UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

Fortalecimiento del Programa Preventivo para Materias de Alto Índice de Reprobación (PPMAIR) y su impacto en los procesos formativos del estudiantado de nuevo ingreso en la licenciatura de actuaría.

SEMINARIO CURRICULAR

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A

José Pablo Schivy Gutiérrez

ASESOR

Mtro. Miguel Ángel Chávez García

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México. 2025

Objetivo general:

Presentar un temario y material didáctico como complemento al Programa Preventivo para Materias de Alto Índice de Reprobación (PPMAIR) con los temas que se recomiendan cubrir por parte de los alumnos que imparten el curso a los alumnos de nuevo ingreso a la licenciatura de actuaría.

Objetivos específicos:

- Establecer un temario orientado a la lógica matemática con material didáctico y exponer la importancia que esta tiene en el estudio de las matemáticas.
- Exponer un temario de teoría de conjuntos con material didáctico a manera de que sirva como apoyo mientras se cursa en particular Álgebra Superior I, Geometría Analítica I y Cálculo Diferencial e Integral I.

Planteamiento del problema

La licenciatura en Actuaría, ubicada en el área uno de las ciencias físico-matemáticas se imparte en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, en la cual desde hace al menos cuatro años ingresan anualmente 280 estudiantes en promedio, los cuales inician sus estudios en el segundo semestre del año y las asignaturas que cursan en función del plan de estudios 2014 son: Cálculo Diferencial e Integral I, Álgebra Superior I, Geometría Analítica I, Algoritmos y Programación y Seguro de Vida. Las asignaturas que presentan un mayor índice de reprobación son las que están englobadas en el área de matemáticas básicas, para ser exactos en las asignaturas 1, 2 y 3 de la lista anterior.

En el año 2006 se implementa una estrategia denominada: Programa de Prevención para Materias con Alto Índice de Reprobación; denominado PPMAIR, el cual tiene como objetivo asesorar a los estudiantes de primer ingreso en las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica I y Álgebra Superior I. Para ello se elige a los estudiantes de últimos semestres para que asesoren académicamente durante el primer semestre.

La capacitación de los asesores de PPMAIR, consiste en algunas técnicas de manejo de grupos y motivación para los asesorados. Es hasta el año 2013 cuando el Consejo Universitario aprueba el nuevo Plan de Estudios 2014 de la licenciatura en Actuaría en la cual se contempla el PPMAIR como un requisito para los estudiantes y, dicho sea de paso, como una respuesta a las diferentes observaciones que realizaron los Comités Interinstitucionales para la Enseñanza en Escuelas de nivel Superior CIEES.

Por ésta razón en el año 2016, se reestructuró el PPMAIR, en el cual aunado a la carga de asignaturas naturales del primer semestre, los estudiantes llevan ahora seis horas a la semana, una asesoría durante el primer semestre de la licenciatura impartida por alumnos del último año, donde se les solicita a los asesores que se acrediten las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral del I al IV y Álgebra Superior I y II, dicho curso lo contempla como requisito del Tomo I del actual plan de estudios.

Por consiguiente, las asesorías son destinadas para las asignaturas en las cuales se ha detectado una alta frecuencia de reprobación. A partir de este año, los capacitadores recibieron una introducción a la lógica matemática (Chávez, 2016) y algunas formas de demostración y heurística (Polya, 1965).

De acuerdo con datos extraídos del CODEIC (2016) en los cuales se muestran el número de población y porcentaje de no aprobados de las generaciones de 2010-2013, el porcentaje de reprobación en las materias de cálculo, álgebra y geometría son de 67%, 57% y 45% respectivamente.

Durante el tiempo que se lleva impartiendo el PPMAIR, estas cifras han podido bajar en algunas ocasiones, sin embargo no es algo constante, entre otras razones porque los alumnos de nuevo ingreso no lo visualizan como una materia obligatoria y no pueden ver las ventajas que esto puede ofrecer a su desempeño académico de primer semestre, y también debido a que en diversas ocasiones aquellos que imparten el curso no llevan un orden adecuado o sólo tienen el interés de liberar el servicio social.

Si esta situación continúa, el nivel de deserción aumentará y los alumnos pueden presentar un bloqueo mental en el que pueden creer que no son capaces de estudiar esta licenciatura. La idea del curso propedéutico es adecuada, sin embargo considero que presenta algunos inconvenientes en la forma en la que está estructurada, y fue algo que viví cuando yo impartí el curso.

Es un enfrentamiento un tanto crudo cuando los alumnos de nuevo ingreso logran mirar por primera vez con ojos distintos a las matemáticas, y esto es porque en la preparatoria no se visibilizan a gran profundidad estos temas, mientras que ya en la carrera el nivel de exigencia y precisión respecto a las materias de matemáticas incrementa considerablemente.

Por lo que, en este trabajo se propiciará como aporte un material complementario con la idea de poder asimilar de mejor manera los temas planteados en primer semestre, tratando de abordarlos en la situación del alumno de nuevo ingreso que está teniendo contacto por primera vez con la matemática formal de nivel superior. Así mismo, funcionará como una guía o referencia a los alumnos de último año que impartan PPMAIR sobre los contenidos que se sugiere que se enseñen a los alumnos, asi como una guía de ejercicios que puedan resolver conjuntamente.

Por consiguiente, si se comprenden mejor las bases de las matemáticas les resultará mucho más ameno entender los nuevos temas que se vayan presentando a lo largo de la carrera; ya que uno de los motivos por los cuales a muchas personas se les dificultan tanto las asignaturas de la licenciatura de Actuaría es porque no hay una correcta consolidación de las bases teóricas, por lo que si esta parte se cumple existe una mayor probabilidad de que disminuya el índice de reprobación y se llegue a una mejor comprensión de los temas futuros.

Agradecimientos

La conclusión de este trabajo fue impulsada por muchas personas, a las cuales quiero darme el espacio para agradecer, pues de no ser por su apoyo en mayor o menor medida el resultado no sería el que es ahora.

En primer lugar a mi madre Elsa Gutiérrez, por haber sido mi motor a lo largo de toda mi vida, quien me impulsó a estudiar esta carrera y me ha dado su apoyo incondicional siempre, por haber creído en mí. Me acompañó en toda la gran travesía que fue la licenciatura y siempre estuvo para motivarme en los momentos de frustración, esos momentos en la madrugada en los que yo sentía desesperación y angustia, y que aunque hubiera cansancio de por medio nunca dudó en brindarme apoyo y motivarme. No hay palabras suficientes para expresar tanto amor y agradecimiento hacia ella. Nos ha sacado adelante a mi hermana y a mí, y es una persona que tiene todo mi cariño y admiración. Esto es para ella.

A mi hermana Ana Sofía Schivy, por ser mi compañera de vida y una gran fuente de inspiración. Por haberme orientado a lo largo de mi vida académica y siempre estar al pendiente de mí, nunca me dejó atrás y ha sido un gran ejemplo a seguir. Mi hermana es una persona que brilla por su esencia, y de no ser por ella esta historia estaría teniendo un desenlace totalmente distinto.

A mi padre Martín Schivy, cuyo legado se ve fuertemente reflejado en este trabajo. Él fue alguien que siempre me motivó mucho a escribir, y desde mi infancia cada vez que yo escribía algo él era el primero en leerlo y siempre me motivó a seguir escribiendo. Este trabajo es fruto de esa motivación. En donde sea que te encuentres, gracias de corazón.

A mi tío Juan Carlos Schivy, por haber sido un gran apoyo en general en mi vida por tanto tiempo. Por siempre estar al pendiente de nosotros y ser una persona extraordinaria en todos los sentidos.

A mi asesor el Mtro. Miguel Ángel Chávez, por haber estado sin falla todos los lunes de cada semana para revisar mis avances. Por haberme motivado y facilitado la realización del trabajo y por haber impulsado y dado forma a algo que empezó como una pequeña idea. Por haber creído en esa idea.

A Rebeca Sánchez, mi mejor animadora y también futura actuaria, por haber estado siempre al pendiente de cómo iba la realización del trabajo y por haberme hecho sentir siempre su apoyo y admiración. Por ser esa persona con la que siempre puedes contar. Ella fue una persona clave en mi desarrollo académico y les deseo a todos tener una persona como ella en su vida.

A Luis Santiago, mi fiel compañero de la carrera, por siempre creer en mí y ser mi compañero de estudio. Por darme ese voto de confianza y ayudarme a sacar adelante la carrera juntos. Por haber estado incondicionalmente como amigo, como compañero y como maestro. Agradezco infinitamente el tiempo y dedicación invertidos en esas largas horas de estudio o realización de proyectos en las cuales se fue consolidando nuestra amistad.

A León Rosas, mi compañero de servicio y gran amigo, por darme (a su manera) palabras de motivación, crudas pero necesarias que me impulsaron a seguir adelante y me hizo creer en mí. Su visión del PPMAIR fue la semilla de la idea de este trabajo. Una persona extraordinaria, y agradezco poder llamarlo mi amigo.

A mis amigos de la carrera Pepe (José Luis Ortíz), Coco (Monserrat López), Regina Gómez, Edson Correa y Mónica Aranda, por haber sido un gran apoyo en particular durante la realización del trabajo. Les deseo todo el éxito del mundo.

A los profesores que generaron un gran impacto positivo en mi desarrollo académico, pues la idea de este trabajo es precisamente aportar ese granito de arena como ellos lo hicieron conmigo, posiblemente sin saberlo. Al profesor Eduardo Gomezcaña, pues este trabajo está fuertemente inspirado en su curso de Álgebra Superior I. A los profesores Arturo Vera, Ángela Ares de Parga, María Concepción González, Miguel Ángel Sánchez Barquín y Nelli Cárdenas. Todos ellos tuvieron un impacto en mi vida, de manera académica o personal y les agradezco infinitamente.

Finalmente a la UNAM y a la FES Acatlán, por haberme brindado la posibilidad de estudiar la licenciatura y haberme armado con todas las herramientas necesarias para lograrlo.

Este trabajo está dedicado a mi madre y a mi hermana.

Índice

Introducción

La presente obra tiene como objetivo establecer y presentar un material de apoyo para los alumnos que ingresen a la licenciatura en Actuaría, el cual se recomienda que sea impartido por los alumnos del último año de la licenciatura que están liberando el servicio social en el Programa Preventivo para Materias de Alto Índice de Reprobación (PPMAIR), con la finalidad de aprovechar la cercanía en edad entre los estudiantes de nuevo ingreso y los que están por egresar; todo esto bajo la supervisión de los docentes que participan en la Coordinación del Programa de Actuaría.

Muchos de los alumnos de nuevo ingreso provienen del sistema de bachillerato que ofrece la Universidad, como son:

- Escuela Nacional Preparatoria (ENP).
- Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH).

en un 90%, y el 10% restante provienen de bachilleratos ajenos a la Universidad.
A lo largo de la implementación del programa PPMAIR se ha detectado que los alumnos de nuevo ingreso llegan con deficiencias en aritmética, álgebra y razonamiento matemático.

Dado que la licenciatura en Actuaría está insertada en el área de las ciencias físico-matemáticas, esta misma demanda una alta comprensión en el razonamiento formal matemático. Por ello, se considera el presente trabajo como una introducción al desarrollo del pensamiento formal en matemáticas como lo es la lógica matemática. Es decir, se pretende guiar al estudiante en el formalismo teórico que exige la licenciatura, y fungir simultáneamente como una guía para el alumno por egresar sobre los temas que puede exponer ante el grupo, aprovechando que dichos estudiantes han recorrido el camino matemático que se requieren en la licenciatura en Actuaría.

Con esta filosofía, se pretende disminuir el índice de reprobación en las asignaturas correspondientes al campo de las matemáticas y proporcionar las herramientas básicas para desarrollar las demostraciones que los temas exigen. En el área de las matemáticas la argumentación de los resultados está sustentada a partir de la lógica matemática, de las cuales derivan diversas formas de demostrar. Por ello, la estructura del presente trabajo escrito está confeccionada de la siguiente manera:

- **Capítulo 1:** En este capítulo se desarrolla el lenguaje matemático formal con base en ejemplos del lenguaje común, con el cual los estudiantes están mayormente familiarizados, y que la transición hacia el lenguaje matemático no resulte tan abrupta, además de presentar con cada tema nuevo los sustentos del razonamiento matemático, el cual una vez comprendido facilita en gran medida el análisis de futuros temas referentes a matemáticas abordados en la licenciatura en Actuaría. Es decir, se establecen las reglas del juego con el cual se nos permite construir el enorme edificio de las matemáticas.

- **Capítulo 2:** Una vez establecidas las bases teóricas del razonamiento matemático se presenta el tema de teoría de conjuntos como la forma más natural dentro de la matemática y que contribuye al desarrollo de la misma. Entre ellas, se le da sentido a varias de las proposiciones que se abordan en el capítulo 1, pues muchas de las demostraciones realizadas en este capítulo están sustentadas con lo visto en el anterior, y se desarrollan marcos de referencia en los cuales cobran sentido muchos conceptos matemáticos.

Dentro de las asignaturas que se imparten en el primer semestre de la licenciatura se encuentran: Álgebra Superior I, Geometría Analítica I y Cálculo Diferencial e Integral I. De estas materias lo que se tiene en común es el lenguaje algebráico y la estructura que se emana de la lógica matemática. Por ende, sin un entendimiento de la estructura y el lenguaje hay poco avance en las asignaturas mencionadas. La materia que tiene más puntos de interconexión en su temario con el resto es la de Álgebra Superior I, por lo cual el escrito tendrá un enfoque particular al temario de esta asignatura, considerando que los temas vistos en dicho temario son transversales a las otras dos asignaturas.

Durante el desarrollo de la presente obra se buscó que los ejemplos sean lo más sencillos para que la transición al lenguaje matemático resulte de la manera más natural posible y de esta manera se evita el tabú de que la matemática es ajena al lenguaje cotidiano. Mucho del éxito o fracaso de los estudiantes en las asignaturas de matemáticas se debe a que dicha transición no se logra de manera exitosa. Se espera que el presente escrito aporte una visión más fresca dentro del árido lenguaje de la matemática; sin perder el rigor y formalidad que esta exige.

Junio 2024.

Capítulo 1. Lógica Matemática

1.1 Proposiciones

La lógica es una rama de la filosofía que estudia la veracidad de ciertos razonamientos y argumentos, y esta se divide en varias categorías. Para el objetivo establecido en este trabajo nos centraremos en la lógica matemática. Así pues, la lógica matemática es una rama de la lógica que se encarga de estudiar mediante un lenguaje exacto la veracidad de ciertas proposiciones y argumentos por medio de axiomas y reglas de inferencia de una forma precisa.

De acuerdo a los autores Patrick Suppes y Shirley Hill (Suppes, Hill. 1988, p.V del prólogo) , "no se puede poner en duda la importancia en la matemática moderna de la teoría de la demostración y de la metodología en la deducción de teoremas a partir de axiomas. Sin embargo, el desarrollo de la destreza en los razonamientos deductivos, ha sido considerado como de interés secundario en los planes de enseñanza de especialización matemática. Nuestro punto de vista es que una enseñanza de lógica matemática bien meditada y planeada, al principio de la carrera del estudiante le proporcionará una base para estudios de matemáticas más profundos y penetrantes."

La lógica matemática tiene una gran importancia en la ciencia de las matemáticas, y no muchas veces es realmente valorada. Sin embargo, es la base de todo el estudio formal de la matemática, pues sin ella no existirían los distintos métodos de demostraciones y no podríamos garantizar el valor de certeza de los resultados obtenidos. Sabemos además, que las matemáticas son la base de muchas otras ramas de estudio que hoy en día son de vital importancia en el desarrollo de muchas áreas, por ejemplo: las finanzas, la estadística y probabilidad, la contabilidad, la economía, optimizaciones, estudios de medicina, e incluso algo tan sencillo como saber cuánto te tienen que devolver de cambio al realizar la compra de algún producto. Pues bien, todas estas operaciones que se nos enseñan desde la primaria tienen una justificación por medio de la lógica, no es simplemente porque "así es". A lo largo de este capítulo se intentará exponer la importancia que tiene esta rama de estudio en una rama principal que se nos enseña desde niños: las matemáticas.

Comenzamos entonces con la definición de lo que es una proposición.

Definición:

Entenderemos como *proposición* a una oración declarativa, a la cual se le pueda determinar un valor de certeza, por lo que, hay algunas condiciones a destacar.

i) No podremos considerar enunciados que expresen opiniones.

ii) No se consideran enunciados que expresen deseos.

iii) No se consideran enunciados que no sean claros.

Se pondrán unos ejemplos a continuación para tratar de esclarecer estas condiciones:

Ejemplo 1.1.0

Consideremos los siguientes enunciados:

i) La carrera de Actuaría es impartida en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán.

ii) Ayer hubo una colisión de automóviles en la avenida principal.

iii) Considero que esa persona es amable.

iv) Me gusta desayunar antes de ir a la escuela, así me siento más activo.

v) Quisiera ser mejor cocinando.

vi) Creo que vi a mi amigo caminando por la calle.

Tomando en cuenta las condiciones que establecimos previamente, los enunciados i) y ii) son declaraciones verificables, es decir, podemos determinar su valor de certeza. Para el enunciado i) bastaría corroborar la oferta académica del plantel y en el enunciado ii) bastaría revisar las noticias, y aunque no apareciera esa noticia en particular es algo relativamente sencillo de corroborar. Por lo tanto, esos son dos ejemplos de enunciados que cumplen con los requerimientos.

Ahora bien, analizando el enunciado iii) notamos que este expresa una opinión, y la palabra clave del enunciado es: “Considero”. Al ser una opinión no podemos garantizar el valor de certeza de ese enunciado, por lo que estos quedan descartados como proposiciones.

El enunciado iv) y v) expresan una opinión y un deseo respectivamente, mientras que el enunciado vi) es un ejemplo de un enunciado que no es claro.

Al haber establecido entonces estas condiciones con sus respectivos ejemplos definimos a continuación los dos tipos de proposiciones que existen.

1.1.1 Proposiciones atómicas

En nuestros cursos de química tanto de nivel secundaria como preparatoria, se utilizaba la palabra "átomo" para describir la materia en su forma más simple, en algo que ya no se puede separar. De esta forma, usaremos de manera análoga el término en lógica para referirnos a que nos enfrentamos a una proposición en su forma más simple, que declara una única cosa.

Se presentan a continuación unos ejemplos de proposiciones atómicas:

Ejemplo 1.1.1

i) La lámpara es roja.
ii) Está lloviendo.
iii) Rebeca está corriendo.
iv) La silla está rota.
v) México es un país.
vi) México está en el hemisferio norte.

1.1.2 Proposiciones moleculares

Entendemos como *proposición molecular* cuando juntamos dos o más proposiciones atómicas.

Retomando los enunciados v) y vi) del ejemplo 1.1.1, tenemos:

v) México es un país.
vi) México está en el hemisferio norte.

Podemos unir ambas proposiciones por medio de un *término de enlace*, pensemos en la palabra "y":

vii) México es un país **y** México está en el hemisferio norte

De esta forma podemos crear proposiciones moleculares, enlazando una o varias proposiciones atómicas mediante términos de enlace.

Algo importante a destacar es la diferencia entre *sintaxis* y *semántica*.

Consideremos las siguientes proposiciones:

viii) México es un país que está en el hemisferio norte y tiene playas.

ix) México es un país que está en el hemisferio norte y México es un país que tiene playas

Ambos enunciados nos están transmitiendo el mismo mensaje, y en este caso diremos que son *semánticamente iguales*, mientras que el hablar de sintaxis nos indica que son *exactamente* iguales, palabra por palabra.

Por lo tanto, cuando dos proposiciones sean sintácticamente iguales diremos que hay una igualdad entre dichas proposiciones. Cuando sean semánticamente iguales diremos que las proposiciones son *equivalentes*.

1.1.3 Términos de enlace

En la vida cotidiana tendemos a pasar por alto los términos de enlace y, en ocasiones, los solemos ignorar. Veremos en esta sección la importancia que estos tienen, pues a través de ellos convertimos proposiciones atómicas en moleculares, ya que son la herramienta que las enlaza y tienen una gran importancia en el estudio de las matemáticas.

Serán cinco los términos de enlace que estudiaremos. Será fácil identificarlos, pues estos se pueden detectar de manera intuitiva como la(s) palabra(s) que unen a las proposiciones atómicas. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1.2

Consideremos la proposición:

Está lloviendo y hace mucho frío.

Esta proposición es molecular, pues está compuesta por dos proposiciones atómicas. Por ejemplo, si designamos:

A:= "Está lloviendo"
B:= "Hace mucho frío"

Vemos que tanto A como B son proposiciones atómicas y la palabra designada como término de enlace que las une y crea una proposición molecular es la palabra "y". De esta forma, tenemos a la proposición:

A y B

Este término de enlace se conoce como *conjunción*.

Ejemplo 1.1.3
Consideremos la proposición:

Haré ejercicio o dormiré mucho.

Nuevamente, renombramos cada proposición para exhibirla en su forma atómica.
Sea

A:= "Haré ejercicio"
B:= "Dormiré mucho"

De esta forma notamos que la palabra que está cumpliendo la función de un término de enlace es la palabra "o", por lo que nos queda la siguiente proposición molecular:

A o B

Este término de enlace se conoce como *disyunción*.

Ejemplo 1.1.4

Consideremos la proposición:

Hoy no está abierta la escuela.

Veamos que, si quisiéramos hacer el mismo procedimiento que se realizó en los ejemplos anteriores esto no sería posible, pues no existen dos proposiciones atómicas en este enunciado.

Este tipo de enunciados pueden resultar algo engañosos, pero se puede analizar de la siguiente manera:

La palabra "no" nos está indicando un fuerte efecto en el mensaje que transmite.

Anteriormente mencionamos que los términos de enlace pueden actuar sobre una o varias proposiciones, y, en este caso está actuando sobre una única proposición atómica.

Podemos, entonces representar esto de la siguiente manera:

Sea

A:= "Hoy está abierta la escuela"

Considerando el término de enlace esto quedaría como:

no(A)

Este término de enlace se conoce como *negación*.

Ejemplo 1.1.5

Consideremos la proposición:

Si está lloviendo, entonces no saldré a correr.

Este tipo de proposiciones pueden resultar engañosas al principio, pues puede ser que con los únicos términos de enlace expuestos al momento uno esté buscando *una* sóla palabra. Sin embargo, intuitivamente podemos ver que hay dos declaraciones dentro del enunciado: una condición que determina una consecuencia.

Sea

A:= “Está lloviendo”

B:= “Saldré a correr”

Observando cómo definimos B, vemos que se omitió la palabra “no” dentro de su forma atómica, y esto es con toda la intención, pues recordemos que esa palabra representa un término de enlace distinto. Podríamos entonces representar esta proposición como:

Si A, entonces no(B)

Esta es una proposición con dos términos de enlace, pues cuenta con la forma “si, entonces” y con el término “no”. Ambos son términos de enlace distintos y es muy importante distinguir cada uno de ellos.

De forma general, este tipo de proposiciones se escriben como:

Si A, entonces B

También se les puede decir:

A implica B

Y esto lo que nos indica es una relación entre ambas proposiciones como una causa y una consecuencia, o, mejor dicho, como una condición para que se cumpla esa consecuencia.

Algo importante a destacar de este término de enlace es que hay que ser muy cuidadosos y estrictos con su significado, pues el hecho de que A implique B no significa necesariamente que si B ocurre eso dará como resultado la declaración de A.

Este término de enlace se conoce como *condicional*.

Ejemplo 1.1.6

Consideremos la proposición:

Hoy saldré a jugar si, y sólo si ya he terminado mi tarea.

Quizás resulta un enunciado un tanto raro para el habla cotidiana, pero veamos que, al igual que en el caso condicional, este cuenta con dos declaraciones distintas. En este caso el término de enlace es el "si, y sólo si", y lo podemos representar de la siguiente forma:

Sea

A:= "Hoy saldré a jugar"

B:= "Ya he terminado mi tarea"

Y lo escribimos como:

A si, y sólo si B

Quizás este término sea el único que resulte un poco más difícil de entender, pues la frase "si y sólo si" no es algo muy común en el habla cotidiana como lo pueden ser los otros términos de enlace.

Lo que este término representa es que, así como para el término condicional se mencionó que si A implica B no necesariamente B implica A, en este caso está afirmando ambas cosas: que A implica B, y que B implica A.

Tomando el enunciado de ejemplo, quedaría de esta forma:

Si hoy saldré a jugar, entonces ya he terminado mi tarea. (A implica B)

y

Si ya he terminado mi tarea, entonces hoy saldré a jugar. (B implica A)

Esto es lo que representa este término de enlace, y tendrá una característica muy especial al momento de realizar demostraciones de proposiciones de esta forma, como veremos más adelante.

Este término de enlace se conoce como *bicondicional*.

1.2 Simbolización

1.2.1 Simbolización de proposiciones

De momento hemos trabajado los temas anteriores escribiendo varias veces los mismos enunciados con el objetivo de que sea más claro lo que está pasando detrás de todo. No obstante, resulta poco práctico realizarlo de esta manera, tanto así que incluso en las secciones anteriores se realizó una simbolización implícita al renombrar las proposiciones como A, B, etc.

La razón de simbolizar las proposiciones es, en parte para simplificar, aunque en realidad, tiene un sentido mucho más profundo, ya que, al simbolizar las proposiciones estamos tratando de limpiarlas de toda ambigüedad posible que en ocasiones se da en nuestro lenguaje diario.

Por ejemplo, pensemos en el enunciado:

No es cierto que estoy en la escuela y estoy comiendo.

Este tipo de oraciones son poco claras, pero no del tipo que establecimos al principio que quedarían descartadas, ya que esta sí está dando a entender dos proposiciones, pero no es claro si el término “no” aplica para ambas proposiciones o sólo para alguna de ellas. En este tipo de situaciones cotidianas incluso tendemos a preguntar esto para que nos aclaren a qué se refiere la persona que dice esto. Por lo que, es muy importante en el ámbito matemático ser lo más claro y preciso posible, de manera que el sistema de simbolización que se planteará intentará eliminar la ambigüedad lo mejor que se pueda. Es por esto también que las matemáticas se suelen representar con símbolos, ya que elimina la ambigüedad y al mismo tiempo resulta más práctico decir que una letra “x” representa algo, sin tener que escribir aquello que representa una y otra vez.

Así pues, con el objetivo de ser más prácticos se establecerán ciertas reglas y símbolos generales que se interpretan como los términos de enlace.

Como regla general, denotaremos a las proposiciones por letras mayúsculas del alfabeto latino como lo hicimos en los ejemplos previos. Es preferible que cada letra denote a una proposición atómica para no perder de vista ciertos detalles importantes al momento de trabajar con ellas. Es recomendable que cuando existan varias proposiciones que están siendo analizadas se utilice como letra algo que lo relacione.

Por ejemplo

Está nevando y hace frío

Esto podríamos simbolizarlo de la siguiente manera:

N:= Está nevando
F:= Hace frío

Y tendríamos

N y F

Esto fue simbolizado de esta forma para poder crear una rápida asociación de la letra con la idea de la proposición y que resulte más sencillo de manejar, si bien esto es meramente una recomendación. Si alguien se acomoda más enunciando las proposiciones, por ejemplo, en orden alfabético también es válido,siempre y cuando exista una noción de lo que cada una representa.

Previo a exponer los términos de enlace es importante establecer algo vital para el manejo de estos conceptos, y en general para las matemáticas: el uso del paréntesis.

Pensemos en lo siguiente: ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$5 \times 3 + 2$$

Si bien nos enseñaron en los cursos de nivel secundaria se realiza primero la multiplicación, pero esta operación tendría un resultado totalmente diferente si se agrupara de la siguiente forma:

$$5 \times (3 + 2)$$

Así pues, aunque se tengan ciertas reglas como resolver las multiplicaciones primero, es importante hacer un uso de los paréntesis para evitar ambigüedades y determinar el orden en que se tienen que realizar las operaciones. Aunque, veremos más adelante, que así como se establece un orden de jerarquía para las operaciones matemáticas, también se establecerá uno para el cálculo proposicional.

Retomando el ejemplo:

No es cierto que estoy en la escuela y estoy comiendo.

Podríamos designar:

E:= Estoy en la escuela

C:= Estoy comiendo

Y tenemos esto:

No E y C

Pero, ¿cómo interpretamos eso? Ya que podríamos estar pensando en alguno de los siguientes escenarios:

i) (No (E)) y C
ii) E y (no(C))
iii) No(E y C)

Al exponerlo de esta manera vemos que el enunciado puede darnos a entender tres cosas distintas, por lo que, es de suma importancia que las proposiciones estén lo más claras posibles. El uso de los paréntesis y su importancia quedarán más claros una vez que se muestren ejemplos con los términos de enlace para dar a entender la función que cumplen.

1.2.2 Simbolización de términos de enlace

Conjunción

Este término de enlace une a las proposición atómicas usualmente por medio de la palabra “y”, aunque puede estar implícito de otras formas, como lo pueden ser las palabras o frases “también”, “al mismo tiempo”, “así como”, etc. Por lo que, hay que estar atentos a ver qué dice el enunciado y determinar si se trata de una conjunción.

Este término de enlace utiliza el símbolo $\wedge$, podríamos entonces unir dos proposiciones atómicas de la siguiente manera:

$$P \wedge Q$$

Esto significa P y Q. En particular, este término de enlace cumple con la siguiente propiedad:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

En este caso utilizamos el símbolo ≡ para denotar que son equivalentes, ya que, recordemos que no es lo mismo hablar de sintaxis que de semántica. Esto se conoce como ley de conmutatividad, y será algo que retomaremos más adelante cuando se vean las reglas de inferencia.

Disyunción

Este término de enlace une a las proposiciones atómicas usualmente por medio de la palabra “o”. Al igual que en la conjunción, hay que saber identificar en los enunciados de qué otra forma puede estar implícito este término, ya que puede presentarse de otras formas.

Es común que en el habla cotidiana uno pueda escuchar enunciados con disyunciones de dos formas. Por ejemplo:

La figura es un triángulo o es un cuadrado

O la figura es un triángulo, o es un cuadrado

Sintácticamente son enunciados distintos, sin embargo dan a entender la misma idea, y es que pasa una u otra cosa. En este caso en particular no pueden presentarse ambas cosas, pero veremos más adelante que pueden darse casos en los que ambas proposiciones atómicas de una proposición molecular, en la cual su término de enlace es una disyunción, pueden ser verdaderas.

Este término de enlace utiliza el símbolo $\vee$, entonces podríamos unir dos proposiciones atómicas de la siguiente manera:

$$P \vee Q$$

Lo cual se traduce en: P o Q. Así como en la conjunción, la disyunción también cumple con la ley de conmutatividad. Es decir:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

Negación

Este término de enlace puede estar aplicado sobre una sola proposición atómica o sobre más de una, siendo el único que puede actuar sobre una sóla proposición. Se entiende como la palabra “no”, va a ser de los términos de enlace más fáciles de intuir.

Este término utiliza el símbolo $\neg$, y puede actuar como mencionamos sobre una o varias proposiciones de la siguiente forma:

$$\neg P$$
$$\neg(P \wedge Q)$$
$$\neg P \wedge Q$$

Como vemos en los ejemplos puede venir de distintas formas este término, puede ser simplemente la negación de una proposición, o la negación de la conjunción de dos proposiciones, la cual veremos más adelante la equivalencia que se da en este término en particular, y puede presentarse de muchas distintas maneras este término, lo cual se intentará esclarecer conforme vayamos avanzando con los ejemplos.

Condicional

Este término tiene una gran importancia, pues muchas de las demostraciones matemáticas siguen esta estructura, el querer probar que, si se dan ciertas condiciones iniciales, estas llevan a una consecuencia directa. Es relativamente sencillo de identificar en las oraciones, pues comúnmente viene de la forma "Si, …, entonces". Por ejemplo: "Si estudio mucho, entonces pasaré mi examen". También se suele identificar cuando se dice que P implica Q.

Este término utiliza el símbolo $\rightarrow$ o el $\Rightarrow$, y es necesario por lo menos dos proposiciones atómicas, también se puede presentar con varias proposiciones, como se presenta en los siguientes ejemplos, en los que, nuevamente veamos la importancia del uso de los paréntesis.

$$P \rightarrow Q$$
$$(P \land Q) \rightarrow R$$

Cabe recalcar que el paréntesis juega un papel fundamental en esta parte, pues hay una diferencia muy clara:

$$(P \land Q) \rightarrow R \neq P \land (Q \rightarrow R)$$

El uso del paréntesis puede resultar práctico de momento, y por lo general ayuda a entender de mejor forma las cosas, sin embargo, cuando se tiene algo más extenso se puede convertir en algo difícil de manejar y hasta resultar todavía más confuso, por lo que, estableceremos más adelante la jerarquía de los términos, para que, así como se mencionó en el ejemplo de la operación que llevaba una suma y una multiplicación se puedan llevar a cabo las interpretaciones de una manera más clara cuando no cuenten con paréntesis.

Bicondicional

Este término es muy especial, no se usará tanto en los ejercicios de cálculo proposicional que veremos, pero juega un papel muy importante en general en las matemáticas, y veremos más adelante que también tiene una forma muy particular de funcionamiento al momento de realizar una demostración de este tipo.

Este término de enlace se reconoce por medio de la frase “si, y sólo si” o “es una condición necesaria y suficiente” y esto significa que es una doble implicación. Se usa el símbolo ↔ o el ⇔. Entonces, las proposiciones quedan unidas de la siguiente forma:

$$P \leftrightarrow Q$$
$$(A \wedge B) \leftrightarrow (P \vee Q)$$

La segunda forma es para ejemplificar cómo quedaría entre proposiciones moleculares tomándolas de forma arbitraria.
Mencionamos anteriormente que esta es una doble condicional, por lo que tenemos la siguiente equivalencia:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Jerarquía
Las reglas son las siguientes:

- Los paréntesis del término dominante no se escriben
- El orden de precedencia es el siguiente:
    1. $\rightarrow$
    2. $\wedge$
    3. $\vee$
    4. $\neg$
- La implicación asocia a la derecha, mientras que el resto de los términos de enlace asocian a la izquierda

Observación: La bicondicional toma el mismo puesto que la condicional pues recordemos que esta sigue siendo una condicional.

Ejemplo de jerarquía
Si tenemos la siguiente proposición:

$$P \rightarrow Q \wedge R$$

Esto se traduce a:

$$(P \rightarrow (Q \land R))$$

Y como el término dominante no lleva paréntesis, esto se escribe como:

$$P \rightarrow (Q \land R)$$

Ejemplo de asociación a la derecha

Si tenemos la siguiente proposición:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R$$

Esto se traduce como:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Ejemplo de asociación a la izquierda

Si tenemos:

$$P \land Q \land R \equiv (P \land Q) \land R$$

$$P \lor Q \lor R \equiv (P \lor Q) \lor R$$

Ejercicios

1. Simbolizar las siguientes proposiciones:
   a) No estoy triste
   b) Estoy comiendo y haciendo ejercicio
   c) Si no llueve, entonces saldré de compras
   d) Como no existe posibilidad de empatar, entonces el equipo ganará o perderá
   e) $x + 3 = 2$ si, y sólo si $x = -1$

f) $a^2 - 2a = 0$ si, y sólo si $a = 0$ o $a = 2$

g) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

2. Considerando

   P:= El perro está corriendo

   Q:= El niño está jugando

   R:= El parque está abierto

   Escribir en forma de frase las siguientes proposiciones:

   a) $Q \wedge R$

   b) $P \vee Q$

   c) $Q \rightarrow R$

   d) $R \leftrightarrow P$

   e) $P \wedge \neg Q$

   f) $\neg Q \rightarrow \neg R$

   g) $Q \vee \neg P$

   h) $P \rightarrow \neg Q$

   i) $(Q \wedge P) \rightarrow R$

1.2.3 Argumentos

Entenderemos como *argumento* a una lista de proposiciones de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \text{n.} \quad P_n \\ \hline \text{C} \end{array}$$

A las proposiciones P_1 , P_2 , … , P_n se les denomina *premisas* del argumento y C es denominada la conclusión del argumento.

¿Qué nos interesa del argumento?

Es aquí donde la lógica empieza a jugar un papel fundamental para las matemáticas, pues lo que queremos con todo esto es determinar la *validez* de este argumento.

Validez

"Diremos que un argumento es *válido* cuando sea imposible que su conclusión sea falsa mientras sus premisas sean verdaderas.

Por otro lado, diremos que un argumento es *falaz* cuando sea posible obtener una conclusión falsa de premisas verdaderas." (Gomezcaña, 2020)

Pensemos en los siguientes argumentos:

Ejemplo 1.2.1

"Los músicos saben tocar un instrumento. Jaime es músico. Por lo tanto, Jaime sabe tocar un instrumento."

Este es un argumento compuesto de dos premisas y una conclusión

1. Los músicos saben tocar un instrumento P_1
2. Jaime es músico P_2

Jaime sabe tocar un instrumento C

Este es un argumento *válido*.

Ejemplo 1.2.2

1. María es alta y es canadiense P_1
2. Javier es alto y es canadiense P_2
3. Ricardo es alto y es canadiense P_3
4. Rebeca es alta y es canadiense P_4

Todas las personas altas son canadienses C

Este es un argumento *falaz*, pues fácilmente puede darse el caso de que una persona sea alta y tenga una nacionalidad distinta.

Ejemplo 1.2.3

1. Los matemáticos son personas con muy buen razonamiento P_1
2. Carlos es una persona con muy buen razonamiento P_2

Carlos es un matemático C

Este es otro ejemplo de un argumento *falaz*, y conforma el ejemplo de una condicional que no es de ida y vuelta.

1.3 Tablas de verdad

Previo a entrar en forma con el cálculo proposicional, es necesario establecer algo que conoceremos como *tablas de verdad.* Estas son, como su nombre lo indica, unas tablas que nos ayudarán a determinar con mayor facilidad el valor de certeza de ciertas proposiciones.

En otras palabras, nos ayudarán a entender cuándo podemos aplicar ciertas reglas o no, y ayudarán a comprender mejor cómo es que muchas de las reglas de inferencia que veremos más adelante hacen sentido, pues servirán como apoyo para ver que hace sentido la regla que estemos usando. A continuación presentamos la tabla de verdad para dos proposiciones, siendo que esto se puede extender a más de dos proposiciones sin ningún problema, y presentaremos algunos ejemplos como ejercicios para que se entienda de mejor manera cómo es que podemos determinar valores de certeza por medio de esta herramienta.

Las tablas de verdad se construyen dependiendo de la cantidad de proposiciones que vayamos a considerar, y el número de filas de la tabla a partir de los valores será 2^n , que representan las distintas combinaciones en que se puedan dar los valores. En este caso expondremos dos proposiciones, por lo que tendremos $2^2 = 4$ filas, de las cuales las distribuiremos como se muestra en la tabla, tomando mitad verdaderas y mitad falsas para la primera proposición y dividiendo entre 2 para la siguiente, y así sucesivamente.

Tabla 1
Tabla de verdad general para dos proposiciones

		Conjunción	**Disyunción**	**Condicional**	**Bicondicional**
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Elaboración propia

Adicionalmente, se presenta la tabla de verdad para la negación

Tabla 2

Tabla de verdad general para la negación de una proposición

	Negación
P	$\neg P$
V	F
F	V

Elaboración propia

Estas tablas nos están diciendo lo que podríamos hacer o no teniendo dos proposiciones. Por ejemplo, si tenemos una proposición de la cual estamos seguros de su valor de certeza y quisiéramos hacer una conjunción con otra proposición, deberíamos asegurarnos de que la segunda proposición sea de igual forma verdadera. Pues, si esta no lo fuera, entonces la conjunción sería falsa.

De forma contraria, para la disyunción basta con que al menos una de las proposiciones sea verdadera, y esto incluso en palabras hace sentido, pues pensaríamos que si alguien nos dice que pasa alguna u otra cosa, esa declaración es verdadera mientras pase alguna de las cosas, o ambas.

Ejemplo 1.3.1

Veamos ahora algunos ejemplos de los que nos podemos ayudar de la tabla de verdad. Queremos ver las formas en las que puede ser verdadera la proposición $\neg(\neg(P \wedge Q) \vee R)$. Tenemos 3 proposiciones, por lo que tendremos $2^3 = 8$ filas de posibilidades combinadas con los respectivos valores de certeza que pueden ir tomando estas proposiciones para considerarlas todas.

Tabla 3
Ejercicio

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q) \vee R$	$\neg(\neg(P \wedge Q) \vee R)$
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F

Elaboración propia

Con la tabla vemos que la única forma en la que esta proposición sea verdadera es si R es falsa y tanto P como Q son verdaderas.

Cuando se presenta algo de forma en que hay verdaderos y falsos en el resultado, sin importar el número de estos, se llama *contingencia*.

Cuando todas son verdaderas se llama *tautología*.

Cuando todas son falsas se llama *contradicción*.

Por lo que el resultado obtenido de este ejercicio es una *contingencia*.

Ejemplo 1.3.2

Consideremos las siguientes proposiciones con los valores de certeza que se les asigna:

P:= Falsa

Q:= Verdadera

R:= Falsa

A:= Falsa

B:= Verdadera

Y probemos el valor de certeza de la proposición $(((P \lor A) \land R) \rightarrow B) \leftrightarrow Q$

Tabla 4

Ejercicio

P	Q	R	A	B	$P \lor A$	$(P \lor A) \land R$	$((P \lor A) \land R) \rightarrow B$	$(((P \lor A) \land R) \rightarrow B) \leftrightarrow Q$
F	V	F	F	V	F	F	V	V

Elaboración propia

Ejemplo 1.3.3 (Echeto, D. 2021)

Exhibir por medio de tabla de verdad las formas en las que puede ser verdadera la proposición $(P \land Q) \rightarrow (P \lor \neg R)$

Tabla 5

Ejercicio

P	Q	R	$\neg R$	$P \land Q$	$P \lor \neg R$	$(P \land Q) \rightarrow (P \lor \neg R)$
V	V	V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	F	F	V	**V**
V	F	F	V	F	V	**V**
F	V	V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	F	V	**V**
F	F	V	F	F	F	**V**
F	F	F	V	F	V	**V**

Elaboración propia

Vemos que en este caso, no importa el valor de certeza que se le aplique a las proposiciones, pues todos los casos nos llevan a que la proposición es verdadera. Por lo tanto, este es un ejemplo de *tautología*.

Es fácil de corroborar entonces que el caso de la proposición $\neg((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg R))$ nos llevaría al resultado de una contradicción.

Ejercicios

1. Construir la tabla de verdad de 3 proposiciones, considerando los valores de jerarquía para la condicional y la bicondicional.

2. Considerando lo siguiente:
   A:= Verdadera
   B:= Falsa
   C:= Falsa
   D:= Verdadera
   E:= Verdadera

   Determinar si la proposición $\neg((\neg(A \vee C) \wedge D) \leftrightarrow B) \rightarrow E$ es verdadera o falsa.

3. Exhibir por medio de una tabla de verdad las formas en la cual puede ser verdadera la proposición $(P \leftrightarrow (\neg Q \wedge R)) \rightarrow A$ e indicar si se trata de una contingencia, tautología o contradicción.

1.4 Cálculo proposicional y reglas de inferencia

Habiendo establecido todo lo anterior entramos en forma al cálculo proposicional. Este busca proporcionar la validez de una conclusión con base en ciertas premisas que se asumen verdaderas, y por medio de las distintas reglas de inferencia que veremos en esta sección, se buscará proporcionar un resultado válido para la conclusión que se obtenga.

El cálculo proposicional nos ayudará a entender el por qué las demostraciones se realizan de la forma en que se hacen, las formas distintas en las que se pueden llevar a cabo, y por qué ciertas reglas pueden ser válidas. Veremos que muchas veces son cosas que resultan intuitivas, y ahora es simplemente darles un nombre formal, y entender qué pasa en nuestra cabeza al momento de realizar estas conclusiones, lo cual no es cosa fácil, no es sencillo describir a cabalidad el razonamiento que se utiliza para llegar a un resultado. No obstante, esto es algo fundamental para el estudio de las matemáticas, y también para su enseñanza.

A partir de este punto comenzaremos a establecer las reglas de inferencia y algunos ejemplos de su aplicación, con la idea de ir mezclando cada vez más reglas de las que se vayan presentando y que se vaya convirtiendo en algo intuitivo con la práctica.

1.4.1 Modus Ponendo Ponens

Este es el método de afirmar afirmando, está compuesto de dos premisas y la implicación que puede ser considerada la conclusión, dependiendo de lo que se esté desarrollando en el ejercicio. Esta regla de inferencia en su forma general es la siguiente:

1. $P \to Q$
2. P

Q PP: 1,2

Esta es la forma en la que se debe escribir esta regla de inferencia. Usualmente, las premisas se enumeran para poder hacer referencia a ellas con facilidad, al momento de utilizar alguna regla de inferencia y obtener cierta conclusión a partir de esta, vamos a colocar del lado derecho la abreviación de la regla que se utilizó, en el caso de esta es PP, y se ponen los número en referencia a de dónde estamos tomando las premisas para utilizar la regla de inferencia.

Ejemplo 1.4.1

Consideremos el siguiente enunciado:

"Si el clima mejora, entonces saldrá el vuelo programado para las 7 pm. El clima ha mejorado. Por lo tanto, saldrá el vuelo programado para las 7 pm."

Primero simbolizamos.

Sea

C:= El clima mejora

V:= Saldrá el vuelo programado para las 7 pm

Tenemos:

$$\begin{array}{l} 1.\ C \to V \\ 2.\quad\ \ C \\ \hline \quad\quad V \quad\quad\quad \text{PP: 1,2} \end{array}$$

Vemos que por medio de esta regla podemos hacer válidos argumentos de esta forma, mientras asumamos que sus premisas son verdaderas.

Ejemplo 1.4.2

"Si hoy en la noche estudio para un examen, entonces no saldré a la fiesta. Si el examen es el lunes, entonces hoy en la noche estudiaré para el examen. Avisaron que el examen será el lunes. Por lo tanto, no saldré a la fiesta."

Sea

A:= El examen es el lunes

B:= Hoy en la noche estudiaré para mi examen

C:= Saldré a la fiesta

$$\begin{array}{l} 1.\ B \to \neg C \\ 2.\quad A \to B \\ 3.\qquad\ A \\ \hline \quad \neg C \end{array}$$

Analicemos los pasos que están ocurriendo para llegar a esta conclusión.

1. $B \to \neg C$
2. $A \to B$
3. A
4. B PP: 2,3

$\neg C$ PP: 1,4

Ejemplo 1.4.3

"Es probable que no me atienda el doctor, si no llego a tiempo a la cita. Cuando mi madre se queda en casa, debo ayudarla con las cosas que me pide. Si la ayudo con las cosas que pide no puedo salir temprano de casa. Es imposible que yo pueda llegar a tiempo a la cita del doctor si no salgo temprano de casa. Mi madre se ha quedado en casa, lo que significa que es probable que no me atienda el doctor."

Sea

T:= Llego a tiempo a la cita

A:= Es probable que me atienda el doctor

M:= Mi madre se queda en casa

C:= Debo ayudar con las cosas que me piden

S:= Salgo temprano de casa

1. $\neg T \to \neg A$
2. $M \to C$
3. $C \to \neg S$
4. $\neg S \to \neg T$
5. M

$\neg A$

Veamos los pasos que se siguen para llegar a esta conclusión.

Pasos:

1. $\neg T \to \neg A$
2. $M \to C$
3. $C \to \neg S$
4. $\neg S \to \neg T$
5. M
6. C PP: 2,5
7. $\neg S$ PP: 3,6
8. $\neg T$ PP: 4,7

$\neg A$ PP: 1,8

1.4.2 Silogismo hipotético

Veremos a continuación una regla que es un resultado inmediato de la regla anterior, esta se llama *silogismo hipotético* y usará la abreviación SH. Su regla se muestra a continuación:

1. $P \to Q$
2. $Q \to R$

$P \to R$ SH: 1,2

Ejemplo 1.4.4

“Yo llevo a mi perro al veterinario, si noto que está enfermo. Cada vez que llevo a mi perro al veterinario, aprovecho para que le corten las uñas.”

Sea

E:= Mi perro está enfermo

V:= Llevo a mi perro al veterinario

U:= Le cortan las uñas a mi perro

1. $E \rightarrow V$
2. $V \rightarrow U$

$E \rightarrow U$ SH: 1,2

Ejemplo 1.4.5

Retomemos el ejemplo 1.4.3 y ahora veamos que lo podemos resolver por medio de un silogismo hipotético, en vez de por *modus ponendo ponens*.

Teníamos en ese ejemplo lo siguiente:

1. $\neg T \rightarrow \neg A$
2. $M \rightarrow C$
3. $C \rightarrow \neg S$
4. $\neg S \rightarrow \neg T$
5. M

$\neg A$

Ahora, vamos a resolverlo por medio de silogismos hipotéticos.

1. $\neg T \rightarrow \neg A$
2. $M \rightarrow C$
3. $C \rightarrow \neg S$
4. $\neg S \rightarrow \neg T$
5. M
6. $M \rightarrow \neg S$ SH: 2,3
7. $M \rightarrow \neg T$ SH: 4,6
8. $M \rightarrow \neg A$ SH: 1,7

$\neg A$ PP: 5,8

Podemos ver que hay distintas formas de resolver un problema y no hay ninguna que sea mejor que otra, simplemente son dos métodos distintos y cada quien puede hacerlo por el que más le acomode siempre y cuando sean reglas válidas.

Observemos que, hace mucho sentido que este problema en particular se pueda resolver de estas dos formas, pues para justificar el silogismo hipotético se parte de la regla de inferencia del *modus ponendo ponens*. En realidad, la primera opción que hicimos de este ejercicio en el que fue resuelto por medio del PP fue precisamente para que se entienda cómo se justifica el silogismo hipotético, pues esa es la explicación de por qué se puede dar esa regla en particular.

Más adelante veremos que esta es una propiedad muy usual dentro de las matemáticas, pues puede hacerse la equivalencia dentro de muchos ámbitos, como en teoría de conjuntos, en cálculo infinitesimal y es una propiedad de mucha importancia en el concepto de *relaciones*, esta propiedad se conoce como *propiedad transitiva*. Se verá más adelante con mucho más detalle. De momento es un buen primer acercamiento a lo que esto es. Es importante recalcar que, esta propiedad se puede dar bajo ciertas condiciones, pero la analogía a esta regla lógica es algo interesante para analizar.

1.4.3 Leyes conmutativas

Esta será una regla un tanto evidente, y no profundizaremos mucho en ella, simplemente será bueno contemplarla para que sepamos que puede ser de utilidad cuando la necesitemos. Presentamos las leyes conmutativas o leyes de conmutatividad tanto para una conjunción como para una disyunción.

1. $A \wedge B$

$B \wedge A$ LC: 1

Y para la disyunción también tendremos:

1. $A \vee B$

$$B \vee A \qquad \text{LC: 1}$$

Realmente para esta regla no considero que sea necesario poner ejemplos, simplemente mencionar algunas cuestiones. Es una regla evidente, aunque muchas veces nos puede ser de utilidad para tener mayor claridad visual, pues a veces podemos estar tan metidos en algún problema y no darnos cuenta de muchas cosas, y el moverlo de manera visual puede ayudar. También notemos que, por más que hayamos mencionado que es una regla evidente, es importante notar que únicamente aplica esta regla para los términos de enlace de conjunción y disyunción, no aplica para la condicional, a menos que se trate de una bicondicional, ya que, recordemos que como la bicondicional es la unión de dos condicionales por medio de una conjunción, al convertirse en esa conjunción puede aplicar la ley de conmutatividad.

Esta propiedad será algo de mucho interés en general en las matemáticas. En particular, de momento para la lógica y el cálculo proposicional puede parecer que no tiene mucha relevancia, sin embargo para el cálculo infinitesimal y su introducción a este sí es algo importante. Es una de las propiedades más importantes que cumplen los números reales bajo los operadores de suma y multiplicación y será una propiedad que nos podrá interesar demostrar más adelante en los siguientes temas de matemáticas cuando se introduzcan nuevos operadores o nuevos espacios.

1.4.4 Simplificación y adjunción

Hay dos casos para los cuales se puede aplicar la *simplificación*, y nuevamente son en la conjunción y en la disyunción, veamos a continuación la forma en la que funciona esta regla y haremos un análisis interesante de por qué se puede hacer esto apoyándonos de lo que vimos anteriormente de las tablas de verdad. La abreviatura que utiliza esta regla de inferencia es la S.

$$1.\ A \wedge B$$

$$\text{A} \qquad \text{S:1}$$

Y para el caso de la disyunción se puede en los siguientes casos

$$1.\ A \vee A$$

A S:1

Veamos que, claramente puede presentarse la combinación de la simplificación y la conmutatividad, veamos este ejemplo para que quede claro que la simplificación no tiene que ser estrictamente el quedarnos con el término del lado izquierdo, sino que puede ser de cualquiera de los dos lados, haciendo uso de las leyes de conmutatividad

$$1.\ A \wedge B$$

$$2.\ B \wedge A \qquad \text{LC: 1}$$

B S:2

Este ejemplo fue para dar a notar que la simplificación de una conjunción no afecta realmente cuál es el término que queramos dejar solo.

Hagamos un breve análisis del por qué de esta regla.

Recordemos que, por las tablas de verdad, para que una conjunción sea verdadera ambas tienen que ser verdaderas, y para que una disyunción lo sea basta con que alguna de las dos proposiciones lo sea. Entonces, al momento de hacer la simplificación de una conjunción, como estamos asumiendo verdaderas las premisas, eso significa que si tenemos una conjunción y la estamos pensando verdadera, eso implica que tanto la primera como la segunda premisa dentro de la conjunción son verdaderas, por lo que al momento de hacer la simplificación la premisa sigue siendo verdadera, ya que ambas individualmente lo son.

En la disyunción, en cambio, sabemos por tablas de verdad que para que se cumpla su valor de certeza basta con que alguna de las premisas sea verdadera, por lo que no podemos garantizar cuál de las dos premisas envueltas en la disyunción es la verdadera. Es por eso que, la simplificación aplica únicamente en el caso que se expuso previamente, o en dado caso particular de que supiéramos exactamente el valor de verdad de ambas premisas envueltas y ambas fueran verdaderas podríamos aplicar la simplificación de una manera similar a como lo hacemos con la conjunción.

Recordemos que, dentro de un argumento no estamos asumiendo que todas las proposiciones en su forma atómica son verdaderas, sino que estamos asumiendo que todas las premisas lo son, es decir, que si viene una premisa en una forma molecular, eso es lo que estamos asumiendo como verdadero, el tener una disyunción como una premisa verdadera nos está hablando de que alguna de las dos proposiciones en su forma atómica es verdadera, pero no podemos garantizar cuál de las proposiciones es la que es verdadera, motivo por el cual, si tenemos una disyunción de dos proposiciones distintas de las cuales no conocemos su valor de certeza, no podemos aplicar una simplificación.

Adjunción

Veamos ahora la forma en la que se puede utilizar esta regla de inferencia, al igual que la simplificación, esta funciona en los casos de disyunciones y conjunciones, y se podría decir que son muy similares entre sí, son como la operación inversa que muchas veces existe en las matemáticas.

Veamos los casos en los que puede ser utilizada la regla. Se utiliza la abreviatura A.

1. A
2. B

$A \wedge B$ A: 1,2

Y para el caso de la disyunción, aplica cuando tenemos una premisa verdadera, y para que la disyunción sea verdadera no importa el valor de verdad de la nueva proposición que se le adjunte.

$$1.\ A$$

$$A \vee B \qquad \text{A: 1}$$

Tengamos siempre presente las leyes de conmutatividad para tener una idea clara de todo lo que se pueda hacer con las premisas y las distintas formas en las que podemos manipularlas.

Ejemplo 1.4.6

"Las calificaciones obtenidas por un alumno fueron no aprobatoria en el examen y aprobatoria en el proyecto final. Se sabe que si la calificación del examen no es aprobatoria, no se puede tener una calificación aprobatoria en el curso. Entonces, el alumno no tiene una calificación aprobatoria en el curso.

Sea

E:= La calificación del examen es aprobatoria

P:= La calificación del proyecto es aprobatoria

C:= La calificación del curso es aprobatoria

$$1.\ \neg E \wedge P$$
$$2.\ \neg E \rightarrow \neg C$$
$$3.\ \neg E \qquad \text{S:1}$$

$$\neg C \qquad \text{PP: 2,3}$$

Ejemplo 1.4.7

Consideremos el siguiente enunciado:

"Si $x = 2$, entonces $x + 5 = 7$. Sabemos que $x = 2$ y que $y < x$. También sabemos que si $x + 5 = 7$ al mismo tiempo que $y < x$, eso implica que $y + 5 < 7$. Por lo tanto, $y + 5 < 7$.

Sea

A:= $x = 2$

B:= $x + 5 = 7$

C:= $y < x$

D:= $y + 5 < 7$

1. $A \rightarrow B$
2. $A \wedge C$
3. $B \wedge C \rightarrow D$
4. A S: 2
5. B PP: 1,4
6. C S: 2
7. $B \wedge C$ A: 5,6

D PP: 3,7

1.4.5 Doble negación

Esta es una regla un tanto intuitiva, y lo veremos con los ejemplos sencillos que se presentarán. La importancia de esta es que nos puede ayudar a ver de forma más clara las cosas al momento de combinarla con otras reglas de inferencia. Esta regla se basa en decir que si tenemos dos negaciones, estas se cancelan. Podemos verlo de una manera similar a las leyes de los signos en las matemáticas, cuando se están multiplicando signos negativos, estos se convierten en positivo si el número de signos negativos es un número par, mientras que si el número de signos negativos es impar, entonces permanecerá como uno negativo. Eso mismo aplica para esta regla. Se abrevia con un DN, y su forma general en definición es la siguiente:

1. $\neg\neg A$

A DN: 1

O bien,

1. A

$$\neg\neg A \qquad \text{DN: 1}$$

Veamos que una proposición la podemos ver de ambas formas, y en ocasiones nos será de utilidad verlo como en la segunda forma para poder aplicar otras reglas de inferencia.

Ejemplo 1.4.8

"No es cierto que no esté lloviendo. Por lo tanto, está lloviendo"

Sea

A:= "Está lloviendo"

1. $\neg\neg A$

$$A \qquad \text{DN: 1}$$

Ejemplo 1.4.9

"Si salgo temprano, no es cierto que es imposible que no haya tráfico. Salí temprano. Por lo tanto, es posible que no haya tráfico."

Sea

S:= Salgo temprano

T:= Hay tráfico

1. $S \rightarrow \neg\neg\neg T$
2. S
3. $\neg\neg\neg T$ PP: 1,2

$$\neg T \qquad \text{DN: 3}$$

Puede llegar a ser un tanto confusa la aplicación de esta regla, pero nos será de mucha utilidad, y es muy importante tener bien claro cuándo hacemos uso de las negaciones y siempre ver la posibilidad de usar esta regla para tener una idea más clara de lo que nos está diciendo el argumento y ver si manipulándola con la doble negación podemos hacer uso de alguna otra de las reglas de inferencia.

1.4.6 Modus Tollendo Tollens

También conocido como el método de "negar negando". Esta será una de las reglas más utilizadas dentro del cálculo proposicional. Es un tanto parecida al PP, no obstante, es en este momento donde las negaciones de las premisas comienzan a jugar un papel fundamental. Se utiliza la abreviación TT. La regla en su definición nos dice lo siguiente.

1. $P \rightarrow Q$
2. $\neg Q$

$\neg P$ TT: 1,2

A diferencia del PP, que nos decía que si tenemos una implicación y tenemos como premisa verdadera el lado izquierdo de la implicación, entonces la premisa del lado derecho sería verdadera, el TT nos dice algo muy interesante: que si tenemos una implicación y tenemos como premisa verdadera la negación del consecuente (lado derecho), entonces el antecedente (lado izquierdo) será verdadero en su forma de negación.

Ejemplo 1.4.10

"Si acabo mi tarea, entonces podré irme a dormir. No me he ido a dormir. Por tanto, no he acabado mi tarea."

Sea

T:= He acabado mi tarea

D:= Podré irme a dormir

1. $T \rightarrow D$
2. $\neg D$

$\neg T$ TT: 1,2

Ejemplo 1.4.11

“Si $x \nless 3$, entonces $x + 2 \geq 5$. Si $x + 2 \geq 5$, entonces $x \neq 2$. Sabemos que $x = 2$. Por lo tanto, $x < 3$.”

Sea

A:= $x < 3$ (notemos que la negación de este es $x \nless 3$)

B:= $x + 2 \geq 5$

C:= $x = 2$

1. $\neg A \to B$
2. $B \to \neg C$
3. C
4. $\neg\neg C$ DN: 3
5. $\neg B$ TT: 2,4
6. $\neg\neg A$ TT: 1,5

A DN: 6

Ejemplo 1.4.12

“Cuando estás distraído te pasan cosas impredecibles. Siempre que te pasan cosas impredecibles es normal que te pongas nervioso. Pero no es natural que te pongas nervioso cuando tu vida es tranquila. Tu vida no es tranquila porque estás distraído.” (Gomezcaña, 2020)

Sea

D:= “Estás distraído”

I:= “Te pasan cosas impredecibles”

N:= “Te pones nervioso”

T:= Tu vida es tranquila

1. $D \to I$
2. $I \to N$
3. $T \to \neg N$
4. D
5. I PP: 1,4
6. N PP: 2,5
7. $\neg\neg N$ DN: 6

$\neg T$ TT: 3,7

Veamos que este mismo ejercicio se puede resolver haciendo uso del silogismo hipotético

1. $D \rightarrow I$
2. $I \rightarrow N$
3. $T \rightarrow \neg N$
4. D
5. $D \rightarrow N$ SH: 1,2
6. N PP: 4,5
7. $\neg\neg N$ DN: 6

$\neg T$ TT: 3,7

Estos dos últimos ejemplos van conformando lo que es una demostración matemática, y es más claro en el ejemplo 1.4.11, entonces notemos cómo es que con estas herramientas poco a poco vamos formando la base de cómo se pueden ir realizando demostraciones de manera formal en el ámbito matemático.

Veamos un par de ejemplos más referentes al ámbito matemático y proporcionemos unas demostraciones sencillas de ciertos enunciados.

Ejemplo 1.4.13

"Si $x \neq z$, entonces $x < z$. Si $x = z$, entonces $z \neq 5$. Si $x < z$ al mismo tiempo que $z = 5$, entonces $x < 5$. Sabemos que $z = 5$. Por lo tanto, $x < 5$." (Gomezcaña, 2020)

Sea

A: $x = z$

B: $x < z$

C: $z = 5$

D: $x < 5$

1. $\neg A \rightarrow B$
2. $A \rightarrow \neg C$
3. $B \wedge C \rightarrow D$
4. C
5. $\neg\neg C$ DN: 4
6. $\neg A$ TT: 2,5
7. B PP: 1,6
8. $C \wedge B$ A: 4,7
9. $B \wedge C$ LC: 8

D PP: 3,9

Habiendo establecido estas reglas tan importantes y básicas continuaremos ahora con las reglas intermedias, conocidas también como reglas compuestas.

1.4.7 Modus Tollendo Ponens

Este método también es conocido como el método de "negar para afirmar". Utiliza la abreviación TP, y la regla es la siguiente:

1. $P \vee Q$
2. $\neg Q$

P TP: 1,2

Realicemos un breve análisis sobre esta regla con las tablas de verdad. Recordemos que, para que una proposición molecular con el término de enlace de disyunción sea verdadera se tiene que cumplir que al menos una de las proposiciones sea verdadera. Lo que esta regla nos dice es explícitamente cuál de las proposiciones es falsa. Por lo tanto, para que la disyunción sea verdadera, forzosamente debe ocurrir que la que no es falsa sea verdadera. De esta forma garantizamos el valor de certeza de la disyunción.

Ejemplo 1.4.14

"O los alumnos del grupo 1 no están estudiando lo suficiente, o el profesor no está explicando bien los temas de la materia. Si el profesor no estuviera explicando bien los temas de la materia, entonces el grupo 2 saldría bajo de calificaciones. El grupo 2 ha salido alto en calificaciones. Por lo tanto, los alumnos del grupo 1 no están estudiando lo suficiente."

Sea

A:= "Los alumnos del grupo 1 están estudiando suficiente"

B:= "El profesor está explicando bien los temas"

C:= "El grupo 2 sale alto en calificaciones"

1. $\neg A \vee \neg B$	
2. $\neg B \rightarrow \neg C$	
3. C	
4. $\neg\neg C$	DN: 3
5. $\neg\neg B$	TT: 2,4
$\neg A$	TP: 1,5

Ejemplo 1.4.15

"O los árboles ya han dado frutos, o las flores han sido polinizadas. Si las abejas han estado ausentes o los perros han salido al jardín, entonces las flores no han sido polinizadas y el jardín está seco. Si las abejas no han estado ausentes, entonces los perros saldrán al jardín. Sabemos que los perros no han salido al jardín y que el jardín está seco. Por lo tanto, los árboles ya han dado frutos."

Sea

A:= "Los árboles ya han dado frutos"

B:= "Las flores han sido polinizadas"

C:= "Las abejas han estado ausentes"

D:= "Los perros han salido al jardín"

E:= "El jardín está seco"

1. $A \vee B$
2. $C \vee D \rightarrow \neg B \wedge E$
3. $\neg C \rightarrow D$

4. $\neg D \wedge E$	
5. $\neg D$	S:4
6. $\neg\neg C$	TT: 3,5
7. C	DN: 6
8. $C \vee D$	A: 7
9. $\neg B \wedge E$	PP: 2,8
10. $\neg B$	S: 9
A	TP: 1,10

Este último ejemplo puede resultar un tanto bizarro, pues puede no hacer mucho sentido al momento de leerlo, es decir, puede resultar poco intuitivo por medio de palabras el obtener un resultado inmediato, y esto es con toda la intención, para que uno lo simbolice y lo valide forzosamente con reglas de inferencia y no guiarse únicamente con la intuición. En muchas ocasiones así resultará el demostrar algo en matemáticas, no resultará intuitivo al principio o podrá verse algo revuelto, pero se cuenta con las herramientas para resolver este tipo de ejercicios.

Una breve observación respecto a este último ejercicio es que podríamos haber simbolizado la proposición C como "Las abejas han estado presentes" ya que el hecho de estar ausente puede interpretarse como *no* estar presente, y podríamos ponerla dentro de las proposiciones como su forma negativa, es decir, $\neg C \vee D \rightarrow \neg B \wedge E$ y la tercera premisa hubiera quedado como $C \rightarrow D$. Habríamos llegado al mismo resultado, sin embargo, por didáctica se expuso de la forma en que se hizo para hacer uso de la regla de la doble negación y poder mezclar más reglas de inferencia dentro de un mismo ejercicio. Si el lector lo desea, se le invita a realizarlo de esta otra manera para corroborar que se llega al mismo resultado. Hay muchas maneras distintas de llegar a una misma conclusión, ya dependerá de cómo se acomode cada uno, mientras el razonamiento sea correcto.

1.4.8 Silogismo disyuntivo

Esta será la primera regla de inferencia que veremos que utiliza tres premisas para funcionar. Como su nombre lo indica, la disyunción será algo fundamental para esta regla. Al ser una regla que ocupa tres premisas en ocasiones resulta fácil olvidarse de que esta existe, pero esta puede resultarnos de mucha utilidad. La regla es un tanto intuitiva, y al igual que muchas otras reglas, simplemente estaremos dándole un nombre formal. La abreviación que utiliza es SD. La regla es la siguiente:

1. $P \rightarrow A$
2. $Q \rightarrow B$
3. $P \vee Q$

$A \vee B$ SD: 1,2,3

Ejemplo 1.4.16

"O la conferencia aún no empieza, o el director se ha retrasado. Si el director se ha retrasado, la conferencia será cancelada. Si la conferencia aún no empieza, la secretaria mandará aviso de que comenzará en breve. Por lo tanto, o la conferencia será cancelada o la secretaria mandará aviso de que comenzará en breve."

Sean

E:= "La conferencia ha empezado"

R:= "El director se ha retrasado"

C:= "La conferencia será cancelada"

S:= "La secretaria mandará aviso de que la conferencia comenzará en breve"

1. $\neg E \vee R$
2. $R \rightarrow C$
3. $\neg E \rightarrow S$

$C \vee S$ SD: 1,2,3

1.4.9 Leyes de DeMorgan

La regla que veremos a continuación es posiblemente una de las más importantes, no sólo en lógica, sino en general en matemáticas. Es utilizada también en teoría de conjuntos, en ramas de matemáticas aplicadas como la probabilidad, y en general tiene un uso bastante amplio.

Esta regla nos indica la equivalencia de la negación de una conjunción o de una disyunción, por lo que la podremos ver de dos maneras. Su abreviación es LM. Para la negación de una conjunción tenemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \neg(P \wedge Q) & \\
\hline
\neg P \vee \neg Q & \text{LM: 1}
\end{array}
$$

De la misma forma, aplica al inverso, es decir:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \neg P \vee \neg Q & \\
\hline
\neg(P \wedge Q) & \text{LM: 1}
\end{array}
$$

Dependiendo de lo que sea que se nos presente en el ejercicio veremos si conviene utilizar esta regla de la primera o segunda forma, y nos dará mucha flexibilidad al momento de manejar este tipo de premisas.

Ejemplo 1.4.17

"El grupo de jazz y el grupo de rock irán a la presentación de bandas en condición de que todos los jueces estén de acuerdo. Si el grupo de pop va, entonces el de jazz no irá. Si el grupo de country va, entonces el de rock no irá. Sólo sabemos que o el grupo de pop irá o que el grupo de country irá. Por lo tanto, no todos los jueces estuvieron de acuerdo."

Sea

T:= "Todos los jueces están de acuerdo"

J:= "El grupo de jazz irá a la presentación"

R:= "El grupo de rock irá a la presentación"

P:= "El grupo de pop irá a la presentación"

C:= "El grupo de country irá a la presentación"

1. $T \rightarrow J \wedge R$
2. $P \rightarrow \neg J$
3. $C \rightarrow \neg R$
4. $P \vee C$

5. $\neg J \lor \neg R$	SD: 2,3,4
6. $\neg(J \land R)$	LM: 5
$\neg T$	TT: 1,6

Ahora veamos lo que nos dicen las leyes de DeMorgan para la negación de una disyunción, la regla es la siguiente:

1. $\neg(P \lor Q)$	
$\neg P \land \neg Q$	LM: 1

También se puede hacer al inverso:

1. $\neg P \land \neg Q$	
$\neg(P \lor Q)$	LM: 1

Ejemplo 1.4.18

"La levadura que conseguimos tiene una floculación baja y su perfil no es seco. Si la levadura tiene una floculación baja, entonces no se obtendrá un líquido claro. O el perfil es seco o el contenido de alcohol no será alto. Entonces, concluir que se obtendrá un líquido claro o que el contenido de alcohol será alto, será equivocado." (Gomezcaña, 2020)

Sea

F:= "La levadura tiene una floculación baja"

S:= "El perfil es seco"

L:= "Se obtiene un líquido claro"

A:= "El contenido de alcohol será alto"

1. $F \land \neg S$	
2. $F \to \neg L$	
3. $S \lor \neg A$	
4. F	S: 1

5. $\neg L$	PP: 2,4
6. $\neg S$	S: 1
7. $\neg A$	TP: 3,6
8. $\neg L \wedge \neg A$	A: 5,7

$\neg(L \vee A)$	LM: 8

Se irán viendo más ejemplos de esta regla conforme se vaya avanzando con las nuevas reglas, lo que es importante es que quede clara la equivalencia que nos presenta. Es nueva información sobre la veracidad de las premisas, por lo que es algo muy relevante a tomar en cuenta.

1.4.10 Premisas artificiales y regla de las premisas

Esta será una regla de suma importancia, y posiblemente la más compleja. Puede ser que su entendimiento tarde un tiempo en digerirse, no obstante, es uno de los conceptos clave utilizados en las demostraciones. La regla es conocida como regla de las premisas y utilizará la abreviación RP. No obstante, a diferencia de las reglas pasadas en las que simplemente damos la fórmula y regla general, es preciso especificar primero un concepto clave: las *premisas artificiales*.

Para entender este concepto, pensemos que estamos desarrollando un ejercicio como los que se han expuesto previamente. Nos podemos encontrar en la situación en la que no sabemos el valor de certeza de alguna premisa, sea atómica o molecular. Una premisa artificial sería suponer como verdadera alguna proposición. Hay que tener cuidado con esto, ya que, es muy distinto asumirla como cierta a que en verdad lo sea. Lo que la regla de las premisas nos dará como resultado es una *implicación*. Recalcamos que no significa que la premisa supuesta sea verdadera, lo que sí será verdadero es la implicación que dé como resultado. Se ve de la siguiente forma:

1. P_1
2. P_2

•

$\bullet$

$\bullet$

$k.\ P_k$

k+1.	A	P*
	$\bullet$	
	$\bullet$	
	$\bullet$	
k+r.	B	
$A \to B$	RP: k+1 - k+r	

Lo que nos muestra el esquema anterior es que podemos asumir el valor de certeza de una premisa cualquiera, desarrollar mediante las reglas de inferencia que conocemos y llegar a algún valor que nos interese. Entonces, aunque no sepamos tal cual si la proposición asumida es verdadera o no, lo que sí conocemos es lo que esta premisa implica. Notemos que esto viene de forma general, así que esta premisa artificial puede ser tanto molecular como atómica. Veremos a continuación un ejemplo y posterior a su solución daremos un breve análisis con el fin de que quede claro el funcionamiento de esta regla tan importante.

Ejemplo 1.4.19

"Si Mónica gana, entonces Luis o Esteban serán segundos. Si Luis es segundo, entonces Mónica no ganará. Si Pedro es segundo, entonces Esteban no será segundo. Por tanto, si Mónica gana, Pedro no será segundo." (Gomezcaña, 2020)

Sea

M:= "Mónica gana"

L:= "Luis será segundo"

E:= "Esteban será segundo"

P:= "Pedro será segundo"

1. $M \to L \vee E$
2. $L \to \neg M$
3. $P \to \neg E$
4. E **P***

5.	$\neg\neg E$	DN:
6.	$\neg P$	TT: 3,5
7. $E \rightarrow \neg P$		RP: 4-6
8.	M	**P***
9.	$L \vee E$	PP: 1,8
10.	$\neg M \vee \neg P$	SD: 2,7,9
11.	$\neg\neg M$	DN: 8
12.	$\neg P$	TP: 10,11
	$M \rightarrow \neg P$	RP: 8-12

Lo que se buscaba en el ejercicio era probar el valor de certeza de una implicación, por lo que cuando este sea el caso lo mejor es acudir a la regla de las premisas, asumir que cierta premisa ocurre y ver a qué nos lleva de implicaciones. En este ejercicio utilizamos dos veces la regla, pues necesitábamos conocer qué implicaba la premisa E para poder hacer uso del silogismo disyuntivo cuando asumimos la premisa M. Conocíamos de antemano lo que implicaba la premisa L, y sabíamos que al asumir la premisa M nos llevaría a la proposición $L \vee E$, lo cual ya es un fuerte indicador de que debemos hacer uso del silogismo disyuntivo, sin embargo no sabemos qué implica la premisa E, por lo que previamente hacemos uso de la regla de premisas y al obtener eso podemos continuar con la premisa artificial de M. Podemos ver esta regla como un argumento dentro de otro, algo así como un "subargumento".

Esta regla la podemos utilizar tanto para probar una implicación como para utilizarla como una regla de apoyo o de paso, es decir cuando necesitamos saber qué implica cierta premisa para continuar con el desarrollo del ejercicio podremos utilizar esta regla como apoyo. Veremos a continuación un segundo ejemplo, un tanto más matemático para tratar de esclarecer más el funcionamiento de la regla.

Ejemplo 1.4.20

"Sabemos que el número x satisface las ecuaciones $x^2 - x - 6 = 0$ y $x^2 + 2x - 15 = 0$. Las soluciones individuales de cada ecuación son conocidas también, pues para la primera ecuación $x = 3$, o $x =- 2$, y para la segunda ecuación $x = 3$, o $x =- 5$. Dado que el número x satisface ambas ecuaciones, sabemos que el valor de x no puede ser simultáneamente -2 y -5. Por tanto, podemos afirmar que el valor de x es 3." (Gomezcaña, 2020)

Tenemos lo siguiente:

1. $x^2 - x - 6 = 0 \wedge x^2 + 2x - 15 = 0$
2. $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \vee x =- 2$
3. $x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = 3 \vee x =- 5$
4. $\neg(x =- 2 \wedge x =- 5)$

$$x = 3$$

Esto puede verse muy confuso a primera vista, por lo que lo mejor es simbolizarlo para poder trabajar de mejor manera, pero primero es importante entender lo que nos está diciendo el enunciado, es por eso que, en esta ocasión se optó por primero escribirlo de esta manera. Procederemos entonces a simbolizar y resolver el ejercicio por medio de reglas de inferencia

Sea

P:= $(x^2 - x - 6 = 0)$

Q:= $(x^2 + 2x - 15 = 0)$

A:= $(x = 3)$

B:= $(x =- 2)$

C:= $(x =- 5)$

Una vez simbolizado, no perdamos de vista que queremos concluir A. En ocasiones, cuando comenzamos un ejercicio, perdemos de vista a lo que realmente queremos llegar, y este será un ejercicio con muchos pasos, por lo que será importante tener en cuenta que a la conclusión que se desea llegar es a A.

1. $P \wedge Q$
2. $P \rightarrow A \vee B$
3. $Q \rightarrow A \vee C$
4. $\neg(B \wedge C)$
5. $\neg B \vee \neg C$ LM: 4

6. P		S: 1
7. $A \vee B$		PP: 2,6
8. Q		S: 1
9. $A \vee C$		PP: 3,8
10.	$\neg B$	**P***
11.	A	TP: 7,10
12. $\neg B \rightarrow A$		RP: 10-11
13.	$\neg C$	**P***
14.	A	TP: 9,14
15. $\neg C \rightarrow A$		RP: 13-14
16. $A \vee A$		SD: 5,12,15
A		S: 16

Notemos la importancia que puede tener esta regla en general, pues nos ayuda a probar cosas cuando nos falta información. El realizar suposiciones es algo muy común en las demostraciones matemáticas, pues se desea conocer las implicaciones de estas y ver si se llega a algo verdadero o a una contradicción, lo cual da pie a la siguiente y última regla de inferencia que revisaremos.

1.4.11 Reducción al absurdo

Esta última regla también es el nombre de un tipo de demostración en matemáticas. Se basa en suponer lo contrario a lo que queremos demostrar con el fin de llegar a una contradicción en algún momento, y con esta contradicción asumir que estuvo mal suponer lo contrario. Por ende, la primera suposición es correcta. Tendrá un sustento lógico muy interesante. La regla es la siguiente:

1. $A \rightarrow (B \wedge \neg B)$

$\neg A$ RAA:1

Recordemos los valores que nos daban las tablas de verdad. Para que una conjunción sea verdadera es necesario que ambas proposiciones lo sean. De modo que, al tener algo de la forma $B \wedge \neg B$ estamos cayendo en algo forzosamente falso, ya que no es posible que una proposición sea verdadera y falsa simultáneamente. De modo que tenemos una implicación de la forma $V \rightarrow F$, y recordemos que el único escenario en el que una implicación es falsa es cuando se presenta de esa forma. Por ende, cuando tenemos algo así, debemos asumir entonces que el antecedente es falso.

Es muy común utilizar esta regla de la mano de la regla de las premisas, pues al ser una suposición lo que hacemos, resulta natural acudir a esta regla para hacer uso de la reducción al absurdo. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.4.21

Retomemos el último ejemplo (1.4.20), y en esta ocasión lo resolveremos por medio de esta regla. Entonces, reescribimos las premisas que tenemos, pero lo resolveremos de manera distinta, es decir, asumiendo que A es falsa, y veamos entonces qué ocurre.

1. $P \wedge Q$		
2. $P \rightarrow A \vee B$		
3. $Q \rightarrow A \vee C$		
4. $\neg(B \wedge C)$		
5. P		S: 1
6. $A \vee B$		PP: 2,6
7. Q		S: 1
8. $A \vee C$		PP: 3,8
9.	$\neg A$	**P***
10.	B	TP: 6,9
11.	C	TP: 8,9
12.	$B \wedge C$	A:10,11
13.	$(B \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)$	A: 12,4
14. $\neg A \rightarrow (B \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)$		RP: 9-13
	A	RAA: 14

Ejemplo 1.4.22 (Gomezcaña, 2020)

Consideremos el siguiente argumento para validarlo por medio de cálculo proposicional:
Sean x, y, z números enteros

1. $\neg(y \neq 1 \vee z \neq -1)$
2. $(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1 \rightarrow x = 0$
3. $\neg(y = 1 \vee x = 0) \vee (x < y \wedge x > z)$

$$x = 0$$

Para llegar a esta conclusión haremos uso de la reducción al absurdo, supondremos que $x \neq 0$ y llegaremos a una contradicción. Para esto, primero simbolizamos las proposiciones para poder manejarlas de mejor forma.

Sea

A:= $(y = 1)$

B:= $(z = -1)$

C:= $(x < y)$

D:= $(x > z)$

E:= $(x = 0)$

1.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$		
2.	$(C \wedge D) \wedge B \rightarrow E$		
3.	$\neg(A \vee E) \vee (C \wedge D)$		
4.	$\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)$		LM:1
5.	$A \wedge B$		DN: 4
6.		$\neg E$	**P***
7.		$\neg((C \wedge D) \wedge B)$	TT: 2,6
8.		$\neg(C \wedge D) \vee \neg B$	LM: 7
9.		B	S: 5
10.		$\neg(C \wedge D)$	TP: 8,9
11.		$\neg(A \vee E)$	TP: 3,10
12.		$\neg A \wedge \neg E$	LM: 11
13.		$\neg A$	S:12

14.	A	S: 5
15.	$A \wedge \neg A$	A: 14,13
16. $\neg E \to (A \wedge \neg A)$		RP: 6-15

E RAA: 16

Ejemplo 1.4.23

Sean x, y números enteros que satisfacen las ecuaciones $x + y = 3$ y $2x + y = 5$. Analizando las ecuaciones por separado, para la primera ecuación podría tener una infinidad de posibilidades de valores, pero pensemos en dos posibilidades, $x = 1 \wedge y = 2$, o $x = 2 \wedge y = 1$. Para la segunda ecuación tenemos otras dos posibilidades, $x = 0 \wedge y = 5$ o $x = 2 \wedge y = 1$. Debido a que es un sistema y debe satisfacer ambas ecuaciones sabemos que x no puede ser simultáneamente 1 y 0. Por su parte y no puede valer simultáneamente 2 y 5. De lo anterior, podemos afirmar que $x = 2 \wedge y = 1$

Tenemos:

1. $x + y = 3 \wedge 2x + y = 5$
2. $x + y = 3 \to (x = 1 \wedge y = 2) \vee (x = 2 \wedge y = 1)$
3. $2x + y = 5 \to (x = 0 \wedge y = 5) \vee (x = 2 \wedge y = 1)$
4. $\neg(x = 1 \wedge x = 0)$
5. $\neg(y = 2 \wedge y = 5)$

$x = 2 \wedge y = 1$

Sea

A: $(x + y = 3)$

B:= $(2x + y = 5)$

C:= $(x = 1)$

D:= $(y = 2)$

E:= $(x = 2)$

P:= $(y = 1)$

Q:= $(x = 0)$

R:= $(y = 5)$

1.	$A \land B$	
2.	$A \to (C \land D) \lor (E \land P)$	
3.	$B \to (Q \land R) \lor (E \land P)$	
4.	$\neg(C \land Q)$	
5.	$\neg(D \land R)$	
6.	A	S: 1
7.	B	S: 1
8.	$(C \land D) \lor (E \land P)$	PP: 2,6
9.	$(Q \land R) \lor (E \land P)$	PP: 3,7
10.	$\neg C \lor \neg Q$	LM: 4
11.	$\neg D \lor \neg R$	LM: 5
12.	$\neg(E \land P)$	**P***
13.	$C \land D$	TP: 8,12
14	$Q \land R$	TP: 9,12
15.	C	S: 13
16.	$\neg\neg C$	DN: 15
17.	$\neg Q$	TP: 10,16
18.	Q	S: 14
19.	$Q \land \neg Q$	A: 18,19
20.	$\neg(E \land P) \to (Q \land \neg Q)$	RP: 12-19
21.	$\neg\neg(E \land P)$	RAA: 20
	$E \land P$	DN: 21

De esta forma concluimos la sección de reglas de inferencia del cálculo proposicional, y daremos introducción a otros temas que finalmente nos llevarán al *cálculo predicativo*.

1.5 Términos y predicados

Hasta ahora, las reglas de inferencia que hemos estudiado aplican para proposiciones moleculares, lo cual nos puede llevar a preguntarnos, si es que con las reglas que hemos visto hasta el momento serán suficientes para poder resolver mediante lógica cualquier tipo de proposición que se nos atraviese en el camino. La respuesta es sencilla, no es difícil pensar que no podemos aún resolver cualquier problema, y de hecho, es posible que aún teniendo una gran cantidad de herramientas, en ocasiones no contemos con lo suficiente para resolver un problema. Incluso, a la fecha, existen problemas de matemáticas famosos y que ofrecen una gran suma de dinero a quien logre resolverlos (Rodríguez, H. 2022). Sin embargo, nos estamos desviando un poco del tema.

Debemos percatarnos de que las reglas que hemos presentado hasta el momento actúan sobre proposiciones moleculares. No obstante, podemos obtener conclusiones válidas únicamente de proposiciones atómicas, como puede ser el caso de los argumentos que se presentan a continuación:

"Todos los felinos son animales. Todos los leopardos son felinos. Por lo tanto, todos los leopardos son animales."
"Todos los sabios griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio griego. Concluimos que Sócrates fue un filósofo."

"Elvis Presley es el rey del rock and roll. El rey del rock and roll murió a los 42 años. Entonces, Elvis Presley murió a los 42 años."

En general, estos argumentos presentan la siguiente estructura:

1. P
2. Q

R

No obstante, no podemos obtener mediante las reglas que conocemos la validez de la conclusión que estamos teniendo en los ejemplos. Pero si nos ponemos a pensar en estos ejemplos, realmente hacen sentido, parecen tener cierta lógica, e intuitivamente algo nos dice que el razonamiento de estas oraciones es correcto. Esto pareciera que nos quiere decir que necesitamos de otras reglas de inferencia para poder validar esto. Como mencionamos anteriormente, esto tiene la estructura de dos premisas que implican una tercera, pero las dos premisas que se están suponiendo son proposiciones atómicas, por lo que, previo a introducir las nuevas reglas de inferencia necesitamos hacer un análisis sobre las proposiciones atómicas y ver la forma de funcionar de estas, separarlas de forma en que haga sentido las últimas reglas que presentaremos.

Definición:

Entenderemos como *término* a la "expresión con la que se nombra o designa a un único objeto." (Suppes y Hill, 1988)

Este no debe ser necesariamente un nombre de alguna persona o lugar, pero sí debemos desarrollar cierta sensibilidad para saber identificar los términos dentro de las oraciones. Ordinariamente, el sujeto dentro de la oración suele ser el término, lo único que se tiene que tener en cuenta es que hay proposiciones u oraciones con más de un término. Esto lo que nos dice es que, el sujeto de la oración sí será un término, pero eso no significa que este será el único, pueden haber más términos. Este concepto se redefinirá más adelante, mientras tanto lo entenderemos de esta forma.

Veamos las siguientes proposiciones en las que se subrayan los términos:

Ejemplos

1. "La Gioconda fue pintada por Leonardo da Vinci."
2. "Juan está corriendo."
3. "Sócrates fue un filósofo."
4. "Fernanda está enferma."
5. "Elvis Presley es el rey del rock and roll."
6. "Rebeca fue al centro de la Ciudad de México."
7. "Kurt Cobain pertenece al club de los 27."
8. "Este perro blanco me mordió en la avenida principal."
9. "El restaurante en el que cenamos ayer tuvo un excelente servicio por parte de los meseros hacia los clientes."
10. "Scorpions toca rock y Queen también."

Notemos cómo existen algunas proposiciones que cuentan con un término, y otras que cuentan con más términos. Esto cobrará importancia al momento de crear *fórmulas*, de momento es muy importante desarrollar la sensibilidad para detectar cuáles son los términos dentro de una oración. Y teniendo eso en cuenta, nos da pie para introducir el siguiente concepto.

Definición:

Se le conoce como *predicado* a las expresiones dentro de una oración que nos dicen algo acerca de los términos. (Suppes y Hill, 1988).

Por ejemplo, si pensamos en la oración: "Miguel está cansado", el término sería "Miguel", mientras que la frase "está cansado" nos está diciendo algo sobre Miguel, es decir, la frase nos dice algo sobre el término, por tanto esta frase se convierte en el predicado de la oración.

Consideremos las mismas proposiciones de los ejemplos anteriores y detectemos ahora los predicados, que serán subrayados de color amarillo.

1. "La Gioconda fue pintada por Leonardo da Vinci."
2. "Juan está corriendo."
3. "Sócrates fue un filósofo."
4. "Fernanda está enferma."
5. "Elvis Presley es el rey del rock and roll."
6. "Rebeca fue al centro de la Ciudad de México."
7. "Kurt Cobain pertenece al club de los 27."
8. "Este perro blanco me mordió en la avenida principal."
9. "El restaurante en el que cenamos ayer tuvo un excelente servicio por parte de los meseros hacia los clientes."
10. "Scorpions toca rock y Queen también."

Tipos de predicados

Existen dos tipos de predicados. A un predicado que califique a un único término, lo llamaremos *predicado simple*, mientras que si califica a dos o más términos lo llamaremos *predicado compuesto*.

Nuevamente consideremos los enunciados de los ejemplos:

1. "La Gioconda fue pintada por Leonardo da Vinci."
2. "Juan está corriendo."
3. "Sócrates fue un filósofo."
4. "Fernanda está enferma."
5. "Elvis Presley es el rey del rock and roll."
6. "Rebeca fue al centro de la Ciudad de México."

7. "Kurt Cobain pertenece al club de los 27."
8. "Este perro blanco me mordió en la avenida principal."
9. "El restaurante en el que cenamos ayer tuvo un excelente servicio por parte de los meseros hacia los clientes."
10. "Scorpions toca rock y Queen también."

Realmente esto es muy sencillo de identificar, una vez que lo tenemos separado de esta forma con los colores, lo único que se tiene que hacer es fijarse en cuáles de las oraciones tienen más de un término. Por lo que, los incisos 2, 3, 4 y 10 son predicados simples, mientras que el resto son predicados compuestos. Es importante notar que el ejemplo 10 es un predicado simple, pues califica a un único término que tiene el término de enlace de la conjunción, pero califica a un único objeto.

Habiendo establecido esto, vamos a una parte que siempre debemos hacer cuando se habla de cualquier cosa en matemáticas: simbolizar

Lo convencional es que a los términos se les designa con las primeras letras del alfabeto en minúscula: a, b, c, d, …

- g = La Gioconda
- c = Centro de la Ciudad de México
- b = Sócrates

Se puede utilizar lo que vimos previamente de asociar la letra al objeto que se está designando, pero tampoco es una regla, ya dependerá de cada quien si lo quiere implementar o no.

Para los predicados, utilizaremos las letras mayúsculas del alfabeto: A, B, C, …

- P = fue pintada por
- A = fue un filósofo
- B = Pertenece a

Existen dos tipos de notaciones para articular esto:

- **Notación funcional:** $P(a, b)$
- **Notación relacional:** ${}_{a}P_{b}$

Por cuestiones prácticas al momento de manejar las tablas del cálculo, nosotros manejaremos la notación funcional, sin embargo, queda como decisión personal la notación que se quiera emplear. En el primer ejemplo de simbolización presentaremos ambas formas para que se entienda cómo funciona cada notación, y más adelante se empleará únicamente la notación funcional.

Ejemplos de simbolización

1.5.1

"La Gioconda fue pintada por Leonardo da Vinci"

Sean g := La Gioconda

l := Leonardo da Vinci

P := fue pintada por

Notación funcional:

$$P(g,\ l)$$

Notación relacional:

$${}_{g}P_{l}$$

Ejemplo 1.5.2

"Si mi perro se come la tarea, entonces le dará indigestión."

Sean: p := Mi perro

C := Se come la tarea

I := Le dará indigestión

Entonces, queda simbolizado de la siguiente manera:

$$C(p) \rightarrow I(p)$$

1.5.1 Fórmulas atómicas y variables

Hemos especificado ya las dos formas en las que se separan los componentes de una proposición atómica, y de manera general podemos resumirlo a que el predicado nos dice algo en particular respecto a uno o más términos. Pensemos ahora, en que los predicados pueden ser descritos de otra manera, usando términos *variables*. Esto lo que nos diría es que lo estamos planteando de una forma general, indicando los espacios en los que debería ser llenado el predicado por algún término en específico. Es posible que de momento suene un poco confuso todo esto, por lo que revisaremos dos ejemplos para ir trabajando sobre ellos.

Pensemos en uno de los ejemplos anteriores que dice:

"Juan está corriendo" (1)

Y pensemos en otro que diga:

"x es un número impar" (2)

La proposición 1 es la expresión más corta que tiene sentido por sí sola y puede expresarse como

$$C(j)$$

Siendo C el predicado "está corriendo" y la letra "j" el término que nos indica que el predicado está actuando sobre Juan.

Si quitamos ya sea el término o el predicado, eso no nos indica nada, sólo serán un término o un predicado respectivamente. Ahora consideremos la oración 2 y hagamos la simbolización:

Sea

I := "x es un número impar"

$$I(x)$$

¿Qué está pasando aquí? ¿Qué tenemos de distinto? No se está especificando el término, digamos que lo estamos dejando abierto, de una forma general, es como un espacio vacío que está a la espera de ser llenado por alguna designación de un objeto en particular. Naturalmente puede llegar la pregunta: ¿entonces x es un término o no?

Como respuesta rápida sí, sí lo es. Sin embargo, estas variables deben ser eventualmente sustituidas por un término como lo conocíamos previamente. Pero será algo que nos dará una visión totalmente distinta de lo que conocemos hasta ahora como el cálculo proposicional, para poder convertirse en lo que ya se conoce como cálculo predicativo.

Considerando esta última proposición, si nosotros asignamos el valor $x = 3$, la proposición entonces pasa a ser

$$I(3)$$

Lo que se traduce en "3 es un número impar", lo cual es verdadero, es decir, ya podemos ir jugando con los valores que le asignemos para determinar los valores de certeza dependiendo del valor que se le asigne a estas variables. La idea de utilizar estas variables es para que, de acuerdo a cada problema, estas sean llenadas con algo más. Mientras estas sigan siendo variables, entonces no se estará declarando nada de información, por lo que no podrán ser consideradas como predicado hasta que no se le asigne un término en particular.

Por lo general, hablando de notación, para las variables se suelen utilizar las últimas letras del alfabeto en minúsculas: x, y, …
Y para definirlas ocuparemos el siguiente símbolo: ↔
Algo muy importante a destacar, es que, en este contexto es distinto escribir este símbolo para describir a los predicados, que para hablar de una bicondicional. Sabemos que puede llegar a ser confuso, aunque debido a los distintos contextos, no será realmente complicado hacer la distinción entre ambos, pues para describir predicados sólo aparecerá al momento de establecer la notación que se utilizará en un determinado problema, mientras que las bicondicionales aparecerán en un contexto totalmente distinto.
En realidad, sólo se utilizan al principio para describir a lo que hace referencia cada letra elegida para representar a cada predicado.

Ejemplo 1.5.3
"Juan está corriendo"
El predicado puede identificarse como "está corriendo". Por lo que, para denotar este predicado lo haremos de la siguiente manera:

$$C(x) \leftrightarrow x \text{ está corriendo}$$

El cual, ya teniendo el término dentro de la oración quedaría como

$$C(j)$$

Revisemos también el caso en el que el predicado no sea simple, sino que actúe sobre dos o más términos para ver qué formas va agarrando.

Ejemplo 1.5.4

"Kurt Cobain pertenece al club de los 27."

Podemos simbolizar el predicado de manera general como sigue:

$$P(x, y) \leftrightarrow x \text{ pertenece a } y$$

Y si definimos a

k = Kurt Cobain

c = Club de los 27

Entonces quedaría simbolizado de la siguiente manera:

$$P(k, c)$$

Ejemplo 1.5.5

"El restaurante en el que cenamos ayer tuvo un excelente servicio por parte de los meseros hacia los clientes."

El predicado puede ser simbolizado de forma general como:

$$E(x, y, z) \leftrightarrow \ x \ \text{ tuvo un excelente servicio por parte de } \ y \ \text{ hacia } \ z$$

Definamos a:

r:= El restaurante en el que cenamos ayer

m:= Los meseros

c:= Los clientes

Entonces, el enunciado queda de la siguiente manera:

$$E(r, m, c)$$

Ejemplo 1.5.6

Notemos que también podremos trabajar con este tipo de predicados con proposiciones moleculares:

"Si no gano el juego, entonces Luis pagará a Rebeca"

Definamos los siguientes predicados:

$G(x) \leftrightarrow x$ gana el juego

$P(y, z) \leftrightarrow\ y$ pagará a z

y = yo

l = Luis

r = Rebeca

Tenemos el siguiente predicado:

$$\neg G(y) \rightarrow P(l, r)$$

Habiendo establecido varios ejemplos definamos entonces dos conceptos, contando con toda esta nueva información.

Definición de término (revisitada)

"Un *término* es una expresión con la que se nombra o designa a un único objeto, o es una *variable* que puede ser sustituida por una expresión que nombre o designe a un objeto único." (Suppes y Hill, 1988, pp 195)

Haciendo el equivalente con la gramática, y si es que hay personas a las que se les puede facilitar el relacionarlo con estas cuestiones, podemos encontrar una equivalencia respecto a los términos variables y a los valores gramaticales, lo cual, puede ser un consejo útil para ciertos lectores. Pensemos en los siguientes enunciados:

1. x es mi amigo
2. y es esposa de Mario
3. z conoce a mi madre
4. a w le gusta leer mucho
5. u es un nuevo automóvil

Veamos que podríamos poner en palabras coloquiales la siguiente equivalencia (claramente no la única, por eso es una variable), pero suelen ser *pronombres*:

1. Él es mi amigo
2. Ella es esposa de Mario
3. Él conoce a mi madre
4. A esta persona le gusta leer mucho
5. Este es un nuevo automóvil

Definición:
Una *fórmula atómica* es un predicado acompañado del número correspondiente de variables y/o términos, de tal forma que al sustituir las variables por términos se crea una proposición atómica.
Por lo que, cada fórmula atómica tendrá muchas y distintas proposiciones atómicas a las que podrá llegar. Ya dependerá de lo que pida el problema en concreto.

Ejemplo 1.5.7
"El restaurante en el que cenamos ayer tuvo un excelente servicio por parte de los meseros hacia los clientes."

$$E(x, y, z) \leftrightarrow \; x \; \text{ tuvo un excelente servicio por parte de } \; y \; \text{ hacia } \; z$$

Ya teníamos previamente que

r:= El restaurante en el que cenamos ayer

m:= Los meseros

c:= Los clientes

Vemos entonces que $E(r, m, c)$ es una proposición atómica. Sin embargo, las siguientes:

- $E(x, y, z)$
- $E(r, y, z)$
- $E(x, m, z)$
- $E(x, y, c)$
- $E(r, m, z)$
- $E(r, y, c)$
- $E(x, m, c)$

Estas siguen siendo todas fórmulas atómicas, pues cada una tiene *al menos una variable*, por lo que todavía no se puede considerar una proposición.

Algo importante a destacar, es que, al tenerlas todavía en términos de variables no pueden tener como tal un valor de certeza, sino hasta que se les asigne un término en particular, a menos que se cuente de antemano con ciertas condiciones que veremos más adelante.

1.5.2 Fórmulas moleculares

Una ***fórmula molecular*** es el resultado de unir otras fórmulas (atómicas o moleculares) por medio de un término de enlace.

Resulta algo muy intuitivo en realidad la construcción de esta definición.

Como convención, utilizaremos las letras del alfabeto griego en minúsculas para denotar las fórmulas moleculares.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5.8

"Leonardo da Vinci fue un inventor y pintor."

Sea

$I(x) \leftrightarrow x$ fue un inventor

$P(x) \leftrightarrow x$ fue un pintor

a = Leonardo da Vinci

$\alpha(x) \leftrightarrow I(x) \wedge P(x)$

En particular, esta proposición nos dice: $\alpha(a)$

Lo cual se traduce en $I(a) \wedge P(a)$

Ejemplo 1.5.9

Simbolizar el siguiente enunciado:

"Sólo hay dos opciones, o el asesino estuvo en la biblioteca, o estuvo en la cafetería." (Gomezcaña, 2020)

Sea

$E(x, y) \leftrightarrow x$ estuvo en y

a = El asesino

b = La biblioteca

c = La cafetería

$\beta(x, y, z) \leftrightarrow E(x, y) \vee E(x, z)$

Y tenemos:

$\beta(a, b, c)$

Por lo tanto, la simbolización de este enunciado es:

$$E(a, b) \vee E(a, c)$$

Ejemplo 1.5.10

Simbolizar mediante fórmulas moleculares el siguiente enunciado:

"Si el cuadrado del número es 36, entonces el número es 6 ó -6." (Gomezcaña, 2020)

Sea

$C(z, w) \leftrightarrow z$ es el cuadrado de w

$E(x, y) \leftrightarrow x$ es y

Tenemos de términos:

a = El número

x = a

Entonces la fórmula molecular es:

$\gamma(x, y, z, w) \leftrightarrow C(w, x) \rightarrow E(x, y) \vee E(x, z)$

Y con los valores que nos interesan, tenemos:

$\gamma(a,\ 6,\ \ -6,\ 36)$

Con lo que tenemos:

$C(36, a) \rightarrow E(a, 6) \vee E(a, -6)$

Ejemplo 1.5.11

"La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, si el triángulo es rectángulo." (Gomezcaña, 2020)

Sea

$T(z) \leftrightarrow z$ es un triángulo rectángulo

$R(y) \leftrightarrow$ La suma de los cuadrados de los catetos de y es igual al cuadrado de la hipotenusa de y (asumimos que y es un triángulo)

a = El triángulo

De acuerdo al enunciado creamos la fórmula molecular:

$\delta(x) \leftrightarrow T(x) \rightarrow R(x)$

Tenemos:

$\delta(a)$

$\therefore\ T(a) \rightarrow R(a)$

Observación:

Son cuestiones de notación, siempre que se introduzca nueva notación se irá especificando. Utilizamos el símbolo ∴ para la frase "por lo tanto".

1.6 Cuantificación

La cuantificación hace referencia a *acotar* una variable, nos indica una característica que va a cumplir dicha variable, lo que a su vez implica que nos indica de qué forma podemos realizar la sustitución de las variables.

Existen dos tipos de cuantificadores: el cuantificador universal y el cuantificador existencial. Ambos nos dirán información relevante respecto a las variables que esté acotando y veremos de qué forma podemos realizar la sustitución.

1.6.1 Cuantificador universal

Pensemos en una fórmula atómica estructurada como sigue:

$$A(x) \leftrightarrow x \text{ es famoso}$$

Si sustituimos la variable por un término en concreto, podríamos obtener proposiciones verdaderas o falsas. Podríamos hacer que:

a = Michael Jackson

b = Mi perro Firulais

Veamos que A(a) es verdadero, mientras que A(b) no es verdadero, pues a mi perro es posible que muchas personas no lo conozcan en realidad, y Michael Jackson, aunque existe la posibilidad de que algunas personas no sepan quién fue, sí ha llegado a un punto en el que podemos afirmar que es alguien famoso.

Con esto en mente, habrán muchas situaciones en las que será de nuestro interés el describir características de las variables, en este caso calificar a *todas* las posibles sustituciones de una variable, pues hacemos referencia al cuantificador *universal.* Este nos dirá que hay ciertas características que aplicarán para todas las posibilidades de sustituciones. Hay algunas palabras clave para detectar este cuantificador:

- Para cada x
- Todos / Todo / Toda / Todas
- Ningún / Ninguna
- Cualquiera / cualesquiera
- Para todo x

Aunque tenga distintas formas de presentarse dentro del lenguaje, es importante saber identificarlo y extraerlo para colocarlo en la simbolización adecuada. Este cuantificador utiliza el símbolo de una A invertida acompañado de la variable cuantificada, quedando de la siguiente manera:

$$\forall x$$

Veamos algunos ejemplos para entender cómo funciona este cuantificador.

Ejemplo 1.6.1

"Todos son altos."

$A(x) \leftrightarrow x\ es\ alto$

$\forall x. A(x)$

Lo que se traduce en palabras a que para cada x dentro de nuestro universo de discurso, esa x debe cumplir la característica de ser alto o alta, y se simboliza como lo hicimos anteriormente.

Ejemplo 1.6.2

Retomemos un argumento que vimos al principio de todo el tema de términos y predicados, uno que dijimos que hacía sentido, aunque pareciera que no contábamos con las reglas de inferencia suficientes para probar su valor de certeza. Aún no lo podremos resolver, puesto que la regla se presentará más adelante, pero vayamos poco a poco avanzando en este ejercicio, lo que viene ahora será su simbolización:

"Todos los sabios griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio griego. Por tanto, Sócrates fue un filósofo."

De momento trabajamos únicamente con la primera parte del argumento:

Sea

$S(x) \leftrightarrow x\ fue\ un\ sabio\ griego$

$F(x) \leftrightarrow x\ fue\ un\ filósofo$

$\theta(x) \leftrightarrow S(x) \rightarrow F(x)$

Entonces, tenemos dos formas de verlo:

$$\forall x.\, \theta(x) \qquad \text{o} \qquad \forall x.\, S(x) \rightarrow F(x)$$

En la mayoría de las ocasiones el cuantificador universal viene acompañado de una implicación, mientras que el cuantificador existencial viene acompañado, generalmente, de una conjunción.

Ejemplo 1.6.3

"Todos los profesores de la licenciatura en física son matemáticos o físicos."

$P(x) \leftrightarrow x$ es profesor de la licenciatura en física

$M(x) \leftrightarrow x$ es matemático

$F(x) \leftrightarrow x$ es físico

$\lambda(x) \leftrightarrow P(x) \rightarrow M(x) \lor F(x)$

Entonces nos queda:

$$\forall x.\, \lambda(x) \qquad \text{o} \qquad \forall x.\, P(x) \rightarrow M(x) \lor F(x)$$

Ejemplo 1.6.4

"Ningún ser humano puede respirar bajo el agua."

$H(x) \leftrightarrow x$ es un ser humano

$R(x) \leftrightarrow x$ puede respirar bajo el agua

$\varphi(x) \leftrightarrow H(x) \rightarrow \neg R(x)$

$\forall x.\, \varphi(x)$

$\forall x.\, H(x) \rightarrow \neg R(x)$

Cualquiera de los últimos dos renglones es correcto, ya dependerá de la notación con la que cada uno se acomode.

Ejemplo 1.6.5

“Ningún número se puede dividir entre 0.”

$N(x) \leftrightarrow x$ es un número

$D(x, y) \leftrightarrow x$ se puede dividir entre y

$\phi(x, y) \leftrightarrow N(x) \rightarrow \neg D(x, y)$

$\forall x. \phi(x, 0)$

$\forall x. N(x) \rightarrow \neg D(x, 0)$

Ejemplo 1.6.6

“Cualquiera que le agrade al director podrá formar parte de la empresa.”

$A(x, y) \leftrightarrow x$ le agrada a y

$P(x, z) \leftrightarrow x$ podrá formar parte de z

$\psi(x, y, z) \leftrightarrow A(x, y) \rightarrow P(x, z)$

Tenemos términos específicos:

d = El director

e = La empresa

$\psi(x, d, e) \leftrightarrow A(x, d) \rightarrow P(x, e)$

$\therefore \quad \forall x. \psi(x, d, e) \quad \vee \quad \forall x. A(x, d) \rightarrow P(x, e)$

1.6.2 Cuantificador existencial

A diferencia del cuantificador universal que califica a todas las posibles sustituciones de la variable, este califica la posibilidad de *al menos una* sustitución de una variable. Al igual que con el cuantificador universal existen algunas palabras clave para identificar este tipo de cuantificador:

- Para algún / alguna x
- Algún / algunos
- Existe / existen
- Hay
- Al menos un

- Por lo menos uno

Este cuantificador utiliza el símbolo de una E invertida y va acompañado de la variable cuantificada de la siguiente manera:

$$\exists x$$

Como mencionamos anteriormente, es común que en la mayoría de los casos los cuantificadores universales vengan con una implicación mientras que los existenciales vengan acompañados de una conjunción.

Ejemplo 1.6.7

"Hay un alienígena caminando en la carretera."

$A(x) \leftrightarrow x$ es un alienígena

$C(x, y) \leftrightarrow x$ está caminando en y

$\omega(x, y) \leftrightarrow A(x) \wedge C(x, y)$

Tenemos

c = La carretera

$\exists x. \omega(x, c)$

$\exists x. A(x) \wedge C(x, c)$

Ejemplo 1.6.8

"No existe un político honesto."

$H(x) \leftrightarrow x$ es un político honesto

$\neg[\exists x. H(x)]$

Ejemplo 1.6.9

Consideremos el siguiente ejemplo, y veamos lo interesante que nos puede dar:

"No existe político que no sea corrupto."

$P(x) \leftrightarrow x$ es un político

$C(x) \leftrightarrow x$ es corrupto

$\mu(x) \leftrightarrow P(x) \wedge \neg C(x)$

$\neg[\exists x. \mu(x)]$
$\neg[\exists x. P(x) \wedge \neg C(x)]$

Analizando cualquiera de las últimas dos expresiones vemos que hacen sentido con el enunciado. Ahora, analicemos la siguiente expresión y veamos que también hace sentido:

$\forall x. P(x) \rightarrow C(x)$
Lo que se traduce en
$\forall x. \neg\mu(x)$

Esto de hecho será una regla que veremos un poco más adelante. De cualquier forma, es algo interesante para plantearse, ya que desde este momento, con lo que se cuenta de información se puede comenzar a vislumbrar la relación que guardan estos dos cuantificadores.

Ejemplo 1.6.10
"Algunos números enteros son múltiplos de 2."
$N(x) \leftrightarrow x$ es un número
$M(x, y) \leftrightarrow x$ es un múltiplo de y

$\sigma(x, y) \leftrightarrow N(x) \wedge M(x, y)$
$\exists x. \sigma(x, 2)$
$\exists x. N(x) \wedge M(x, 2)$

Ejemplo 1.6.11
"Alguno de los alumnos de la clase delató a Regina por llegar tarde"
$A(x) \leftrightarrow x$ es un alumno de la clase
$D(y, z) \leftrightarrow y$ delató a z por llegar tarde

$\eta(x, y) \leftrightarrow A(x) \wedge D(x, y)$
a = Regina
$\exists x. \eta(x, a)$
$\exists x. A(x) \wedge D(x, a)$

1.6.3 Ejemplos de simbolización con cuantificadores

Veremos a continuación varios ejemplos con el fin de que quede claro la forma en la que se van a simbolizar las proposiciones teniendo este nuevo factor de los cuantificadores. Algo importante a tomar en cuenta es darle nombre a esto nuevo que hemos definido. Cuando las variables de una fórmula vienen cuantificadas, entonces se les llama variables *ligadas* o *acotadas*. En caso contrario, se les denomina variables *libres*.

Por ejemplo, pensemos en el enunciado:
$\forall x. \alpha(x, y)$

En este caso, sólo estamos cuantificando a la x, lo que significa que el valor de y es libre, y la idea es que agarre el valor de algún término en particular, mientras que la x es quien actúa como la variable acotada.

Ejemplo 1.6.12
$M(x, y) \leftrightarrow x$ es la madre de y

Definimos:
$\beta(x, y) \leftrightarrow \exists x. M(x, y)$

Y ahora definimos:
$\tau(x) \leftrightarrow \forall y. \beta(x, y)$

Lo que se traduce finalmente en
$\forall y. \exists x. M(x, y)$
"Para todo *y* existe *x* tal que *x* es la madre de *y*."

Ejemplo 1.6.13
"Ningún triángulo congruente al triángulo ABC es equilátero." (Gomezcaña, 2020)
$C(x, ABC) \leftrightarrow x$ es congruente al triángulo ABC
$E(x) \leftrightarrow x$ es equilátero
$\forall x. C(x, ABC) \rightarrow \neg E(x)$

Ejemplo 1.6.14

"Para cualesquiera números reales x, y mayores que 0, el producto de estos también es mayor que 0."

Veamos que en este podemos expresarlo de una manera sencilla incluso sin tener que escribir todo en términos y predicados, podemos simplemente expresarlo de la siguiente manera:

$$\forall x \forall y. x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow xy > 0$$

Ejemplo 1.6.15

"Para todo número real mayor que cero, existe un número natural tal que el inverso multiplicativo de dicho número natural es menor que el número real mayor que cero."

$R(x) \leftrightarrow x$ es un número real mayor que cero

$N(n) \leftrightarrow n$ es un número natural

$$\forall x. \exists n. R(x) \wedge N(n) \rightarrow \frac{1}{n} < x$$

Esta es conocida como la propiedad *arquimediana*.

Ejemplo 1.6.16

"Sean x_0 y L números y sea f una función. Diremos que L es el límite de la función f cuando se aproxima a x_0 si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$."

Sea

$$\tau(\epsilon, \delta, x, y, z) \longleftrightarrow 0 < |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - z| < \epsilon$$

Tenemos:

$$\tau(\epsilon, \delta, x, x_0, L)$$

Desarrollamos en 3 partes lo que nos dice el enunciado

$\forall x. \tau(\epsilon, \delta, x, x_0, L)$ i)

$\exists \delta. \delta > 0 \wedge$ **i)**

$\exists\delta.\, \delta > 0 \wedge \forall x.\, \tau(\epsilon, \delta, x, x_0, L)$ ii)

$\forall\epsilon.\, \epsilon > 0 \rightarrow$ **ii)**

$\forall\epsilon.\, \epsilon > 0 \rightarrow \exists\delta.\, \delta > 0 \wedge \forall x.\, \tau(\epsilon, \delta, x, x_0, L)$

Finalmente, deshaciendo todas las sustituciones llegamos al siguiente enunciado simbolizado:

$$\forall\epsilon.\, \epsilon > 0 \rightarrow \exists\delta.\, \delta > 0 \wedge \forall x.\, 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Esta es una definición de suma importancia en los cursos de cálculo diferencial e integral, es conocida como la definición del concepto de límite, y es algo que sirve en tantas ramas de las matemáticas que tiene una gran importancia su estudio. Sin embargo, nosotros sólo nos centraremos de momento en ver la forma en la que se puede simbolizar. Este es un ejemplo un poco más complejo y tiene muchas cosas a tomar en cuenta. No se espera que quien apenas está aprendiendo de la materia sepa simbolizar esto desde el momento en que lee el enunciado, pero sí se espera que conforme se le van presentando los pasos, se vayan entendiendo y hagan sentido.

Habiendo establecido estos ejemplos de una complejidad un tanto mayor, damos paso a las últimas secciones para presentar las últimas reglas de inferencia y unos ejemplos más elaborados para cerrar con el capítulo de lógica matemática.

1.7 Cálculo predicativo

El cálculo predicativo será algo muy similar a lo que hacíamos con el cálculo proposicional, lo único que cambiará es, como su nombre lo indica, que ahora en vez de hablar de proposiciones, podemos incluir predicados, y con esto llegarán unas cuantas reglas nuevas.

Lo primero que debemos definir cuando hablamos de cuestiones de cálculo predicativo es lo que se entiende por *universo de discurso* (Gomezcaña, 2020). Cuando se cuantifica a las variables o a los términos, siempre se hace considerando cierto universo de discurso, es decir, se asume una delimitación de los objetos a los cuales hace referencia el cuantificador, ya sea una delimitación implícita o explícita.

Por ejemplo, en el argumento: “Todos los sabios griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio griego. Concluimos que Sócrates fue un filósofo.”

Tenemos

$G(x) \leftrightarrow x$ fue un sabio griego

$F(x) \leftrightarrow x$ fue un filósofo

Nuestro universo de discurso hace referencia a las personas, i.e., todas las posibles x hacen referencia a personas.

En otro ejemplo que nos decía “Ningún triángulo congruente al triángulo ABC es equilátero.”

$C(x, ABC) \leftrightarrow x$ es congruente al triángulo ABC

Sabemos que las x hacen referencia a los triángulos. Por lo que, nuestro universo de discurso son los triángulos en el plano. Este análisis lo podemos hacer con cada ejercicio que hayamos realizado, pero lo hacemos ahora únicamente para exhibir de manera explícita que en cada cuantificación viene implícito un universo de discurso, simplemente es cuestión de entender bien el contexto del cual provenga para entender de qué objetos estamos hablando cuando vemos un cuantificador, pueden ser personas, números, objetos, figuras, etc.

1.7.1 Especificación universal

Habiendo dicho esto, consideremos entonces al cuantificador universal, es decir, consideremos que tenemos una premisa del tipo $\forall x. P(x)$. Entonces, hace sentido considerar que si aplica cierto predicado para cualquier elemento dentro del universo de discurso, entonces aplicará para algún elemento en particular que pertenezca a este universo de discurso, es decir, la proposición $P(a)$ puede obtenerse de la premisa anterior mientras “a” pertenezca a ese universo de discurso.

Formulación simbólica

1. $\forall x. P(x)$

$P(a)$ EU: 1, x/a

Finalmente, con esta regla introducida, resolvamos el problema al que tanto hemos venido arrastrando:

"Todos los sabios griegos fueron filósofos. Sócrates fue un sabio griego. Concluimos que Sócrates fue un filósofo."

$G(x) \leftrightarrow x$ fue un sabio griego

$F(x) \leftrightarrow x$ fue un filósofo

1.	$\forall x. G(x) \rightarrow F(x)$	
2.	$G(a)$	
3.	$G(a) \rightarrow F(a)$	EU: 1, x/a
	$F(a)$	PP: 2,3

Esta fue, finalmente, la forma correcta para validar este argumento, desde que se introdujo se podía intuir que hacía sentido, y que la conclusión era correcta, pero ahora sí contamos con las herramientas necesarias para validarlo de manera correcta.

Ejemplo 1.7.1

"Cada perro que ya haya comido, está acostado en su cama. Koblenz es un perro que no está acostado en su cama. Por lo tanto, Koblenz no ha comido."

$P(x) \leftrightarrow x$ es un perro

$C(x) \leftrightarrow x$ ya ha comido

$A(x) \leftrightarrow x$ está acostado en su cama

k = Koblenz

1.	$\forall x. P(x) \wedge C(x) \rightarrow A(x)$	
2.	$P(k) \wedge \neg A(k)$	
3.	$P(k) \wedge C(k) \rightarrow A(k)$	EU: 1, x/k
4.	$\neg A(k)$	S: 2
5.	$\neg(P(k) \wedge C(k))$	TT: 3,4
6.	$\neg P(k) \vee \neg C(k)$	LM: 5
7.	$P(k)$	S: 2
	$\neg C(k)$	TP: 6,7

1.7.2 Igualdad

Esta será una regla relativamente sencilla, y con todo y su simpleza podrá ser de gran utilidad. Se le denomina *igualdad* o *identidad*. Se acostumbra utilizar el símbolo = para denotar, al igual que en matemáticas. Hay algunas palabras clave o frases para detectar esto:

- Es
- Son
- Era
- Ser

Ejemplo 1.7.2

"Elvis Presley es el rey del rock and roll."

a = Elvis Presley

b = El rey del rock and roll

Esto se traduce en a=b

El predicado "es" representa la igualdad.

Un uso importante que le podemos dar a la identidad es que si tenemos una fórmula molecular que contenga a "a" como uno de sus términos y se presente, como en el último ejemplo el caso en que a=b, entonces podríamos deducir la misma fórmula en la que ahora algunas o todas las apariciones de "a" han sido sustituidas por "b".

Es decir, si $a = b$, podemos escribir una fórmula α que ya venía en términos de "a" como $\alpha(a)$, o bien como $\alpha(b)$. De igual forma, notemos que no a fuerzas se tienen que sustituir todos los términos, pensemos, por ejemplo, en lo siguiente.

Supongamos que la fórmula molecular $\alpha(x)$ viene descrita de la siguiente manera:

$\alpha(x) \leftrightarrow \phi(x, c) \ \wedge \ \delta(x)$

Utilizamos entonces el término "a"

$\alpha(a) \leftrightarrow \phi(a, c) \ \wedge \ \delta(a)$

Supongamos entonces que a=b. No tienen que cambiarse necesariamente todos los términos por esta igualdad, depende de cómo nos sirva tenerlos, ya será cuestión de lo que nos resulte más útil. Entonces, para ejemplificar, una de las formas en las que podría quedar es la siguiente:

$\phi(b, c) \wedge \delta(a)$

En este caso sólo modificamos el término a “b” en la primera parte, asumiendo que eso es lo que nos convendría hacer.

Ejemplo 1.7.3

“Todos los números racionales son aquellos que se puedan expresar de la forma $\frac{a}{b}$, con a, b números enteros y $b \neq 0$. Cinco es un número racional. Cinco es igual a tres más dos. Por lo tanto, tres más dos es un número que se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$.”

$R(x) \leftrightarrow x$ es un número racional

$E(x) \leftrightarrow x$ se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$

1. $\forall x. R(x) \rightarrow E(x)$
2. $R(5)$
3. $5 = 3 + 2$

$E(3 + 2)$

Esto se da porque:

1. $\forall x. R(x) \rightarrow E(x)$	
2. $R(5)$	
3. $5 = 3 + 2$	
4. $R(5) \rightarrow E(5)$	EU: 1, $x/5$
5. $R(5) \rightarrow E(3 + 2)$	I: 3,4
$E(3 + 2)$	PP: 2,5

Ejemplo 1.7.4

"Se sabe que la multiplicación de dos números enteros también es un entero. Sabemos que 2 es un entero. Definimos entonces a $4 = 2 \cdot 2$. Por lo tanto, 4 es un entero."

$E(x) \leftrightarrow x$ es un entero

1. $\forall x \forall y. E(x) \land E(y) \to E(x \cdot y)$
2. $E(2)$
3. $4 = 2 \cdot 2$

$E(4)$

Esto se da porque:

1.	$\forall x \forall y. E(x) \land E(y) \to E(x \cdot y)$	
2.	$E(2)$	
3.	$4 = 2 \cdot 2$	
4.	$E(2) \land E(2) \to E(2 \cdot 2)$	EU: 1, $x/2$, $y/2$
5.	$E(2) \land E(2)$	A: 2
6.	$E(2 \cdot 2)$	PP: 4,5
	$E(4)$	I: 3,6

1.7.3 Generalización universal

Esta regla será un tanto extraña, y posiblemente requiera de detenernos un tiempo a pensarla a un poco más de profundidad que las otras. La idea general viene en que, si podemos quitar cuantificadores, también deberíamos poder ponerlos. Y en realidad sí, sí se puede llevar a cabo este proceso, sólo que hay algunas cuestiones a considerar:

Si es posible derivar la fórmula $P(a)$ para un término variable "a", entonces podemos concluir de manera válida que $\forall x. P(x)$

1. $P(a)$

$\forall x. P(x)$ GU: 1, a/x

Por lo general, esta regla se da cuando de antemano nos presentan en las premisas términos cuantificados, y nosotros para poder manipularlos los convertimos en algo en particular para poder aplicarles las reglas de inferencia que ya conocemos. Y cuando llega el momento de la conclusión, como originalmente provenían de términos cuantificados y simplemente tomamos un caso "específico" que a fin de cuentas sigue siendo arbitrario, entonces podemos asumir con seguridad que podemos "reintroducir" el cuantificador con la nueva regla o implicación que hemos hallado. Veamos un ejemplo para que esto quede más claro.

Ejemplo 1.7.5

"Cualquier persona fuera de la sala no será considerada un sospechoso. Cualquier persona es un sospechoso o saldrá libre. Por tanto, cualquier persona fuera de la sala saldrá libre." (Gomezcaña, 2020)

$F(x) \leftrightarrow x$ está fuera de la sala

$S(x) \leftrightarrow x$ es un sospechoso

$L(x) \leftrightarrow x$ saldrá libre

Tenemos entonces:

1. $\forall x. F(x) \rightarrow \neg S(x)$
2. $\forall x. S(x) \vee L(x)$

$\forall x. F(x) \rightarrow L(x)$

Antes de comenzar el desarrollo del ejercicio, consideremos lo que se mencionó. Las premisas que tenemos son ambas con términos cuantificados. La única forma de poder manipular estos es por medio de la especificación universal para poder verlos como si fueran algún término en específico, aunque, como no le hemos dado un nombre en concreto realmente esto sigue siendo de manera arbitraria. Por lo que, la idea detrás del ejercicio es que mantendremos la metodología de hacerlo "sin pérdida de generalidad", es decir mantenerlo de forma arbitraria, para ver que entonces, si se cumple para cualquier término seleccionado se podrá cumplir para todos y podremos decir entonces que se presenta la regla de la generalización universal. De hecho, para mantener la idea de que lo estamos haciendo aún con términos variables, y no con alguno que ya hayamos especificado, tendremos cuidado en manejar únicamente el cambio de la especificación universal del término x por la variable y para que se entienda que sigue tratándose de una variable que eventualmente puede ser llenada con algún término ya específico.

1.	$\forall x. F(x) \to \neg S(x)$		
2.	$\forall x. S(x) \lor L(x)$		
3.	$F(y) \to \neg S(y)$		EU: 1, x/y
4.	$S(y) \lor L(y)$		EU: 2, x/y
5.		$F(y)$	**P***
6.		$\neg S(y)$	PP: 3,5
7.		$L(y)$	TP: 4,6
8.	$F(y) \to L(y)$		RP: 5-7
	$\forall x. F(x) \to L(x)$		GU: 8, y/x

Insistimos nuevamente en que esta regla se pudo hacer ya que se mantuvo el hecho de que fuera arbitrario, las reglas que se usaron no fueron únicamente porque se tratara de la variable y, sino que hubiera aplicado fuese cual fuese el término, motivo por el cual se puede proceder a hacerlo general.

Ejemplo 1.7.6 (Gomezcaña, 2020)

"Si consideramos que el 1 es el elemento neutro para el producto, que el producto es conmutativo y que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Entonces:

$$(x + 1) \cdot (y + 1) = yx + y + x + 1\text{"}$$

Este ejercicio está un poco más complicado, por lo que tratemos de llevarlo paso a paso. Puede ser complicado desde su simbolización, por lo que tratemos de exhibir todas las premisas que nos da el problema:

1. $\forall x.\ x \cdot 1 = x$
2. $\forall x \forall y.\ x \cdot y = y \cdot x$

3. $\forall x \forall y \forall z.\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\forall x \forall y. (x + 1) \cdot (y + 1) = yx + y + x + 1$

Procedimiento utilizado para llegar a esto:

4. $(t + 1) \cdot (s + 1) = (t + 1) \cdot s + (t + 1) \cdot 1$	EU: 3, $x/(t + 1),\ y/s,\ z/1$
5. $(t + 1) \cdot 1 = t + 1$	EU: 1, $x/(t + 1)$
6. $(t + 1) \cdot (s + 1) = (t + 1) \cdot s + (t + 1)$	I: 4,5
7. $(t + 1) \cdot s = s \cdot (t + 1)$	EU: 2, $x/(t + 1)\ ,\ y/s$
8. $(t + 1) \cdot (s + 1) = s \cdot (t + 1) + (t + 1)$	I: 6,7
9. $s \cdot (t + 1) = s \cdot t + s \cdot 1$	EU: 3, $x/s\ ,\ y/t\ ,\ z/1$
10. $s \cdot 1 = s$	EU: 1, x/s
11. $s \cdot (t + 1) = s \cdot t + s$	I: 9,10
12. $(t + 1) \cdot (s + 1) = s \cdot t + s + t + 1$	I: 8,11
$\forall x \forall y.\ (x + 1) \cdot (y + 1) = yx + y + x + 1$	GU: 12, $t/x,\ s/y$

Este último ejercicio ya fue de un mayor nivel de dificultad, y vemos que aunque sean propiedades algebraicas que nos han enseñado durante toda la vida escolar, tiene cierta complejidad demostrar que sus propiedades son válidas. Además de que siempre lo tenemos que hacer bajo ciertos supuestos. Más adelante veremos formalmente la definición de un *axioma*,el objetivo por ahora de este ejercicio es ir presentando la forma en la que podemos ir separando cada parte de lo que es una definición o proposición para ir "exprimiendo" lo más que podamos de ella con el objetivo de llegar a lo que se quiere demostrar.

Es posible que, como en algunos ejercicios pasados se mencionó, el lector aún no desarrolle la capacidad de ir pensando intuitivamente en cómo resolver ejercicios como este último, lo cual, de momento no tiene mayor afectación, eso es algo que se irá desarrollando con la práctica conforme se avance en los temas de matemáticas y se vaya ejercitando esta habilidad. No obstante, sí es importante que se tome el tiempo de entender lo que se está exhibiendo en el problema y cuál cree que sea el propósito de que se resuelva de la manera en la que se está haciendo.

1.7.4 Negación de cuantificadores

Habíamos mencionado en un ejemplo anterior que los cuantificadores guardaban cierta relación. Puede no parecer evidente en primera instancia, sin embargo, de acuerdo a Willard Van Orman, son "dos caras de un mismo principio". (Van Orman, 1940)

Por equivalencia lógica tendremos lo siguiente:

$$\neg(\forall x.\, \alpha(x)) \equiv \exists x.\, \neg\alpha(x) \qquad \dots (1)$$

$$\neg(\exists x.\, \alpha(x)) \equiv \forall x.\, \neg\alpha(x) \qquad \dots (2)$$

De acuerdo a estas dos equivalencias podemos formar las siguientes reglas. Por la equivalencia 1, tenemos lo siguiente:

$$\frac{1.\ \ \neg(\forall x.\, \alpha(x))}{\exists x.\, \neg\alpha(x)}$$

De igual forma, aplica al inverso

$$\frac{1.\ \ \exists x.\, \neg\alpha(x)}{\neg(\forall x.\, \alpha(x))}$$

Y ahora, por la equivalencia 2, podemos definir de igual manera lo siguiente:

$$\frac{1.\ \ \neg(\exists x.\, \alpha(x))}{\forall x.\, \neg\alpha(x)}$$

Lo mismo al inverso:

$$\frac{1.\ \ \forall x.\, \neg\alpha(x)}{\neg(\exists x.\, \alpha(x))}$$

Estas equivalencias reciben el nombre de *regla de la negación* y lo simbolizamos como RN. Retomemos un ejemplo que habíamos visto anteriormente:

"No existe político que no sea corrupto."

$P(x) \leftrightarrow x$ es un político

$C(x) \leftrightarrow x$ es corrupto

$\mu(x) \leftrightarrow P(x) \land \neg C(x)$

1. $\neg(\exists x. \mu(x))$

$\forall x. \neg\mu(x)$ RN: 1

Veamos que hace sentido, pues la primera premisa nos dice textualmente "No existe *x* tal que *x* sea un político y que no sea corrupto". Mientras que la equivalencia lógica nos dice que "Para todo x, no ocurre que x sea un político y que no sea corrupto". Esta es una forma sencilla de entender el primer acercamiento a esta regla de negación de cuantificadores.

Ejemplo 1.7.7

"No tienes razones para creer que no eres un cerebro en un tanque. Si tienes razones para creer que tienes un cuerpo físico, entonces es imposible que tengas razones para creer que eres un cerebro en un tanque. Entonces, no tienes razones para creer que eres una persona con cuerpo físico." (Gomezcaña, 2020)

$T(x) \leftrightarrow x$ es una razón para creer que eres un cerebro en un tanque

$F(x) \leftrightarrow x$ es una razón para creer que tienes un cuerpo físico

1. $\neg(\exists x. \neg T(x)$
2. $(\exists y. F(y)) \rightarrow \neg(\forall x. T(x))$

$\forall x. \neg F(x)$

Esto, paso a paso es:

1. $\neg(\exists x. \neg T(x)$
2. $(\exists y. F(y)) \rightarrow \neg(\forall x. T(x))$
3. $\forall x. T(x)$ RN: 1

4. $\neg\neg(\forall x. T(x))$ DN: 3
5. $\neg(\exists y. F(y))$ TT: 2,4

$\forall y. \neg F(y)$ RN: 5

Notemos que, si nos vamos estrictamente al resultado que estábamos buscando este quedó en términos de *y,* mientras que el que buscábamos está en términos de *x*. No obstante, veamos que realmente no importa eso, pues lo estamos dejando en términos de variables cuantificadas, por lo que, sea la variable que sea no tiene mayor relevancia para el objetivo del resultado.

1.7.5 Generalización existencial

Era intuitivo el hecho de pensar que si ya habíamos deducido una regla para hacer aparecer el cuantificador universal, ahora tendríamos una para hacer aparecer al cuantificador existencial. Esta funcionará un tanto distinta a la otra. Mientras que la generalización universal nos dice que para hacer uso de ella debemos haber estado trabajando con una especificación universal primero y después de eso poder generalizarlo por haber estado trabajando con términos arbitrarios, en este caso bastará con tener la proposición P(a) con "a" algún elemento del universo de discurso, ya que entonces podemos decir con total validez que existe algún elemento dentro del universo de discurso tal que se cumple el predicado P(x). Esto, en símbolos es:

1. $P(a)$

$\exists x. P(x)$ GE: 1, a/x

Ejemplo 1.7.8

"Cualquier humano que coma carne, no es vegetariano. Elsa es una humana que come carne. Por lo tanto, hay humanos que no son vegetarianos."

$H(x) \leftrightarrow x$ es un humano

$C(x) \leftrightarrow x$ come carne

$V(x) \leftrightarrow x$ es vegetariano

e = Elsa

1. $\forall x. H(x) \wedge C(x) \rightarrow \neg V(x)$
2. $H(e) \wedge C(e)$
3. $H(e) \wedge C(e) \rightarrow \neg V(e)$ EU: 1, x/e
4. $\neg V(e)$ PP: 2,3
5. $H(e)$ S: 2
6. $H(e) \wedge \neg V(e)$ A: 4,5

$\exists x. H(x) \wedge \neg V(x)$ GE: 6, e/x

Ejemplo 1.7.9

"Sabemos que el 1 funciona como el neutro multiplicativo. Sabemos que "*y*" es divisible por "*x*" si, y sólo si existe un número "*z*" tal que $y = z * x$. Por lo tanto, *x* es divisible por sí mismo." (Gomezcaña, 2020)

$D(x, y) \leftrightarrow y$ es divisible por *x*

1. $\forall x. x * 1 = x$
2. $\forall x \forall y. D(x, y) \leftrightarrow \exists z. y = z * x$

$\forall x. D(x, x)$

Previo a comenzar este ejercicio es importante recalcar que es el primer ejercicio en el que nos aparece una bicondicional dentro del argumento, el cual identificamos por la frase "si, y sólo si". Recordemos que eso significa que es una implicación de ida y vuelta. En este caso significa que $D(x, y) \rightarrow \exists z. y = z * x$, y también $\exists z. y = z * x \rightarrow D(x, y)$. Motivo por el cual podremos hacer uso de cualquiera de las implicaciones de acuerdo a lo que nos convenga. Una última cosa a destacar antes de comenzar el desarrollo del ejercicio es insistir en la diferencia al utilizar el símbolo $\leftrightarrow$, ya que lo podemos usar como bicondicional o para definir a los predicados. Consideramos que este ejercicio es uno en el que puede quedar muy clara la diferencia de cuándo lo utilizamos para definir bicondicionales y cuándo lo utilizamos para definir predicados. Habiendo aclarado esto, comenzamos con el desarrollo del ejercicio.

1.	$\forall x. x * 1 = x$	
2.	$\forall x \forall y. D(x, y) \leftrightarrow \exists z. y = z * x$	
3.	$t * 1 = t$	EU: 1, x/t
4.	$D(t, t) \leftrightarrow \exists z. t = z * t$	EU: 2, $x/t,\ y/t$
5.	$\exists z. t = z * t \rightarrow D(t, t)$	BI: 4
6.	$\exists z. t = z * t$	GE: 3, $1/z$
7.	$D(t, t)$	PP: 5,6
	$\forall x. D(x, x)$	GU: 7, t/x

1.7.6 Especificación existencial

Esta será la última regla que veremos en el capítulo, y será la que nos indique la forma en la que podamos remover el cuantificador existencial. Entonces, cuando tengamos una premisa del tipo $\exists x. P(x)$, podremos derivar la proposición $P(a)$ de ella, siendo "a" un elemento del universo de discurso, y siempre y cuando sea la primera vez que aparece este elemento dentro del argumento.

1.	$\exists x. P(x)$	
	$P(a)$	EE: 1, x/a ("a" aparece por primera vez)

Ejemplo 1.7.10

"Los alienígenas son seres curiosos. Algunos alienígenas son escalofriantes. Por lo tanto, algunos seres curiosos son escalofriantes."

$A(x) \leftrightarrow x$ es un alienígena

$C(x) \leftrightarrow x$ es un ser curioso

$E(x) \leftrightarrow x$ es escalofriante

Tenemos el siguiente argumento:

1. $\forall x. A(x) \rightarrow C(x)$
2. $\exists x. A(x) \wedge E(x)$

$\exists x. C(x) \wedge E(x)$

Veamos los pasos que se usaron para llegar a esto:

1.	$\forall x. A(x) \rightarrow C(x)$	
2.	$\exists x. A(x) \wedge E(x)$	
3.	$A(a) \rightarrow C(a)$	EU: 1, x/a
4.	$A(a) \wedge E(a)$	EE: 2, x/a
5.	$A(a)$	S: 4
6.	$C(a)$	PP: 3,5
7.	$E(a)$	S: 4
8.	$C(a) \wedge E(a)$	A: 6,7
	$\exists x. C(x) \wedge E(x)$	GE: 8, a/x

Ejemplo 1.7.11

"Cada elemento tiene otro que está asociado a este. Si "x" está asociado a "y", y "x" es parecido a "z", entonces "y" y "z" son iguales. Sabemos que 1 es parecido al elemento "a". Por tanto, 1 está asociado al elemento "a"." (Gomezcaña, 2020)

Utilizaremos la siguiente notación para simbolizar lo que se nos pide. Realmente no es una notación tan universal, simplemente es para dar a entender lo que pide el problema.

$x \sim y \leftrightarrow x$ está asociado con y

$x \equiv y \leftrightarrow x$ es parecido a y

1. $\forall x. \exists y. x \sim y$

2. $\forall x \forall y \forall z. x \sim y \land x \equiv z \to y = z$
3. $1 \equiv a$
4. $\exists y. 1 \sim y$ EU: 1, $x/1$
5. $1 \sim b$ EE: 4, y/b
6. $1 \sim b \land 1 \equiv a \to b = a$ EU: 2, $x/1,\ y/b,\ z/a$
7. $1 \sim b \land 1 \equiv a$ A: 5,3
8. $b = a$ PP: 6,7

$1 \sim a$ I: 5,8

De esta forma concluimos las reglas de inferencia que se verán en este trabajo. La siguiente sección estará dedicada a puros ejemplos, para concluir el capítulo con una simulación de lo que podrían ser ejercicios al nivel de un examen parcial.

1.8 Algunos ejercicios resueltos de cálculo predicativo

Esta sección contará con algunos ejemplos de ejercicios con la intención de fortalecer la práctica, no serán muchos ya que a lo largo del desarrollo de los temas se han visto varios, pero servirán como práctica.

Ejemplo 1.8.1

Simbolizar el siguiente argumento y validarlo por medio de reglas de inferencia:

"Ningún triángulo congruente con ABC es equilátero. Sólo los triángulos equiláteros congruentes con ABC son congruentes con DEF. El triángulo GHI es equilátero. Por tanto, el triángulo GHI no es congruente con DEF." (Gomezcaña, 2020)

$C(x, y) \leftrightarrow x$ es congruente con y

$E(x) \leftrightarrow x$ es equilátero

1. $\forall x. C(x, ABC) \to \neg E(x)$
2. $\forall x. E(x) \land C(x, ABC) \leftrightarrow C(x, DEF)$
3. $E(GHI)$

$$\neg C(GHI, DEF)$$

Desarrollemos esto

1.	$\forall x. C(x, ABC) \to \neg E(x)$	
2.	$\forall x. E(x) \land C(x, ABC) \leftrightarrow C(x, DEF)$	
3.	$E(GHI)$	
4.	$C(GHI, ABC) \to \neg E(GHI)$	EU: 1, x/GHI
5.	$\neg\neg E(GHI)$	DN: 3
6.	$\neg C(GHI, ABC)$	TT: 4,5
7.	$E(GHI) \land C(GHI, ABC) \leftrightarrow C(GHI, DEF)$	EU: 2, x/GHI
8.	$C(GHI, DEF) \to E(GHI) \land C(GHI, ABC)$	BI: 7
9.	$\neg E(GHI) \lor \neg C(GHI, ABC)$	A: 3,6
10.	$\neg(E(GHI) \land C(GHI, ABC))$	LM: 9
	$\neg C(GHI, DEF)$	TT: 8,10

Ejemplo 1.8.2

Simbolizar el siguiente argumento y validarlo por reglas de inferencia:

"Sabemos que para cualesquiera números *x, y, z* si $x > y$ al mismo tiempo que $y > z$, entonces $x > z$. Sabemos que $3 > 1$ y que $1 > 0$. Por lo tanto, $3 > 0$.

1.	$\forall x \forall y \forall z. x > y \land y > z \to x > z$	
2.	$3 > 1 \land 1 > 0$	
3.	$3 > 1 \land 1 > 0 \to 3 > 0$	EU: 1, $x/3,\ y/1,\ z/0$
	$3 > 0$	PP: 2,3

Ejemplo 1.8.3

Simbolizar y validar por reglas de inferencia:

"Eduardo podría haber visto el coche del asesino. Ramsey fue el primer testigo de la defensa. O Eduardo estaba en la fiesta o Ramsey dio testimonio falso. En efecto, nadie en la fiesta pudo haber visto el coche del asesino. Por tanto, el primer testigo de la defensa dio testimonio falso.” (Gomezcaña, 2020)

$V(x) \leftrightarrow x$ pudo haber visto el coche del asesino

$F(x) \leftrightarrow x$ estaba en la fiesta

$T(x) \leftrightarrow x$ dio testimonio falso

e = Eduardo

r = Ramsey

a = Primer testigo de la defensa

1.	$V(e)$	
2.	$r = a$	
3.	$F(e) \vee T(r)$	
4.	$\forall x. F(x) \rightarrow \neg V(x)$	
5.	$F(e) \rightarrow \neg V(e)$	EU: 4, x/e
6.	$\neg\neg V(e)$	DN: 1
7.	$\neg F(e)$	TT: 5,6
8.	$T(r)$	TP: 3,7
	$T(a)$	I: 2,8

Ejemplo 1.8.4

El siguiente ejercicio es similar a uno que ya hemos realizado anteriormente, pero ahora se pide validarlo explícitamente utilizando la *reducción al absurdo*:

“Teniendo las ecuaciones $x^2 + 10x - 24 = 0$ y $x^2 - 144 = 0$, demostrar por medio de reglas de inferencia y utilizando reducción al absurdo que el valor de *x* que satisface ambas ecuaciones es $x =- 12$.”

Consideremos lo siguiente:

En ocasiones, el problema no nos dirá gran cosa, y quedará todo de forma implícita, por lo que es importante que escribamos lo que sabemos que el problema nos da como un hecho, para poder colocarlo como premisa y trabajar con ello.

Sabemos que el número *x* satisface las ecuaciones $x^2 + 10x - 24 = 0$ y $x^2 - 144 = 0$.

Sabemos que para que se satisfaga la primera ecuación $x = -12$, o $x = 2$. Para que se satisfaga la segunda ecuación sabemos que $x = 12$, o $x = -12$. Sabemos que x no puede valer simultáneamente 2 y 12. Por lo tanto, el valor de x es $x = -12$.

Una vez teniendo claro lo que nos están pidiendo, lo escribimos y posteriormente lo simbolizamos para facilitar el manejo y comenzar con la validación por medio de las reglas de inferencia.

1. $x^2 + 10x - 24 = 0 \wedge x^2 - 144 = 0$
2. $x^2 + 10x - 24 = 0 \rightarrow x = -12 \vee x = 2$
3. $x^2 - 144 = 0 \rightarrow x = -12 \vee x = 12$
4. $\neg(x = 2 \wedge x = 12)$

$x = -12$

Sea

A:= $x^2 + 10x - 24 = 0$

B:= $x^2 - 144 = 0$

C:= $x = -12$

D:= $x = 2$

E:= $x = 12$

1.	$A \wedge B$	
2.	$A \rightarrow C \vee D$	
3.	$B \rightarrow C \vee E$	
4.	$\neg(D \wedge E)$	
5.	A	S:1
6.	B	S:1
7.	$C \vee D$	PP: 2,5
8.	$C \vee E$	PP: 3,6

Debido a que nos piden resolverlo por reducción al absurdo, y queremos llegar a C como conclusión, vamos a suponer que es falsa para llegar a una contradicción.

9.	$\neg C$	**P***
10.	D	TP: 7,9
11.	E	TP: 8,9
12.	$D \wedge E$	A: 10,11
13.	$(D \wedge E) \wedge \neg(D \wedge E)$	A: 12,4
14. $\neg C \rightarrow (D \wedge E) \wedge \neg(D \wedge E)$		RP: 9-13
15. $\neg\neg C$		**RAA:** 14
C		DN: 15

Es un ejercicio muy similar a uno que ya habíamos hecho previamente, pero ahora lo escribimos de una forma menos detallada y de la forma en que generalmente suelen venir los problemas en matemáticas, para fomentar el ejercicio de redactar tal cual lo que nos piden y poner de forma explícita lo que está ocurriendo, así como fomentar la forma de demostración por reducción al absurdo, puesto que es un método sumamente utilizado.

Ejemplo 1.8.5 (ejemplo final)

"Sabemos que, tanto la suma como el producto entre enteros es entero. Además, sabemos que el producto entre dos números x e y satisface

$$(2 * x) * (2 * y) = 2 * (2 * x * y)$$

Y hemos *definido* a x como un número par siempre que sea posible encontrar un entero "q" de forma que $x = 2 * q$. También sabemos que tanto 1 como 2 son enteros. Podemos concluir entonces que el producto de dos pares es otro par." (Gomezcaña, 2020)

Una breve observación antes de comenzar. Se puso a la palabra "definido" en negritas ya que es algo que pocas veces se vio, sin embargo, esto nos habla de una bicondicional, esa es una palabra clave para detectar la bicondicional, por lo que al momento de realizar la simbolización quedará de esa manera. Es muy importante detectarla, pues no nos habla únicamente de una implicación sencilla, sino de una que es de ida y vuelta, y esto se ocupará en cálculo, en álgebra y en una amplia selección de temas en las matemáticas en general, por lo que es importante no perder de vista este detalle.

Sea

$E(x) \leftrightarrow x$ es un número entero

$P(x) \leftrightarrow x$ es un número par

1. $\forall x \forall y. E(x) \wedge E(y) \rightarrow E(x + y)$
2. $\forall x \forall y. E(x) \wedge E(y) \rightarrow E(x * y)$
3. $\forall x \forall y. (2 * x) * (2 * y) = 2 * (2 * x * y)$
4. $\forall x. P(x) \leftrightarrow \exists y. E(y) \wedge x = 2 * y$
5. $E(1) \wedge E(2)$

$\forall x \forall y. P(x) \wedge P(y) \rightarrow P(x * y)$ Conclusión a la que deseamos llegar

Veamos entonces el procedimiento para llegar a dicha conclusión:

6.	$P(s) \wedge P(t)$	**P***
7.	$P(s) \leftrightarrow \exists y. E(y) \wedge s = 2 * y$	EU: 4, x/s
8.	$P(s)$	S: 6
9.	$P(s) \rightarrow \exists y. E(y) \wedge s = 2 * y$	BI: 7
10.	$\exists y. E(y) \wedge s = 2 * y$	PP: 8,9
11.	$P(t)$	S: 6
12.	$P(t) \leftrightarrow \exists y. E(y) \wedge t = 2 * y$	EU: 4, x/t
13.	$P(t) \rightarrow \exists y. E(y) \wedge t = 2 * y$	BI: 12
14.	$\exists y. E(y) \wedge t = 2 * y$	PP: 11,13
15.	$E(k) \wedge s = 2 * k$	EE: 10, y/k
16.	$E(l) \wedge t = 2 * l$	EE: 14, y/l
17.	$(2 * k) * (2 * l) = 2 * (2 * k * l)$	EU: 3, $x/k,\ y/l$
18.	$s * (2 * l) = 2 * (2 * k * l)$	S, I: 15, 17
19.	$s * t = 2 * (2 * k * l)$	S, I: 16,18
20.	$E(2) \wedge E(k) \rightarrow E(2 * k)$	EU: 2, $x/2,\ y/k$
21.	$E(2) \wedge E(k)$	S, A: 5,15
22.	$E(2 * k)$	PP: 20,21
23.	$E(2 * k) \wedge E(l) \rightarrow E(2 * k * l)$	EU: 2, $x/(2 * k),\ y/l$
24.	$E(l)$	S: 16

25.	$E(2 * k) \land E(l)$	A: 22,24
26.	$E(2 * k * l)$	PP: 23,25
27.	$E(2 * k * l) \land s * t = 2 * (2 * k * l)$	A: 19,26
28.	$\exists y. E(y) \land s * t = 2 * y$	GE: 27, $(2 * k * l)/y$
29.	$P(s * t) \leftrightarrow \exists y. E(y) \land s * t = 2 * y$	EU: 4, $x/(s * t)$
30.	$\exists y. E(y) \land s * t = 2 * y \to P(s * t)$	BI: 29
31.	$P(s * t)$	PP: 28,30
32.	$P(s) \land P(t) \to P(s * t)$	RP: 6-31
	$\forall x \forall y. P(x) \land P(y) \to P(x * y)$	GU: 32, s/x, t/y

∴ Concluimos que el producto de dos números pares es un número par.

De esta forma cerramos esta sección, este último ejemplo puede ser algo demandante tanto de atención como de estar analizando con calma cada paso. Al igual que en ejercicios anteriores, insistimos en que, aunque no parezcan intuitivos los pasos que se hacen en este ejercicio, el lector se tome el tiempo de meditar el por qué se están haciendo los pasos que se hacen y el por qué hace sentido hacerlos, así como ir corroborando la validez de las reglas de inferencia utilizadas.

El contar con un buen razonamiento lógico facilitará en gran medida la comprensión de las matemáticas, pues ese es su lenguaje natural. Conforme uno va avanzando en la comprensión de esta ciencia, el razonamiento lógico parece que va quedando atrás, no obstante, esto es simplemente porque queda dominado, y se hace de la misma forma tan natural como lo es leer para alguien que sabe hacerlo. Entendiendo bien los fundamentos lógicos, podremos entender conceptos mucho más complejos en un futuro, pero esta es la base de todo. Todo parte de aquí, de la lógica matemática.

1.9 Simulación de examen parcial

En esta sección se seleccionarán 5 ejercicios que se consideran tendrían el nivel para venir en algún examen parcial de los temas abordados en este capítulo. Esto con el objetivo de que quien lo lea pueda generar una autoevaluación. Las respuestas vendrán posteriores a los ejercicios. No obstante, se recomienda fuertemente que el lector intente resolver estos ejercicios antes de ver las respuestas. Las respuestas únicamente vienen como guía o referencia para el lector. El objetivo es que uno vaya detectando su propio aprendizaje. Se recomienda intentar realizar los cinco ejercicios en un plazo máximo de dos horas, intentando hacerlo sin ver tanto las notas o ejercicios previos.

Problema 1:

Exhibir por medio de una tabla de verdad las formas en la cual puede ser verdadera la proposición $\neg(P \lor Q) \leftrightarrow (R \to Q \land S)$ e indicar si se trata de una contingencia, tautología o contradicción.

Problema 2:

Simbolizar el siguiente razonamiento utilizando símbolos lógicos y validarlo utilizando reglas de inferencia:

> "Cualquier perro que haya nacido en 1910 no fue al espacio. Laika fue un perro que fue al espacio. Por lo tanto, hay un perro que no nació en 1910 y que fue al espacio."

Problema 3: (Gomezcaña, 2020)

Simbolizar el siguiente razonamiento utilizando símbolos lógicos y validarlo utilizando reglas de inferencia:

> "Es un hecho bien conocido que Dios es un ser tal que no se puede concebir algo más grande. Además, es también conocido que Dios existe en la imaginación. Ahora, si algo existe en la imaginación pero no en la realidad entonces es posible concebir algo más grande (que exista en ambas). Por tanto, Dios existe en la realidad."

Problema 4: (Gomezcaña, 2020)

Simbolizar el siguiente razonamiento utilizando símbolos lógicos y validarlo utilizando reglas de inferencia:

> "La hermana de la madre de cada muchacho es su tía. Mateo es un muchacho y Belén es hermana de Cristina. Todos los tíos de Mateo le mandan regalo de cumpleaños. Por lo tanto, si Cristina es la madre de Mateo, Belén le manda regalo a Mateo."

Problema 5: (Gomezcaña, 2020)

Simbolizar el siguiente razonamiento utilizando símbolos lógicos y validarlo utilizando reglas de inferencia:

> "Cada elemento tiene otro que está asociado a este. Si "x" está asociado a "y", y "x" es parecido a "z", entonces "y" y "z" son iguales. Si "x" está asociado a "y", y "y" está asociado a "z", entonces "x" está asociado a "z". Sabemos que 1 es parecido al elemento "a". Sabemos también que "a" es parecido a 2. Por tanto, 1 está asociado a 2."

Como siempre, recalquemos que no tiene que resolverse exactamente igual a cómo se presenta a continuación, cada quien utilizará el razonamiento que considere más conveniente. Mientras las reglas estén bien utilizadas y se utilice un buen criterio, no tiene por qué ser exactamente igual a la forma en la que se va a presentar la solución, a excepción quizás del primer ejercicio. Para ese no importa el orden en que se realicen las operaciones que se tienen que obtener, siempre y cuando se llegue al resultado final

Respuestas:

Problema 1:

Nos piden crear la tabla para definir en qué valores puede ser verdadera la proposición $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (R \rightarrow Q \wedge S)$, e indicar si se trata de tautología, contradicción o contingencia.

Notamos que tenemos 4 proposiciones atómicas, por lo que la tabla que creemos tendrá $2^4 = 16$ filas. La tabla nos queda de la siguiente forma:

Tabla 6
Ejercicio

P	Q	R	S	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$Q \wedge S$	$R \rightarrow Q \wedge S$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (R \rightarrow Q \wedge S)$
V	V	V	V	V	F	V	V	F
V	V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	V	F	V	V	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	F	V	F	V	**V**

Elaboración propia

Esto es una *contingencia* mayormente falsa.

Problema 2:

"Cualquier perro que haya nacido en 1910 no fue al espacio. Laika fue un perro que fue al espacio. Por lo tanto, hay un perro que no nació en 1910 y que fue al espacio."

Sea

$P(x) \leftrightarrow x$ es un perro

$N(x) \leftrightarrow x$ nació en 1910

$E(x) \leftrightarrow x$ fue al espacio

a = Laika

1. $\forall x. P(x) \land N(x) \rightarrow \neg E(x)$	**P**
2. $P(a) \land E(a)$	**P**
3. $P(a) \land N(a) \rightarrow \neg E(a)$	EU: 1, x/a
4. $E(a)$	S: 2
5. $\neg\neg E(a)$	DN: 4
6. $\neg (P(a) \land N(a))$	TT: 3,5
7. $\neg P(a) \lor \neg N(a)$	LM: 6
8. $P(a)$	S: 2
9. $\neg N(a)$	TP: 7,8
10. $P(a) \land \neg N(a) \land E(a)$	A: 4,8,9
$\exists x. P(x) \land \neg N(x) \land E(x)$	GE: 10, a/x

Problema 3:

"Es un hecho bien conocido que Dios es un ser tal que no se puede concebir algo más grande. Además, es también conocido que Dios existe en la imaginación. Ahora, si algo existe en la imaginación pero no en la realidad entonces es posible concebir algo más grande (que exista en ambas). Por tanto, Dios existe en la realidad."

Sea

$S(x) \leftrightarrow x$ es un ser

$P(x) \leftrightarrow$ se puede concebir algo más grande que x

$I(x) \leftrightarrow x$ existe en la imaginación

$R(x) \leftrightarrow x$ existe en la realidad

d = Dios

1. $S(d) \land \neg P(d)$	**P**
2. $I(d)$	**P**
3. $\forall x. I(x) \land \neg R(x) \rightarrow P(x)$	**P**

4.	$I(d) \land \neg R(d) \to P(d)$	EU: 3, x/d
5.	$\neg P(d)$	S: 1
6.	$\neg (I(d) \land \neg R(d))$	TT: 4,5
7.	$\neg I(d) \lor R(d)$	LM: 6
8.	$\neg\neg I(d)$	DN: 2
9.	$R(d)$	TP: 7,8

Problema 4:

"La hermana de la madre de cada muchacho es su tía. Mateo es un muchacho y Belén es hermana de Cristina. Todos los tíos de Mateo le mandan regalo de cumpleaños. Por lo tanto, si Cristina es la madre de Mateo, Belén le manda regalo a Mateo."

Sea

$E(x) \leftrightarrow x$ es un muchacho

$M(y,x) \leftrightarrow y$ es la madre de x

$H(z,y) \leftrightarrow z$ es la hermana de y

$T(z,x) \leftrightarrow z$ es tío de x

$R(z,x) \leftrightarrow z$ le manda regalo a x

m = Mateo

b = Belén

c = Cristina

1.	$\forall x \forall y \forall z. E(x) \land M(y,x) \land H(z,y) \to T(z,x)$	**P**
2.	$E(m) \land H(b,c)$	**P**
3.	$\forall z. T(z,m) \to R(z,m)$	**P**
4.	$E(m) \land M(c,m) \land H(b,c) \to T(b,m)$	EU: 1, $x/m,\ y/c,\ z/b$
5.	$T(b,m) \to R(b,m)$	EU: 3, z/b
6.	$M(c,m)$	**P***
7.	$E(m) \land M(c,m) \land H(b,c)$	A: 2,6

8.	$T(b, m)$	PP: 4,7
9.	$R(b, m)$	PP: 5,8

$M(c, m) \rightarrow R(b, m)$ RP: 6-9

Problema 5:

Este era posiblemente el ejercicio más complejo, y en una situación de examen es el que se hubiera recomendado dejar al final.

> "Cada elemento tiene otro que está asociado a este. Si "*x*" está asociado a "*y*", y "*x*" es parecido a "*z*", entonces "*y*" y "*z*" son iguales. Si "*x*" está asociado a "*y*", y "*y*" está asociado a "*z*", entonces "*x*" está asociado a "*z*". Sabemos que 1 es parecido al elemento "*a*". Sabemos también que "*a*" es parecido a 2. Por tanto, 1 está asociado a 2."

Sea

$x \sim y \leftrightarrow x$ está asociado a *y*

$x \equiv y \leftrightarrow x$ es parecido a *y*

1.	$\forall x \exists y. x \sim y$	**P**
2.	$\forall x \forall y \forall z. x \sim y \wedge x \equiv z \rightarrow y = z$	**P**
3.	$\forall x \forall y \forall z. x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z$	**P**
4.	$1 \equiv a$	**P**
5.	$a \equiv 2$	**P**
6.	$\exists y. 1 \sim y$	EU: 1, $x/1$
7.	$\exists y. a \sim y$	EU: 1, x/a
8.	$1 \sim b$	EE: 6, y/b
9.	$a \sim c$	EE: 7, y/c
10.	$1 \sim b \wedge 1 \equiv a$	A: 4,8
11.	$1 \sim b \wedge 1 \equiv a \rightarrow b = a$	EU: 2, $x/1,\ y/b,\ z/a$
12.	$b = a$	PP: 10,11
13.	$a \sim c \wedge a \equiv 2$	A: 5,9
14.	$a \sim c \wedge a \equiv 2 \rightarrow c = 2$	EU: 2, $x/a,\ y/c,\ z/2$

15. $c = 2$	PP: 13,14
16. $a \sim 2$	I: 9,15
17. $1 \sim a$	I: 8, 12
18. $1 \sim a \land a \sim 2 \to 1 \sim 2$	EU: 3, $x/1,\ y/a,\ z/2$
19. $1 \sim a \land a \sim 2$	A: 16,17
$1 \sim 2$	PP: 18,19

Con esto damos por concluido este capítulo y damos paso al siguiente, que también será un tema de gran relevancia. Esperamos que se haya entendido la importancia que tiene la lógica matemática en general, y que se haya entendido el por qué es la base del razonamiento matemático. El siguiente capítulo abordaremos la teoría de conjuntos, y esa sería la segunda base de gran importancia en matemáticas. Por lo que, iremos construyendo los niveles por capas para tener bien asentadas las bases.

Capítulo 2. Teoría de conjuntos

2.1 Introducción (definiciones y notaciones)

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas, donde la lógica matemática cobra un papel fundamental, que nos sirve, al igual que esta, para establecer muchas de las bases en el desarrollo de las matemáticas. Es un campo de suma importancia para carreras que involucran el uso de las matemáticas, el razonamiento y el análisis. Es también algo fundamental en el estudio de la probabilidad, por lo tanto, también de la estadística, pues muchas de las propiedades y demostraciones relacionadas a esta área de estudio provienen de la teoría de conjuntos y están fundamentadas en ella. Esta es una de las ramas de la matemática que, al igual que por ejemplo, el cálculo diferencial e integral y la geometría analítica se interrelaciona con muchísimos aspectos de las matemáticas, pues muchas cosas del cálculo infinitesimal y de la geometría se definen a partir de los conjuntos.

Como se irá viendo a lo largo del capítulo, la teoría de conjuntos tiene muchas similitudes con lo que vimos en el capítulo anterior de lógica matemática, motivo por el cual es considerada una rama de esta. El criterio y razonamiento utilizado para resolver problemas de este capítulo es el mismo que el que se utilizó en el anterior, simplemente ahora cambiarán las definiciones y el significado de lo que estamos haciendo. No obstante, lo que queremos dejar en claro es que el razonamiento que se utiliza es el mismo, y es por eso que hemos profundizado tanto en el capítulo anterior en lo que es la lógica. Así pues, comencemos con las primeras definiciones y con la introducción al tema.

Definición:

Entenderemos como un *conjunto* a una colección de objetos bien definida, es decir, en la cual debe ser sumamente claro cuáles objetos son miembros de esta colección y cuáles no.

Si es la primera vez que nos enfrentamos a este tema de matemáticas, puede resultar un poco difícil de entender lo que es un conjunto, ya que la definición se presta a entender muchas cosas, puede extenderse mucho. Sin embargo, pensemos en algunos ejemplos sencillos: desde algunos cursos incluso de primaria o secundaria se nos decía que existían los números enteros y los números que eran fraccionarios, o los números pares o impares. Lo que estamos haciendo al clasificarlos de esa forma es precisamente lo que hace un conjunto. La idea de crear conjuntos es poder separar ciertos objetos que cumplan ciertas características y agrupar todo en un sólo lugar. No obstante, no nos limitamos únicamente a conjuntos que tengan que ver con números, pues la teoría de conjuntos nos permite agrupar lo que queramos. Podríamos pensar en el conjunto de las vocales del alfabeto latino. Este sería un conjunto que consta de cinco miembros: las letras "a", "e", "i", "o", "u". De igual forma podríamos construir el conjunto de todas las consonantes del mismo alfabeto y sería un conjunto que consta de 22 miembros. Estamos limitando a que para que algún objeto sea miembro de este conjunto debe cumplir ciertas características, y eso es algo muy importante. No puede existir un objeto que pueda ser o no miembro, debe ser muy claro si es que lo es.

Habiendo dado esa breve introducción con algunos ejemplos, definimos ahora algo de suma importancia dentro de este tema, lo cual será también útil para la gran mayoría de los futuros cursos relacionados con las matemáticas: la relación de pertenencia. Consideremos el siguiente predicado:

$$x \in A \leftrightarrow x \text{ pertenece a } A$$

Este nuevo símbolo que hemos introducido denota lo que se conoce como *pertenencia*. Cuando un objeto x cumpla las características deseadas y sea un miembro del conjunto lo llamaremos *elemento*. Es importante entonces distinguir bien cuáles serán los elementos del conjunto que sea de nuestro interés. De igual manera, tenemos su negación

$$x \notin A \leftrightarrow x \text{ no pertenece a } A$$

Este último predicado nos dice que ese objeto no es un elemento del conjunto A, pues debe haber alguna o varias características con las que no cumpla, y por ende, no forma parte del conjunto. Comúnmente se denotan a los conjuntos con letras mayúsculas de nuestro alfabeto. Pensemos en los ejemplos anteriores que habíamos puesto. Si definimos al conjunto A como el conjunto de las vocales del alfabeto latino, es fácil corroborar que:

i) $a \in A$
ii) $e \in A$
iii) $i \in A$

iv) $b \notin A$

v) $c \notin A$

Pasemos ahora a las notaciones que se utilizan frecuentemente en esta rama, es decir, las formas en las que podemos describir a un conjunto, ya que, existen distintas maneras y dependiendo del conjunto del que se trate veremos que será más conveniente utilizar cierta notación en particular.

Formas de describir conjuntos

Retomemos el ejemplo del conjunto de las vocales, pues este nos sirve para exponer la primera forma en la que se pueden describir los conjuntos. Sea A el conjunto de las vocales del alfabeto latino, utilizamos entonces la notación de llaves y exhibimos todos los elementos del conjunto. Tendríamos entonces que:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Este tipo de notación se llama notación *por extensión*. No obstante, no es el único caso en el cual se puede aplicar este tipo de notación, pues podríamos pensar que tenemos un conjunto de muchos números que comienza en 1. Llamemos a este conjunto B. Podemos utilizar la notación de puntos de la siguiente manera:

$$B = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Nuevamente, puede ser que este tipo de notación sea algo nueva, lo que nos quiere decir es que los elementos del conjunto son los números enteros en orden ascendente comenzando por el 1 y llega hasta el número n. Este será un conjunto que tendrá n elementos.

Y como último caso tenemos lo siguiente:

$$C = \{1, 2, \ldots\}$$

Este conjunto nos dice algo muy similar al anterior, sólo que en este caso no nos indica cuándo termina, lo cual nos dice que seguirá así sucesivamente, pese a ello, es claro cuáles son los números que podrían ser considerados como elementos de este conjunto.
Una notación que es conveniente mencionar que va muy ligado a esto último es la siguiente: (Laveaga) "Para $n \geq 1$, por $a_1 , \dots , a_n$ entenderemos que se tienen objetos $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ etc hasta a_n." Por ejemplo si $n = 4$, tendríamos a_1 , a_2 , a_3 , a_4. Claramente, si $n = 1$, sólo tendríamos al objeto a_1 . Por lo tanto, si $a_1 , \dots , a_n$ son todos los objetos del conjunto A, entonces lo escribimos de la siguiente forma:

$$A = \{a_1 , \dots , a_n\}$$

De esta forma cobra sentido el segundo ejemplo que proporcionamos de notación por extensión, pues en el caso en que mencionamos que eran los n números enteros comenzando en el 1 podríamos verlo como $a_1 = 1 , a_2 = 2 , \dots , a_n = n$.

Veamos que es una forma práctica de describir a un conjunto para poder determinar de forma sencilla cuáles serán sus elementos, pero en ocasiones no es práctica esta notación, pues esto nos viene muy bien cuando se trata de un conjunto con pocos elementos o un conjunto muy sencillo de redactar de esta manera. Pensemos que nos interesa describir al conjunto que tiene como elementos a los números del 1 al 10. De acuerdo a lo que hemos visto tendríamos dos formas distintas en las que podríamos describir a dicho conjunto, llamémoslo B:

Forma 1:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Forma 2:

$$B = \{1, 2, \dots , 10\}$$

Sin embargo, existe una tercera y cuarta forma en la que podríamos explicar este conjunto, y se hace diciendo que cualquier objeto x que cumpla una característica, entonces será un elemento. Visto en términos de lógica, tendremos un predicado dado de la forma general y si

ese predicado es verdadero para un término en general entonces ese término será elemento del conjunto.
De forma general sería lo siguiente:

$$A = \{x \mid P(x) \text{ es verdadera } \}$$

Esto se lee como "el conjunto A es igual a las equis tal que P(x) es verdadera". Una notación alternativa para el "tal que" es poner los dos puntos " : ". Por lo tanto para ejemplificar esto retomemos el ejemplo de describir el conjunto de los primeros diez números enteros:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$$

El símbolo $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los números enteros, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots , -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

Por lo tanto la forma en la que definimos el conjunto A se interpreta como "A es el conjunto de todas las x elementos de los enteros tales que se cumpla que $1 \leq x \leq 10$."

Esta última forma de describir a los conjuntos es sumamente útil cuando tenemos conjuntos que resulta imposible escribirlos por extensión. Pensemos simplemente en que queramos decir que nuestro conjunto sea el intervalo abierto $(0, 1)$. Existen una infinidad de números dentro de ese intervalo, por lo que resultaría imposible describirlos por extensión, entonces se utilizaría la siguiente descripción:

$$(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$$

Conforme se vaya avanzando en los temas se espera que pueda ir quedando más claro el concepto de la descripción de los conjuntos y que cobre sentido el por qué en ocasiones conviene escribirlos de alguna u otra forma.
A la denominación que se ha manejado en la presente sección se le llamará *conjuntos por comprensión*.

Definición (Igualdad de conjuntos):

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos. Es decir, dos conjuntos serán exactamente iguales si, y sólo si cualquier elemento de A es elemento de B y viceversa. En forma de predicado esto quedaría como:

$$A = B \longleftrightarrow \forall x. x \in A \leftrightarrow x \in B$$

En este caso recalcamos la diferencia del símbolo de la bicondicional con el que simplemente está definiendo un predicado, pues para esta explicación puede llegar a confundirse, pero el primero se hizo más largo de forma intencional con el objetivo de que ese se entienda como el predicado (la equivalencia), mientras que el segundo símbolo que es un poco más corto representa una bicondicional.

De esto último, se puede deducir que $A \neq B$, cuando:

$$\exists x. \neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$
$$\exists x. \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \vee \neg(x \in B \rightarrow x \in A)$$
$$\exists x. (x \in a \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Lo que nos dice que si dos conjuntos son distintos, podemos encontrar un elemento en el primer conjunto que no sea elemento del segundo o un elemento del segundo conjunto que no sea elemento del primero.

Algunas cosas importantes a destacar respecto a los conjuntos:

- No importa el orden en que se exhiban los elementos. Habrán algunas excepciones en donde el orden sí tendrá importancia, sin embargo este los afectará como elementos, ya que los hará distinguibles, pero para el conjunto no tiene relevancia el orden en que se exhiban sus elementos. Es decir, se da la siguiente igualdad:
  $$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$
  Y eso aplica para cualquier conjunto.

- No tiene importancia si hay algún elemento repetido, en tal caso se omiten las repeticiones que tenga y se anota una única vez ese elemento. Por ejemplo:

$$\{1, 1, 2, 3, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

- Debido a que la perspectiva que tenemos respecto a los conjuntos es verlos como objetos, entonces resulta realmente intuitivo el pensar que un conjunto puede ser elemento de otro conjunto, por lo tanto esto es algo que se puede dar.

- Hay una relación que sí quedará “prohibida”, y esta es:

$$A \in A$$

Vale la pena analizar los siguientes ejemplos y pensar en por qué llevan ya sea el signo de igualdad o de distinción de acuerdo a las observaciones previas que hicimos:

1. $\{1, 9, 5, 7, 15\} = \{5, 1, 7, 15, 9\}$
2. $\{4, 5, 4, 2, 3, 4, 5, 5, 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
4. $\{1, 2, 3\} \neq \{3, 1, 2, 4\}$
5. $\{a, b\} = \{b, a\}$
6. $\{a, a, \{a\}, b, a\} \neq \{a, b\}$
7. $\{a, a, \{a\}, b, a\} = \{a, b, \{a\}\}$
8. $\{a, \{\{a\}\}, \{a\}, a, a, \{a\}, \{\{\{a\}\}\}, \{f\}\} = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \{f\}\}$

Previo a avanzar a la siguiente sección expondremos unos conjuntos de números que serán útiles a lo largo de todo el capítulo y en general en el estudio de las matemáticas.

1. **Los números naturales:** $\mathbb{N}$

   Para este conjunto en particular existe un constante debate sobre si el número 0 debería ser un elemento o no, pues el conjunto de los números naturales está pensado como el conjunto de los números que nos sirven para contar, motivo por el cual existe un debate sobre esto. Debido a esto, en este trabajo cuando se vaya a trabajar con este conjunto se especificará siempre previamente si debe considerarse a partir del 0 o a partir del 1. De cualquier manera, exponemos la descripción de este conjunto bajo ambos criterios:

$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ Considerando el 0 como elemento

$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3 \dots\}$ Sin considerar el 0 como elemento

2. **Los números enteros:**

   $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$

3. **Los números racionales:**

   $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$

   Notemos que la definición de este conjunto no es por extensión sino por condiciones o características que deben cumplir estos números; es decir por comprensión.

4. **Los números reales:**

   $\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \ \vee x \notin \mathbb{Q}\}$

   Otra forma de describirlos es simplemente en su notación de intervalos:

   $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Estos serán los conjuntos de mayor relevancia con los que estaremos trabajando, por lo que, en caso de que este sea el primer acercamiento que el lector tiene a estos, se recomienda que queden bien entendidos, para poder dar un avance a mayor velocidad de los temas que vienen a continuación.

Para finalizar esta sección notemos la importante relación que guardan estos conjuntos: Todo número natural es un número entero, que a su vez es un número racional, pues puede darse el caso en que $a = b$ y tendríamos $\frac{a}{a} = 1$ o el caso en que $b = 1$, entonces tendríamos $\frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$. Y al mismo tiempo, todo número racional es un número real. Por lo tanto, cualquier número natural es un número entero, racional y real. Esto visto bajo notación de lógica es:

1. $\forall x. x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x. x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Q}$
3. $\forall x. x \in \mathbb{Q} \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\forall x. x \in \mathbb{N} \rightarrow (x \in \mathbb{Z} \land x \in \mathbb{Q} \land x \in \mathbb{R})$$

Esta relación cobrará mayor sentido en la siguiente sección. Si es del interés del lector, puede intentar probar este razonamiento por reglas de inferencia para fortalecer lo visto en el capítulo anterior.

2.2 Subconjuntos

El siguiente concepto es un tanto intuitivo, pero de mucha importancia, pues como veremos en esta sección nos dará una herramienta muy fuerte con la cual trabajar para hacer un tipo de demostración en particular, la cual es la de igualdad entre conjuntos, así pues vayamos a la definición.

Definición:

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A es *subconjunto* de B (también se dice que A está contenida en B) si todos los elementos de A son, a su vez, elementos de B. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$A \subseteq B$$

Para no perder lo visto en el capítulo anterior, escribamos lo que esto significa de forma lógica:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

La negación de lo anterior nos dice que:

$$A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x. \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Es decir: $\exists x. x \in A \land x \notin B$

Analicemos los siguientes ejemplos para determinar cuáles cumplen la condición de ser un subconjunto. El resultado ya vendrá dado, sin embargo se recomienda fuertemente analizarlo para poder ir reforzando el concepto.

Ejemplos:

$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$

$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{3, 2, 5, 4, 1\}$

$\{a, e, i, o, u\} \nsubseteq \{a, e, i, f, g, h\}$

$\{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} \nsubseteq \{a, b\}$

$\{a, \{a, b\}, c, a, a, \{\{b\}\}\} \subseteq \{a, \{a, b\}, c, d, e\}$

$\{a, \{a\}\} \nsubseteq \{a\}$

$\{2, 4, 6, 8\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$

Notemos algo referente a estos ejercicios, en particular respecto al último. Veamos que los conjuntos son exactamente iguales, y cumple la contención. Por lo tanto, teniendo en mente este ejemplo, podríamos pensar que una forma de probar igualdad entre conjuntos sería si se cumple que cada uno es un subconjunto del otro. Veamos esto de una manera más formal.

Teorema:

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que $A = B$ si, y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Esto de forma lógica es:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

Demostración:

Esta será la primera demostración formal que veremos del ámbito de matemáticas sin usar explícitamente las reglas de inferencia. Lo haremos como ya se suele hacer en general. Algo importante a destacar respecto a este tipo de demostración es que siempre que se tenga una demostración de una *bicondicional* se debe realizar lo que coloquialmente le llaman una demostración de "ida y vuelta". Pues recordemos del capítulo anterior que la bicondicional es una doble implicación, motivo por el cual se debe probar que ambos lados de la implicación son verdaderos. Usualmente cuando es de bicondicional, se separa en dos partes la demostración, la parte de la ida y la parte de la vuelta. En el caso de la ida suponemos la primera parte de la bicondicional como verdadera para usarla como hipótesis y partir de ahí utilizando las reglas que sabemos válidas hasta probar lo que queremos. En el caso de la vuelta asumimos como cierta la segunda parte de la bicondicional, y esa será la hipótesis que usaremos para el desarrollo. Usualmente se señalan de la forma en que se hará a continuación:

$\rightarrow$)

Suponemos que $A = B$ (Asumimos verdadera la primera parte de la bicondicional, esta es nuestra hipótesis)

Por la definición sabemos que para que esto sea cierto debe pasar que todos los elementos de A deben estar en B y todos los elementos de B deben estar en A.
Esto, por la definición que dimos de subconjuntos es:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$\therefore A = B \rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

De esta forma ya obtuvimos la demostración de la ida. Hagamos el regreso, supongamos ahora la otra parte de la bicondicional y lleguemos a la conclusión de que $A = B$.

$\leftarrow$)

Suponemos que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (Nueva hipótesis)

Esto es:

$$(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)$$

Por la definición de la bicondicional esto se traduce en:

$$x \in A \leftrightarrow x \in B$$

Y por la definición de igualdad entre conjuntos, esto significa que:

$$A = B \qquad \blacksquare$$

El cuadrado colocado al final de la demostración indica que esta ha finalizado, algunos autores lo indican de esta manera, otros sin rellenar el cuadrado, o algunos lo indican con la abreviación “qed” o en mayúsculas “QED”, lo cual es una abreviación de una frase en latín que dice “Quod erat demonstrandum” que al español se traduce en “Lo que se quería demostrar”. La forma en la que se quiera especificar que una demostración ha concluido queda como decisión personal.

Definición:

Diremos que A es *subconjunto propio* de B si A es subconjunto de B pero A es distinto de B. Se escribe de la siguiente manera:

$$A \subset B$$

Y su interpretación lógica es la siguiente:

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$$

Lo cual significa que:

$$\exists x. x \in B \land x \notin A$$

Esto se puede interpretar de una forma similar a cuando se explica el concepto de “menor estricto” y “menor o igual”. Además de eso, es fácil relacionarlos, pues tienen una simbología similar. Podemos denotar la contención de forma general diciendo simplemente que es un subconjunto y escribiéndose con la notación de $\subseteq$, ya que este deja abierta la posibilidad de que exista la igualdad. No está mal que en realidad A sea un subconjunto propio de B y lo escribamos de la forma $A \subseteq B$. Lo que sí sería incorrecto sería que $A = B$ y escribamos $A \subset B$, pues deja fuera la posibilidad de la igualdad. Si bien para obtener la igualdad entre conjuntos hablamos de que cada uno es subconjunto del otro, es necesario escribirlo de forma que deje abierta la posibilidad a esta igualdad. Mientras que, en caso de que no sean iguales y exista la contención, no habrá ninguna diferencia entre cualquiera de las formas en las que se pueda escribir.

Veamos algunos ejemplos, en los que sí se considerará de forma estricta la nueva notación con el fin de que quede claro el concepto de subconjuntos propios.

Ejemplos:

$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

$\{3, 1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, d\}$

$\{a, e, i, o, u\} \not\subset \{a, e, i, f, g, h\}$

$\{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} \not\subset \{a, b\}$

$\{a, \{a, b\}, c, a, a, \{\{b\}\}\} \subset \{a, \{a, b\}, c, d, e\}$

$\{a, \{a\}\} \nsubseteq \{a\}$

$\{2, 4, 6, 8\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$

$\{a, \{b\}, \{a\}, a, a, \{b\}, \{a\}\} \subseteq \{a, \{b\}, \{a\}\}$

Pensemos en los conjuntos de números que se describieron anteriormente, es decir, los naturales, enteros, racionales y reales. Exhibimos previamente que cualquier número natural es, a su vez, un número entero. Con la definición revisada en esta sección podríamos ahora afirmar lo siguiente: El conjunto de los números naturales es subconjunto propio de los números enteros, pero es distinto del conjunto de los enteros. Esto es:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Lo cual hace sentido, pues cualquier número natural que consideremos es un número entero como se había mencionado anteriormente. Sin embargo podríamos pensar, por ejemplo, en el número $-1 \in \mathbb{Z}$, y veamos que $-1 \notin \mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto de los números naturales es un subconjunto propio de los enteros.

Pensemos ahora en los números enteros respecto a los racionales. Notemos que, cualquier número entero es un número racional. No obstante, podríamos encontrar un número racional que no sea un número entero. Por ejemplo $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Por lo tanto los números enteros son un subconjunto propio de los números racionales. Es decir:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

De forma análoga exponemos que los racionales son un subconjunto propio de los números reales. Los números que forman parte de los reales que no pertenecen a los racionales se llaman números irracionales, y son todos aquellos que no pueden ser expresados en forma de fracción. No los mencionamos previamente ya que para el objetivo del trabajo presentado no serán tan relevantes, más que en esta mención ya que el conjunto de los números reales se define como la unión de los números racionales con los irracionales. Algunos ejemplos de números irracionales conocidos son los números π, e, $\sqrt{2}$. Estos números no pueden ser expresados como una fracción, pero forman parte de los números reales. Por lo tanto se tiene que:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

De esta forma, presentamos una expresión interesante para analizar y con la que se espera que queden claros los conceptos de subconjuntos y subconjuntos propios:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esta es otra forma de describir lo que ya teníamos previamente (lo cual se describió mediante el lenguaje de la lógica), en el cual dijimos que cualquier número natural era a su vez un entero, que era un racional, y un real.

Teorema:

Para cualesquiera conjuntos $A,\ B,\ C$ se cumplen las siguientes propiedades:

1) $A \subseteq A$
2) $A \not\subset A$
3) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$

Demostración:

1)

Para cualquier conjunto A se tiene que $A = A$

Por tanto, por definición $A \subseteq A$

2)

En esta demostración utilizaremos el método conocido como reducción al absurdo que tanto se mencionó en el capítulo anterior. Supondremos lo contrario para llegar a una contradicción. Por lo tanto:

Supongamos que $A \subset A$

Esto significa que $\exists x. x \in A \land x \notin A$ ↯ lo cual no puede ocurrir. (El símbolo utilizado denota una contradicción)

Esta es la contradicción. Por ende, la suposición es falsa y se tiene que asumir lo contrario.

Por lo tanto, concluimos que

$$A \not\subset A$$

3)

Lo primero a resaltar de este tipo de demostraciones es que es una demostración de una implicación.. Por lo que, así como explicamos que las demostraciones de bicondicionales llevan una forma específica de realizarse en la cual se demuestra la ida y la vuelta suponiendo sus respectivas hipótesis, en este caso será algo similar, sólo que esta vez únicamente contaremos con una implicación, como si fuera únicamente la "ida". Por lo que, debemos asumir el antecedente como verdadero para ver a qué nos lleva como consecuencia.

Supongamos que:

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq C$$

Esto significa que:

$\forall x. x \in A \rightarrow x \in B$ y que $\forall x. x \in B \rightarrow x \in C$

Supongamos un elemento arbitrario que pertenezca al conjunto A

$$x \in A$$

De acuerdo a lo anterior, como A es subconjunto de B entonces:

$$x \in B$$

Y como $B \subseteq C$, entonces:

$$x \in C$$

Por lo tanto, como x fue un elemento arbitrario con $x \in A$ y se cumplió que $x \in C$, podemos afirmar que $A \subseteq C$

$\therefore$ Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$ ■

2.3 Conjunto universo

Este será un concepto interesante de analizar, pues muchas veces se pasa por alto el hecho de que existe este conjunto, a pesar de que es de suma importancia. Para explicar este concepto recordemos del capítulo anterior cuando para realizar las cuantificaciones en el cálculo predicativo mencionamos algo llamado *universo de discurso*, ya que con este, podíamos entender a qué tipo de cosas se estaba cuantificando, es decir, personas, números, animales, etc. Eso cobra más sentido en la teoría de conjuntos, pues al momento de definirlos es necesario explicar o entender bajo qué contexto se está tratando a los elementos que contenga algún conjunto. Usualmente en matemáticas hablamos de números, y lo más común es que nuestro conjunto universo vaya a ser alguno de los conjuntos de números más frecuentes que mencionamos en las secciones anteriores, sin embargo esto no es una limitante, nuestro conjunto universo podemos definirlo como sea necesario para abordar algún problema. Para intentar entender esto, analicemos la siguiente definición del conjunto de los enteros negativos:

$$\mathbb{Z}^{-} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\}$$

Vemos que antes de dar la condición estamos especificando que los elementos que serán miembros de este conjunto son números enteros, y ya después especificamos que cumplirán la condición de no ser números naturales. Por lo tanto, en este ejemplo, nuestro conjunto universo es el de los números enteros.

Debido a que la gran mayoría de las veces resulta muy intuitivo entender el conjunto universal por el contexto del que se trate casi siempre se omite la mención de este. No obstante, es importante siempre tener en mente que este conjunto existe. Además la

existencia de este conjunto será de gran importancia en las siguientes secciones cuando se introduzcan las operaciones entre conjuntos y lo que es el conjunto vacío.
Cuando este conjunto llega a ser mencionado suele utilizarse la letra "U".
Habrán muchas ocasiones en las que ni siquiera será necesario mencionar explícitamente cuál es dicho conjunto universal, y quedará de una forma general, incluso aunque no sepamos si se trata de un conjunto en el que sus elementos sean números o algo distinto. Para demostrar muchas propiedades y equivalencias entre conjuntos bastará con saber que existe este conjunto y se manipulará a conveniencia, incluso aunque no se detalle explícitamente.
Para cerrar esta breve sección, pensemos en la forma que habíamos presentado para describir conjuntos por comprensión, la cual es:

$$A = \{x \mid P(x) \text{ es verdadera }\}$$

Esto incluye a un conjunto universo, sólo que viene omitido, entonces esto se traduce en:

$$A = \{x \in U \mid P(x) \text{ es verdadera }\}$$

Como un breve ejemplo, contrastemos algo que habíamos mencionado previamente. Se mencionó precisamente como un ejemplo de descripción por comprensión el intervalo $(0, 1)$, y se hizo de la siguiente manera:

$$(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$$

Quizás muchos por conocimientos previos y que sepan lo que son los intervalos les resultó muy intuitivo este conjunto, pero hay algo que se está omitiendo ahí, lo cual es el conjunto universo, que en este caso sería:

$$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

Pues los elementos de este conjunto son números reales.
A manera de conclusión de esta breve sección, muchas veces no se mencionará este conjunto universal cuando sea intuitivo, sin embargo es importante tener conocimiento de este y tener presentes que siempre estará ahí aunque sea de forma implícita.

2.4 Conjunto vacío

El conjunto que se definirá a continuación es un conjunto muy particular, y juega un papel importante dentro de la teoría de conjuntos. Así como en la sección pasada hablábamos del conjunto universo, el cual se puede entender como el que contiene a todos los conjuntos de los que se pueda hablar dependiendo del contexto, el conjunto vacío se define como *el conjunto que **no** contiene elementos*. Su forma de escribirse matemáticamente es la siguiente:

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

De acuerdo a lo que vimos del conjunto universo, este conjunto explicado de una forma más explícita es la siguiente:

$$\emptyset = \{x \in U \mid x \neq x\}$$

La definición nos dice que los elementos que pertenecen al conjunto vacío son aquellos que cumplen la característica de ser distintos de ellos mismos, lo cual es falso para cualquier elemento, motivo por el cual no habrá ningún elemento que pertenezca a este conjunto. Por tanto, una forma un poco más entendible de definir a este conjunto es la siguiente:

$$\emptyset = \{\,\}$$

Propiedades

1. $\forall x.\, x \notin \emptyset$
2. Para cualquier conjunto A , el vacío es un subconjunto de este.
   Es decir:
   $\forall A.\ \emptyset \subseteq A$

Esta última propiedad se puede justificar de distintas maneras.

Demostración por medio de lógica y tablas de verdad:

Primero describimos lo que nos dice que el conjunto vacío sea subconjunto de un conjunto arbitrario:

$$\emptyset \subseteq A \longleftrightarrow \forall x.\, x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

Analizando la definición tenemos la implicación, y tomamos un elemento a arbitrario por medio de la especificación universal:

$$a \in \emptyset \rightarrow a \in A$$

Pero por definición del conjunto vacío no existe ningún elemento que pertenezca a este, motivo por el cual el antecedente de esta implicación es falso, y recordemos por las tablas de verdad que el único caso en que una implicación es falsa es cuando el antecedente es verdadero pero el consecuente falso, mientras que siempre que el antecedente sea falso no importa el valor de certeza del consecuente, en ambos casos la implicación será verdadera.
Por lo tanto se cumple la propiedad.

Demostración por reducción al absurdo:
Supongamos que $\emptyset \nsubseteq A$
Esto nos dice que entonces podemos exhibir un elemento x tal que:

$$x \in \emptyset \land x \notin A$$

Lo cual es imposible, puesto que el conjunto vacío no contiene ningún elemento.

∴ Concluimos que $\emptyset \subseteq A$ ■

Una forma un poco más didáctica de tratar de entender este conjunto puede ser con dos ejemplos un poco más cotidianos. Pensemos que tenemos una caja, y esta caja puede contener, por ejemplo lápices, estos serían los elementos de nuestro conjunto. Pero, si pensamos en esa misma caja y no tiene nada adentro esa sería una forma de pensar al conjunto vacío.

Un segundo ejemplo puede ser el de las bolsas. Una bolsa que contiene, por ejemplo frutas, sería un conjunto cuyos elementos serían esas frutas. Sin embargo, puede darse el caso en el que esa bolsa no contenga nada, y esa es otra manera de pensar al conjunto vacío. Hay algo en donde se pueden almacenar ciertos objetos, pero no contiene nada.

Más adelante, cuando se hable del conjunto potencia, se retomarán estos ejemplos de las bolsas y las cajas para entender mejor el funcionamiento de este conjunto que sí tendrá mucha importancia tanto en este texto como en otras áreas de matemáticas y de matemáticas aplicadas, pues también es relevante para definir ciertos conceptos de probabilidad y estadística.

2.5 Operaciones con conjuntos

Se abordarán seis puntos diferentes en esta sección dando a conocer las operaciones más comunes entre conjuntos. Claramente existirán más, no obstante, todas pueden ir derivando de las que se definirán a continuación. Además, se presentan muchas equivalencias entre expresiones de operaciones pero vistas de otra manera, lo cual facilitará mucho las cosas al momento de las demostraciones, pues muchas de estas se tratarán de conocer bien las definiciones básicas e irlas modificando.

2.5.1 Unión

Definición:

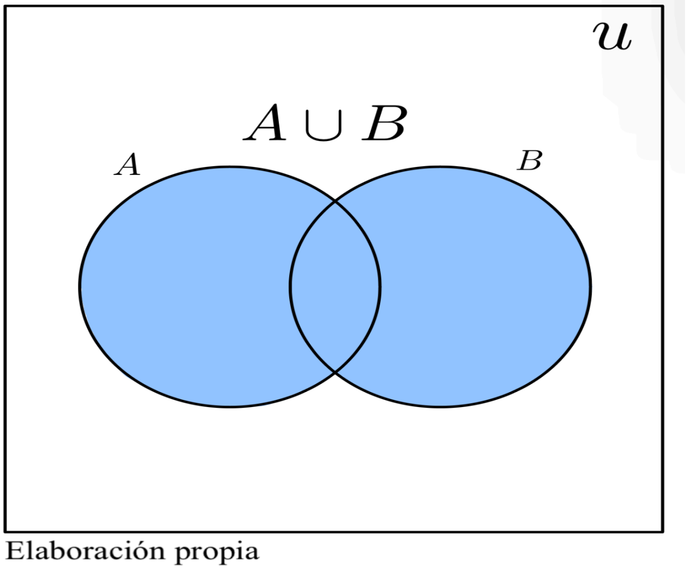
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. La *unión* de estos conjuntos se expresa de la siguiente manera:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Como podemos ver en la definición, la operación de unión entre dos conjuntos va muy de la mano con lo que es la disyunción en lógica. Presentamos a continuación un *diagrama de Venn* con la intención de ver esto de manera visual:

Diagrama 1

Diagrama de Venn de la unión de dos conjuntos A y B.



Elaboración propia

La parte sombreada es la que representa al conjunto $A \cup B$ y notemos que, estos dos conjuntos representados por círculos están dentro de un rectángulo, el cual representa a nuestro conjunto universo implícito. Los diagramas de Venn son sumamente útiles para entender mejor lo que nos están diciendo las operaciones de conjuntos.

Veamos ahora algunos ejemplos de esta operación:

Ejemplo 2.5.1

Sean:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Esto es, que si preguntamos por algún elemento que pertenezca al conjunto $A \cup B$, este puede ser elemento tanto de A como de B , o de ambos, como en este ejemplo es el caso del número 3. Pensemos que hace mucho sentido dada la forma en la que definimos a la disyunción. Puede que una de las proposiciones sea verdadera (que el elemento pertenezca al conjunto A o al conjunto B), o que las dos lo sean y pertenezca a ambos.

Ejemplo 2.5.2

Habíamos definido previamente al conjunto de los enteros negativos como:

$$\mathbb{Z}^{-} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\}$$

Ahora, con la definición de la unión, podemos redefinir al conjunto de los números enteros, ya que previamente los describimos como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \ -1, -2, 0, 1, 2, \dots\}$$

Sin embargo, otra forma de describirlos sería la siguiente:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \mathbb{N}$$

Una observación importante respecto a esta operación es que cumple la propiedad conmutativa, esto es:

$$A \cup B = B \cup A$$

Revisemos el enunciado negativo de esta operación por medio de lógica:

$$x \notin A \cup B \longleftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)$$
$$\longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

Entonces, cuando un elemento no pertenece a la unión de dos conjuntos eso se traduce como que no pertenece a ninguno de estos.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, lo que significa que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^{-} \wedge \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

Propiedades de la unión

1. $A \cup A = A$

   Esto es:

   1. $x \in A \vee x \in A$

   $x \in A$ S:1

2. $A \cup U = U$

   Esto es inmediato. Se invita al lector a realizar la demostración.

3. $A \cup \emptyset = A$

   Nuevamente, esto es inmediato. Se invita al lector a realizar la demostración.

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   Demostración:

   Recordemos que para probar igualdades utilizamos el método de doble contención, es decir, tomamos un elemento arbitrario en cada uno de los lados de la igualdad para probar que es subconjunto del lado contrario. Al probar que ambos son subconjuntos del otro estamos probando que son iguales.

   Sea $x \in A \cup (B \cup C)$

   $\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$

   $\Rightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$\therefore A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

La demostración de la segunda contención se hace de manera análoga, por lo que, se invita al lector a intentarla, de tal forma que pueda ir practicando este tipo de demostraciones que no tienen un alto nivel de dificultad. Esta propiedad se conoce como *propiedad asociativa*.

5. $A \subseteq (A \cup B)$ y $B \subseteq A \cup B$

   Demostración:

   Sea $x \in A$

   $\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

   $\Rightarrow x \in (A \cup B)$

   $\therefore A \subseteq (A \cup B)$

   Ahora, sea $x \in B$

   $\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

   $\Rightarrow x \in (A \cup B)$

   $\therefore B \subseteq (A \cup B)$ ■

2.5.2 Intersección

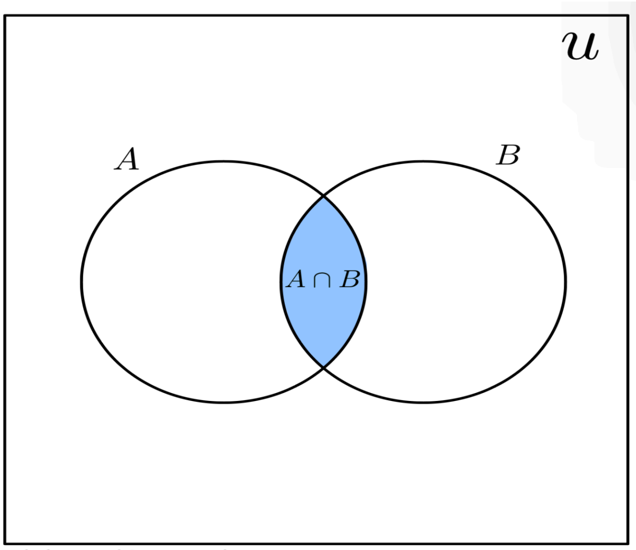
Definición:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. La *intersección* de estos conjuntos se expresa de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

De manera similar a la unión, la operación de intersección entre dos conjuntos va muy de la mano con lo que es la conjunción en lógica. Para que un elemento pertenezca a la intersección no basta con que se encuentre sólo en uno de los dos conjuntos, forzosamente debe pertenecer a ambos. Presentamos a continuación el diagrama de Venn para visualizar este conjunto:

Diagrama 2
Diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos A y B.



Elaboración propia

Una forma sencilla y rápida de poner un ejemplo para este diagrama sería pensar en nuestro conjunto universo como el conjunto de todos los medios de transporte. Podríamos entonces considerar a A como el conjunto de los medios de transporte que son automóviles. Mientras que el conjunto B puede representar a los medios de transporte que sean color azul. Por lo que los elementos que van a pertenecer a $A \cap B$ serán todos los automóviles que sean de color azul.

Ejemplo 2.5.3

Sean

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 5, 7\}$

$C = \{a, b, c\}$

$D = \{e, f, g\}$

$A \cap B = \{3\}$

$C \cap D = \{\ \}$, o lo que es lo mismo $C \cap D = \emptyset$

Ejemplo 2.5.4

Si definimos el conjunto

$$\mathbb{N}^{-} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -x \in \mathbb{N}\}$$

Entonces

$$\mathbb{N}^{-} \cap \mathbb{N} = \{0\}$$

Ejemplo 2.5.5

Si definimos el conjunto

$$\mathbb{Z}^{+} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$$

Entonces

$$\mathbb{Z}^{+} \cap \mathbb{Z}^{-} = \emptyset$$

El enunciado negativo de la intersección queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x \notin A \cap B &\longleftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\longleftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \end{aligned}$$

Por tanto, si un elemento no pertenece a la intersección de dos conjuntos puede ser que no se sea miembro de alguno de los dos o de ninguno.

Propiedades de la intersección

1. $A \cap A = A$

   Esto es:

   $$\frac{1.\ x \in A \wedge x \in A}{x \in A \qquad \text{S:1}}$$

2. $A \cap B = B \cap A$ (Propiedad conmutativa)

   Esto es inmediato. Se invita al lector a realizar la prueba.

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Propiedad asociativa)

   Demostración:

   Recordemos que para probar igualdades debemos probar la doble contención, por lo tanto supondremos un elemento arbitrario dentro de alguno de los conjuntos para probar que pertenece al otro, y hacemos lo mismo con el segundo conjunto. Si probamos la doble contención, habremos probado la igualdad.

Sea $x \in (A \cap B) \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$

Podemos reagrupar simplemente de una manera más conveniente:

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

La segunda contención se hace de manera análoga a esta, es prácticamente igual, se invita al lector a que lo compruebe para que de igual forma pueda practicar.

4. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$

   Demostración:

   Sea $x \in A \cap B$

   $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

   En particular, vemos que $x \in A$

   $\Rightarrow A \cap B \subseteq A$

   También vemos que, en particular, $x \in B$

   $\therefore A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ ∎

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Demostración:

   Sea $x \in A \cap (B \cup C)$

   $\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

   Si $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

   Si $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$

   Esto que se hizo se llama dividir por casos, lo cual también es frecuente en algunas demostraciones matemáticas. Como son dos casos distintos, lo expresamos por medio de la unión.

   $\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $\therefore A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Ahora supongamos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

En ambos casos $x \in A$, por lo que es el conjunto en el cual tenemos garantizado que estará el elemento, y sabemos que estará en alguno de los otros dos, pero no con precisión en cuál.

$\Rightarrow x \in A \land (x \in B \lor x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ■

6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostración:

$\subseteq$) (Este símbolo se pone como en las demostraciones de ida y vuelta para indicar que es la primera parte de la demostración, i.e. la primera contención)

Sea $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$

Haremos nuevamente los dos casos, puesto que es una unión, y veamos qué pasa cuando nuestro elemento arbitrario pertenece a cualquiera de los dos conjuntos.

1) Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \land x \in A \cup C$

Esto porque ya no importa realmente si $x \in B$ o si $x \in C$, ya que el enunciado será verdadero por el simple hecho de que $x \in A$

2) Ahora, si $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in B \land x \in C$

No sabemos si el elemento pertenece al conjunto A, por lo que podemos mantener nuestro enunciado de la siguiente manera:

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \land x \in (A \cup C)$

En tal caso de que $x \notin A$, esto seguirá siendo verdadero.

Como en ambos casos llegamos al mismo resultado podemos entonces garantizar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\supseteq$)

Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$

Trabajemos los distintos casos:

1) Si $x \notin A$, para que la conjunción se cumpla entonces forzosamente debe ocurrir que $x \in B \wedge x \in C$. Por lo tanto, es verdadero el enunciado $(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$

2) Si $x \notin B$, debe ocurrir forzosamente que $x \in A$, motivo por el cual ya no importa realmente si $x \in C$, por lo que es verdadero el enunciado $(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$.

3) Si $x \notin C$, debe ocurrir forzosamente que $x \in A$, motivo por el cual ya no importa realmente si $x \in B$, por lo que es verdadero el enunciado $(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$.

En los tres casos llegamos al mismo resultado, por lo tanto:

$(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ■

Para reforzar todas estas propiedades se recomienda fuertemente que se dibujen correctamente en un diagrama de Venn y ver que coinciden al ser representadas como cualquiera de las dos opciones. Estas propiedades pueden ser de mucha utilidad para otro tipo de demostraciones y para la representación de algunos problemas en general en matemáticas.

2.5.3 Diferencia, complemento y leyes de DeMorgan

Definición (diferencia):

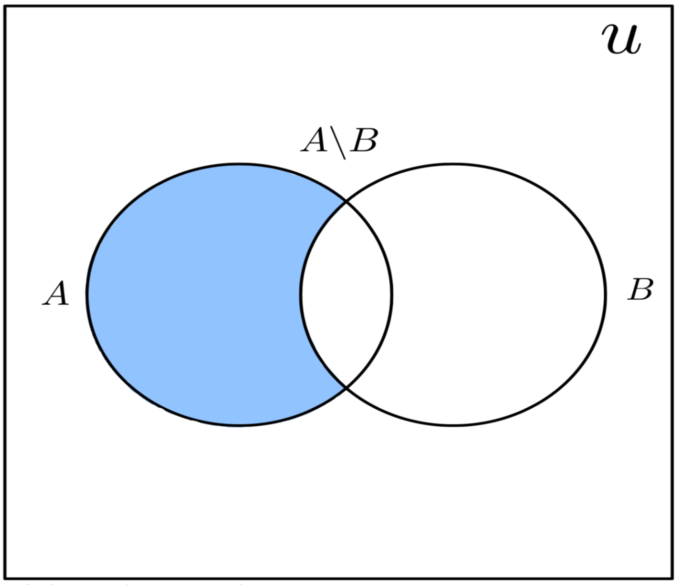
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. La *diferencia entre A y B* de estos conjuntos se expresa de la siguiente manera:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Veamos a continuación la visualización de este conjunto en un diagrama de Venn:

Diagrama 3.

Diagrama de Venn de la diferencia entre dos conjuntos A y B



Elaboración propia

Ejemplo 2.5.6

Sean

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{3, 4, 5\}$

$A\setminus B = \{1\}$

$A\setminus C = \{1, 2\}$

$B\setminus A = \{4\}$

$B\setminus C = \{2\}$

$C\setminus A = \{4, 5\}$

$C\setminus B = \{5\}$

Ejemplo 2.5.7

Habíamos expresado previamente los siguientes conjuntos de esta manera:

$$\mathbb{Z}^{-} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin \mathbb{N}\}$$

y

$$\mathbb{Z}^{+} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$$

Podemos reescribir estos dos conjuntos por medio del operador de diferencia de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z}^{-} = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$$

y

$$\mathbb{Z}^{+} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

De igual forma podemos definir al conjunto de los números naturales de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}^{-} = \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$$

Como podemos ver hay muchas formas distintas de expresar a los conjuntos por medio de distintos operadores, y el hecho de saber expresarlas de formas tan variadas puede ayudarnos mucho al momento de querer probar otras propiedades.

Definición (complemento):

Sea A un conjunto cualquiera dentro de un conjunto universal. Definimos el *complemento de A* como:

$$A^{C} = \{x \mid x \notin A\}$$

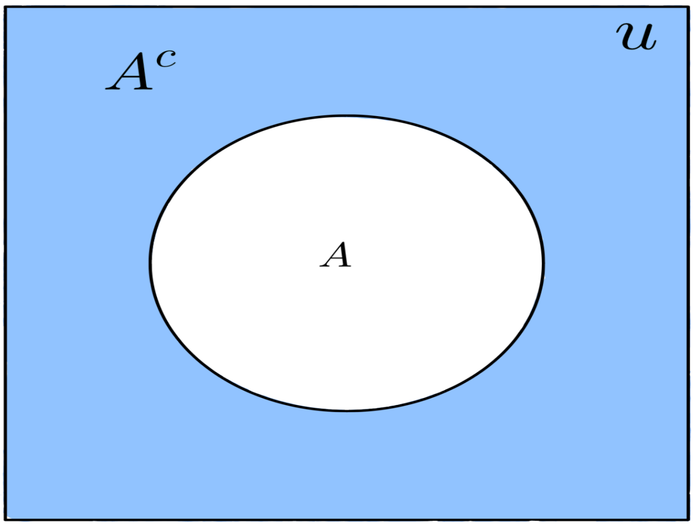
Esta expresión tiene varias equivalencias sencillas de comprobar:

$$A^{C} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U\backslash A$$

Veamos esto en un diagrama de Venn:

Diagrama 4

Diagrama de Venn del complemento de un conjunto A



Elaboración propia

Ejemplo 2.5.8

Sean

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$\Rightarrow A^C = \{1, 3, 5\}$

Ejemplo 2.5.9

Podemos expresar algunos de los distintos conjuntos que hemos definido previamente por medio de este operador:

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{N}^C \quad (\text{con } U = \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{N} = (\mathbb{Z}^-)^C \ (\text{con } U = \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}^C (\text{con } U = \mathbb{R})$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}^C \cup \mathbb{I}^C = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} \ (\text{con } U = \mathbb{R})$$

Ejemplo 2.5.10

Sean

$U = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

$A = (0, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow A^C = [\frac{1}{2}, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1\}$

}

Definición (leyes de DeMorgan):

Las *leyes de DeMorgan* vistas en el capítulo anterior tienen su equivalencia en teoría de conjuntos de dos formas, lo cual hace mucho sentido, pues hemos mencionado previamente que el operador de la unión es lo equivalente a la disyunción en lógica matemática, mientras que el operador de la intersección es el equivalente a la conjunción. Por lo tanto, presentamos a continuación las leyes de DeMorgan aplicadas en esta área:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Propiedades:

1. $(A^C)^C = A$
2. $A \cup A^C = U$
3. $A \cap A^C = \emptyset$

Referente a las negaciones tenemos las siguientes igualdades que serán demostradas:

4. $A \backslash B = A \cap B^C$

   Demostración:

$x \in A \backslash B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	Por definición de diferencia de conjuntos
$x \notin B \leftrightarrow x \in B^C$	Por definición de complemento
$x \in A \backslash B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C$	Por sustitución de lo anterior
$x \in A \backslash B \leftrightarrow x \in A \cap B^C$	Por definición de intersección

   $\therefore A \backslash B = A \cap B^C$ ∎

5. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

   Demostración:

$A \backslash (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^C$	Por la demostración de la propiedad 4
$= A \cap (B^C \cap C^C)$	Por leyes de DeMorgan
$= (A \cap B^C) \cap (A \cap C^{C)}$	Reagrupación de la intersección
$= (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$	Por propiedad 4

   $\therefore A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ ∎

6. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

   Demostración:

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^C && \text{Por propiedad 4} \\ &= A \cap (B^C \cup C^C) && \text{Por leyes de DeMorgan} \\ &= (A \cap B^C) \cup (A \cap C^C) && \text{Distribución de la intersección} \\ &= (A \backslash B) \cup (A \backslash C) && \text{Por definición de diferencia de conjuntos} \end{aligned}$$

$\therefore A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ ■

Teorema:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si $B \subseteq A$, entonces se cumple que $A^C \subseteq B^C$

Demostración:

Por definición $B \subseteq A \leftrightarrow \forall x. x \in B \rightarrow x \in A$

Haciendo uso del Modus Tollendo Tollens (TT) de lógica, lo transformamos en lo equivalente en teoría de conjuntos y le daremos el nombre de *contraposición*. Esto es que si $P \rightarrow Q$, tendremos de forma equivalente que $\neg Q \rightarrow \neg P$. Esto se justifica como sigue:

1. $P \rightarrow Q$		
2.	$\neg Q$	**P***
3.	$\neg P$	TT: 1,2
$\neg Q \rightarrow \neg P$		RP: 2-3

Por lo tanto, haciendo uso de esta regla tenemos que:

$$\forall x. x \notin A \rightarrow x \notin B$$

Entonces

$B \subseteq A \leftrightarrow \forall x. x \notin A \rightarrow x \notin B$

Lo que se traduce en

$B \subseteq A \leftrightarrow \forall x. x \in A^C \rightarrow x \in B^C$

Finalmente, por definición de subconjuntos:

Si $B \subseteq A$, entonces se cumple que $A^C \subseteq B^C$ ■

Con esto finalizamos esta sección, es muy importante poner especial atención en las formas en las que se van realizando las demostraciones, pues se pueden hacer siempre de formas distintas, pero hay casos en donde conviene más realizarlas de cierta manera en específico que de otra. Por lo cual, se trata de ir especificando paso a paso lo que va ocurriendo detrás de ellas. No obstante, se recomienda que conforme se vayan presentando estas el lector trate de replicarlas, con el fin de ir practicando e ir interiorizando cada vez más estas formas para que se vaya formando una base sólida de los conocimientos.

2.6 Conjunto potencia

Sea A un conjunto cualquiera. Definimos el *conjunto potencia de A* como el conjunto:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

En palabras, esto es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de A. Notemos que en este conjunto en particular sus elementos serán conjuntos en sí mismos. Es por eso que en la notación de la definición se describió al elemento que pertenece a la potencia en mayúsculas.

Algo importante por mencionar es que previamente habíamos establecido que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, motivo por el cual el conjunto vacío siempre será elemento de la potencia de cualquier conjunto. De igual forma, cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Ejemplo 2.6.1

Sean

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a\}$

$C = \{\{a\}\}$

$D = \emptyset$

$E = \{\emptyset\}$

$F = \{\{\emptyset\}\}$

$G = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P}(B) = \{ \{a\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P}(C) = \{ \{\{a\}\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P}(D) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(F) = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

$\mathcal{P}(G) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \}$

Revisemos los últimos incisos de este ejercicio, ya que trabajar con las potencias del vacío puede ser algo confuso muchas veces. Se mencionó previamente cuando definimos al conjunto vacío un ejemplo con bolsas o cajas, especificando que estos eran lugares en los que se pueden almacenar objetos, sin embargo no contienen nada. Para tratar de diferenciar entre $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset\}$ y $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}\}$ pensemos en lo siguiente:
En el caso de tener simplemente $\emptyset$, es como si tuviéramos esa bolsa que no contiene nada, pero en el caso de$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ es como si tuviéramos una bolsa dentro de otra, ambas sin ningún objeto dentro. Esto es un ejemplo muy cotidiano, pues se da muy frecuentemente el caso de que en los hogares se cuente con una bolsa de plástico o tela para almacenar dentro de ellas otras bolsas sin nada dentro. Esto es lo que nos está diciendo el caso del conjunto $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Si quisiéramos verlo más allá, podríamos definir $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}\}$, pues en este caso es como si tuviéramos una bolsa dentro de otra, dentro de otra. Puede ser algo confuso, pero quizás con este ejemplo un tanto más cotidiano pueda aterrizarse mejor este concepto.

Algo importante a destacar y que nos puede ayudar a decirnos si vamos por buen camino al momento de calcular la potencia de algún conjunto es la fórmula para saber cuántos elementos debe contener el conjunto potencia. Previo a eso daremos una breve definición.

Definición (cardinalidad de un conjunto):
Se define como la *cardinalidad de un conjunto* al número de elementos que este tendrá, se suele denotar de dos maneras:

$$|A| \text{ o } \#A$$

Esta definición puede extenderse mucho más, pues forma parte de muchos conceptos importantes en matemáticas, pero por ahora bastará con esta definición sencilla y unos ejemplos cortos.

Ejemplo 2.6.2
Sean
$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{1, 2, \ldots, 25\}$

Entonces, tenemos los siguientes resultados:

$\#A = 4$

$\#B = 25$

$\#(A \cup B) = 29$

$\#(A \cap B) = 0$

En otras palabras, simplemente es contar el número de elementos cuando esto sea posible.

Se presentó la definición de la cardinalidad de un conjunto con el objetivo de presentar un resultado sencillo de comprender para saber que uno va por buen camino al momento de calcular la potencia de un conjunto, pues la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto A es la siguiente:

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\mathbf{\Omega}}$$

Donde en este caso $\mathbf{\Omega}$ representa la cardinalidad de A. Lo cual se cumple en los ejemplos previos que hemos realizado, pues veamos el caso en que $A = \{1, 2, 3\}$ y teníamos que:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$$

Notamos que

$$\#A = 3 = \mathbf{\Omega}$$

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{3} = 8$$

Cabe recalcar que, el único conjunto para el cual no aplicará esto es el conjunto vacío, este será el único conjunto que será la excepción.

Propiedades:

Sean A y B conjuntos. Entonces se cumple que:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

Demostración:

Sea X un conjunto cualquiera

$$\begin{aligned} X \in [\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)] &\leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \land X \in \mathcal{P}(B) \\ &\leftrightarrow X \subseteq A \land X \subseteq B \\ &\leftrightarrow X \subseteq A \cap B \end{aligned}$$

$\leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

$\therefore \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ ■

Teorema:

Sean A y B conjuntos. Entonces se cumple que:

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ pero no necesariamente $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Demostración:

Esta es una demostración que se debe hacer en dos partes, y cada una se hará de forma distinta. Comenzamos con la primera, la cual se hará de la forma que ya hemos trabajado anteriormente.

Sea X un conjunto cualquiera

$X \in [\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\therefore \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Para la segunda parte haremos algo que se conoce como método del *contraejemplo*. Este consiste en que tomamos un caso particular en el que exhibimos que no se cumple la propiedad que se desea probar, para que con eso se demuestre que es falsa, pues una propiedad se debe cumplir para cualquier elemento dadas sus respectivas restricciones, y es por eso que cuando queremos probar algo lo hacemos con términos arbitrarios y lo dejamos descrito de forma general, ya que pueden darse casos en los que se cumpla para ciertos números u objetos en particular, pero no necesariamente para todos. Es por eso que el método del contraejemplo es muy efectivo, pues si existe al menos un caso en particular que no cumpla con esto, significa que la propiedad propuesta es falsa.

Procedemos entonces por contraejemplo.

Sean

$A = \{1, 2\}$

$B = \{4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 4\}$

Previo a realizar los cálculos notemos algo importante:

$\#A = 2 \Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 4$

$\#B = 1 \Rightarrow \#\mathcal{P}(B) = 2$

$\#(A \cup B) = 3 \Rightarrow \#\mathcal{P}(A \cup B) = 8$

Veamos que $A \cap B = \emptyset$, entonces al momento de hacer la unión de sus potencias no habrán elementos en común más que el vacío, motivo por el cual tendremos que:

$\#[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] = 5$

Desde aquí podemos observar que tendrán cardinalidades distintas, lo cual es un fuerte indicador de que no se dará la contención. De cualquier manera, continuemos con los cálculos para hacerlo más evidente.

Entonces:

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\} \cup \{4, \emptyset\} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{4\}, \emptyset\}$

$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \emptyset\}$

Podemos encontrar, por ejemplo al conjunto

$\{1, 2, 4\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge \{1, 2, 4\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Es decir:

$\exists X. X \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

$\therefore \mathcal{P}(A \cup B) \nsubseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Sí pueden presentarse casos en donde esta contención se cumpla, mas no es una regla general como la otra contención, pues notemos que el hecho de que $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ no implica necesariamente que $X \subseteq A \vee X \subseteq B$, pues puede ser simplemente que sea un subconjunto producido por la unión, no porque sea subconjunto de alguno de los originales, lo cual podría haber sido una forma alternativa de realizar la demostración, pero consideramos que sería más claro con el contraejemplo, además de dar el acercamiento a este método de demostración que puede resultar tan útil. ■

Teorema:

Sean A y B conjuntos. Entonces se cumple que:

Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Demostración:

Tenemos por hipótesis que $A \subseteq B$

Sea $X \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow\ X \subseteq A \subseteq B$ Por definición de potencia de un conjunto y la hipótesis

$\Rightarrow\ X \subseteq B$ Por transitividad

$\Rightarrow\ X \in \mathcal{P}(B)$ Por definición de potencia de un conjunto

$\Rightarrow\ \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

$\therefore$ Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ∎

2.7 Producto cartesiano

Veremos en esta sección un par de conceptos muy importantes en la teoría de conjuntos, junto con algunas propiedades y sus respectivas demostraciones.

Como un pequeño preámbulo, establecimos previamente que no importa el orden en que se definan los elementos de un conjunto, es decir $\{a, b\} = \{b, a\}$. Pero habrá ocasiones en las que sí nos puede resultar de interés el que exista un orden. Pensemos simplemente en el plano cartesiano, una gráfica de dos dimensiones. No es lo mismo graficar el punto $(1, 2)$, que el punto $(2, 1)$. Entonces, buscamos una definición que nos brinde un orden específico de dos elementos, en los cuales es importante distinguir quién va primero y quién va segundo. Por lo tanto, resulta de interés la siguiente definición.

Definición (pareja ordenada):

Sean a, b cualesquiera elementos de algún conjunto. Definimos la *pareja ordenada* o *par ordenado* como:

$$(a, b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

Es una definición un tanto extraña para lo que hemos trabajado previamente, y no resulta intuitiva. Por muchos años se buscó una definición “conjuntista”, pues la definición de pareja ordenada es muy usual en el cálculo, pero no se tenía de forma que pudiera quedar incluida en la teoría de conjuntos, y fue finalmente introducida a esta en el siglo XX por Kuratowski y Winner alrededor de los 30’s.

Para esclarecer un poco más este concepto veamos dos ejemplos para entender por qué es que esta definición cumple con mantener el orden y hacer una distinción entre dos parejas ordenadas que podrían parecer iguales si se definieran como elementos de un conjunto.

Ejemplo 2.7.1

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

Ejemplo 2.7.2

Si $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$

Pensemos en el ejemplo que ya habíamos mencionado previamente:

$(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (2, 1)$

Vemos entonces que son distintos estos conjuntos, por lo tanto esta será la definición que se le dará respecto a la teoría de conjuntos y la que usaremos para demostrar algunas propiedades y teoremas.

Teorema:

Sean a, b, c, d elementos cualesquiera. Entonces:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Demostración:

Por ser una demostración de un "si, y sólo si" se debe hacer la "ida y vuelta".

$\rightarrow$)

Suponemos que $(a, b) = (c, d)$

Vamos a distinguir dos casos, pues lo único que puede pasar es que $a = b \vee a \neq b$

Caso 1 ($a = b$)

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d)$$

Como $a = b$

$$(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d)$$
$$\Rightarrow \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Vemos que tenemos una igualdad entre conjuntos en el cual el del lado izquierdo contiene sólo un elemento, mientras que el del lado derecho contiene dos elementos. La única manera de que esto ocurra es si $c = d$, para que entonces:

$$\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{c\}, \{c, c\}\} = \{\{c\}, \{c, c\}\} = \{\{c\}\}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$$

Para que esto ocurra, forzosamente debe pasar que:

$$a = c$$

Y teníamos previamente que $c = d$ y que $a = b$, por lo que:

$$a = b = c = d$$

En particular, tenemos

$$a = c \text{ y } b = d$$

Caso 2 ($a \neq b$)

Tenemos

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = (c, d)$

Como $a \neq b$, veremos qué condiciones se deben cumplir para que se presente la igualdad

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Como se presenta la igualdad entre conjuntos eso significa que:

$$\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Para esto sólo hay dos posibilidades:

$$\{a, b\} = \{c\} \vee \{a, b\} = \{c, d\}$$

Como $a \neq b$ tenemos entonces que $\{a, b\}$ es un conjunto de dos elementos, por lo que $\{a, b\} \neq \{c\}$, pues la única forma en que eso ocurriría sería si $a = c = b$, pero eso contradice la hipótesis inicial, motivo por el cual:

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

Esto a su vez implica que $c \neq d$, ya que de forma contraria, nuevamente caeríamos en el caso en que $a = b$.

De igual manera, tenemos que

$$\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Y como $c \neq d$, el único caso posible es que

$$\{a\} = \{c\}$$

Lo que se traduce en:

$$a = c$$

Finalmente, como $\{a, b\} = \{c, d\}$ y $a = c$ y $a \neq b$, tenemos que la única forma en que se de esa igualdad es si $b = d$

$\therefore$ Si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$.

$\leftarrow$)

Esto es inmediato, es simplemente sustituir. ■

Habiendo definido lo que es una pareja ordenada pasamos al segundo concepto importante de esta sección.

Definición (producto cartesiano):

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se define el *producto cartesiano* como el conjunto:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Es decir, para que una pareja ordenada (a, b) pertenezca a este conjunto (el cual se lee como "A cruz B"), debe presentarse la siguiente equivalencia lógica:

$$(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$$

Vemos el equivalente de su negación:

$$(a, b) \notin A \times B \Leftrightarrow a \notin A \vee b \notin B$$

Ejemplo 2.7.3

Sean

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b\}$

$A \times B = \{ (1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b) \}$

$B \times A = \{ (a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3) \}$

$A \times A = \{ (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3) \}$

$B \times B = \{ (a, a),\ (a, b),\ (b, a),\ (b, b) \}$

Con este ejemplo es fácil ver que no se cumple la propiedad conmutativa para esta operación, es decir $A \times B \neq B \times A$, a menos que se presente el caso en que $A = B$.

Ejemplo 2.7.4

Consideremos a los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Podemos definir distintos productos cartesianos entre ellos. Por ejemplo:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

Y veamos que:

$(1, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

$(-\ 4, -\ 3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

$(\frac{1}{2}, 5) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

$(\frac{1}{2}, 5) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

$(3, \pi) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

$(3, 0.6) = (3, \frac{3}{5}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

De esta manera podemos ir formando muchas parejas ordenadas distintas y ver si pertenecen o no al producto cartesiano definido previamente.

Ejemplo 2.7.5

Hay un producto cartesiano que nos resultará de particular interés en las matemáticas:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

A este producto cartesiano lo llamaremos $\mathbb{R}^2$, y es conocido usualmente como el *plano cartesiano*. Teniendo en cuenta las definiciones que hemos establecido de un producto cartesiano hace mucho sentido pensar en este caso en particular.

Teorema:

Sean a, b, c, d elementos cualesquiera. Entonces:

$$A \times B = \emptyset \text{ si, y sólo si } A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

Demostración:

$\rightarrow$)

Supongamos que $A \times B = \emptyset$

Y supongamos que $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

Eso significa que:

$$\exists a. \exists b. a \in A \wedge b \in B \text{ de forma que } (a, b) \in A \times B \qquad ↯$$

Esto contradice nuestra hipótesis inicial que especifica que $A \times B = \emptyset$, es decir no contiene elementos, por lo tanto:

$$\neg(A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$$

Que por leyes de DeMorgan se traduce en:

$$\neg(A \neq \emptyset) \vee \neg(B \neq \emptyset)$$

Por doble negación esto finalmente es:

$$A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

$\leftarrow$)

Supongamos ahora que $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Si $(a, b) \in A \times B$ debe ocurrir forzosamente que $a \in A \wedge b \in B$ ↯

Esto contradice la hipótesis inicial, ya que al menos uno de los dos conjuntos debe de ser vacío.

$\therefore \nexists (a, b)$ tal que si $A = \emptyset \vee B = \emptyset$ entonces $(a, b) \in A \times B$

Es decir:

$$A \times B = \emptyset$$

$\therefore A \times B = \emptyset$ si, y sólo si $A = \emptyset \vee B = \emptyset$ ∎

Teorema:

Sean $A,\ B,\ C,\ D$ conjuntos no vacíos. $A \times B = C \times D$ si, y sólo si $A = C$ y $B = D$

Demostración:

$\rightarrow$)

Supongamos que $A \times B = C \times D$

Sean $a \in A \wedge b \in B$ arbitrarios.

$\Rightarrow (a, b) \in A \times B$

Y como $A \times B = C \times D$

$\Rightarrow (a, b) \in C \times D$

$\Rightarrow a \in C \wedge b \in D$

$\Rightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$

De manera análoga se demuestra que $(C \subseteq A) \wedge (D \subseteq B)$ para probar su igualdad.

$\therefore A = C$ y $B = D$.

$\leftarrow$)

Es inmediato, basta con hacer una sustitución. ■

Teorema:

Para cualesquiera conjuntos A, B, C se cumple que:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Demostración:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   $\subseteq$)

   Sea $(a, b) \in A \times (B \cup C)$

   $\Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C)$

   $\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C)$

   Caso 1

   Si $b \in B \Rightarrow (a, b) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

   Caso 2

   Si $b \in C \Rightarrow (a, b) \in A \times C \Rightarrow (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

   En ambos casos $(a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

   Por lo tanto queda demostrada la primera contención.

   $\supseteq$)

Sea $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$\Rightarrow [(a,b) \in A \times B] \vee [(a,b) \in A \times C)]$

$\Rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C)$

Caso 1

Si $(a,b) \in A \times B$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C) \Rightarrow (a,b) \in A \times (B \cup C)$

Caso 2

Si $(a,b) \in A \times C$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in C \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C) \Rightarrow (a,b) \in A \times (B \cup C)$

En ambos casos $(a,b) \in A \times (B \cup C)$

Quedan demostradas ambas contenciones.

$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ∎

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$\subseteq$)

Sea $(a,b) \in A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \in A \times C$

$\Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\supseteq$)

Sea $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \in A \times C$

$\Rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times (B \cap C)$

$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ∎

3. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

$\subseteq$)

Sea $(a,b) \in A \times (B \setminus C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \setminus C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \notin C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \notin A \times C$

$\Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

$\supseteq$)

Sea $(a,b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \notin A \times C$

$\Rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \notin C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \notin C)$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \setminus C)$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times (B \setminus C)$

$\therefore A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ∎

2.8 Relaciones

Esta sección será un importante preámbulo para el tema de funciones, pues como veremos en la siguiente sección, las funciones son relaciones que cumplen ciertas características, que para entenderlas es importante primero establecer ciertos conceptos y ejemplos con la idea de que las funciones puedan quedar lo más claras posibles, pues estas son uno de los temas más relevantes en todos los ámbitos de las matemáticas, y es utilizada en casi todas sus ramas, empezando por el cálculo infinitesimal. Así pues, veamos las siguientes definiciones.

Definición (Relación):

Sean A y B dos conjuntos. Una *relación definida de A en B* es un subconjunto *R* del conjunto $A \times B$. Es decir:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$, entonces *R* es una relación definida en A.

$$R \subseteq A \times A$$

Si $(a, b) \in R$, decimos que a está relacionado con b a través de R, y utilizamos ya sea la notación relacional ${}_{a}R_{b}$ o la notación funcional $R(a, b)$. En este trabajo usaremos exclusivamente la notación funcional.

Puede ser una definición un tanto extraña de principio, pero veremos algunos ejemplos para que se entienda con mayor claridad a qué se refiere este concepto y la utilidad que tiene.

Ejemplo 2.8.1

Consideremos al conjunto $\mathbb{Z}^{-}$. Y definimos la siguiente relación que va de $\mathbb{Z}^{-}$ en $\mathbb{Z}^{-}$, es decir una relación definida en $\mathbb{Z}^{-}$:

$$R = \{ (a, b) \mid a = b - 3,\ a, b \in \mathbb{Z}^{-} \}$$

Primero notemos que $R \subseteq \mathbb{Z}^{-} \times \mathbb{Z}^{-}$, pues ambos elementos de la pareja ordenada pertenecen a este conjunto. Ahora veamos algunos ejemplos de parejas ordenadas que pueden o no pertenecer a esta relación:

$(-4, -1) \in R$

$(2, -1) \notin R$

$(-5, -2) \in R$

$(21, 24) \notin R$

Estas pertenencias se dan dependiendo de si cumplen con la condición establecida en la relación.

Para un conjunto cualquiera A, definimos la *relación identidad en A* como:

$$\mathbb{1}_A = \{ (a, b) \in A \times A \mid a = b\}$$

Es decir:

$(1, 1) \in \mathbb{1}_A$

$(0, 0) \in \mathbb{1}_A$

$(1, 2) \notin \mathbb{1}_A$

Y definimos una relación un tanto peculiar: la *relación vacía*

$$\emptyset \subseteq A \times B$$

Hemos demostrado anteriormente que el vacío es subconjunto de cualquier conjunto, motivo por el cual también es una relación, puesto que es subconjunto en particular del conjunto $A \times B$.

Definición (dominio e imagen):

Sea R una relación de A en B, i.e., $R \subseteq A \times B$.

El *dominio* de R es el siguiente conjunto:

$$Dom(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B.\ (x, y) \in R\}$$

La *imagen* de R es el siguiente conjunto:

$$img(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A.\ (x, y) \in R\}$$

Para entender de mejor manera este concepto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8.2

Retomando el ejemplo 2.8.1 usamos la siguiente relación definida en $\mathbb{Z}^{-}$

$$R = \{ (a, b) \mid a = b - 3,\ a, b \in \mathbb{Z}^{-}\}$$

Para determinar el dominio de la relación nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Para cuáles elementos $a \in \mathbb{Z}^{-}$ existe su respectiva pareja en R dadas las condiciones de la relación?

Dado que $b \in \mathbb{Z}^{-}$, aunque también $a \in \mathbb{Z}^{-}$, para garantizar que la pareja ordenada pertenezca a esta relación no podemos tomar por ejemplo $a = -1$, puesto que su pareja ordenada sería $(-1, 2) \notin R$, pues $2 \notin \mathbb{Z}^{-}$. Por lo tanto, los valores de $a \in \mathbb{Z}^{-}$ que cumplen la condición son todos aquellos $a + 3 \in \mathbb{Z}^{-}$.

Por tanto,

$$dom(R) = \{a \in \mathbb{Z}^{-} \mid a \leq -4\}$$

$$= \{, \dots, -6, -5, -4\} = \mathbb{Z}^{-} \setminus \{-1, -2, -3\}$$

Ahora, para determinar la imagen de la relación, nos hacemos la pregunta: ¿Para cuáles elementos $b \in \mathbb{Z}^{-}$ existe su respectiva pareja en R dadas las condiciones de la relación?

Notemos que en realidad aplica para cualquiera de estos, pues cada uno tendrá su respectiva pareja.
Por lo que:

$$img(R) = \mathbb{Z}^{-}$$

Ejemplo 2.8.3
Definimos la *relación de pertenencia de un conjunto A* como el siguiente conjunto:

$$\in_A = \{ (x, Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\}$$

Este es un ejemplo un poco más complejo, algunos puntos a destacar son que el primer elemento de la pareja ordenada es un elemento tal cual, mientras que el segundo elemento es un conjunto, es por eso que se denota con letra mayúscula. Esto hace sentido, pues veamos que el primer elemento tiene que pertenecer a A, mientras que el segundo debe pertenecer a $\mathcal{P}(A)$, y recordemos que todos los elementos de la potencia de un conjunto son los subconjuntos de este, motivo por el cual los elementos de la potencia son conjuntos en sí. Y la característica particular que deben de cumplir para pertenecer a esta relación es que el elemento de la primera entrada de la pareja debe pertenecer al conjunto dado en la segunda entrada.
Pensemos en el siguiente ejemplo para entender mejor esto:
Sea $A = \{a, b, c\}$
Entonces:
$\{b, \{a, b\}\} \in \in_A$ pues en este caso $b \in A$, $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$ y $b \in \{a, b\}$
Pero
$\{c, \{a, b\}\} \notin \in_A$ pues $c \notin \{a, b\}$, motivo por el cual no se cumple la condición especificada.

Ahora obtengamos el dominio e imagen de esta relación.
El dominio es algo sencillo de obtener, pues veamos que para cualquier elemento $a \in A$, se cumplirá que $(a, \{a\}\} \in \in_A$.
Por tanto:

$$dom(\in_A) = A$$

Para la imagen consideremos algún $S \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists a \in S \text{ para el cual } (a, S) \in \in_A$$

Para esclarecer un poco más esto retomemos el ejemplo en que $A = \{a, b, c\}$. Claramente:

$\{a, \{a\}\} \in \epsilon_A$

$\{a, \{a, b\}\} \in \epsilon_A$

$\{a, \{a, c\}\} \in \epsilon_A$

$\{a, \{a, b, c\}\} \in \epsilon_A$

$\{b, \{b, c\}\} \in \epsilon_A$

$\{b, \{b\}\} \in \epsilon_A$

$\{c, \{c\}\} \in \epsilon_A$

Faltan algunas parejas por contemplar, sin embargo hemos cubierto la totalidad de la potencia de A. Las parejas que faltan son únicamente aquellas que tendrán como primera entrada al elemento b o c, pero comenzarán a repetirse algunos valores de la segunda entrada. El único conjunto que no podrá darse como segunda entrada es el conjunto vacío, pues nada pertenece a este.

Por lo tanto:

$$img(\epsilon_A) = \mathcal{P}(A)\backslash\emptyset$$

2.8.1 Composición de relaciones

Veremos a continuación una definición peculiar, y especificaremos la forma en la que se debe leer y entender esta, pues puede llegar a ser confusa en muchas ocasiones.

Definición:

Sean R y S relaciones definidas de A en B y de B en C respectivamente. Definimos la *composición de R en S* como la siguiente relación:

$$S \circ R = \{ (x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B.\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

Algo importante a destacar de esta definición en caso de que no quede del todo claro con la notación matemática es que para poder llevar a cabo la composición de funciones debe existir al menos un elemento que "conecte". Otro aspecto importante de esta definición es que puede resultar confuso el hecho de que lo leamos como "composición de R en S" y que al momento de escribirla se haga en el orden invertido, no obstante cuando veamos funciones quedará más claro el por qué se escribe de esa manera, hará mucho más sentido. De momento es bueno quedarse con la idea de que si lo vemos por escrito como en la frase pensemos que en notación matemática se deberá invertir el orden de cómo se dice y viceversa. La composición de relaciones en sí una relación, y en este caso la relación está definida de A en C, pues seguirá tomando como primera entrada a elementos del conjunto A, mientras que los elementos de la segunda entrada van a pertenecer al conjunto C. Veamos un ejemplo para intentar esclarecer este concepto.

Ejemplo 2.8.4

Sean:

$R = \{(1,4),\ (2,3),\ (3,5)\}$

$S = \{(4,2),\ (3,7),\ (7,1)\}$

Podemos realizar las siguientes composiciones:

1. $S \circ R = \{(1,2),\ (2,7)\}$

Lo que hemos hecho aquí es primero fijarnos en la relación R (recordando que contemplamos primero al del lado derecho) y vemos que tenemos la pareja $(1,4)$. En la relación S tenemos una pareja que inicia con el 4, esta es $(4,2)$. En este caso el 4 es ese elemento que mencionamos que "conecta". Por lo que, el resultado final pasa a ser la pareja $(1,2)$.

2. $R \circ S = \{(4,3),\ (7,4)\}$

En este caso hemos hecho lo mismo, ahora nos fijamos primero en la relación S y vemos que tenemos la pareja $(4,2)$ y en la relación R tenemos una pareja que inicia con el 2, la cual es $(2,3)$. Ahora nuestro elemento que conecta es el 2, y tenemos como resultado de la composición a la pareja $(4,3)$.

Siguiendo este mismo razonamiento, podemos obtener las siguientes composiciones:

3. $R \circ R = \{(2,5)\}$
4. $S \circ S = \{(3,1)\}$

Teniendo muy en mente la definición que se proporcionó de la composición de relaciones veamos el siguiente teorema, pues para demostrarlo y entender la prueba es necesario tener muy presente la definición, así como las distintas formas que hemos presentado de demostraciones, en este caso será una igualdad, por lo que es importante recordar el hecho de que se hace por doble contención.

Teorema:

Sean $R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq B \times C$ y $R_3 \subseteq C \times D$. Entonces:

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$$

Demostración:

Queremos probar que la composición cumple la propiedad asociativa. Lo primero a tomar en cuenta es que puede resultar intuitivo que esto es cierto, puesto que en la primera parte de la igualdad, es decir, en $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, al resolver lo del paréntesis tenemos que $R_2 \circ R_1$ es una relación definida de A en C. Por lo que $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ es una relación definida de A en D.

Si vemos el lado derecho de la igualdad, es decir $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$, al resolver el paréntesis tenemos que $R_3 \circ R_2$ es una relación definida de B en D. Por lo que $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ es una relación definida de A en D.

En ambos casos son relaciones definidas de A en D. Viéndolo de esa forma, podemos darnos una idea de que es factible el hecho de que se cumpla la igualdad. Habiendo dado ese breve paréntesis comenzamos con la demostración formal.

$\subseteq$)

Sea $(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$

$\Rightarrow \exists c \in C$ tal que $(a, c) \in (R_2 \circ R_1) \wedge (c, d) \in R_3$

$\Rightarrow \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2$

Tenemos entonces por adjunción de conjunciones (como veíamos el capítulo anterior en lógica) que:

$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3$

Podemos reagruparlo de la siguiente manera:

$(a, b) \in R_1 \wedge [(b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3]$

$\Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in (R_3 \circ R_2)$ Por definición de composición de relaciones

$\Rightarrow (a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

$\therefore R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

$\supseteq$)

Sea $(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

Como R_1 va de A en B y $R_3 \circ R_2$ va de B en D

$\Rightarrow \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_3 \circ R_2$

$\Rightarrow \exists c \in C$ tal que $(b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3$

Tenemos entonces por adjunción de conjunciones que:

$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3$

Lo podemos reagrupar de la siguiente manera:

$[(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2] \wedge (c, d) \in R_3$

Por definición de composición de relaciones esto es:

$(a, c) \in (R_2 \circ R_1) \wedge (c, d) \in R_3$

Nuevamente, por definición de composición de relaciones esto es:

$(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$

$\Rightarrow (R_3 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$

$\therefore R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$ ■

2.9 Funciones

Esta es una de las secciones más importantes del capítulo, pues el concepto y el manejo de las funciones es algo elemental en todo el estudio de las matemáticas.

De manera intuitiva y por algunos conocimientos que se ven en la educación media superior podemos pensar en una función como una relación entre entradas y salidas. Es decir, que cierto valor evaluado en una función nos arrojará un resultado. Pensemos por ejemplo en lo siguiente:

$$f(x) = x + 3$$

En este ejemplo f es el nombre de la función, la x dentro de $f(x)$ es la entrada, denotada como una variable para que se le pueda asignar "cualquier valor". Esto lo ponemos entre comillas ya que habrá una restricción para este "valor cualquiera", la cual será: que debe pertenecer al dominio de la función, pero se verá más a detalle este concepto un poco más adelante. Y finalmente $x + 3$ representa la salida. Esto es, que el valor que se asigne en la entrada será transformado como dice la salida a través de la función f. Muchas veces para ejemplificar esto los profesores lo explican por medio de una tabulación como sería la siguiente:

Tabla 1

Tabulación de una función

x	$f(x) = x + 3$	Valor de pareja ordenada
-1	2	$(-1, 2)$
0	3	$(0, 3)$
1	4	$(1, 4)$
2	5	$(2, 5)$

Elaboración propia

De acuerdo a lo visto en la sección anterior no es difícil pensar en las funciones como una relación. No obstante, veremos a continuación unas definiciones que nos ayudarán a entender de mejor manera la diferencia entre una función y una relación. De manera previa, es preciso destacar que una función *es* una relación, pero no todas las relaciones son funciones, pues hay unas características en particular que deben cumplirse en una relación para poder ser considerada una función.

Definición:

Una función es una *regla de correspondencia* en la que a cada elemento del dominio le corresponde uno, y sólo un elemento del *contradominio*.

Esta es una definición un poco más sencilla que la definición más formal, sin embargo notemos algo en particular de ella. Es la primera vez que vemos el concepto de *contradominio* y de *regla de correspondencia*.

La regla de correspondencia es lo que me indica que hará la función f. Es decir, cuál será la salida una vez que se le asigne una entrada. Por ejemplo, en la función que definimos previamente:

$$f(x) = x + 3$$

La regla de correspondencia es $x + 3$. Es lo que definimos antes como la salida, pero ahora le damos un nombre formal y es este.

El contradominio o codominio es el conjunto en el cual puede tomar valores la regla de correspondencia. Es importante hacer una distinción entre contradominio e imagen, pues suelen ser conceptos que cuesta trabajo diferenciar en los primeros acercamientos al tema.

El contradominio únicamente me está indicando sobre qué conjunto pueden caer los resultados una vez evaluados en la regla de correspondencia, mientras que la imagen indica exactamente qué valores se tomaron del conjunto del contradominio. Existen muchos casos en los que van a coincidir, en que la imagen será igual al contradominio, y de hecho serán casos de particular interés una vez que definamos lo que es una función suprayectiva, pero es de suma importancia entender la diferencia entre estos conceptos.

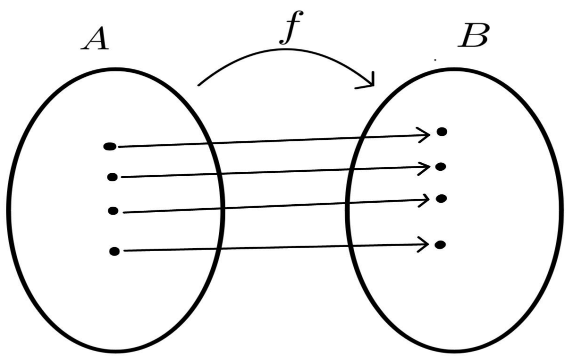
Definición formal de función:

Llamaremos *función* a una relación de A en B que cumpla las siguientes condiciones:

1. $dom(f) = A$
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$ entonces $b = b'$

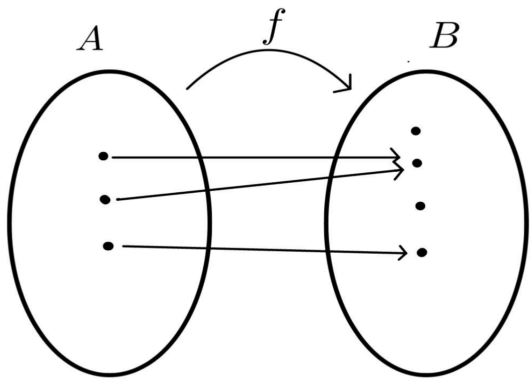
Analicemos lo que nos dice esta definición. En particular la primera condición es bastante entendible, nos garantiza que el dominio de la función debe ser el conjunto A. Lo que nos dice la segunda condición es que para cada elemento del dominio le debe corresponder un *único* elemento del contradominio. No puede darse el caso de que para algún elemento del dominio tenga dos correspondencias distintas. En tal caso, podrá ser una relación, mas no una función. Veamos los siguientes diagramas para que quede más claro cuándo puede considerarse una función y cuándo no:

Diagrama 5



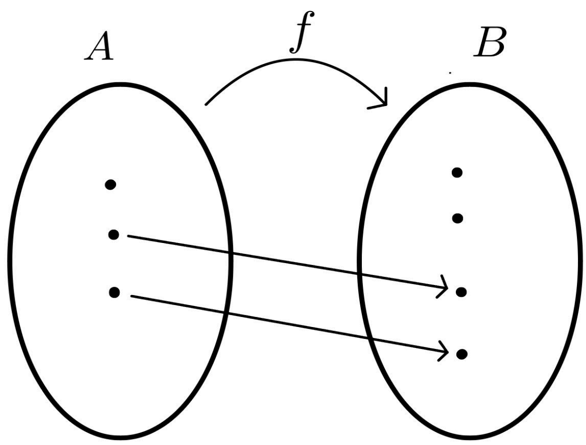
Elaboración propia.

Diagrama 6



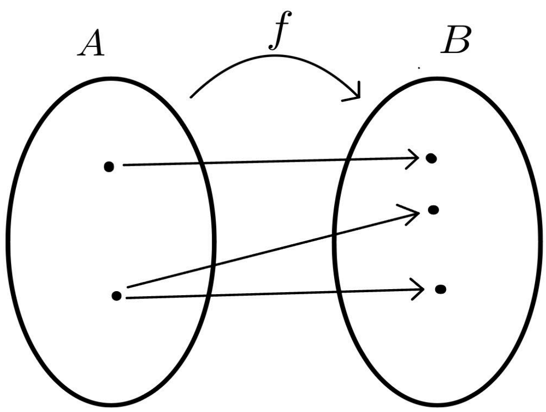
Elaboración propia.

Diagrama 7



Elaboración propia.

Diagrama 8



Elaboración propia.

Veamos que tanto el diagrama 5 como el 6 son ejemplos de funciones, su diferencia será algo que veremos más adelante conocida como funciones biyectivas. De cualquier forma, ambos cumplen con ser funciones. Analicemos entonces el caso del diagrama 7, en el cual $dom(f) \neq A$, pues hay un elemento en el conjunto A el cual no tiene su correspondiente imagen. Por tanto el ejemplo del diagrama 7 *no* es una función. Y veamos el caso del diagrama 8. En este veamos que para algún elemento en el conjunto A este tiene dos correspondencias distintas como imagen, motivo por el cual tampoco es una función. Dicho de una forma matemática para justificar el caso del diagrama 8: $(a, b) \in f \wedge (a, b') \in f \wedge b \neq b'$. Esto viola la segunda regla para considerarse función. Por lo tanto no lo es.

A continuación veremos algunos ejemplos un poco más prácticos.

Ejemplo 2.9.1

Sea

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, \dots, 10\}$

Y consideremos las siguientes relaciones:

$$f_1 = \{(a, 3), (b, 5), (c, 9)\}$$

$$f_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

$$f_3 = \{(a, 3), (a, 5), (b, 2), (c, 9)\}$$

$$f_4 = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3)\}$$

Notemos que:

- f_1 *sí* es una función, pues $dom(f_1) = A$, y para cada elemento de A existe un único elemento del contradominio como correspondencia.
- f_2 *no* es una función, pues $dom(f_1) = \{a, b\} \neq \{a, b, c\} = A$. Es decir, el dominio de f_2 es distinto de A.
- f_3 *no* es una función, pues para el elemento $a \in A$, existen dos elementos de correspondencia.
- f_4 *sí* es una función, pues $dom(f_4) = A$, y para cada elemento de A existe un único elemento del contradominio como correspondencia. Aunque todos los elementos del dominio tengan el mismo valor como imagen, esto no significa que no sea una función. La distinción se debe hacer únicamente para los valores del dominio, los valores de la imagen sí pueden repetirse.

Ejemplo 2.9.2

Consideremos la siguiente relación definida en $\mathbb{N}$:

$$f = \{ (n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Al decir que es una relación definida en $\mathbb{N}$ estamos especificando que tanto su dominio como su contradominio será el conjunto $\mathbb{N}$.

Si definimos a $n + 1 = m$, podemos decir que:

$$(n, m) \in f$$

Además, si $(n, m) \in f$ y $(n, m') \in f$ tiene que ocurrir forzosamente que:

$$m = n + 1 = m'$$

Por lo tanto, sí es una función.

Ejemplo 2.9.3

Consideremos la siguiente relación:

$$f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 \}$$

Es decir, consideramos como el dominio a los reales mayores o iguales que cero mientras que de contradominio consideramos a todos los reales.

Y corroboramos que esto se cumpla, para eso tomamos todas las $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ y hacemos $y = \sqrt{x}$. Podemos ver que efectivamente $(x, y) \in f$, por lo que:

$$dom(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Pero notemos que:

$$(1, 1) \in f \text{ y } (1, -1) \in f$$

Lo cual no puede ocurrir, a cada valor del dominio le debe corresponder un único elemento del contradominio.

Por lo tanto, no es una función.

Consideremos esta misma propuesta de relación pero modificando el contradominio, hagamos ahora que sea:

$$g = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \mid x = y^2 \}$$

La condición del dominio se sigue cumpliendo, es decir:

$$dom(g) = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Y ahora no puede presentarse algo como lo anterior, ya que, puesto que hemos restringido el contradominio:

$$(1, -1) \notin f$$

De esta manera podemos garantizar que:

$$\forall x \in dom(g)\ \exists!\, y \in \mathbb{R}^{\geq 0} \text{ tal que } x = y^2$$

Nota: El signo de exclamación seguido del ∃ significa "existe un único".

Por lo tanto, sí es una función.

Algo de notación:

Usualmente se denota a una función f de A en B como:

$$f : A \to B$$

Donde A es el *dominio* de f, y B es el *contradominio* de f, y no perdamos de vista que f es una relación, simplemente es una que cumple las características para considerarla una función.

Definición (imagen en funciones):

Habíamos dado previamente una definición de imagen para las relaciones. De manera intuitiva será un concepto muy similar a ese para las funciones, pero se introducirá una nueva notación.

Llamaremos *imagen de a bajo f* al único elemento del contradominio que acompaña a un elemento del dominio bajo una función f con su respectiva regla de correspondencia. Es decir, al elemento $b \in B$ que acompañe a $a \in A$, se le denomina la imagen de a bajo la función f.

Al conjunto de todas las imágenes individuales lo llamaremos la *imagen de la función f*. Se simboliza de la siguiente manera:

$$f(a)$$

Es una forma distinta de representar al elemento b, pues lo que pasa es simplemente que:

$$b = f(a)$$

Por lo que podemos representar de dos maneras una pareja ordenada de una función:

$$(a, b)$$

O bien

$$(a, f(a))$$

Esta manera de representarla nos ayuda cuando queremos dejar algo en términos generales y no sabemos exactamente el valor de la imagen de cierto elemento del dominio, y resulta más sencillo asociarlo de manera rápida al elemento a. Esta forma de representarlo es para especificar a qué elemento del dominio está asociado el de la imagen. Por ejemplo, al escribir una función como $f(x) = x^2$, las parejas ordenadas pueden ser escritas como:

$$(x, f(x))$$

Anteriormente mencionamos que es común utilizar las tabulaciones de las funciones, y eso es precisamente lo que ocurre, se colocan los elementos del dominio y su elemento correspondiente.

Ejemplo 2.9.4

Definamos la relación:

$$\mathbb{1}_A = \{ (a, b) \in A \times A \mid a = b\}$$

Esta es conocida como la *función identidad* general para cualquier conjunto A.

Esta relación cumple el ser una función, puesto que es fácil ver que $dom(\mathbb{1}_A) = A$

Y además, si $(a, b) \in \mathbb{1}_A \wedge (a, b') \in dom(\mathbb{1}_A)$, debido a su regla de correspondencia:

$$b = a = b'$$

De esta forma se garantiza que es una función.

Tomando esta función en cuenta, consideremos la función:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{N}} = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$$

Vemos que el codominio de $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ es $\mathbb{N}$, pero dijimos anteriormente que la imagen y el codominio son dos cosas distintas, por lo que veamos qué pasa al sacar la imagen de este conjunto.

Si tomamos cualquier elemento del dominio, forzosamente la imagen nos tiene que regresar a ese mismo elemento. Como breve ejemplo, pensemos en el $2 \in \mathbb{N} = dom(\mathbb{1}_{\mathbb{N}})$. Bajo esta función, la imagen de 2 bajo $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ es 2. Por lo tanto $(2, 2) \in \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$.

De esa forma podemos cubrir a todos los números naturales, por lo cual, en este caso en particular coinciden el contradominio y la imagen, la cual es:

$$img(\mathbb{1}_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$$

Notemos que resulta un tanto largo y enredado escribirlo de esta manera. Pensemos ahora que podemos hacer este mismo ejercicio definiendo esta función como una una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con regla de correspondencia:

$$f(n) = n$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) = n$ podemos garantizar que:

$$img(f) = \mathbb{N}$$

Este ejemplo es una buena introducción para entender cómo podemos definir una función por medio de indicar la relación, pues pensemos también el caso de una función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) =- x$$

Esto indica a la relación:

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y =- x\}$$

Muchas veces resulta más práctico definir a una función como se hizo de la primera forma, pues ahorra más tiempo y es igual de entendible, simplemente definiendo el nombre de la función, su dominio, contradominio y regla de correspondencia.

Estos han sido ejemplos relativamente sencillos, pero ahora consideremos uno donde quizás no es tan intuitivo proporcionar una regla de correspondencia desde un principio sin analizar tanto.

Ejemplo 2.9.5

Consideremos la relación:

$$R = \{ ((n, m),\ r) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \,|\, r = n + m\}$$

Este ya es un ejercicio un tanto más elaborado, pero veremos que en realidad no es algo tan complejo, su forma escrita como función es mucho más sencilla de comprender, siendo que en realidad representa todo lo que está escrito arriba como una relación.

En palabras lo que la relación nos dice es que los elementos de la primera entrada son por sí mismos una pareja ordenada, y la segunda entrada será un único elemento que resultará de realizar la suma de la pareja ordenada de la primera entrada. Suena un tanto revuelto y sí puede serlo, pero puede ser visto de muchas maneras distintas que ayuden a comprender mejor el problema.

Para ver si esta relación es una función y cómo quedaría tomemos $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ arbitrarios y tomemos a $r \in \mathbb{N}$ tal que $r = n + m$

Por tanto $(\ (n, m),\ r) \in f$ y de esta forma $dom(f) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Si consideramos $(\ (n, m),\ r) \in f$ y $(\ (n, m),\ r' \in f$

Esto sólo puede ocurrir si:

$$r = m + n = r'$$

Al tratarse de la suma de dos números naturales m y n les corresponde un único valor como resultado, no ocurre que si nosotros sumamos $3 + 2$ nos de como resultado 5 y además otro. Por lo que, como le corresponde un único elemento a cualquier elemento del dominio podemos garantizar que es una función.

Ahora, teniendo todo ese desglose en mente, veamos que no es difícil definir a su regla de correspondencia, esta es:

$$f(n, m) = n + m$$

Entonces si consideramos:

$n = 3$

$m = 2$

$$f(n, m) = f(2, 3) = 2 + 3 = 5$$

Teorema (igualdad entre funciones):

Sean $f: A \to B$ y $g: A \to B$ funciones. Entonces, $f = g$ si, y sólo si para todo $a \in A$ se tiene que $f(a) = g(a)$

Previo a iniciar la demostración analicemos un poco lo que nos dice el teorema. Vemos que de hipótesis tenemos que ambas son funciones, motivo por el cual podemos garantizar que ambas tienen el mismo dominio de acuerdo a cómo se definieron, y la forma en la que se condiciona a que sean iguales es a través de su imagen. Si dominio e imagen coinciden, entonces estaremos diciendo que son iguales. Una forma más de recalcar la diferencia entre contradominio e imagen, veamos la importancia que cada uno de estos conceptos tiene por sí solo.

Demostración:

$\to$)

Supongamos que $f = g$

Sea $(a, b) \in f$

Por definición de imagen:

$b = f(a)$

Como $f = g$, eso implica que $(a, b) \in g$

Y por definición de imagen:

$b = g(a)$

$\therefore f(a) = b = g(a)$

Y como fueron elementos arbitrarios, podemos garantizar que se cumple para cualquier elemento.

$\leftarrow$)

Supongamos que $\forall a \in A$ se tiene que $f(a) = g(a)$

Sea $(a, b) \in f$ una pareja ordenada de la función f

$\Rightarrow (a, b) \in f \leftrightarrow b = f(a)$

$\leftrightarrow b = g(a)$ Por la hipótesis

$\leftrightarrow (a, b) \in g$

De esto se concluye que $f = g$ ∎

2.9.1 Composición de funciones

Así como en secciones anteriores vimos la definición y ejemplos de la composición de relaciones, veremos en esta sección el mismo concepto pero de una forma más específica que será aplicado en funciones.

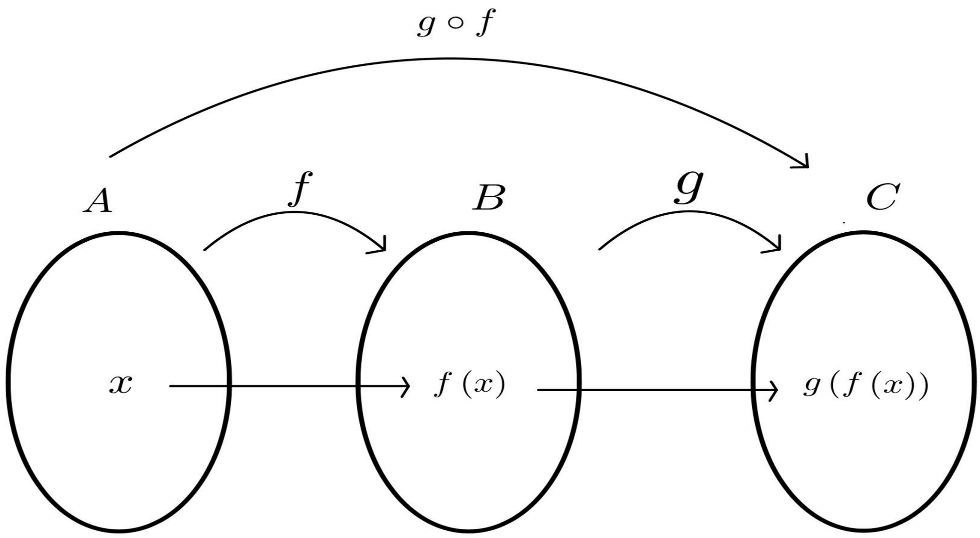
Definición (Gómez, 2014)**:**

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. La *composición de f con g* es la función $h : A \to C$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para cada $x \in A$. A esta función la denotamos por: $g \circ f$.

Veamos el siguiente diagrama para ejemplificar esto:

Diagrama 9

Composición de funciones.



Elaboración propia.

Habíamos mencionado previamente que era algo "peculiar" el hecho de que denotamos a *f* compuesta con g de la forma $g \circ f$ y no empezar por la *f*. Esto se debe a su regla de correspondencia, pues veamos que *f* compuesta con *g* es:

$$g \circ f = g(f(x))$$

Mientras que *g* compuesta con *f* es:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Observando el diagrama 9 vemos que hace sentido decirlo en la forma en que se hace, y al momento de realizar los cálculos es más práctico escribirlo de esta forma dada su regla de correspondencia. Recordemos que primero se resuelven los paréntesis, por lo que, una vez que tengamos la evaluación de la primera función hacemos lo mismo con ese valor respecto a la nueva regla de correspondencia. Puede ser un tanto confuso este concepto, por lo que veremos algunos ejemplos a continuación:

Ejemplo 2.9.6

Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{1, 5, a, d\}$, y definimos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ con $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$. También definimos la regla de correspondencia de *g* como $g(a) = a$, $g(b) = 5$, $g(c) = a$

Por lo tanto, la regla de correspondencia de $g \circ f$ está dada por:

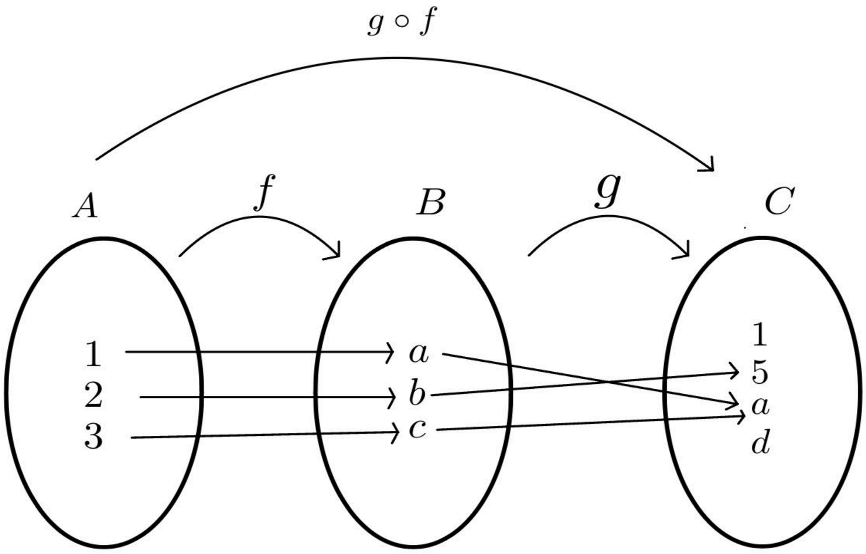
$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = a$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 5$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = a$$

Y veamos el siguiente diagrama para corroborarlo de manera visual:

Diagrama 10.

Diagrama del ejercicio 2.9.6



Elaboración propia.

Ejemplo 2.9.7

Sean $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ con reglas de correspondencia $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - x^2$. Obtener las reglas de correspondencia de:

1. $g \circ f$
2. $f \circ g$
3. $f \circ f$
4. $g \circ g$

1. Para obtener $g \circ f$ recordemos que:

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - (x + 1)^2 = \; - x - x^2$$

Y $g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, es decir esto resulta en una función que tiene como dominio valores en los números naturales, y arroja como resultado valores en los números enteros.

Recordemos que la regla de correspondencia de f nos indica que tomamos el valor que se haya asignado (en los números naturales) y le sumamos 1. Mientras que la regla de correspondencia de g nos indica que dado el valor que se ingrese a la función la transformación será tomar ese mismo elemento que se ingresó y restarle ese valor elevado al cuadrado. Para este caso en particular puede resultar confuso ya que estamos viendo al $x + 1$ como si fuera un único valor, es decir como si fuera una sola *x*, y es por eso que han sido escritos en paréntesis los términos para poder diferenciarlos correctamente.

2. Para obtener $f \circ g$:

Notemos que $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vemos que el contradominio de *g* y el dominio de *f no coinciden*. Motivo por el cual, no se puede realizar la composición de estas funciones, pues:

$$\exists b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b \notin \mathbb{N} = dom(f)$$

Esto generaría que exista algún elemento en el dominio de *g* que su imagen arroje un número entero negativo, que no tendría correspondencia en la función *f*. Por lo tanto, esta *no* sería una función.

3. Para obtener $f \circ f$:

Notemos que $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Por lo que, como su contradominio coincide con el dominio, la composición consigo misma es posible, esto resultaría en una función definida en los naturales, es decir:

$$f \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Obteniendo su regla de correspondencia:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

4. Para obtener $g \circ g$:

Mismo caso que el 2. Como $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, si quisiéramos hacer la composición $g \circ g$ notemos que no coinciden el dominio y el contradominio, motivo por el cual no se puede realizar esta composición de funciones. Sí puede realizarse como una composición de relaciones, pero esta no resultaría en una función puesto que habría elementos del dominio a los que no les correspondería una imagen, lo cual es una característica fundamental para considerarse una función.

Teorema:

Sean $f : A \to B,\ g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ funciones. Entonces se cumple que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Es decir, que cumple la propiedad asociativa.

Demostración:

Como los dominios y contradominios coinciden como deben de hacerlo para realizar la composición de funciones, basta con probar que ambos lados de la igualdad tienen la misma regla de correspondencia. Por lo tanto:

Sea $x \in A$

$$\begin{aligned}\Rightarrow [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= [h \circ (g \circ f)](x)\end{aligned}$$

$\therefore (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ■

Ya habíamos mencionado previamente que no siempre se puede dar la composición de funciones, depende estrictamente de que coincidan contradominio y dominio para poderse llevar a cabo. Hay veces en las que puede darse que $g \circ f = f \circ g$, pero por lo general suelen ser diferentes. Habría que realizar pruebas cuando quiera corroborarse que se presenta esta igualdad. En particular si $f = g$ se dará esta igualdad, pero lo más común es que si $f \neq g$, entonces $g \circ f \neq f \circ g$ en general.

2.9.2 Imagen de un subconjunto del dominio e imagen inversa

Daremos a continuación un par de definiciones y algunos ejemplos de las mismas para esclarecerlos.

Definición:

Sea $f : A \to B$ una función y sea $S \subseteq A$. Definimos la *imagen de S bajo la función f* como el siguiente conjunto:

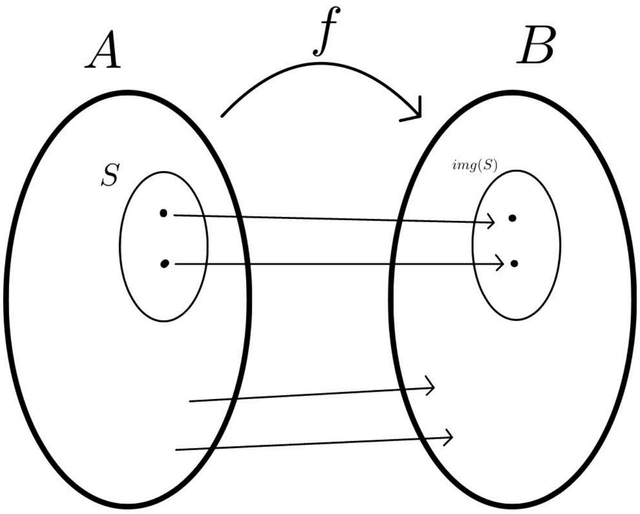
$$f[S] = \{y \in B \mid \exists x \in S \; tal\; que\; y = f(x)\}$$

O de manera similar, aplica la siguiente definición:

$$f[S] = \{ f(x) \mid x \in S \subseteq A\}$$

Es algo muy similar al concepto de la imagen en general, sólo que en este caso lo consideramos para un subconjunto en específico del dominio. Veamos el siguiente diagrama para ejemplificar:

Diagrama 11.



Elaboración propia.

Vemos que pueden existir otros elementos de la imagen de la función completa, pero los que nos interesan en particular son los del conjunto *S*.

Con este concepto en mente hacemos la siguiente definición.

Definición (Imagen inversa):

Sea $f : A \to B$ una función y sea $T \subseteq B$. Definimos la *imagen inversa de T bajo la función f* como el siguiente conjunto:

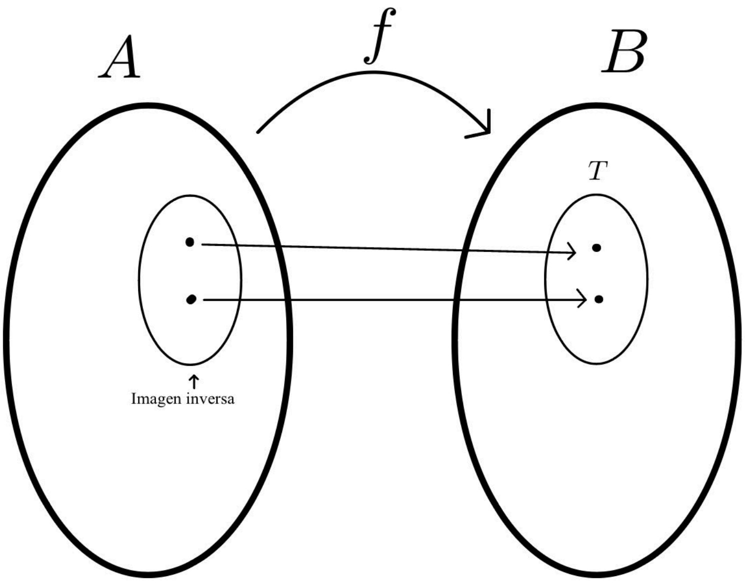
$$f^{-1}[T] = \{x \in A \mid \exists y \in T \; tal \; que \; f(x) = y\}$$

O de manera similar, aplica la siguiente definición:

$$f^{-1}[T] = \{ x \in A \mid f(x) \in T \subseteq B\}$$

Veamos el siguiente diagrama:

Diagrama 12.



Elaboración propia.

Teniendo esta definición en mente, podemos extenderla para generalizar a la imagen inversa de toda una función como:

$$f^{-1}[B] = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

No es difícil corroborar entonces que, si $f : A \rightarrow B$ es una función, entonces:

1. $f^{-1}[B] = dom(A)$
2. $f[A] = img(f)$

Ejemplo 2.9.8

Consideremos la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con regla de correspondencia $f(x) = x + 3$

Definamos al conjunto $S = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \subseteq \mathbb{N}$

Entonces encontramos la imagen de *S* bajo la función *f*:

$$f[S] = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

Y definamos al conjunto $T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \subseteq \mathbb{N}$

Entonces encontramos la imagen inversa de *T* bajo la función *f*:

$$f^{-1}[T] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ejemplo 2.9.9

Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2 + |x|$, y sean:

$S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{Z}$

$T = \{2, 20, 30, 72\} \subseteq \mathbb{N}$

Encontrar $f[S]$ y $f^{-1}[T]$

Solución:

Primero recordemos que el *valor absoluto* de un número está definido como:

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Nota:

Este tipo de funciones, las cuales tienen una regla de correspondencia distinta dependiendo de los casos se llaman *funciones seccionadas*. El valor absoluto es un caso de este tipo, pues, dicho en palabras lo que hace el valor absoluto es tomar siempre el valor positivo, motivo por el cual, cuando lo que se encuentra dentro del valor absoluto es un número negativo lo convierte en positivo, caso contrario, es decir si vale 0 o algún número positivo, se queda igual. Por ejemplo

$|3| = 3$

$|-3| = 3$

$|0| = 0$

Teniendo esto en mente, calculamos la imagen del conjunto *S*

$f(-3) = (-3)^2 + |-3| = 9 + 3 = 12$

$f(-2) = (-2)^2 + |-2| = 4 + 2 = 6$

$f(-1) = 2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2) = 6$

$\therefore f[S] = \{0,\ 2,\ 6,\ 12\}$

Ahora calculamos la imagen inversa de *T* bajo *f*. Para esto nos preguntamos qué valores del dominio de la función (los números enteros) me pueden llevar a los valores del conjunto *T*

$f^{-1}[2] = \{-1, 1\}$ pues $f(-1) = f(1) = 2$

$f^{-1}[20] = \{-4, 4\}$ pues $f(-4) = f(4) = 20$

$f^{-1}[30] = \{-5, 5\}$

$f^{-1}[72] = \{-8, 8\}$

$\therefore f^{-1}[T] = \{-8, -5, -4, -1, 1, 4, 5, 8\}$

Una forma más simplificada de expresarlo es:

$f^{-1}[T] = \{\pm 1, \ \pm 4, \ \pm 5, \ \pm 8\}$

Ejemplo 2.9.10 (Gomezcaña, 2020):

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con regla de correspondencia $f(x) = x + 1$

Sea *S* el conjunto de todos los números pares. Entonces:

$f[S]$ es el conjunto de los números impares, pues si *x* es un número par, este puede ser expresado como $x = 2y$ con *y* cualquier número entero, sea par o impar, por lo que:

$$f(x) = x + 1 = 2y + 1$$

Como *y* es un número par, al sumarle un 1 este se hace impar. Por lo que, sea el número par que sea, se cumple que $x + 1$ será un número impar.

$\therefore f[S]$ es el conjunto de los números impares.

Ahora, notemos que $f^{-1}[S]$ también será el conjunto de los números impares, pues para que $x + 1$ sea un número par, forzosamente *x* debe ser un número impar. Para corroborar esto, pensemos en *x* como un número impar. Es decir: $x = 2y + 1$. Al hacer la regla de correspondencia nos queda que:

$$f(x) = x + 1 = (2y + 1) + 1 = 2y + 2 = 2(y + 1)$$

Y si reescribimos a $y + 1 = z$ con $z \in \mathbb{Z}$ obtenemos que $2z$ es un número par.

$\therefore f^{-1}[S]$ es el conjunto de los números impares.

Ejemplo 2.9.11

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $f(x) = |x|$

Notemos que, para este caso en particular, como no hay números negativos:

$$f(x) = x$$

Es decir:

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$$

Motivo por el cual:

$f[\mathbb{N}] = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}[\mathbb{N}] = \mathbb{N}$

$f^{-1}[\mathbb{N}] = \mathbb{N}$

2.9.3 Funciones inyectivas

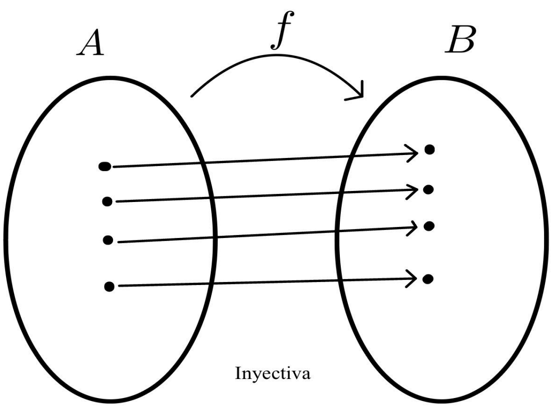
Los conceptos de funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas son de suma importancia a lo largo de una trayectoria en licenciatura orientada a las matemáticas, pues servirá para muchas otras cuestiones y ayuda al desarrollo de sensibilidad y análisis de muchos conceptos que servirán en un futuro. Es una de las bases que deben quedar sólidas para el estudio posterior de distintas áreas tanto de matemáticas puras como de matemáticas aplicadas.

Definición (función inyectiva):

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que *f* es una *función inyectiva* si se cumple que para cualesquiera elementos $a \in A$ y $a' \in A$, si $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.

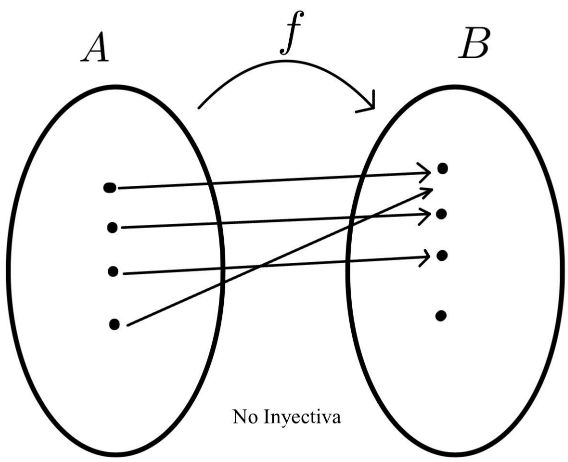
En otras palabras, esto nos dice que para algún elemento de la imagen de la función, este debe provenir de un *único* elemento del dominio. Veamos el siguiente diagrama para hacernos una idea de esto:

Diagrama 13



Elaboración propia.

Diagrama 14



Elaboración propia.

Vemos en el diagrama 14 que existen dos elementos distintos provenientes del dominio que llevan al mismo elemento del contradominio.

Por lo que, otra forma de expresarlo es que:

Una función es inyectiva cuando $\forall a, a' \in A$, si $a \neq a'$ eso implica que $f(a) \neq f(a')$

Su negación sería que una función *no* es inyectiva si $\exists a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$ pero $a \neq a'$

Estas definiciones pueden resultar un poco complejas de escuchar en un principio, pero es importante que se tome el tiempo necesario para digerirlas y comprenderlas, pues se usarán para la demostración de propiedades importantes. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 2.9.12

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = 2x - 3$

Para ver si es inyectiva, consideremos la siguiente igualdad:

$$f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow 2x - 3 = 2y - 3$$
$$\Rightarrow 2x = 2y$$
$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore$ La función es inyectiva.

Nota:

De manera general, una función *lineal*, es decir, que sólo depende de una variable y puede ser expresada de la forma $f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$ constantes siempre será inyectiva.

Ejemplo 2.9.13

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2$

Para ver si es inyectiva, consideremos la siguiente igualdad:

$$f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow x^2 = y^2$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x + y)(x - y) = 0$$
$$\Rightarrow x = \pm y$$

Como *x* puede tomar dos valores esto viola la condición de que sea una función inyectiva.

Otra forma de probarlo es, como se mencionó en ejemplos anteriores, proporcionando un contraejemplo, pues además estos suelen ser más claros.

Procediendo por contraejemplo pensemos en $a = 1$ y $b = \ - 1$

Notemos que:

$f(a) = f(- 1) = (- 1)^2 = 1$

$f(b) = f(1) = 1^2 = 1$

$f(- 1) = f(1) = 1$

Se está dando el caso de que $f(a) = f(a')$ pero $a \neq a'$.

∴ La función no es inyectiva.

Ejemplo 2.9.14

Sea $f :\ [0, \infty) \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2$

¿Será una función inyectiva?

En este caso, tenemos la misma regla de correspondencia que en el ejemplo anterior, pero hemos redefinido el dominio, ahora en vez de ser todos los números reales lo estamos limitando a que sean únicamente los reales mayores o iguales que cero.

Para este caso:

$$f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow\ x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow\ x^2 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ (x + y)(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow\ x = \ \pm y$$

Pero como $x \in [0, \infty)$ esto nos garantiza que sólo va a tomar uno de los valores de *y*.

Si $y \geq 0 \Rightarrow x = y$, mientras que si $y < 0 \Rightarrow x =- y$.

Sólo se contempla uno de los dos valores, y en este caso se presenta la igualdad que buscamos.

∴ La función es inyectiva.

2.9.4 Funciones suprayectivas

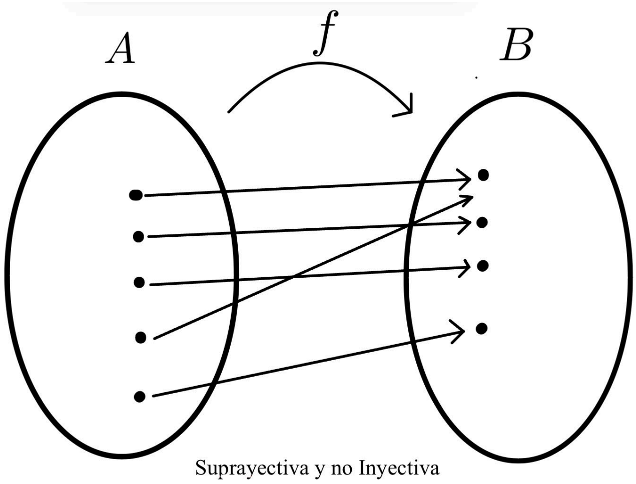
Definición:

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que *f* es una *función suprayectiva* o *sobreyectiva* si se cumple que:

$$\forall b \in B.\ \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

Dicho en palabras, si todo elemento del contradominio tiene su elemento correspondiente del dominio tal que, evaluado en la función arroja este elemento. Es decir, se debe cubrir el contradominio *completo*. Veamos el siguiente diagrama:

Diagrama 15



Suprayectiva y no Inyectiva

Elaboración propia.

Notemos que no es una función inyectiva, pues existen dos elementos distintos del dominio que nos arrojan la misma imagen, pero *sí* es suprayectiva, pues se cubre el contradominio completo.

Teniendo este diagrama en mente, resulta más sencillo proporcionar una definición más digerible:

Una función es *sobreyectiva* cuando $img(f) = B$.

Cuando la imagen de la función sea exactamente igual al contradominio de esta, diremos que la función es sobreyectiva o suprayectiva (son sinónimos). Habíamos mencionado anteriormente que es importante hacer la distinción entre imagen y contradominio y hemos llegado al punto en el que se entiende por qué. El contradominio es el conjunto en el que puede tomar valores la imagen, y no necesariamente se cubre por completo. La imagen es el valor del contradominio que adquiere la función evaluada en cierto punto. Los casos en los que la imagen coincide con el contradominio serán de particular interés y les damos este nombre de función sobreyectiva.

A manera de presentar su negación, una función *no* es suprayectiva si $\exists b \in B$ tal que $b \notin img(f)$. Es decir $\forall a \in A.\ b \neq f(a)$.

Veremos a continuación los mismos ejemplos que se proporcionaron para determinar inyectividad en las funciones y ahora determinaremos si son sobreyectivas:

Ejemplo 2.9.15

Sea $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)\ =\ 2x\ -\ 3$

Para ver si es suprayectiva tomamos un elemento arbitrario en el contradominio $y\ \in\ \mathbb{R}$ y nos preguntamos si es posible encontrar algún elemento $x\ \in\ dom(f)\ =\ \mathbb{R}$ de tal forma que $2x\ -\ 3\ =\ y$

Si despejamos a x de la ecuación obtenemos que:

$$x\ =\ \frac{y+3}{2}$$

Como esto fue tomado de manera arbitraria, podemos garantizar que se cubre todo $\mathbb{R}$.

$\therefore$ La función es suprayectiva.

Ejemplo 2.9.16

Sea $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)\ =\ x^2$

Habíamos visto previamente que no es inyectiva.

Para ver si es suprayectiva basta con proporcionar un contraejemplo:

Sea $-\ 1\ \in\ \mathbb{R}\ =\ codom(f)$

Vemos que $\nexists\ x\ \in\ dom(f)$ tal que $x^2\ =-\ 1$

Por lo que, como $\exists x\ \in\ codom(f)$ tal que $x\ \neq\ f(x)\ \forall x\ \in\ dom(f)$, esta *no* es una función suprayectiva.

De manera general, para cualquier $x\ <\ 0$ esta no tendrá ningún elemento del dominio que bajo la función f su imagen sea ese valor.

Pero, si definimos ahora a la función $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $g(x)\ =\ x^2$, es decir, que ahora el contradominio sean los números reales mayores o iguales a cero, esto sí será una función sobreyectiva, pues si hacemos $y\ =\ x^2$ y despejamos nos queda que:

$$x\ =\ \sqrt{y}\ \text{ con } y\ \geq\ 0$$

$\therefore$ La función g es suprayectiva pero no inyectiva.

Más aún, si definimos ahora a la función $h:\ [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $h(x)\ =x^2$, que es lo mismo que definirla como $h:\ \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $h(x)\ =x^2$ notemos que esta función cumple con ser tanto inyectiva como suprayectiva.

Definición (función biyectiva):

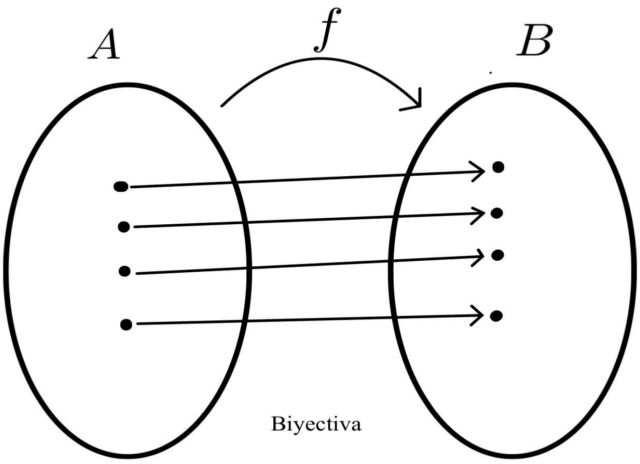
Sea $f:\ A \rightarrow B$. Diremos que *f* es una función *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Como tal a esta definición no hay que buscarle mucho más que eso. Si está claro el concepto de funciones inyectivas y suprayectivas, el decir que es biyectiva será cuando se presenten ambos casos. A pesar de que no sea una definición en la que se dé una explicación tan extensa sí vale la pena mencionar que es un concepto de mucha importancia, pues cuando una función es biyectiva se pueden presentar diversas características de interés para muchas áreas de las matemáticas.

Veamos el siguiente diagrama:

Diagrama 16

Diagrama de una función biyectiva



Elaboración propia.

La función, al ser inyectiva y suprayectiva es una función biyectiva.

Ejemplo 2.9.17

Sean

$f:\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x)\ =x^2$

$g:\ \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x)\ =x^2$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $h(x) = x^2$

$p : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $p(x) = x^2$

Debido a ejemplos pasados tenemos que:

La función f no es inyectiva ni suprayectiva.

La función g es inyectiva pero no es suprayectiva.

La función h es suprayectiva, pero no inyectiva.

La función p es inyectiva y también suprayectiva, por lo tanto la función p es *biyectiva*.

Ejemplo 2.9.20

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $f(x) = |x|$

Es fácil ver que no es inyectiva, pues basta notar que:

$$f(-1) = |-1| = 1 = |1| = f(1)$$

Pero debido a cómo está definido el contradominio, esta función es suprayectiva, pues:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\geq 0} \text{ se tiene que } |x| = x$$

∴ La función es suprayectiva pero no inyectiva.

2.9.5 Relación que guarda la composición de funciones con funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Teorema:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Entonces se cumple que:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es supraycetiva.
3. Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Demostración:

1. Suponemos que f y g son inyectivas. Para probar que $g \circ f$ es inyectiva supongamos que:

   $$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$$

   Esto se traduce en:

   $$g(f(a)) = g(f(a'))$$

   Y como la función g es inyectiva, se debe cumplir que:

$$f(a) = f(a')$$

Y como f es inyectiva, debe ocurrir que:

$$a = a'$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.

2. Supongamos que f y g son suprayectivas. Para probar que $g \circ f$ es suprayectiva, supongamos que:

$$c \in C$$

Como g es suprayectiva, entonces:

$$\exists b \in B \text{ tal que } g(b) = c$$

Como f es suprayectiva, entonces:

$$\exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

Realizando las sustituciones esto nos queda como:

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a) \end{aligned}$$

3. Suponemos que f y g son biyectivas

Por la demostración del punto 1 y 2, sabemos que $g \circ f$ es inyectiva y también suprayectiva.

$\therefore g \circ f$ es biyectiva. ■

Ejemplo 2.9.21 (Gomezcaña, 2020):

Consideremos la función $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con regla de correspondencia $h(x) = x^2 + 1$

Podríamos considerarla como la composición de las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ con } f(x) = x^2$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ con } g(x) = x + 1$$

De forma que $h = g \circ f$, pues $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$.

Debido a cómo está definida la función f en su dominio y contradominio, sabemos que esta es inyectiva. Para la función g al tratarse de una función lineal es fácil corroborar que esta también es inyectiva. Basta con hacer:

$$x + 1 = y + 1$$

$$x = y$$

Por lo tanto, la función $h = g \circ f$ es inyectiva.

A continuación veremos una variación del teorema que enunciamos previamente.

Teorema *:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Entonces se cumple que:

1. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
2. Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces *g* es biyectiva
3. Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y *g* es suprayectiva.

Demostración:

1. Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva, eso significa que:

   $$\text{Si } g(f(a)) = g(f(a')), \text{ entonces } f(a) = f(a').$$

   Esto a su vez implica que:

   $$a = a'.$$

   Y esto por definición, significa que f es inyectiva.

2. Supongamos que $g \circ f$ es suprayectiva, eso significa que:

   $$\exists a \in A \text{ tal que } (g \circ f)(a) = c.$$

   Sea $b = f(a) \in B$ con *B* el codominio de f y el dominio de *g*. Entonces:

   $$\begin{aligned} c &= (g \circ f)(a) \\ &= g(f(a)) \\ &= g(b). \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la función *g* es suprayectiva.

3. Supongamos que $g \circ f$ es biyectiva.

   Eso implica que $g \circ f$ es inyectiva y también suprayectiva.

   Por el punto 1 y 2 del teorema, sabemos que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva y si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces *g* es suprayectiva. ■

2.9.6 Inversa izquierda

Nos acercamos al cierre de esta larga sección que es la de funciones, y para concluir estos temas se presentará el teorema fundamental de la teoría de funciones. Pero para ello es preciso primero destacar dos conceptos muy importantes que nos ayudarán a crear finalmente el concepto de una *función invertible*. Para ellos veamos la siguiente definición:

Definición:

Sea $f : A \to B$ una función con $A \neq \emptyset$. Llamaremos *inversa izquierda* a la función $g : B \to A$ si cumple que:

$$g \circ f = \mathbb{1}_A$$

Teorema:

Sea $f : A \to B$ una función con $A \neq \emptyset$. Entonces f es inyectiva si, y sólo si tiene una inversa izquierda.

Demostración:

Recordemos que es una demostración de un "si, y sólo si", por lo que hacemos ida y vuelta.

$\to$)

Supongamos que f es inyectiva. Esto significa que:

$$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Sea $f(a) = b,\ b \in B$.

Lo que queremos probar es la existencia de una función $g : B \to A$ de tal forma que $g \circ f = \mathbb{1}_A$.

Ahora, como f es inyectiva, pero no nos especifican que sea suprayectiva, debemos dividir en dos casos los elementos de *B*: los que pertenecen a la imagen de f y los que no:

Sea:

$$g(b) = \begin{cases} a, & si\ \ b \in img(f)\ \ y\, f(a) = b \\ a_0, & si\ \ b \in B\backslash img(f) \end{cases}$$

De esta manera cubrimos a todo el conjunto B y vemos que la función g está bien definida. Podemos asumir ese elemento a_0 ya que tenemos por hipótesis que $A \neq \emptyset$.

Para corroborar que se cumple la regla de correspondencia que deseamos de la identidad, notemos que:

Si $x \in A \Rightarrow f(a) \in img(f)$ y su preimagen es única por ser f inyectiva. Por lo tanto:

$$g(f(a)) = g(b) = a$$

Que es lo mismo que decir:

$$g \circ f = \mathbb{1}_A$$

$\therefore$ Si f es inyectiva, entonces tiene una inversa izquierda.

$\leftarrow$)

Supongamos que f tiene una inversa izquierda, es decir, suponemos que:

$$\exists g.\ g\colon B \to A \text{ tal que } g \circ f = \mathbb{1}_A.$$

Esto es equivalente a decir que:

$$(g \circ f)(a) = a$$

Sabemos que la función identidad de cualquier conjunto es una función inyectiva, pues:

$$\forall a \in A \text{ se cumple que } \mathbb{1}_A(a) = a$$

Por lo que no pueden haber elementos distintos del dominio que nos lleven a la misma imagen.

Debido al teorema * revisado en la sección anterior, sabemos que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

$\therefore$ La función f es inyectiva. $\blacksquare$

Ejemplo 2.9.22

Consideremos a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x - 3$

Sabemos por el ejemplo 2.9.12 que esta función es inyectiva. Para encontrar la inversa izquierda hacemos lo siguiente:

1. Igualamos la regla de correspondencia a un valor y:

$$y = 2x - 3$$

2. Despejamos a x de la ecuación:

$$\frac{y+3}{2} = x$$

3. Renombramos a esta regla de correspondencia como $g(x)$

$$g(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

4. Corroboramos realizando la composición:

$$g(f(x)) = g(2x - 3) = \frac{1}{2}(2x - 3) + \frac{3}{2} = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = x$$

Vemos que efectivamente, llegamos a x, por lo tanto esta es la función identidad y la función g es es una inversa izquierda de f.

Ejemplo 2.9.23 (Gomezcaña, 2020):

Consideremos la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con $f(x) = x^2$.

Es sencillo corroborar que esta función es inyectiva, se hace de manera análoga a cuando se corroboró que la función con misma regla de correspondencia pero que iba de los reales positivos a los reales o reales positivos era inyectiva. Se prueba de la misma manera.

Primero determinamos la imagen de f:

$$img(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \, es \, un \, cuadrado \, perfecto\}$$

Para encontrar la inversa izquierda, igualamos:

$$y = x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

Pero como $y \in \mathbb{N}$, sólo nos quedamos con el valor positivo.

Retomando la demostración del último teorema, veamos que podemos proveer dos distintas funciones como inversa izquierda.

Sean:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \, es \, cuadrado \, perfecto \\ 0, & en \, otro \, caso \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \, es \, cuadrado \, perfecto \\ 1, & en \, otro \, caso \end{cases}$$

Se puede comprobar que $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

Y $h(f(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

En realidad, es irrelevante el valor que escojamos para el caso alternativo, por lo que, con este ejemplo vemos que las inversas izquierdas no siempre serán únicas, pues tenemos que:

$$h \circ f = g \circ f = \mathbb{1}_A$$

Pero $h \neq g$

Por lo tanto, puede haber más de una inversa izquierda.

2.9.7 Inversa derecha

Definición:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Llamaremos *inversa derecha* a la función g si cumple que:

$$f \circ g = \mathbb{1}_B$$

Teorema:

Sea $f : A \to B$ una función con $A \neq \emptyset$. Entonces f es suprayectiva si y sólo si tiene una inversa derecha.

Demostración:

$\to$)

Supongamos que la función f es suprayectiva. Esto significa que:

$$\forall b \in B. \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

Equivalente a decir que:

$$img(f) = B$$

Entonces:

$$\forall b \in B.\ f^{-1}[\{b\}] \neq \emptyset \text{ por ser } f \text{ suprayectiva}$$

Definimos $g : B \to A$ con $g(b) = a$

Con esto en mente, es correcto plantear lo siguiente respecto a la composición de g con f:

$f \circ g : B \to B$	
$(f \circ g)(b) = f(g(b))$	Por definición
$f(g(b)) = f(a)$	Por cómo definimos g
$f(a) = b$	Por ser f suprayectiva

$\therefore f \circ g = \mathbb{1}_B$

$\leftarrow$)

Supongamos que f tiene una inversa derecha, lo que significa que:

$$\exists\, g : B \to A \text{ tal que } f \circ g = \mathbb{1}_B$$

Como probamos en un teorema anterior que si $f \circ g$ es suprayectiva, entonces f es suprayectiva, con esto basta para concluir que la función f es suprayectiva. ■

Corolario:

Un corolario es un teorema en sí mismo que es resultado de un teorema demostrado justamente antes de presentar el corolario. En este caso el corolario es el siguiente:

Una función $f : A \to B$ es biyectiva, si y sólo si tiene una inversa izquierda y una inversa derecha.

La demostración es muy sencilla y se invita al lector a que intente realizarla.

Ejemplo 2.9.24:

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = x + 1$

Es sencillo corroborar que esta función es suprayectiva, y definimos a $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con:

$$g(x) = x - 1$$

Corroboramos que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$$

Ejemplo 2.9.25 (Gomezcaña, 2020):

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $f(x) = x^2$

Es sencillo corroborar que es una función suprayectiva dado cómo se definió el contradominio.

Para plantear la inversa derecha primero encontramos la imagen inversa:

$$f^{-1}[\{y\}] = \{\sqrt{y}, \ -\sqrt{y}\}$$

Vemos que en realidad tenemos dos posibilidades para elegir y formar la función que genere a la inversa derecha, pensemos en:

$$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R} \text{ con } g(x) = \sqrt{x}$$

Entonces ocurre que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Otra opción sería:

$$h : \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{R} \text{ con } h(x) = -\sqrt{x}$$

Entonces ocurre que:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x})^2 = x$$

Notamos que:

$$f \circ g = f \circ h = \mathbb{1}_B$$

$$\text{Pero } g \neq h$$

Con este ejemplo se concluye que la inversa derecha no siempre es única.

2.9.8 Función invertible

Definimos en las dos secciones previas que una función puede tener múltiples inversas tanto izquierdas como derechas. Por lo tanto, para el objetivo final de esta sección que es el teorema fundamental de la teoría de funciones es necesario exhibir un último teorema que de pie a la última definición.

Teorema:

Sean $f: A \to B$, $g: B \to A$, $h: B \to A$ funciones. Si $g \circ f = \mathbb{1}_A$ y $f \circ h = \mathbb{1}_B$ entonces se cumple la igualdad $g = h$.

Demostración:

Partimos de algo que sabemos verdadero, que es:

$$\begin{aligned} g &= g \circ \mathbb{1}_B & \\ &= g \circ (f \circ h) & \text{Por cómo definimos } \mathbb{1}_B \\ &= (g \circ f) \circ h & \text{Por la propiedad asociativa} \\ &= \mathbb{1}_A \circ h & \text{Por cómo definimos } g \circ f \\ &= h & \blacksquare \end{aligned}$$

Definición (función invertible):

Una función $f: A \to B$ se dice invertible si existe una función $g: B \to A$ que cumpla que:

$$g \circ f = \mathbb{1}_A \text{ y } f \circ g = \mathbb{1}_B$$

2.9.9 Teorema fundamental de la teoría de funciones

Una función es *biyectiva* si y sólo si es *invertible*.

Demostración:

Sea $f : A \to B$ con $A, B \neq \emptyset$

$\to$)

Supongamos que f es biyectiva.

Como f es biyectiva, eso significa que es inyectiva, y por un teorema visto anteriormente esto implica que f tiene una inversa izquierda, es decir:

$$\exists g.\ g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = \mathbb{1}_A$$

Por otro lado, como f es biyectiva, eso significa que también es suprayectiva, y por un teorema visto anteriormente esto implica que f tiene una inversa derecha, es decir:

$$\exists h.\ h : B \to A \text{ tal que } f \circ h = \mathbb{1}_B$$

Y por el último teorema presentado hasta este punto, esto implica que:

$$g = h$$

Por lo que tenemos que

$$g \circ f = \mathbb{1}_A \text{ y } f \circ g = \mathbb{1}_B$$

Y esto, por definición significa que f es invertible.

$\leftarrow$)

Supongamos que f es invertible.

Esto significa que tiene una inversa izquierda, que por un teorema visto anteriormente, eso a su vez implica que es inyectiva.

Como f es invertible, eso también significa que tiene una inversa derecha, que por un teorema visto anteriormente, eso a su vez implica que es suprayectiva.

Por tanto, como f es inyectiva y suprayectiva, eso por definición nos dice que f es una función biyectiva. ■

Definición (función inversa):

Sea $f : A \to B$ una función invertible. Llamaremos *inversa de* f a la única función:

$$f^{-1} : B \to A \text{ tal que}$$

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_A \text{ y } f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_B$$

Ejemplo 2.9.26

Consideremos a la función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = 2x - 1$

Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

De acuerdo al teorema anterior, como f es biyectiva, esta sería su función inversa, es decir:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Corroboramos que:

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 1) = \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = 2(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) - 1 = x + 1 - 1 = x$

Ejemplo 2.9.27

Consideremos a la función biyectiva $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $f(x) = x^2$

Sea $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ con $g(x) = \sqrt{x}$

De acuerdo al teorema anterior, como f es biyectiva, esta debe ser su función inversa, es decir:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Corroboramos que:

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ con $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$con $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

Con estos ejemplos concluimos esta sección tan importante dentro de la teoría de conjuntos que es la teoría de funciones. Partimos desde el concepto de relaciones y lo fuimos uniendo con muchos conceptos y definiciones. Así son las matemáticas en general, todo parte de algo sencillo y a eso se le va agregando cada vez más para ir creando una teoría sólida.

Finalmente damos paso a la última sección del capítulo referente a presentación de temas. Los temas referentes a teoría de funciones se recomienda ampliamente que se estudien con calma y dedicación, pues son temas de mucha relevancia en general, y deben quedar bien asentados.

2.10 Familias de conjuntos

Esta será la última sección del capítulo, y posterior a esta se hará la simulación de un examen parcial para fortalecer y poner a prueba los conocimientos que debieron ser adquiridos. Para esta última sección es importante tener bien digeridos ya los conceptos de operaciones entre conjuntos, así como la forma en la que se pueden manipular las propiedades entre estas operaciones. Comenzamos entonces con la definición del tema en general.

Definición:

Sea $\mathcal{F}$ un conjunto. Este lo llamaremos una *familia de conjuntos* si cada uno de sus elementos son conjuntos.

Podemos pensar en muchos de los ejemplos que se han proporcionado a lo largo del capítulo para formar una familia de conjuntos y mencionaremos varios.

Ejemplo 2.10.1

Es claro que el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ es una familia de conjuntos, pues por definición todos los elementos que pertenecen a este conjunto son subconjuntos de A.

En particular, si obtenemos de manera arbitraria algún $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$, diremos que $\mathcal{F}$ es una *familia de subconjuntos de* A.

Ejemplo 2.10.2

Durante toda la sección de funciones, a estas las vimos como un conjunto, pues eran el conjunto de los puntos arrojados por las parejas ordenadas tales que forman una función. Por lo que, podemos ver a las funciones como conjuntos, y de esta manera podemos formar la siguiente familia de conjuntos:

$$\{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

Esta familia de conjuntos la denominaremos como una *familia de funciones*, puesto que los conjuntos en cuestión que son elementos de esta familia son todos funciones, y de hecho es una familia de funciones muy conocida. Es la familia de funciones que contiene a todas las funciones que tienen como dominio y contradominio al conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.10.3

Así como en algunos ejemplos previos retomamos el concepto de intervalos del cálculo, lo utilizaremos nuevamente.
Consideremos a un elemento *c*. Y consideremos al intervalo cerrado definido de la siguiente manera:

$$I = [a, b]$$

Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I \subseteq \mathbb{R}$
Debido a que el elemento *c* es fijo, podemos crear una *familia de intervalos*. Esto intuitivamente nos dice que es una familia de conjuntos en la que sus elementos serán intervalos. Y pensemos que es de nuestro interés que sean los intervalos que contengan a *c*. Esto podríamos definirlo de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} = \{ [a, b] \subseteq \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b \}$$

Algo que sería importante aclarar de este conjunto es que se mencionó anteriormente que el elemento *c* era fijo, pero los elementos *a* y *b* los estamos dejando como elementos arbitrarios o variables, de tal forma que todo intervalo que contenga en sí mismo al elemento *c* pertenecerá a esta familia de conjuntos que es particularmente una familia de intervalos.

De momento con esto basta para comprender lo que es una familia de conjuntos. En realidad entender este concepto no es de gran dificultad siempre y cuando se tengan claros los conceptos que se vieron al inicio del capítulo, lo que será interesante es lo que se puede desarrollar con este concepto tan sencillo. Como siempre, partiremos de algo sencillo como esto y lo iremos elaborando cada vez más para ir creando una teoría bastante sólida al respecto.

2.10.1 Unión arbitraria

Para presentar este concepto lo ilustraremos de una manera en que pueda ser relacionado a contenidos ya vistos anteriormente en este trabajo, y eso será con lógica. Existe una relación entre la disyunción (la unión) y el cuantificador existencial, y es la siguiente:
Consideremos que tenemos una familia de conjuntos con únicamente dos elementos, esto es:

$$\mathcal{F} = \{A, B\} \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son conjuntos}$$

Analicemos la siguiente equivalencia:

$$(x \in A) \lor (x \in B) \leftrightarrow \exists S \in \mathcal{F}.\ x \in S$$

Estamos afirmando que el elemento x pertenece ya sea al conjunto A o al conjunto B si y sólo si existe algún conjunto S en la familia de conjuntos tal que el elemento x pertenece a S.
Esto significa que:

$$(S = A) \lor (S = B)$$

Por cómo está definida la unión entre conjuntos es sencillo ver que la equivalencia que se proveyó se puede reescribir de la siguiente manera:

$$x \in A \cup B \leftrightarrow \exists\, S \in \mathcal{F}.\ x \in S$$

Con este preámbulo en mente, continuamos con las definiciones y propiedades.

Definición:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos a la *unión de elementos de* $\mathcal{F}$ como el siguiente conjunto:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = \{\, x \mid \exists\, S \in \mathcal{F}.\ x \in S \,\}$$

Lo que estamos haciendo aquí es generalizar, estamos diciendo que vamos a realizar la unión de todos los elementos del conjunto $\mathcal{F}$, los cuales a su vez son todos conjuntos. Por lo tanto si tenemos el caso en el que $\mathcal{F}$ es un conjunto de únicamente dos elementos pasa lo siguiente:

Ejemplo 2.10.4

Considerando nuevamente el caso sencillo en que $\mathcal{F} = \{A,\ B\}$.
Si hacemos:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = A \cup B.$$

Esto ocurre por el siguiente análisis:

Si $x \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S$ esto significa que $\exists\, S \in \mathcal{F}$ tal que $x \in S$.

Como S lo usamos para denotar de forma general cualquier elemento de $\mathcal{F}$, es decir cualquier conjunto que pertenezca a la familia de conjuntos $\mathcal{F}$, entonces esto se traduce en:

$$(x \in A) \lor (x \in B).$$

Que es lo mismo que decir:

$$x \in A \cup B.$$

Por lo tanto:

$$\text{Si } \mathcal{F} = \{A,\ B\} \Rightarrow \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = A \cup B.$$

Es fácil con esto ver que si $\mathcal{F} = \{A,\ B,\ C\} \Rightarrow \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = A \cup B \cup C$

Ejemplo 2.10.5

Sea $\mathcal{F} = \{A,\ B\}$ con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

Es fácil corroborar que:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Ejemplo 2.10.6

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

En ese caso:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Como una nota a este ejercicio, es muy común toparse con este tipo de casos, en los que se requiere hacer una operación en particular sobre muchos valores seguidos que son finitos y distinguibles, para ese caso una notación usual es la siguiente:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Este tipo de operaciones nos indican que se va a realizar esa misma operación para cada valor con su respectivo subíndice corriendo desde el 1 hasta la *n*. Serán casos que revisaremos un poco más adelante cuando se hable de los índices, y será de mucha importancia en particular para las operaciones de unión, intersección, sumas y productos, pero la revisaremos más a detalle en unas cuantas secciones. No obstante, es una buena introducción al tema.

Ejemplo 2.10.7 (Gomezcaña, 2020):

Sea $\mathcal{F} = \{\ [0,\ n] \mid n \in \mathbb{N}\}$

Una forma más ilustrativa de este conjunto sería escribirlo por extensión de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} = \{\ [0, 0],\ [0, 1],\ [0, 2],\ \dots,\ [0, n]\ \}$$

Previamente hemos hecho una breve mención acerca de la cardinalidad de los conjuntos y ese es un tema que nos lleva eventualmente a plantear el hecho de conjuntos finitos, infinitos numerables e infinitos no numerables. Es un tema muy discutido en general en las matemáticas, por lo que por los objetivos establecidos para este trabajo no ahondaremos en ese tema. Lo que es importante mencionar para el planteamiento de este ejercicio es simplemente la diferencia entre estos conceptos de manera sencilla.

Un conjunto finito es aquel que tiene cardinalidad finita, por ejemplo si tenemos al conjunto $A = \{1, 2\}$ este tiene cardinalidad 2, pues contiene a dos elementos.

Un conjunto *infinito numerable* es aquel al que no se le puede determinar un número específico como cardinalidad, pero que puede ser "enumerado", es decir, se le puede asociar con los números naturales un orden, aunque estos no acaben, pero se le puede hacer una distinción.

Por último un conjunto *infinito no numerable* es aquel al que no se le puede asignar un número como cardinalidad y que además no se le pueden asociar números naturales para establecer cierto orden.

A manera de ejemplo pensemos en dos conjuntos que hemos trabajado mucho en este capítulo, los números naturales y los números reales.

Precisamente el conjunto de los números naturales es el mejor ejemplo para describir un conjunto infinito numerable (también llamado contable), pues aunque como tal no haya un fin para los números, podemos asociarles un orden, sabemos que el 2 va después del 1, y que el 56 va después del 55, por lo que podríamos "enumerarlos".

Pensemos ahora en los números reales, ¿existirá alguna manera de asignarles un orden? Sabemos que el 1 va después del 0, pero ¿qué pasa con todos los números que están entre estos dos?

Previamente se mencionó al intervalo $[0, 1]$ y que existen una infinidad de números dentro de este intervalo. Existe una propiedad en los números reales conocida como *densidad de los números reales*, la cual afirma que entre dos números reales cualesquiera existe un número racional entre estos dos, lo que significa que entre dos números reales existe una infinidad de números reales entre ellos. Motivo por el cual no podríamos establecer un orden de cuál va antes y cuál después. Por supuesto que podemos ver cuál es mayor y menor, pero debido a que es una infinidad de números que posiblemente no se tienen en el radar, no es posible decir que el número 0 sea el primero y el 0.1 sea el segundo, pues entre estos existen una infinidad de números.

A grandes rasgos esta es la diferencia entre conjuntos infinitos numerables y no numerables.

Esta explicación se proveyó motivada por el ejercicio, pues al ser los números naturales un conjunto infinito numerable, podemos afirmar lo siguiente:

$$[0,\infty) \in \mathcal{F}$$

Lo que significa que:

$$[0,\infty) \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S$$

De igual forma, es sencillo ver que:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \subseteq [0,\infty)$$

Por lo tanto, por doble contención esto significa que:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = [0,\infty)$$

Y como ∞ no es un número propiamente, sino un concepto matemático, esto es sencillo de corroborarlo, pues de manera más extensa esta unión se vería de la siguiente manera:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = [0,0] \cup [0,1] \cup [0,2] \cup \dots \cup [0,n]$$

con $n \to \infty$ por ser los naturales infinitos numerables

Nota:

La notación $n \to \infty$ se lee como "n tendiendo a infinito" o "n aproximándose a infinito", es muy utilizada en cálculo diferencial e integral principalmente para los límites.

Al hacer la unión de todos estos intervalos, tenemos que:

$$[0,0] \subseteq [0,1] \subseteq \dots \subseteq [0,n]$$

Debido a que todos están contenidos en $[0,n]$ al final la unión nos dará como resultado el intervalo $[0,n]$, y como n la estamos dejando correr sobre todos los naturales es lo mismo que decir que esto es el intervalo $[0,\infty)$.

Ejemplo 2.10.8

Sea $\mathcal{F} = \emptyset$, es decir tenemos a la familia de conjuntos vacía. No hay mayor problema para corroborar que:

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = \bigcup_{S \in \emptyset} S = \emptyset.$$

2.10.2 Intersección arbitraria

De manera similar a cómo se presentó el tema de la unión arbitraria, ilustraremos este concepto con una introducción basada en lógica. Existe una clara relación entre la operación de la intersección con el cuantificador universal.

Consideremos nuevamente que tenemos una familia de conjuntos con únicamente dos elementos, esto es:

$$\mathcal{F} = \{A, B\}$$

Analicemos la siguiente equivalencia:

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \leftrightarrow \forall S \in \mathcal{F}.\ x \in S$$

Estamos afirmando que el elemento x pertenece a ambos conjuntos siempre y cuando para todo S elemento de $\mathcal{F}$ (siendo S un conjunto) el elemento x pertenezca a S.

Por cómo está definida la operación de intersección de conjuntos podemos reescribir la anterior equivalencia de la siguiente forma:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow \forall S \in \mathcal{F}.\ x \in S$$

Con estos conceptos previos en mente pasemos a la definición formal.

Definición:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos a la *intersección de elementos de* $\mathcal{F}$ como el siguiente conjunto:

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = \{\, x \mid \forall S \in \mathcal{F}.\ x \in S \,\}$$

De nueva cuenta, así como en la unión lo que estamos haciendo en este caso es generalizar. Lo que el operador nos dice y la forma en la que se debe de interpretar es que para todos los elementos de $\mathcal{F}$ debemos realizar su intersección. Veamos algunos ejemplos para ilustrar este concepto.

Ejemplo 2.10.9

Sea $\mathcal{F} = \{A,\ B\}$

Es sencillo comprobar que:

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = A \cap B$$

Pues si $x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$ esto significa que $\forall\, S \in \mathcal{F}.\ x \in S$

Lo que significa que:

$$(x \in A) \wedge (x \in B)$$

Que se traduce en:

$$x \in A \cap B$$

De forma similar, si $x \in A \cap B$ esto significa que:

$$\forall\, S \in \mathcal{F}.\ x \in S$$

Por lo tanto

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

Por doble contención se tiene que:

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = A \cap B$$

Es fácil ver entonces que si $\mathcal{F} = \{A,\ B,\ C\} \Rightarrow \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = A \cap B \cap C$

Ejemplo 2.10.10

Sea $\mathcal{F} = \{A,\ B\}$ con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

Es fácil comprobar que:

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = \{2\}$$

Ejemplo 2.10.11

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

En ese caso

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Como se mencionó con la unión, este tipo de intersecciones las podemos describir de manera más sencilla con la siguiente notación:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Escribirlo de esta manera significa exactamente lo mismo que el lado derecho de la igualdad que se dio antes. De cualquier manera, se abordará con más detalle más adelante.

Ejemplo 2.10.12

Sea $\mathcal{F} = \{ [0, n + 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$

Veamos de manera un poco más general cómo se ve esta familia de intervalos:

$$\mathcal{F} = \{ [0, 1], [0, 2], \dots, [0, n] \}$$

Por lo que su intersección arbitraria quedaría de la siguiente manera:

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = [0, 1] \cap [0, 2] \cap \dots \cap [0, n]$$

Es sencillo ver que entonces la intersección es la siguiente:

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = [0, 1]$$

Pues ese será el único elemento (un intervalo) que tendrán en común todos.

Ejemplo 2.10.13

Sea $\mathcal{F} = \emptyset$

Se tiene que:

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S = U.$$

Debería ser algo inmediato el cuestionarnos esta propiedad, pues no resulta para nada intuitiva y hasta parece no hacer sentido.

Se estableció previamente lo que es el conjunto universo y que normalmente viene de manera implícita, no siempre se exhibe de manera abierta. En esencia, el conjunto universo se define para evitar muchas paradojas que pueden presentarse en la teoría de conjuntos.
De cualquier manera, no debe ser tan sorprendente el hecho de que obtengamos un resultado curioso, pues el conjunto vacío siempre suele comportarse de manera peculiar y muy fuera de lo común. Para esclarecer este ejemplo, analicémoslo de manera lógica, pues con eso debería hacer mucho más sentido.
Tenemos que para que algún elemento pertenezca a la intersección arbitraria se debe cumplir lo siguiente:

$$\forall\, S \in \mathcal{F} \rightarrow x \in S$$

Para este caso en particular en que $\mathcal{F} = \emptyset$ esto se reescribe de la siguiente manera:

$$\forall\, S \in \emptyset \rightarrow x \in S$$

Recordemos por el capítulo 1 y las tablas de verdad que el único caso en que una implicación es falsa es cuando se tiene el $V \rightarrow F$. Pero en este caso tenemos que el antecedente es falso, podríamos tener el caso de $F \rightarrow V$ o bien el caso de $F \rightarrow F$. De cualquier manera, ambos casos resultan ser verdaderos, por lo tanto esta implicación es verdadera.

2.10.3 Algunos teoremas relacionados con la contención de familias de conjuntos

En esta breve sección revisaremos algunos teoremas y propiedades relacionadas a la contención que se da en uniones e intersecciones arbitrarias.

Teorema:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Entonces para cada $A \in \mathcal{F}$ (recordemos que A es un conjunto) se cumplen las siguientes contenciones:

1. $A \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$

2. $\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq A$

Demostración:

1. Sea $x \in A$

De acuerdo a la definición tenemos que:

$$\exists\, S \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in S$$

Pues en este caso podemos afirmar que $S = A$.

Por lo tanto, al hacer la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}$ tendremos forzosamente que:

$$x \in \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$$

2. Sea $x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$

En ese caso podemos afirmar que:

$$\forall\, S \in \mathcal{F} \text{ se cumple que } x \in S$$

En este caso estamos renombrando a cualquier conjunto S como un conjunto cualquiera A. Por tanto, solo es cambiarle el nombre y tenemos que:

$$x \in A \qquad\qquad \blacksquare$$

Teorema:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto cualquiera. Si $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq B$$

Demostración:

Sea $x \in \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$

Entonces $\exists\, A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$

Como se tiene por hipótesis que $\forall\, A \in \mathcal{F}.\ A \subseteq B$ obtenemos finalmente que:

$$x \in B$$

$\therefore$ Si $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq B$ $\blacksquare$

Teorema:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos y sea B un conjunto cualquiera. Si $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces:

$$B \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

Demostración:

Sea $x \in B$

Como se tiene por hipótesis que $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces debe ocurrir que:

$$x \in A \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Por tanto si x está en todos los elementos de la familia de conjuntos debe ocurrir que:

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

$\therefore$ Si $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces $B \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$ ■

2.10.4 Índices

Para esta sección es posible que los elementos de la teoría resulten un poco complejos o abstractos si es el primer encuentro con este tema. De cualquier manera, lo importante en esta sección es entender cómo utilizar los índices y quedarse con lo más fundamental. Se presentarán algunos conceptos de forma teórica pero se expondrán los elementos más importantes de este concepto.

Definición:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. A la función suprayectiva $A : I \to \mathcal{F}$ la llamaremos una *indicación de* $\mathcal{F}$. Al conjunto I se le conoce como el *índice de la indicación*.

Ejemplo 2.10.13

Sea $\mathcal{F} = \{ [0, n] \mid n \in \mathbb{N} \}$

Podemos indicar esta familia con una función $J : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ con regla de correspondencia

$$J(n) = [0, n]$$

Se puede comprobar que la función J es suprayectiva, por lo tanto el conjunto $\mathbb{N}$ es un índice para esta familia de conjuntos $\mathcal{F}$.

Ejemplo 2.10.14

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos indicada por la función $A : I \to \mathcal{F}$.

Introduciremos una nueva notación, pues lo más usual es que en lugar de verlo como $A(i)$ se suele escribir de la siguiente manera:

$$A_i$$

Y podemos describir a la familia de conjuntos $\mathcal{F}$ utilizando este índice como aparece a continuación:

$$\mathcal{F} = \{ A_i \}_{i \in I}$$

En este caso, si tenemos por ejemplo que $I = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{F} = \{ A_1, A_2, A_3\}$

Teníamos también el ejemplo anterior para $\mathcal{F} = \{ [0, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ en el cual describimos una función $J : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ con $J(n) = [0, n]$.

Esta familia de conjuntos la podemos reescribir como:

$$\{ [0, n] \}_{n \in \mathbb{N}}$$

O bien como:

$$\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Lo importante de esta breve sección en realidad es simplemente familiarizarse con esta notación, pues a final de cuentas eso es precisamente lo único que estamos haciendo: introducir una nueva notación.

En el ámbito de las matemáticas lo más usual es que este índice suele ser el conjunto de los números naturales y lo utilizamos para simplificar operaciones que suelen ser extensas. Veremos algunos ejemplos de esto.

Ejemplo 2.10.15 (La suma en notación de sigma)

Consideremos las siguientes operaciones a manera de exponer la forma en la que se suelen escribir con la notación matemática usual, pues en ocasiones no suele ser muy claro cómo funcionan los símbolos u operadores que se utilizan comúnmente.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Esto es algo muy famoso en el mundo de las matemáticas y es conocida como la *suma de los primeros n números naturales*. Suele simplificarse utilizando la letra griega *sigma* mayúscula y utilizando un índice el cual es asumido como el conjunto de los números naturales. La notación es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Lo que debemos interpretar de esta notación es que la *sigma* nos indica que es una suma, el $i = 1$ que se encuentra en la parte inferior nos dice a partir de dónde empieza el índice, pues en ocasiones puede comenzar desde el 0, o desde el 2, o desde el número que sea siempre y cuando pertenezca a los naturales. La *n* en la parte superior de la *sigma* nos indica cuándo va a parar el operador, en este caso frena en *n*. Por último la *i* que se encuentra dentro de la *sigma* es lo que va a ir "corriendo", este será el que irá tomando ciertos valores conforme se realice la operación. Veamos algunos ejemplos:

i) $\sum_{i=0}^{5} i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i$

ii) $\sum_{i=4}^{6} 2i = 2(4) + 2(5) + 2(6)$

iii) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

iv) $\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + \cdots$ Esta suma corre hasta infinito

v) $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

vi) $\sum_{x=0}^{3} ab_x = ab_0 + ab_1 + ab_2 + ab_3$

Con este último ejemplo vemos que no es realmente necesario que siempre sea una *i*, podemos asignarle la letra que sea siempre y cuando el índice sea claro, nótese que únicamente el valor de la *x* es el que fue cambiando mientras que la *a* se mantuvo constante, y esto es porque quien está indexada es la *x*.

vi) Sean (a_1, a_2) y (b_1, b_2) dos parejas ordenadas. Se define la operación *producto punto* como sigue:

$$(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Esto lo podríamos simplificar de la siguiente manera:

$$(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = \sum_{i=1}^{2} a_ib_i$$

Ejemplo 2.10.16 (El producto en notación de pi)

Consideremos ahora la siguiente operación:

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

La forma en la que se simplifica esto en notación matemática es la siguiente:

$$\prod_{i=1}^{n} i$$

Veamos algunos ejemplos:

i) $\prod_{i=1}^{3} i + 1 = (1 + 1)(2 + 1)(3 + 1) = 2(3)(4) = 24$

ii) $\prod_{i=0}^{4} (x + i)^{i} = x^{0}(x + 1)(x + 2)^{2}(x + 3)^{3}(x + 4)^{4}$

iii) El factorial de un número $n \in \mathbb{N}$ denotado como $n!$ se define como sigue:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - n + 1)$$

Por ejemplo, si $n = 5$ tendríamos que:

$$n! = 5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$$

Veamos que entonces una manera de representar a $n!$ sería como sigue:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Ejemplo 2.10.17

Es usual sobre todo en el área de probabilidad encontrarse con uniones arbitrarias pero indicadas como la que se muestra a continuación:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Ejemplo 2.10.18

De igual manera es usual encontrarse con la intersección arbitraria indicada denotada como sigue:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Lo importante a recordar con esta notación es que el índice siempre es los números naturales, y que la parte inferior nos indica en qué número empieza, la superior en cuál termina y lo que está dentro del operador nos dice sobre qué correrá. Puede darse el caso en el que dentro del operador no tengamos nada del índice y habrán ciertas propiedades que se deberán realizar. No obstante eso es tema de materias futuras y no se revisarán en este trabajo. De hecho este tipo de operaciones están sustentadas por el orden de los números naturales y van un tanto ligadas al tema de inducción matemática. Para el objetivo de este trabajo solo se presentan para que el lector comprenda cómo funcionan estos operadores, pues es común que a lo largo de la licenciatura no se tomen el tiempo de explicarles esto y puede llegar a generar confusión y son operadores sumamente utilizados durante el estudio de la licenciatura en actuaría.

2.10.5 Algunas operaciones con indicación arbitraria

Definición (unión con índices):

Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Expresamos a la *unión de los elementos* de esta familia como sigue:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists\, i \in I.\ x \in A_i \}$$

En realidad esto es muy similar a lo revisado en la sección anterior con un índice que corría sobre los números naturales, solo que en este caso lo estamos dejando de forma general, en la que el conjunto del índice puede ser distinto al de los naturales, puede ser cualquiera, y esta es la definición para ese tipo de operación.

Definición (intersección con índices):

Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Expresamos a la *intersección de los elementos* de esta familia como sigue:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall\, i \in I.\ x \in A_i \}$$

Teorema (Leyes de DeMorgan para uniones e intersecciones arbitrarias):

Sea $\{ A_i \}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Se cumplen entonces las siguientes igualdades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$

2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C$

Demostración:

1.

$\subseteq$)

Sea $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C$

Esto significa que:

$$x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$$

Lo que significa que para cada $i \in I$ ocurre que:

$$x \notin A_i$$

Que es lo mismo que decir que:

$$x \in A_i^C$$

Por tanto, como se cumple para cada $i \in I$ podemos afirmar que:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i^C$$

$\supseteq$)

Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_i^C$

Esto significa que para cada $i \in I$ se tiene que:

$$x \in A_i^C$$

Por definición del complemento esto lo podemos reescribir como:

$$x \notin A_i \quad \forall i \in I$$

Por tanto:

$$x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$$

Que es lo mismo que decir que:

$$x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C$$

2.

$\subseteq$)

Sea $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^C$

Esto significa que:

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$$

Lo que significa que $\exists\ i \in I$ tal que $x \notin A_i$

Por lo tanto:

$$\exists\ i \in I \text{ tal que } x \in A_i^C$$

Y esto implica que:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i^C$$

$\supseteq$)

Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i^C$

Esto significa que $\exists\ i \in I$ tal que $x \in A_i^C$

Esto a su vez implica que $\exists\ i \in I$ tal que $x \notin A_i$

Por lo tanto podemos afirmar que:

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$$

Y por definición del complemento es lo mismo que decir que:

$$x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^C \qquad \blacksquare$$

Teorema referente a la imagen inversa:

Sea $f : A \to B$ una función y sea $\{ B_i \}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de B. Se deben cumplir las siguientes igualdades:

1. $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
2. $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$

Demostración:

1.

$\subseteq$)

Sea $x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i]$

Eso significa que:

$$f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i$$

Entonces para alguna $i \in I$

$$f(x) \in B_i$$

Por tanto, para alguna $i \in I$ se tiene que:

$$x \in f^{-1}[B_i]$$

Como solo es para *alguna* $i \in I$ lo que sí podemos garantizar con esto es que:

$$x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$$

$\supseteq$)

Sea $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$

Esto significa que para alguna $i \in I$ se tiene que:

$$x \in f^{-1}[B_i]$$

Por tanto, podemos afirmar que para alguna $i \in I$:

$$f(x) \in B_i$$

Luego:

$$f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i$$

Finalmente:

$$x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i]$$

2.

$\subseteq$)

Sea $x \in f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i]$

Eso significa que:

$$f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i$$

Entonces para cada $i \in I$

$$f(x) \in B_i$$

Por tanto, para cada $i \in I$ se tiene que:

$$x \in f^{-1}[B_i]$$

Como es *para toda* $i \in I$ podemos afirmar que:

$$x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$$

$\supseteq$)

Sea $x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$

Esto significa que para toda $i \in I$ se tiene que:

$$x \in f^{-1}[B_i]$$

Por tanto, podemos afirmar que para cada $i \in I$:

$$f(x) \in B_i$$

Luego:

$$f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$$

Finalmente:

$$x \in f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] \qquad \blacksquare$$

2.10.6 Particiones

Esta será la última sección del capítulo previo a realizar la dinámica de la simulación del examen parcial. Este tema como tal podría parecer que no tiene mucha relevancia para lo que se ha trabajado en el resto del capítulo, pero juega un papel importante en la teoría de la probabilidad y sí es importante que quede claro. De cualquier manera, no es un tema tan complicado comparado con los temas que se han abordado en el capítulo.

Anteriormente habíamos mencionado que una familia de conjuntos de interés puede ser una familia de subconjuntos de algún conjunto A como lo podrían ser el conjunto potencia y demás. Es aquí donde eso cobra sentido. Analicemos la siguiente definición.

Definición (partición):

Sea A un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de A. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *partición* de A si cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall\, S \in \mathcal{F}$ se cumple que $S \neq \emptyset$
2. $\forall\, S, T \in \mathcal{F}$ con $S \neq T$ se cumple que $S \cap T = \emptyset$
3. $\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = A$

Tomando en cuenta lo revisado anteriormente respecto a la indicación podemos reescribir esta última definición viendo a $\mathcal{F}$ como una familia indicada.

Definición (partición como familia indicada):

Sea A un conjunto cualquiera y sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A. Diremos que $\{P_i\}_{i\in I}$ es una *partición de A* si cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall\, i \in I$ se cumple que $P_i \neq \emptyset$
2. $P_i \cap P_j = \emptyset \quad \forall\, i, j \in I$ con $i \neq j$
3. $\bigcup_{i \in I} P_i = A$

Ejemplo 2.10.19

Sea $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$

Veamos cuáles de las siguientes familias de subconjuntos representan una partición de *A*.

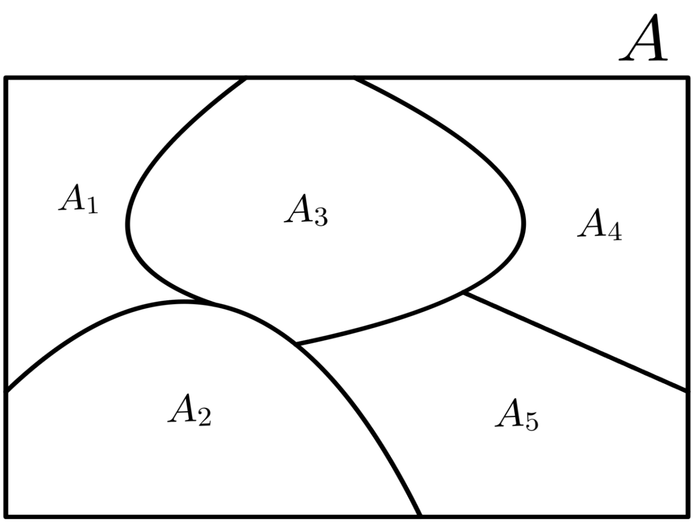
1. $\{\, \{a\},\ \{a, b\},\ \{c\},\ \{d\}\, \}$ No cumple que $P_i \cap P_j = \emptyset$ pues $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$
2. $\{\, \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\}\, \}$ Sí es una partición
3. $\{\, \{a, b\},\ \{c\}\, \}$ No cumple que $\bigcup_{i \in I} P_i = A$
4. $\{\, \{a\},\ \{b, c, d\},\ \emptyset\, \}$ No cumple que $P_i \neq \emptyset$
5. $\{\, \{a, b, c\},\ \{d\}\, \}$ Sí es una partición

En realidad es bastante sencillo determinar si una familia de subconjuntos de algún conjunto *A* forma una partición de *A* siguiendo estas propiedades.

De manera visual podemos ver a la partición como en la siguiente imagen:

Diagrama 17

Diagrama de una partición.



Elaboración propia

Ejemplo 2.10.20

Este es un ejemplo más elaborado que es muy utilizado en el cálculo integral al momento de definir una integral por medio de sumas de Riemann, pero de momento no nos adentraremos en eso, sino que lo expondremos tal cual como lo que nos interesa: la partición.

Consideremos a un intervalo $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $a = t_0$ y $b = t_n$ y formemos el siguiente orden:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Consideremos también a $I = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n - 1\} = J_{n-1}$

Como una breve nota, se acostumbra en algunas ocasiones describir a este conjunto *I* de esta manera. Por ejemplo si tenemos al conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ podríamos describirlo como J_3 asumiendo que corre en los números naturales hasta donde lo queramos topar. Se utiliza para simplificar notación y no escribirlo por extensión como lo hicimos anteriormente.

Con estas consideraciones en mente podemos formar una partición de este intervalo de la siguiente manera:

$$\{\ [t_i , t_{i+1})\ \}_{i \in I}$$

Por ejemplo si $a = 0$ y $b = 2$ podríamos tomar una partición de $n = 4$ de la siguiente manera:

$$a = 0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2 = b$$

Consideramos a $I = J_3$

Formamos la partición

$$\{\ [t_i , t_{i+1})\ \}_{i \in J_3}$$

Que desglosada queda de la siguiente forma:

$$\{\ [t_i , t_{i+1})\ \}_{i \in J_3} = \{\ [0, \tfrac{1}{2}),\ [\tfrac{1}{2},\ 1),\ [1,\ \tfrac{3}{2}),\ [\tfrac{3}{2},\ 2)\ \}$$

Es fácil corroborar en general que:

1. $[t_i, t_{i+1}) \neq \emptyset$
2. $[t_i, t_{i+1}) \cap [t_j, t_{j+1}) = \emptyset \qquad \forall\, i, j \in I$ con $i \neq j$
3. $\bigcup_{i \in I} [t_i, t_{i+1}) = [a, b)$

2.11 Simulación de examen parcial

Al igual que en el capítulo anterior, esta sección está pensada para que el lector ponga a prueba los conocimientos que debieron ser adquiridos a lo largo del capítulo, en el que se seleccionarán cinco ejercicios que son considerados de un nivel de algo que podría presentarse en algún examen parcial. Se presentarán primero los ejercicios y posteriormente su respectiva solución. Se recomienda al lector que trate de resolver los ejercicios en un lapso máximo de dos horas y solo utilice las respuestas como una guía tras concluir el ejercicio.

Problema 1:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se define a la *diferencia simétrica* de A y B como el siguiente conjunto:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Demuestre que la diferencia simétrica satisface la siguiente igualdad:

$$A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$$

Problema 2:

Sea $f : A \to B$ una función.

a) Demuestre que, si f es inyectiva, entonces para cualesquiera subconjuntos S_1, $S_2 \subseteq A$, se cumple:

$$f\,[S_1 \backslash S_2] = f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$$

b) Demuestre que, si f es biyectiva, entonces para todo subconjunto $S \subseteq A$ se cumple:

$$f\,[A \backslash S] = B \setminus f[S]$$

Problema 3:

Proporcione un ejemplo de una función $f : A \to B$ y subconjuntos $S, T \subseteq A$ de tal forma que:

$$f[S \cap T] \neq f[S] \cap f[T]$$

Problema 4:

Sea $A = \{a, b, c, \dots, j\}$. Encuentre una función $f : A \to A$ que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

1. $f^{-1}[\{a, b, c\}] = \emptyset$
2. $f^{-1}[\{d, e\}] = \{a, c, g\}$
3. $f^{-1}[\{h, j\}] = \{h, j\}$

Problema 5:

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos y sea *B* un conjunto cualquiera. Demuestre que:

$$B \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$$

Previo a presentar las soluciones es importante mencionar que cada quien lo resolverá como más crea conveniente, y eso está bien siempre y cuando se entienda el por qué de los pasos y queden plenamente justificados. Algunos de estos ejercicios son un poco más de creatividad en vez de realizar alguna demostración y esos son precisamente algunos de los que podrían variar dependiendo de lo que cada quien se ingenie. Dicho esto comenzamos con las soluciones de los problemas.

Respuestas

Problema 1:

Debemos probar que $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$.

Por ser una igualdad debemos hacer la demostración por doble contención. Se recomienda realizar un diagrama de Venn para mejor visualización.

Demostración:

$\subseteq$)

Sea $(a, b) \in A \times (B \triangle C)$

$\Rightarrow\ (a \in A) \wedge b \in (B \vartriangle C)$

Si $b \in (B \vartriangle C) \Rightarrow b \in (B \backslash C) \cup (C \backslash B)$

Esto significa que $(b \in b \wedge b \notin C) \vee (b \in C \wedge b \notin B)$

Caso 1:

Si $(b \in b \wedge b \notin C)$ entonces $(a, b) \in A \times B \ \wedge\ (a, b) \notin A \times C$

Caso 2:

Si $(b \in C \wedge b \notin B)$ entonces $(a, b) \in A \times C \ \wedge\ (a, b) \notin A \times B$

Por lo tanto $(a, b) \in (A \times B \setminus A \times C) \cup (A \times C \setminus A \times B)$

Finalmente $(a, b) \in (A \times B) \vartriangle (A \times C)$

$\supseteq$)

Sea $(a, b) \in (A \times B) \vartriangle (A \times C)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in (A \times B \setminus A \times C) \cup (A \times C \setminus A \times B)$

Esto significa que:

$(a, b) \in (A \times B \setminus A \times C) \vee (a, b) \in (A \times C \setminus A \times B)$

Caso 1:

$(a, b) \in (A \times B \setminus A \times C)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \notin (A \times C)$

$\Rightarrow\ (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (b \notin C)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in A \times (B \backslash C)$

Caso 2:

$(a, b) \in (A \times C \setminus A \times B)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in (A \times C) \wedge (a, b) \notin (A \times B)$

$\Rightarrow\ (a \in A) \wedge (b \in C) \wedge (b \notin B)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in A \times (C \backslash B)$

Del caso 1 y 2 tenemos que:

$(a \in A) \wedge (b \in B \backslash C \vee b \in C \backslash B)$

$\Rightarrow\ (a \in A) \wedge b \in (B \backslash C) \cup (C \backslash B)$

$\Rightarrow\ (a \in A) \wedge (b \in B \vartriangle C)$

$\Rightarrow\ (a, b) \in A \times (B \vartriangle C)$

$\therefore A \times (B \vartriangle C) = (A \times B) \vartriangle (A \times C)$ ■

Problema 2:

Este es posiblemente el ejercicio más complicado de la selección. Se menciona esto porque es importante aprender a diferenciar estos ejercicios en un momento de examen, pues estos son los que más tiempo y pensamiento suelen consumir y es conveniente dejarlos al último. Dicho esto comenzamos.

Demostración:

a)

Nuestras hipótesis son que tenemos una función $f : A \rightarrow B$ que es inyectiva y tenemos dos subconjuntos de A que son $S_1,\ S_2$.

Queremos probar que bajo estas hipótesis se cumple la igualdad:

$$f\,[S_1 \backslash S_2] = f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$$

Probamos por doble contención.

$\subseteq$)

Sea $f(x) \in f\,[S_1 \backslash S_2]$

Como f es inyectiva podemos garantizar que $f(x)$ proviene de una única $x \in A$, que para este caso en particular podemos decir que $f(x)$ proviene de una única $x \in S_1 \backslash S_2 \subseteq A$.

Esto significa que:

$$x \in S_1 \wedge x \notin S_2$$

Esto se puede dar únicamente porque f es inyectiva, pues si no lo fuera podría darse el caso en que $f(x)$ pudiera provenir de un elemento tanto de S_1 como de S_2 y por este hecho y no se cumpliría la igualdad.

Como $x \in S_1 \wedge x \notin S_2$, podemos garantizar que:

$$f(x) \in f\,[S_1] \wedge f(x) \notin f\,[S_2]$$

Por tanto:

$$f(x) \in f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$$

$\supseteq$)

Sea $f(x) \in f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$

Esto significa que:

$$f(x) \in f\,[S_1] \wedge f(x) \notin f\,[S_2]$$

Como f es inyectiva, esto significa que $f(x)$ proviene de un único elemento $x \in A$. Por lo que podemos afirmar que:

$$x \in S_1 \wedge x \notin S_2$$

Lo que se traduce en:

$$x \in S_1 \setminus S_2$$

Finalmente:

$$f(x) \in f\,[S_1 \setminus S_2]$$

$\therefore f\,[S_1 \setminus S_2] = f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$ ■

b) Demuestre que, si f es biyectiva, entonces para todo subconjunto $S \subseteq A$ se cumple:

$$f\,[A \setminus S] = B \setminus f[S]$$

Demostración:

Para esta demostración no es realmente necesario probar por doble contención, pues podemos utilizar el inciso anterior. Lo primero a utilizar de nuestras hipótesis es que tenemos que f es biyectiva. Esto nos dice que en particular es suprayectiva, por lo que:

$$img(f) = B$$

Haciendo uso del inciso a) que ya fue demostrado tenemos que si f es inyectiva se cumple para cualesquiera subconjuntos S_1, $S_2 \subseteq A$ la siguiente igualdad:

$$f\,[S_1 \setminus S_2] = f\,[S_1] \setminus f\,[S_2]$$

Para este caso en particular tomamos:

$S_1 = A$

$S_2 = S$

De acuerdo a la propiedad tenemos que:

$$f\,[A \setminus S] = f\,[A] \setminus f\,[S]$$

Y como f es suprayectiva y eso implica que $img(f) = f\,[A] = B$ tenemos finalmente que:

$$f\,[A \setminus S] = B \setminus f\,[S] \quad ■$$

Problema 3:

Proporcione un ejemplo de una función $f : A \to B$ y subconjuntos $S,\ T \subseteq A$ de tal forma que:

$$f\,[S\, \cap\, T] \neq f\,[S]\, \cap\, f\,[T]$$

Este es uno de los ejercicios en los cuales puede variar la respuesta que cada quien proporcione, y está bien siempre y cuando cumpla con lo solicitado.

Proporcionamos el siguiente ejemplo de una función y subconjuntos que cumplan estas características

Sean

$A = \mathbb{Z}$

$B = \mathbb{N}$

Y sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con $f(x) = x^2$

Tomamos:

$S = \{-2, -1, 0\} \subseteq \mathbb{Z}$

$T = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{Z}$

Entonces:

$S \cap T = \{ 0 \}$

$f\,[S] = \{0, 1, 4\}$

$f\,[T] = \{0, 1, 4\}$

Con estos datos hacemos las operaciones solicitadas

$f\,[S \cap T] = f\,[\{ 0 \}] = \{ 0 \}$

$f\,[S] \cap f\,[T] = \{0, 1, 4\} \cap \{0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$

Por lo tanto para esta función y subconjuntos se cumple que $f\,[S \cap T] \neq f\,[S] \cap f\,[T]$.

Problema 4:

Sea $A = \{a, b, c, \dots, j\}$. Encuentre una función $f : A \to A$ que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

4. $f^{-1}\,[\{a, b, c\}] = \emptyset$
5. $f^{-1}\,[\{d, e\}] = \{a, c, g\}$
6. $f^{-1}\,[\{h, j\}] = \{h, j\}$

Solución:

Este es otro de los ejercicios en los que las respuestas pueden variar, dado que está sujeto a la creatividad de cada quien.

La forma fácil para resolver este problema era recordando y haciendo uso de las *funciones seccionadas*, pues estas las podemos definir de maneras particulares.

Uno de los ejemplos que podríamos proporcionar para esta función es el siguiente, pues cumple las condiciones solicitadas.

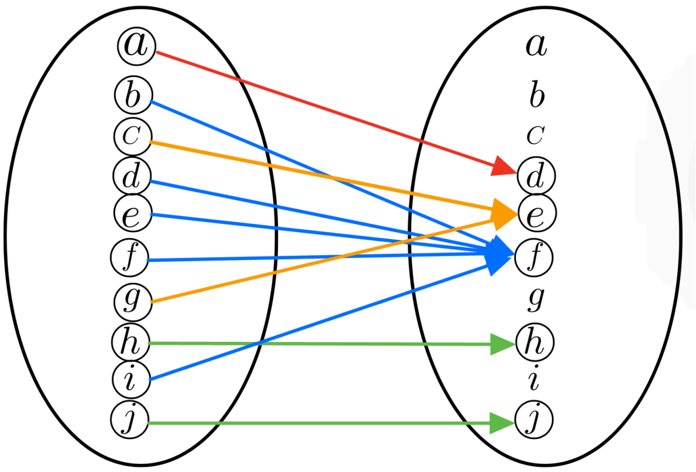
Construimos a:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x = h,\ j \\ d \text{ si } x = a \\ \\ e \text{ si } x = c,\ g \\ f \text{ si } x = i,\ b,\ d,\ e,\ f \end{cases}$$

Podemos corroborar esta función de manera visual con el siguiente diagrama:

Diagrama 18

Ejercicio.



Elaboración propia.

Es sencillo corroborar que efectivamente esta función cumple con los requisitos solicitados en el ejercicio.

Problema 5:

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y sea *B* un conjunto cualquiera. Demuestre que:

$$B \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$$

Demostración:

Probamos por doble contención.

$\subseteq$)

Sea $x \in B \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i)$

Lo que significa que:

$$x \in B \wedge x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$$

Como $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$, esto significa que para alguna $j \in I$ ocurre que $x \notin A_j$

Esto significa que:

$$x \in (B \setminus A_j)$$

Por tanto, como sabemos que al menos para alguna $j \in I$ esto ocurre, entonces debe ocurrir que:

$$x \in \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$$

$\supseteq$)

Sea $x \in \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$

Esto significa que para alguna $j \in I$ ocurre que:

$$x \in (B \setminus A_j)$$

Que es lo mismo que decir que:

$$(x \in B) \wedge (x \notin A_j)$$

Si $x \notin A_j$ para alguna $j \in I$, entonces:

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$$

Por tanto:

$$(x \in B) \wedge (x \notin \bigcap_{i \in I} A_i)$$

Finalmente:

$$x \in B \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i)$$

$\therefore B \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$ ■

Con esto damos fin al capítulo y al trabajo. De manera general esto es lo que se ve en las materias en particular de Álgebra Superior I, Cálculo Diferencial e Integral I y Geometría Analítica I. Este trabajo está mucho más enfocado en los temas que se ven en la materia de álgebra superior, pero con algunos elementos de cálculo diferencial y de geometría analítica. El principal enfoque del trabajo es exponer la importancia que tuvo presentar primero material y temario referente a lógica matemática para poder aterrizar de mejor manera los conceptos vistos en este capítulo, pues muchas de las demostraciones llevan de manera implícita o explícita el uso de la lógica y las tablas de verdad o reglas de inferencia incluidas en ellas.

Muchas veces pasamos por alto la importancia de la lógica matemática, pero es importante recordar que de ahí proviene la teoría en general, y con su entendimiento es más fácil llevar a buen puerto conceptos más complicados en un futuro.

Conclusiones

Con base en la experiencia en la participación del Programa Preventivo para Materias de Alto Índice de Reprobación, mi compañero de servicio y yo pudimos notar las deficiencias con las que llegan nuestros alumnos y que repercuten en su trayectoria académica de manera no satisfactoria. Derivado de ello, nació la iniciativa de crear un documento como este para aportar a la mejora del aprendizaje y del mismo Programa Preventivo.

La comprensión o entendimiento de temas de índole matemático radica en comprender las reglas de inferencia lógica y la relación que guarda con las demostraciones formales que se utilizan en todas las áreas de la matemática. Por ende, en el primer capítulo se presentaron los cimientos de la estructura, para que en el segundo capítulo se vea la importancia y aplicación que tienen las herramientas expuestas referentes a la lógica matemática en ramas ya formales de esta.

Si bien es cierto que las áreas en donde se desarrolla un actuario versan sobre finanzas matemáticas, estadística y probabilidad, análisis de riesgo, cálculo actuarial entre otras, para poder comprender dichas áreas es necesario contar con bases sólidas en el conocimiento de matemáticas puras. Por lo que, se espera que a través de este trabajo se haya logrado una transmisión de conocimientos de los temas presentados de manera exitosa, y que el lector logre comprender y analizar los temas propios de la actuaría en un futuro, que ya es un área específica de las matemáticas aplicadas.

Si bien este trabajo está cumpliendo con una función de introducción al formalismo matemático, es meramente eso: una introducción a la gran cantidad de temas que aborda en general tanto la matemática como la licenciatura en Actuaría. En un futuro se pretende que sea el guión de un texto de álgebra que sea transversal a las demás asignaturas.

La licenciatura en Actuaría es vista como un gran reto tanto por los que la estudian como por quienes no pero tienen una noción de lo que se ve en ella, y no es de sorprenderse, pues gran parte del reto de esta licenciatura es precisamente la gran profundización que se realiza en el campo de las matemáticas. Gran parte de lo que es muy valorado en un actuario en el campo laboral es el gran criterio y la capacidad de análisis que tiene este perfil. Habrán muchos temas relacionados con las matemáticas puras que puede ser que los estudiantes nunca vuelvan a utilizar en la vida laboral, sin embargo ese análisis que dejan este tipo de materias crean en quien lo estudia una habilidad de razonar distinta a la gran mayoría de las personas. Nos enseñan a pensar “fuera de la caja”, y ese razonamiento es precisamente el que nos puede catapultar como actuarios a generar algún modelo creativo y sustentado matemáticamente para la resolución de problemas.

Para llegar a este razonamiento deseado es de vital importancia fomentar y entender las matemáticas puras, y ese puede ser uno de los mayores problemas que tienen los estudiantes de esta licenciatura, en particular los de nuevo ingreso al ser la primera vez que se enfrentan a las matemáticas en su forma más cruda. Todo esto puede ser solucionado entendiendo los temas desde su base, arrancando desde cero y tomándose un tiempo para meditar los primeros temas que sirven como punto de conexión para entender más adelante temas de mayor complejidad.

Es cierto que cada persona lleva su propio ritmo de aprendizaje, y puede ser que haya personas que se les pueda dar de una forma más natural entender estos temas, pero aunque a algunos se les pueda facilitar más que a otros hay algo referente al entendimiento de estos temas que siempre habrá en común en los estudiantes independientemente de su ritmo de aprendizaje y eso es el estudio y la práctica.

El hacerse siempre espacio para repasar los temas y realizar ejercicios, fomentar la práctica siempre hará la diferencia y es lo que podrá llevarnos a entender con éxito estos temas que serán la base para las ramas de matemáticas aplicadas que se ven en la licenciatura, las cuales son Probabilidad y Estadística, Finanzas, Cálculo Actuarial, Economía y algunas cuestiones relacionadas con optimización como lo es la asignatura de Investigación de Operaciones, para ver finalmente en el último año de la licenciatura asignaturas relacionadas con la esencia de un actuario, que es la teoría y administración del riesgo. Puede ser un largo camino por recorrer, pero teniendo sólidas las bases de los primeros semestres se puede llegar a un entendimiento satisfactorio de estas ramas y que eso sea el boleto a un buen desempeño laboral y una gran capacidad de análisis, escasa en muchos profesionales, pero que es lo que nos diferencia como actuarios, esa es la esencia de quiénes somos.

Referencias

- Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp.
- Echeto, Dariana (10 febrero 2021). Qué es la tautología. Sitio web: https://www.que.es/2021/02/10/que-es-tautologia/
- Suppes, P., Hill, S. (1988). Primer curso de lógica matemática. Reverté Colombiana S.A.
- Gómez, C. (2014). Álgebra Superior curso completo (1.ª ed.). Facultad de Ciencias UNAM.
- Gomezcaña, E. (2020). Curso de Álgebra Superior I. Facultad de Estudios Superiores Acatlán UNAM.
- Van Orman, W. (1940). Mathematical Logic. W.W. Norton Company.
- Rodríguez, H. (16 septiembre 2022). Los 7 problemas matemáticos del millón de dólares. Sitio web: https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/7-problemas-matematicos-millon-dolares_18751
- Rincón, L. (2014). Introducción a la probabilidad. Facultad de Ciencias UNAM.
- Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F., Tomás, F.(1995). Álgebra Superior. (2.ª ed.). México: Trillas.
- Solow, D. (2012). Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas. México. Limusa.
- Amor, J. (2010). Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias. La prensa en ciencias
- Chávez, M. (2014). Notas de lógica matemática. Facultad de Estudios Superiores Acatlán. Por aparecer.
- Mendelson, E. (2000). Introduction to mathematical logic. 6th edition.
- González, M. (2020). Curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Facultad de Estudios Superiores Acatlán UNAM.
- Pérez, A. (2010). Lógica, conjuntos, relaciones y funciones. México. SMM.