0 para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Además, estos cubren a lo más m ramas a las cuales r_1 no se puede mover pues algún c_i^s le terminaría por capturar (mas no necesariamente c_i). Por otra parte, las sombras $c_{m+1}^s, \dots, c_{k-1}^s$ pueden evitar que R mueva r_1 a, a lo más, otras $k - 1 - m$ ramas, pues alguno de estos pasarían a capturarlo $k - 1$ fichas en los vértices soporte de las ramas y, en su siguiente turno, c_i^s terminaría por capturar a R si este tiene una ficha en 0. Así, r_1 tiene a lo más $m + k - 1 + k - 1 - m = 2k - 2$ vértices soporte de las ramas a los cuales no se puede mover, y como $n \geq 2k - 1$, r puede mover su ficha a al menos un vértice soporte de las ramas.

En tanto la sombra de ningún policía que le capture $k - 1$ fichas en vértices soporte de las ramas tenga una ficha en 0 , R pasa, lo cual es posible pues, en caso de que algún policía c_i esté a un turno de capturarlo, este debió primero capturarlo $k - 1$ fichas con su sombra y, posteriormente, mover su ficha que aún no captura a 0 . Sean c_1, \dots, c_m los policías que, con sus sombras, le capturan $k - 1$ fichas en vértices soporte de las ramas a r y tienen la sombra de su última ficha que no captura en 0 . Se afirma que r tiene una ficha que está capturada simultáneamente por c_1^s, \dots, c_m^s . En efecto, al ser $k - 1$ policías y al estar captutando $k - 1$ fichas de r con su sombra, en el peor caso se tiene que a cada sombra de policía le falta una ficha distinta por capturar, de manera que, sin pérdida de generalidad, a c_i^s le resta capturar la ficha r_i de r . Finalmente, como $m \leq k - 1$, cada c_i^s está capturando la ficha r_k , de manera que R mueve r_k a 0 , terminando su turno con la sombra de ningún policía capturándole $k - 1$ fichas en los vértices soporte de las ramas de S . Por tanto, R puede iterar esta estrategia de modo que $c(F_k(S)) \geq k$. ■

Lo importante de la estrategia anterior es que esta no depende de que la gráfica sobre la que se toma su gráfica de fichas sea una estrella, pues la definición de sombras es válida para cualquier árbol y un vértice de él que se toma como centro. Así, tiene lugar el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea T un árbol. Si k es un entero positivo tal que $k \leq \frac{\Delta_T + 1}{2}$, entonces $c(F_k(T)) \geq k$.*

Introducimos ahora una nueva definición respecto a las condiciones en las que un policía tiene bajo asedio a r . Diremos que el i -ésimo policía tiene **bajo asedio débil** a r al turno $I(t)$ si cada ficha no libre de c_i está a distancia a lo más 1 de su objetivo.

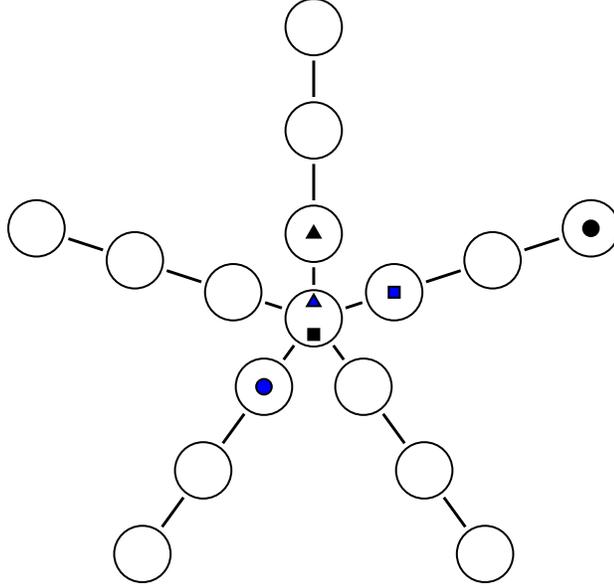


Figura 2.9: El policía azul tiene bajo asedio débil a r . Obsérvese que no es necesario que la ficha libre del policía se encuentre cerca de su objetivo.

Con este preliminar, es posible enunciar una generalización del Teorema 2.1.5.

Teorema 2.2.3. Sean n y k enteros positivos tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ y m un natural. Entonces $c(F_k(S_{n,m})) = k$.

Demostración. Del Corolario 2.2.2 se deduce que $c(F_k(S_{n,m})) \geq k$ por lo que resta ver que k policías son suficientes para capturar.

La estrategia de captura se divide en dos fases: el posicionamiento de los policías para poner bajo asedio débil a r y la captura de R sobre las ramas de $S_{n,m}$.

En la primera fase, las fichas de los policías ejecutan la misma estrategia dada por el Algoritmo 2. Por los mismos argumentos expuestos en el Teorema 2.1.5, después de un cierto número de turnos, un policía c_i pone bajo asedio a r (recordando que el Algoritmo 1 resuelve obstrucciones sin importar el árbol sobre el que se juega). El problema surge una vez que c_i asedia a r pues, si su ficha libre está obstruida, el Algoritmo 2 indica que c_i pasa. Así, si $m \geq 1$, r_i puede moverse sobre una misma rama, de modo que, en algún momento, el algoritmo hace que todos los policías distintos de c_i recapturen (pues \bar{c}_i recaptura) y c_i seguiría con su ficha libre obstruida. Así, R tendría una forma de ciclar el juego contra la estrategia dada por el Algoritmo 2 pues, en cada turno, ningún policía c_j reduciría el parámetro $d_{S_{n,m}}(c_j(t), r(t))$.

Para atender esta situación, C modifica su estrategia ligeramente, resolviendo la obstrucción de la ficha libre de c_i en lugar de pasar.

Se afirma que esta nueva estrategia propicia que, en algún turno, un policía c_j con $j \neq i$ logra reducir la suma de las distancias de sus fichas a sus objetivos (sin considerar su ficha libre). En efecto, si c_i tiene bajo asedio a r , y R mueve una ficha r_j con $j \neq i$, entonces, dado que el j -ésimo policía ignora a r_j , este puede avanzar o resolver obstrucciones con el Algoritmo 1 para reducir $d_{S_{n,m}}(c_j(t), r(t))$ (sin considerar la distancia entre $c_{j,j}$ y r_j). Análogamente, si R pasa, entonces todos los policías (salvo quizás c_i) reducen la suma de las distancias de sus fichas a sus objetivos sin considerar su ficha libre.

Por otra parte, si R mueve su ficha r_i indefinidamente para que lo anterior no suceda, basta demostrar que $c_{i,i}$ puede acercarse a ella en cada turno hasta que R se vea obligado a mover alguna otra ficha r_j . Si la ficha libre de c_i se encuentra obstruida, esta puede resolver la obstrucción de la forma usual, reduciendo la distancia de $c_{i,i}$ a r_i por $\ell + 1$ unidades, donde ℓ es el número de obstrucciones que se resuelven en la ejecución del algoritmo. Nótese que esta acción propicia que c_i deje de poner bajo asedio a r . No obstante, esto no representa un problema pues resolver la obstrucción hace que cada una de las ℓ fichas de c_i reetiquetadas por el Algoritmo 1 se posicione a distancia 1 de su objetivo correspondiente, de modo que c_i tiene bajo asedio débil a r . En los siguientes turnos, c_i se dedica a ejecutar el Algoritmo 2 hasta que nuevamente cada una de sus fichas distintas de la libre capturen a sus objetivos, situación que se alcanza después de ℓ turnos pues r solo mueve a la ficha r_i . Esto implica que en esos ℓ turnos r_i se aleja de $c_{i,i}$ en a lo más ℓ unidades, de manera que, cuando c_i vuelve a poner bajo asedio a r , la distancia entre $c_{i,i}$ y r_i se redujo al menos en una unidad. Así, c_i logra reducir la distancia entre su ficha libre y su objetivo, de manera que este algoritmo se puede iterar las veces que sean necesarias para que c_i termine por capturar a r . En caso de que c_i no resuelva una obstrucción al perseguir a r_i , estas dos fichas no necesariamente reducen su distancia (r_i podría alejarse de c_i sobre una rama). Sin embargo, r_i no puede alejarse indefinidamente de $c_{i,i}$, pues cada rama tiene un número finito de subdivisiones.

Por tanto, R está obligado a mover una ficha distinta de r_i , que es justo lo que se buscaba. Además, c_i mantiene bajo asedio débil a r en todo momento. Por tanto, aplicar la estrategia mencionada propicia que eventualmente todos los policías tengan bajo asedio débil a r .

Para la segunda fase, cada que R mueva la ficha r_i , si el policía c_i tiene bajo asedio débil a r , entonces prioriza que las fichas distintas de su ficha libre capturen a su objetivo; de otro modo, acerca su ficha libre hacia r_i , resolviendo obstrucciones de la forma usual. Este proceso se intercala para cada policía, y cada movimiento de ladrón, de manera que eventualmente un policía logra posicionar su ficha libre en el mismo vértice que su objetivo mientras tiene bajo asedio a r , i.e., R es capturado. ■

Observemos que el Teorema anterior no depende de la cantidad de vértices que haya en una estrella subdividida, por lo que se puede enunciar un resultado un poco más general.

Corolario 2.2.4. *Sean n y k enteros positivos tales que $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_i \in \mathbb{N}$. Entonces $c(F_k(S(m_1, \dots, m_n))) = k$.*

En resumidas cuentas, el número policiaco de la gráfica de k fichas de una estrella con al menos $2k - 1$ ramas subdivididas es k . Además, este nuevo algoritmo generalizado también resuelve la instancia en la que $m = 0$. Omitiremos de momento el algoritmo y un ejemplo de su ejecución en una partida pues, como se verá en la Sección 2.4, este mismo procedimiento nos es útil para probar un resultado aún más fuerte.

2.3. Estrellas de grado bajo subdivididas

A diferencia de lo expuesto en la Sección 2.1 donde, debido al Lema 1.4.1, el Teorema 2.1.5 daba una respuesta al número policiaco de cualquier estrella simple, resulta que no podemos concluir, del Teorema 2.2.3, el número policiaco de las gráficas de k fichas de las estrellas con n ramas subdivididas si $\frac{n+1}{2} < k$. Para ver esto, consideramos n un entero fijo y k_n el mínimo entero tal que $\frac{n+1}{2} < k_n$. Al ser este un mínimo, sucede que

$$k_n - 1 \leq \frac{n+1}{2} < k_n,$$

de manera que

$$k_n \leq \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2} < k_n + 1$$

y, por tanto, $k_n = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$.

En este orden de ideas, para cualquier entero positivo n , si $m = 0$, $|V_{S_{n,m}}| = n(m + 1) + 1 = n + 1$, de modo que, tal como se expuso al inicio de la Sección 2.1, $n \geq 2 \left(|V_{S_{n,m}}| - k \right) - 1$ para cualquier $k \geq k_n$, por lo que el número policiaco de $F_k(S_{n,m})$, acorde al Teorema 2.1.5, es $n + 1 - k$. No obstante, si $m \geq 1$, y recordando que $k \leq \frac{|V_{S_{n,m}}|}{2}$ debido al Lema 1.4.1:

$$\begin{aligned} 2 \left(|V_{S_{n,m}}| - k \right) - 1 &= 2(n(m + 1) + 1 - k) - 1 \\ &\geq 2 \left(n(m + 1) + 1 - \frac{n(m + 1) + 1}{2} \right) - 1 \\ &= n(m + 1) + 1 - 1 \\ &\geq 2n > n, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{n + 1}{2} < |V_{S_{n,m}}| - k,$$

por lo que no es posible utilizar el Teorema 2.2.3 para calcular el número policiaco de $F_{|V_{S_{n,m}}|-k}(S_{n,m})$ para cualquier $k \geq k_n$. No obstante, vale la pena notar que la estrategia descrita en dicho teorema no dependía del número de ramas que tiene la estrella subdividida, por lo que es posible concluir que $c(F_k(S_{n,m})) \leq k$ para cualesquiera n entero positivo, $m \geq 0$ y $k \geq 2$.

A manera de exploración, si $n = 3$, entonces $k_n = 3$, por lo que podemos dar una estrategia de escape para R en $F_3(S_{3,1})$ ante $n + 1 - k_n = 1$ policía, contrario al caso de $F_3(S_3)$ donde un policía basta para capturar a R (ver la Figura 2.10).

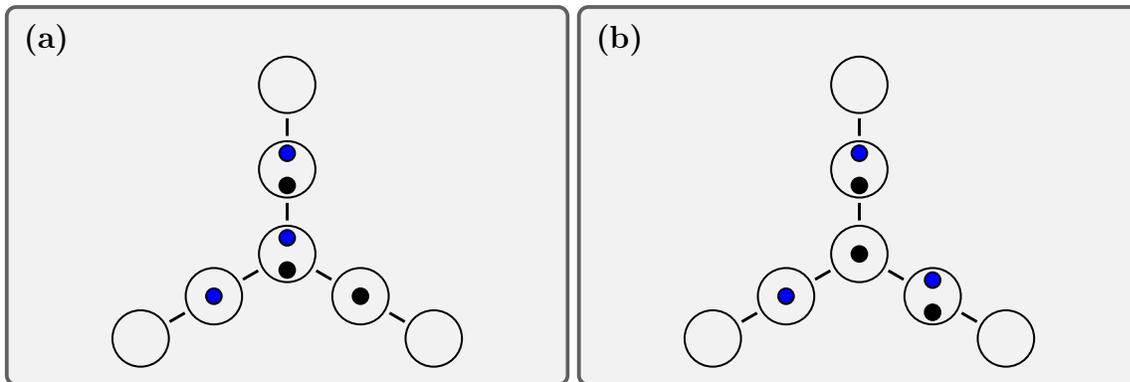


Figura 2.10: En (a), R escoge una posición sobre el S_1 inducido de manera que sobrevive al menos un turno.

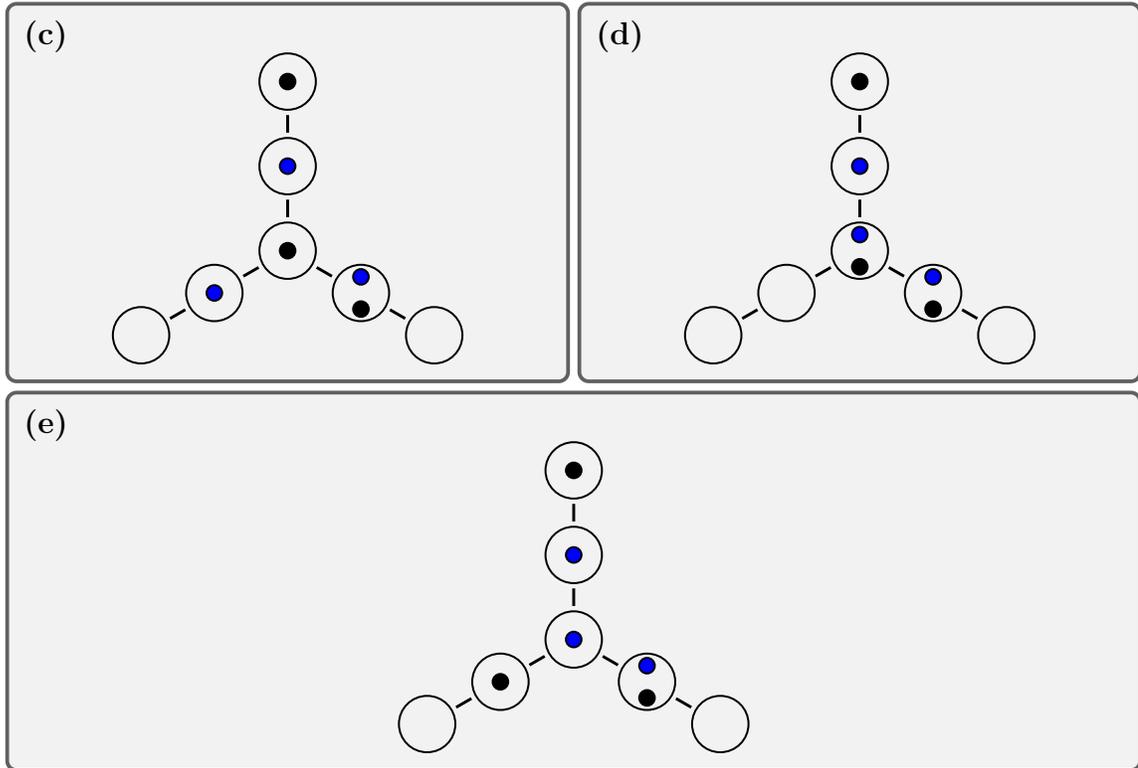


Figura 2.10: Posterior al movimiento de C , R mueve una de sus fichas hacia una hoja como en (c), de manera que, sin importar cómo se acerque C a R , este siempre puede mover hacia el lugar que acaba de desocupar la ficha de C que se acaba de mover.

Como solución al problema de esta sección, si $k \geq k_n$, acotaremos inferiormente el número policiaco para las gráficas de k fichas de varios tipos de estrellas subdivididas de n ramas. Previo a ello, demostraremos una desigualdad útil para la prueba de la cota inferior.

Lema 2.3.1. Si $k \geq 1$, entonces

$$\left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) < 2^k.$$

Demostración. Se procede por inducción sobre k . Para $k = 1$ es claro que $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 = 0$ y $2^k = 2$, por lo que la desigualdad es inmediata. De forma similar, si $k = 2$,

$$\left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) = 3 < 4 = 2^k.$$

Supóngase ahora que, dado $k \geq 2$, la desigualdad es cierta para cualquier $1 \leq n \leq k$. Luego si k es par,

$$\left(\left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+2) = \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1.$$

Además, para cualquier $k \geq 2$, $k+1 \geq 1$, de manera que por hipótesis de inducción se tiene que

$$\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \leq \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) < 2^k.$$

Así, sustituyendo en la ecuación anterior se concluye que

$$\left(\left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+2) < 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Por otro lado, si k es impar,

$$\begin{aligned} \left(\left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+2) &= \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \right) (k+2) \\ &= \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) (k) + 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \\ &= \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) (k) + k + 1 \\ &= \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1 \right) (k) + 2k + 1 \end{aligned}$$

Luego, para toda $k \geq 3$ (pues se asumió que k es impar) se tiene que $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1 \geq 1$, de modo que por hipótesis de inducción se sigue que

$$k \leq \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1 \right) (k) < 2^{k-1} \text{ y } k+1 \leq \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) < 2^k.$$

Por tanto, al sustituir en la ecuación anterior se obtiene que

$$\left(\left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+2) < 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^k = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

■

Recordemos que para una gráfica G , $\alpha'(G)$ es el número de emparejamiento de G . Así pues, pasamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. *Sea G una gráfica no vacía. Si $1 \leq k \leq \alpha'(G)$, entonces $c(F_k(G)) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

Demostración. Se demostrará que R tiene una estrategia de escape al jugar sobre $F_k(G)$ contra $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1$ policías.

Sea $M = \{e_1, \dots, e_{\alpha'(G)}\}$ un emparejamiento máximo de G . Además, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sean u_i y v_i los vértices extremos de e_i , los cuales son todos distintos por ser M un emparejamiento.

Nótese que en $F_k(G)$ existen 2^k vértices tales que, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe una y solo una ficha en u_i o en v_i . Sea S dicho conjunto de 2^k vértices.

Por otra parte, afirmamos que para cualquier $v \in F_k(G)$ sucede que $|N[v] \cap S| \leq k + 1$. En efecto, si $v \in S$, entonces este es adyacente a otros k vértices en S , uno por cada ficha que estuviese en u_i y pudiera moverse a v_i y viceversa. Por tanto, $|N[v] \cap S| = k + 1$. En caso de que $v \notin S$, $N[v] \cap S = \emptyset$ si existen e_i y e_j en M tales que v no tiene ninguna de sus fichas en los vértices u_i, u_j, v_i y v_j . Finalmente, supóngase sin pérdida de generalidad que v tiene una ficha en u_i o v_i para cada $i \in \{2, \dots, k\}$. Luego, $|N[v] \cap S| \leq 2$, donde la igualdad se da si y solo si la ficha de v que no está ni en u_1 ni en v_1 está en un vértice de G adyacente a ambos u_1 y v_1 . Luego, como $k \geq 1$, se sigue que $2 \leq k + 1$, concluyendo que $|N[v] \cap S| \leq k + 1$.

Esto último implica que en un juego de policías y ladrones sobre $F_k(G)$, un policía, sin importar su configuración actual, está a un turno o menos de a lo más $k + 1$ configuraciones en S . Luego, si C tiene $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1$ policías, estos prohíben a lo más $(\lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1)(k + 1)$ configuraciones iniciales si es que R quiere comenzar en una configuración en S y busca sobrevivir al primer turno de C .

Por tanto, en virtud del Lema 2.3.1 se sigue que R tiene

$$2^k - \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 \right) (k+1) \geq 1$$

posibles configuraciones iniciales, de modo que R sobrevive al primer turno de C y este tiene, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, una y solo una ficha en u_i o en v_i .

Por el resto del juego, R pasará en tanto no haya un policía de C a un turno de capturarlo. Por otra parte, si al menos un policía está a un turno de capturarlo, se demostrará que R puede mover sus fichas de modo que este sigue en una configuración en S y ningún policía está a un turno de capturarlo.

Así pues, supóngase sin pérdida de generalidad que, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, R tiene su i -ésima ficha en u_i , y c_1 es un policía tal que, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $c_{1,i}$ está en u_i y $c_{1,k}$ está en un vértice adyacente a u_k , de modo que c_1 está a un turno de capturar a R . Nótese que si $c_{1,k}$ está en la vecindad cerrada de v_k , R no

puede mover r_k si pretende quedarse en una configuración en S . No obstante, puede mover cualquier r_i de u_i a v_i con $i \in \{1, \dots, k-1\}$ quedando en una posición en S tal que c_1 está a dos turnos de capturarlo pues $c_{1,i}$ ya capturaba a r_i antes de que este se moviera.

Por otra parte, si c_1 es un policía que está a dos turnos de capturarlo, supóngase sin pérdida de generalidad que $c_{1,i}$ está en u_i para cada $i \in \{1, \dots, k-2\}$, es decir, c_1 ya captura las primeras $k-2$ fichas de r . Nótese aquí que a lo más dos movimientos de R , que lo mantienen en una configuración en S , son tales que este se pone a un turno de c_1 , a saber, mover r_{k-1} a v_{k-1} y mover r_k a v_k . Más aún, para que estos movimientos sean tales que le pongan a un turno de ser capturado por c_1 , debe suceder que dicho policía tenga sus últimas dos fichas sin capturar en v_{k-1} y v_k respectivamente.

Así, si p_1 es el número de policías de C a un turno de capturar a R , entonces claramente $p_1 \geq 1$ y hay $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 - p_1$ policías a al menos dos turnos de capturar a R . Luego, en el peor de los casos, R tiene

$$k - p_1 - 2 \left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 1 - p_1 \right)$$

posibles movimientos que lo mantienen en una configuración en S y son tales que, al realizarlos, ningún policía estará a un turno de capturarlo. Dicha cantidad se minimiza cuando p_1 es mínimo, por lo que, en el peor de los casos, R tiene $k+3 - 2 \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ movimientos posibles. Se generan dos casos:

1. Si k es impar, el número de movimientos posibles es

$$k + 3 - 2 \frac{k+1}{2} = 2.$$

2. Si k es par, el número de movimientos posibles es

$$k + 3 - 2 \frac{k+2}{2} = 1.$$

En cualquier caso se tiene que R siempre tiene al menos un movimiento que lo mantiene en una configuración en S y ningún policía está a un turno de capturarlo, concluyendo así que $c(F_k(G)) \geq \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$. ■

Si bien el teorema anterior nos da la cota que buscamos para el número policíaco de las gráficas de fichas de las estrellas subdivididas, antes de ello queremos explorar el alcance de esta cota para distintas k 's, pues el número de emparejamiento de una gráfica puede estar arbitrariamente alejado de la mitad de su orden, de manera que habría una gran cantidad de valores tales que $\alpha'(G) < k < \frac{|V|}{2}$. Un ejemplo de este caso son las ya mencionadas S_n cuyo número de emparejamiento es 1 pues cualquier arista de S_n tiene como extremo a 0.

Así pues, centramos nuestra atención en el problema de cómo calcular el número de emparejamiento de las estrellas subdivididas. Si S es una estrella de n ramas subdividida, al ser esta un árbol, dicha gráfica es bipartita, por lo que podemos calcular $\alpha'(S)$ de forma relativamente sencilla.

Teorema 2.3.3 (Fórmula de König-Ore). *Si $G[X, Y]$ una gráfica bipartita, entonces*

$$\alpha'(G) = |X| - \max \{|I| - |N(I)| : I \subseteq X\}.$$

Demostración. Sea $I \subseteq X$. Si $|I| - |N(I)| \leq 0$, es claro que $\alpha'(G) \leq |X| \leq |X| - (|I| - |N(I)|)$. Por otro lado, si $|I| - |N(I)| > 0$, sea M un emparejamiento máximo de G . Nótese que, por ser M emparejamiento máximo, existe $U \subseteq I$ tal que todo vértice de U no está cubierto por M y $|U| = |I| - |N(I)|$. Así,

$$\alpha'(G) = |M| \leq |X| - |U| = |X| - (|I| - |N(I)|).$$

Dado que lo anterior se cumple para cualquier $I \subseteq X$, se sigue que

$$\alpha'(G) \leq |X| - \max \{|I| - |N(I)| : I \subseteq X\}.$$

Por otra parte, sea F tal que $|F| - |N(F)|$ es máximo sobre todos los subconjuntos de X . Como $|\emptyset| - |N(\emptyset)| = 0$, se tiene que $|F| - |N(F)| \geq 0$. Así pues, considérese G' la gráfica resultante de G al agregar $|F| - |N(F)|$ vértices a Y y hacerlos todos adyacentes a X . Luego, si $I \subseteq X$,

$$\begin{aligned} |I| &= |I| + |N_G(I)| - |N_G(I)| \\ &= |N_G(I)| + (|I| - |N_G(I)|) \\ &\leq |N_G(I)| + (|F| - |N_G(F)|) = N_{G'}(I). \end{aligned}$$

Así, por el Teorema 1.3.2, G' tiene un emparejamiento que satura a X . Restringiendo M a las aristas de G se tiene un emparejamiento de G con al menos $|X| - (|F| - |N_G(F)|)$ aristas, por lo que

$$\alpha'(G) \geq |X| - \max \{|I| - |N(I)| : I \subseteq X\},$$

y, consecuentemente, se da la igualdad. ■

Este teorema implica que basta encontrar un $I \subseteq X$ que maximice la cantidad $|I| - |N(I)|$ dada una bipartición $[X, Y]$ de una gráfica bipartita G . Luego, si G es un árbol, este tiene una única bipartición de sus vértices en dos conjuntos X y Y independientes (salvo la bipartición en la que X y Y se intercambian).

Así pues, para S una estrella subdividida, supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in Y$, recordando que 0 es el único vértice de S cuyo grado puede ser mayor a 2. Dado $F \subseteq X$, diremos que F es **máximo** si $|F| - |N(F)| = \max \{|I| - |N(I)| : I \subseteq X\}$ y este es maximal bajo contención con dicha propiedad. Probaremos ahora algunos lemas auxiliares respecto a dichos conjuntos máximos.

Lema 2.3.4. *Sean $n \geq 1$ y $S[X, Y]$ una estrella subdividida de n ramas con partes X y Y tal que $0 \in Y$. Sean $F \subseteq X$ máximo e (i_0, \dots, i_{m_i}) una rama de S , donde $1 \leq i \leq n$ y m_i es la longitud de la rama. Si $i_{2j} \in F$ para alguna $0 \leq j \leq \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor$, entonces $\{i_{2l} : 0 \leq l \leq \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor\} \subseteq F$ y $0 \in N(F)$.*

Demostración. Supóngase sin pérdida de generalidad que $i = 1$. Se demostrará que $1_{2(j+1)}$ y $1_{2(j-1)}$, en caso de existir, están en F .

Como $1_{2j} \in F$, ambos 1_{2j-1} y 1_{2j+1} , en caso de existir, están en $N(F)$. Luego, supóngase que $1_{2j+2} = 1_{2(j+1)}$ existe y no está en F . Dado que $1_{2j} \in F \subseteq X$, $1_{2j+1} \in Y$ y es adyacente a $1_{2(j+1)}$, por lo que $1_{2(j+1)}$ está en X y, por tanto, es distinto de 0 , de manera que este tiene grado 1 o 2, generando dos casos:

1. Si tiene grado 1, $F' = F \cup \{1_{2(j+1)}\}$ es un conjunto de cardinalidad uno más que F y $N(F') = N(F)$ pues el único vecino de $1_{2(j+1)}$ también es vecino de 1_{2j} . Por tanto, F' es tal que $|F'| - |N(F')| > |F| - |N(F)|$, lo que contradice que F sea máximo.
2. Si tiene grado dos, nuevamente se generan dos casos:
 - a) Si $1_{2(j+1)+1} \in N(F)$, entonces, al igual que en el caso 1, $F' = F \cup \{1_{2(j+1)}\}$ es un subconjunto de X tal que $|F'| - |N(F')| > |F| - |N(F)|$.
 - b) Si $1_{2(j+1)+1} \notin N(F)$, entonces $F' = F \cup \{1_{2(j+1)}\}$ es tal que $|F'| = |F| + 1$ y $|N(F')| = |N(F)| + 1$, por lo que si bien $|F'| - |N(F')| = |F| - |N(F)|$, $F \subsetneq F'$, contradiciendo que F sea máximo.

Lo anterior implica que $1_{2(j+1)} \in F$. Análogamente se tiene que $1_{2(j-1)} \in F$, de modo que, procediendo de forma recursiva, $\{1_{2j} : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor\} \subseteq F$. Luego, como $1_0 \in F$ y este es adyacente a 0 , se sigue que $0 \in N(F)$. ■

En seguida damos una condición suficiente sobre un conjunto máximo F para asegurar que el vértice soporte de cada rama de una estrella subdividida está en S .

Lema 2.3.5. Sean $n \geq 1$ y $S[X, Y]$ una estrella subdividida de n ramas con partes X y Y tal que $0 \in Y$. Sea $F \subseteq X$ máximo. Si $0 \in N(F)$, entonces $i_0 \in F$ para cualquier $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Similar a la demostración del Lema 2.3.4, si existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i_0 \notin F$, entonces $F' = F \cup \{i_0\}$ es un conjunto tal que $|F'| - |N(F')| > |F| - |N(F)|$ si i_0 tiene grado 1 o si $i_1 \in N(F)$, mientras que $|F'| - |N(F')| = |F| - |N(F)|$ y $F \subsetneq F'$ si $i_1 \notin N(F)$. En cualquier caso se contradice que F es máximo, concluyendo que $i_0 \in F$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. ■

Concluimos con el siguiente resultado acerca de cómo puede ser un conjunto máximo.

Lema 2.3.6. Sean $n \geq 1$ y $S[X, Y]$ una estrella subdividida de n ramas con partes X y Y tal que $0 \in Y$. Sea $F \subseteq X$ máximo. Si $F \neq \emptyset$, entonces $F = X$.

Demostración. Sea $x \in F$. Nótese que todos los vértices en X son tales que tienen distancia impar a 0 e $i_0 \in X$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ pues $0 \in Y$. Así, $X = \{i_{2j} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor\}$, donde m_i es la longitud de la i -ésima rama. Luego, $x = i_{2j}$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor\}$.

Por el Lema 2.3.4, $\{i_{2j} : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor\} \subseteq F$ y $0 \in N(F)$. Consecuentemente, por el Lema 2.3.5, $i_0 \in F$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, utilizando el Lema 2.3.4 una vez por cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se sigue que $\{i_{2j} : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor\} \subseteq F$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, de modo que $X \subseteq F$ y $X = F$. ■

Así, el siguiente corolario nos da los posibles valores de α' para una estrella subdividida.

Corolario 2.3.7. Sean $n \geq 1$ y $S[X, Y]$ una estrella subdividida de n ramas con partes X y Y tal que $0 \in Y$. Entonces

$$\alpha'(S) = \min\{|X|, |Y|\}.$$

Demostración. Sea $F \subseteq X$ tal que $|F| - |N(F)| = \max\{|I| - |N(I)| : I \subseteq X\}$. Supóngase sin pérdida de generalidad que F es máximo. Por el Lema 2.3.6, $F = \emptyset$ o $F = X$. Así, $|F| - |N(F)| = 0$ para el primer caso, mientras que en el segundo se tiene que $|F| - |N(F)| = |X| - |Y|$ pues $N(X) = Y$. Luego, sustituyendo en la fórmula del Teorema 2.3.3 se obtiene que

$$\alpha'(S) = |X| - \max\{0, |X| - |Y|\} = \min\{|X|, |Y|\}.$$

■

Nuestro problema ahora se reduce a encontrar las cardinalidades de los conjuntos X y Y de la bipartición asociada a una estrella subdividida donde $0 \in Y$. Observemos que los elementos en estos conjuntos dependen de la longitud de cada una de las ramas de la estrella, de modo que necesitamos referirnos a la estrella subdividida S en función de sus subdivisiones, es decir, $S = S(m_1, \dots, m_n)$. Así pues proponemos el siguiente lema.

Lema 2.3.8. *Sea $n \geq 1$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $m_i \in \mathbb{N}$. Considérese una bipartición de $S(m_1, \dots, m_n)$ en partes X y Y tal que $0 \in Y$. Entonces*

$$|X| = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad |Y| = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1.$$

Demostración. Tal como se mencionó en la prueba del Lema 2.3.6, tenemos

$$X = \left\{ i_{2j} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Por tanto, es inmediato que

$$|X| = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor.$$

Además, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, hay $m_i + 1$ vértices en la i -ésima rama, de los cuales $\left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor$ están en X . Así, Y tiene $\left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil$ vértices de la i -ésima rama. Adicionalmente, $0 \in Y$, por lo que

$$|Y| = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1.$$

■

En virtud del Lema 2.3.8 y del Corolario 2.3.7, podemos dar una fórmula explícita para el número de emparejamiento.

Corolario 2.3.9. *Sea $n \geq 1$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $m_i \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\alpha'(S(m_1, \dots, m_n)) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor, \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1 \right\}.$$

Más aún, podemos precisar más el resultado anterior dependiendo de las paridades de los m_i .

Lema 2.3.10. *Sea $n \geq 1$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $m_i \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\alpha'(S(m_1, \dots, m_n)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{m_i + 1}{2}, & \text{si } m_i \text{ es impar para toda } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Del Lema 2.3.8 se deduce que

$$\begin{aligned} |X| - |Y| &= \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor - \left(\sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor + 1 - \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil \right) - 1 \\ &= n - 1 + \sum_{i=1}^n \left(\left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil \right). \end{aligned}$$

Además, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil = \begin{cases} 0, & \text{si } m_i \text{ es par,} \\ -1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, si $o \in \{0, \dots, n\}$ es la cantidad de m_i 's que son impares, se sigue que

$$|X| - |Y| = n - 1 - o.$$

Luego, si todos los m_i 's son impares, $o = n$, de modo que $|X| - |Y| = -1$ y, del Corolario 2.3.7 se concluye que

$$\alpha'(S(m_1, \dots, m_n)) = |X| - \max\{0, -1\} = |X| = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{m_i + 2}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^n \frac{m_i + 1}{2}.$$

De lo contrario, $o \leq n - 1$, de modo que $0 \leq n - 1 - o = |X| - |Y|$. Por tanto, del mismo Corolario se llega a que

$$\alpha'(S(m_1, \dots, m_n)) = |X| - \text{máx} \{0, |X| - |Y|\} = |Y| = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1.$$

■

Posterior a este análisis, podemos saber con certeza para cuales estrellas subdividas podemos acotar el número policiaco de su gráfica de fichas.

Lema 2.3.11. *Sea $n \geq 1$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $m_i \in \mathbb{N}$. Si $S = S(m_1, \dots, m_n)$, entonces $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$ si y solo si S tiene a lo más dos ramas de longitud par.*

Demostración. Si S no tiene ramas de longitud par, por el Lema 2.3.10 se tiene que

$$\alpha'(S) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i + 1}{2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{1 + \sum_{i=1}^n m_i + 1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i + 1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i + 1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$. Supóngase entonces que S tiene al menos una rama de longitud par y sea $1 \leq e \leq n$ el número de ramas de longitud par. Nuevamente del Lema 2.3.10 se llega a que

$$\alpha'(S) = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + 1 = \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ par}}}^n \frac{m_i}{2} + \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ impar}}}^n \frac{m_i + 1}{2} + 1,$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{1 + \sum_{i=1}^n m_i + 1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{1}{2} + \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ par}}}^n \frac{m_i + 1}{2} + \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ impar}}}^n \frac{m_i + 1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ impar}}}^n \frac{m_i + 1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ par}}}^n \frac{m_i + 1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ impar}}}^n \frac{m_i + 1}{2} + \sum_{\substack{i=1, \\ m_i \text{ par}}}^n \frac{m_i}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{e}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$ si y solo si $\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{e}{2} \right\rfloor = 1$, es decir, si y solo si $e \in \{1, 2\}$. ■

Combinando el Teorema 2.3.2 y el Lema 2.3.11 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.12. *Sea S una estrella subdividida. Si S tiene a lo más dos ramas de longitud par, $c(F_k(S)) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ para toda $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$. De lo contrario, $c(F_k(S)) \geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ para toda $1 \leq k \leq \alpha'(S) < \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$.*

De este punto en adelante nos centraremos en estudiar las triadas, que son aquellas estrellas subdivididas con exactamente 3 ramas. Al hacer esto, resulta que podemos dar un análogo al Corolario 2.3.12 para las $k > \alpha'(S)$. Para ello probaremos antes el siguiente lema.

Lema 2.3.13. *Sea $S = S(m_1, m_2, m_3)$ una triada. Entonces $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$ si a lo más dos ramas de S son de longitud par. En caso contrario, $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor - 1$.*

Demostración. La primera aseveración se sigue del Lema 2.3.11. Luego, si todas las ramas de S son pares, se sigue del Lema 2.3.10 que

$$\alpha'(S) = \sum_{i=1}^3 \left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor + 1 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{2} + 1,$$

mientras que

$$\left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + \sum_{i=1}^3 m_i + 1}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{2} + 2,$$

concluyendo que $\alpha'(S) = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor - 1$. ■

El lema anterior implica que, dada S una triada, el Corolario 2.3.12 acota inferiormente el número policiaco de $F_k(S)$ para cualquier $k \leq \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$, salvo si S tiene todas sus ramas de longitud par y $k = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$. Para atender este último caso, demostramos el siguiente lema respecto a la estructura de las gráficas de k fichas de las triadas.

Lema 2.3.14. *Sea S una triada y x una de sus hojas. Si $k < |V_S|$, entonces $F_k(S - x)$ es un retracto de $F_k(S)$.*

Demostración. Sean i la rama donde se encuentra x y m la longitud de dicha rama. Se analizan dos casos dependiendo de si $k \leq m$ o $k > m$.

Si $k \leq m$, se tiene que, para cualquier $C \in V_{F_k(S)}$, al menos un vértice de la i -ésima rama no está en C (pues la rama tiene $m + 1$ vértices); sea x_C el único vértice en $V_S \setminus C$ que minimiza la distancia a x . Luego, se define f como la función de $V_{F_k(S)}$ en $V_{F_k(S-x)}$ dada por la regla

$$f(C) = C \cup \{x_C\} \setminus \{x\}.$$

Se afirma que f es un homomorfismo de $F_k(S)$ en $F_k(S - x)$. En efecto, nótese que para cada $C \in V_{F_k(S-x)}$, $x_C = x$ pues este no se encuentra en C . Por tanto, $f(C) = C \cup \{x_C\} \setminus \{x\} = C$, de modo que $f[V_{F_k(S-x)}] = V_{F_k(S-x)}$. Luego, sean $C, D \in V_{F_k(S)}$ tales que $CD \in E_{F_k(S)}$. Si ninguno de los dos conjuntos tiene a x , se sigue que $f(C)f(D) = CD$, la cual también es una arista en $F_k(S - x)$ por ser esta una subgráfica inducida de $F_k(S)$.

Supóngase ahora que $x \in C$. Como $CD \in E_{F_k(S)}$, sean $c, d \in V_S$ tales que $C\Delta D = \{c, d\}$ y $cd \in E_S$. Si alguno entre c y d es x , supóngase sin pérdida de generalidad que $c = x$, de modo que $x_D = x$. Además d es el único vecino de x en S pues este es una hoja, de modo que $d = x_C$. Así,

$$f(C) = C \cup \{d\} \setminus \{x\} \text{ y } f(D) = D = C \cup \{d\} \setminus \{x\},$$

concluyendo que la arista CD se colpsa en el vértice $D \in V_{F_k(S-x)}$. Finalmente, supóngase que $c \neq x \neq d$, de manera que x está en ambos C y D . Si $x_C = x_D$,

$$f(C)\Delta f(D) = (C \cup \{x_C\} \setminus \{x\})\Delta(D \cup \{x_D\} \setminus \{x\}) = C\Delta D = \{c, d\},$$

de modo que $f(C)f(D) \in E_{F_k(S-x)}$ pues, al ser x distinto de ambos c y d , cd es una arista de $S - x$.

Luego, si $x_C \neq x_D$, supóngase sin pérdida de generalidad que $d(x_C, x) < d(x_D, x)$. Dado que $x_C \neq x_D$, debe suceder que $x_C \in D \setminus C$. Supóngase sin pérdida de generalidad que $x_C = d$. Más aún, c es adyacente a x_C y es tal que está en $C \setminus D$. Como x_C es un vértice la i -ésima rama, este tiene grado 2 en S y, por ser $d(x_C, x)$ menor a $d(x_D, x)$, se sigue que d es el único vértice tal que $d(d, x) = d(x_C, x) + 1$. Además, $d \in C \setminus D$, por lo que $x_D = c$ y

$$f(C)\Delta f(D) = (C \cup \{x_C\} \setminus \{x\})\Delta(D \cup \{x_D\} \setminus \{x\}) = \emptyset,$$

es decir, $f(C) = f(D)$. Por tanto, f es un homomorfismo y, consecuentemente, $F_k(S - x)$ es un retracto de $F_k(S)$.

Resta ver el caso cuando $k > m$. Al ser S una triada, la gráfica $S - \{i_0, \dots, i_m\}$ es una trayectoria. Supóngase sin pérdida de generalidad que $i = 3$, de manera que 1_0 y 2_0 son los únicos vértices adyacentes a 0. Sea B el conjunto de k -conjuntos de $V_{F_k(S)}$ tales que cada uno de estos contiene a los $m + 1$ vértices de la rama 3, es decir,

$$B = \left\{ C \in \binom{V_S}{k} : \{3_0, \dots, 3_m\} \subseteq C \right\}.$$

Por otra parte, sea B' el subconjunto de configuraciones C en B tales que 0 está en C y al menos uno entre 1_0 y 2_0 está en C , es decir,

$$B' = \{C \in B : 0 \in C, |C \cap \{1_0, 2_0\}| \geq 1\}.$$

Se demostrará que $H = F_k(S) [V_{F_k(S)} \setminus B']$ es un retracto de $F_k(S)$. En efecto, dado $C \in B'$, sean s y t enteros tales que

$$\begin{aligned} s &= \max \{i : 1_j \in C \text{ para toda } j \in \{0, \dots, i\}\} + 1 \\ t &= \max \{i : 2_j \in C \text{ para toda } j \in \{0, \dots, i\}\} + 1, \end{aligned}$$

donde s y t son cero en caso de que el conjunto sobre el que se toma el máximo respectivamente sea vacío. Dado que alguno entre 1_0 y 2_0 está en C , alguno entre s y t es mayor que 0. Si $s \geq 1$ y existe un vértice en la segunda rama que no está en C , sea $v = 2_j$ el vértice que no está en C con j mínimo. Luego, se define $f(C)$ como se muestra en la Figura 2.11.

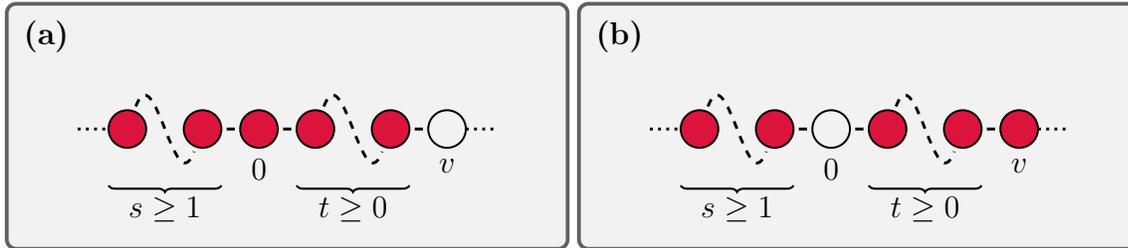


Figura 2.11: En esta y las siguientes figuras se omite la primera rama en cada una de las configuraciones, las cuales son tales que tienen una ficha en cada una de los vértices de la rama. Los vértices a la izquierda del 0 corresponden a los de la rama 1, mientras que los que están a la derecha son los de la rama 2. En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f .

Por otro lado, si todo vértice de la segunda rama está en C , por ser $k < |V_S|$, existe un vértice de la primera rama que no está en C . Sea $v = 1_j$ el vértice que no está en C con j mínimo. Así, se define $f(C)$ como en la Figura 2.12.

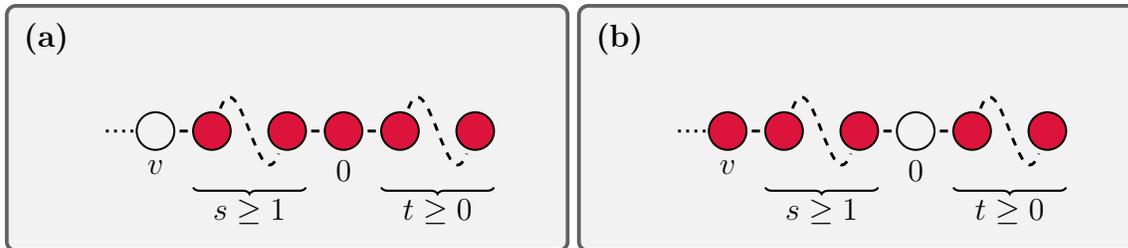


Figura 2.12: En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f .

Por otra parte, si $s = 0$, debe suceder que $t \geq 1$. Luego, f manda a C como en la Figura 2.13, dependiendo de si C tiene o no todos los vértices de la rama 2.



Figura 2.13: En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f .

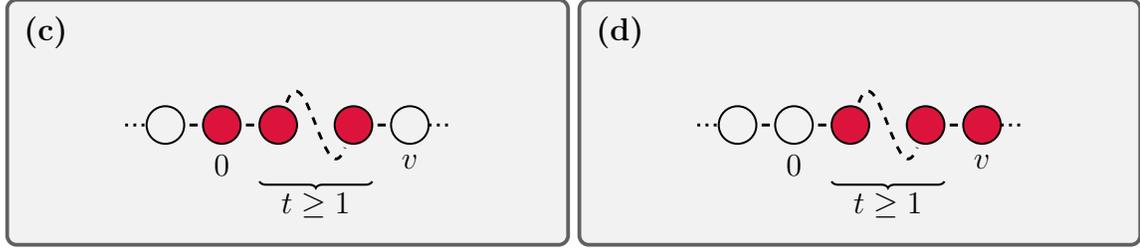


Figura 2.13: Análogamente, si C es como en (c), se muestra $f(C)$ en (d).

Para el resto de configuraciones, $C \notin B'$, por lo que se define $f(C) = C$. Así, por construcción, $f(C) = C$ para cada $C \notin B'$, por lo que basta demostrar que si $CD \in E_{F_k(S)}$ con $C \in B'$, entonces $f(C)f(D) \in E_H$.

Si C es como en (a) de la Figura 2.11, las configuraciones D adyacentes a este son como en la Figura 2.14 dependiendo de si $t = 0$ y si $v \in C$, notando que en todas las ocasiones $f(D)$ es adyacente a $f(C)$ en H o $f(C) = f(D)$.

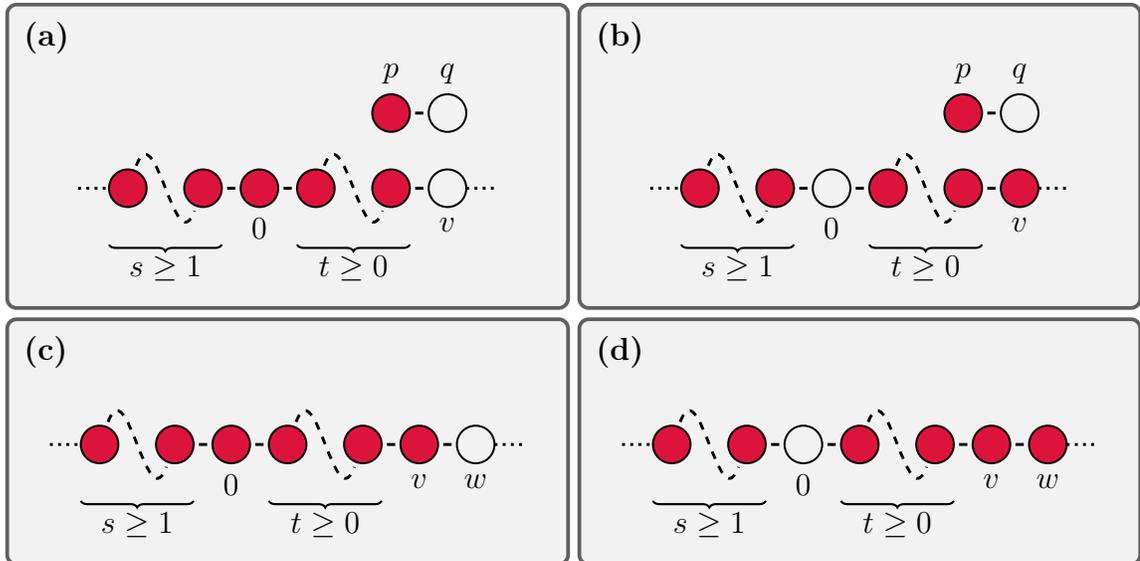


Figura 2.14: En (a), D no tiene a v y tiene a p , mientras que C tiene a q y no a p . Luego, de la regla descrita en la Figura 2.11 se tiene que $f(D)$ es como se muestra en (b) y $f(C)\Delta f(D) = \{p, q\} \in E_S$. Si $v \in D$, se puede ver como en (c), como en (e) si $t > 0$, o como en (g) si $t = 0$ (ver continuación de figura). Si D es como en (c), la regla de correspondencia dada por (b) de la Figura 2.11 resulta en $f(D)$ como en (d), notando que $f(C) = f(D)$ pues w está en C .

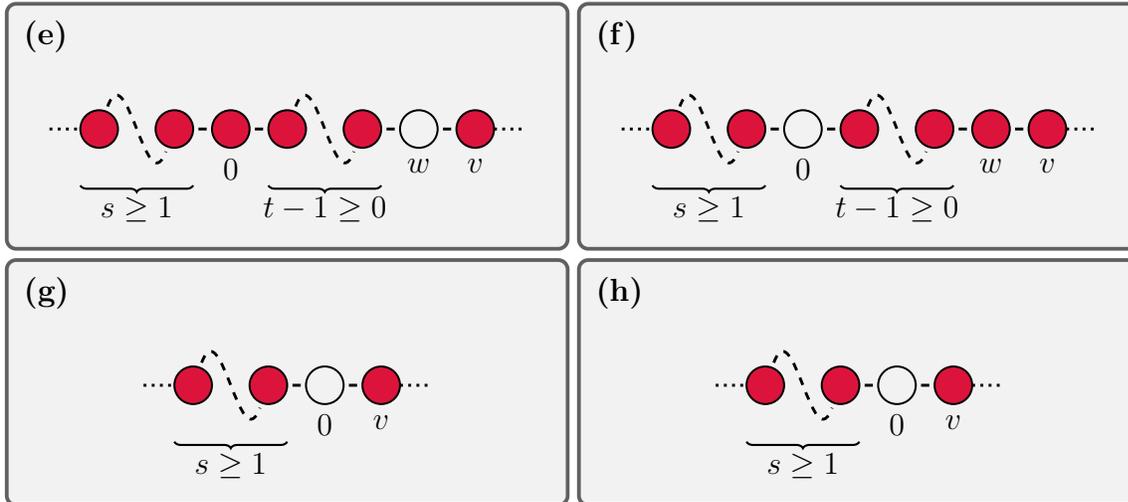


Figura 2.14: Si D es como en (e), la regla de correspondencia dada por (b) de la Figura 2.11 resulta en $f(D)$ como (f) de modo que $f(C) = f(D)$. Finalmente, para D como en (g), $f(D) = D = f(C)$.

Si D es adyacente a C y este último es como en (a) de la Figura 2.12 o como en (a) o (c) de la Figura 2.13, por razones similares a las expuestas anteriormente, $f(C) = f(D)$ o $f(C)f(D) \in E_H$, por lo que H es un retracto de $F_k(S)$.

Luego, para cada $C \in B \cap V_H$, si $0 \in C$, debe suceder que ni 1_0 ni 2_0 están en C . Así, C es adyacente en $F_k(S)$ a las configuraciones resultantes de mover la ficha en 0 a 1_0 y 2_0 , llamadas D y E , respectivamente. Si D' y E' son las configuraciones de las que provienen D y E , respectivamente, al mover la ficha en 3_0 a 0 , entonces son configuraciones distintas en $V_{F_k(S)} \setminus B$. Estas a su vez son adyacentes a la configuración C' mostrada en la Figura 2.15, por lo que se puede definir g como una función de V_H en $V_{F_k(S)} \setminus B$ dada por la regla $g(C) = C'$, donde C' está dado como en la Figura 2.15 dependiendo de si 0 está en C o no. Por otra parte, g es la identidad en $V_{F_k(S)} \setminus B$. Es claro que g está bien definida si 0 no está en C , mientras que si lo está, la configuración C' es única pues C , por ser una configuración en V_H , tiene exactamente dos vecinos D y E como se muestran en la Figura 2.15.

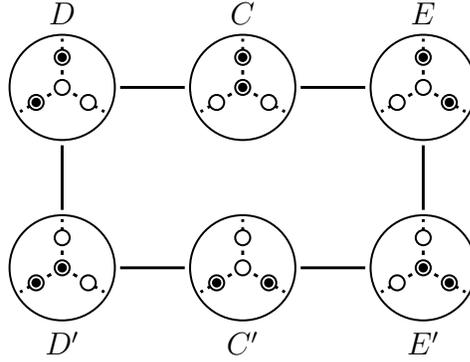


Figura 2.15: Se muestran una configuración en V_H con una ficha en 0 junto a sus configuraciones adyacentes en B , así como la vecindad de dichas configuraciones en el complemento de B (el renglón inferior). La existencia y unicidad de C' se tiene al deslizar la ficha en 0 de D' o E' hacia el único vértice al que se puede mover distinto de 2_0 y 1_0 respectivamente.

Se afirma que g es un homomorfismo. En efecto, dados C y D adyacentes en H , se tienen los siguientes casos:

1. Si ambos están en $V_{F_k(S)} \setminus B$, entonces $g(C)\Delta g(D) = C\Delta D$.
2. Si $C \in B$ y $D \in V_{F_k(S)} \setminus B$, por ser estos adyacentes debe suceder que $C\Delta D = \{1_0, 0\}$, por lo que $g(C) = D = g(D)$.
3. Si ambos C y D están en B y ninguno de estos tiene a 0, se sigue $g(C)\Delta g(D) = C\Delta D$ pues ambos $g(C)$ y $g(D)$ tienen a 0 y no tienen a 3_0 .
4. Si ambos C y D están en B y solo uno de los dos tiene a 0, por el dibujo de la Figura 2.15 se tiene que $g(C)$ y $g(D)$ son adyacentes.
5. Si ambos C y D están en B y ambos tienen a 0, por un argumento similar al expuesto en (a) de la Figura 2.14 se tiene que $g(C)$ y $g(D)$ son adyacentes.

Por tanto, $H' = F_k(S) [V_{F_k(S)} \setminus B]$ es un retracto de H y, dado que H es un retracto de $F_k(S)$, componiendo las funciones f y g se obtiene que H' es un retracto de $F_k(S)$ (pues la composición de f y g sigue preservando las adyacencias). Finalmente, nótese que las configuraciones de H' son k -conjuntos de V_S que no tienen todos los vértices de la rama 3, por lo que, al igual que en el caso cuando $k \leq m$ se puede dar un homomorfismo de H' en $F_k(S - x)$, concluyendo que $F_k(S - x)$ es un retracto de $F_k(S)$. ■

Así pues, terminamos por acotar el número policiaco para todos los valores de k en las gráficas de fichas de las triadas.

Lema 2.3.15. *Sea S una triada tal que todas sus ramas son de longitud par. Si $k = \lfloor \frac{|V_S|}{2} \rfloor$, entonces $c(F_k(S)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.*

Demostración. Sea x una hoja de S , de manera que $S - x$ es una estrella con exactamente dos ramas pares. Por el Lema 2.3.11,

$$\alpha'(S - x) = \left\lfloor \frac{|V_S| - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor - 1,$$

donde la última igualdad se sigue de que V_S tiene cardinalidad par. Así, del Lema 2.3.13 se tiene que $\alpha'(S - x) = \alpha'(S)$.

Luego, nótese que

$$k = \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|V_{S-x}|}{2} \right\rfloor + 1 =$$

por lo que del Lema 1.4.1 se deduce que

$$c(F_k(S - x)) = c(F_{|V_{S-x}|-k}(S - x)) = c(F_{|V_S|-k-1}(S - x)) = c(F_{k-1}(S - x)).$$

Luego, como $k - 1 = \alpha'(S - x)$, se sigue del Corolario 2.3.12 que

$$c(F_k(S - x)) \geq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil,$$

de modo que, por el Lema 2.3.14 y el Lema 1.5.1,

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq c(F_k(S - x)) \leq c(F_k(S)).$$

■

Cambiamos nuestro enfoque hacia determinar una cota superior para el número policiaco de la gráfica de k fichas de una estrella subdividida de n ramas cuando $k \geq k_n$. Como ya se mencionó en el Corolario 2.2.4, $c(F_k(S)) \leq k$ para cualquier $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{|V_S|}{2} \right\rfloor$. Por tanto, nuestro objetivo es mejorar dicha cota en caso de ser posible.

Para ello, creemos que la estrategia de captura dada en el Teorema 2.2.3 puede ser de gran ayuda, pues el siguiente resultado evidencia que, si C tiene k policías, este eventualmente logra capturar k fichas de r con uno de ellos, notando que esto no implica el final del juego pues puede que se esté jugando sobre la gráfica de n fichas de una estrella, con $n > k$.

Proposición 2.3.16. *Sea k un entero positivo y S una estrella subdividida. Considérese un juego de policías y ladrones en la gráfica de n fichas de S con $k \leq n$. Si C tiene al menos k policías, entonces algún policía logra capturar k fichas de r .*

Demostración. Para cada policía c_i , se define una función objetivo

$$o_i: \{c_{i,1}, \dots, c_{i,k}\} \rightarrow [r]$$

dada por

$$o_i(c_{i,j}) = r_{i+j-1} \pmod{n},$$

donde el módulo es tomado sobre el conjunto de representantes $\{1, \dots, n\}$ y la ficha $c_{i,1}$ es la ficha libre de cada c_i . Así, el primer policía puede ejecutar la estrategia dada por el Teorema 2.2.3 en busca de capturar las primeras k fichas de r . De forma similar, el i -ésimo policía utiliza la estrategia para capturar las k fichas consecutivas de r comenzando en la $i + j - 1$ -ésima, recordando que estas naturalmente están ordenadas ciclicamente, es decir, $r_1 < r_2 < \dots < r_n < r_1$.

Por otra parte, las fichas $c_{i,t}$ con $t > k$, a las cuales no se les asignó objetivo, no se moverán durante la ejecución de la estrategia salvo por obstrucciones. Más aún, si $c_{i,t}$ obstruye a $c_{i,j}$ con $j \leq k$ y $t > k$, estas fichas se reetiquetan. Esto no afecta a la estrategia aplicada a las primeras k fichas de cada policía pues esta forma de atender las obstrucciones de este tipo es equivalente a que la ficha que obstruía no estuviera en la gráfica, de manera que $c_{i,j}$ avanza como es usual.

Nótese que, dado que $k \leq n$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe un único policía, a saber c_i , que ignora la ficha r_i . Esto se debe a que el objetivo de $c_{i,1}$ es $i \pmod{n} = i$ e $i \pmod{n} \neq j \pmod{n}$ con $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos.

Así, cada que R mueva una ficha r_i con $i > k$, los policías ignoran dicho movimiento y ejecutan su estrategia, de manera que cada policía se acerca a completar una de las capturas con sus $k - 1$ fichas no libres o, en caso de que estas ya estuvieran capturando a sus respectivos objetivos, acercan su ficha libre hacia su objetivo. De lo contrario, si R mueve r_i con $i \leq k$, entonces al menos el i -ésimo policía se acerca a completar las capturas con sus $k - 1$ fichas no libres o, en caso de que estas ya estuvieran capturando a sus respectivos objetivos, acerca su ficha libre hacia su objetivo, recordando que r_i no se puede alejar indefinidamente de $c_{i,1}$.

Así, por los mismos argumentos expuestos en el Teorema 2.2.3, algún policía logra la captura de las k fichas que tenía como objetivo. ■

Cuando $n = k$, el lema anterior da una estrategia de captura ligeramente distinta a la descrita en el Teorema 2.2.3. Ello nos provee de una mejor comprensión de la estrategia expuesta, notando que esta no depende de las “prioridades” inducidas por las funciones objetivo de cada policía, sino de que cada policía ignora una ficha distinta.

Creemos que la estrategia mencionada puede ser de utilidad para describir una que, posiblemente con más policías, termine por capturar a R . En una primera instancia, si $n > k$ en la proposición anterior, los primeros k policías podrían dedicarse a capturar k fichas del ladrón, todos capturando un k conjunto distinto. En tanto, el resto de policías (menos de $n - k$ de modo que el número total de policías es menor a n) evitan que el ladrón se libere de las k capturas de alguno de los primeros k policías, a la vez que permiten que al menos uno entre c_1, \dots, c_k se acerque efectivamente a capturarlo. No obstante, creemos que la cantidad adicional de policías necesarios depende de el número de ramas en la estrella, por lo que habría que hacer un análisis respecto al grado del vértice 0 y su influencia en la estrategia.

2.4. Árboles

Dados los resultados y algoritmos propuestos en la sección anterior, cabe preguntarse si es posible utilizar la misma idea tanto para calcular el número policiaco de la gráfica de fichas de un árbol arbitrario, como para dar una estrategia ganadora con dicho número policiaco. Una vez más, separaremos nuestra respuesta en función de un parámetro del árbol.

En la Sección 2.2, el criterio fue respecto al número de ramas de la estrella subdividida, el cual vimos que cambiaba el número de policías necesarios dependiendo de si se tenían al menos tantas ramas como el doble de fichas menos uno. El análogo

a esta condición para árboles es la existencia de un vértice cuyo grado sea al menos dos veces el número de fichas menos uno; este será el único caso a explorar en la sección. En efecto, si k es un entero positivo, T es un árbol y v es un vértice tal que $d(v) \geq 2k - 1$, entonces $N[v]$ induce una estrella con al menos $2k - 1$ picos. Así, en virtud del Corolario 2.2.2, k es una cota inferior para el número policiaco de $F_k(T)$ cuando $\Delta_T \geq 2k - 1$ o, equivalentemente, $k \leq \frac{\Delta_T + 1}{2}$.

Por último, tal como se anticipó en la Sección 2.2, adjuntamos a continuación el algoritmo de captura para la gráfica de k fichas de una estrella subdividida con n ramas donde $k \leq \frac{n+1}{2}$, el cual afirmamos que también es un algoritmo de captura para la gráfica de k fichas de cualquier árbol T con $k \leq \frac{\Delta_T + 1}{2}$ (ver el Algoritmo 3).

Algoritmo 3: CAPTURA ÁRBOL

Input: Un entero positivo k y T un árbol tal que $k \leq \frac{\Delta_T + 1}{2}$, una configuración inicial para el ladrón en un juego de policías y ladrones sobre la gráfica de k fichas de T junto con un etiquetado de sus fichas.

Output: Un turno $I(t)$ en el que C captura a R .

```

1  $I(0) \leftarrow$  la instancia en la que  $C$  y  $R$  se encuentran en su configuración inicial;
2  $t \leftarrow 0$ ;
3 while  $C$  no esté capturando a  $R$  al turno  $I(t)$  do
4   foreach  $1 \leq i \leq k$  do
5     if existe  $j \neq i$  tal que  $c_{i,j}$  no está capturando a  $r_j$  then
6        $j \leftarrow$  el mínimo índice tal que  $c_{i,j}$  no está capturando a  $r_j$ ;
7        $v_{i,j} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,j}(t)r_j(t)$ -trayectoria;
8       if existe  $s$  tal que  $c_{i,s}(t) = v_{i,j}$  then
9         if  $s = i$  y  $v_{i,j} = r_j(t)$  then
10           $c_i(t+1) \leftarrow$ 
11             $(c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t)), (c_{i,s}, c_{i,s}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, c_{i,s}(t)), (c_{i,s}, c_{i,j}(t))\}$ ;
12          else
13             $c_i(t+1) \leftarrow$  DESOBSTRUCCIÓN( $k, T, I(t), c_{i,s}, c_{i,j}$ );
14        else
15           $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,j}, c_{i,j}(t))\}) \cup \{(c_{i,j}, v_{i,j})\}$ ;
16        else
17           $v_{i,i} \leftarrow$  el segundo vértice en la  $c_{i,i}(t)r_i(t)$ -trayectoria;
18          if existe  $s$  tal que  $c_{i,s}(t) = v_{i,i}$  then
19             $c_i(t+1) \leftarrow$  DESOBSTRUCCIÓN( $k, T, I(t), c_{i,s}, c_{i,i}$ );
20          else
21             $c_i(t+1) \leftarrow (c_i(t) \setminus \{(c_{i,i}, c_{i,i}(t))\}) \cup \{(c_{i,i}, v_{i,i})\}$ ;

```

```

21 |  $t \leftarrow t + 1;$ 
22 |  $I(t) \leftarrow r(t - 1) \cup \bigcup_{i=1}^k c_i(t);$ 
23 | if  $C$  está capturando a  $R$  then
24 | | continue;
25 | else
26 | |  $I(t) \leftarrow (I(t) \setminus r(t - 1)) \cup r(t);$ 
27 | return  $I(t)$ 

```

Así pues, procedemos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.4.1. *El Algoritmo 3 es correcto.*

Demostración. Análogo a lo que se probó en el Teorema 2.2.3, se demostrarán tres afirmaciones. En primer lugar, con la estrategia inducida por el Algoritmo 3 y bajo un juego óptimo de R , un policía pone bajo asedio a R . Una vez que algún conjunto de policías tiene bajo asedio a R , C logra que otro de sus policías ponga bajo asedio a R , mientras que aquellos que ya lo tenían bajo asedio pueden acercar sus fichas libres hacia sus objetivos para eventualmente recuperar el asedio. Finalmente, cuando todos los policías tengan bajo asedio a R , se demostrará que alguno de ellos captura a R .

Como el Algoritmo 2 y el Algoritmo 3 son iguales en cada línea salvo en la 18, ambos algoritmos realizan los mismos movimientos cuando se ejecuta el **if** de la línea 5, notando que la subrutina de desobstrucción se ejecutara correctamente pues esta se ejecuta correctamente sobre cualquier árbol (ver **input** del Algoritmo 1). En tanto ningún policía ponga bajo asedio a R , dicha línea se ejecuta para cada c_i , por lo que, al igual que se mencionó en el Teorema 2.2.3, un policía, sin pérdida de generalidad c_1 , logra poner bajo asedio a R .

Supóngase ahora que c_1, \dots, c_m tienen bajo asedio a R . Cada que R mueve su ficha r_i , el policía c_i se acerca a poner bajo asedio a R . Se sigue de lo anterior que, si R pudiera evitar que un nuevo policía le ponga bajo asedio, entonces por el resto de la partida debería mover alguna de sus fichas r_i con $1 \leq i \leq m$. Así, cuando R mueve alguno de estos r_i , C utiliza su turno para que cada uno de sus policías que capturaban r_i le recapturen, mientras que c_i acerca su ficha $c_{i,i}$ hacia r_i . Si $c_{i,i}$ nunca está obstruída, para dicho policía se ejecuta la línea 20 de manera que, análogo a como un policía se acerca a capturar al ladrón sobre cualquier árbol, $c_{i,i}$ mantiene su distancia hacia r_i y lo lleva hacia un vértice donde r_i ya no puede alejarse más de $c_{i,i}$.

Por otro lado, si $c_{i,i}$ está obstruída, la línea 18 indica que se debe resolver la obstrucción. Dado que c_i ya ponía bajo asedio a R , este policía resuelve obstrucciones únicamente mediante reetiquetamientos (ver la Figura 2.7), de manera que si la ejecución completa de la subrutina “movió” ℓ fichas de c_i que ya capturaban a sus respectivos objetivos, entonces $c_{i,i}$ se acercó en $\ell + 1$ unidades a su objetivo. Más aún, por como se resuelven este tipo de obstrucciones acorde al Algoritmo 1, las ℓ fichas que se reetiquetaron quedaron a distancia 1 de sus objetivos, por lo que c_i pierde el asedio sobre R , pero preserva el asedio débil. Debido a que c_i ya no pone bajo asedio a R , en los subsecuentes turnos se ejecutará el `if` de la línea 5 para recapturar las fichas r_j con $j \neq i$ con las fichas $c_{i,j}$ respectivas. Nótese que, si R mueve r_i en el resto de sus turnos, al cabo de ℓ turnos c_i logra poner bajo asedio a R una vez más, mientras que r_i se alejó de $c_{i,i}$ en a lo más ℓ unidades. Por tanto, esta sucesión de $\ell + 1$ turnos finalizó con R puesto bajo asedio por c_i y con la ficha $c_{i,i}$ al menos una unidad más cerca de su objetivo, de modo que estas sucesiones podrían iterarse tantas veces como sean necesarias para que $c_{i,i}$ se ponga a distancia 1 de r_i y, consecuentemente, si R pasa en sus siguientes turnos, c_i le termina por capturar (notando nuevamente que r_i no siempre se podrá alejar de $c_{i,i}$).

En tanto, si R mueve r_j con $j \neq i$, en su siguiente turno c_i avanza una de sus fichas no libres hacia su respectivo objetivo, de manera que c_i continúa a ℓ turnos de recuperar el asedio sobre R . De esta forma, luego de un número finito de movimientos, alguno de los c_s con $1 \leq s \leq m$ vuelve a poner bajo asedio a R y logró acercar su ficha libre hacia su objetivo. Es claro que, dependiendo de los movimientos de R , se alternan los dos casos antes descritos (R mueve r_i , o mueve r_j). Por tanto, cuando todos los policías tengan bajo asedio a R , y sus fichas libres estén a distancia 1 de sus objetivos, R está forzado a mover una ficha r_j con $j > m$. Así, c_j puede acercarse a poner bajo asedio a R , de manera que C consigue que otro policía ponga bajo asedio a R .

Lo anterior implica que, eventualmente, todos los policías de C tienen bajo asedio a R . Finalmente, se llega al caso en el que $m = k$ en la descripción de los párrafos anteriores, y se puede repetir una vez más la estrategia para preservar el asedio de todos, y que al menos un policía logre acercar su ficha libre hacia su objetivo. Por tanto, después de un número finito de turnos, R se ve obligado a pasar con al menos un policía a un turno de capturarlo, por lo que C captura a R . ■

De este modo, tiene lugar el siguiente corolario como producto del Teorema 2.4.1 y del Corolario 2.2.2.

Corolario 2.4.2. Si k es un entero y T un árbol tal que $2 \leq k \leq \frac{\Delta_T+1}{2}$, entonces $c(F_k(T)) = k$.

Finalmente, adjuntamos el desarrollo de una partida en la que C sigue la estrategia antes descrita (ver la Figura 2.16). Cabe mencionar aquí que la configuración inicial de C en este caso es escogida de la misma manera que en la Figura 2.8, notando que para ello se puede iterar sobre los vértices de T para encontrar uno de grado al menos $2k - 1$ y, posteriormente, posicionar las policías de C en la vecindad cerrada del vértice encontrado. Más aún, nótese que el único cambio entre el Algoritmo 2 y el Algoritmo 3 yace en la línea 18, donde se resuelve la desobstrucción de la ficha libre (en caso de haberla) una vez que un policía c_i ha puesto bajo asedio a r , notando que ello conlleva a que c_i pone bajo asedio débil a r y, si hubiera alguna ficha $c_{i,j}$ con $i \neq j$ que no capturase a su objetivo, entonces en los siguientes turnos se ejecutaría el código dentro del `if` de la línea 5.

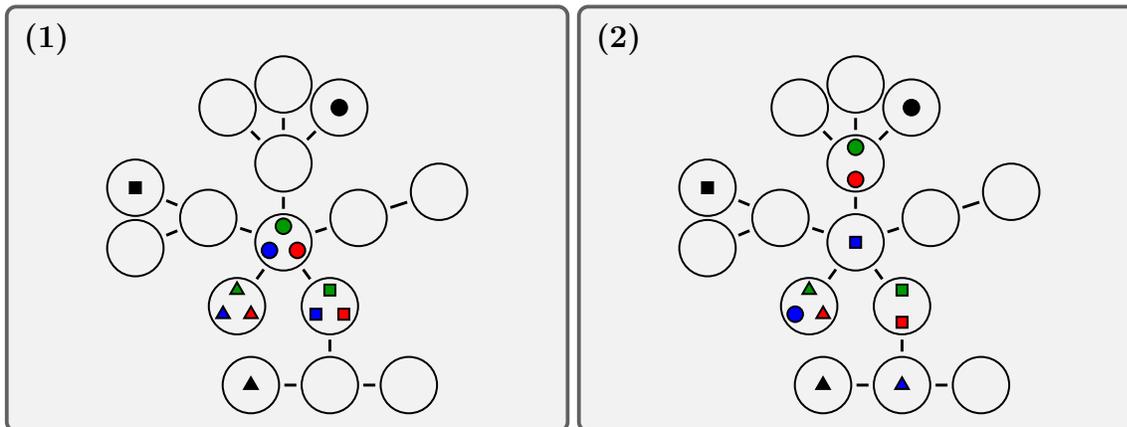
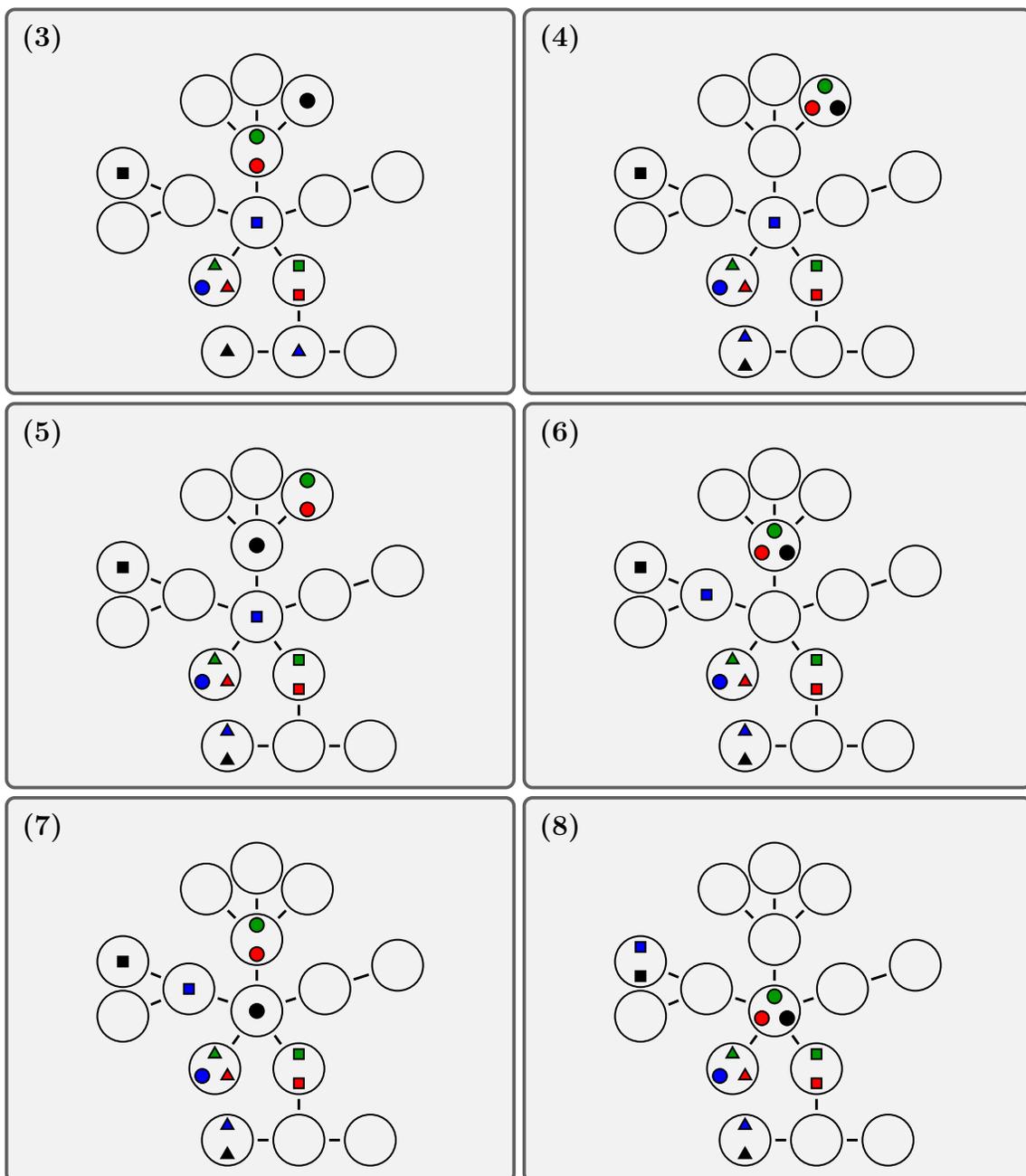
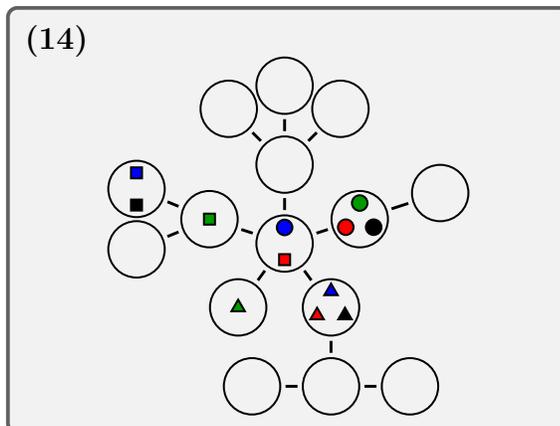
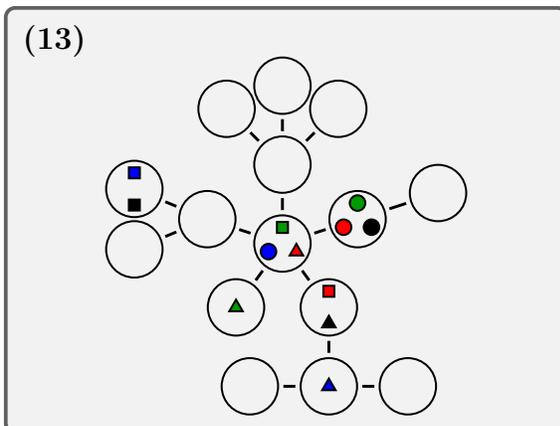
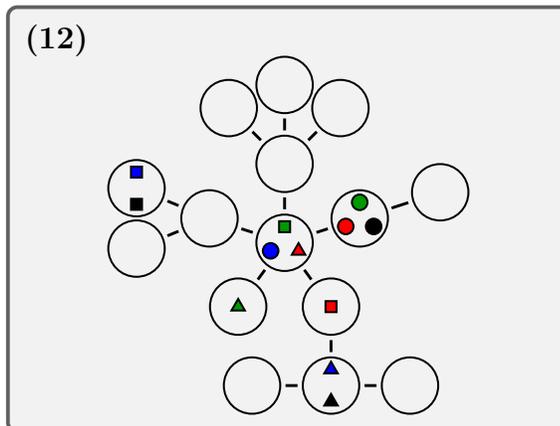
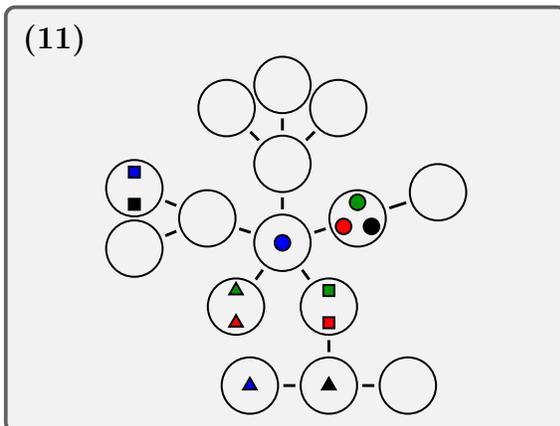
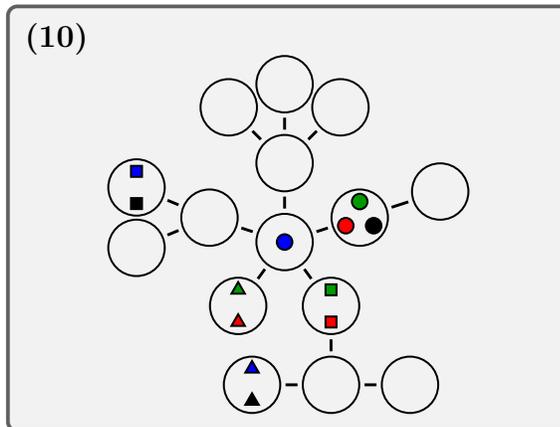
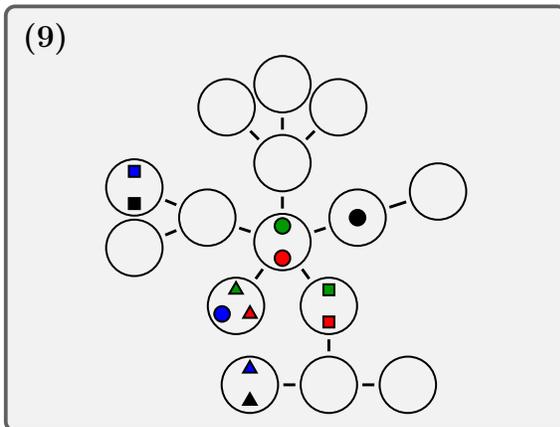


Figura 2.16: Las escenas impares muestran un turno de la partida posterior al movimiento de R (en (1) R acaba de escoger su posición inicial). Las escenas pares muestran el movimiento de C . En cada turno C utiliza la estrategia dada por el Algoritmo 3. Se recuerda que los policías 1, 2 y 3 reciben los colores azul, verde y rojo, respectivamente, mientras que el punto, el triángulo y el cuadrado representan su primera, segunda y tercera ficha, respectivamente.





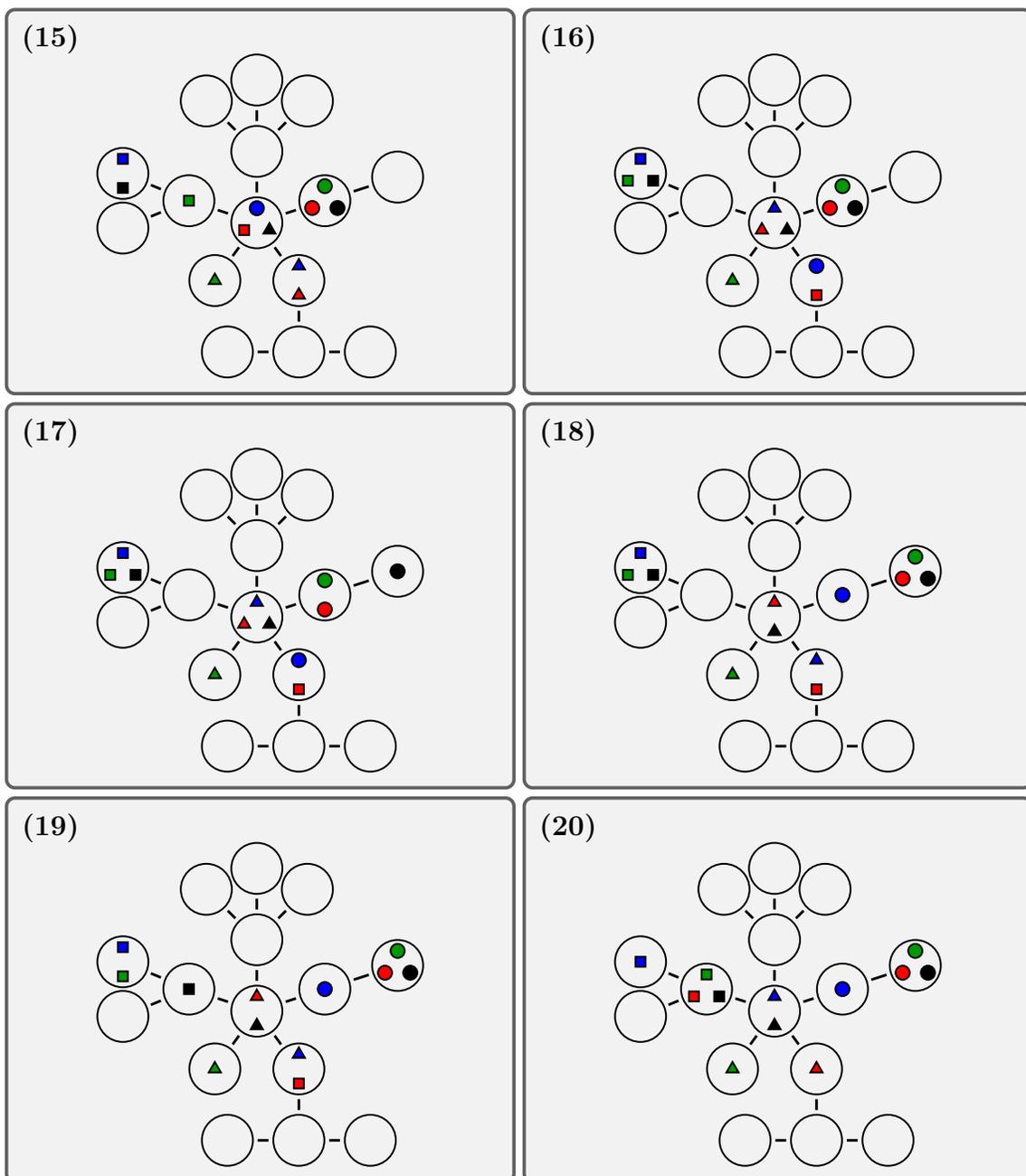
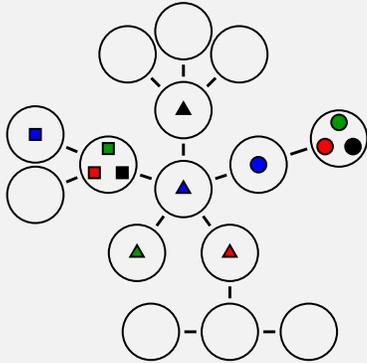
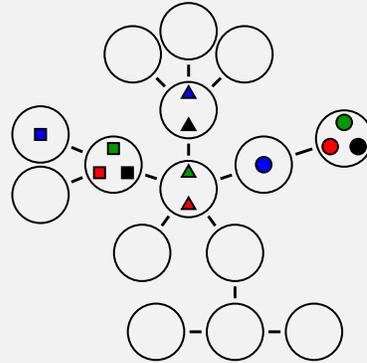


Figura 2.16: En (17), R acaba de mover r_1 y c_1 tiene bajo asedio a r , pero $c_{1,1}$ está obstruida. Por tanto, la línea 18 del Algoritmo 3 se ejecuta para poner a r bajo asedio débil. Al igual que c_1 en (18), c_3 realiza el mismo movimiento en (20).

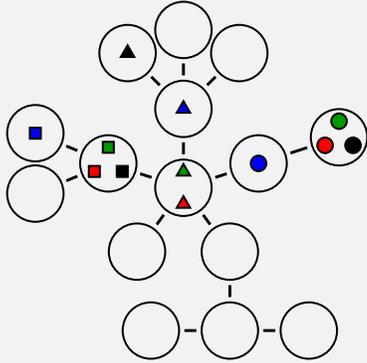
(21)



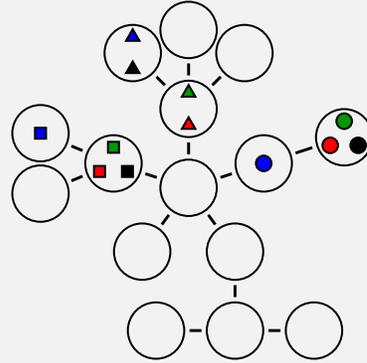
(22)



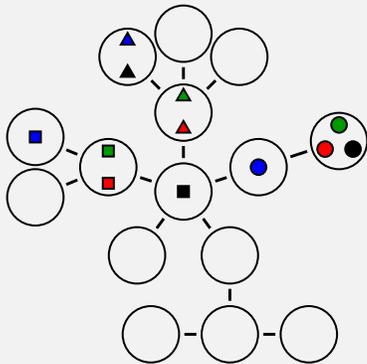
(23)



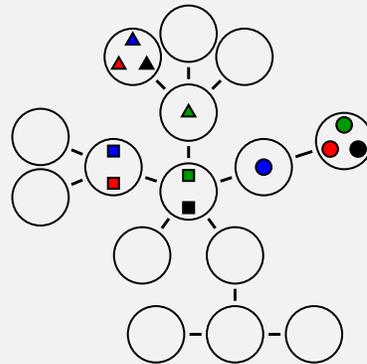
(24)



(25)



(26)



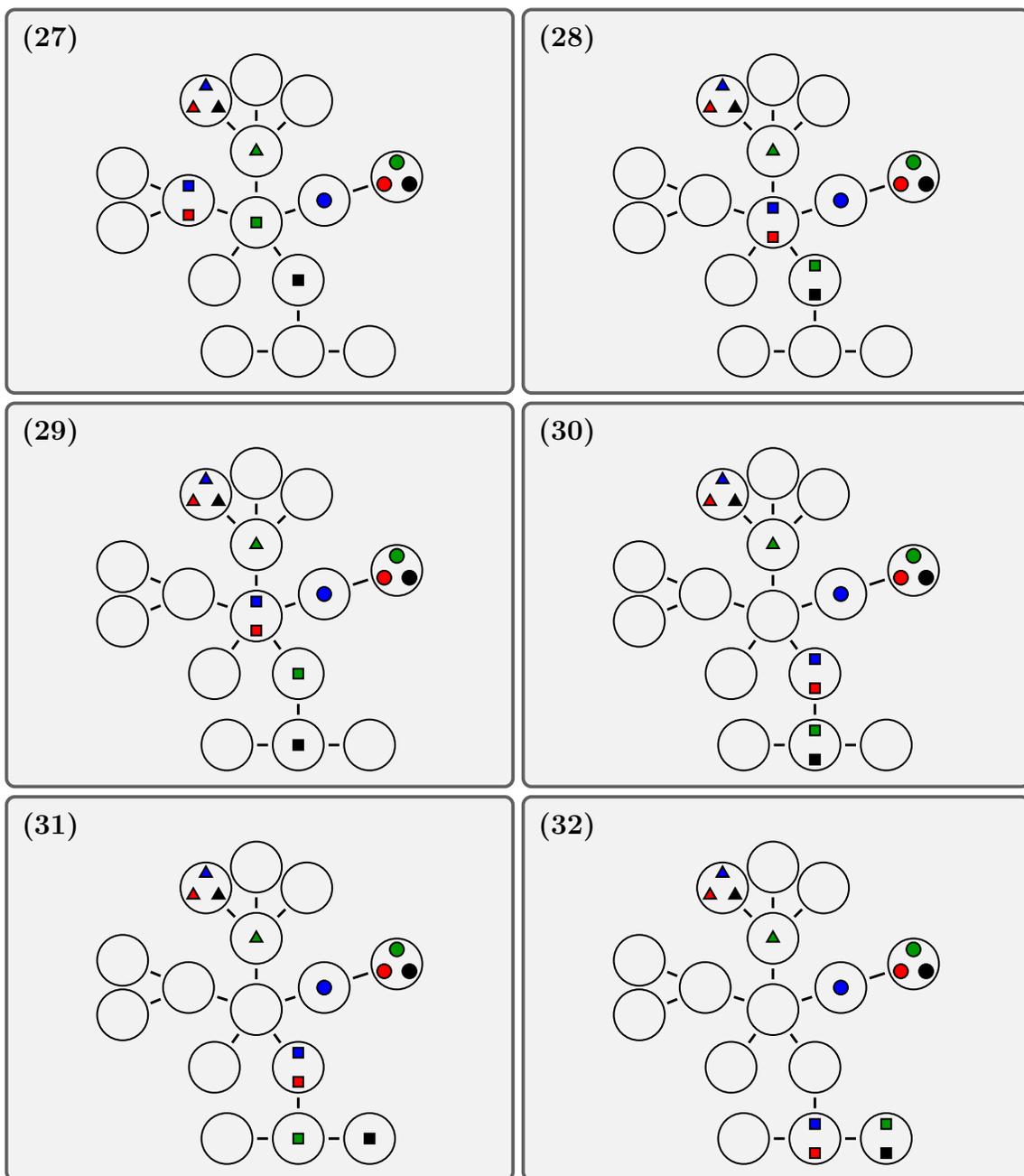


Figura 2.16: En (32), R tiene un único movimiento que no le hace perder. No obstante, de hacerlo, al siguiente turno c_1 terminaría por capturar, por lo que R pasa y al siguiente turno captura c_2 o c_3 .

Capítulo 3

Policías y ladrones sobre gráficas de fichas de interés

3.1. Petersen

Como un resultado agregado en una gráfica de interés particular distinta de un árbol, cambiamos nuestro enfoque a la gráfica de Petersen, P (ver la Figura 3.1).

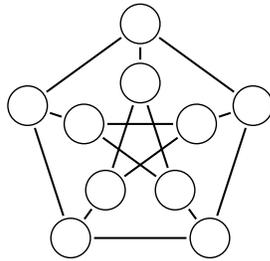


Figura 3.1: Gráfica de Petersen P .

Antes de revisar un caso de mayor complejidad, determinaremos el número policiaco de la gráfica de Petersen. Enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Si P es la gráfica de Petersen, entonces $\gamma(P) = 3$.*

Demostración. Nótese que la gráfica de Petersen tiene orden 10 y todos sus vértices tienen grado 3 y ningún lazo. Por tanto, para cualquier $S \subseteq V_P$ tal que $S = \{x, y\}$ con x y y distintos,

$$|N(S)| \leq d_P(x) + d_P(y) = 6 \leq 10.$$

Así, existe un vértice distinto de x y de y que no es adyacente a ninguno de los dos, por lo que $\gamma(P) > 2$. Por otro lado, se muestra en la Figura 3.2 un conjunto dominante de cardinalidad 3, concluyendo que $\gamma(P) = 3$.

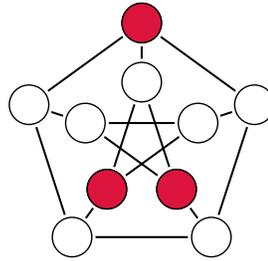


Figura 3.2: Los vértices en rojo forman un conjunto dominante.

■

Así, del resultado anterior y del Lema 1.5.2 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.2. Si P es la gráfica de Petersen, $c(P) \leq 3$.

Luego, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. Si P denota la gráfica de Petersen, $c(P) = 3$.

Demostración. En virtud del Corolario 3.1.2, basta demostrar que R tiene una estrategia de escape en un juego de policías y ladrones sobre P contra dos policías. Véase que, por lo mencionado en la Proposición 3.1.1, para cualquier par de vértices de P , existe al menos un vértice a distancia al menos 2, por lo que R puede escoger su posición inicial y sobrevive al primer turno de C .

Posterior al turno de C , si ningún policía se encuentra a un turno de capturar a r , R pasa. De lo contrario, supóngase sin pérdida de generalidad que solo c_1 está a un turno de capturarlo, de modo que r tiene a lo más dos posibles movimientos. Nótese que $|N_P(c_1(t)) \cap N_P(r(t))| = 1$ ya que de lo contrario habría un ciclo de longitud 3 en P , pero la longitud mínima de un ciclo en P es 5. Así, c_1 no restringe ninguno de los otros dos movimientos para r . Similarmente, $|N_P(c_2(t)) \cap N_P(r(t))| \neq 2$ pues, de lo contrario, P tendría un ciclo de longitud 4. Así, r tendría al menos un vértice al cual moverse para sobrevivir al siguiente turno de C .

Finalmente, si dos policías están a un turno de capturar a r , por lo dicho anteriormente se tiene que ninguno de ellos es adyacente a un vecino de $r(t)$. Por tanto, r tiene al menos un movimiento disponible tal que sobrevive al siguiente turno de C . Esta estrategia se puede iterar siempre que sea necesario, por lo que $2 < c(P)$ y, consecuentemente, $c(P) = 3$. ■

Cambiando nuestra atención a la gráfica de 2 fichas de Petersen, observemos que, de la Proposición 3.1.1, se tiene que la distancia máxima entre dos vértices de P es 2. Una observación útil acerca de P que se deduce de la Figura 3.2 es que cualesquiera dos de sus vértices están a lo más a distancia 2. Además, dado que P no tiene ciclos de longitud 4, para cualesquiera dos vértices no adyacentes, u y v , existe una única uv -trayectoria de longitud 2. Así, proponemos la siguiente cota superior.

Teorema 3.1.4. *Si P denota la gráfica de Petersen, entonces $c(F_2(P)) \leq 4$.*

Demostración. La estrategia ganadora de C con 4 policías se divide en tres etapas:

1. La captura de r_1 con $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ y la captura de r_2 con $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$.
2. El posicionamiento de r_1 y r_2 en vértices adyacentes.
3. La captura de R .

Para la primera etapa, como $\gamma(P) = 3$, existe un conjunto dominante $S \subseteq V_P$, con $|S| = 3$. Luego, C puede escoger su configuración inicial de manera que, para cada dos vértices x y y en S , existe $i \in \{1, \dots, 4\}$ tal que c_i tiene sus fichas en x y y (véase (a) en la Figura 3.3). En su primer turno después de escoger su configuración inicial, $c_{1,1}$ y $c_{2,2}$ pueden capturar a r_1 y r_2 respectivamente. Esto se puede ver en (b) de la Figura 3.3 pues en cada vértice hay al menos dos colores, de modo que si $c_{1,1}$ y $c_{2,2}$ no estuvieran a distancia 1 de sus objetivos, estos solo intercambiarían sus colores (y sus formas en caso de ser necesario). Por otro lado, $c_{3,1}$ y $c_{4,2}$ se mueven para

capturar r_1 y r_2 respectivamente. Así, si c_3 tuviera alguna de sus fichas a distancia 1 de r_1 , este reetiqueta en caso de ser necesario para que $c_{3,1}$ capture a r_1 en el mismo turno (y lo mismo sucede para $c_{4,2}$). No obstante, para cada $i \in \{1, \dots, 4\}$, hay un vértice de S en el que no hay ninguna ficha de c_i , de modo que $c_{3,1}$ y $c_{4,2}$ puede que no capturen a sus objetivos en el primer turno de C . A pesar de ello, dado que la distancia entre cada par de vértices de P es a lo más 2, en el peor de los casos ambos $c_{3,1}$ y $c_{4,2}$ se encuentran a distancia 1 de sus respectivos objetivos (véase (b) en la Figura 3.3).

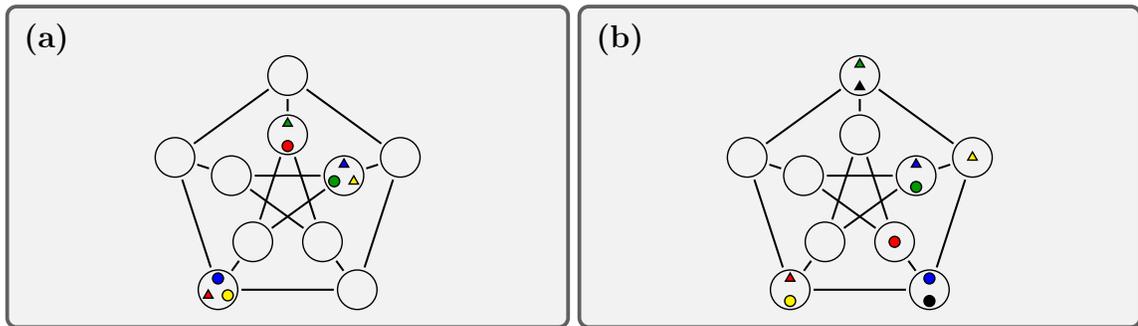


Figura 3.3: Una posible configuración inicial se muestra en (a), donde todas las fichas yacen en los tres vértices de un conjunto dominante. Se fijan colores para diferenciar distintos policías, de modo que el azul corresponde a c_1 , verde a c_2 , rojo a c_3 y amarillo a c_4 . De forma similar, las figuras corresponden al número de ficha del policía correspondiente, implicando que el punto azul representa la ficha $c_{1,1}$, mientras que el triángulo verde representa la ficha $c_{2,2}$. En (b) se muestra una situación posterior al primer turno de C .

Si R pasa, ambos $c_{3,1}$ y $c_{4,2}$ capturan sus respectivos objetivos al siguiente turno. De otro modo, supóngase sin pérdida de generalidad que R mueve r_1 . Esto lleva a que $c_{4,2}$ captura r_2 , mientras que $c_{1,1}$ recaptura r_1 y $c_{3,1}$ recorre la trayectoria más corta hacia r_1 , la cual es única pues P no tiene ciclos de longitud 4. Así, $c_{3,1}$ vuelve a estar a distancia 1 de r_1 . Si R pretende evitar que ambos $c_{4,2}$ y $c_{3,1}$ capturen sus objetivos, este tiene que mover r_1 por el resto de sus turnos. Más aún, tiene que mover r_1 hacia vértices fuera de la vecindad cerrada de $c_{3,2}(t)$, pues al moverse a alguno de estos, c_3 reetiqueta sus fichas de manera que $c_{3,1}$ captura a r_1 . Nótese que R tendría que mover r_1 sobre un C_6 inducido en G (incapaz de moverse más que en una dirección pues $c_{3,1}$ le bloquea un vértice sobre el C_6 , véase (a) en la Figura 3.4). Así, c_2 o c_4 podrían posicionar su primera ficha sobre el ciclo de manera que, eventualmente, r_1 no puede avanzar sobre el C_6 pues ambos $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ ya capturan a r_2 . Por tanto, R solo puede pasar o mover r_1 hacia atrás sobre C_6 (de manera que $c_{3,1}$ captura a r_1), o mover r_1 hacia la vecindad de $c_{3,2}(t)$. En cualquiera de los casos, $c_{3,1}$ termina por

capturar a r_1 , de manera que ambos $c_{3,1}$ y $c_{4,2}$ capturan a sus respectivos objetivos (véase (d) en la Figura 3.4).

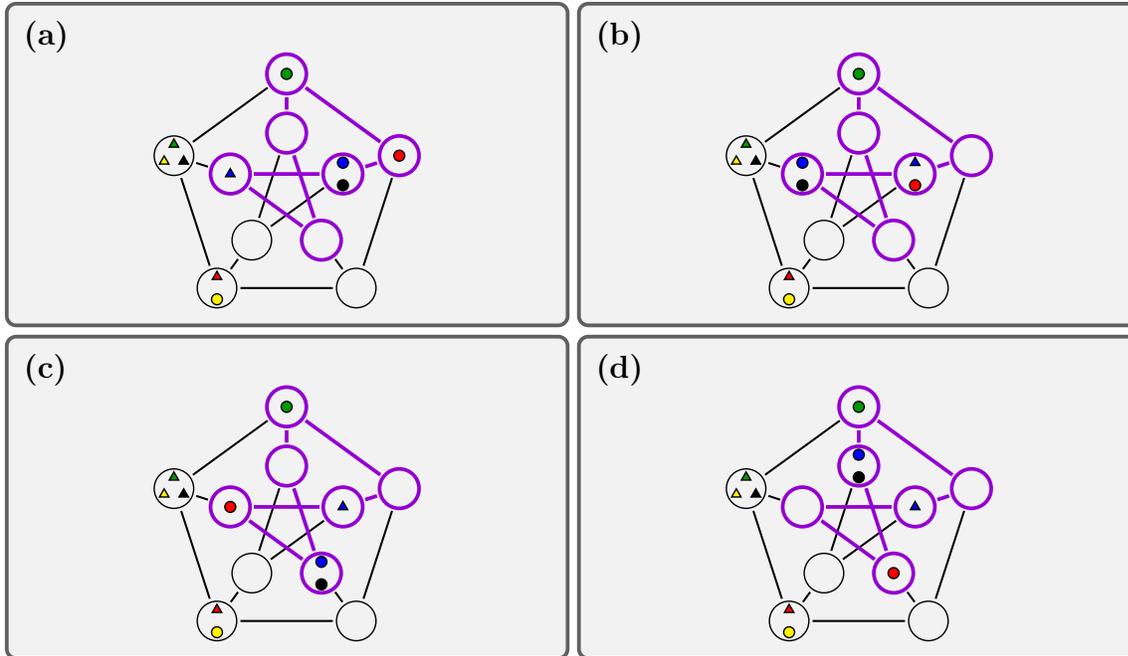


Figura 3.4: Cada escena representa un turno del juego donde R debe mover. Obsérvese que r_1 evita la vecindad de $c_{3,2}(t)$ y escapa de $c_{3,1}$ moviéndose sobre el ciclo morado. Después de 3 turnos, si r_1 se quiere mover, este termina capturado por $c_{3,1}$ o se posiciona a turno 1 de que $c_{3,2}$ le capture. Siempre que se tenga una obstrucción, las fichas simplemente se reetiquetan como en (b).

Para la segunda etapa y en los siguientes turnos, $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ recapturan a r_1 si R lo mueve. De la misma manera, $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ recapturan cada que R mueva r_2 . Supóngase que r_1 y r_2 no están en vértices adyacentes. Sean $r_1(t) = a$, $r_2(t) = b$, $N_P(a) = \{u_1, v, u_2\}$ y $N_P(b) = \{w_1, v, w_2\}$, notando que la intersección de ambos conjuntos es $\{v\}$ pues entre cualesquiera dos vértices no adyacentes existe una única trayectoria de longitud 2. Sin pérdida de generalidad, supóngase que la última ficha movida por R es r_1 . Luego, c_1 y c_3 usan su movimiento para recapturar tal como se dijo al inicio del párrafo. En tanto, sin pérdida de generalidad, $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ se mueven hacia un vértice adyacente a u_1 y u_2 respectivamente. Nótese que esto es posible pues, desde cualquier vértice en el que $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ pudieran estar, C puede mover uno hacia la vecindad de u_1 y el otro a la vecindad de u_2 (véase la Figura 3.5).

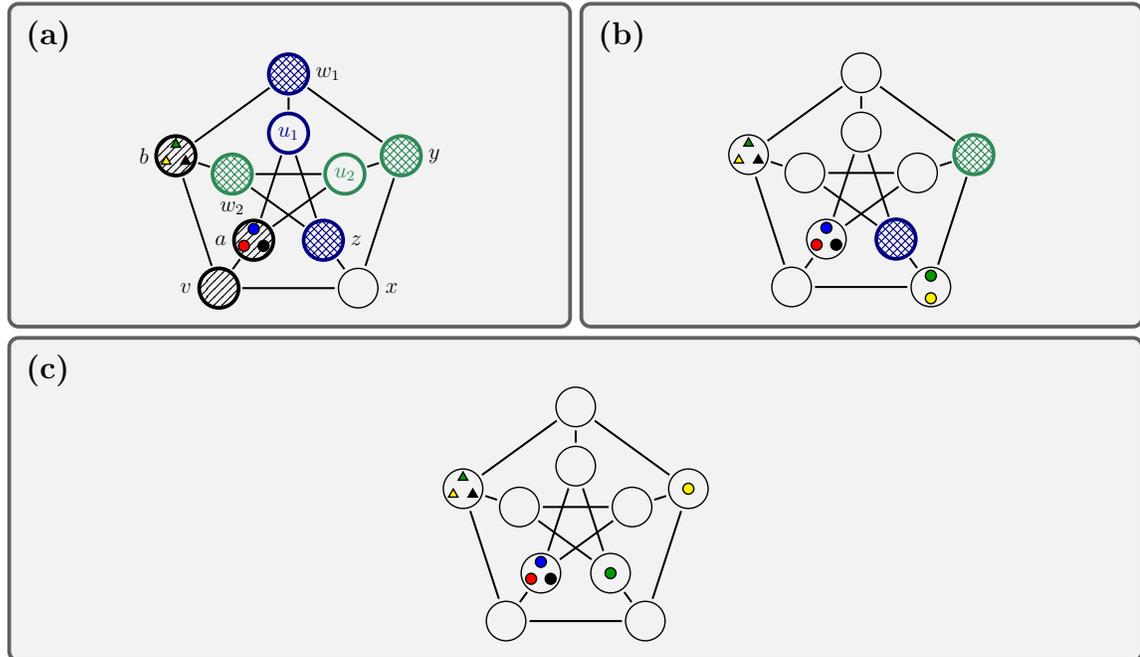


Figura 3.5: En esta figura se omiten las fichas $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$. En (a), R acaba de mover r_1 , de modo que $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ le han recapturado. Se busca posicionar a $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ adyacentes a u_1 y u_2 . Si alguno entre $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ estuviera en un vértice negro sombreado, C ganaría en a lo más un turno o un policía tendría sus dos fichas en un mismo vértice, lo cual es imposible. De forma similar, si alguno entre $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ estuviera en u_1 o en u_2 , entonces C gana en su siguiente turno. Para cada uno de los vértices restantes existe un vértice azul sombreado y un vértice verde sombreado en su vecindad cerrada, determinando el movimiento de ambos $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ como se ilustra en (b) y (c).

Obsérvese que r_1 no se puede mover ni a u_1 ni a u_2 pues ello llevaría que R pierda al siguiente turno. Así, R pasa o mueve r_2 . En el primer caso, ambos $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ avanzan a u_1 y u_2 respectivamente para forzar a R a mover r_1 hacia r_2 , o a mover a r_2 . En cualquier caso, R mueve r_2 y se puede asumir sin pérdida de generalidad que su nueva posición es w_1 . Sea $N_P(w_1) = \{u_1, b, y\}$. Luego, $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ recapturan r_2 y se generan dos casos dependiendo de si se tiene una obstrucción:

1. Si existe una obstrucción, solo uno entre c_2 y c_4 está obstruido pues $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ están en distintos vértices. Nótese que la obstrucción se puede resolver con un reetiquetado de las fichas, preservando la condición de que r_1 no puede moverse a ningún vértice más que para acercarse a r_2 . Además, al igual que en el caso anterior, c_1 y c_3 pueden acercarse a la vecindad de w_1 , de manera que R no puede mantener sus fichas en vértices no adyacentes (véase la Figura 3.6).

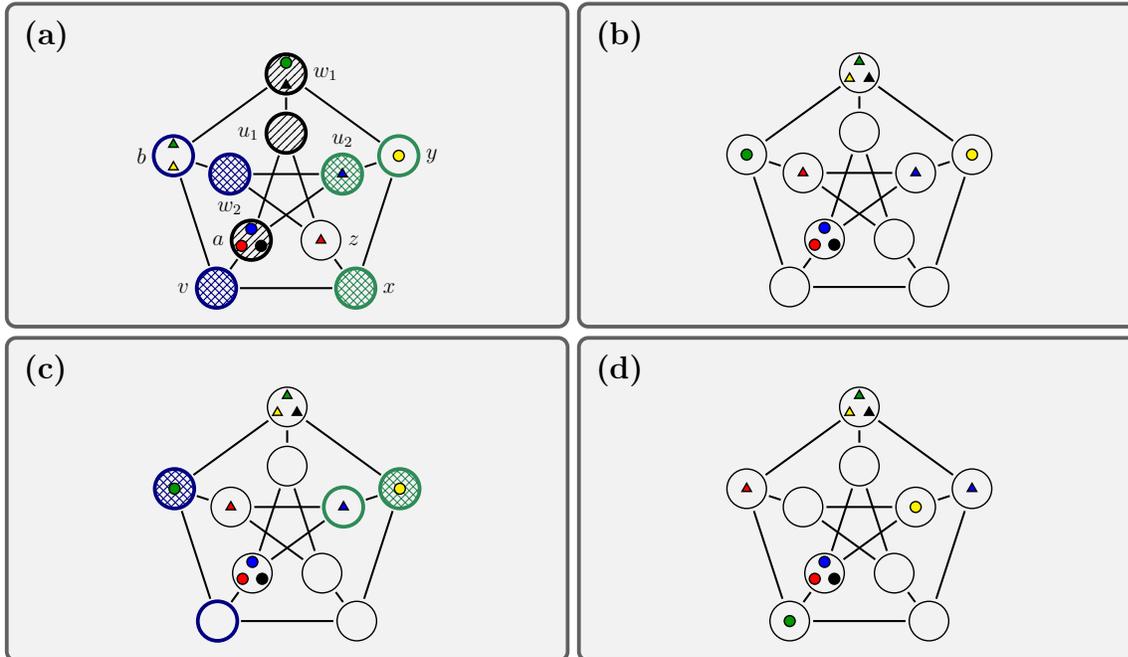


Figura 3.6: En (a), R acaba de mover r_2 , de manera que $c_{4,2}$ recaptura y c_2 reetiqueta sus fichas. En tanto, $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven como en (b) para posicionarse en un vértice adyacente a y y un vértice adyacente a b respectivamente (lo cual es posible pues cualquier vértice es adyacente a uno verde sombreado y a uno azul sombreado en (a), ignorando los vértices sombreados de negro y el azul y verde sin sombreado pues C gana al siguiente turno o está en una posición ilegal). El reetiquetado causa que $c_{2,1}$ sea adyacente al vértice azul sin sombreado en (c), de modo que este aún cumple su función del paso anterior. Luego, R solo puede pasar si es que quiere evitar que r_1 y r_2 estén en vértices adyacentes. No obstante, C mueve sus policías como en (d), forzando el movimiento de R .

2. Si no se tiene una obstrucción, se generan tres subcasos:

- a) Si alguno entre $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ está en la vecindad de b (véase la Figura 3.7), supóngase sin pérdida de generalidad que es $c_{1,2}$, de modo que este se mueve hacia b y $c_{3,2}$ se posiciona en la vecindad de y (véase (c) en la Figura 3.7). Esto obliga a R a mover r_1 a v . Posterior al movimiento de R , $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ recapturan, mientras que $c_{4,1}$ se posiciona en la vecindad a (ver (d) y (e) la Figura 3.7).

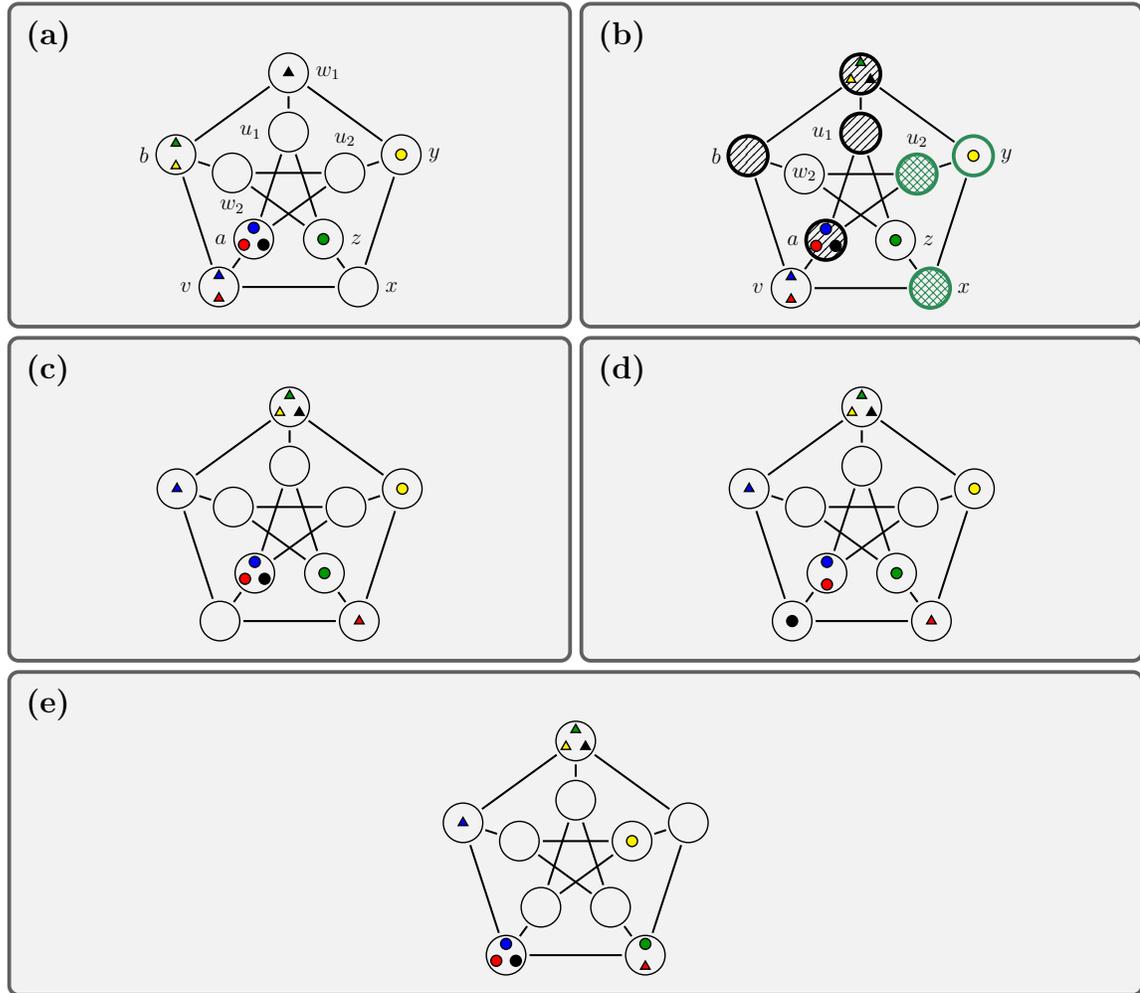


Figura 3.7: Cuando el movimiento de r_2 no propicie una obstrucción de c_2 o c_4 , ambos policías recapturan como es usual, mientras que $c_{1,2}$ se mueve hacia b y $c_{3,2}$ se posiciona en la vecindad de y . Nótese que se ignorarán los casos en los que alguno entre $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ están en los vértices sombreados de negro o en y pues C gana en a lo más un turno o está en una posición ilegal. En (d), R acaba de mover r_1 a v , por lo que C mueve como en (e) para forzar el movimiento de R .

Luego, r_2 debe moverse a u_1 . Como $c_{3,2}$ está en u_2 o en x , este puede moverse para estar en la vecindad z . En tanto, $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ recapturan a r_2 (véase la Figura 3.8). Así, r_2 no puede moverse a z pues R pierde en a lo más un turno, por lo que se ve obligado a mover r_1 a b (véase (c) en la Figura 3.8). Nótese que $c_{1,1}$ se encuentra obstruido al recapturar, por lo que este caso se reduce al 1.

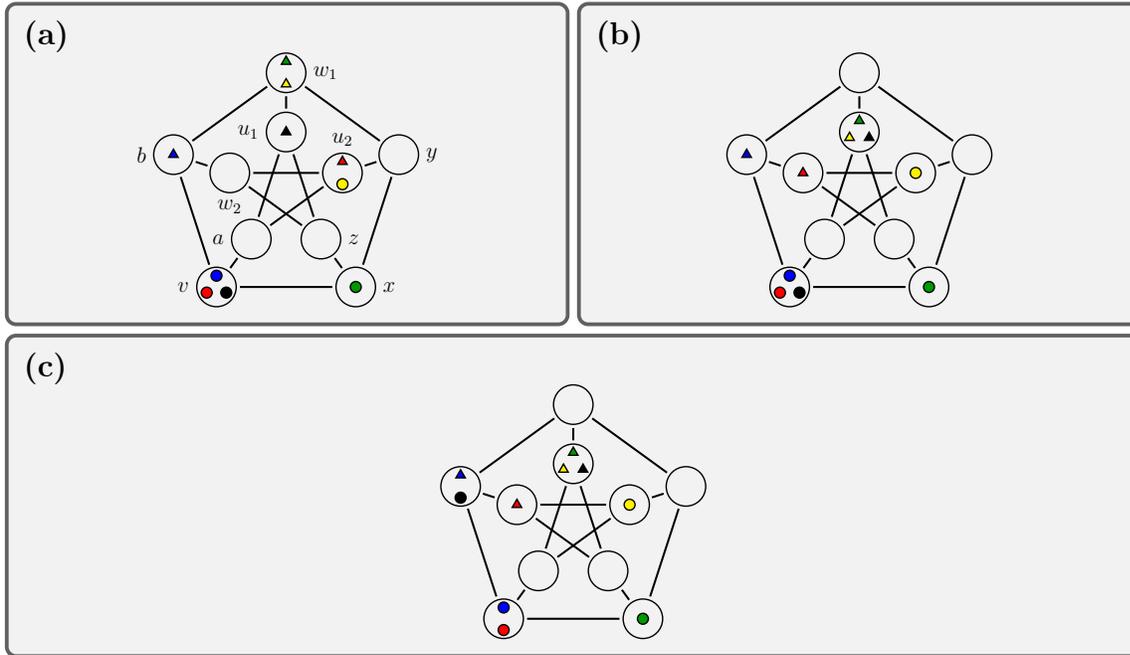


Figura 3.8: En (a), R acaba de mover r_2 a u_1 , por lo que C mueve como en (b) para forzar el movimiento de r_1 a b , quedando en una situación análoga a la mostrada en (a) de la Figura 3.6.

b) Si lo anterior no ocurre y alguno está en la vecindad de w_2 y el otro está en la vecindad de y , supóngase sin pérdida de generalidad que $c_{1,2}$ está en la vecindad de w_2 . Así, $c_{1,2}$ se mueve a w_2 y $c_{3,2}$ se mueve a y , obligando el movimiento de r_1 a v (véase la Figura 3.9). De aquí, C mueve como en (e) de la Figura 3.9, obligando a que R mueva r_2 a u_1 .

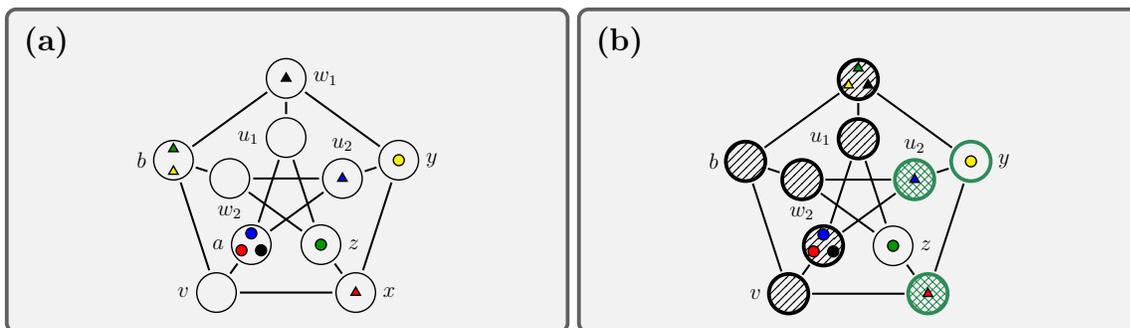


Figura 3.9: Al igual que en el subcaso anterior, c_2 y c_4 recapturan como en (b), mientras que $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven como en (c) (ver continuación de figura) para obligar el movimiento de r_1 a v .

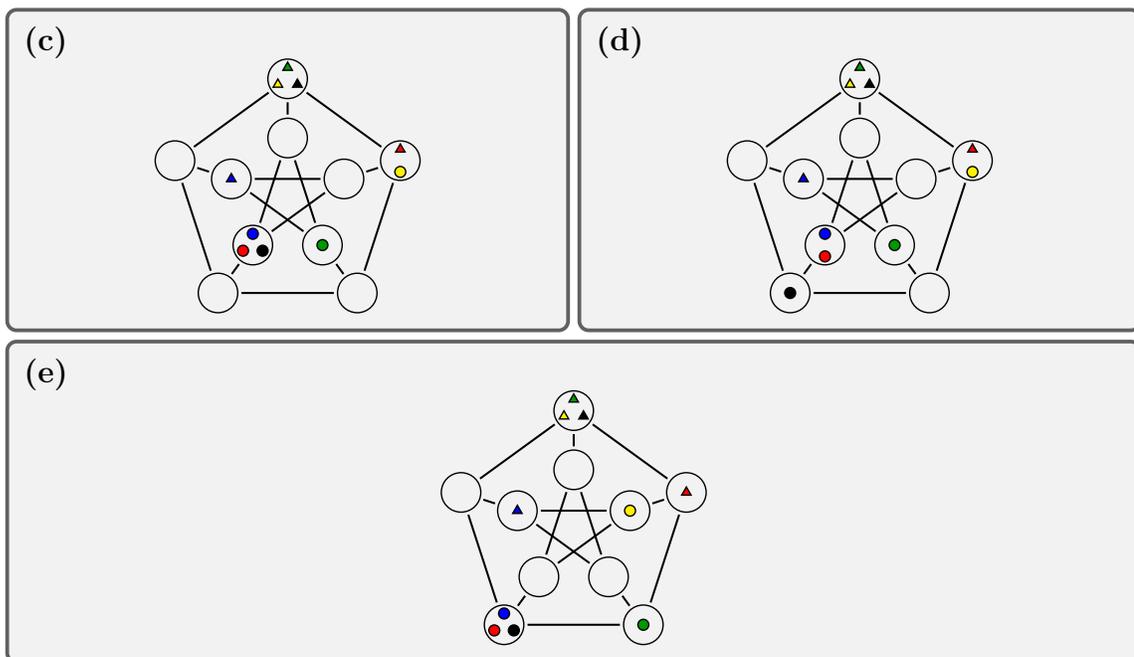


Figura 3.9: En (d), R mueve r_1 a v , por lo que C mueve sus policías como en (e).

Una vez más, R mueve r_2 a u_1 y $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ recapturan, mientras que $c_{1,2}$ se mueve a z y $c_{3,1}$ a u_2 . Sin importar si R mueve r_2 de regreso a w_1 (como en (c) de la Figura 3.10) o mueve r_1 a b (como en (e)), C mueve como en (d) o en (f) respectivamente para forzar a R a juntar las fichas r_1 y r_2 .

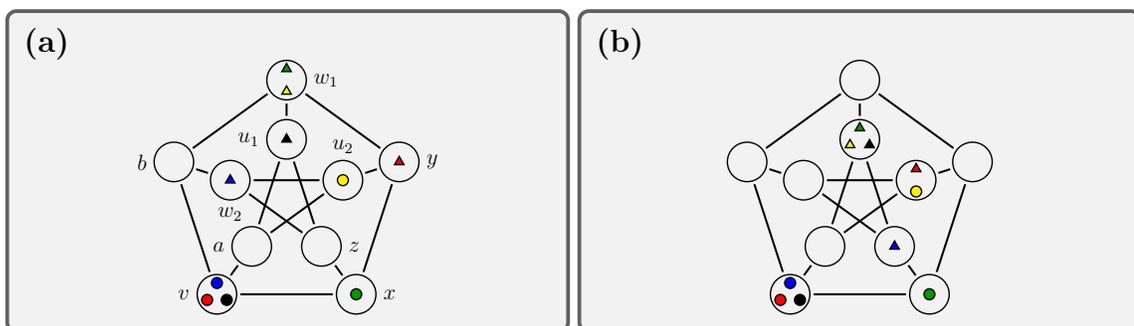


Figura 3.10: Si R mueve r_2 a u_1 como en (a), C mueve a sus policías como en (b).

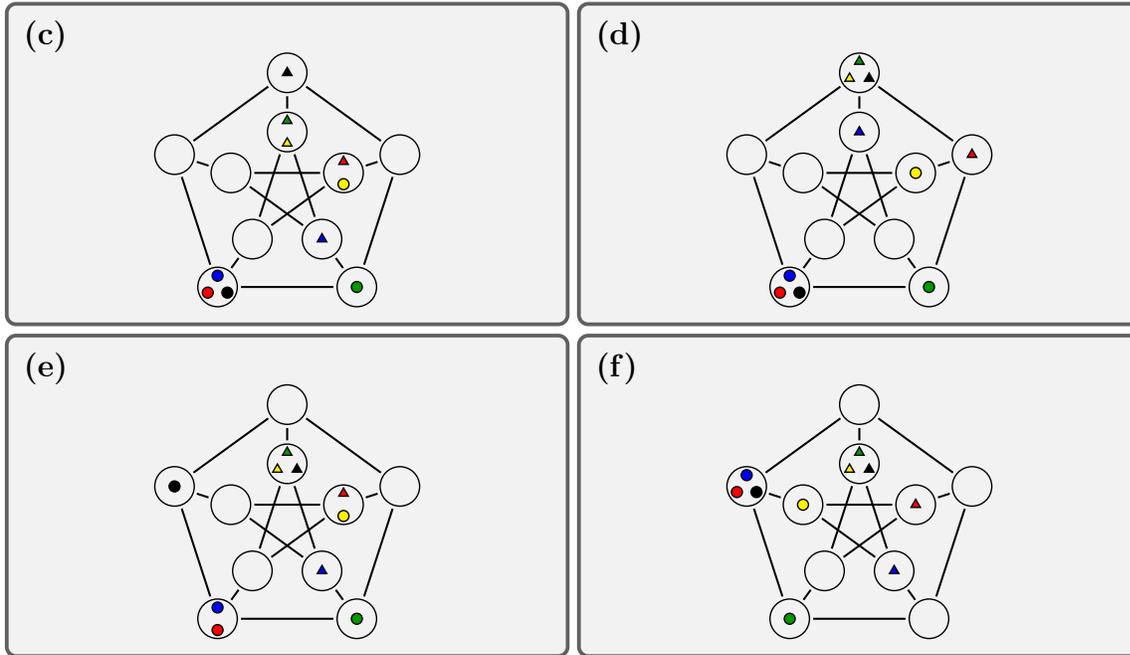


Figura 3.10: Independientemente de lo que haga R en su siguiente turno (moverse como en (c) o en (e)), C forza que R junte las fichas r_1 y r_2 al siguiente turno.

- c) Si los anteriores casos no suceden, $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ deben estar ambos en z o en x (véase la Figura 3.11). En este caso, C mueve las fichas de manera que $c_{1,2}$ termina en z y $c_{3,2}$ está en x .

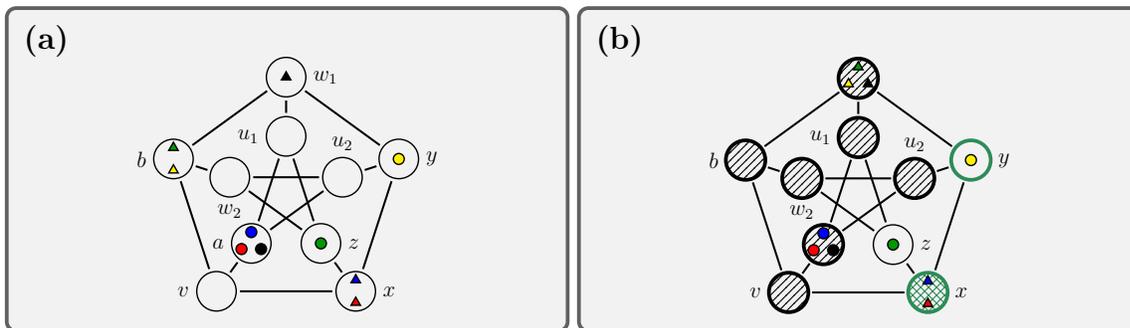


Figura 3.11: Una vez más, c_2 y c_4 recapturan como en (b).

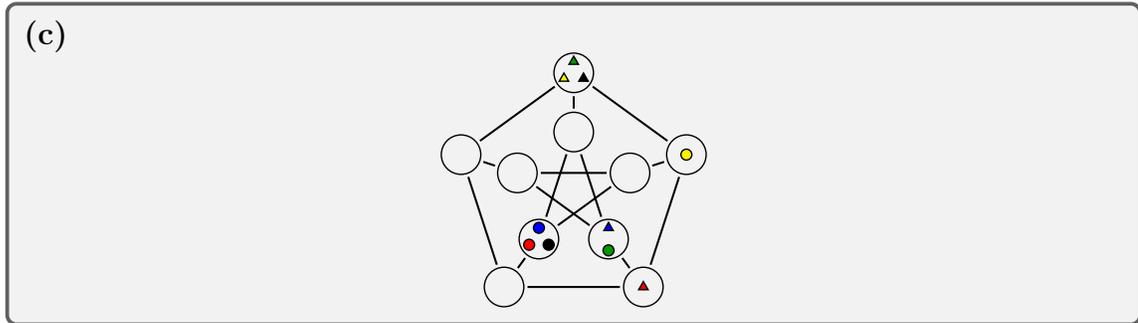


Figura 3.11: En tanto, $c_{1,2}$ se posiciona en z y $c_{3,2}$ en x .

Si R pasa, la posición en (c) de la Figura 3.11 es una análoga a la mostrada en (a) de la Figura 3.9 (uno en la vecindad de w_2 y el otro en la vecindad de y), por lo que eventualmente R pone las fichas r_1 y r_2 en vértices adyacentes. De lo contrario, si R mueve r_2 a b , $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ le recapturan, mientras que $c_{1,2}$ se mueve a w_2 (ver la Figura 3.12). En esta posición R está obligado a mover r_2 de regreso a w_1 . Así C está en una posición análoga a la mostrada en (a) de la Figura 3.7 (una ficha en la vecindad de b), por lo que R eventualmente posiciona r_1 y r_2 en vértices adyacentes.

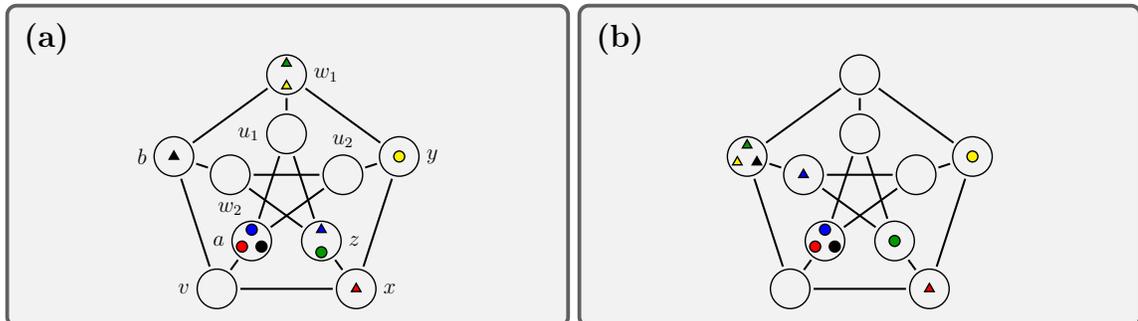


Figura 3.12: Posterior al movimiento de R , C mueve sus policías como en (b) para obligar el regreso de r_2 a w_1 .

Finalmente, si R mueve r_1 a v , C mueve como en (b) de la Figura 3.13, obligando a R a que ponga r_1 y r_2 en vértices adyacentes.

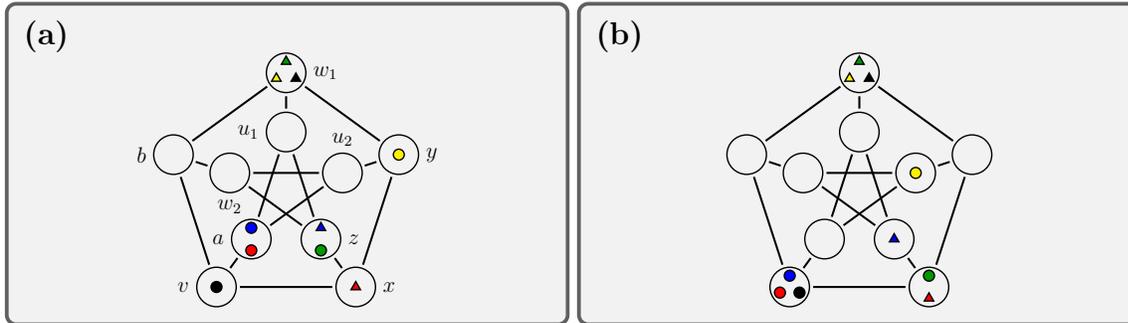


Figura 3.13: En (a), R acaba de mover r_1 , de manera que C mueve como en (b) para posicionarse $c_{2,1}$ en x y $c_{4,1}$ en u_2 , a la vez que $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ recapturan.

Esto concluye la prueba de que r_1 y r_2 eventualmente están en posiciones adyacentes. Más aún, antes de que r_1 y r_2 estén en vértices adyacentes, $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ capturaban a r_1 , mientras que $c_{2,2}$ y $c_{4,2}$ capturaban a r_2 . Así, supóngase sin pérdida de generalidad que r_1 fue la última ficha movida, de modo que la situación es como se muestra en la Figura 3.14. Los policías proceden a posicionarse sobre las vecindades de los vértices a los que puede mover R , dejando a r_1 sin movimientos.

Se generan tres casos dependiendo de la posición de $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$:

1. Si ninguno entre $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ está en b y no sucede que ambos esten u_1 o en y , entonces de (b) de la Figura 3.14 es claro que $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ pueden ponerse, como en (c), en vértices adyacentes a y y u_1 respectivamente.

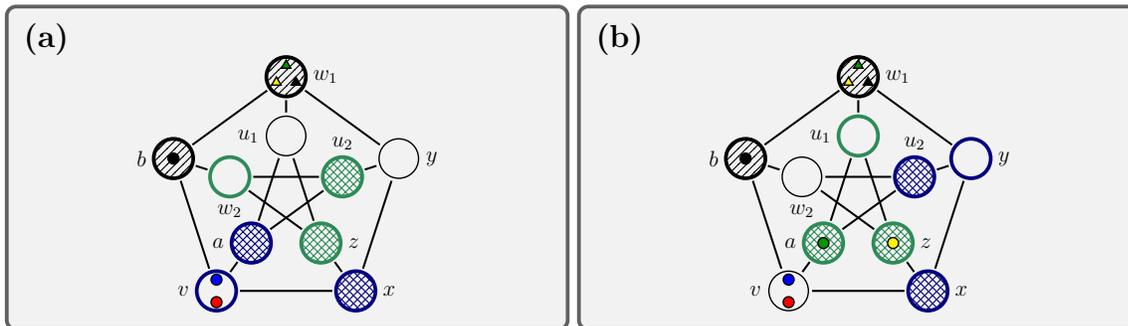


Figura 3.14: En (a), C busca poner a $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ en un vértice azul sombreado y en un vértice verde sombreado. Si alguno estuviera en los vértices negros sombreados, en v , o en w_2 , se sigue que C captura a R en a lo más un turno, o está en una configuración ilegal. El resto de vértices tienen al menos un vértice verde sombreado y uno azul sombreado en su vecindad cerrada. Por tanto, se pueden colocar $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ de manera que estos impiden el movimiento de r_1 . Análogamente, $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven a un vértice azul y uno verde (de los mostrados en (b)) respectivamente.

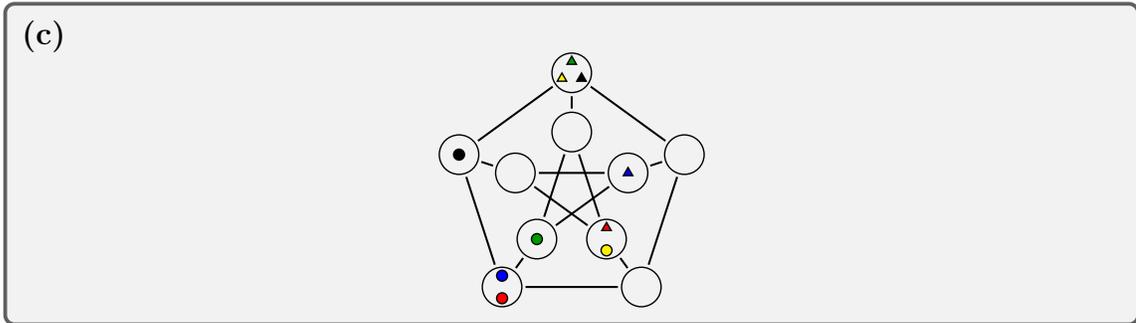


Figura 3.14: Así, C termina su turno como se muestra en (c).

Si R pasa como en (a) de la Figura 3.15, C mueve como en (b) para capturar a R en su siguiente turno. De lo contrario, R mueve r_2 a u_2 o a y . Supóngase sin pérdida de generalidad que se mueve a r_2 como en (c), el otro caso es análogo. En ese caso, C mueve como en (d), capturando a R en su siguiente turno.

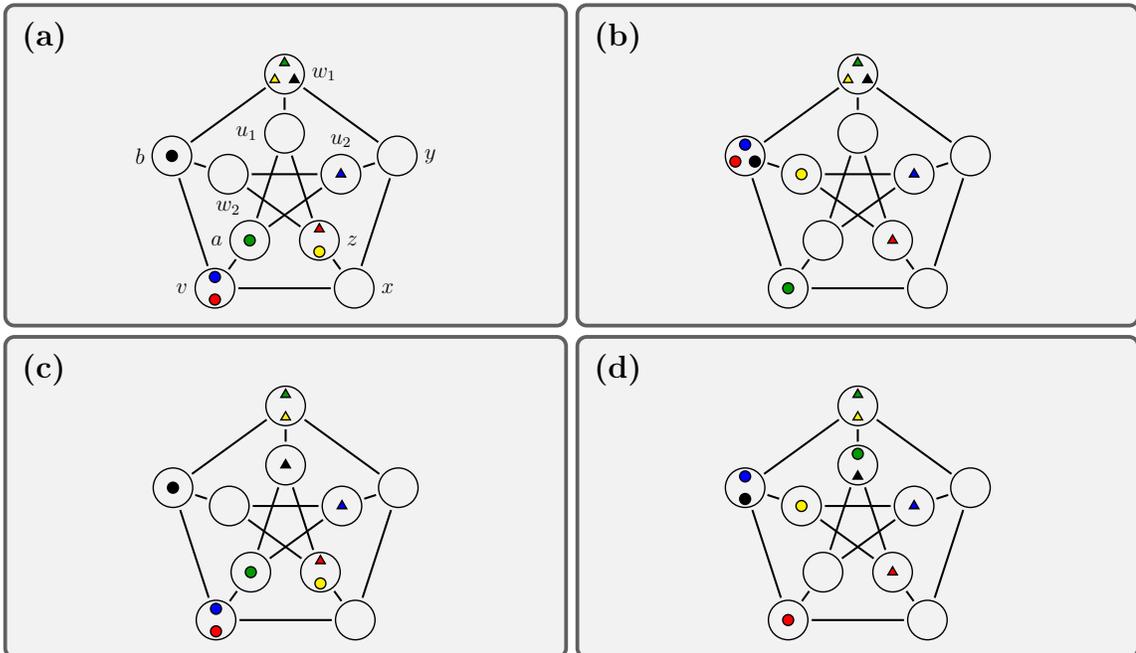


Figura 3.15: Posterior a que R pase como en (a), C mueve como en (b) para capturarle en su siguiente turno. En cambio, si R mueve r_2 como en (c), C mueve sus fichas como en (d), obligando a R a pasar y capturándolo en su siguiente turno al reetiquetar las fichas de c_2 .

2. Si alguno entre $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ está en b , nótese que dicho policía (o ambos) puede reetiquetar sus fichas, de manera que la segunda ficha se encuentra en v y es adyacente a ambos un vértice azul sombreado y un vértice verde sombreado, moviéndose en ese mismo turno para obligar a R a pasar y capturarlo en a lo más dos turnos (véase (b) en la Figura 3.16).

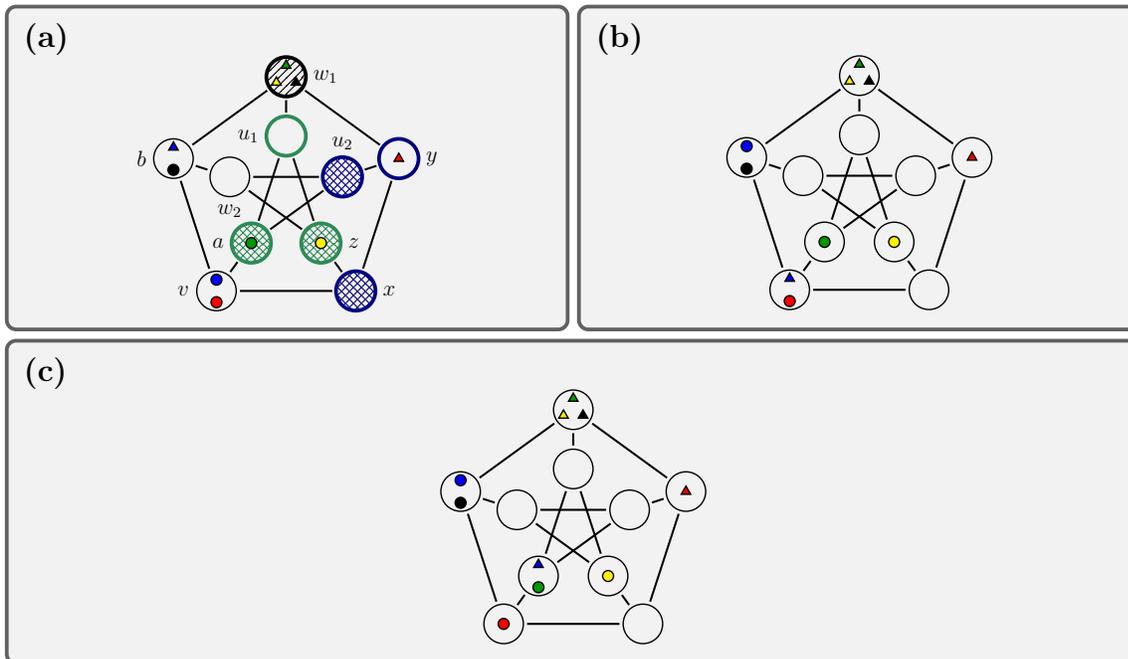


Figura 3.16: En (a), c_1 se encuentra obstruído, por lo que reetiqueta sus fichas como en (b). Luego, C mueve como en (c), mientras que $c_{3,2}$ se asegura de estar en un vértice adyacente a y (reetiquetando en caso de que c_2 también estuviera obstruída).

3. Si ambos $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ están en u_1 o y , supóngase sin pérdida de generalidad que están en u_1 , el otro caso es análogo. En este caso, C mueve $c_{3,2}$ a z como en (b) de la Figura 3.17. Si R pasa en este momento, se tiene una situación análoga a la del caso 1, por lo que R debe mover r_2 a y . Luego, C mueve como en (d) de la Figura 3.17 para obligar a R a pasar y capturar en a lo más dos turnos.

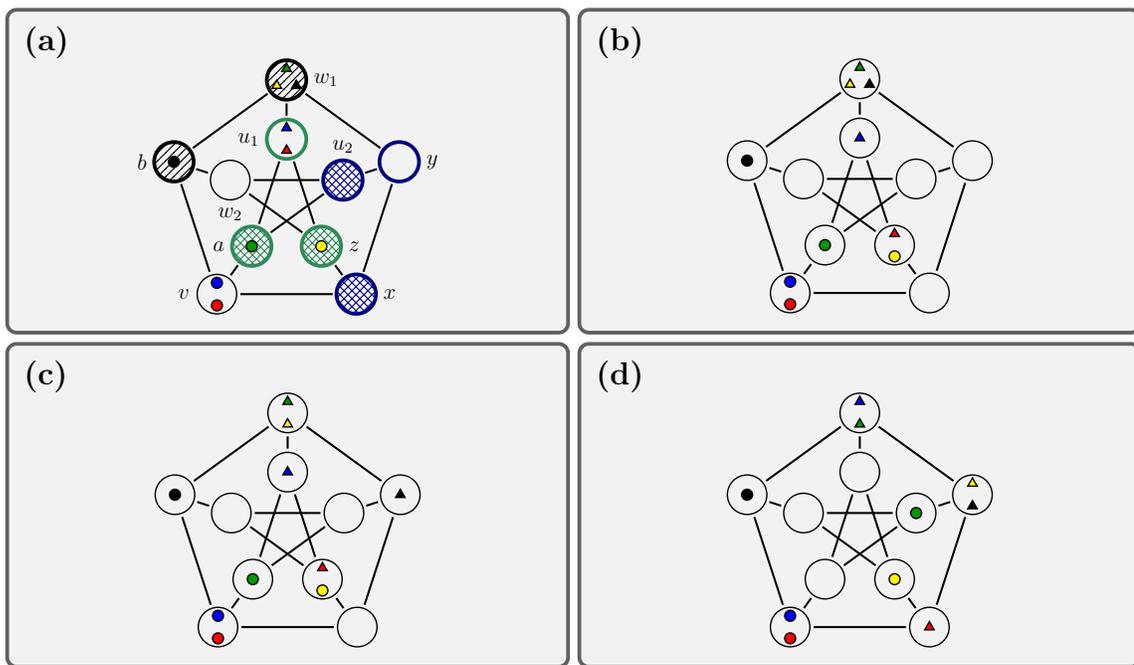


Figura 3.17: En (a), $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ están ambos en u_1 , por lo que uno de ellos se mueve a z como en (b). En (c), R mueve r_2 a y , por lo que C mueve como en (d) para obligar a R a pasar y capturar en a lo más dos turnos.

Se concluye que $c(F_2(P)) \leq 4$.

■

Capítulo 4

Conclusión

Recopilando los resultados relevantes en la tesis, logramos determinar el número policiaco de las gráficas de k fichas de cualquier estrella S_n . Si bien este último es el resultado principal de la primera sección de resultados, no podemos dejar a un lado la utilidad del algoritmo de desobstrucción, el cual nos facilitó la descripción de una estrategia ganadora para C con exactamente $c(F_k(S_n))$ policías. Asimismo, destacamos el descubrimiento de una estrategia ganadora para R si C tiene menos de $c(F_k(S_n))$ policías.

Por otro lado, una ligera modificación en la mencionada estrategia ganadora para C nos permitió determinar una cota superior para el número policiaco de la gráfica de k fichas de cualquier árbol. Además, nuestra estrategia de sombras evidenció que dicha cota es justa cuando los árboles tiene grado máximo al menos el doble del número de fichas.

Para el resto de gráficas de fichas de árboles con grado máximo bajo, logramos utilizar la cota inferior para estrellas de grado bajo subdivididas, esto siempre y cuando el número de fichas sea menor al número de emparejamiento de la estrella subdividida. Más aún, si la estrella subdividida tiene a lo más dos ramas de longitud par, esta cota cubre todos los posibles valores de k . Particularmente para las triadas, se obtuvo una cota inferior para todas las posibles k sin importar la paridad de la longitud de sus ramas. Dicha cota inferior también induce una estrategia de escape para R en función de otros algoritmos, como uno que construye emparejamientos máximos dada una gráfica.

Finalmente, revisamos el caso particular de la gráfica de Petersen, en la que logramos acotar el número policiaco de $F_2(P)$ al dar una estrategia ganadora para C con 4 policías.

Más allá de las cotas dadas para el número policiaco en los distintos casos de estu-

dio, confiamos en que el diseño de estrategias nos ayude a comprender los problemas que quedan sin solución en este trabajo. La intuición que nos dejan las estrategias desarrolladas nos llevan conjeturar lo siguiente.

Conjetura 4.0.1. Sean n y k enteros positivos tales que $k \geq 2$ y $\frac{n+1}{2} < k$. Además, si $m \geq 1$ es un entero positivo suficientemente grande para que $k \leq \left\lfloor \frac{|V_{S_{n,m}}|}{2} \right\rfloor$, se tiene que

$$c(F_k(S_{n,m})) = \left\lfloor \frac{k+1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor.$$

Conjetura 4.0.2. Si P denota la gráfica de Petersen, entonces $c(F_2(P)) = 4$.

En particular para la primera conjetura, esta concuerda con nuestras exploraciones obtenidas en gráficas de fichas de triadas, mientras que para trayectorias, esta fue probada por Bruno Amezcua en su tesis de licenciatura.

Por otro lado, creemos que la demostración dada para el Lema 2.3.14 puede extenderse para demostrar la siguiente conjetura.

Conjetura 4.0.3. Si T es un árbol no trivial, x es una de sus hojas, y $k < |V_T|$, entonces $F_k(T-x)$ es un retracto de $F_k(T)$.

Dicho resultado no se tiene como corolario directo del lema mencionado en caso de que existan vértices de grado al menos 4. No obstante, la evidencia obtenida de los ejemplos sugiere que esto es verdad incluso para dichos casos, por lo que podríamos tener una mejor comprensión de la estructura de las gráficas de fichas de árboles.

A manera de resumen, se presenta una tabla con las cotas encontradas para el número policiaco de gráficas de fichas de árboles, haciendo énfasis en que para cada resultado se obtuvo una estrategia de escape o una de captura.

	S_n	$T,$ $(k_n = \lfloor \frac{\Delta_T+3}{2} \rfloor)$	$S(m_1, \dots, m_n),$ $ \{m_i : m_i \text{ es par}\} \leq 2$	$S(m_1, \dots, m_n),$ $ \{m_i : m_i \text{ es par}\} > 2$	$S(m_1, \dots, m_3),$ $m_i \text{ es par para toda } i$
$k < k_n$		k			
$k_n \leq k \leq \alpha'$	N/A	$\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq k$			
$\alpha' < k \leq \frac{ V }{2}$	N/A	$\leq k$	N/A	$\leq k$	$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq k$

Cuadro 4.1: En cada cuadrante de la tabla se muestran el número policiaco (o las cotas obtenidas separadas por comas) de la gráfica de k fichas asociada a la gráfica en la columna dada, clasificadas por renglones según el intervalo en el que se encuentre k .

Índice alfabético

- árbol, 6
- arista, 1
 - incidentes, 1
- bajo asedio, 27
 - débil, 35
- camino, 4
- captura, 13
 - de fichas, 16
 - en la gráfica de fichas, 16
- ciclo, 4
- componente conexa, 5
- configuración, 15
- diferencia simétrica, 11
- domina, 16
- dominante, 8
- emparejamiento, 8
 - máximo, 8
 - número de, 8
 - perfecto, 8
- i -ésima rama, 32
- estrategia ganadora, 13
- estrella, 17
 - centro de una, 17
- ficha libre, 27
- gráfica, 1
 - bipartita, 3
 - bipartita completa, 3
 - completa, 3
 - conexa, 5
 - de fichas, 11
 - isomorfas, 3
 - no trivial, 1
 - reflexiva, 2
 - trivial, 1
- grado, 2
- hoja, 6
- homomorfismo, 3
- instancia, 22
- isomorfismo, 3
- lazo, 2
- longitud, 4
- número de dominancia, 8
- número policiaco, 13
- objetivo, 22
- obstrucción, 23
 - mutua, 23
- obstruida, 23
- orden, 1
- policías y ladrones, 12
- retracto, 13
- sombra, 33
- subgráfica, 2

- inducida, 2
- tamaño, 1
- trayectoria, 4
 - alternante, 8
 - aumentable, 8
- turno, 22
- unión, 5
- vértice, 1
 - adyacentes, 2
 - incidente en arista, 1
 - saturado, 8
- vecindad, 2
 - cerrada, 2

Índice de figuras

1.1. El dibujo de una gráfica G	2
1.2. La gráfica determinada por los vértices y arista rojas, H , es una subgráfica de G . No obstante, esta no es inducida pues $G[\{v_1, v_2\}]$ también incluye el lazo e_1 . Por otro lado $H = G[\{e_2\}]$. En tanto, la gráfica inducida por los vértices y aristas en azul, H' , sí es una subgráfica inducida de G , a saber, $H' = G[\{v_3, v_4\}]$	3
1.3. Las aristas de rojo inducen la gráfica $G[\{e_2, e_3, e_4, e_5\}]$, la cual es un árbol y tiene a v_1 y v_5 como hojas.	6
1.4. Al árbol $G[\{e_2, e_6\}]$ se le elimina la hoja v_5 , resultado en un árbol. Por otra parte, al árbol $G[\{e_4\}]$ se le subdivide la arista e_4 para generar otro árbol.	7
1.5. El conjunto de aristas azules, $\{e_2\}$, es un emparejamiento M en G que empareja a v_1 y v_2 y los satura. Más aún, M no es máximo pues $M^* = \{e_4, e_6\}$ es un emparejamiento de cardinalidad mayor. Este sí es máximo en G , más no es un emparejamiento perfecto. No obstante, M^* sí es un emparejamiento perfecto en $G - v_1$. Además, (v_1, v_2, v_5) es una M^* -trayectoria alternante, mientras que (v_3, v_4) es una M -trayectoria aumentable. Finalmente, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto dominante, pero $\gamma(G) = 2$ pues $\{v_2, v_4\}$ también lo es.	8
1.6. La gráfica G es bipartita con la partición (X, Y) dada por la coloración de los vértices, de manera que los vértices azules están en X y los rojos en Y . Las aristas verdes forman un emparejamiento máximo M^* por el Teorema 1.3.1. Además, utilizando las trayectorias M^* -alternantes se obtiene que $Z = \{u, v_2, z, v_4, v_3\}$. Así, $R = \{u, z, v_3\}$ y $B = \{v_2, v_4\}$	10

- 1.7. Se muestra $F_2(G)$, la gráfica de 2 fichas de la gráfica bipartita completa $G[X, Y]$ con $|X| = 1$ y $|Y| = 3$. Dentro de cada vértice de $F_2(G)$ se dibujó a G junto con un 2-conjunto de sus vértices identificado por los puntos. Nótese que los vértices adyacentes a un vértice de $F_2(G)$ corresponden a aquellas configuraciones que se alcanzan al “deslizar” una ficha a lo largo de una arista de G 11
- 2.1. Una posible elección de configuración inicial de R para $k = 3$. Nótese que ninguno de los $k - 1$ policías, cuyas posiciones de fichas están representadas por los puntos azules y rojos, están capturando dos fichas de R en las hojas, representadas como el punto, el triángulo y el cuadrado negros. 19
- 2.2. Se presenta una partida de policías y ladrones sobre S_5 con 3 fichas. Las escenas se leen siguiendo la numeración, de manera que las imágenes en la columna derecha muestran las situaciones posteriores al turno de C y las de la columna izquierda son posteriores al turno de R . En (b), R tiene dos fichas capturadas en hojas, por lo que debe mover su ficha del centro a alguna hoja. En (d), R se ve forzado a mover una vez más, lo cual puede hacer pues existe al menos una de sus fichas que es capturada por los dos policías. En este punto R regresa a una posición en la que ningún policía le captura dos fichas en las hojas, que es justo el objetivo de la estrategia. 21
- 2.3. Diagrama de la ficha $c_{i,j}$ obstruida por la ficha $c_{i,s}$ 23
- 2.4. Si $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ se obstruyen mutuamente, entonces intercambian etiquetas (y por lo tanto objetivos). Las demás fichas se mantienen sin cambio. 25
- 2.5. Al no haber obstrucción mutua entre $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$, $c_{i,s}$ debe avanzar (de ser posible) siguiendo la $c_{i,s}(t)r_s(t)$ -trayectoria. 25
- 2.6. Como $c_{i,s}$ está obstruido, el algoritmo pasa a enfocarse a resolver la obstrucción para $c_{i,s}, c_{i,u}$ 25
- 2.7. Las fichas $c_{i,j}$ y $c_{i,s}$ intercambian sus etiquetas, de manera que $c_{i,j}$ se acerca en uno a su objetivo, pero $c_{i,s}$ se aleja en uno (notando que lo mismo sucede si r_s aparece antes de r_j en la trayectoria). De aquí, el algoritmo decide qué hacer con $c_{i,j}$ dependiendo de si ésta se encuentra obstruida o no siguiendo la estrategia mostrada en la Figura 2.5 o en la Figura 2.6 (sustituyendo $c_{i,s}$ por $c_{i,j}$). 26

2.8. Se muestra una partida de policías y ladrones sobre S_5 con 3 fichas. Las escenas se leen siguiendo la enumeración, donde cada una representa la situación posterior al movimiento de uno de los jugadores. En (h), r se encuentra bajo asedio (todas las fichas salvo las libres de cada policía se encuentran capturando a sus respectivos objetivos).	31
2.8. Finalmente, C termina por capturar dos turnos después con su policía azul.	32
2.9. El policía azul tiene bajo asedio débil a r . Obsérvese que no es necesario que la ficha libre del policía se encuentre cerca de su objetivo.	36
2.10. En (a), R escoge una posición sobre el S_1 inducido de manera que sobrevive al menos un turno.	39
2.10. Posterior al movimiento de C , R mueve una de sus fichas hacia una hoja como en (c), de manera que, sin importar cómo se acerque C a R , este siempre puede mover hacia el lugar que acaba de desocupar la ficha de C que se acaba de mover.	40
2.11. En esta y las siguientes figuras se omite la primera rama en cada una de las configuraciones, las cuales son tales que tienen una ficha en cada una de los vértices de la rama. Los vértices a la izquierda del 0 corresponden a los de la rama 1, mientras que los que están a la derecha son los de la rama 2. En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f	53
2.12. En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f	53
2.13. En (a) se muestra la configuración C y en (b) se muestra la imagen de C bajo f	53
2.13. Análogamente, si C es como en (c), se muestra $f(C)$ en (d).	54
2.14. En (a), D no tiene a v y tiene a p , mientras que C tiene a q y no a p . Luego, de la regla descrita en la Figura 2.11 se tiene que $f(D)$ es como se muestra en (b) y $f(C)\Delta f(D) = \{p, q\} \in E_S$. Si $v \in D$, se puede ver como en (c), como en (e) si $t > 0$, o como en (g) si $t = 0$ (ver continuación de figura). Si D es como en (c), la regla de correspondencia dada por (b) de la Figura 2.11 resulta en $f(D)$ como en (d), notando que $f(C) = f(D)$ pues w está en C	54
2.14. Si D es como en (e), la regla de correspondencia dada por (b) de la Figura 2.11 resulta en $f(D)$ como (f) de modo que $f(C) = f(D)$. Finalmente, para D como en (g), $f(D) = D = f(C)$	55

- 2.15. Se muestran una configuración en V_H con una ficha en 0 junto a sus configuraciones adyacentes en B , así como la vecindad de dichas configuraciones en el complemento de B (el renglón inferior). La existencia y unicidad de C' se tiene al deslizar la ficha en 0 de D' o E' hacia el único vértice al que se puede mover distinto de 2_0 y 1_0 respectivamente. 56
- 2.16. Las escenas impares muestran un turno de la partida posterior al movimiento de R (en (1) R acaba de escoger su posición inicial). Las escenas pares muestran el movimiento de C . En cada turno C utiliza la estrategia dada por el Algoritmo 3. Se recuerda que los policías 1, 2 y 3 reciben los colores azul, verde y rojo, respectivamente, mientras que el punto, el triángulo y el cuadrado representan su primera, segunda y tercera ficha, respectivamente. 63
- 2.16. En (17), R acaba de mover r_1 y c_1 tiene bajo asedio a r , pero $c_{1,1}$ está obstruida. Por tanto, la línea 18 del Algoritmo 3 se ejecuta para poner a r bajo asedio débil. Al igual que c_1 en (18), c_3 realiza el mismo movimiento en (20). 66
- 2.16. En (32), R tiene un único movimiento que no le hace perder. No obstante, de hacerlo, al siguiente turno c_1 terminaría por capturar, por lo que R pasa y al siguiente turno captura c_2 o c_3 68
- 3.1. Gráfica de Petersen P 69
- 3.2. Los vértices en rojo forman un conjunto dominante. 70
- 3.3. Una posible configuración inicial se muestra en (a), donde todas las fichas yacen en los tres vértices de un conjunto dominante. Se fijan colores para diferenciar distintos policías, de modo que el azul corresponde a c_1 , verde a c_2 , rojo a c_3 y amarillo a c_4 . De forma similar, las figuras corresponden al número de ficha del policía correspondiente, implicando que el punto azul representa la ficha $c_{1,1}$, mientras que el triángulo verde representa la ficha $c_{2,2}$. En (b) se muestra una situación posterior al primer turno de C 72
- 3.4. Cada escena representa un turno del juego donde R debe mover. Obsérvese que r_1 evita la vecindad de $c_{3,2}(t)$ y escapa de $c_{3,1}$ moviéndose sobre el ciclo morado. Después de 3 turnos, si r_1 se quiere mover, este termina capturado por $c_{3,1}$ o se posiciona a turno 1 de que $c_{3,2}$ le capture. Siempre que se tenga una obstrucción, las fichas simplemente se reetiquetan como en (b). 73

3.5. En esta figura se omiten las fichas $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$. En (a), R acaba de mover r_1 , de modo que $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ le han recapturado. Se busca posicionar a $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ adyacentes a u_1 y u_2 . Si alguno entre $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ estuviera en un vértice negro sombreado, C ganaría en a lo más un turno o un policía tendría sus dos fichas en un mismo vértice, lo cual es imposible. De forma similar, si alguno entre $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ estuviera en u_1 o en u_2 , entonces C gana en su siguiente turno. Para cada uno de los vértices restantes existe un vértice azul sombreado y un vértice verde sombreado en su vecindad cerrada, determinando el movimiento de ambos $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ como se ilustra en (b) y (c). 74

3.6. En (a), R acaba de mover r_2 , de manera que $c_{4,2}$ recaptura y c_2 re-etiqueta sus fichas. En tanto, $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven como en (b) para posicionarse en un vértice adyacente a y y un vértice adyacente a b respectivamente (lo cual es posible pues cualquier vértice es adyacente a uno verde sombreado y a uno azul sombreado en (a), ignorando los vértices sombreados de negro y el azul y verde sin sombrar pues C gana al siguiente turno o está en una posición ilegal). El re-etiquetado causa que $c_{2,1}$ sea adyacente al vértice azul sin sombreado en (c), de modo que este aún cumple su función del paso anterior. Luego, R solo puede pasar si es que quiere evitar que r_1 y r_2 estén en vértices adyacentes. No obstante, C mueve sus policías como en (d), forzando el movimiento de R 75

3.7. Cuando el movimiento de r_2 no propicie una obstrucción de c_2 o c_4 , ambos policías recapturan como es usual, mientras que $c_{1,2}$ se mueve hacia b y $c_{3,2}$ se posiciona en la vecindad de y . Nótese que se ignorarán los casos en los que alguno entre $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ están en los vértices sombreados de negro o en y pues C gana en a lo más un turno o está en una posición ilegal. En (d), R acaba de mover r_1 a v , por lo que C mueve como en (e) para forzar el movimiento de R 76

3.8. En (a), R acaba de mover r_2 a u_1 , por lo que C mueve como en (b) para forzar el movimiento de r_1 a b , quedando en una situación análoga a la mostrada en (a) de la Figura 3.6. 77

3.9. Al igual que en el subcaso anterior, c_2 y c_4 recapturan como en (b), mientras que $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven como en (c) (ver continuación de figura) para obligar el movimiento de r_1 a v 77

3.9. En (d), R mueve r_1 a v , por lo que C mueve sus policías como en (e). 78

3.10. Si R mueve r_2 a u_1 como en (a), C mueve a sus policías como en (b). 78

3.10. Independientemente de lo que haga R en su siguiente turno (moverse como en (c) o en (e)), C forza que R junte las fichas r_1 y r_2 al siguiente turno.	79
3.11. Una vez más, c_2 y c_4 recapturan como en (b).	79
3.11. En tanto, $c_{1,2}$ se posiciona en z y $c_{3,2}$ en x	80
3.12. Posterior al movimiento de R , C mueve sus policías como en (b) para obligar el regreso de r_2 a w_1	80
3.13. En (a), R acaba de mover r_1 , de manera que C mueve como en (b) para posicionarse $c_{2,1}$ en x y $c_{4,1}$ en u_2 , a la vez que $c_{1,1}$ y $c_{3,1}$ recapturan.	81
3.14. En (a), C busca poner a $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ en un vértice azul sombreado y en un vértice verde sombreado. Si alguno estuviera en los vértices negros sombreados, en v , o en w_2 , se sigue que C captura a R en a lo más un turno, o está en una configuración ilegal. El resto de vértices tienen al menos un vértice verde sombreado y uno azul sombreado en su vecindad cerrada. Por tanto, se pueden colocar $c_{2,1}$ y $c_{4,1}$ de manera que estos impiden el movimiento de r_1 . Análogamente, $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ se mueven a un vértice azul y uno verde (de los mostrados en (b)) respectivamente.	81
3.14. Así, C termina su turno como se muestra en (c).	82
3.15. Posterior a que R pase como en (a), C mueve como en (b) para capturarlo en su siguiente turno. En cambio, si R mueve r_2 como en (c), C mueve sus fichas como en (d), obligando a R a pasar y capturándolo en su siguiente turno al reetiquetar las fichas de c_2	82
3.16. En (a), c_1 se encuentra obstruido, por lo que reetiqueta sus fichas como en (b). Luego, C mueve como en (c), mientras que $c_{3,2}$ se asegura de estar en un vértice adyacente a y (reetiquetando en caso de que c_2 también estuviera obstruida).	83
3.17. En (a), $c_{1,2}$ y $c_{3,2}$ están ambos en u_1 , por lo que uno de ellos se mueve a z como en (b). En (c), R mueve r_2 a y , por lo que C mueve como en (d) para obligar a R a pasar y capturar en a lo más dos turnos.	84

Bibliografía

- [1] M. Aigner y M. Fromme, A game of cops and robbers, *Discrete Applied Mathematics* 8(1) (1984) 1–12.
- [2] A. Bonato y R. J. Nowakowski, *The game of cops and robbers*, American Mathematical Society, 2011.
- [3] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer-Verlag, 2008.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory* 5th Ed., Springer-Verlag, 2017.
- [5] R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, C. Huemer, F. Hurtado, J. Urrutia y D. R. Wood, Token Graphs, *Graphs and Combinatorics* 28 (2012) 365–380.
- [6] J. J. Fernández-Velázquez, *Policías y ladrones sobre digráficas de fichas*, Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, 2023.