



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Caracterización de superficies paralelas
en el espacio de Minkowski

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
José Eduardo Núñez Ortiz

DIRECTOR:
Dr. Gabriel Ruiz Hernández
Instituto de Matemáticas, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dr. Óscar Alfredo Palmas Velasco
Facultad de Ciencias, UNAM

Dr. Didier Adán Solís Gamboa
Facultad de Matemáticas, UADY

CIUDAD DE MÉXICO, 1 DE NOVIEMBRE 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Caracterización de superficies paralelas
en el espacio de Minkowski

José Eduardo Núñez Ortiz

*A los rotos
sepan que existen formas de resarcirnos*

Introducción

Los años han visto el desarrollo, por momentos vertiginoso, de la matemática y la geometría. Desarrollo que ha concatenado siglos de nociones geométricas en un lenguaje técnico y compacto que gran parte del tiempo consideramos elegante. A su vez, la simpleza del lenguaje moderno nos a llevado por caminos nuevos que, a pesar de ser claros, muchas veces se nos presentan sin una característica geométrica visible, dicho en un lenguaje coloquial, sin un dibujo al cual recurrir que arroje luz sobre la información de los enunciados y ecuaciones que se tienen en manos.

Uno de los objetivos de las caracterizaciones en geometría de subvariedades es el de conocer distintas caras de una misma condición geométrica sobre alguna subvariedad, y así rescatar nociones geométricas de una ecuación o conjunto de ecuaciones que de otra forma podrían parecerse territorios yermos. El logro de esta tesis es el de ahondar y describir algunos de los pormenores de la condición $\nabla A_\xi = 0$ que define a las superficies paralelas en un ambiente lorentziano.

La motivación de esta tesis encuentra su punto de arranque en el siguiente resultado, mostrado en [5] por Luis Hernández Lamonedá y Gabriel Ruiz Hernández.

Teorema. Sea M una superficie inmersa en un espacio modelo riemanniano de dimensión 3. Si por cada punto p de M pasan tres curvas diferentes tales que las superficies normales a ellas son mínimas, entonces M es isoparamétrica.

El objetivo del trabajo aquí presentado es llevar esta caracterización a espacios ambientes lorentzianos, puntualmente al espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , donde se encontrará que la característica de las tres curvas es en realidad una característica de las superficies paralelas y no de las superficies isoparamétricas, como se mostró en [5].

El capítulo 1 de esta tesis introduce la herramienta básica para entender los restantes capítulos. Se empieza por desarrollar brevemente el formalismo expuesto por Krishan L. Duggal y Aurel Bejancu en [3] para describir las curvas tipo luz en un espacio lorentziano de dimensión 3; posteriormente se demuestran algunas propiedades del operador de forma de una superficie en un ambiente lorentziano; se desarrolla la herramienta necesaria para entender las superficies tipo B-scroll y se termina por describir las superficies paralelas de \mathbb{R}_1^3 .

Al final del capítulo 1 la discusión se centra en la relación que existe entre las superficies paralelas y las superficies isoparamétricas del espacio de Minkowski. Esta relación es de particular interés para el desarrollo de esta tesis ya que, de ser \mathbb{R}^3 el espacio ambiente, ambas clases de superficies serían congruentes

por isometrías a planos, cilindros y esferas. Dicho de otra forma, ambas clases coinciden por completo en \mathbb{R}^3 . Aún más, ambas clases de superficies coinciden en cualquier espacio modelo riemanniano de dimensión 3; esta coincidencia es la que permite en [5] caracterizar las superficies isoparamétricas de cualquier espacio modelo riemanniano sin detenerse demasiado en las superficies paralelas de dichos espacios ambientes. Este no sucede en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 ; en dicho espacio ambiente toda superficie paralela es isoparamétrica pero no toda superficie isoparamétrica será paralela. Esto sucede gracias a la familia de superficies B-scroll que no tiene una contraparte riemanniana.

El capítulo 2 sigue de cerca el desarrollo hecho en [5] para demostrar una caracterización de superficies paralelas en el espacio de Minkowski. Para esto se empieza por definir con claridad qué es una superficie normal a lo largo de una curva ya que es a través de estos objetos que se logra dicha caracterización.

Definición. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M . Se define la superficie normal Σ_γ como la superficie reglada que es ortogonal a M a lo largo de γ y que se encuentra descrita por la siguiente parametrización:

$$\phi(s, t) = \gamma(s) + t\xi(s)$$

donde ξ es el campo normal unitario de M y t se encuentra en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para alguna $\varepsilon > 0$.

Eventualmente se encontrarán diferencias con los resultados expuestos en [5]; de estas diferencias resalta la siguiente proposición.

Proposición. Sea γ una geodésica de una superficie M tipo tiempo o espacio. Entonces la superficie normal Σ_γ es una superficie extrema de \mathbb{R}_1^3 si y sólo si γ es una curva de las siguientes clases:

- γ es una línea de curvatura de M con $\tau = 0$.
- γ es una curva con curvatura y torsión constantes tal que $\tau \neq 0$.

La principal diferencia es que ahora se trata de una equivalencia y para que esta se cumpla ha sido necesario cambiar una de las clases de curvas mencionadas en la Proposición 2 original en [5]. En ella las clases de curvas mencionadas son líneas de curvatura y hélices, en este caso se cambian las hélices por curvas de curvatura y torsión constantes tal que la torsión es diferente de cero. Entonces, lo que se ha hecho para obtener la equivalencia es relajar la condición sobre la curvatura de las curvas mencionadas en la proposición original, ya que una hélice tiene curvatura y torsión constantes diferentes de cero.

Lo anterior tiene una fuerte consecuencia; el trabajo aquí presentado desarrolla dos caracterizaciones de superficies paralelas en \mathbb{R}_1^3 en vez de una y esto es posible al considerar una clase de curvas más grande que la de las hélices. Con esto, el *primer teorema de caracterización* queda de la siguiente manera.

Teorema. Sea M una superficie tipo tiempo o espacio de \mathbb{R}_1^3 . Entonces por cada punto p de M pasan dos geodésicas diferentes de M que no son tipo luz con curvatura y torsión constantes si y sólo si M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

El capítulo 2 cierra con el *segundo teorema de caracterización* que es la generalización buscada del Teorema 1 mostrado en [5]. Esta generalización se obtiene al cambiar el espacio ambiente euclidiano \mathbb{R}^3 por el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 y cambiando superficies isoparamétricas por superficies paralelas, mostrando así que la característica de las tres curvas siempre fue una característica de esta últimas.

Teorema. Sea M una superficie tipo tiempo o espacio en \mathbb{R}_1^3 . Entonces, por cada uno de sus puntos pasan tres curvas, tipo tiempo o espacio, tales que sus superficies normales son máximas o mínimas si y sólo si M es paralela.

Si bien esta forma de caracterizar superficies comenzó en [7] y siguió en [5], fue el *Teorema de Bonnet* en \mathbb{R}^3 un punto de partida para estas caracterizaciones. Dicho teorema sigue siendo cierto en el espacio de Minkowski.

Teorema de Bonnet. Sea γ una curva tipo tiempo o espacio contenida en una superficie M tipo tiempo o espacio de \mathbb{R}_1^3 y sea Σ_γ la superficie normal a M a lo largo de γ . Entonces, γ es una línea de curvatura de M si y sólo si Σ_γ es plana.

Las caracterizaciones buscadas en esta tesis surgen de cambiar línea de curvatura por geodésica y curvatura por curvatura media. Sin embargo, al intentar aplicar este teorema de Bonnet a curvas tipo luz se encuentra rápidamente la dinámica entre superficies, curvas y superficies normales que permite ahondar en la caracterización de superficies paralelas en \mathbb{R}_1^3 .

Así, el capítulo 3 de esta tesis empieza por escudriñar aún más la relación entre la geometría de las curvas contenidas en una superficie y la geometría de la superficie que las contiene, particularmente en el caso que la curva sea tipo luz. Esto permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema de Bonnet tipo luz. Sea M una superficie tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) γ es una es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 .
- (b) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .
- (c) Σ_γ es un plano tipo luz.
- (d) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Este teorema que se ha decidido nombrar *Teorema de Bonnet tipo luz* mantiene la condición de línea de curvatura sobre γ pero ha cambiado la curvatura de Σ_γ por su causalidad. Esto hace ver una rigidez insospechada entre la causalidad de la superficie normal Σ_γ y la curva γ que sirve de base.

Más adelante en el capítulo 3 se demostrará una versión del Teorema de Bonnet tipo luz en los espacios modelos lorentzianos $S_1^3(r)$ y $H_1^3(r)$. Este teorema es una ligera generalización del Teorema de Bonnet tipo luz, donde $N_1^3(K)$ denota a cualquier espacio modelo lorentziano, es decir, $N_1^3(K)$ es localmente congruente a $S_1^3(r)$, \mathbb{R}_1^3 ó $H_1^3(r)$ si $K > 0$, $K = 0$ ó $K < 0$, respectivamente.

Teorema. Sea M una superficie en el espacio modelo $N_1^3(K)$ y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) γ es una geodésica tipo luz del ambiente.
- (b) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .
- (c) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Una consecuencia directa de estos resultados será una caracterización de todas las superficies umbilicales en los espacios modelos lorentzianos de dimensiones 3. Esta sección del capítulo cierra con un intento de llevar estas ideas a las hipersuperficies de cualquier espacio ambiente lorentziano de dimensión n . El enunciado resultante consta sólo de dos enunciados equivalentes, suficientes para caracterizar a las hipersuperficies umbilicales de cualquier espacio ambiente lorentziano.

Teorema. Sea M una hipersuperficie en el espacio modelo $N_1^{n+1}(K)$ y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .
- (b) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Del teorema de Bonnet tipo luz se desprende lo siguiente; si una curva γ tipo luz en una superficie M no es línea de curvatura, la superficie normal Σ_γ no será tipo luz. Aún así, si la curva γ es tipo luz, la superficie normal Σ_γ será tipo luz en la intersección con M . Es por esta razón que al avanzar en la tesis se ha propuesto analizar la geometría de la superficie normal Σ_γ por sus componentes, que se encuentran a un lado y otro de la intersección con la superficie M . Si se denota a estas componentes por los símbolos Σ_γ^+ y Σ_γ^- , el desarrollo de la tesis lleva al siguiente resultado.

Proposición. Sea γ una curva tipo luz en una superficie M tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Si Σ_γ^+ ó Σ_γ^- es no degenerada se obtiene lo siguiente:

- (a) Si Σ_γ^+ es tipo tiempo entonces Σ_γ^- es tipo espacio
- (b) Si Σ_γ^+ es tipo espacio entonces Σ_γ^- es tipo tiempo

Este último resultado hace ver que, si la causalidad de la curva γ es tipo luz, las causalidades de las componentes Σ_γ^+ y Σ_γ^- no pueden variar de manera arbitraria. Y no sólo eso; la geometría de ambas componentes está fuertemente relacionada.

Lema. Sea γ una curva tipo luz en una superficie M tipo tiempo tal que Σ_γ^+ es no degenerada. Entonces $H^+ = 0$ si y sólo si $H^- = 0$.

Esto permite analizar tan solo una de las componentes con la herramienta desarrollada en el capítulo 2 y así obtener resultados importantes sobre la geometría de curva γ que sirve de base a las componentes Σ_γ^+ y Σ_γ^- .

Proposición. Sea γ una curva tipo luz en una superficie M tipo tiempo tal que Σ_γ^+ es no degenerada. Entonces $H^+ = 0$ si y sólo si γ tiene curvaturas constantes tal que $\kappa_1 \neq 0$.

Mientras que una curva tipo tiempo o espacio tiene curvatura y torsión, una curva tipo luz tiene una primera curvatura y una segunda curvatura. Así, sin importar la causalidad de la curva γ en M , mientras una de las componentes de la superficie normal Σ_γ tenga una métrica no degenerada y cumpla que su curvatura media H sea idénticamente cero, las funciones que determinan la geometría de γ serán constantes. Esto último permite englobar el trabajo de los capítulos 2 y 3 en nociones bastante simples.

El capítulo 3, y esta tesis, concluyen con una reedición del primer teorema de caracterización en términos de curvas tipo luz, dando así una buena idea sobre cómo el trabajo aquí realizado se podría sintetizar en una serie de enunciados más generales.

Teorema. Sea M una superficie tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Entonces por cada punto p de M pasan dos geodésicas tipo luz de M con curvaturas constantes si y sólo si M es paralela.

Son muchos los caminos que se pueden seguir con el material labrado en esta tesis; cambiar los espacios ambiente, aumentar las dimensiones o permitir superficies tipo luz M como punto de partida. En buena medida ya hay trabajo en esta dirección, basta con leer el trabajo de Josué Meléndez con Mario Hernández en [8] y con Eduardo Rodríguez en [9], donde se trabaja el concepto de superficie normal Σ_γ con mayor generalidad en ambientes riemannianos.

Índice general

Introducción	III
Índice general	IX
1. Superficies en el espacio de Minkowski	1
1.1. Curvas tipo luz	5
1.2. El operador de forma para superficies	13
1.3. Superficies regladas y la clase B-Scroll	18
1.4. Superficies paralelas	26
2. Superficies normales no degeneradas	39
2.1. Superficies normales regladas	40
2.2. Superficies normales extremas	47
2.3. Primer teorema de caracterización	52
2.4. Segundo teorema de caracterización	61
3. Superficies normales sobre curvas tipo luz	75
3.1. Curvas tipo luz en superficies	76
3.2. Superficies normales tipo luz	84
3.3. Superficies paralelas tipo tiempo	93
3.4. Curvas tipo luz y superficies paralelas	98
Conclusión	103
Bibliografía	105

Capítulo 1

Superficies en el espacio de Minkowski

El trabajo hecho en esta tesis se desarrolla en el contexto de la geometría de *subvariedades semiriemannianas* donde los objetos principales son variedades C^∞ acompañados de un *tensor métrico* no degenerado de índice arbitrario. Un desarrollo más profundo de las bases de esta área se puede consultar en [10]. Aún así, vale la pena puntualizar los siguientes conceptos.

Definición 1.1. Una *métrica lorentziana* g sobre \mathbb{R}^n es una forma bilineal simétrica no degenerada que tiene índice 1. Así, se define el *espacio de Minkowski* \mathbb{R}_1^n de dimensión n como el espacio vectorial \mathbb{R}^n acompañado de una métrica lorentziana g , es decir:

$$(\mathbb{R}^n, g) = \mathbb{R}_1^n$$

Buena parte de la geometría desarrollada en esta tesis tendrá al espacio de Minkowski como escenario principal, particularmente se trabajará con superficies en el espacio \mathbb{R}_1^3 y se especificarán en su momento los cambios de espacio ambiente que se lleven a cabo.

Por otro lado, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}_1^3 , la métrica de Lorentz g adquiere la siguiente representación matricial en dicha base:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Esta representación está asociada también a las coordenadas (t, x, y) inducidas por la base canónica. En general, una variedad C^∞ es una *variedad lorentziana* si cada espacio tangente es similar al espacio de Minkowski.

Definición 1.2. Sea \overline{M} una variedad C^∞ y \overline{g} un campo tensorial sobre \overline{M} . Se dice que \overline{M} es una *variedad lorentziana* si en cada punto p de \overline{M} el campo tensorial \overline{g} induce una métrica lorentziana sobre cada espacio tangente $T_p\overline{M}$.

Las condiciones suficientes para la existencia de una métrica lorentziana en una variedad C^∞ se pueden consultar en [10, Cap. 5]. Por otro lado, siempre

que se hable en abstracto de la métrica de un espacio se usará el símbolo g para hablar de ella, sin embargo, el producto de dos campos vectoriales X y Y se denotará de la siguiente manera:

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle .$$

El *carácter causal* de un vector u en \mathbb{R}_1^n es uno de los conceptos fundamentales de la geometría lorentziana y este queda definido en términos de la métrica.

Definición 1.3. Todo vector u en \mathbb{R}_1^n tiene un *carácter causal* bien definido y este se determina de la siguiente manera:

- Se dice que u es tipo tiempo o temporal si $\langle u, u \rangle < 0$.
- Se dice que u es tipo luz o nulo si $\langle u, u \rangle = 0$ y $u \neq 0$.
- Se dice que u es tipo espacio o espacial si $\langle u, u \rangle > 0$ ó $u = 0$.

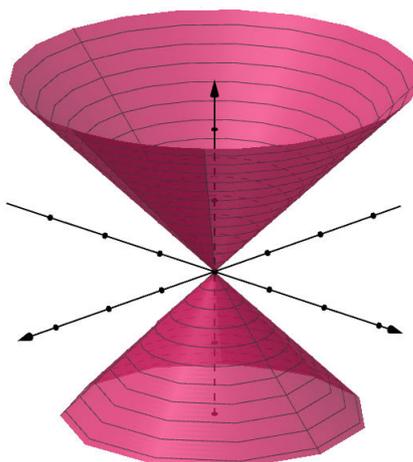


Figura 1.1: Cono de luz en \mathbb{R}_1^3 : El cono representa a los vectores tipo luz de \mathbb{R}_1^3 ; los vectores tipo tiempo se encuentran al interior del cono mientras que los vectores tipo espacio se encuentran al exterior del cono. El eje vertical está asociado a la coordenada t .

La causalidad aquí definida está relacionada con la relación causal que existe entre eventos físicos en el marco de la teoría de la relatividad especial. Además, este carácter causal se puede llevar a los subespacios vectoriales del espacio de Minkowski.

Definición 1.4. Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}_1^n :

- V es tipo tiempo o temporal si la métrica inducida $g|_V$ es una métrica de Lorentz.
- V es tipo luz o degenerado si la métrica inducida $g|_V$ es degenerada.

- V es tipo espacio o espacial si la métrica inducida $g|_V$ es una métrica riemanniana.

La Definición 1.4 permite aplicar el concepto de carácter causal a subvariedades M de cualquier espacio ambiente lorentziano \overline{M} , tomando en cuenta que $T_p\overline{M}$ es una copia de \mathbb{R}_1^n para todo p en M y que T_pM es un subespacio vectorial de $T_p\overline{M}$.

Definición 1.5. Sea M una subvariedad de un espacio ambiente lorentziano \overline{M} y sea p un punto de M :

- Se dice que M es tipo tiempo o temporal si T_pM es tipo tiempo para todo p en M .
- Se dice que M es tipo luz o degenerada si T_pM es tipo luz para todo p en M .
- Se dice que M es tipo espacio o espacial si T_pM es tipo espacio para todo p en M .

La siguiente observación es necesaria para no caer en ambigüedades.

Observación 1.6. Si una superficie o subvariedad es tipo tiempo o tipo espacio, se dirá que es no degenerada.

Aunque \mathbb{R}_1^3 será el espacio ambiente predilecto en esta tesis, también se trabajará en *espacios modelos* lorentzianos.

Definición 1.7. Se dice que $N_1^3(K)$ es un *espacio modelo* lorentziano si es simplemente conexo, geodésicamente completo y tiene curvatura K constante.

Si M es una subvariedad de \overline{M} y la métrica inducida $g = \overline{g}|_M$ del ambiente sobre M es no degenerada, se obtiene la siguiente descomposición para el espacio tangente del ambiente:

$$T\overline{M}|_M = TM \oplus TM^\perp ,$$

donde TM^\perp es el haz normal de M . Así, considerando la conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de \overline{M} se definen las siguientes fórmulas básicas de la geometría de subvariedades:

Definición 1.8. Sean X y Y campos tangentes a una subvariedad no degenerada M en un ambiente lorentziano \overline{M} . La siguiente descomposición se conoce como la *fórmula de Gauss* :

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) ,$$

donde la parte normal $h(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ es la *segunda forma fundamental* de M y la parte tangente $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$ la *conexión inducida*, y por tanto la conexión de Levi-Civita, de M .

La misma idea de la definición anterior se puede aplicar a campos vectoriales normales a M en alguna dirección tangente.

Definición 1.9. Sea M una subvariedad no degenerada de \overline{M} y N un campo vectorial ortogonal a M en \overline{M} . La *fórmula de Weingarten* se escribe de la siguiente manera:

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N ,$$

para cualquier campo tangente X a M . La conexión $\nabla_X^\perp N = (\overline{\nabla}_X N)^\perp$ se conoce como *conexión normal* de M mientras que $A_N = (\overline{\nabla}_X N)^\top$ es conocido como el *operador de forma* de M respecto de N .

Notación 1.10. Es importante establecer la siguiente notación para el resto de la tesis:

- D representará la conexión de Levi-Civita del espacio \mathbb{R}_1^n ó \mathbb{R}_k^n en caso que el índice se mayor que 1.
- $\overline{\nabla}$ representará la conexión de Levi-Civita de un espacio ambiente arbitrario \overline{M} .
- M representará un superficie o hipersuperficie, según sea el caso.
- ∇ representará la conexión inducida de M .

Las curvas serán uno de los objetos geométricos más comunes a tratar en este trabajo. Al ser estas subvariedades de dimensión 1 se les puede asociar un carácter causal determinado.

Definición 1.11. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva C^∞ , entonces:

- α es tipo tiempo o temporal si $\alpha'(t)$ es tipo tiempo para toda t en I .
- α es tipo luz o nula si $\alpha'(t)$ es tipo luz para toda t en I .
- α es tipo espacio o espacial si $\alpha'(t)$ es tipo espacio para toda t en I .

Con esto se ha dado un panorama básico de los objetos que abundarán en esta tesis, así como de los símbolos que los representarán. Se cerrará esta breve introducción con una última definición:

Definición 1.12. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de una variedad semirriemanniana M . Se dice que una curva γ contenida en M es una *geodésica* de M si:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

Mas adelante se verá en esta tesis que la cualidad de ser geodésica de una curva γ en un espacio M depende fuertemente del parámetro con el cuál se describe la curva.

Convenciones 1.13. Para terminar con esta introducción es prudente establecer ciertas nociones comunes:

- Todas las curvas serán curvas regulares del espacio en el cual estén definidas.
- Todas las curvas tipo tiempo o espacio estarán parametrizadas por longitud de arco.

- Todos los espacios se considerarán C^∞ y conexos.
- Se considerará que todas las variedades están orientadas. Si M es una subvariedad de codimensión 1 se usará el símbolo ξ para denotar a su campo normal unitario.
- Que una subvariedad sea no degenerada implica que su métrica es no degenerada, es decir, una subvariedad no degenerada es tipo tiempo o tipo espacio.

En caso de tratar con curvas o subvariedades nulas se utilizará el formalismo desarrollado por K. Duggal, el cual se encuentra expuesto de manera clara en [3].

1.1. Curvas tipo luz

Sin importar la métrica del espacio ambiente las curvas son algunos de los objetos geométricos básicos de la geometría diferencial. Muchas veces es a través de estos objetos que se puede entender mejor el espacio tangente a una variedad e incluso derivar funciones respecto de una.

El siguiente trabajo, como buena tesis en geometría diferencial, no prescinde de tales objetos, al contrario se abusa de estos y, dado que el espacio ambiente siempre será lorentziano, la causalidad de las curvas entrará en juego. Así, en caso que la curva a estudiar sea tipo tiempo se puede aplicar un formalismo similar al del caso riemanniano. Los casos tipo espacio y tipo luz requieren de mayor atención y no se discutirán aquí.

Dadas las necesidades de esta tesis se desarrollará a continuación el formalismo necesario para estudiar las curvas tipo luz de un espacio lorentziano \overline{M} . Además, todas las curvas serán regulares y se usará la Definición 1.11 como punto de partida, es decir, que si α es una curva nula o tipo luz de \overline{M} se cumplirá lo siguiente a lo largo de toda la curva α :

$$\alpha' \neq 0 \quad ; \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 .$$

Así, que el vector tangente α' sea ortogonal a sí mismo es una de las principales diferencias a notar respecto del caso riemanniano; esto dificulta la construcción del *marco de Frenet* para una curva tipo luz α en un ambiente lorentziano. El siguiente lema ilustra bastante bien esta situación.

Lema 1.14. El espacio ortogonal V^\perp de un subespacio vectorial degenerado V de \mathbb{R}_1^n es un subespacio vectorial degenerado de \mathbb{R}_1^n de dimensión complementaria a V . Además la intersección de V con V^\perp es diferente del vacío.

La demostración del Lema 1.14 se sigue de los preliminares en [10] y [3]. Aun así, cabe notar que si u es un vector tipo luz en un subespacio vectorial degenerado V este es ortogonal a sí mismo y, por tanto, la intersección de V con su espacio ortogonal V^\perp consta del espacio generado por el vector u , es decir:

$$V \cap V^\perp = \langle u \rangle ,$$

ya que en un espacio lorentziano dos vectores tipo luz son ortogonales si y sólo si estos son múltiplos escalares entre sí. Entonces, una implicación directa del Lema 1.14 es que la suma $V + V^\perp$ no es directa y no genera al espacio \mathbb{R}_1^n . En términos de una curva tipo luz esto último se puede plantear de la siguiente manera.

Proposición 1.15. Sea α una curva tipo luz en un espacio lorentziano \overline{M} y p un punto sobre la curva. Entonces el espacio ortogonal $T_p\alpha^\perp$ al espacio tangente $T_p\alpha$ es un plano degenerado en $T_p\overline{M}$ que contiene a $T_p\alpha$ para todo punto p sobre la curva.

Esto sugiere que en caso que α sea una curva tipo luz de \overline{M} no se puedan tomar dos vectores linealmente independientes en el espacio ortogonal a α' para formar, junto con α' , una base del espacio tangente $T_\alpha\overline{M}$ en cada punto sobre la curva.

Para construir una base de $T_p\overline{M}$ que contenga al vector α' en cada punto p sobre la curva α se puede empezar por tomar cualquier vector W en el espacio ortogonal $T_p\alpha^\perp$ que no esté en la dirección de α' . Así, el vector W será espacial ya que cualquier espacio complementario a $T_p\alpha$ en $T_p\alpha^\perp$ es tipo espacio. Esto le da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.16. Sea α una curva tipo luz en \overline{M} y p un punto sobre α . Se define el *subespacio screen* $S(T_p\alpha^\perp)$ de $T_p\alpha^\perp$ como cualquier subespacio complementario de $T_p\alpha$ en $T_p\alpha^\perp$. Esto implica la siguiente relación:

$$T_p\alpha^\perp = T_p\alpha \oplus S(T_p\alpha^\perp) .$$

Además, se define el haz vectorial screen $S(T\alpha^\perp)$ sobre α como el haz vectorial cuyas fibras en cada punto son espacios screen de $T_p\alpha^\perp$, es decir:

$$T\alpha^\perp = T\alpha \oplus S(T\alpha^\perp) ,$$

a nivel de haces vectoriales.

De aquí en adelante se asumirá que el haz screen $S(T\alpha^\perp)$ para cualquier curva tipo luz α será C^∞ . Esta suposición se hace sin temor alguno ya que el enfoque de la tesis tiene una naturaleza local y C^∞ en todos sus aspectos. Por otro lado cabe mencionar que las fibras del haz screen $S(T\alpha^\perp)$ siempre serán tipo espacio en cada espacio tangente del ambiente.

La Definición 1.16 formaliza la manera en que se puede construir un marco a lo largo de una curva tipo luz α , sin embargo aún falta un tercer campo vectorial sobre α para alcanzar dicho objetivo.

Proposición 1.17. Sea α una curva tipo luz de \overline{M} y $S(T\alpha^\perp)$ un haz screen de α . Entonces existe un único haz vectorial $ntr(\alpha)$ de rango 1 tal que existe localmente una sección N de $ntr(\alpha)$ que cumple lo siguiente para cualquier sección X del haz screen $S(T\alpha^\perp)$:

$$\langle \alpha', N \rangle = 1 \quad ; \quad \langle N, N \rangle = 0 \quad ; \quad \langle N, X \rangle = 0 .$$

El haz vectorial $ntr(\alpha)$ que aparece en la Proposición 1.17 es conocido como *haz transversal nulo* de α . Su construcción no requiere de mucho y vale la pena

bosquejar dicha construcción en estas páginas. Una prueba más detallada de la Proposición 1.17 se puede consultar en [3].

Por hipótesis se tiene un haz screen $S(T\alpha^\perp)$ para la curva tipo luz α y se puede pensar en el haz ortogonal $S(T\alpha^\perp)^\perp$ al haz screen dado; el haz vectorial $S(T\alpha^\perp)^\perp$ es C^∞ por construcción. Además, las fibras del haz vectorial ortogonal $S(T\alpha^\perp)^\perp$ son planos tipo tiempo en cada espacio tangente $T_p\overline{M}$ y contienen al espacio $T_p\alpha$.

Entonces, tomando un haz vectorial H cuyas fibras sean complementarias a $T_p\alpha$ en $S(T_p\alpha^\perp)^\perp$ existe, al menos localmente, una sección Z de H que cumple lo siguiente:

$$\langle \alpha', Z \rangle \neq 0 .$$

Condición que se puede asegurar para cualquier haz complementario de $T\alpha$ en $S(T\alpha^\perp)^\perp$ dado que el rango de este último es 2.

Es con estos elementos a la mano que a partir de un método similar al de Gram-Schmidt, donde se proyecta al campo Z sobre el campo α' para obtener la condición deseada, que se obtiene la siguiente expresión local para el campo vectorial N , campo vectorial que cumple con las condiciones dadas en la Proposición 1.17:

$$N = \frac{1}{\langle \alpha', Z \rangle} Z - \frac{\langle Z, Z \rangle}{2\langle \alpha', Z \rangle^2} \alpha' .$$

La construcción local de N que se acaba de elaborar es la que permite justificar la existencia del haz vectorial $ntr(\alpha)$ sobre la curva α . Por lo tanto, tomando en cuenta el resultado de la Proposición 1.17 se puede descomponer el haz tangente $T\overline{M}$ de la siguiente manera a lo largo de la curva:

$$T\overline{M}|_\alpha = T\alpha \oplus ntr(\alpha) \oplus S(T\alpha^\perp) , \quad (1.1)$$

descomposición necesaria para poder construir un marco que genere el espacio tangente $T_p\overline{M}$ en cada punto p sobre la curva α .

Cabe mencionar que para determinar el haz $ntr(\alpha)$ se asumió la existencia o elección del haz $S(T\alpha^\perp)$. Este procedimiento para determinar la descomposición que aparece en la Ecuación (1.1) no es único ya que se puede asumir la existencia del haz $ntr(\alpha)$ y determinar a partir de este haz y del haz tangente $T\alpha$ el haz screen $S(T\alpha^\perp)$. En muchos ejemplos suele ser más sencillo determinar primero el haz transversal nulo.

La descomposición en la Ecuación (1.1) permite construir el *marco de Frenet* para cualquier curva tipo luz α en un espacio lorentziano \overline{M} arbitrario.

Definición 1.18. Sea α una curva tipo luz en \overline{M} . Un *marco de Frenet* sobre α es un marco C^∞ compuesto por los campos vectoriales:

$$\{\alpha', N, W\} ,$$

tal que estos campos, acorde a la ecuación (1.1), son secciones C^∞ de los siguientes haces vectoriales:

$$\alpha' \in \Gamma(T\alpha') \quad ; \quad N \in \Gamma(ntr(\alpha)) \quad ; \quad W \in \Gamma(S(T\alpha'^\perp)) .$$

Estos campos vectoriales cumplen con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle N, N \rangle = 0 & \quad ; \quad \langle \alpha', N \rangle = 1 . \\ \langle \alpha', W \rangle = \langle N, W \rangle = 0 & \quad ; \quad \langle W, W \rangle = 1 . \end{aligned} \quad (1.2)$$

A los campos α' , N y W se les conoce como los campos tangente, transversal nulo y normal, respectivamente.

Como se puede leer de las Ecuaciones (1.2), los campos vectoriales α y N son tipo luz y tienen orientaciones temporales diferentes mientras que W es un campo vectorial tipo espacio ortogonal a los anteriores.

Además, siguiendo con el análisis de la curva α a partir del marco de Frenet en la Definición 1.18 se puede notar que, si $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita del ambiente \bar{M} , al derivar el producto $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ en la dirección de α se obtiene lo siguiente:

$$\langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', \alpha' \rangle = 0 .$$

Esto implica que el campo $\bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$ se encuentra en el haz $T\alpha^\perp$. Además, en términos del marco de Frenet $\{\alpha', N, W\}$, el campo $\bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$ se puede expresar como una combinación lineal de α' y W .

Continuando un análisis similar sobre los demás productos que aparecen en las Ecuaciones (1.2) se pueden determinar los coeficientes en la combinación lineal que representa a $\bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha'$ respecto del marco de Frenet, probando así la siguiente proposición.

Proposición 1.19. Sea α una curva tipo luz de \bar{M} y $\{\alpha', N, W\}$ un marco de Frenet para α . Entonces los elementos de dicho marco cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha' &= f\alpha' + c_1 W . \\ \bar{\nabla}_{\alpha'} N &= -fN + c_2 W . \\ \bar{\nabla}_{\alpha'} W &= -c_2 \alpha' - c_1 N . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Donde las funciones c_1 y c_2 se conocen como la primera y segunda curvatura de α respectivamente.

La función f en las Ecuaciones (1.3) carece de un nombre en la Proposición 1.19 ya que ésta se puede remover de las Ecuaciones (1.3) mediante una parametrización adecuada. Para darle sentido a esto último es necesario formalizar el siguiente concepto.

Definición 1.20. Se dice que una curva α en M es *pregeodésica* si cumple con la siguiente ecuación:

$$\bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = f\alpha' ,$$

donde f es una función C^∞ sobre α .

Entonces, si α es una pregeodésica tipo luz de \bar{M} con marco de Frenet $\{\alpha', N, W\}$ se obtiene lo siguiente:

$$\bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = f\alpha' ,$$

implicando que $c_1 = 0$, como era de esperarse.

Que α sea una pregeodésica de \overline{M} significa que el trazo de α en la variedad es el de una geodésica, con la diferencia que la pregeodésica no recorre el trazo a velocidad constante. Sin embargo, de la Proposición 17 en [11] se sigue que para toda pregeodésica α existe un cambio de parámetro q tal que:

$$\gamma = \alpha \circ q \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0 ,$$

es decir, siempre se puede parametrizar una pregeodésica como una geodésica del espacio \overline{M} . Es este comportamiento el que lleva a pensar que la función f en las Ecuaciones (1.3) pueda ser la función constante cero al parametrizar la curva α de la manera adecuada.

Observación 1.21. Que toda pregeodésica admita un cambio de parámetro tal que la curva reparametrizada cumpla con la ecuación geodésica conocida por todos resalta dos cosas. En primera instancia que el concepto de geodésica en geometría diferencial recae fuertemente sobre el parámetro de la curva como función; en segunda instancia que existe una familia de parámetros distinguidos que hacen que la curva cumpla con la ecuación geodésica.

Esta último lleva a la siguiente definición.

Definición 1.22. Cualquier parámetro de una curva tipo luz en \overline{M} respecto del cual se cumpla que $f = 0$ en las ecuaciones (1.3) es conocido como un *parámetro afín* para la curva en cuestión.

El evidente problema de la existencia de dicho parámetro afín se resuelve en la siguiente proposición.

Proposición 1.23. Sea α una curva tipo luz con marco de Frenet $\{\alpha', N, W\}$ en el espacio \overline{M} . Entonces existe un cambio de parámetro $q(s)$ tal que la curva $\gamma := \alpha \circ q$ cumple con las siguientes ecuaciones respecto del marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' &= \kappa_1 \omega , \\ \overline{\nabla}_{\gamma'} \eta &= \kappa_2 \omega , \\ \overline{\nabla}_{\gamma'} \omega &= -\kappa_2 \gamma' - \kappa_1 \eta , \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde:

$$\eta := \left[\frac{dq}{ds} \right]^{-1} (N \circ q) \quad ; \quad \omega := W \circ q .$$

Las curvaturas en las Ecuaciones de Frenet (1.3) se relacionan con las nuevas curvaturas de las Ecuaciones (1.4) de la siguiente manera:

$$\kappa_1 = \left[\frac{dq}{ds} \right]^2 (c_1 \circ q) \quad ; \quad \kappa_2 = c_2 \circ q .$$

Demostración. Sea J el intervalo de definición de una curva tipo luz α arbitraria en \overline{M} y $q(s)$ el cambio de parámetro:

$$q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J .$$

Entonces si $\gamma := \alpha \circ q$ es la curva después del cambio de parámetro, el vector tangente a la curva γ adquiere la siguiente representación:

$$\gamma'(s) = \left[\frac{dq}{ds} \right] \alpha'(q(s)) , \tag{1.5}$$

que está bien definida a lo largo del intervalo I ya que, al ser q un cambio de parámetro, la derivada de q es diferente de cero en todo el intervalo I .

Para saber si puede existir un cambio de parámetro q que cumpla lo que se afirma en la Proposición 1.23 es necesario saber cómo cambia el campo tangente γ' en la dirección de la misma curva bajo el cambio de parámetro, es decir, se requiere expresar $\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma'$ de tal forma que, tomando en cuenta la Ecuación (1.5), se pueda encontrar una condición sobre el cambio de parámetro que permita determinarlo por completo.

Tomando en cuenta que la derivada de $q(s)$ es una función del mismo parámetro se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= \frac{dq}{ds}\bar{\nabla}_{\alpha'}\left(\frac{dq}{ds}\alpha'\right) \\ &= \frac{dq}{ds}\left[\left(\alpha' \cdot \frac{dq}{ds}\right)\alpha' + \frac{dq}{ds}\bar{\nabla}_{\alpha'}\alpha'\right].\end{aligned}$$

Antes de seguir adelante es prudente mencionar que α viene acompañada del marco de Frenet $\{\alpha', N, W\}$, así que se pueden usar las Ecuaciones (1.3) para seguir adelante con la búsqueda de una condición clara para determinar a $q(s)$. Además hay que recordar que a partir del cambio de variable $q(s)$ se pueden definir los siguientes campos vectoriales sobre la curva $\gamma(s) = \alpha(q(s))$:

$$\eta(s) := \left[\frac{dq}{ds}\right]^{-1} N(q(s)) \quad ; \quad \omega(s) := W(q(s)).$$

Así, la conexión del espacio \bar{M} sobre el campo γ' se puede escribir de la siguiente manera recordando que todos los elementos de la expresión anterior están compuestos por $q(s)$:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= \frac{dq}{ds}\left[\left(\alpha' \cdot \frac{dq}{ds}\right)\alpha' + \frac{dq}{ds}(f\alpha' + c_1\omega)\right] \\ &= \left(\frac{dq}{ds}\alpha' \cdot \frac{dq}{ds}\right)\alpha' + \left[\frac{dq}{ds}\right]^2(f\alpha' + c_1\omega) \\ &= \left(\gamma' \cdot \frac{dq}{ds}\right)\alpha' + f\frac{dq}{ds}\gamma' + \left[\frac{dq}{ds}\right]^2 c_1\omega,\end{aligned}$$

y tomando en cuenta que el campo tangente γ' actúa derivando respecto del parámetro s :

$$\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \frac{d^2q}{ds^2}\alpha' + f\frac{dq}{ds}\gamma' + \left[\frac{dq}{ds}\right]^2 c_1\omega.$$

Con esto sólo queda el campo α' del marco de Frenet original pero este se puede cambiar por γ' despejando la Ecuación 1.5 de manera conveniente. Finalmente se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= \left[\frac{dq}{ds}\right]^{-1}\frac{d^2q}{ds^2}\gamma' + f\frac{dq}{ds}\gamma' + \left[\frac{dq}{ds}\right]^2 c_1\omega \\ &= \left(\left[\frac{dq}{ds}\right]^{-1}\frac{d^2q}{ds^2} + f\frac{dq}{ds}\right)\gamma' + \left[\frac{dq}{ds}\right]^2 c_1\omega.\end{aligned}$$

Por lo tanto la condición buscada para determinar el cambio de parámetro $q(s)$ está dada por el primer sumando de la ecuación anterior y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d^2q}{ds^2} + \left[f \frac{dq}{ds} \right] \frac{dq}{ds} = 0 , \quad (1.6)$$

para así obtener la primera ecuación de Frenet que aparece en las Ecuaciones (1.4) respecto del nuevo marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$.

La solución $q(s)$ a la Ecuación (1.6) no es difícil de encontrar. Sea $t = q(s)$ y $F(t)$ la función que a continuación se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{ds}(s) = f(q(s)) \frac{dq}{ds}(s) .$$

Entonces:

$$\frac{dq}{ds}(s) = A_0 e^{-F(q(s))} ,$$

y el cambio de parámetro buscado está determinado por la siguiente integral:

$$q(s) = \int_0^s A_0 e^{-F(q(x))} dx ,$$

que coincide con lo encontrado en [3], como era de esperarse.

Aun así no hacía falta encontrar la solución explícita de la Ecuación (1.6) para demostrar la Proposición 1.23 ya que, al tratarse de una ecuación diferencial ordinaria, la solución $q(s)$ que cumple con lo deseado siempre existe. Por otro lado, las definiciones que se han hecho de los campos vectoriales η y ω , que forman parte del nuevo marco de Frenet para la curva γ , aseguran que al hacer variar éstos en la dirección del campo vectorial γ' se cumplirán las Ecuaciones (1.4) restantes, determinando al mismo tiempo las relaciones buscadas para las curvaturas κ_1 y κ_2 de la curva γ . □

Cabe mencionar que en la pasada demostración se consideró el mismo haz screen para ambas curvas y por tanto el mismo haz transversal, razón por la cual los elementos del marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$ son múltiplos escalares de los elementos del marco de Frenet anterior. En caso de cambiar de haz screen se tendrían que considerar transformaciones tensoriales entre los marcos de Frenet como se hace en [3].

Antes de terminar con esta sección no se dejará pasar la oportunidad de hacer notar que una consecuencia de la Proposición 1.23 es que las curvaturas de una curva tipo luz en un espacio lorentziano no son invariantes en general. La excepción viene dada por las geodésicas y pregeodésicas tipo luz del espacio ambiente.

Corolario 1.24. Las curvaturas de cualquier curva geodésica o pregeodésica tipo luz de un espacio lorentziano \overline{M} son invariantes ante cualquier cambio de parámetro afín.

Demostración. Sea α una pregeodésica tipo luz de \overline{M} . Entonces:

$$\overline{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = f \alpha' ,$$

implicando, por las Ecuaciones (1.3), que $c_1 = 0$.

Tomando un cambio de parámetro afín $q(s)$, la curva γ que resulta después de aplicar dicho cambio de parámetro cumple las relaciones que aparecen en la Proposición 1.23, particularmente aquellas que se ocupan de las curvaturas κ_1 y κ_2 de γ . Por lo tanto:

$$\kappa_1 = c_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_2 = c_2 \quad ,$$

mostrando que el valor de las curvaturas se mantiene invariante ante cualquier cambio de parámetro afín entre geodésicas y pregeodésicas. \square

Cualquier cambio de parámetro entre geodésicas es afín. Basta con mirar de nuevo la Ecuación (1.6) y tomar en cuenta que, de antemano, f es la función constante cero. Esto implica que entre geodésicas los cambios de parámetro $q(s)$ cumplen que:

$$\frac{d^2 q}{ds^2} = 0 \quad ,$$

implicando que $q(s)$ es una función afín de una variable y que la Proposición 1.24 se cumple entre geodésicas de manera trivial.

Observación 1.25. De aquí en adelante se asumirá que todas las curvas tipo luz de cualquier espacio ambiente lorentziano se encuentran descritas con un parámetro afín; esto con la clara intención de usar las ecuaciones de Frenet (1.4) cuya expresión es más sencilla. Además, siempre que la curva tipo luz a estudiar γ no sea una geodésica o pregeodésica del ambiente se puede tomar al campo $\overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma'$ como una sección del haz screen a elegir; esto también lleva a un parámetro afín de la curva γ y el procedimiento es sustancialmente diferente al mostrado en la Proposición 1.23.

Es prudente cerrar esta sección mencionando que la primera curvatura κ_1 de una curva tipo luz γ encierra la misma información geométrica que la curvatura de una curva no degenerada, es decir, la curvatura κ_1 indica qué tanto una curva tipo luz dista de ser una geodésica del espacio ambiente, como se puede deducir de las Ecuaciones (1.4). Sin embargo la información geométrica que trae consigo la segunda curvatura κ_2 no coincide con la información dada por la torsión de una curva no degenerada, esto porque la condición $\kappa_2 = 0$ no implica, en caso que el espacio ambiente sea \mathbb{R}_1^3 , que la curva sea plana. El siguiente ejemplo arroja un poco de luz sobre esto.

Ejemplo 1.26. Considere la siguiente curva tipo luz en \mathbb{R}_1^3 :

$$\gamma(s) = \left(\frac{4}{3}s^3 + s, \frac{4}{3}s^3 - s, 2s^2 \right) \quad .$$

A continuación se mostrará que, a pesar de ser γ una curva plana, su segunda curvatura κ_2 es idénticamente cero.

Si se piensa en el siguiente marco de Frenet para γ :

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (4s^2 + 1, 4s^2 - 1, 4s) \quad , \\ \eta(s) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \quad , \\ \omega(s) &= (2s, 2s, 1) \quad , \end{aligned}$$

se cumplirán las siguientes ecuaciones de Frenet a lo largo de la curva:

$$\begin{aligned} D_{\gamma'}\gamma' &= \gamma''(s) = 4\omega(s) , \\ D_{\gamma'}\eta &= \eta'(s) = 0 , \\ D_{\gamma'}\omega &= \omega'(s) = -4\eta(s) , \end{aligned}$$

las cuales implican que las curvaturas de γ adquieren los siguientes valores:

$$\kappa_1(s) = 4 \quad ; \quad \kappa_2(s) = 0 .$$

El siguiente lema arroja aún más luz sobre este problema.

Lema 1.27. Una curva tipo luz γ en \mathbb{R}_1^3 es plana si y sólo si γ es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Si γ es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 se puede construir fácilmente un plano en \mathbb{R}_1^3 que contenga a γ , demostrando con esto una parte del Lema 1.27.

En caso que la curva tipo luz γ sea plana se puede proceder por casos tomando en cuenta la causalidad del plano Π que contenga a la curva, descartando de inicio los planos tipo espacio ya que estos no contienen ninguna dirección tipo luz.

- Π tipo luz.

Los planos degenerados de \mathbb{R}_1^3 están generados por una sola dirección tipo luz. Esto implica que el movimiento de cualquier curva tipo luz en Π está restringido a una dirección. Por lo tanto cualquier curva tipo luz en Π es una línea recta.

- Π tipo tiempo.

En este caso existen dos direcciones tipo luz linealmente independiente en Π . Así, cualquier cambio de dirección de una curva tipo luz en Π es una pérdida de continuidad de la curva misma. Por lo tanto cualquier curva tipo luz en el plano Π debe mantenerse en una sola dirección dado que todas las curvas consideradas en esta tesis son C^∞ , es decir, toda curva tipo luz en Π es una recta. □

Entonces, regresando al Ejercicio 1.26, como la curvatura κ_1 de γ es diferente de cero se puede asegurar que la curva es diferente de una línea recta. Por lo tanto, el Lema 1.27 asegura que γ no será una curva plana de \mathbb{R}_1^3 .

1.2. El operador de forma para superficies

El operador de forma para cualquier subvariedad se define a partir de la fórmula de Weingarten, como se vio en la Definición 1.9, y a su vez este depende de la elección de un campo normal a la subvariedad en cuestión. Así, mientras mayor sea la codimensión de la subvariedad mayor será la cantidad de operadores de forma que se puedan definir para una misma subvariedad.

Como en esta tesis se trabajará específicamente el caso de codimensión 1, y de manera aún más particular el caso de superficies, se volverá a definir el operador de forma de la siguiente manera:

Definición 1.28. Sean M una hipersuperficie orientada en un ambiente lorentziano \overline{M} y ξ un campo normal unitario de M . Se define el *operador de forma* A_ξ como la transformación:

$$A_\xi : T_p M \rightarrow T_p M \quad \text{tal que} \quad A_\xi X_p = -D_X \xi|_p ,$$

para cualquier campo vectorial X tangente a M y p en M .

La siguiente proposición concatena una serie de resultados conocidos en el área respecto del operador de forma que se pueden consultar en [10].

Proposición 1.29. El operador de forma A_ξ es una transformación lineal en cada espacio tangente $T_p M$ de la hipersuperficie en la cual está definido. Además, A_ξ es un operador autoadjunto respecto de la métrica inducida sobre M .

La linealidad de A_ξ se sigue de la fórmula de Weingarten mientras que la propiedad de ser un operador autoadjunto se sigue de la simetría de la segunda forma fundamental de la superficie en la fórmula de Gauss.

Antes de seguir adelante con las propiedades del operador de forma vale la pena enunciar el siguiente resultado sobre marcos ortonormales.

Proposición 1.30. Sea $\{e_1, e_2\}$ un marco ortonormal sobre una superficie semi-riemanniana M . Entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= \epsilon_1 f e_2 & ; & & \nabla_{e_1} e_2 &= -\epsilon_2 f e_1 , \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -\epsilon_1 g e_2 & ; & & \nabla_{e_2} e_2 &= \epsilon_2 g e_1 , \end{aligned}$$

donde f y g son funciones C^∞ sobre M y $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

La Proposición 1.30 se ha redactado de esta manera para incluir los casos en que la superficie M sea tipo tiempo o tipo espacio. Además, se ha omitido su demostración ya que la idea detrás de la prueba se aplicará más adelante para demostrar la Proposición 1.32, que describe un comportamiento similar pero para marcos con vectores tipo luz.

Definición 1.31. Una *base tipo luz normalizada* en un espacio vectorial lorentziano de dimensión dos es una base $\{e_1, e_2\}$ tal que:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 1 .$$

En este sentido, un marco $\{e_1, e_2\}$ tipo luz normalizado sobre una superficie tipo tiempo M es un marco que en cada punto p de M determina una base tipo luz normalizada en $T_p M$.

La siguiente proposición puede resultar muy útil para simplificar cálculos.

Proposición 1.32. Sea $\{e_1, e_2\}$ un marco tipo luz normalizado en una superficie tipo tiempo M . Entonces se cumplen las siguientes relaciones para los elementos del marco:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= f e_1 & ; & & \nabla_{e_1} e_2 &= -f e_2 , \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -g e_1 & ; & & \nabla_{e_2} e_2 &= g e_2 , \end{aligned}$$

donde f y g son funciones C^∞ sobre M .

Demostración. Dado que el marco $\{e_1, e_2\}$ sobre M es tipo luz los productos escalares $\langle e_i, e_j \rangle$ se mantendrán constantes en la región de M donde dicho marco esté bien definido. Entonces:

$$e_k \langle e_i, e_j \rangle = 0 ,$$

desprendiéndose de esto último las siguientes dos ecuaciones:

$$\langle \nabla_{e_k} e_i, e_i \rangle = 0 , \quad (1.7)$$

$$\langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = -\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle . \quad (1.8)$$

Dado que el campo $\nabla_{e_k} e_i$ se puede expresar en términos del marco tipo luz como se muestra a continuación:

$$\nabla_{e_k} e_i = \Gamma_{ki}^1 e_1 + \Gamma_{ki}^2 e_2 ,$$

la Ecuación (1.7) implica que:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= \Gamma_{11}^1 e_1 & ; & & \nabla_{e_1} e_2 &= \Gamma_{12}^2 e_2 , \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \Gamma_{21}^1 e_1 & ; & & \nabla_{e_2} e_2 &= \Gamma_{22}^2 e_2 , \end{aligned} \quad (1.9)$$

resultado que se asemeja mucho al esperado, donde las funciones Γ_{ki}^j que aparecen en las Ecuaciones (1.9) son C^∞ . Sin embargo, las funciones Γ_{ki}^j no guardan alguna relación entre ellas en principio.

Las relaciones buscadas entre las funciones Γ_{ki}^j se siguen de la Ecuación (1.8):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = -\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle = -\Gamma_{12}^2 , \\ \Gamma_{22}^2 &= \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle = -\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle = -\Gamma_{21}^1 . \end{aligned}$$

Así, las funciones $f = \Gamma_{11}^1$ y $g = \Gamma_{22}^2$ cumplen con el resultado deseado. \square

Dejando de lado las propiedades que pueden tener distintos tipos de marcos sobre una superficie, conviene entrar en la discusión de las distintas representaciones matriciales que puede tomar el operador de forma en cada espacio tangente.

El siguiente Lema es una versión particular de un resultado más general que se puede consultar en [10].

Lema 1.33. Un operador autoadjunto T en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^2 se puede representar por una de las siguientes formas canónicas:

$$\bullet [T] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ; \quad \text{donde } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ y } [T] \text{ está representado en términos de una base ortonormal.} \quad (1.10)$$

$$\bullet [T] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } [T] \text{ está representado en términos de una base ortonormal.} \quad (1.11)$$

$$\bullet [T] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \pm 1 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad \text{donde } [T] \text{ está representado en términos de una base tipo luz normalizada.} \quad (1.12)$$

$$\bullet [T] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} ; \quad \text{tal que } \beta \neq 0 \text{ y } [T] \text{ está representado en términos de una base ortonormal.} \quad (1.13)$$

Demostración. Un operador autoadjunto T en \mathbb{R}_1^2 tiene una representación matricial:

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

respecto de la base canónica $\{e_1, e_2\}$. Además, en dicha base la métrica η de \mathbb{R}_1^2 se representa por la matriz diagonal $\eta = \text{diag}(-1, 1)$ de tal forma que, al ser T un operador autoadjunto, se cumple la siguiente relación matricial:

$$[T]^t \eta = \eta [T],$$

implicando, a partir de la representación (1.14), la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix},$$

en la base canónica $\{e_1, e_2\}$. Esto implica que el polinomio característico de T es:

$$P_T(t) = t^2 - (a+d)t + (ad+b^2),$$

mostrando que los valores propios λ_i de T están determinados por la siguiente relación:

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4b^2} \right].$$

El discriminante $D = (a-d)^2 - 4b^2$ determina, junto con el polinomio mínimo μ_T del operador T , qué forma canónica representa a T . Cabe recordar que el polinomio mínimo de un operador T es el polinomio mónico de menor grado que divide a P_T y que cumple la relación $\mu_T(T) = 0$, es decir, $\mu_T(T)$ es el operador trivial.

El resto de la demostración proseguirá en casos.

- $D < 0$

En este caso los valores propios λ_i son números complejos con parte imaginaria diferente de cero. Si dichos valores propios son de la forma $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$, existe una base ortonormal de \mathbb{R}_1^2 en la que T se representa como se muestra a continuación:

$$[T] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}; \quad \mu_T(t) = t^2 - 2\alpha t + (\alpha^2 + \beta^2).$$

En este caso el polinomio mínimo es igual al polinomio característico.

- $D = 0$

En este caso T tiene un único valor propio λ de multiplicidad 2 y T se puede representar de dos maneras diferentes.

La primera representación se da si la dimensión de $\ker(T - \lambda \text{id})$ es igual a 2. En consecuencia, el polinomio mínimo es de grado 1 y en cualquier base de \mathbb{R}_1^2 el operador T se representa de la siguiente manera:

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \mu_T(t) = t - \lambda,$$

es decir, T es un múltiplo de la identidad. Además, el polinomio mínimo es distinto del polinomio característico y el caso $\lambda = 0$ es de poco interés.

La segunda representación se da si la dimensión de $\ker(T - \lambda \text{id})$ es igual 1. Esto implica que el polinomio mínimo es igual al polinomio característico y existe una base tipo luz normalizada de \mathbb{R}_1^2 tal que en ella T se representa como se muestra a continuación:

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \pm 1 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad \mu_T(t) = (t - \lambda)^2 .$$

En esta representación el caso $\lambda = 0$ sí es de interés y, como se verá más adelante, representará al operador de forma de una superficie paralela en \mathbb{R}_1^3 .

- $D > 0$

En este caso T tiene dos valores propios reales diferentes λ_1 y λ_2 . Por lo tanto el polinomio mínimo de T es igual al polinomio característico y T es diagonalizable, es decir, existe una base ortonormal de \mathbb{R}_1^2 tal que en esta base T se representa de la siguiente manera:

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ; \quad \mu_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) .$$

□

Las representaciones (1.10) y (1.11) para el operador T en el Lema 1.33 suelen enunciarse como un mismo caso, como se hace en [10], sin embargo al dividir esa representación en dos casos diferentes se gana claridad al momento de caracterizar ciertos tipos de puntos de relevancia geométrica.

Corolario 1.34. El operador de forma A_ξ de una superficie M en un ambiente lorentziano \bar{M} admite alguna de las representaciones listadas en el Lema 1.33.

El Corolario 1.34 es una consecuencia directa de la Proposición 1.29 en el caso que M sea una superficie en un ambiente lorentziano \bar{M} de dimensión 3.

Estas representaciones del operador de forma A_ξ permiten distinguir dos clases excluyentes de puntos en una superficie M de \mathbb{R}_1^3 que serán de suma importancia en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.35. Un punto p de una superficie M es *umbilical* si el operador de forma A_ξ es un múltiplo de la identidad en $T_p M$.

$$A_\xi|_p = \lambda(p) \text{id}|_p .$$

Así, una superficie es umbilical si todos sus puntos son umbilicales.

Si M es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 , λ es una función C^∞ sobre M . Además, se sigue de la *ecuación de Codazzi*:

$$(\nabla_X A_\xi)(Y) = (\nabla_Y A_\xi)(X) ,$$

que λ es una función constante sobre M .

Definición 1.36. Un punto p de una superficie M es *cuasiumbilical* si las direcciones principales del operador de forma A_ξ son tipo luz y múltiplos escalares entre sí. Esto es:

$$A_\xi X_p = \lambda(p)X_p \quad ; \quad \langle X_p, X_p \rangle = 0 .$$

Una superficie es cuasiumbilical si todos sus puntos son cuasiumbilicales.

La Definición 1.35 es la misma que en el caso riemanniano y, aunque las superficies umbilicales en \mathbb{R}_1^3 son distintas a las de \mathbb{R}^3 , el comportamiento es similar. El caso que especifica la Definición 1.36 no tiene contraparte riemanniana y trae a la luz una clase de superficies que son propias de los ambientes lorentzianos.

Observación 1.37. En [2] Jeanne N. Clelland define los puntos cuasiumbilicales como aquellos en los que el operador de forma no tiene una representación diagonal en \mathbb{C} .

La definición hecha por Clelland en [2] es equivalente a la Definición 1.36 hecha aquí. El Lema 1.33 es vital para entender dicha equivalencia ya que, de las representaciones canónicas que aparecen en dicho lema, la celda de Jordan en la Ecuación (1.12) es la única que no es diagonalizable en los números complejos.

Observación 1.38. Las superficies umbilicales y cuasiumbilicales cumplen que $H^2 = K$ en todos sus puntos. Sin embargo, los puntos de una superficie no pueden ser umbilicales y cuasiumbilicales a la vez. A continuación se listan algunas de las diferencias entre estas dos clases de puntos:

- En un punto p umbilical las direcciones principales tipo luz del operador de forma pueden ser linealmente independientes. Además, A_ξ se puede representar únicamente por la forma canónica (1.11) que aparece en el Lema 1.33 y su polinomio mínimo toma la siguiente forma:

$$\mu_{A_\xi}(t) = t - H .$$

- En un punto p cuasiumbilical las direcciones principales del operador de forma son tipo luz y múltiplos escalares entre sí. Además, A_ξ se puede representar únicamente por la forma canónica (1.12) que aparece en el Lema 1.33 y su polinomio mínimo toma la siguiente forma:

$$\mu_{A_\xi}(t) = (t - H)^2 .$$

Más adelante en la tesis se encontrarán distintas formas de caracterizar estos puntos pero por ahora se dejará esta discusión de lado.

1.3. Superficies regladas y la clase B-Scroll

Las *superficies regladas* son superficies foliadas por geodésicas del espacio ambiente. Esto hace de las *superficies regladas* una clase muy útil en el ámbito de la geometría de superficies ya que su descripción puede ser bastante sencilla. En [12] se demuestra que toda *superficie reglada* en \mathbb{R}^3 se puede describir usando

una curva parametrizada por longitud de arco y una familia de rectas ortogonales a la curva base. Como en esta tesis se trabajará usando parametrizaciones para describir distintos objetos geométricos conviene definir este tipo de superficies por medio de una parametrización.

Definición 1.39. Una *superficie reglada* M en un espacio ambiente \overline{M} es una superficie descrita por la siguiente parametrización:

$$\psi(s, t) = \overline{\text{exp}}_{\alpha(s)}(t\vartheta(s)) ,$$

donde $\alpha(s)$ es una curva parametrizada por longitud de arco en \overline{M} , $\vartheta(s)$ es un campo unitario C^∞ ortogonal a la curva α , $\overline{\text{exp}}$ es la transformación exponencial del espacio ambiente \overline{M} y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para alguna $\varepsilon > 0$.

Dado que la transformación exponencial $\overline{\text{exp}}_{\alpha(s)}$ es un difeomorfismo local alrededor de cada punto $\alpha(s)$ sobre la curva, toda superficie reglada construida con la parametrización que aparece en la Definición 1.39 estará bien definida alrededor de α , es decir, toda superficie reglada así descrita será regular para t suficientemente pequeña.

Como ya se ha hecho notar, el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 será uno de los espacios ambientes donde más se trabajará a lo largo de esta tesis, espacio cuyas geodésicas son líneas rectas sin importar la causalidad de las mismas. Así, una superficie reglada en \mathbb{R}_1^3 es una superficie foliada por rectas del espacio ambiente.

Proposición 1.40. Una superficie reglada M en \mathbb{R}_1^3 con reglas que no son tipo luz se parametriza de la siguiente manera:

$$\psi(s, t) = \alpha(s) + t\vartheta(s) ,$$

donde $\alpha(s)$ es una curva parametrizada por longitud de arco en \mathbb{R}_1^3 , $\vartheta(s)$ es un campo unitario C^∞ ortogonal a la curva α y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para alguna $\varepsilon > 0$.

La parametrización que aparece en la Proposición 1.40 permite tener una descripción explícita del marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ para la superficie reglada:

$$\psi_s = \alpha'(s) + t\vartheta'(s) ; \quad \psi_t = \vartheta(s) ,$$

que a su vez permite dar una representación local de la métrica g de la superficie reglada como se muestra a continuación:

$$g = \begin{pmatrix} \langle \psi_s, \psi_s \rangle & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} .$$

Recordando que A_ξ representa el operador de forma de M respecto de un campo normal unitario ξ , se puede enunciar el siguiente resultado sobre la curvatura de superficies regladas en el espacio de Minkowski.

Proposición 1.41. Sea M una superficie reglada y orientada de \mathbb{R}_1^3 con reglas no degeneradas. Entonces, la curvatura K de M cumple la siguiente relación:

$$K = -\epsilon\epsilon_t \frac{\langle A_\xi \psi_s, \psi_t \rangle^2}{\langle \psi_s, \psi_s \rangle} ,$$

donde $\epsilon_t = \langle \psi_t, \psi_t \rangle$, $\epsilon = \langle \xi, \xi \rangle$ y $\{\psi_s, \psi_t\}$ es el marco coordenado de M .

Demostración. Sea $\{\psi_s, \psi_t\}$ el marco coordenado de la superficie reglada M y considérese la siguiente combinación lineal:

$$A_\xi \psi_s = a\psi_s + b\psi_t .$$

Si se hace el producto de la cantidad anterior con los elementos del marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle A_\xi \psi_s, \psi_s \rangle &= a \langle \psi_s, \psi_s \rangle , \\ \langle A_\xi \psi_s, \psi_t \rangle &= \epsilon_t b , \end{aligned}$$

donde $\epsilon_t = \langle \psi_t, \psi_t \rangle = \pm 1$.

Por otro lado:

$$A_\xi \psi_t = c\psi_s + d\psi_t ,$$

y repitiendo el procedimiento anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle A_\xi \psi_t, \psi_s \rangle &= c \langle \psi_s, \psi_s \rangle , \\ \langle A_\xi \psi_t, \psi_t \rangle &= \epsilon_t d . \end{aligned}$$

Además, recordando la definición del operador de forma se obtiene un valor específico para el coeficiente d :

$$d = \epsilon_t \langle A_\xi \psi_t, \psi_t \rangle = -\epsilon_t \langle D_{\psi_t} \xi, \psi_t \rangle = \epsilon_t \langle \xi, \psi_{tt} \rangle = 0 .$$

Entonces, usando que A_ξ es autoadjunto se llega a la siguiente representación matricial:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\langle A_\xi \psi_s, \psi_s \rangle}{\langle \psi_s, \psi_s \rangle} & \frac{\langle A_\xi \psi_s, \psi_t \rangle}{\langle \psi_s, \psi_s \rangle} \\ \epsilon_t \langle A_\xi \psi_s, \psi_t \rangle & 0 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, el Teorema Egregio de Gauss asegura que la siguiente relación es válida:

$$K = -\epsilon \epsilon_t \frac{\langle A_\xi \psi_s, \psi_t \rangle^2}{\langle \psi_s, \psi_s \rangle} ,$$

donde ϵ adquiere el signo adecuado según sea la causalidad de la superficie. \square

Un ejemplo clásico de superficie reglada es el cilindro circular, que se puede descomponer en términos de una circunferencia plana $S^1(r)$ horizontal y reglas ortogonales al plano que contiene a la circunferencia. Sin embargo, los cilindros de \mathbb{R}_1^3 tienen más estructura que cualquier superficie reglada ya que también se pueden describir como productos semiriemannianos. Así, parece natural preguntarse si existen superficies regladas que no puedan ser descritas como esta clase de productos, dicho de otra manera, cómo se pueden describir las superficies regladas cuyas reglas son geodésicas tipo luz del ambiente.

La siguiente definición hecha por L. K. Graves en [4] permite explorar a profundidad el caso de reglas tipo luz en una superficie tipo tiempo.

Definición 1.42. Sea γ una curva tipo luz en \mathbb{R}_1^3 tal que su marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$ cumple con las Ecuaciones (1.4). Entonces, la superficie reglada definida por la parametrización:

$$\psi(s, t) = \gamma(s) + t\eta(s) ,$$

es una superficie tipo *B-scroll*.

De la Definición 1.42 se sigue que las reglas de un B-scroll son tipo luz y por tanto estas superficies no pueden ser descritas como un producto semi-riemanniano, esto porque en dichos productos los factores son variedades no degeneradas.

Además, la Definición 1.42 permite calcular la siguiente expresión para el marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ de un B-scroll:

$$\psi_s = \gamma'(s) + t\eta'(s) \quad ; \quad \psi_t = \eta(s) ,$$

expresión que se puede reescribir en términos del marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$ de la misma curva γ , haciendo uso de las Ecuaciones (1.4) como se muestra a continuación:

$$\psi_s = \gamma'(s) + t\kappa_2(s)\omega(s) \quad ; \quad \psi_t = \eta(s) . \quad (1.15)$$

La Ecuación (1.15) es la expresión más común para el marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ de un B-scroll y es la que se usará para dicho marco a lo largo de esta tesis. Además, al hacer los productos de los elementos del marco con la métrica inducida se obtiene la siguiente expresión matricial para la métrica de un B-scroll:

$$g = \begin{pmatrix} t^2\kappa_2^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.16)$$

que evidentemente es no degenerada y, ya que uno de los elementos del marco es tipo luz como muestra la Ecuación (1.16), se concluye fácilmente que todo B-scroll es tipo tiempo.

Establecida la causalidad de este tipo de superficies queda claro que, al estar definidas por una parametrización, los B-scroll son superficies orientables y que cualquier sección de su haz normal será un campo vectorial tipo espacio. Usando la Ecuación (1.15) para describir el marco coordenado de un B-scroll se puede mostrar fácilmente que la siguiente expresión es la de un campo normal unitario ξ para cualquier B-scroll:

$$\xi(s, t) = \omega(s) - t\kappa_2(s)\eta(s) , \quad (1.17)$$

donde ξ se expresa como combinación lineal de los elementos del marco de Frenet de γ al igual que los campos ψ_s y ψ_t del marco coordenado de la superficie.

Partiendo de la Ecuación (1.17) se puede calcular una representación matricial para el operador de forma A_ξ de cualquier B-scroll en el espacio \mathbb{R}_1^3 . Para el elemento ψ_s del marco coordenado se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_\xi\psi_s &= -D_{\psi_s}\xi \\ &= -D_{\psi_s}\omega + D_{\psi_s}t\kappa_2\eta \\ &= -\omega' + t\kappa_2'\eta + t\kappa_2\eta' \\ &= \kappa_2\gamma' + \kappa_1\eta + t\kappa_2'\eta + t\kappa_2^2\omega , \end{aligned}$$

es decir, que el valor de A_ξ en el campo ψ_s es:

$$A_\xi\psi_s = \kappa_2\psi_s + (\kappa_1 + t\kappa_2')\psi_t , \quad (1.18)$$

Aplicando un proceso similar para ψ_t :

$$\begin{aligned} A_\xi \psi_t &= -D_{\psi_t} \xi \\ &= -D_{\psi_t} \omega + D_{\psi_t} t \kappa_2 \eta \\ &= \kappa_2 \eta , \end{aligned}$$

implicando que el valor de A_ξ en el campo ψ_t es:

$$A_\xi \psi_t = \kappa_2 \psi_t . \quad (1.19)$$

Por lo tanto, de las Ecuaciones (1.18) y (1.19) se sigue que el operador de forma A_ξ de cualquier B-scroll adquiere la siguiente representación matricial:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \kappa_2 & 0 \\ \kappa_1 + t\kappa_2' & \kappa_2 \end{pmatrix} , \quad (1.20)$$

respecto del marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$, asegurando que el polinomio característico P_A del operador de forma tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= t^2 - 2\kappa_2 t + \kappa_2^2 , \\ P_A(t) &= (t - \kappa_2)^2 , \end{aligned} \quad (1.21)$$

de la cual se sigue, por el Lema 1.33 y la Observación 1.38, que todos los puntos de un B-scroll son umbilicales o cuasiumbilicales.

Proposición 1.43. Un punto $p = \psi(s, t)$ en un B-scroll es umbilical si y sólo si en $p = \psi(s, t)$ se cumple que:

$$\kappa_1(s) + t\kappa_2'(s) = 0 .$$

Demostración. Si un operador es un múltiplo de la identidad seguirá siendo el mismo múltiplo de la identidad en cualquier base en la que se le represente. Eso prueba la proposición, tomando en cuenta la representación matricial que ya se obtuvo para el operador A_ξ en la Ecuación (1.20). □

Entonces, si p es un punto umbilical de un B-scroll se puede pensar en los siguientes dos casos.

- $\kappa_2' \neq 0$

En este caso se puede despejar la variable t de la ecuación que aparece en la Proposición 1.43 para obtener la siguiente relación:

$$t = -\frac{\kappa_1(s)}{\kappa_2'(s)} , \quad (1.22)$$

en el punto $p = \psi(s, t)$.

Si existe un conjunto de puntos umbilicales en el B-scroll que cumplen con esta condición, la Ecuación (1.22) implica que t es una variable que depende suavemente de s , es decir, el conjunto de puntos umbilicales del B-scroll es una

curva C^∞ en la superficie. Esto coincide con el teorema de caracterización de superficies cuasiumbilicales mostrado por J. N. Clelland en [2].

- $\kappa_2' = 0$

Este caso proporciona una condición mucho más sencilla para caracterizar a los puntos umbilicales y, al igual que en el caso anterior, se pueden presentar curvas de puntos umbilicales en el B-scroll. Además, si $p = \psi(s, t)$ es umbilical, se sigue por la Proposición 1.43 que $\kappa_1(s) = 0$.

Sin embargo el caso $\kappa_2' = 0$ implica aún más ya que, si $\kappa_1 = 0$, γ es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 y el B-scroll en cuestión es una superficie umbilical.

Así, si se considera una recta tipo luz γ con parámetro afín se sigue que $\gamma'' = 0$ y lo natural sería tomar un marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$ constante, es decir, uno que cumpla con las ecuaciones:

$$\eta' = 0 \quad ; \quad \omega' = 0 .$$

En este caso el B-scroll es un plano tipo tiempo que, por supuesto, es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 . Sin embargo, se puede decir un poco más respecto de la elección del marco de Frenet.

Dado que $\gamma'' = 0$, no se puede determinar de manera única al campo vectorial ω y, por ende, tampoco se puede determinar de manera única al campo transversal nulo η . Esto permite construir un marco de Frenet que no sea constante sobre cualquier recta tipo luz γ en \mathbb{R}_1^3 pero, ¿qué otra superficie umbilical en \mathbb{R}_1^3 permite una parametrización tipo B-scroll además de los planos tipo tiempo?

Ejemplo 1.44. El espacio de De Sitter unitario S_1^2 en \mathbb{R}_1^3 admite una parametrización tipo B-scroll.

El espacio de De Sitter unitario en \mathbb{R}_1^3 es una superficie cuadrática que se define de la siguiente manera:

$$S_1^2 := \{p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = 1\} ,$$

así que cualquiera que sea la parametrización tipo B-scroll que se construya para la superficie S_1^2 debe satisfacer dicha definición.

Si γ es la recta tipo luz con parámetro afín en \mathbb{R}_1^3 que se muestra a continuación:

$$\gamma(s) = (s, 1, s) ,$$

se puede construir sobre esta recta γ el siguiente marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (1, 0, 1) , \\ \eta(s) &= \left(-\frac{1}{2}(s^2 + 1), -s, -\frac{1}{2}(s^2 - 1) \right) , \\ \omega(s) &= (-s, -1, -s) . \end{aligned}$$

Evidentemente este marco de Frenet no es constante e implica que las ecuaciones de Frenet para este marco no serán triviales y que las curvaturas de γ no serán idénticamente cero:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= 0 , \\ \eta'(s) &= \omega(s) , \\ \omega'(s) &= -\gamma'(s) . \end{aligned}$$

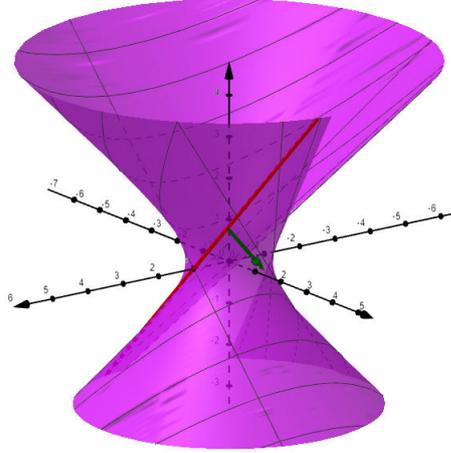


Figura 1.2: Espacio de De Sitter: La recta roja representa la recta tipo luz γ sobre la cual se construye la parametrización tipo B-scroll. El vector verde representa la dirección de las reglas.

Así, de las pasadas ecuaciones se sigue que los valores de las curvaturas de γ son los siguientes:

$$\kappa_1(s) = 0 \quad ; \quad \kappa_2(s) = 1 .$$

Entonces, la superficie B-scroll definida respecto de este marco de Frenet para la recta γ está dada por la siguiente parametrización:

$$\psi(s, t) = \left(s - \frac{t}{2}(s^2 + 1), 1 - ts, s - \frac{t}{2}(s^2 - 1) \right) ,$$

y haciendo el producto escalar de los vectores de posición $\psi(s, t)$ consigo mismos se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi \rangle &= - \left[s - \frac{t}{2}(s^2 + 1) \right]^2 + [1 - ts]^2 + \left[s - \frac{t}{2}(s^2 - 1) \right]^2 \\ &= ts(s^2 + 1) - \frac{t^2}{4}(s^2 + 1)^2 + (1 - ts)^2 - ts(s^2 - 1) + \frac{t^2}{4}(s^2 - 1)^2 , \end{aligned}$$

expresión que se puede simplificar al notar que los primeros dos términos de la suma en la expresión anterior son similares a los dos últimos términos de la misma. Finalmente se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi \rangle &= 2ts - t^2s^2 + (1 - ts)^2 , \\ \langle \psi, \psi \rangle &= 1 . \end{aligned}$$

mostrando que, en efecto, la superficie S_1^2 se puede describir como un B-scroll.

Proposición 1.45. Un B-scroll es una superficie cuasiumbilical si y sólo si en todos sus puntos $p = \psi(s, t)$ se cumple que:

$$\kappa_1(s) + t\kappa_2'(s) \neq 0 .$$

Demostración. Si las curvaturas de la curva tipo luz γ con la que se construye el B-scroll cumplen con la condición:

$$\kappa_1 + t\kappa'_2 \neq 0, \quad (1.23)$$

la representación matricial de A_ξ que aparece en la Ecuación (1.20) no será diagonalizable y, por tanto, el operador de forma A_ξ del B-scroll no tendrá una representación diagonal en ninguno de sus puntos. Esto permite construir el siguiente marco tipo luz normalizado sobre el B-scroll:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}\psi_s - \frac{t^2\kappa_2^2}{2\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}\psi_t \quad ; \quad e_2 = \sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}\psi_t. \quad (1.24)$$

Para saber cómo se representa el operador A_ξ en este marco se puede empezar por valuar el operador A_ξ en el campo vectorial e_1 . Entonces:

$$\begin{aligned} A_\xi e_1 &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}A_\xi\psi_s - \frac{t^2\kappa_2^2}{2\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}A_\xi\psi_t \\ &= \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}\psi_s + \frac{(\kappa_1 + t\kappa'_2)}{\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}\psi_t - \frac{t^2\kappa_2^3}{2\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}}\psi_t, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la siguiente expresión:

$$A_\xi e_1 = \kappa_2 e_1 + e_2.$$

Por otro lado, aplicando el operador A_ξ al campo vectorial e_2 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_\xi e_2 &= \sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}A_\xi\psi_t \\ &= \kappa_2\sqrt{\kappa_1 + t\kappa'_2}\psi_t, \end{aligned}$$

mostrando que:

$$A_\xi e_2 = \kappa_2 e_2.$$

Por lo tanto, en términos del marco tipo luz $\{e_1, e_2\}$ la representación matricial que adquiere el operador de forma A_ξ será la siguiente:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \kappa_2 & 0 \\ 1 & \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Esta es la representación canónica del operador A_ξ para superficies B-scroll que cumplen con la Ecuación (1.23). Además, la Observación 1.38 asegura que todos los puntos del B-scroll en los cuales el operador A_ξ tiene la representación canónica mostrada en la Ecuación (1.25) son cuasiumbilicales. \square

El siguiente corolario es bastante evidente y para demostrarlo bastaría con seguir el argumento en la demostración de la Proposición 1.45 de manera puntual, es decir, restringiendo todo a un espacio tangente particular.

Corolario 1.46. Un punto $p = \psi(s, t)$ en un B-scroll es cuasiumbilical si y sólo si en $p = \psi(s, t)$ se cumple que:

$$\kappa_1(s) + t\kappa'_2(s) \neq 0.$$

1.4. Superficies paralelas

Nada más prudente que empezar por definir la noción de *superficie paralela* que se usará lo largo de esta tesis.

Definición 1.47. Se dice que M es una *superficie paralela* si su operador de forma es paralelo, es decir, que $\nabla_X A_\xi = 0$ para todo campo vectorial X tangente a M .

Las superficies paralelas son el tema central de esta tesis y a continuación se hará un recorrido por algunas de las propiedades que serán más útiles a lo largo de este trabajo. También se hablará de su relación con la clase de *superficies isoparamétricas* y de los cambios que en esta relación produce reemplazar un espacio ambiente riemanniano por uno lorentziano.

Afortunadamente las superficies paralelas en \mathbb{R}_1^3 se encuentran clasificadas y dicha clasificación, realizada por Bang-Yen Chen y Joeri Van der Veken, se puede consultar en [1]. Antes de pasar a dicha clasificación presentaremos las superficies paralelas que fungen como representantes de cada clase de equivalencia descrita en el Teorema 1.54, a excepción de los planos.

- Plano hiperbólico en \mathbb{R}_1^3 .

El *plano hiperbólico* $H^2(r)$ en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 es una superficie que es modelo del espacio hiperbólico de dimensión 2. Esta superficie es una de las componentes conexas del hiperboloide de dos ramas en \mathbb{R}_1^3 que está determinado por la ecuación cuadrática $\langle p, p \rangle = -r^2$. Es esta última condición la que determina que la causalidad de $H^2(r)$ sea espacial.

Definición 1.48. La superficie $H^2(r)$ se define de la siguiente manera como subconjunto de \mathbb{R}_1^3 :

$$H^2(r) := \{p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = -r^2 ; \text{ con } p \text{ orientado al futuro y } r > 0\} ,$$

y es a partir de esta definición que $H^2(r)$ se puede parametrizar como se muestra a continuación:

$$\psi(u, v) = r (\cosh u \cosh v, \cosh u \sinh v, \sinh u) \quad ; \text{ tal que } r > 0 .$$

Si P es el vector posición de cualquier punto p en $H^2(r)$ y X cualquier campo vectorial tangente a $H^2(r)$, se obtiene que $X\langle P, P \rangle = 0$ y, dado que la conexión es compatible con la métrica, se obtiene lo siguiente:

$$\langle D_X P, P \rangle = \langle X, P \rangle = 0 ,$$

implicando que el campo de vectores posición P es normal a la superficie $H^2(r)$. Entonces basta con normalizar el vector P para obtener el campo normal unitario ξ a esta superficie cuadrática, es decir, el campo ξ obtiene la siguiente expresión en términos de la parametrización:

$$\xi(u, v) = \frac{1}{r} P = \frac{1}{r} \psi(u, v) .$$

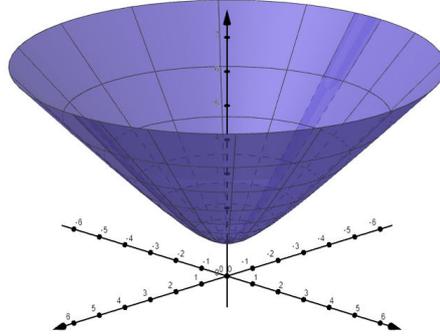


Figura 1.3: Modelo del plano hiperbólico $H^2(r)$ en \mathbb{R}_1^3 .

Tomando de nuevo un campo tangente arbitrario X a la superficie $H^2(r)$, es posible demostrar que el operador de forma de ésta es un múltiplo de la identidad en cada espacio tangente:

$$A_\xi X = -D_X \xi = -\frac{1}{r} D_X P = -\frac{1}{r} X, \quad (1.26)$$

mostrando que $H^2(r)$ es una de las dos superficies umbólicas listadas en el Teorema 1.54.

- Cilindro hiperbólico plano tipo espacio

El *cilindro hiperbólico plano tipo espacio* toma el nombre de cilindro porque se trata de un producto riemanniano sobre una curva plana, que además está encajado en el espacio de Minkowski.

Definición 1.49. El *cilindro hiperbólico plano tipo espacio* $H^1(r) \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}_1^3 es un producto riemanniano sobre la hipérbola tipo espacio $H^1(r)$, y se parametriza de la siguiente manera:

$$\psi(u, v) = (r \cosh u, r \sinh u, v) \quad ; \text{ donde } r > 0 .$$

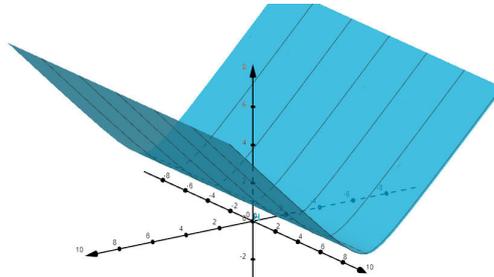


Figura 1.4: Cilindro hiperbólico tipo espacio $H^1(r) \times \mathbb{R}$.

Dado que los cilindros en general son superficies producto donde uno de los factores es \mathbb{R} , entonces al menos un elemento del marco coordenado será constante como se muestra a continuación:

$$\psi_u = (r \sinh u, r \cosh u, 0) \quad ; \quad \psi_v = e_3 , \quad (1.27)$$

donde e_3 es uno de los elementos espaciales de la base canónica de \mathbb{R}_1^3 , y es precisamente en esta dirección en la que se extienden las rectas que dan forma al cilindro, razón por la cual el campo normal unitario ξ carece de una componente en la dirección e_3 como lo muestra la siguiente expresión de ξ en términos de la parametrización dada en la Definición 1.49:

$$\xi(u, v) = \frac{1}{r} \psi_{uu} = (\cosh u, \sinh u, 0) . \quad (1.28)$$

Por último, la expresión mostrada en la Ecuación (1.28) permite calcular la representación matricial de A_ξ para este cilindro en términos del marco coordenado en la Ecuación (1.27):

$$A_\xi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.29)$$

- Espacio de De Sitter

El *espacio de De Sitter* $S_1^2(r)$ es un hiperboloide de revolución en el espacio de Minkowski que está determinado por la ecuación cuadrática $\langle p, p \rangle = r^2$. De esta condición se sigue que $S_1^2(r)$ es una superficie temporal de \mathbb{R}_1^3 .

Definición 1.50. La superficie $S_1^2(r)$ se define de la siguiente manera como subconjunto de \mathbb{R}_1^3 :

$$S_1^2(r) := \{ p \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = r^2 ; \text{ con } r > 0 \} ,$$

y es a partir de esta definición que $S_1^2(r)$ se puede parametrizar como se muestra a continuación:

$$\psi(u, v) = r (\sinh u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) \quad ; \quad \text{tal que } r > 0 .$$

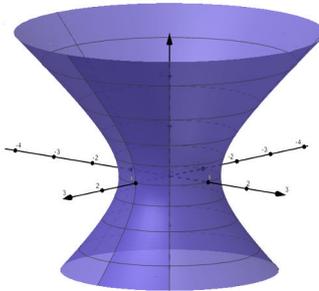


Figura 1.5: Espacio de De Sitter $S_1^2(r)$ en \mathbb{R}_1^3 .

De manera similar al caso de $H^2(r)$, el vector posición P de los puntos p en $S_1^2(r)$ es ortogonal a la superficie misma de tal manera que el campo normal unitario ξ se encuentra descrito como se muestra a continuación:

$$\xi(u, v) = \frac{1}{r}P = \frac{1}{r}\psi(u, v) ,$$

en términos de la parametrización ψ que aparece en la Definición 1.50. Así, dado que la definición del operador de forma no depende de la causalidad de la superficie, se procede de manera análoga como se hizo en la Ecuación (1.26). Por lo tanto:

$$A_\xi = -\frac{1}{r}I , \quad (1.30)$$

en todo M , es decir, el espacio de De Sitter $S_1^2(r)$ es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 y la segunda superficie de este tipo en la lista del Teorema 1.54.

- Cilindro circular plano tipo tiempo

En este caso, el *cilindro circular plano tipo tiempo* es el cilindro usual de la geometría euclidiana, sólo que en este caso se encuentra encajado en \mathbb{R}_1^3 como una superficie temporal.

Definición 1.51. El *cilindro circular plano tipo tiempo* $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$ es un producto lorentziano sobre la circunferencia plana tipo espacio $S^1(r)$, que se parametriza de la siguiente manera:

$$\psi(u, v) = (u, r \cos v, r \sin v) \quad ; \quad \text{donde } r > 0 ,$$

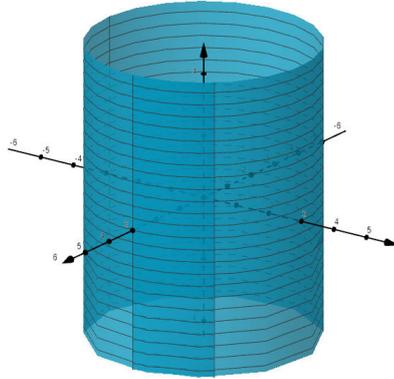


Figura 1.6: Cilindro circular tipo tiempo $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$.

En este caso la notación \mathbb{R}_1 aparece en el producto para denotar el carácter lorentziano, no sólo del producto, sino de la componente misma; componente en cuya dirección se extienden las rectas temporales de este cilindro. Entonces, partiendo de la parametrización que aparece en la Definición 1.51 para este cilindro circular, los elementos del marco coordenado de este cilindro son:

$$\psi_u = e_1 \quad ; \quad \psi_v = (0, -r \sin v, r \cos v) , \quad (1.31)$$

donde e_1 es el elemento temporal de la base canónica de \mathbb{R}_1^3 . Como se puede observar, el campo ψ_u es constante en esta ocasión siguiendo el comportamiento usual de los cilindros. Además, como es usual entre éstos, las segundas derivadas de ψ se anularán con excepción de una que a su vez coincidirá con la dirección del campo normal unitario ξ :

$$\xi(u, v) = \frac{1}{r} \psi_{vv} = (0, -\cos v, -\sin v) . \quad (1.32)$$

La Ecuación (1.32) hace posible expresar al operador A_ξ en términos del marco coordenado del cilindro que se describe en la Ecuación (1.31):

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} . \quad (1.33)$$

- Cilindro hiperbólico plano tipo tiempo

Este cilindro es similar al cilindro hiperbólico plano tipo espacio en la Definición 1.49, siendo el carácter causal la principal diferencia.

Definición 1.52. El *cilindro hiperbólico plano tipo tiempo* $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ es un producto lorentziano sobre la hipérbola plana tipo tiempo $S_1^1(r)$, que se parametriza de la siguiente manera:

$$\psi(u, v) = (r \sinh u, r \cosh u, v) \quad ; \quad \text{tal que } r > 0 .$$

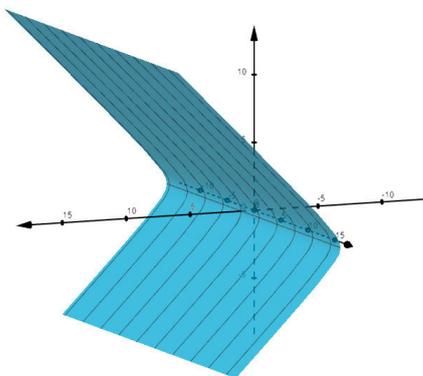


Figura 1.7: Cilindro hiperbólico tipo tiempo $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$.

El cilindro $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ es similar al cilindro $H^1(r) \times \mathbb{R}$ en el sentido de que ambos cilindros extienden las rectas que los determinan sobre hipérbolas, con la diferencia, queda claro, que tanto las hipérbolas como las superficies poseen un carácter causal diferente.

El marco coordenado del cilindro $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ respecto de la parametrización ψ en la Definición 1.52 no es muy diferente a los marcos coordenados de los cilindros anteriores, como se puede observar a continuación:

$$\psi_u = (r \cosh u, r \sinh u, 0) \quad ; \quad \psi_v = e_3 , \quad (1.34)$$

de donde se deduce la siguiente expresión para el campo normal unitario ξ :

$$\xi(u, v) = \frac{1}{r} \psi_{uu} = (\sinh u, \cosh u, 0) . \quad (1.35)$$

De la Ecuación (1.35) se sigue la siguiente representación matricial para el operador A_ξ :

$$A_\xi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.36)$$

en términos del marco coordenado que aparece en la Ecuación (1.34) para este cilindro.

- Superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken

La *superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken* M_0 es una superficie tipo B-Scroll y por tanto una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 cuyo comportamiento, como se verá más adelante en el Ejemplo 2.24, no difiere mucho al de un cilindro.

Definición 1.53. La *superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken* está determinada por la siguiente ecuación cuadrática en términos de las coordenadas canónicas (t, x, y) del espacio de Minkowski:

$$y = \frac{1}{2} (t - x)^2 .$$

Además, esta superficie se puede describir a partir de la siguiente parametrización:

$$\psi(u, v) = \left(\frac{1}{6}(u - v)^3 + u, \frac{1}{6}(u - v)^3 + v, \frac{1}{2}(u - v)^2 \right) . \quad (1.37)$$

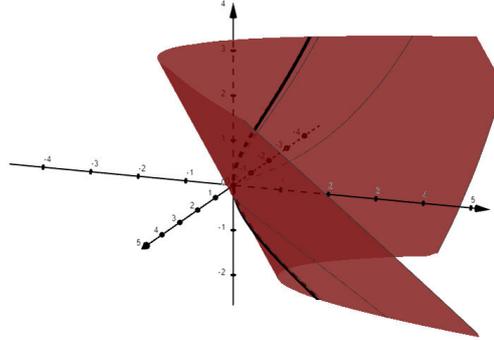


Figura 1.8: Superficie mínima y plana M_0 de Chen-Van der Veken con una geodésica tipo tiempo.

De la parametrización ψ en la Definición 1.53 se puede observar que el marco coordenado de M_0 se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_u &= \left(\frac{1}{2}(u - v)^2 + 1, \frac{1}{2}(u - v)^2, u - v \right) , \\ \psi_v &= \left(-\frac{1}{2}(u - v)^2, -\frac{1}{2}(u - v)^2 + 1, -(u - v) \right) , \end{aligned} \quad (1.38)$$

tal que:

$$\langle \psi_u, \psi_u \rangle = -1 \quad ; \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \psi_v, \psi_v \rangle = 1 \quad ,$$

es decir, el marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$ en (1.38) es un marco ortonormal en toda la superficie. Aún más, el campo normal unitario ξ a la superficie M_0 adquiere una sencilla expresión en términos de la parametrización de la superficie, como se muestra a continuación:

$$\xi(u, v) = \psi_{uu} = (u - v, u - v, 1) \quad , \quad (1.39)$$

implicando que el operador A_ξ para M_0 se puede representar por la siguiente matriz respecto del marco coordenado en la Ecuación (1.38):

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.40)$$

Por otro lado, la superficie M_0 también es una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 que admite una parametrización tipo B-scroll. Sea γ la siguiente curva tipo luz:

$$\gamma(s) = \left(\frac{4}{3}s^3 + s, \frac{4}{3}s^3 - s, 2s^2 \right) \quad ,$$

sobre la cual se construye el siguiente marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \xi\}$:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (4s^2 + 1, 4s^2 - 1, 4s) \quad , \\ \eta(s) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \quad , \\ \xi(s) &= (2s, 2s, 1) \quad , \end{aligned}$$

donde $\xi(s)$ es el campo normal unitario de M_0 restringido a γ . Cabe recordar que esto último sucede porque la curva γ es una geodésica tipo luz de la superficie M_0 y, en ese caso, su vector normal en \mathbb{R}_1^3 es ortogonal a la superficie M_0 . Además, este marco de Frenet cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= 4\xi(s) \quad , \\ \eta'(s) &= 0 \quad , \\ \xi'(s) &= -4\eta(s) \quad , \end{aligned}$$

mostrando que las curvaturas de γ adquieren los siguientes valores a lo largo de la curva:

$$\kappa_1(s) = 4 \quad ; \quad \kappa_2(s) = 0 \quad .$$

Así, el marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \xi\}$ sobre γ permite parametrizar a la superficie M_0 como un B-Scroll de \mathbb{R}_1^3 de la siguiente manera:

$$\varphi(s, t) = \gamma(s) + t\eta(s) = \left(\frac{4}{3}s^3 + s - \frac{t}{2}, \frac{4}{3}s^3 - s - \frac{t}{2}, 2s^2 \right) \quad , \quad (1.41)$$

y haciendo uso de las ecuaciones de Frenet (1.4) el campo coordenado asociado a esta parametrización adquiere la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s) + t\eta'(s) = (4s^2 + 1, 4s^2 - 1, 4s) \quad , \\ \varphi_t &= \eta(s) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \quad . \end{aligned}$$

Para cerrar esta sección, cabe mencionar que una consecuencia de la Proposición 1.45 es que la superficie de Chen-Van der Veken M_0 está constituida sólo por puntos cuasiumbilicales, es decir, M_0 es una superficie cuasiumbical de \mathbb{R}_1^3 ya que la siguiente ecuación se cumple para todos los puntos de M_0 :

$$\kappa_1(s) + t\kappa_2'(s) = 4 \neq 0 ,$$

respecto de la parametrización (1.41). Además, esto último implica que el operador A_ξ tiene la siguiente representación:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.42)$$

en términos del marco tipo luz descrito en la Ecuación (1.24) para superficies tipo B-scroll cuasiumbilicales.

Con esto se está en posición de enunciar el teorema de clasificación de superficies paralelas en el espacio de Minkowski.

Teorema 1.54. [1] Una superficie paralela no degenerada de \mathbb{R}_1^3 es localmente congruente a una de las siguientes clases de superficies:

- (a) Plano tipo espacio.
- (b) Plano hiperbólico en \mathbb{R}_1^3 .
- (c) Cilindro hiperbólico plano tipo espacio.
- (d) Plano tipo tiempo.
- (e) Espacio de De Sitter.
- (f) Cilindro circular plano tipo tiempo.
- (g) Cilindro hiperbólico plano tipo tiempo.
- (h) Superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken.

De ahora en adelante, para verificar alguna propiedad de esta clase de superficies, bastará con hacerlo para cada representante de las distintas clases de equivalencia listadas en el Teorema 1.54, donde la congruencia se da por medio de isometrías.

Proposición 1.55. Toda superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 tiene al menos una dirección principal en cualquiera de sus puntos.

Demostración. Sea M una superficie paralela en \mathbb{R}_1^3 y p un punto en M . Entonces existe un abierto alrededor de p tal que, en ese abierto, M es isométrica a alguna de las superficies listadas en el Teorema 1.54.

Si M es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 se sigue que M es congruente a un plano tipo espacio, un plano tipo tiempo, al plano hiperbólico $H^2(r)$ en \mathbb{R}_1^3 o al espacio de De Sitter $S_1^2(r)$. En todos estos casos el operador de forma de M será un múltiplo de la identidad. Por lo tanto, en un punto p de M cualquier vector en $T_p M$ será un vector propio de A_ξ .

Si M es congruente con alguno de los siguientes cilindros:

$$H^1(r) \times \mathbb{R} \ ; \ \mathbb{R}_1 \times S^1(r) \ ; \ S_1^1(r) \times \mathbb{R} \ ,$$

su operador de forma A_ξ tiene una representación diagonal en cualquier punto p de M . Por lo tanto, A_ξ tiene al menos dos vectores propios en cada espacio tangente $T_p M$.

Si M es congruente con la superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken, M se ve localmente como un B-scroll constituido exclusivamente por puntos cuasiumbilicales. Por lo tanto, la Definición 1.36 de punto cuasiumbilical asegura que en cada punto p de M existe un vector propio tipo luz de A_ξ . □

El único caso en que el operador de forma A_ξ no tiene direcciones principales en un punto p de M es el caso en que A_ξ está representado en $T_p M$ por la forma canónica que aparece en la Ecuación (1.13). Esto es equivalente a que los valores propios de A_ξ sean números complejos con parte imaginaria diferente de cero en $T_p M$ y es la razón por la cual no se considera, en este contexto, que M tenga curvaturas principales en p . Dicho de otra forma, sin direcciones principales no puede haber curvaturas principales.

Corolario 1.56. Toda superficie paralela M en \mathbb{R}_1^3 tiene curvaturas principales constantes.

Demostración. Sea M una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 . La Proposición 1.55 asegura que en cualquier punto de M la superficie tendrá al menos una dirección principal. Esto implica a su vez que en cualquier punto de M la superficie tendrá al menos una curvatura principal k .

Entonces, si M es congruente con alguna de las superficies umbilicales que aparecen en el Teorema 1.54, el operador A_ξ de M es un múltiplo constante de la identidad. Si la congruencia se da con alguno de los planos el múltiplo es cero y las curvaturas principales de M son $k_i = 0$. Por otro lado, si la congruencia se da con $H^2(r)$ ó $S_1^2(r)$ se sigue de las Ecuaciones (1.26) y (1.30) que las curvaturas principales de M son $k_i = -\frac{1}{r}$ en ambos casos. Por lo tanto, si M es paralela y congruente con una superficie umbilical, M tiene curvaturas principales constantes.

Si M es congruente a alguno de los cilindros:

$$H^1(r) \times \mathbb{R} \ ; \ \mathbb{R}_1 \times S^1(r) \ ; \ S_1^1(r) \times \mathbb{R} \ ,$$

que se mencionan en el Teorema 1.54, se sigue de las Ecuaciones (1.29), (1.33) y (1.36) que las curvaturas principales son constantes. En todos estos casos una de las curvaturas es cero mientras que la otra es un múltiplo de $\frac{1}{r}$.

Si M es congruente con la superficie de Chen-Van der Veken M_0 , se sigue de la Ecuación (1.42) que la curvatura principal de M es $k = 0$ en todos lados. □

Existe una clase de superficies en \mathbb{R}_1^3 que vale la pena definir no sólo por su importancia en la geometría de subvariedades sino por la relación que estas guardan con las superficies paralelas.

Definición 1.57. Se dice que una superficie en \mathbb{R}_1^3 es *isoparamétrica* si el polinomio mínimo de A_ξ es constante en toda la superficie.

La siguiente proposición proporciona una buena cantidad de ejemplos de superficies isoparamétricas en \mathbb{R}_1^3 .

Proposición 1.58. Sea M una superficie B-scroll en \mathbb{R}_1^3 sobre una curva tipo luz γ . Entonces, si M es isoparamétrica la segunda curvatura κ_2 de γ será constante.

Demostración. Si una superficie B-scroll M en \mathbb{R}_1^3 es isoparamétrica se sigue, por la Definición 1.57, que el polinomio mínimo de M es constante. Esto quiere decir, por la Ecuación (1.21), que el polinomio mínimo de A_ξ en M adquiere una de las siguientes representaciones en todo M :

$$\mu_A(t) = t - \kappa_2 \quad ; \quad \mu_A(t) = (t - \kappa_2)^2 \quad ,$$

y en cada uno de estos casos los coeficientes del polinomio mínimo μ_A deberán ser funciones constantes sobre M . Esto implica que la segunda curvatura de γ , la función κ_2 , es constante en ambos casos. □

Existen dos casos excluyentes entre sí en los que se puede enunciar el recíproco de la Proposición 1.58. El primer caso se da cuando $\kappa_1 \neq 0$ a lo largo de todo γ , haciendo de M una superficie cuasiumbilical de \mathbb{R}_1^3 . El segundo caso se da cuando κ_1 es idénticamente cero a lo largo de γ , haciendo de M una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 .

El siguiente lema también es cierto en \mathbb{R}^3 y acota la relación que existe entre superficies paralelas e isoparamétricas.

Lema 1.59. Toda superficie paralela en \mathbb{R}_1^3 es isoparamétrica.

Demostración. Una vez más, al mirar las representaciones canónicas de los operadores de forma de cada una de las superficies que aparecen en el Teorema 1.54 se sigue el resultado. Esto porque dichas representaciones se mantienen constantes a lo largo de las superficies. □

Observación 1.60. Como se puede leer en [5], las superficies paralelas e isoparamétricas coinciden en \mathbb{R}^3 . A saber, ambas clases de superficies se pueden clasificar en planos, esferas y cilindros circulares. Dicha identidad deja de ser cierta en el espacio de Minkowski.

El siguiente ejemplo muestra que no toda superficie isoparamétrica en \mathbb{R}_1^3 es una superficie paralela.

Ejemplo 1.61. Considere la superficie N_0 en \mathbb{R}_1^3 dada por la parametrización:

$$\psi(s, t) = \gamma(s) + t\eta(s) \quad ; \quad \text{tal que } s > 0 \quad ,$$

donde γ es una curva tipo luz parametrizada de la siguiente manera:

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{2} \left(\frac{s^4}{20} + 1 \right), \frac{s}{2} \left(\frac{s^4}{20} - 1 \right), \frac{s^3}{6} \right) \quad ,$$

y donde η es el siguiente campo vectorial tipo luz sobre γ :

$$\eta(s) = (-1, -1, 0) .$$

La superficie N_0 es una superficie isoparamétrica de \mathbb{R}_1^3 que no es paralela.

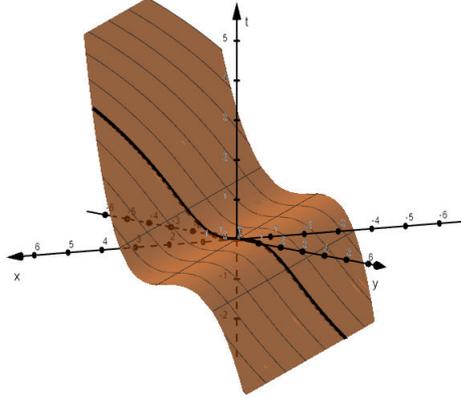


Figura 1.9: Superficie N_0 con su curva base γ resaltada en negro.

A partir de la definición de la superficie N_0 que se muestra en el Ejemplo 1.61, se puede ver que N_0 es una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 que admite una parametrización tipo B-scroll respecto del marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \omega\}$ que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \left(\frac{s^4}{8} + \frac{1}{2}, \frac{s^4}{8} - \frac{1}{2}, \frac{s^2}{2} \right) , \\ \eta(s) &= (-1, -1, 0) , \\ \omega(s) &= \left(\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, 1 \right) , \end{aligned}$$

y que cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= s\omega(s) , \\ \eta'(s) &= 0 , \\ \omega'(s) &= -s\eta(s) . \end{aligned}$$

Así, las curvaturas de la curva tipo luz γ son las siguientes:

$$\kappa_1(s) = s \quad ; \quad \kappa_2(s) = 0 ,$$

resultado que permite expresar el marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ de N_0 de la siguiente manera:

$$\psi_s(s, t) = \gamma'(s) \quad ; \quad \psi_t(s, t) = \eta(s) . \quad (1.43)$$

Además, de la Proposición 1.45 se sigue que N_0 es una superficie cuasiumbilical de \mathbb{R}_1^3 ya que para todo punto de esta superficie se cumple que:

$$\kappa_1(s) + t\kappa_2'(s) = s \neq 0 \quad ; \quad \text{si } s > 0 . \quad (1.44)$$

Entonces, partiendo de las Ecuaciones (1.20) y (1.44), el operador de forma A_ξ de N_0 tiene la siguiente representación matricial en términos del marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix},$$

mostrando que el polinomio mínimo μ_A de A_ξ para la superficie N_0 es el siguiente:

$$\mu_A(t) = t^2,$$

para todos los puntos de la superficie. Esto quiere decir que la superficie N_0 es una superficie isoparamétrica de \mathbb{R}_1^3 .

Por otro lado, el marco coordenado de N_0 que aparece en la Ecuación (1.43) cumple con las siguientes ecuaciones respecto de la conexión inducida:

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi_s} \psi_s &= (\psi_{ss})^\top = (s\omega)^\top = 0, \\ \nabla_{\psi_s} \psi_t &= (\psi_{st})^\top = (\eta') = 0, \end{aligned}$$

tomando en cuenta que el campo $\omega(s)$ siempre es ortogonal a N_0 . Entonces, de la representación de A_ξ en términos del marco coordenado $\{\psi_s, \psi_t\}$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\psi_s} A_\xi)(\psi_s) &= \nabla_{\psi_s} A_\xi \psi_s - A_\xi (\nabla_{\psi_s} \psi_s) = \nabla_{\psi_s} (s\psi_t) \\ &= (\psi_s \cdot s) \psi_t + s \nabla_{\psi_s} \psi_t \\ &= \psi_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $(\nabla_{\psi_s} A_\xi)(\psi_s) \neq 0$ la superficie N_0 no es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

Observación 1.62. El Ejemplo 1.61 muestra que las superficies paralelas e isoparamétricas de \mathbb{R}_1^3 son clases diferentes de superficies.

Capítulo 2

Superficies normales no degeneradas

En el capítulo anterior se introduce, en la Definición 1.39, la noción de superficie reglada en cualquier espacio ambiente \overline{M} por medio de su parametrización. Estos objetos son parte fundamental de este trabajo ya que es en términos de estas superficies regladas que se irán encontrando y construyendo todas las propiedades necesarias para llegar a buen puerto, a saber, el Teorema 2.37. Sin embargo, las condiciones que se irán desarrollando a lo largo del capítulo serán consecuencia de tomar en cuenta cierto tipo de superficies regladas; las *superficies normales*.

Definición 2.1. Sea M una superficie orientada en un espacio ambiente \overline{M} de dimensión 3 y sea γ una curva regular contenida en M . Si ξ es un campo normal unitario de M en \overline{M} , se define la *superficie normal* a M a lo largo de γ , Σ_γ , como la imagen de la siguiente parametrización:

$$\phi(s, t) = \overline{\text{exp}}_{\gamma(s)}(t\xi(s)) ,$$

donde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ y donde $\overline{\text{exp}}$ es la transformación exponencial de \overline{M} .

La Definición 2.1 construye las superficies normales Σ_γ como superficies compuestas por geodésicas del espacio ambiente \overline{M} que tienen condición inicial sobre γ en la dirección ortogonal a la superficie M . Estas condiciones iniciales permiten relacionar la geometría de M y Σ_γ con la geometría de γ por medio del *marco de Frenet* de la curva γ , siempre que esta se comporte bien.

Por último, Luis Hernández Lamóneda y Gabriel Ruiz Hernández demuestran en [5] que, dada una superficie M en un espacio modelo riemanniano \overline{M} de dimensión 3, M es isoparamétrica si por cada uno de sus puntos pasan 3 curvas diferentes γ_i tales que sus respectivas superficies normales Σ_{γ_i} son mínimas. El objetivo de este capítulo es el de llevar este resultado al espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 como espacio ambiente, esto conlleva una exploración más profunda de la hipótesis de las tres curvas y de la geometría de las superficies normales Σ_γ que desemboca en la Proposición 2.18 y el Teorema 2.25, que se ha decidido

nombrar *primer teorema de caracterización*; estos resultados representan una mejora respecto de las proposiciones correspondientes mostradas en [5]. El Teorema 2.37, que se ha decidido nombrar *segundo teorema de caracterización*, es la consecuencia de la hipótesis de las 3 curvas buscada en un ambiente lorentziano; la diferencia es que el Teorema 2.37 caracteriza superficies paralelas y muestra que en \mathbb{R}_1^3 las superficies paralelas e isoparamétricas no coinciden.

2.1. Superficies normales regladas

A lo largo de este capítulo se tomará $\overline{M} = \mathbb{R}_1^3$, lo cual simplifica la parametrización de las superficies normales.

Proposición 2.2. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M . Se define la superficie normal Σ_γ como la superficie reglada que es ortogonal a M a lo largo de γ y que se encuentra descrita por la siguiente parametrización:

$$\phi(s, t) = \gamma(s) + t\xi(s), \quad (2.1)$$

donde ξ es el campo normal unitario de M y t está en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para alguna $\varepsilon > 0$.

La Proposición 2.2 se sigue directamente de la Definición 2.1 ya que las geodésicas de \mathbb{R}_1^3 son líneas rectas. Además, la dirección de las reglas de Σ_γ está bien definida por la orientación de M y el valor de ε dependerá de cada punto $\gamma(s)$ sobre la curva γ .

El marco coordenado $\{\phi_s, \phi_t\}$ de la superficie normal Σ_γ queda descrito por las siguientes expresiones:

$$\phi_s(s, t) = \gamma'(s) + t\xi'(s) \quad ; \quad \phi_t(s, t) = \xi(s), \quad (2.2)$$

mientras que la métrica g^Σ de Σ_γ queda representada por la siguiente matriz:

$$g^\Sigma = \begin{pmatrix} \langle \phi_s, \phi_s \rangle & 0 \\ 0 & \epsilon_t \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde $\epsilon_t = \langle \phi_t, \phi_t \rangle$, cuyo valor será 1 ó -1 dependiendo de la causalidad de M ya que esta superficie siempre será considerada tipo tiempo o tipo espacio.

Tomando en cuenta que la intersección de M y Σ_γ es la curva γ , las Ecuaciones (2.2) aseguran que la superficie normal Σ_γ siempre estará bien definida alrededor de γ desde el punto de vista topológico. Esto porque en γ se tiene que el conjunto $\{\gamma', \xi\}$ es base del espacio tangente $T_\gamma \Sigma_\gamma$.

Dado que el espacio ambiente es lorentziano, la causalidad de las superficies y las curvas siempre son importantes.

Lema 2.3. Sea M una superficie no degenerada de \mathbb{R}_1^3 y γ una curva regular en M . Entonces, Σ_γ es una superficie no degenerada si y sólo si γ no es tipo luz.

Demostración. Como M es una superficie orientada que no es tipo luz, su campo vectorial normal unitario ξ siempre estará bien definido y:

$$\epsilon_t = \langle \phi_t, \phi_t \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1 .$$

Además, a lo largo de γ se cumple lo siguiente para el marco coordenado de Σ_γ :

$$\phi_s = \gamma' \quad ; \quad \phi_t = \xi .$$

Por lo tanto, el determinante de la métrica g^Σ tiene la siguiente expresión a lo largo de γ :

$$\det g^\Sigma|_\gamma = \epsilon_t \langle \gamma', \gamma' \rangle ,$$

de acuerdo con la Ecuación (2.3).

Esto quiere decir que la métrica g^Σ es no degenerada a lo largo de γ si y sólo si γ no es tipo luz. Además, la continuidad de la métrica implica que la superficie Σ_γ no es tipo luz si y sólo si su métrica g^Σ es no degenerada sobre γ . Esto concluye la demostración. \square

Como Σ_γ es una superficie reglada en la dirección de ξ , los vectores velocidad de dichas reglas son paralelos en la dirección de las mismas reglas. Entonces:

$$\phi_{tt} = D_{\phi_t} \phi_t = 0 \Rightarrow \nabla_{\phi_t}^\Sigma \phi_t = h^\Sigma(\phi_t, \phi_t) = 0 ,$$

donde ∇^Σ es la conexión inducida sobre Σ_γ y h^Σ es su segunda forma fundamental. Esto implica la siguiente identidad para curvatura media H^Σ de la superficie normal a lo largo de γ :

$$2H^\Sigma = h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) = h^\Sigma(\gamma', \gamma') , \quad (2.4)$$

La información geométrica codificada en esta última ecuación se puede leer en el siguiente enunciado.

Lema 2.4. Sea γ una curva de M en \mathbb{R}_1^3 . Entonces, γ es una geodésica de M si y sólo si $H^\Sigma = 0$ a lo largo de γ .

Demostración. Si γ es una geodésica de M se tiene que $\gamma''(s) \perp M$. Por lo tanto $\gamma''(s)$ está en el espacio tangente $T_{\gamma(s)}\Sigma$ y por la fórmula de Gauss se obtiene que:

$$\gamma'' = D_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'}^\Sigma \gamma' ,$$

implicando a su vez lo siguiente:

$$h^\Sigma(\gamma', \gamma') = h^\Sigma(\phi_s, \phi_s)|_\gamma = 0 .$$

Entonces, de la Ecuación (2.4) se sigue que $H^\Sigma = 0$ a lo largo de γ .

Si la curvatura media de Σ_γ es cero sobre el trazo de la curva γ se obtiene, por medio de la Ecuación (2.4), que $h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) = 0$ sobre γ . Entonces, usando la fórmula de Gauss para las superficies M y Σ_γ se obtiene la siguiente relación:

$$\gamma'' = \nabla_{\gamma'}^\Sigma \gamma' = \nabla_{\gamma'} \gamma' + h(\gamma', \gamma') . \quad (2.5)$$

Como la fórmula de Gauss se está aplicando sobre la intersección de las superficies M y Σ_γ , el campo $\nabla_{\gamma'}^\Sigma \gamma'$ debe ser una combinación lineal de $\{\gamma', \xi\}$ mientras que $h(\gamma', \gamma')$ es un múltiplo de ξ . Por lo tanto, la Ecuación (2.5) obliga al campo $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ a ser un múltiplo de γ' , es decir:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \lambda \gamma' \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0 ,$$

ya que se está suponiendo que todas las curvas se encuentran descritas por un parámetro afín. □

Si γ es una geodésica en M , el campo $D_{\gamma'}\gamma'$ siempre será ortogonal a la superficie M , es decir, $D_{\gamma'}\gamma'$ será paralelo a ξ . Esto quiere decir que, bajo la definición usual de campo normal para una curva en \mathbb{R}_1^3 , el campo ξ restringido a γ coincide con el campo normal de γ al ser ξ unitario. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea γ una geodésica de M . El *marco de Frenet de γ adaptado a M* es el marco $\{\gamma', \xi, \omega\}$, donde ξ es el campo normal unitario de M restringido a γ y ω es un campo unitario que completa el marco.

Las causalidades de cada uno de los vectores en $\{\gamma', \xi, \omega\}$ dependerán de las causalidades de γ y M . Por esta razón vale la pena definir las siguientes cantidades.

Definición 2.6. Se definen las cantidades ϵ_i para el marco de Frenet de γ adaptado a M como se muestra a continuación:

$$\epsilon_1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle \quad ; \quad \epsilon_2 = \langle \xi, \xi \rangle \quad ; \quad \epsilon_3 = \langle \omega, \omega \rangle . \quad (2.6)$$

Al ser $\{\gamma', \xi, \omega\}$ un marco ortonormal, las cantidades ϵ_i tomarán los valores 1 ó -1 de manera constante a lo largo de γ .

El marco adaptado, al igual que los marcos de Frenet en general, sigue un comportamiento bastante específico que se encuentra codificado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias bastante simple. Antes de dar con dicho sistema de ecuaciones, vale la pena recalcar el siguiente comportamiento del marco adaptado.

Observación 2.7. Sea γ una geodésica de M y $\{\gamma', \xi, \omega\}$ su marco de Frenet adaptado a M . Es importante recalcar que en este caso el conjunto $\{\gamma', \omega\}$ es una base ortonormal del espacio tangente de M a lo largo de γ , es decir, $\{\gamma', \omega\}$ genera a $T_\gamma M$.

Ahora sí se está en condiciones de enunciar las *ecuaciones de Frenet* para el marco adaptado de γ en M .

Proposición 2.8. Sea γ una geodésica no degenerada de M . Entonces el marco de Frenet de γ adaptado a M cumple las siguientes ecuaciones:

- (a) $D_{\gamma'}\gamma' = \gamma'' = \kappa\xi$.
- (b) $D_{\gamma'}\xi = \xi' = -\epsilon_1\epsilon_2\kappa\gamma' + \epsilon_2\epsilon_3\tau\omega$.
- (c) $D_{\gamma'}\omega = \omega' = -\tau\xi$.

Estas Ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Frenet para la curva γ , donde κ y τ son funciones C^∞ sobre γ que se conocen como la curvatura y la torsión de γ , respectivamente.

Demostración. Como γ es una geodésica de M :

$$\gamma'' = D_{\gamma'}\gamma' = h(\gamma', \gamma') = \kappa\xi ,$$

para alguna función suave κ a lo largo de la curva. Esto demuestra la ecuación (a).

Por otro lado, $\langle \omega, \omega \rangle$ y $\langle \omega, \gamma' \rangle$ son constantes. Entonces, derivando los productos en la dirección de γ' se obtiene:

$$\langle \nabla_{\gamma'}\omega, \omega \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \nabla_{\gamma'}\omega, \gamma' \rangle = 0 ,$$

ya que γ es geodésica. Por lo tanto $\nabla_{\gamma'}\omega = 0$ y $D_{\gamma'}\omega = h(\gamma', \omega) = -\tau\xi$ para alguna función suave τ sobre γ . Esto demuestra la ecuación (c).

Por último, de la definición de operador de forma y las Ecuaciones (a) y (c) se sigue que:

$$\begin{aligned} \langle D_{\gamma'}\xi, \gamma' \rangle &= \langle -A_{\xi}\gamma', \gamma' \rangle = -\langle h(\gamma', \gamma'), \xi \rangle = -\epsilon_2\kappa . \\ \langle D_{\gamma'}\xi, \omega \rangle &= \langle -A_{\xi}\gamma', \omega \rangle = -\langle h(\gamma', \omega), \xi \rangle = \epsilon_2\tau . \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $D_{\gamma'}\xi$ es tangente a M se sigue que la Ecuación (b) es cierta. □

La torsión definida por la Ecuación (c) no es la torsión usual que se define para curvas en \mathbb{R}_1^3 . La restricción de estar contenida en una superficie M y tomar el campo normal unitario de M como campo normal para la curva hace de ésta una torsión ligeramente diferente.

Ejemplo 2.9. El helicoides tipo tiempo descrito por la siguiente parametrización:

$$\psi(s, u) = (s, u \cos(s), u \operatorname{sen}(s)) ,$$

contiene una recta con torsión diferente de cero respecto de su marco de Frenet adaptado al helicoides.

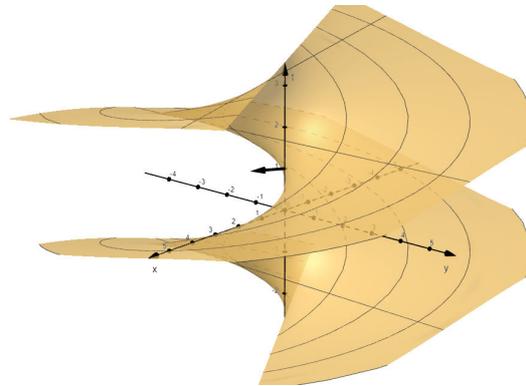


Figura 2.1: Helicoides con vector normal.

Los helicoides son superficies regladas y la parametrización del helicoide tipo tiempo en la Ejemplo 2.9 se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\psi(s, u) = \alpha(s) + u\vartheta(s) = (s, 0, 0) + u(0, \cos(s), \sin(s)) ,$$

en términos de una curva base α y la dirección ϑ de sus reglas.

Se puede verificar sin mucha dificultad que el campo normal unitario ξ de M adquiere la siguiente representación al restringirlo a la curva α :

$$\xi(s) = (0, -\sin(s), \cos(s)) .$$

Entonces, el marco de Frenet $\{\alpha', \xi, \omega\}$ de α adaptado a M queda descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (1, 0, 0) , \\ \xi(s) &= (0, -\sin(s), \cos(s)) , \\ \omega(s) &= (0, -\cos(s), -\sin(s)) . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por lo tanto:

$$D_{\alpha'}\omega = \omega' = (0, \sin(s), -\cos(s)) ,$$

y la Ecuación (c) de la Proposición 2.8 asegura que la torsión de α es $\tau(s) = -1$, que es un resultado que en otras circunstancias se podría considerar errado ya que α es una recta y por tanto una curva plana.

La siguiente proposición muestra un conjunto de ecuaciones que pueden ser muy útiles para entender la dinámica que siguen las superficies M y Σ_γ entre sí.

Proposición 2.10. Sea γ una geodésica no degenerada de M . Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones a lo largo de la curva:

(a) $A_\xi\gamma' = \epsilon_1\epsilon_2\kappa\gamma' - \epsilon_2\epsilon_3\tau\omega$.

(b) $h^\Sigma(\gamma', \xi) = \epsilon_2\epsilon_3\tau\omega$.

(c) $\langle A_\xi\omega, \gamma' \rangle = -\epsilon_2\tau$.

(d) $h^\Sigma(\gamma', \gamma') = h^\Sigma(\xi, \xi) = 0$.

(e) $\nabla_{\gamma'}^\Sigma\gamma' = h(\gamma', \gamma')$.

Demostración. La ecuación (a) es tan sólo otra forma de expresar la ecuación (b) de la Proposición 2.8 en términos del operador de forma de M y la ecuación (c) es una consecuencia directa de ello.

Las ecuaciones (d) y (e) son consecuencia del Lema 2.4, como se puede ver en la demostración del mismo y en la Ecuación (2.5).

Para demostrar la ecuación (b) considérese lo siguiente. Como h^Σ es ortogonal a Σ_γ , h^Σ se encuentra en la dirección de ω a lo largo de γ . Entonces, usando la Ecuación (b) de la Proposición 2.8 se obtiene lo siguiente:

$$\langle h^\Sigma(\gamma', \xi), \omega \rangle = \langle D_{\gamma'}\xi, \omega \rangle = \epsilon_2\tau ,$$

obteniendo así la ecuación restante. □

Lema 2.11. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 y γ una curva no degenerada en M . Si Σ_γ es la superficie normal a M a lo largo de γ , la curvatura K^Σ de la superficie normal adquiere la siguiente expresión:

$$K^\Sigma = -\bar{\epsilon}\epsilon_t \frac{\langle \bar{\xi}, D_{\phi_s}\phi_t \rangle^2}{\langle \phi_s, \phi_s \rangle},$$

donde $\bar{\xi}$ es el campo normal unitario a Σ_γ , $\{\phi_s, \phi_t\}$ es el marco coordenado de Σ_γ , $\bar{\epsilon} = \langle \bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle$ y $\epsilon_t = \langle \phi_t, \phi_t \rangle$.

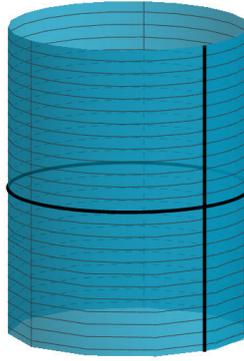


Figura 2.2: Cilindro circular tipo tiempo con sus líneas de curvatura.

Demostración. Como la superficie normal Σ_γ es una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 , de la Proposición 1.41 se sigue que la curvatura K^Σ de Σ_γ se puede expresar de la siguiente manera:

$$K^\Sigma = -\bar{\epsilon}\epsilon_t \frac{\langle A_{\bar{\xi}}^\Sigma \phi_s, \phi_t \rangle^2}{\langle \phi_s, \phi_s \rangle}.$$

Utilizando la definición de operador de forma para Σ_γ se obtiene que:

$$\langle A_{\bar{\xi}}^\Sigma \phi_s, \phi_t \rangle = -\langle D_{\phi_s} \bar{\xi}, \phi_t \rangle = \langle \bar{\xi}, D_{\phi_s} \phi_t \rangle,$$

demostrando así la expresión propuesta para la curvatura de la superficie normal. □

El Lema 2.11 permite hacer una demostración del Teorema de Bonnet en el espacio de Minkowski. Esto da pie a una futura generalización de este resultado clásico en ambientes lorentzianos.

Teorema 2.12. Sea γ una curva no degenerada de M y Σ_γ la superficie normal a M a lo largo de γ . Entonces, γ es una línea de curvatura de M si y sólo si Σ_γ es plana.

Demostración. Tomando en cuenta el Lema 2.11, basta con considerar el producto $\langle \bar{\xi}, D_{\phi_s} \phi_t \rangle$ para llegar al resultado. Recordando que la variación $D_{\phi_s} \phi_t$

es la segunda derivada parcial ϕ_{ts} de la parametrización de Σ_γ , se llega a lo siguiente:

$$\langle \bar{\xi}, D_{\phi_s} \phi_t \rangle = \langle \bar{\xi}, \phi_{ts} \rangle = \langle \bar{\xi}, \xi' \rangle . \quad (2.8)$$

Como el campo $\phi_t = \xi$ es constante a lo largo de las reglas de Σ_γ , su variación en la dirección del campo ϕ_s siempre coincidirá con el valor de ξ' , que a su vez es igual al valor de $-A_\xi \gamma'$ a lo largo de la curva γ . Esto no quiere decir que $\phi_{ts}(s, t)$ sea igual a $-A_\xi \gamma'$ ya que para $t \neq 0$ los campos vectoriales mencionados ni siquiera se encuentran definidos en los mismos espacios tangentes, tan sólo se trata de una coincidencia propia de las superficies regladas.

Si $K^\Sigma = 0$ el producto $\langle \bar{\xi}, \phi_{ts} \rangle = 0$, particularmente sobre γ . Entonces:

$$\langle \bar{\xi}, \phi_{ts} \rangle_\gamma = \langle \bar{\xi}, \xi' \rangle_\gamma = -\langle \bar{\xi}, A_\xi \gamma' \rangle_\gamma = 0 .$$

Como $\bar{\xi}$ y $A_\xi \gamma'$ son campos vectoriales en $T_\gamma M$ y $\bar{\xi}$ es ortogonal a la curva γ , se puede concluir que:

$$A_\xi \gamma' = \lambda \gamma' ,$$

es decir, γ es una línea de curvatura de M .

Por otro lado, si γ es una línea de curvatura de la superficie M se cumple que:

$$\xi' = -A_\xi \gamma' = -\lambda \gamma' ,$$

sobre γ . Entonces:

$$\phi_s = \gamma' + t\xi' = \gamma' - t\lambda\gamma' = (1 - t\lambda)\gamma' ,$$

y como $\bar{\xi}$ es ortogonal a Σ_γ se cumple lo siguiente:

$$\langle \bar{\xi}, \phi_s \rangle = 0 \Rightarrow (1 - t\lambda)\langle \bar{\xi}, \gamma' \rangle = 0 .$$

Esto último implica, por continuidad, que $\langle \bar{\xi}, \gamma' \rangle = 0$ en una vecindad de γ en Σ_γ . Por lo tanto, como el valor de $\phi_{ts}(s, t)$ coincide con el valor de $\xi'(s)$ en todos los puntos $\phi(s, t)$ de Σ_γ , la siguiente igualdad es válida:

$$\langle \bar{\xi}, \phi_{ts} \rangle = \langle \bar{\xi}, \xi' \rangle = -\lambda \langle \bar{\xi}, \gamma' \rangle = 0 ,$$

en todos los puntos de Σ_γ . Finalmente, haciendo buen uso del Lema 2.11 se concluye que $K^\Sigma = 0$. □

El Teorema 2.12 es el teorema de Bonnet cuando el espacio ambiente es \mathbb{R}_1^3 y, aunque es el punto de partida e inspiración de los artículos que dan vida a esta tesis, no es el objetivo avanzar por el camino que traza este resultado. En el siguiente capítulo se volverá a esta idea pero con una ligera modificación, mientras tanto, γ cambiara de ser una línea de curvatura a una geodésica de M y se pasará a considerar la curvatura media de Σ_γ en vez de curvatura gaussiana.

2.2. Superficies normales extremas

Definición 2.13. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 tal que su curvatura media H es igual a cero. Entonces:

- Se dice que M es mínima si M es tipo tiempo.
- Se dice que M es máxima si M es tipo espacio.

Considérese el campo ϕ_s del marco coordenado de Σ_γ descrito en la Ecuación (2.2). Usando el marco de Frenet de γ adaptado a M se puede describir al campo ϕ_s en términos de la curvatura y la torsión de la curva base γ :

$$\phi_s(s, t) = [1 - \epsilon_1 \epsilon_2 t \kappa(s)] \gamma'(s) + \epsilon_2 \epsilon_3 t \tau(s) \omega(s) . \quad (2.9)$$

Esto permite describir, en una notación más simplificada, el campo ϕ_{ss} en términos del marco de Frenet $\{\gamma', \xi, \omega\}$ al usar las ecuaciones de Frenet establecidas en la Proposición 2.8:

$$\phi_{ss} = -\epsilon_1 \epsilon_2 t \kappa' \gamma' + [1 - \epsilon_1 \epsilon_2 t \kappa^2 - \epsilon_2 \epsilon_3 t \tau^2] \xi + \epsilon_2 \epsilon_3 t \tau' \omega . \quad (2.10)$$

Las Ecuaciones (2.9) y (2.10) permiten establecer condiciones sobre la curvatura media de la superficie normal, como se muestra a continuación.

Lema 2.14. La superficie Σ_γ es máxima o mínima si y sólo si el campo ϕ_{ss} es tangente a Σ_γ .

Demostración. En todo Σ_γ se cumple que $h^\Sigma(\phi_t, \phi_t) = 0$ ya que se trata de una superficie reglada. Entonces:

$$H^\Sigma = \frac{1}{2\langle \phi_s, \phi_s \rangle} h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) ,$$

implicando que $H^\Sigma = 0$ si y sólo si $h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) = 0$. Además, la fórmula de Gauss aplicada a Σ_γ para el campo ϕ_s afirma lo siguiente:

$$\phi_{ss} = D_{\phi_s} \phi_s = \nabla_{\phi_s}^\Sigma \phi_s + h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) ,$$

asegurando a su vez que $h^\Sigma(\phi_s, \phi_s) = 0$ si y sólo si ϕ_{ss} es tangente a Σ_γ . Esto concluye la demostración. \square

Observación 2.15. Ambas superficies en la Definición 2.13 son extremos del funcional de área. Es por esta razón que el término *superficie extrema* se puede aplicar en ambos casos.

Una consecuencia evidente del Lema 2.14 es que la superficie Σ_γ será extrema si y sólo si cualquier campo normal a Σ_γ es ortogonal al campo ϕ_{ss} . Esta forma de repensar el Lema 2.14 resulta muy útil para determinar la geometría de Σ_γ a partir de la geometría de la curva base γ . El siguiente resultado representa un primer paso en esta dirección.

Lema 2.16. Sean $\{\gamma', \xi, \omega\}$ el marco de Frenet de γ adaptado a M y Σ_γ la superficie normal a lo largo de γ . Entonces, el campo Y definido sobre Σ_γ :

$$Y(s, t) = -t\tau\gamma' - [\epsilon_3 + t\kappa]\omega, \quad (2.11)$$

es C^∞ , ortogonal a Σ_γ y diferente de cero en una vecindad alrededor de γ .

Demostración. Para demostrar que la Ecuación (2.11) es la expresión de un campo ortogonal a Σ_γ es conveniente recordar que:

$$\phi(s, t) = \gamma(s) + t\xi(s),$$

es la parametrización de Σ_γ y que de esta, junto con la Proposición 2.8, se deducen las siguientes expresiones para su marco coordenado:

$$\phi_s(s, t) = [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa(s)]\gamma'(s) + \epsilon_2\epsilon_3t\tau(s)\omega(s) \quad ; \quad \phi_t(s, t) = \xi(s),$$

donde $\{\gamma', \xi, \omega\}$ es el marco de Frenet de γ adaptado a M .

Como $\phi_t = \xi$ se sigue que $\langle Y, \phi_t \rangle = 0$ en todo Σ_γ . Por otro lado:

$$\begin{aligned} \langle Y, \phi_s \rangle &= [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa]\langle Y, \gamma' \rangle + \epsilon_2\epsilon_3t\tau\langle Y, \omega \rangle \\ &= [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa](-\epsilon_1t\tau) + \epsilon_2\epsilon_3t\tau(-\epsilon_3[\epsilon_3 + t\kappa]) \\ &= -\epsilon_1t\tau + \epsilon_2t^2\kappa\tau - \epsilon_2t\tau[\epsilon_3 + t\kappa] \\ &= -\epsilon_1t\tau - \epsilon_2\epsilon_3t\tau \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ para cualquier marco ortonormal en un espacio lorentziano, mostrando que Y es ortogonal a la superficie Σ_γ .

La definición de Y en la Ecuación (2.11) se da en términos de funciones y campos vectoriales C^∞ , de donde se sigue que el campo Y así definido es C^∞ sobre Σ_γ . Por último, las identidades:

$$-\epsilon_1\epsilon_2[\epsilon_3 + t\kappa] = 1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa \quad ; \quad -\epsilon_2\epsilon_3(-t\tau) = \epsilon_2\epsilon_3t\tau,$$

junto con las Ecuaciones (2.9) y (2.11) implican que el campo $Y = 0$ si y sólo si $\phi_s = 0$. Esto prueba que $Y \neq 0$ en la misma región alrededor de γ en la que $\phi_s \neq 0$, dicho de otra manera, $Y = 0$ cuando la diferencial de ϕ deja de ser inyectiva. □

Hasta aquí se han experimentado las ventajas de usar el marco de Frenet de γ adaptado a M , pero aún más ventajoso será usar la curvatura y torsión de γ respecto de su marco adaptado ya que estas cantidades pueden decir mucho de la geometría de la superficie normal Σ_γ . El siguiente ejemplo clarifica bastante esta idea.

Ejemplo 2.17. Considérese el helicoides tipo tiempo descrito en el Ejemplo 2.9 y la recta α contenida en él que coincide con el eje temporal en \mathbb{R}_1^3 . La superficie normal Σ_α a lo largo de α es mínima.

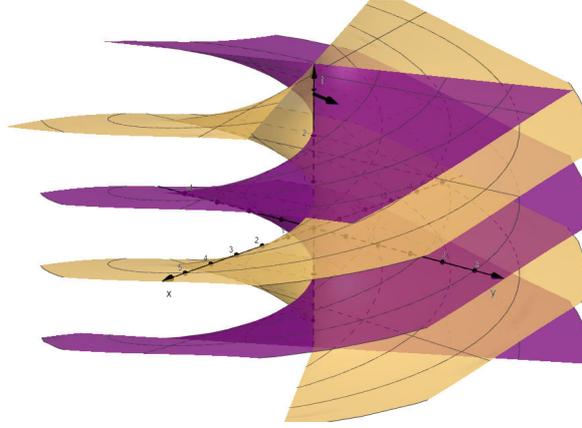


Figura 2.3: Helicoide acompañado de su superficie normal a lo largo del eje t .

Las Ecuaciones (2.7) describen el marco de Frenet de α adaptado al helicoide descrito en el Ejemplo 2.9. De ellas se pueden inferir los valores para la curvatura y torsión de α que a continuación se muestran:

$$\kappa(s) = 0 \quad : \quad \tau(s) = -1 .$$

Entonces, la Ecuación (2.10) asegura que el campo vectorial ϕ_{ss} definido sobre Σ_α adquiere la siguiente representación:

$$\phi_{ss} = [1 - t] \xi = [1 - t] \phi_t .$$

Por lo tanto, el Lema 2.14 asegura que la superficie normal Σ_α es mínima ya que el campo ϕ_{ss} es tangente a Σ_α .

El resultado mostrado en el Ejemplo 2.17 no es de sorprenderse ya que Σ_α es a su vez un helicoide tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Lo sorprendente aquí es que dicho resultado se puede probar apelando de manera exclusiva a la geometría de la curva en la intersección de la superficie normal con la superficie base.

El siguiente resultado generaliza el comportamiento visto en el Ejemplo 2.17 con los helicoides.

Proposición 2.18. Sea γ una geodésica de M . Entonces la superficie normal Σ_γ es una superficie extrema de \mathbb{R}_1^3 si y sólo si γ es una curva de las siguientes clases:

- γ es una línea de curvatura de M con $\tau = 0$.
- γ es una curva con curvatura y torsión constantes tal que $\tau \neq 0$.

Demostración. Tomando en cuenta la expresión (2.11) para algún campo normal Y a Σ_γ y la expresión (2.10) para ϕ_{ss} , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle Y, \phi_{ss} \rangle &= -t\tau \langle \gamma', \phi_{ss} \rangle - [\epsilon_3 + t\kappa] \langle \omega, \phi_{ss} \rangle \\ &= -t\tau (-\epsilon_2 t \kappa') - [\epsilon_3 + t\kappa] (\epsilon_2 t \tau') \\ &= \epsilon_2 t^2 \kappa' \tau - \epsilon_2 \epsilon_3 t \tau' - \epsilon_2 t^2 \kappa \tau' . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si la superficie Σ_γ es extrema el Lema 2.14 asegura que $\langle Y, \phi_{ss} \rangle = 0$, es decir, que ϕ_{ss} es tangente a la superficie Σ_γ . Entonces, de la ecuación (2.12) se sigue que:

$$\tau' = \epsilon_3 t [\kappa\tau' - \kappa'\tau] . \quad (2.13)$$

Derivando la ecuación (2.13) respecto de t se obtiene:

$$\kappa\tau'' - \kappa'\tau' = 0 ,$$

con solución:

$$\tau\kappa' = 0 \quad ; \quad \tau' = 0 .$$

Esto implica que τ siempre es constante. Además, si $\tau = 0$ la geodésica γ es una curva plana y, por la ecuación (a) de la Proposición 2.10, una línea de curvatura de M . Si $\tau \neq 0$, las pasadas ecuaciones implican que $\kappa' = 0$ y, por consecuencia, κ es una función constante a lo largo de γ . Esto demuestra una de las implicaciones de la Proposición 2.18.

Que γ sea una geodésica por hipótesis me permite usar el Lema 2.14, que dice mucho en cualquiera de los dos casos que quedan por analizar para obtener la equivalencia.

Si γ es una línea de curvatura plana de M se sigue que $\tau = 0$ y las expresiones (2.9) y (2.10) se modifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_s &= [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa]\gamma' , \\ \phi_{ss} &= -\epsilon_1\epsilon_2t\kappa'\gamma' + [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa^2]\xi . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dado que Σ_γ es una superficie bien definida en una vecindad de γ , el campo vectorial ϕ_s debe ser diferente de cero en dicha vecindad. Esto quiere decir que la función que multiplica a γ' en la expresión de ϕ_s en (2.14) debe ser diferente de cero y, como consecuencia de esto, se puede reescribir la expresión para ϕ_{ss} en (2.14) como se muestra a continuación:

$$\phi_{ss} = \frac{-\epsilon_1\epsilon_2t\kappa'}{1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa}\phi_s + [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa^2]\phi_t ,$$

donde $\phi_t = \xi$. Por lo tanto ϕ_{ss} es una combinación lineal del marco coordenado de Σ_γ que, a su vez, implica que el campo ϕ_{ss} es tangente a la superficie normal Σ_γ .

Por otro lado, si γ es una curva con curvatura y torsión constantes tal que $\tau \neq 0$, la expresión (2.10) para ϕ_{ss} se modifica de la siguiente manera:

$$\phi_{ss} = [1 - \epsilon_1\epsilon_2t\kappa^2 - \epsilon_2\epsilon_3t\tau^2]\phi_t .$$

Por lo tanto, de manera similar al caso anterior, ϕ_{ss} es tangente a Σ_γ . □

Evidentemente se tiene un gran interés en que las superficies normales Σ_γ sean máximas o mínimas. Además, las superficies Σ_γ son regladas y esto reduce la cantidad de superficies en \mathbb{R}_1^3 a las cuales Σ_γ pueda ser congruente. Es por esta razón que vale la pena conocer las clasificaciones hechas para este tipo de superficies en [13] y [6] para así entender mejor el comportamiento de las superficies normales.

Las superficies listadas en los Teoremas 2.19 y 2.20 se encuentran bien definidas en los artículos [6] y [13], respectivamente, y no está en el interés de este trabajo definir con cuidado dichas superficies ya que no se trabajará directamente con ellas.

Teorema 2.19. [6] Toda superficie máxima reglada del espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 es localmente congruente a una de las siguientes superficies:

- (a) Plano tipo espacio.
- (b) Helicoide de la primera clase.
- (c) Helicoide de la segunda clase.
- (d) Superficie conjugada de Enneper de la segunda clase.

Toda superficie máxima reglada M de \mathbb{R}_1^3 se puede describir por una parametrización como la que se muestra en la Proposición 1.40:

$$\psi(s, t) = \alpha(s) + t\vartheta(s) ,$$

donde los campos vectoriales α' y ϑ son campos espaciales unitarios sobre α y ortogonales entre sí. Entonces, si κ y τ denotan la curvatura y torsión de α respectivamente, se puede determinar por medio de los valores de κ y τ a qué tipo de superficie es congruente M según el Teorema 2.19.

- La superficie es congruente con el helicoide de la primera clase si:

$$|\kappa| > |\tau| > 0 .$$

- Congruente con el helicoide de la segunda clase si:

$$|\tau| > |\kappa| > 0 .$$

- Congruente con la superficie conjugada de Enneper de la segunda clase si:

$$|\kappa| = |\tau| \neq 0 .$$

Si $\kappa = \tau = 0$ la superficie es congruente con un plano tipo espacio.

Teorema 2.20. [13] Toda superficie mínima reglada del espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 es localmente congruente con una de las siguiente superficies:

- (a) Plano tipo tiempo.
- (b) Helicoide de la primera clase.
- (c) Helicoide de la segunda clase.
- (d) Helicoide de la tercera clase.
- (e) Superficie conjugada de Enneper de la segunda clase.
- (f) Un B-Scroll plano.

Tomando en cuenta que las superficies regladas en el Teorema 2.20 son tipo tiempo, las causalidades de α y ϑ en la parametrización:

$$\psi(s, t) = \alpha(s) + t\vartheta(s) ,$$

pueden ser diferentes entre sí. Además, como la Proposición 1.40 es válida cuando las reglas de una superficie no son tipo luz, este tipo de parametrización contempla solo dos posibles casos; cuando ϑ es tipo espacio o tipo tiempo. En los restantes casos la superficie deberá admitir una parametrización tipo B-scroll.

(a) Si ϑ es espacial y ortogonal a α , la curva deberá ser tipo tiempo. Entonces, si κ y τ denotan la curvatura y torsión de α respectivamente, se obtiene lo siguiente:

- La superficie es congruente con el helicoide de la primera clase si:

$$|\tau| > |\kappa| > 0 .$$

- Congruente con el helicoide de la segunda clase si:

$$|\kappa| > |\tau| > 0 .$$

- Congruente con la superficie conjugada de Enneper de la segunda clase si:

$$|\kappa| = |\tau| \neq 0 .$$

(b) Si ϑ es temporal y ortogonal a α , la curva deberá ser tipo espacio y, en este caso, se obtiene que la superficie es congruente con el helicoide de la tercera clase.

(c) Por último, si el campo ϑ es tipo luz la curva α también será tipo luz. En esta caso la curva α y el campo ϑ no serán ortogonales y la superficie será congruente con un B-Scroll mínimo y plano.

Una vez más, si $\kappa = \tau = 0$, la superficie es congruente con un plano tipo tiempo.

2.3. Primer teorema de caracterización

El objetivo de esta tesis es el de caracterizar las superficies paralelas del espacio de Minkowski, objetivo que se alcanzará de dos maneras diferentes. Esta sección desarrolla la primera vía para la caracterización de tales superficies.

Lema 2.21. Si una geodésica γ de M es una curva con curvatura y torsión constantes, el operador de forma de M cumple que $(\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') = 0$ a lo largo de γ .

Demostración. Como γ es una geodésica de M se sigue de la Proposición 2.10 que:

$$A_\xi \gamma' = \epsilon_1 \epsilon_2 \kappa \gamma' - \epsilon_2 \epsilon_3 \tau \omega .$$

Entonces, derivando la expresión del operador de forma en la dirección de γ' a lo largo de la curva se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') &= \nabla_{\gamma'} A_\xi \gamma' + A_\xi (\nabla_{\gamma'} \gamma') \\ &= \nabla_{\gamma'} (\epsilon_1 \epsilon_2 \kappa \gamma' - \epsilon_2 \epsilon_3 \tau \omega) , \end{aligned}$$

y como las funciones κ y τ son constantes a lo largo de la curva:

$$(\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') = \epsilon_1 \epsilon_2 \kappa \nabla_{\gamma'} \gamma' - \epsilon_2 \epsilon_3 \tau \nabla_{\gamma'} \omega .$$

La ecuación (c) de la proposición 2.8 implica que $D_{\gamma'} \omega = \omega'$ es normal a M , es decir, ω' es paralelo al campo normal ξ . Esto implica que la parte tangente a M de ω' es cero y, como γ es una geodésica de M , se obtiene finalmente que $(\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') = 0$ a lo largo de γ . □

Se sabe de la teoría de subvariedades semiriemannianas que el operador de forma A_ξ de una subvariedad M siempre es autoadjunto en cada espacio tangente $T_p M$. Esta es una propiedad que se desea herede su derivada ∇A_ξ y que afortunadamente lo hace.

Lema 2.22. Sea X un campo tangente a una superficie M . Entonces el operador $\nabla_X A_\xi$ es autoadjunto en cada espacio tangente de M .

Demostración. Sean Y y Z dos campos vectoriales cualesquiera sobre M . Entonces:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X A_\xi)(Y), Z \rangle &= \langle \nabla_X A_\xi Y, Z \rangle - \langle A_\xi (\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= X \langle A_\xi Y, Z \rangle - \langle A_\xi Y, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Y, A_\xi Z \rangle \\ &= X \langle Y, A_\xi Z \rangle - \langle Y, A_\xi (\nabla_X Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, A_\xi Z \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X A_\xi Z \rangle - \langle Y, A_\xi (\nabla_X Z) \rangle \\ &= \langle Y, (\nabla_X A_\xi)(Z) \rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto, en cada espacio tangente $T_p M$ el operador $\nabla_X A_\xi$ es autoadjunto. □

Cuando las hipótesis de un enunciado especifican que dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en una superficie M son diferentes en un punto p de M , lo que en realidad se está diciendo es que el conjunto de vectores tangentes $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ a las curvas γ_1 y γ_2 es una base del espacio tangente $T_p M$.

Corolario 2.23. Si dos geodésicas diferentes en M con curvatura y torsión constante se encuentran en un punto p , se cumple que $\nabla A_\xi|_p = 0$.

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 dos geodésicas diferentes de M con curvatura y torsión constantes. Si γ'_1 y γ'_2 son los vectores tangentes de γ_1 y γ_2 , respectivamente, se cumplen las siguientes igualdades:

$$(\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_1) = 0 \quad ; \quad (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_2) = 0 ,$$

a lo largo de las respectivas curvas, como afirma el Lema 2.21.

Añadiendo la hipótesis de que las geodésicas γ_i son diferentes y se encuentran en un punto p de M , se sigue que $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}_p$ es una base de T_pM y, particularmente en p , las ecuaciones anteriores son válidas. Esto quiere decir que para mostrar que en p el operador de forma es paralelo sólo queda por verificar el valor de los factores:

$$(\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2)|_p \quad \text{y} \quad (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_1)|_p ,$$

del operador ∇A_ξ , aunque en realidad basta con calcular cualquiera de los factores anteriores ya que su valor es el mismo por la ecuación de Codazzi.

Como el Lema 2.22 asegura que el operador $\nabla_X A_\xi$ es autoadjunto para cualquier campo vectorial X sobre M , a partir de esta propiedad se puede calcular el factor restante del operador ∇A_ξ . Aún más, dado que la base $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ consta de vectores no degenerados, se puede calcular el factor restante al multiplicarlo por cada uno de los elementos de la base. Empezando por γ'_1 se obtiene:

$$\langle (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2), \gamma'_1 \rangle_p = \langle \gamma'_2, (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_1) \rangle_p = 0 .$$

Por otro lado, usando ahora la ecuación de Codazzi se obtiene lo siguiente al multiplicar por γ'_2 :

$$\langle (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2), \gamma'_2 \rangle_p = \langle (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_1), \gamma'_2 \rangle_p = \langle \gamma'_1, (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_2) \rangle_p = 0 .$$

Por lo tanto, en la base $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ de T_pM todos los factores de ∇A_ξ son cero, mostrando que $\nabla A_\xi|_p = 0$. □

Ejemplo 2.24. Cualquier geodésica no degenerada de una superficie paralela en \mathbb{R}_1^3 tiene curvatura y torsión constantes.

Para demostrar el Ejemplo 2.24 es prudente ir visitando cada una de las superficies no triviales que aparecen en el Teorema 1.54, para así conocer de cerca la geometría de cada una de las clases de superficies paralelas que conforman la clasificación de Chen y Van der Veken en [1].

- Plano hiperbólico en \mathbb{R}_1^3

Como se puede ver en (1.26), el operador de forma de $H^2(r)$ es un múltiplo de la identidad y por tanto una superficie umbílica de \mathbb{R}_1^3 . Entonces, si γ es una geodésica de $H^2(r)$ se cumple que:

$$A_\xi \gamma' = -\frac{1}{r} \gamma' , \tag{2.15}$$

mostrando, por la ecuación (a) en la Proposición 2.10, que toda geodésica de $H^2(r)$ es una línea de curvatura plana de la superficie, es decir, que toda geodésica de $H^2(r)$ tiene torsión constante $\tau = 0$. Además, de la misma ecuación en la Proposición 2.10 se puede obtener el valor de la curvatura κ de γ , curvatura que resulta ser constante. Por lo tanto para toda geodésica en $H^2(r)$ se cumple que:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \quad ; \quad \tau(s) = 0 ,$$

es decir, que todas las geodésicas de esta superficie son líneas de curvatura planas con curvatura constante.

- Cilindro hiperbólico plano tipo espacio

Las geodésicas γ de $H^1(r) \times \mathbb{R}$ tienen la siguiente parametrización afín:

$$\gamma(s) = \psi(u(s), v(s)) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} u(s) = \lambda_1 s + u_0 \\ v(s) = \lambda_2 s + v_0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

donde las constantes λ_i están en \mathbb{R} . Además, dado que el vector tangente γ' de la geodésica se puede expresar como:

$$\gamma' = u' \psi_u + v' \psi_v, \quad (2.17)$$

se sigue de la expresión del marco coordenado en (1.27) y de la parametrización afín en (2.16) que:

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = r^2 (u')^2 + (v')^2 = r^2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1.$$

Además, como los espacios tangentes de este cilindro tienen una métrica positiva definida y el valor de las constantes λ_i representa cualquier posible dirección en los espacios tangentes de $H^1(r) \times \mathbb{R}$, las constantes λ_i se pueden expresar como sigue:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \cos \theta \quad ; \quad \lambda_2 = \sin \theta, \quad (2.18)$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Por otro lado, de la parametrización afín (2.16) se sigue que $u'' = v'' = 0$. Así que derivando la expresión de γ' en (2.17) se sigue que el campo vectorial γ'' se escribe de la siguiente manera:

$$\gamma'' = (u')^2 \psi_{uu} + 2u'v' \psi_{uv} + (v')^2 \psi_{vv},$$

aunque se puede simplificar aún más. De (1.27) y (1.28) se sigue que las segundas derivadas de la parametrización del cilindro adquieren los siguientes valores:

$$\begin{aligned} D_{\psi_u} \psi_u &= \psi_{uu} = r\xi, \\ D_{\psi_u} \psi_v &= \psi_{uv} = 0, \\ D_{\psi_v} \psi_v &= \psi_{vv} = 0, \end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente expresión para γ'' :

$$\gamma'' = r\lambda_1^2 \xi = \frac{1}{r} \cos^2 \theta \xi,$$

de donde se deduce, por la ecuación (a) en la Proposición 2.8, el siguiente valor constante para la curvatura de γ :

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \cos^2 \theta. \quad (2.19)$$

Para conocer la torsión τ de γ es necesaria una expresión del campo binormal ω sobre γ con la cual trabajar. La siguiente expresión:

$$\omega(s) = (\sin \theta \sinh u, \sin \theta \cosh u, -\cos \theta). \quad (2.20)$$

es de gran ayuda ya que completa el marco de Frenet $\{\gamma', \xi, \omega\}$ y basta con saber cómo varía ω a lo largo de γ en la dirección de γ' para obtener el valor de τ . Tal variación ω' se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\omega'(s) &= (u' \operatorname{sen} \theta \cosh u, u' \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} u, 0) \\ &= u' \operatorname{sen} \theta \xi(s) = \frac{1}{r} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \xi(s),\end{aligned}$$

y por la ecuación (c) de la Proposición 2.8, se obtiene finalmente el siguiente valor constante para la torsión de la geodésica:

$$\tau(s) = -\frac{1}{r} \cos \theta \operatorname{sen} \theta. \quad (2.21)$$

Por lo tanto todas las geodésicas del cilindro $H(r) \times \mathbb{R}$ tienen curvaturas y torsiones constantes, pero no sólo eso. Las expresiones para las constantes λ_i en (2.18) así como la expresión para la curvatura en (2.19) y para la torsión en (2.21) de una geodésica dada, hacen evidente que las geodésicas del cilindro son líneas de curvatura planas con curvatura constante siempre que θ tome los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\theta &= 0, \pi & ; & \quad \gamma \text{ es una hipérbola espacial de radio } r, \\ \theta &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & ; & \quad \gamma \text{ es una recta espacial.}\end{aligned}$$

Para los restantes valores que pueda tomar θ las geodésicas del cilindro son hélices del ambiente.

- Espacio de De Sitter

Dado que el espacio de De Sitter $S_1^2(r)$ es una superficie umbílica de \mathbb{R}_1^3 , su operador de forma es un múltiplo de la identidad y se expresa de la misma forma en que se expresa el operador de forma de $H^2(r)$ en (1.26). Esto implica, de manera similar al caso de $H^2(r)$, que todas las geodésicas de $S_1^2(r)$ son líneas de curvatura planas de $S_1^2(r)$, es decir, que la torsión de cualquier geodésica en esta superficie es constante e igual a cero.

Sin embargo, aunque la ecuación (a) de la Proposición 2.10 ayuda a determinar el valor de la curvatura de una geodésica γ en $S_1^2(r)$, el signo de esta dependerá de la causalidad de la geodésica γ que se tome en cuenta.

Entonces, si γ es una geodésica espacial de $S_1^2(r)$ se obtienen los siguientes valores para su curvatura y torsión:

$$\kappa(s) = -\frac{1}{r} \quad ; \quad \tau(s) = 0,$$

y en caso de ser γ una geodésica temporal de $S_1^2(r)$ se obtienen los siguientes valores para su curvatura y torsión:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \quad ; \quad \tau(s) = 0.$$

Por lo tanto las geodésicas no degeneradas de $S_1^2(r)$ tienen curvatura y torsión constantes, de tal forma que son líneas de curvatura planas con curvatura constante.

- Cilindro circular plano tipo tiempo

A partir de la parametrización $\psi(u, v)$ que aparece en la Definición 1.51 para el cilindro circular $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$, las geodésicas γ de esta superficie están parametrizadas, en términos de las variables u y v , como sigue:

$$u(s) = \lambda_1 s + u_0 \quad ; \quad v(s) = \lambda_2 s + v_0 . \quad (2.22)$$

Además, de las ecuaciones (1.31) se sigue que el marco coordenado es ortogonal y cumple las siguientes ecuaciones:

$$\langle \psi_u, \psi_u \rangle = -1 \quad ; \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \psi_v, \psi_v \rangle = r^2 .$$

Entonces, dado que toda geodésica del cilindro circular se describe en términos de la parametrización como $\gamma(s) = \psi(u(s), v(s))$, el vector tangente γ' de cada geodésica queda descrito por la ecuación (2.17), implicando la siguiente relación cuadrática entre las constantes λ_i :

$$\gamma' = \lambda_1 \psi_u + \lambda_2 \psi_v \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = -\lambda_1^2 + r^2 \lambda_2^2 = \epsilon_1 .$$

Para representar todas las direcciones no degeneradas de $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$, las constantes λ_i no se pueden representar de la misma manera en que se representaron para el caso de $H(r) \times \mathbb{R}$ debido a la causalidad de las superficies. Así, en caso que γ sea una geodésica temporal:

$$\lambda_1 = \cosh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \frac{1}{r} \sinh \varphi , \quad (2.23)$$

y en caso de ser γ una geodésica espacial:

$$\lambda_1 = \sinh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \frac{1}{r} \cosh \varphi , \quad (2.24)$$

para cualquier valor real de φ . En el caso que γ sea una geodésica temporal, el signo que corresponda a λ_2 dependerá de la orientación temporal que γ' tenga en $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$. Cuando la geodésica γ sea espacial, los diferentes signos en λ_2 corresponden a las diferentes componentes conexas en las cuales se pueda encontrar γ' ; cabe recordar que sólo en el caso de las superficies el conjunto de vectores espaciales en el espacio tangente consta de dos componentes conexas.

Así, en términos de las constantes λ_i los elementos del marco de Frenet $\{\gamma', \xi, \omega\}$ para la geodésica γ se describen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (\lambda_1, -r\lambda_2 \sin v, r\lambda_2 \cos v) , \\ \xi(s) &= (0, -\cos v, -\sin v) , \\ \omega(s) &= (r\lambda_2, -\lambda_1 \sin v, \lambda_1 \cos v) , \end{aligned}$$

y derivando las expresiones para γ' y ω se obtienen, a partir de las ecuaciones de Frenet en la Proposición 2.8, valores para la curvatura y torsión de cada geodésica no degenerada en $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$. Por lo tanto, si:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= (0, -r\lambda_2^2 \cos v, -r\lambda_2^2 \sin v) , \\ \omega'(s) &= (0, -\lambda_1 \lambda_2 \cos v, -\lambda_1 \lambda_2 \sin v) , \end{aligned}$$

se obtiene lo siguiente:

$$\kappa(s) = r\lambda_2^2 \quad ; \quad \tau(s) = -\lambda_1\lambda_2 \quad ,$$

es decir, que la curvatura y torsión son constantes para cada geodésica no degenerada del cilindro circular.

Entonces, usando las ecuaciones (2.23) para las expresiones de las constantes λ_i , la curvatura κ y la torsión τ de una geodésica temporal se ven de la siguiente manera:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \sinh^2 \varphi \quad ; \quad \tau(s) = \pm \frac{1}{r} \cosh \varphi \sinh \varphi \quad ,$$

mostrando que, cuando $\varphi = 0$, la geodésica es una línea de curvatura plana que además es una línea recta, mientras que para los demás valores de φ la geodésica es una hélice del ambiente. De manera análoga, si γ es una geodésica espacial del cilindro circular, las ecuaciones (2.24) hacen que la curvatura y torsión de cada geodésica tengan las siguientes expresiones:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \cosh^2 \varphi \quad ; \quad \tau(s) = \pm \frac{1}{r} \cosh \varphi \sinh \varphi \quad ,$$

mostrando que, cuando $\varphi = 0$, la geodésica es una línea de curvatura plana y una circunferencia de radio r . En los demás casos la geodésica es una hélice del ambiente.

- Cilindro hiperbólico plano tipo tiempo

No es de sorprender que, respecto de la parametrización ψ en la Definición 1.52, las geodésicas $\gamma(s) = \psi(u(s), v(s))$ del cilindro hiperbólico $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ dependan del parámetro afín s de la siguiente manera:

$$u(s) = \lambda_1 s + u_0 \quad ; \quad v(s) = \lambda_2 s + v_0 \quad . \quad (2.25)$$

Después de todo se trata de un cilindro en cuyo marco coordenado (1.34) observa un comportamiento análogo al de los demás cilindros que aquí se han estudiado. Así, de las ecuaciones (1.34) se siguen las siguientes propiedades para el marco coordenado de este cilindro:

$$\langle \psi_u, \psi_u \rangle = -r^2 \quad ; \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \psi_v, \psi_v \rangle = 1 \quad ,$$

implicando, junto con la expresión (2.17) para cada vector tangente γ' , la siguiente relación cuadrática entre las constantes λ_i :

$$\gamma' = \lambda_1 \psi_u + \lambda_2 \psi_v \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = -r^2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \epsilon_1 \quad ,$$

que a su vez justifica la siguiente representación para las constantes λ_i cuando la geodésica γ es temporal:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \cosh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \sinh \varphi \quad , \quad (2.26)$$

y la siguiente representación cuando la geodésica γ es espacial:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \sinh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \cosh \varphi \quad . \quad (2.27)$$

Con esto, los elementos del marco de Frenet $\{\gamma', \xi, \omega\}$ obtienen las siguientes expresiones en términos de las constantes λ_i sin importar la causalidad de la geodésica dada:

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= (r\lambda_1 \cosh u, r\lambda_1 \sinh u, \lambda_2) , \\ \xi(s) &= (\sinh u, \cosh u, 0) , \\ \omega(s) &= (\lambda_2 \cosh u, \lambda_2 \sinh u, r\lambda_1) ,\end{aligned}$$

y a partir de estas expresiones se obtienen las siguientes para los campos γ'' y ω' :

$$\begin{aligned}\gamma''(s) &= (r\lambda_1^2 \sinh u, r\lambda_1^2 \cosh u, 0) , \\ \omega'(s) &= (\lambda_1\lambda_2 \sinh u, \lambda_1\lambda_2 \cosh u, 0) .\end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura κ y torsión τ de cualquier geodésica no degenerada en $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ adquieren la forma:

$$\kappa(s) = r\lambda_1^2 \quad ; \quad \tau(s) = -\lambda_1\lambda_2 ,$$

tal que, si γ es una geodésica temporal, las expresiones (2.26) para las constantes λ_i hacen que κ y τ se reescriban de la siguiente manera:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \cosh^2 \varphi \quad ; \quad \tau(s) = \pm \frac{1}{r} \cosh \varphi \sinh \varphi ,$$

mostrando que las geodésicas temporales de este cilindro son hélices del ambiente, salvo que $\varphi = 0$ ya que en este caso la geodésica es una línea de curvatura plana y una hipérbola de radio r . En el caso que γ sea una geodésica espacial, las expresiones en (2.3) para las constantes λ_i hacen que κ y τ adquieran la siguiente forma:

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \sinh^2 \varphi \quad ; \quad \tau(s) = \pm \frac{1}{r} \cosh \varphi \sinh \varphi ,$$

mostrando, similarmente, que las geodésicas espaciales de este cilindro son hélices del ambiente, salvo en el caso que $\varphi = 0$ ya que en este caso la geodésica es una línea de curvatura plana que, además, es una línea recta del ambiente.

- Superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken

Las geodésicas $\gamma(s) = \psi(u(s), v(s))$ de la superficie de Chen-Van der Veken M_0 dependen de un parámetro afín s , respecto de la parametrización ψ para M_0 que aparece en (1.37), como se muestra a continuación:

$$u(s) = \lambda_1 s + u_0 \quad ; \quad v(s) = \lambda_2 s + v_0 , \quad (2.28)$$

dependencia similar a la que tienen las geodésicas en todos los cilindros anteriores respecto de su parámetro afín. Entonces, como $\gamma' = u'\psi_u + v'\psi_v$ se sigue lo siguiente:

$$\gamma' = \lambda_1 \psi_u + \lambda_2 \psi_v \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = -\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \epsilon_1 ,$$

ya que el marco coordenado (1.38) de M_0 es ortonormal. Esto último hace que la representación de las constantes λ_i difiera poco de la representación introducida

para estas constantes en los diferentes cilindros ya que, para M_0 , si la geodésica γ es temporal se obtiene la siguiente representación:

$$\lambda_1 = \cosh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \sinh \varphi \quad , \quad (2.29)$$

y en caso que γ sea una geodésica espacial se obtiene la siguiente representación:

$$\lambda_1 = \sinh \varphi \quad ; \quad \lambda_2 = \pm \cosh \varphi \quad , \quad (2.30)$$

Por otro lado, se sigue del marco coordenado (1.38) que todas las segundas derivadas de la parametrización (1.37) de M_0 son normales y unitarias a M_0 :

$$\psi_{uu} = \psi_{vv} = -\psi_{uv} \quad ,$$

y dado que en (1.39) se escogió como campo normal unitario ξ a ψ_{uu} , la expresión para γ'' queda como sigue:

$$\gamma''(s) = (u)^2 \psi_{uu} + 2u'v' \psi_{uv} + (v)^2 \psi_{vv} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \xi \quad .$$

Entonces, si se define el campo binormal como $\omega(s) := \lambda_2 \psi_u + \lambda_1 \psi_v$, de manera análoga se obtiene que:

$$\omega'(s) = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \xi \quad .$$

Por lo tanto la curvatura y torsión de cualquier geodésica no degenerada de M_0 es constante. Esto quiere decir que la curvatura y la torsión de una geodésica temporal en M_0 , según las expresiones (2.29), toman los siguientes valores:

$$\kappa(s) = (\cosh \varphi \pm \sinh \varphi)^2 \quad ; \quad \tau(s) = -(\cosh \varphi \pm \sinh \varphi)^2 \quad ,$$

mientras que, según las expresiones (2.30), la curvatura y torsión de una geodésica espacial toman los siguientes valores:

$$\kappa(s) = (\sinh \varphi \pm \cosh \varphi)^2 \quad ; \quad \tau(s) = -(\sinh \varphi \pm \cosh \varphi)^2 \quad ,$$

mostrando que todas las geodésicas no degeneradas de M_0 son hélices del ambiente ya que las funciones \cosh y \sinh nunca toman los mismos valores para una misma variable φ .

Ahora sí, el Ejemplo 2.24 allana el camino para poder enunciar el primer teorema de caracterización de superficies paralelas.

Teorema 2.25. Sea M una superficie no degenerada de \mathbb{R}_1^3 . Entonces por cada punto p de M pasan al menos dos geodésicas diferentes de M con curvatura y torsión constantes si y sólo si M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Cualquier superficie paralela no degenerada en \mathbb{R}_1^3 es isométrica a una de las superficies listadas en el Teorema 1.54, mientras que el Ejemplo 2.24 muestra que por cada punto de cualquiera de las superficies paralelas en la lista del Teorema 1.54 pasan una infinidad de geodésicas no degeneradas con curvatura y torsión constantes. Esto quiere decir que por cada punto de una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 pasan al menos dos geodésicas no degeneradas con curvatura y torsión constantes.

Para finalizar la doble implicación, el Corolario 2.23 afirma que en cada uno de los puntos p de M en los que se crucen dos geodésicas no degeneradas de

M que cumplan con las hipótesis de este teorema, el operador de forma será paralelo, es decir, que en p se cumple que:

$$\nabla A_{\xi}|_p = 0 ,$$

y como esto pasa en todo punto p de M , se deduce que la superficie M es paralela, o dicho de otra forma, se deduce que el operador de forma de M es paralelo:

$$\nabla A_{\xi} = 0 .$$

□

2.4. Segundo teorema de caracterización

Para desarrollar la segunda caracterización de superficies paralelas en el espacio de Minkowski es necesario introducir nueva herramienta y, para ello, cabe recordar que el polinomio característico del operador de forma A_{ξ} de una superficie M se puede escribir de la siguiente manera:

$$P_{A_{\xi}}(t) = t^2 - \text{tr}A_{\xi}|_p t + \det A_{\xi}|_p , \quad (2.31)$$

en cualquier espacio tangente $T_p M$ cuando la dimensión de M es 2. Esta expresión es conveniente ya que tanto la traza como el determinante de A_{ξ} son invariantes respecto de cualquier cambio de base en los espacios tangentes. Además, la expresión en la Ecuación (2.31) permite expresar las curvaturas principales de M en el punto p como:

$$k_i(p) = \frac{1}{2} \left[\text{tr}A_{\xi}|_p \pm \sqrt{\left(\text{tr}A_{\xi}|_p\right)^2 - 4 \det A_{\xi}|_p} \right] ,$$

cuando estas son funciones con valores en \mathbb{R} , donde el discriminante:

$$\left(\text{tr}A_{\xi}|_p\right)^2 - 4 \det A_{\xi}|_p ,$$

es de gran ayuda al determinar la representación canónica que le corresponde al operador de forma A_{ξ} en $T_p M$, como se vio en la demostración del Lema 1.33.

La Ecuación (2.4) y el Lema 1.33 son la fuente de inspiración para la siguiente definición.

Definición 2.26. Sea M una superficie en un espacio ambiente lorentziano. Se define la función *discriminante* $D : M \rightarrow \mathbb{R}$ como la función que en cada punto p de M toma el siguiente valor:

$$D(p) = \left(\text{tr}A_{\xi}|_p\right)^2 - 4 \det A_{\xi}|_p ,$$

donde $\text{tr}A_{\xi}|_p$ y $\det A_{\xi}|_p$ son los valores de la traza y el determinante del operador de forma en $T_p M$.

La función discriminante recién definida coincide, por construcción, con el discriminante del polinomio característico de A_ξ en cada espacio tangente de la superficie M . Así, las curvaturas principales de M en cada punto p se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$k_i(p) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tr} A_\xi|_p \pm \sqrt{D(p)} \right] .$$

cuando estas son funciones con valores en \mathbb{R} . Esta última acotación es de suma importancia ya que en el caso lorentziano existen puntos p en M donde $D(p) < 0$, haciendo que las curvaturas principales $k_i(p)$ sean funciones con valores en \mathbb{C} . Desde el punto de vista de la geometría diferencial que se aborda en esta tesis se dice que no existen las curvaturas principales en p cuando $D(p) < 0$, sin embargo la función discriminante $D(p)$ sí está bien definida en toda la superficie M y es esta la razón principal para trabajar con esta función.

Lema 2.27. La función discriminante $D : M \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida y es C^∞ en todo M .

Demostración. Como el valor de la traza y el determinante de A_ξ en $T_p M$ no depende de la base en la cual se represente al operador A_ξ , los valores de $\operatorname{tr} A_\xi|_p$ y $\det A_\xi|_p$ estarán bien definidos.

Por otro lado, dado un marco ortonormal $\{e_1, e_2\}$ alrededor de un punto p en M , los valores de $\operatorname{tr} A_\xi|_q$ y $\det A_\xi|_q$ se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_\xi|_q &= \epsilon_1 \langle A_\xi e_1, e_1 \rangle_q + \epsilon_2 \langle A_\xi e_2, e_2 \rangle_q , \\ \det A_\xi|_q &= \langle A_\xi e_1, e_2 \rangle_q^2 - \langle A_\xi e_1, e_1 \rangle_q \langle A_\xi e_2, e_2 \rangle_q , \end{aligned}$$

para todo q alrededor de p en M . Estas expresiones para $\operatorname{tr} A_\xi$ y $\det A_\xi$ se encuentran en términos de funciones C^∞ de M , mostrando que las funciones $\operatorname{tr} A_\xi$ y $\det A_\xi$ son C^∞ sobre M . Por lo tanto, la función discriminante:

$$D(p) = \left(\operatorname{tr} A_\xi|_p \right)^2 - 4 \det A_\xi|_p ,$$

es C^∞ sobre M . □

La función discriminante permite pensar de una mejor manera las consecuencias del Lema 1.33 en una superficie M respecto del operador de forma.

Proposición 2.28. Sea p un punto de una superficie M en un ambiente lorentziano. Entonces se cumple lo siguiente:

- Si en p la superficie M tiene dos curvaturas principales diferentes entre sí, entonces existe un abierto alrededor de p en M tal que en todos los puntos de ese abierto A_ξ admite una representación diagonal como la mostrada en (1.10).
- Si en p el polinomio característico de A_ξ no tiene raíces reales, entonces existe un abierto alrededor de p en M tal que en todos los puntos de ese abierto A_ξ admite una representación como la mostrada en (1.13).

- El conjunto de todos los punto umbilicales y cuasiumbilicales de M es un conjunto cerrado de M .

Demostración. Como la función discriminante D es C^∞ sobre M , también será continua en todo M . Así, los enunciados son una consecuencia directa de la continuidad de la función D . \square

Además de todo lo dicho hasta ahora, la función discriminante D tiene un comportamiento bastante regular sobre las superficies paralelas.

Lema 2.29. La función discriminante D es constante sobre cualquier superficie paralela M en \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Queda claro que si $\text{tr}A_\xi$ y $\det A_\xi$ son constantes en cualquier superficie paralela M , la función discriminante también será constante. Así, se procederá a calcular la traza y el determinante de A_ξ para cada superficie paralela que aparece en el Teorema 1.54.

- Plano hiperbólico en \mathbb{R}_1^3

En este caso, al ser $H^2(r)$ una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 , el operador de forma A_ξ será un múltiplo de la identidad, como se ha mostrado en la Ecuación (1.26). Entonces, los valores de la traza y el determinante de A_ξ serán los siguientes:

$$\text{tr}A_\xi = -\frac{2}{r} \quad ; \quad \det A_\xi = \frac{1}{r^2} .$$

En este caso $D(p) = 0$ en todo $H^2(r)$.

- Cilindro hiperbólico plano tipo espacio

El operador de forma A_ξ del cilindro $H^1(r) \times \mathbb{R}$ se puede representar por una matriz diagonal en todos sus puntos. Dicha representación se muestra en la Ecuación (1.29) y de ella se pueden inferir los siguientes valores para la traza y el determinante de A_ξ :

$$\text{tr}A_\xi = -\frac{1}{r} \quad ; \quad \det A_\xi = 0 .$$

En este caso se obtiene que $D(p) = \frac{1}{r^2}$ en todo el cilindro.

- Espacio de De Sitter

La superficie $S_1^2(r)$ también es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 y su operador de forma, descrito en la Ecuación (1.30), también es un múltiplo de la identidad. Así, la traza y el determinante de A_ξ toman los siguientes valores:

$$\text{tr}A_\xi = -\frac{2}{r} \quad ; \quad \det A_\xi = \frac{1}{r^2} .$$

En este caso $D(p) = 0$ en todo $S_1^2(r)$.

- Cilindro circular plano tipo tiempo

El cilindro $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$ tiene un operador de forma A_ξ diagonalizable en todos sus puntos, como se puede observar en la Ecuación (1.33). Entonces, los valores de la traza y el determinante de A_ξ deben ser los siguientes:

$$\operatorname{tr} A_\xi = \frac{1}{r} \quad ; \quad \det A_\xi = 0 .$$

Entonces, $D(p) = \frac{1}{r^2}$ en todo $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$.

- Cilindro hiperbólico plano tipo tiempo

El cilindro $H^1(r) \times \mathbb{R}$, al igual que el resto de los cilindros, tiene un operador de forma diagonalizable cuya traza y determinante se pueden inferir a partir de la representación mostrada en la Ecuación (1.36):

$$\operatorname{tr} A_\xi = -\frac{1}{r} \quad ; \quad \det A_\xi = 0 .$$

En este caso $D(p) = \frac{1}{r^2}$ en todo el cilindro $H^1(r) \times \mathbb{R}$.

- Superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken

La superficie de Chen-Van der Veken M_0 es un B-scroll cuasiumbilical cuyo operador de forma A_ξ se puede representar como se muestra en las Ecuaciones (1.40) y (1.42). En ambos casos se puede ver fácilmente que:

$$\operatorname{tr} A_\xi = 0 \quad ; \quad \det A_\xi = 0 .$$

Esto implica que $D(p) = 0$ en todo M_0 y que la superficie misma es mínima y plana.

En caso que la superficie paralela M sea congruente a alguno de los planos, su operador de forma siempre se podrá representar por el operador trivial. En dicho caso tanto la traza como el determinante de A_ξ serán cero en todo M . Por lo tanto $D(p) = 0$ en toda la superficie. □

La continuidad de la función discriminante D permite definir los siguientes conjuntos y verificar algunas de sus características que serán de suma importancia en el resto del capítulo.

Definición 2.30. Considere los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad ; \quad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} ,$$

y considere la función discriminante $D : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se definen los subconjuntos U^+ , B_0 y U^- de M de la siguiente manera:

- $U^+ = D^{-1}(\mathbb{R}^+)$.
- $B_0 = D^{-1}(0)$.
- $U^- = D^{-1}(\mathbb{R}^-)$.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la Proposición 2.28.

Corolario 2.31. Los conjuntos U^+ y U^- definidos en la Definición 2.30 son subconjuntos abiertos de M , mientras que el conjunto B_0 es un subconjunto cerrado de M . Además:

$$M = U^+ \cup B_0 \cup U^- .$$

Demostración. Que los conjuntos U^+ y U^- sean abiertos en M y B_0 cerrado en M se sigue de la continuidad de la función D . □

La Definición 2.30 está pensada para hablar de manera más sencilla de las posibles representaciones que A_ξ pueda obtener sobre alguna superficie, así como de las distintas clases de puntos que puedan existir en la superficie.

Observación 2.32. El subconjunto cerrado B_0 de M consiste de todos los puntos umbilicales o cuasiumbilicales de M .

De las Definiciones 1.35 y 1.36 se sigue que una condición necesaria para que un punto p de M sea umbilical o cuasiumbilical es que $D(p) = 0$. Sin embargo, el Lema 1.33 hace de la condición $D(p) = 0$ una condición suficiente para determinar si p es umbilical o cuasiumbilical, esto porque los únicos dos casos en el Lema 1.33 asociados a la condición $D(p) = 0$ son los de las representaciones (1.11) y (1.12) que, aplicadas al operador de forma en $T_p M$, implican que p es umbilical o cuasiumbilical. Por lo tanto un punto p de M es umbilical o cuasiumbilical si y sólo si $D(p) = 0$. Dicho de otra forma, un punto p de M no es umbilical o cuasiumbilical si p es elemento de U^+ ó U^- .

En [5], la demostración del teorema principal que caracteriza las superficies isoparamétricas en espacios modelos riemannianos usa las curvaturas principales de las superficies para llegar a su objetivo. En caso que el espacio ambiente sea lorentziano no se puede confiar en la misma técnica ya que los valores propios de A_ξ podrían ser complejos.

Proposición 2.33. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 . Si por cada uno de los puntos de M pasan tres curvas no degeneradas tales que sus superficies normales son máximas o mínimas entonces el abierto U^- es el conjunto vacío.

Demostración. Por hipótesis en cada punto p del abierto U^- pasan tres curvas γ_i no degeneradas tales que las superficies Σ_{γ_i} son extremas, propiedad que implica que las curvas γ_i son en realidad geodésicas de M . Además, como $D(p) < 0$, el Lema 1.33 asegura que el operador de forma A_ξ tendrá una representación canónica como la que se muestra en la Ecuación (1.13) en todos los puntos de U^- , representación que carece de vectores propios reales. Esto quiere decir que los vectores tangentes γ'_i no pueden ser direcciones principales de M en p y, a su vez, esto impide que las geodésicas γ_i sean líneas de curvatura de M .

Así, de la Proposición 2.18 se sigue que las tres curvas γ_i que pasan por p son geodésicas de M con curvatura y torsión constantes tal que $\tau \neq 0$ y por el Corolario 2.23 se sigue que $\nabla A_\xi|_p = 0$. Por lo tanto, como U^- es un abierto de M , se sigue que U^- es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

Sin embargo, el Lema 1.55 asegura que toda superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 tiene al menos una dirección principal en cualquiera de sus puntos, característica que

no cumple U^- . Con esto se concluye que el abierto U^- debe ser el conjunto vacío.

□

La Proposición 2.33 es un primer paso en la búsqueda de una generalización del teorema principal demostrado en [5], y uno muy importante ya que el enunciado está asegurando que con las hipótesis de las tres curvas nunca aparecerán valores propios complejos del operador de forma A_ξ . Dicho de otra forma, la hipótesis de las tres curvas asegura que en todo punto p de M siempre habrá al menos una dirección principal.

Definición 2.34. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 . Se definen los siguientes subconjuntos de M :

- V como el conjunto de puntos umbilicales de M .
- W como el conjunto de puntos cuasiumbilicales de M .

En general no es claro cuando los conjuntos V y W pueden ser abiertos o cerrados, sin embargo lo que conocemos hasta ahora de los puntos umbilicales y cuasiumbilicales sí nos permite decir algunas cosas relevantes de estos conjuntos.

Proposición 2.35. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 . Los conjuntos V y W de puntos umbilicales y cuasi umbilicales de M cumplen las siguientes relaciones:

$$V \cup W = B_0 \quad ; \quad V \cap W = \emptyset . \quad (2.32)$$

Demostración. Ambas relaciones se siguen de las Definiciones 1.35 y 1.36, así como de la Observación 1.38. A grandes rasgos, p es umbilical o cuasiumbilical si y sólo si $D(p) = 0$, mientras que p no puede ser umbilical y cuasiumbilical al mismo tiempo ya que el polinomio mínimo de A_ξ en p es único.

□

La siguiente Proposición ahonda en el caso $M = B_0$. La aparición de los puntos cuasiumbilicales en el mundo lorentziano obliga a prestar atención a las sutilezas de este caso.

Proposición 2.36. Sea M una superficie en \mathbb{R}_1^3 que consta de puntos umbilicales y cuasiumbilicales. Si por cada uno de los puntos de M pasan tres curvas no degeneradas tales que sus superficies normales son máximas o mínimas entonces M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Siguiendo la notación introducida en la Definición 2.34 se puede empezar por suponer que W es un conjunto no vacío y tomar un punto p en W .

La hipótesis en la Proposición 2.36 dice que en p pasan tres curvas no degeneradas γ_i tal que las superficies normales Σ_{γ_i} son extremas, es decir, son máximas o mínimas dependiendo de su causalidad. Con esto, el Lema 2.4 asegura que cada curva γ_i es una geodésica de M mientras que la Proposición 2.18 afirma que las curvas γ_i son líneas de curvatura planas de M o geodésicas con curvatura y torsión constante tal que $\tau \neq 0$.

Por otro lado, como p es un punto cuasiumbilical de M las direcciones principales de A_ξ son tipo luz y múltiplos escalares entre sí en $T_p M$. Esto implica

que ninguna de las curvas γ_i puede ser una línea de curvatura ya que, si alguna de estas curvas lo fuera, el vector γ_i' sería una dirección principal no degenerada en $T_p M$, contradiciendo la suposición de que p sea un punto cuasiumbilical de M .

Por lo tanto las tres curvas γ_i de la hipótesis que pasan por p son geodésicas de curvatura y torsión constante tal que $\tau \neq 0$, y por el Corolario 2.23, se sigue que $\nabla A_\xi|_p = 0$. Entonces, hasta aquí se ha demostrado que:

$$\nabla A_\xi|_W = 0 ,$$

pero se puede extender un poco más este resultado. Dado que el campo tensorial ∇A_ξ es C^∞ en todo M , en particular es continuo; esto permite extender el resultado anterior a la cerradura de W :

$$\nabla A_\xi|_{\overline{W}} = 0 , \quad (2.33)$$

permitiendo que el resto de la demostración transcurra en dos casos diferentes que dependerán del interior de V .

- $\text{int}V = \emptyset$

En este primer caso, si q es un punto de V cualquier abierto de M alrededor de q contendrá un punto cuasiumbilical de M , es decir, que en cualquier abierto alrededor de q existirán puntos de W . Por lo tanto, todos los puntos umbilicales de M se encuentran en la cerradura de W , y de las relaciones en (2.32) se sigue que $\overline{W} = M$. Esto implica, por la ecuación (2.33), que M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 .

- $\text{int}V \neq \emptyset$

Sea q un punto en $\text{int}V$. Entonces existe un abierto alrededor de q tal que todos los puntos en ese abierto son puntos umbilicales de M . Esto permite considerar un marco ortonormal $\{e_1, e_2\}$ alrededor de q tal que, en este marco, el operador de forma A_ξ se puede representar de la siguiente manera:

$$A_\xi = \lambda I ,$$

en todo un abierto alrededor de q tal que λ es constante. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} A_\xi)(e_j) &= \nabla_{e_i} A_\xi e_j - A_\xi(\nabla_{e_i} e_j) \\ &= (e_i \cdot \lambda) e_j + \lambda \nabla_{e_i} e_j - \lambda \nabla_{e_i} e_j \\ &= 0 , \end{aligned}$$

en dicho abierto. Esto prueba que:

$$\nabla A_\xi|_V = 0 ,$$

y por las relaciones en (2.33), se sigue que $\nabla A_\xi = 0$ en todo M , es decir, M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 . □

Con esto se tienen listas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar una versión lorentziana del teorema principal mostrado en [5] por Luís Hernández Lamóneda y Gabriel Ruiz Hernández. Versión que se centrará sobre las superficies paralelas de \mathbb{R}_1^3 y no sobre las superficie isoparamétricas, como se hizo en [5]. Esto por las diferencias mostradas en la Observación 1.62.

Teorema 2.37. Sea M una superficie no degenerada en \mathbb{R}_1^3 . Entonces, por cada uno de sus puntos pasan tres curvas no degeneradas tales que sus superficies normales son máximas o mínimas si y sólo si M es paralela.

Demostración. Si por cada punto p de M pasan tres curvas γ_i tales que las superficies normales Σ_{γ_i} son extremas, la Proposición 2.33 afirma que el abierto U^- es el conjunto vacío. Esto implica que todo punto p en M que no es umbilical o cuasiumbilical está contenido en el abierto U^+ , es decir, que para todo p en M se cumple $D(p) = 0$ ó $D(p) > 0$. Por lo tanto:

$$M = U^+ \cup B_0 . \quad (2.34)$$

Por otro lado, de la Proposición 2.18 y el Lema 2.4 se obtiene que las curvas γ_i son geodésicas de M . Entonces:

$$\nabla_{\gamma'_i} \gamma'_i = 0 ,$$

y cada γ_i puede pertenecer a una de dos clases de curvas distintas en M ; o bien γ_i es una línea de curvatura plana de M o γ_i es una curva de M con curvatura y torsión constantes tal que $\tau \neq 0$.

Como la intersección de los conjuntos U^+ y B_0 es vacía se empezará a trabajar el caso en que p es un punto en M contenido en el abierto U^+ sin pensar de momento en el conjunto B_0 . Este caso se dividirá en casos más específicos que se irán puntualizando conforme se avance en la demostración, descartando de antemano la posibilidad de que las tres curvas γ_i sean líneas de curvatura ya que, de ser así, p sería un punto umbilical de M y no estaría contenido en el abierto U^+ .

- Dos de las curvas γ_i que se cruzan en p son líneas de curvatura de M

Como U^+ es un subconjunto abierto de M , existe una vecindad alrededor de p en donde A_ξ tiene dos valores propios distintos. Esto permite construir un marco ortonormal $\{e_1, e_2\}$ alrededor de p tal que los elementos e_i del marco son direcciones principales de M . Entonces, las líneas de curvatura γ_1 y γ_2 que se cruzan en p satisfacen lo siguiente:

$$\gamma'_1 = e_1|_{\gamma_1} \quad ; \quad \gamma'_2 = e_2|_{\gamma_2} ,$$

y al ser geodésicas de M cumplen las siguientes relaciones:

$$\nabla_{e_i} e_j|_p = 0 \quad ; \quad \nabla_{e_i} e_i = 0 .$$

Si k_i es la curvatura principal asociada a la dirección principal e_i , se obtienen

las siguientes relaciones para el operador ∇A_ξ en el punto de intersección p :

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1} A_\xi)(e_1)|_p &= (e_1 \cdot k_1) e_1|_p , \\ (\nabla_{e_2} A_\xi)(e_1)|_p &= (e_2 \cdot k_1) e_1|_p , \\ (\nabla_{e_1} A_\xi)(e_2)|_p &= (e_1 \cdot k_2) e_2|_p , \\ (\nabla_{e_2} A_\xi)(e_2)|_p &= (e_2 \cdot k_2) e_2|_p , \end{aligned} \quad (2.35)$$

a partir de las cuales se llega a la siguiente ecuación:

$$(e_1 \cdot k_2) e_2|_p = (e_2 \cdot k_1) e_1|_p ,$$

haciendo uso de la ecuación de Codazzi. Además, dado que los elementos de un marco son linealmente independientes, se llega a las siguientes identidades:

$$(e_1 \cdot k_2)|_p = 0 \quad ; \quad (e_2 \cdot k_1)|_p = 0 . \quad (2.36)$$

Hasta aquí se ha probado que dos de las igualdades en las Ecuaciones (2.35) son cero; falta demostrar que las restantes dos también son cero. Para ello se fijará la atención en la tercer curva de la hipótesis.

Si γ_3 es la geodésica de M que pasa por p con curvatura y torsión constante tal que $\tau \neq 0$, su vector tangente γ'_3 se puede expresar alrededor de p como se muestra a continuación:

$$\gamma'_3(s) = \lambda_1(s)e_1 + \lambda_2(s)e_2 ,$$

de tal forma que las funciones $\lambda_i(s)$, con $i = 1, 2$, cumplen que $\lambda_i(s) \neq 0$ a lo largo de γ_3 en un abierto alrededor de p ya que las tres geodésicas en cuestión son diferentes y γ_3 no es una línea de curvatura plana. Entonces:

$$\nabla_{\gamma'_3} \gamma'_3|_p = \lambda'_1(p)e_1 + \lambda'_2(p)e_2 = 0 ,$$

implicando que:

$$\lambda'_1(p) = \gamma'_3 \cdot \lambda_1|_p = 0 \quad ; \quad \lambda'_2(p) = \gamma'_3 \cdot \lambda_2|_p = 0 . \quad (2.37)$$

Además, por el Lema 2.21, se sabe que $(\nabla_{\gamma'_3} A_\xi)(\gamma'_3) = 0$ a lo largo de la geodésica γ_3 . Entonces:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'_3} A_\xi)(\gamma'_3)|_p &= \nabla_{\gamma'_3} A_\xi(\gamma'_3)|_p \\ &= \nabla_{\gamma'_3} (\lambda_1(s)k_1 e_1)|_p + \nabla_{\gamma'_3} (\lambda_2(s)k_2 e_2)|_p , \end{aligned}$$

y utilizando las ecuaciones (2.37) para las funciones $\lambda_i(s)$ en p , se obtiene la siguiente igualdad:

$$(\nabla_{\gamma'_3} A_\xi)(\gamma'_3)|_p = \lambda_1(p)k'_1(p) e_1|_p + \lambda_2(p)k'_2(p) e_2|_p = 0 .$$

Esto implica que las derivadas en p de las curvaturas principales k_i en la dirección γ'_3 deben anularse ya que $\lambda_i(p) \neq 0$. Así, $k'_i(p) = 0$ y, considerando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} k'_1(p) &= (\gamma'_3 \cdot k_1)|_p = \lambda_1 (e_1 \cdot k_1)|_p + \lambda_2 (e_2 \cdot k_1)|_p = \lambda_1 (e_1 \cdot k_1)|_p = 0 , \\ k'_2(p) &= (\gamma'_3 \cdot k_2)|_p = \lambda_1 (e_1 \cdot k_2)|_p + \lambda_2 (e_2 \cdot k_2)|_p = \lambda_2 (e_2 \cdot k_2)|_p = 0 , \end{aligned} \quad (2.38)$$

se llega al resultado deseado. Por lo tanto, las ecuaciones (2.36) junto con las ecuaciones (2.38) muestran que las derivadas de las curvaturas principales de M en p son cero en cualquier dirección de T_pM y, substituyendo esta información en las ecuaciones (2.35), se puede concluir finalmente que:

$$(\nabla_{e_i} A_\xi)(e_j)|_p = 0 \quad ; \quad \text{con } i = 1, 2 .$$

Dicho de otra forma, $\nabla A_\xi|_p = 0$.

- Una de las curvas γ_i que se cruzan en p es línea de curvatura de M

Si sólo una de las tres curvas γ_i que pasan por p es una línea de curvatura plana de M , las restantes dos curvas son geodésicas de M con curvatura y torsión constante. El Corolario 2.23 afirma que $\nabla A_\xi|_p = 0$.

- Ninguna de las curvas γ_i que se cruzan en p es línea de curvatura de M

Esto quiere decir que las tres curvas γ_i que se cruzan en p son geodésicas de M con curvatura y torsión constante. De manera análoga al caso anterior, el Corolario 2.23 asegura que $\nabla A_\xi|_p = 0$.

Estos son todos los casos posibles considerando que p está contenido en U^+ . Por lo tanto, $\nabla A_\xi|_p = 0$ para todo p en M contenido en U^+ .

Esto último tiene aún más consecuencias. Como U^+ es un abierto de M , en realidad se ha demostrado que U^+ es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 . Entonces, del Lema 2.29 se sigue que la función discriminante D es constante en todo U^+ y por la Definición 2.30 se puede concluir lo siguiente:

$$D|_{U^+}(p) = cte. > 0 \quad \text{para todo } p \text{ en } U^+ .$$

Finalmente, la continuidad de la función discriminante asegura que $U^+ = M$ ya que, de existir puntos umbilicales o cuasiumbilicales en M , la función D dejaría de ser continua en todo M .

Por otro lado, si se empieza por suponer que p es un punto de M contenido en B_0 , la definición 2.30 asegura que $D(p) = 0$. Es más:

$$D|_{B_0}(p) = 0 \quad \text{para todo } p \text{ en } B_0 .$$

Así, la continuidad de la función D asegura que el abierto U^+ debe ser el conjunto vacío ya que la hipótesis de las tres curvas se cumple en todo M . Es así que se llega a la siguiente conclusión:

- Si $U^+ \neq \emptyset$, entonces $M = U^+$.
- Si $U^+ = \emptyset$, entonces $M = B_0$.

Por lo tanto, si p está contenido en B_0 se sigue que $M = B_0$ y, haciendo uso de la Proposición 2.36, se puede concluir que M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 . Esto concluye la primera parte de la demostración.

El resto de la prueba es una consecuencia directa del Ejercicio 2.24 y de la Proposición 2.18 ya que, al asumir que M es una superficie paralela de \mathbb{R}_1^3 , el Ejercicio 2.24 afirma que cualquier geodésica γ de M tienen curvatura y torsión

constantes. Esta es una condición suficiente, por la Proposición 2.18, para que la superficie normal Σ_γ sobre cualquier geodésica γ sea extrema. Por lo tanto, por cada punto p de una superficie paralela M pasan una infinidad de curvas tales que la curvatura media de las superficies normales a lo largo de ellas es cero.

□

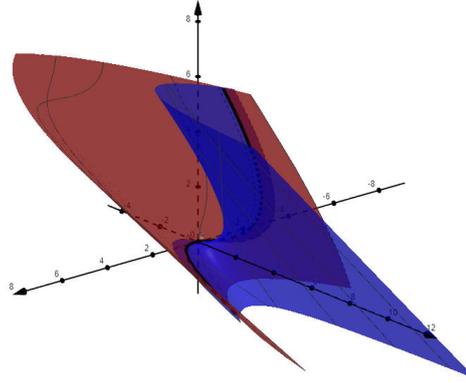


Figura 2.4: Superficie de Chen-Van der Veken M_0 acompañada de una superficie normal máxima (azul) sobre una geodésica tipo espacio.

El Teorema 2.37 prueba que la condición de las tres superficies normales siempre fue una característica de las superficies paralelas, incluso en los espacios modelos riemannianos donde las nociones de superficie paralela e isoparamétrica coinciden. Sin embargo, el Lema 1.59, que relaciona ambos tipos de superficies en \mathbb{R}_1^3 , permite rescatar parte del resultado mostrado en [5].

Corolario 2.38. Sea M una superficie no degenerada de \mathbb{R}_1^3 . Si por cada uno de los puntos de M pasan tres curvas no degeneradas tales que sus superficies normales son máximas o mínimas, entonces M es isoparamétrica.

Aunque el Corolario 2.38 es claro, a primera instancia no es evidente que el enunciado recíproco sea falso. El siguiente ejemplo arroja un poco de luz sobre este problema.

Ejemplo 2.39. La superficie isoparamétrica N_0 en el Ejemplo 1.61 no cumple con la hipótesis de las tres curvas γ_i que aparece en el Teorema 2.37.

Sea α la curva tipo luz en \mathbb{R}_1^3 descrita por la siguiente parametrización:

$$\alpha(u) = \left(\frac{u}{2} \left(\frac{u^4}{20} + 1 \right), \frac{u}{2} \left(\frac{u^4}{20} - 1 \right), \frac{u^3}{6} \right),$$

y η el siguiente campo tipo luz sobre α :

$$\eta(u) = (-1, -1, 0) .$$

Esta información basta para construir el B-scroll N_0 del Ejemplo 1.61 haciendo uso de la siguiente parametrización:

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\eta(u) .$$

Entonces, el marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$ de N_0 se encuentra descrito de la siguiente manera:

$$\psi_u = \frac{d\alpha}{du} \quad ; \quad \psi_v = \eta ,$$

y el campo normal unitario ξ a la superficie N_0 como se muestra a continuación:

$$\xi(u, v) = \left(\frac{u^2}{2}, \frac{u^2}{2}, 1 \right) .$$

Con esta información se puede verificar que las geodésicas γ del B-scroll N_0 que no son tipo luz cumplen las siguientes relaciones:

$$\gamma(s) = \psi(u(s), v(s)) \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = \epsilon ,$$

donde:

$$u(s) = \lambda_1 s + u_0 \quad ; \quad v(s) = \lambda_2 s + v_0 .$$

Esta última dependencia explícita de la variable afín es la que permite escribir lo siguiente:

$$\gamma'(s) = \lambda_1 \psi_u + \lambda_2 \psi_v \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2\lambda_1 \lambda_2 = \epsilon ,$$

y afirmar que $\lambda_i \neq 0$, ya que $\epsilon = \pm 1$. Esto permite dar una expresión en términos del marco coordenado de N_0 para el campo ω , elemento restante del marco de Frenet de γ adaptado a M :

$$\omega(s) = \lambda_1 \psi_u - \lambda_2 \psi_v \quad ; \quad \langle \omega, \omega \rangle = -2\lambda_1 \lambda_2 = -\epsilon ,$$

Estimando la variación del campo ω en la dirección γ' se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \omega'(s) &= \lambda_1 (\lambda_1 \psi_{uu} + \lambda_2 \psi_{uv}) - \lambda_2 (\lambda_1 \psi_{vu} + \lambda_2 \psi_{vv}) \\ &= \lambda_1^2 \psi_{uu} + \lambda_2^2 \psi_{vv} \\ &= \lambda_1^2 \psi_{uu} \\ &= \lambda_1^2 \frac{d^2 \alpha}{du^2} . \end{aligned}$$

Un cálculo rápido muestra que la segunda derivada de α respecto de su variable u es un múltiplo escalar del campo normal ξ de N_0 . Así:

$$\frac{d^2 \alpha}{du^2} = u \xi(u, v) \quad \Rightarrow \quad \omega'(s) = u(s) \lambda_1^2 \xi(s) .$$

Por lo tanto, la torsión τ de cualquier geodésica no degenerada γ adquiere el siguiente valor:

$$\tau(s) = -u(s) \lambda_1^2 ,$$

mostrando que cualquier geodésica γ de N_0 que no es tipo luz tiene torsión no constante. De la Proposición 2.18 se sigue que las superficies normales Σ_γ a dichas geodésicas no serán máximas ni mínimas. Esto prueba lo que se ha afirmado en el Ejemplo 2.39 y permite hacer la siguiente observación.

Observación 2.40. En una superficie isoparamétrica M de \mathbb{R}_1^3 pueden existir puntos por los cuales pasen menos de tres curvas tales que las superficies normales a dichas curvas sean máximas o mínimas.

Esto termina por verificar que el Teorema 2.37 es en realidad un caracterización completa de las superficies paralelas del espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , es decir, que la propiedad de las tres curvas γ_i y sus superficies normales siempre ha sido una característica de las superficies paralelas mas no una característica de las superficies isoparamétricas.

Capítulo 3

Superficies normales sobre curvas tipo luz

En el capítulo anterior se restringió la causalidad de las curvas contenidas en una superficie M de tal manera que estas siempre fueran tipo tiempo o espacio. Esto se hizo para asegurar que la superficie normal Σ_γ no se degenerara en una vecindad de γ , como se muestra en el Lema 2.3, permitiendo así aplicar a la superficie normal las herramientas clásicas de la geometría de subvariedades.

A lo largo de este capítulo se seguirá explorando la dinámica, como se hizo en el capítulo anterior, entre una superficie M , sus curvas γ y sus superficies normales Σ_γ pero con la hipótesis adicional de que las curvas γ sean tipo luz. Dicho de otra forma, se quiere explorar que sucede con la geometría de la superficie normal Σ_γ cuando la curva base γ es tipo luz. Esta elección en la causalidad de la curva base se abordará de dos maneras diferentes; cuando Σ_γ es degenerada en una vecindad de γ y cuando Σ_γ es no degenerada fuera de la intersección con M .

Uno de los resultados sobresalientes de este capítulo se construye al analizar qué sucede con el Teorema de Bonnet 2.12 cuando la curva base de la superficie normal es nula. El *Teorema de Bonnet tipo luz* 3.10 que resulta de este análisis establece una conexión entre la curva γ y la superficie normal Σ_γ a través de su causalidad, a saber, γ será una línea de curvatura tipo luz de M si y sólo si Σ_γ es a su vez una superficie tipo luz de \mathbb{R}_1^3 . Este resultado devela un comportamiento acotado por parte de la superficie normal Σ_γ debido a su carácter causal, comportamiento que permanece restringido incluso cuando el espacio ambiente es un espacio modelo $N_1^3(K)$ diferente al espacio de Minkowski.

Por último, que la curva base γ de una superficie normal Σ_γ sea nula no asegura la degeneración de la última en una vecindad de la curva, aunque la degeneración de Σ_γ sí esté asegurada a lo largo de γ . Esto permite pensar en los casos que Σ_γ sea no degenerada a un lado y otro de M ; del análisis de estos casos se establecen relaciones geométricas que dirigen los esfuerzos de esta tesis a un último teorema de caracterización para superficies paralelas tipo tiempo en el espacio de Minkowski.

Todo esto se logra por medio del marco de Frenet y las curvaturas κ_1 y κ_2 definidas para una curva nula en el capítulo 1 de esta tesis, sin embargo, el marco

de Frenet se debe adaptar a la superficie M para poder conectar la geometría de esta superficies con las geometría de Σ_γ , de manera análoga a como se hizo en el capítulo anterior.

3.1. Curvas tipo luz en superficies

La construcción de un marco de Frenet para una curva tipo luz en cualquier espacio ambiente lorentziano depende de la elección de un haz screen o de un haz transversal nulo para la curva; una vez tomada esa elección el marco de Frenet se puede construir de manera única. En caso que la curva se encuentre inmersa en una superficie tipo tiempo M se cuenta con un candidato natural para servir de haz screen de la curva ya que, al estar la superficie M orientada, existe un campo normal unitario ξ definido globalmente sobre M .

Definición 3.1. Sea M una superficie tipo tiempo en un espacio ambiente lorentziano \overline{M} y sea γ una curva tipo luz en M . Se dice que el marco de Frenet:

$$\{\gamma', \eta, \xi\},$$

para la curva γ es un *marco de Frenet adaptado a M* si se toma por campo normal de γ al campo normal unitario ξ de M restringido a la curva γ .

Dicho de otra forma, lo que se hace en la Definición 3.1 es restringir el haz normal TM^\perp de la superficie M a la curva tipo luz γ y tomar dicha restricción como el haz screen de la curva, es decir:

$$S(T\gamma^\perp) = TM_\gamma^\perp.$$

Esta es una forma de relacionar la geometría de la curva con la geometría de la superficie que la contiene. Por un lado, el campo normal transversal η será tangente a la superficie implicando que, en cada punto sobre la curva tipo luz γ , el conjunto $\{\gamma', \eta\}$ será una base del espacio tangente de la superficie. Por otro lado, las ecuaciones de Frenet para γ :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' &= \kappa_1 \xi, \\ \overline{\nabla}_{\gamma'} \eta &= \kappa_2 \xi, \\ \overline{\nabla}_{\gamma'} \xi &= -\kappa_2 \gamma' - \kappa_1 \eta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

se relacionarán con el operador de forma de manera similar a como sucedió en el capítulo anterior. Así, la tercera ecuación en las Ecuaciones (3.1) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$A_\xi \gamma' = \kappa_2 \gamma' + \kappa_1 \eta. \tag{3.2}$$

Observación 3.2. Una consecuencia de la Definición 3.1 y la elección de un parámetro afín para todas las curvas tipo luz en esta tesis se puede observar en la primera relación de las Ecuaciones (3.1). Así, todas las curvas tipo luz contenidas en una superficie serán geodésicas de la superficie en cuestión.

Como se verá más adelante, las curvaturas de una curva tipo luz en una superficie tienen un papel muy importante a lo largo de este capítulo ya que es en

términos de éstas que se pueden dar condiciones que determinen la geometría de la superficie que las contiene. El caso de geodésicas tipo luz del espacio ambiente contenidas en una superficie es de particular interés.

Ejemplo 3.3. Sea α la siguiente curva tipo tiempo en el espacio de Minkowski:

$$\alpha(u) = (\sinh u, \cosh u, 0) ,$$

y ϑ el campo de direcciones tipo luz mostrado a continuación:

$$\vartheta(u) = (1, \cos u, \sin u) .$$

Entonces la superficie M descrita por la siguiente parametrización:

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\vartheta(u) ,$$

es una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 con reglas tipo luz tal que la segunda curvatura de sus reglas es constante.

Las reglas de la superficie reglada M definida en el Ejemplo 3.3 son los trozos de líneas rectas γ completamente contenidas en la superficie M y que están parametrizadas de la siguiente manera:

$$\gamma(v) = \psi(u_0, v) = \alpha(u_0) + v\vartheta(u_0) ,$$

para cada valor constante u_0 . Evidentemente las reglas γ de M son tipo luz ya que:

$$\gamma'(v) = \vartheta(u) \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle \vartheta, \vartheta \rangle = 0 ,$$

para cualquier valor u en la parametrización ψ de M .

Evidentemente se está buscando, como ya se ha mencionado, entender cómo las geometrías de la curva y la superficie se conjugan entre sí, razón por la cual se usará el marco de Frenet adaptado a M para todas las reglas γ de la superficie y se calcularán las curvaturas de cada recta γ respecto de dicho marco. Para esto es necesario conocer el campo normal unitario ξ a la superficie.

Antes de seguir adelante con el cálculo que se desea efectuar es prudente hacer una pausa para conocer un poco mejor a la superficie M cuyo marco coordenado se muestra a continuación:

$$\psi_u = \alpha'(u) + v\vartheta'(u) = (\cosh u, \sinh u - v \sin u, v \cos u) \quad ; \quad \psi_v = \vartheta(u) .$$

Dado que $\langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0$, el determinante de la métrica g de M adquiere el siguiente valor en términos del marco coordenado:

$$\det g = -\langle \psi_u, \psi_u \rangle^2 = -[-\cosh u + \sinh u \cos u]^2 ,$$

implicando que $\det g$ depende sólo de la variable u . Por lo tanto:

$$\det g|_{u=0} < 0 ,$$

esto quiere decir que la superficie M está bien definida en una vecindad del punto $\alpha(0)$ a lo largo de α , que M es una superficie temporal de \mathbb{R}_1^3 y que las reglas γ de M se extienden indefinidamente en el espacio ambiente.

Una vez mostrado que la superficie M está bien definida se puede empezar con el cálculo propuesto en el Ejemplo 3.3. En esta dirección, se puede notar que el siguiente campo vectorial $\hat{\xi}$, determinado a partir del marco coordenado de M , es ortogonal a la superficie en el espacio ambiente:

$$\hat{\xi} = (v - \sinh u \sin u, v \cos u - \cosh u \sin u, v \sin u + \cosh u \cos u - \sinh u) ,$$

sin embargo este campo no es unitario como se muestra a continuación:

$$\langle \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle = \cosh(2u) - \sinh(2u) \cos u - \sinh^2 u \sin^2 u . \quad (3.3)$$

Entonces, si se define la función $A(u, v)$ sobre la superficie M de la siguiente manera:

$$A(u, v) = \sqrt{\langle \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle} , \quad (3.4)$$

se puede construir la siguiente expresión local para el campo normal unitario ξ de la superficie:

$$\xi(u, v) = \frac{1}{A(u, v)} \hat{\xi}(u, v) .$$

Además, como se sigue de la Ecuación (3.3), la función $A(u, v)$ no depende de v en todo M . Esto implica que en cada regla γ de M la cantidad $A(u)$ definida en la Ecuación (3.4) permanecerá constante a lo largo de la misma ya que cada γ depende exclusivamente de la variable v . Por lo tanto, la variación de ξ a lo largo de las rectas γ queda expresada como sigue:

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{1}{A(u)} \frac{d\hat{\xi}}{dv} = \frac{1}{A(u)} \vartheta(u) = \frac{1}{A(u)} \gamma' , \quad (3.5)$$

siempre que la expresión local de ξ esté bien definida.

Como la Ecuación (3.5) es una de las ecuaciones de Frenet de γ respecto del marco adaptado a M se sigue, como era de esperarse, que la primera curvatura de cada regla γ es $\kappa_1 = 0$ mientras que la segunda curvatura es:

$$\kappa_2(v) = -\frac{1}{A(u)} ,$$

para cada regla de M , es decir, la segunda curvatura de cada regla es constante aunque diferente de recta en recta.

El comportamiento mostrado en el Ejemplo 3.3 es más común de lo que se podría esperar en un principio a pesar de que ya se vislumbró dicho comportamiento en las superficies B-scroll.

Antes de seguir adelante vale la pena detenerse a hacer la siguiente observación.

Observación 3.4. Siempre que se trate con curvas tipo luz contenidas en una superficie se usará el marco de Frenet adaptado a dicha superficie para describir a la curva, sin importar en qué espacio ambiente se esté trabajando.

Aclarado este punto se puede continuar con el siguiente resultado.

Proposición 3.5. Sea M una superficie reglada tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 cuyas reglas son rectas tipo luz del espacio ambiente. Entonces, la segunda curvatura κ_2 de cada regla de M es constante.

Demostración. Se M una superficie reglada tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Entonces M se puede describir por la siguiente parametrización:

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\vartheta(u) ,$$

donde α es la curva base y ϑ es la dirección tipo luz de cada una de las reglas γ de M . Además, las reglas de M se parametrizan de la siguiente manera:

$$\gamma(v) = \alpha(u) + v\vartheta(u) \Rightarrow \gamma'(v) = \vartheta(u) ,$$

evidenciando que dichas reglas son en efecto rectas tipo luz de \mathbb{R}_1^3 ya que $\gamma'' = 0$ para cualquier valor de la variable u que se considere.

Por otro lado, si ξ es el campo normal unitario de M se sigue que el marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \xi\}$ para cada regla γ de M cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma'' &= 0 , \\ \eta' &= \kappa_2 \xi , \\ \xi' &= -\kappa_2 \gamma' , \end{aligned} \tag{3.6}$$

y en términos del operador de forma de M se obtiene que:

$$A_\xi \gamma' = \kappa_2 \gamma' ,$$

es decir, las reglas de M son líneas de curvatura.

Se sabe que para cada recta γ el campo η está completamente determinado por ξ , sin embargo no queda claro a primera vista que la colección de campos η de cada una de las rectas γ forme un campo vectorial C^∞ sobre M . Así, para proseguir con esta demostración es necesario que se pueda justificar la existencia de un campo η sobre M que coincida con el campo vectorial determinado por ξ en cada una de las reglas de la superficie.

De la parametrización de M se sigue que el marco coordenado de la superficie se puede expresar de la siguiente manera:

$$\psi_u = \alpha'(u) + v\vartheta'(u) \quad ; \quad \psi_v = \vartheta(u) ,$$

resaltando que $\langle \psi_v, \psi_v \rangle = 0$ en todo M . Esto implica que el determinante de la métrica g de M adquiere la siguiente representación en términos del marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$:

$$\det g = -\langle \psi_u, \psi_v \rangle^2 ,$$

y dado que $\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = 0$ por la causalidad de $\vartheta(u)$, se concluye que:

$$\langle \psi_u, \psi_v \rangle = \langle \alpha', \vartheta \rangle \neq 0 , \tag{3.7}$$

ya que por hipótesis M es una superficie no degenerada. Desde un punto de vista geométrico la Ecuación (3.7) implica, dado que $\vartheta = \gamma'$, que en una superficie reglada tipo tiempo cuyas reglas sean tipo luz, estas no pueden ser ortogonales a la curva base.

Por otro lado, como el campo de vectores γ' tangentes a las reglas de la superficie está bien definido a lo largo de M , es posible pensar en la existencia de un campo vectorial η a lo largo de la superficie que cumpla las siguientes condiciones:

$$\langle \eta, \eta \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \eta, \gamma' \rangle = 1 , \tag{3.8}$$

es decir, un campo vectorial que en cada punto de M determine un vector tipo luz que esté normalizado respecto de γ' . Para este fin considérense las funciones λ_1 y λ_2 sobre M que a continuación se muestran:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{\langle \alpha', \gamma' \rangle}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2\langle \alpha', \gamma' \rangle^2} \langle \psi_u, \psi_u \rangle,\end{aligned}$$

las cuales están bien definidas dado que la Ecuación (3.7) asegura que el producto escalar $\langle \alpha', \gamma' \rangle$ es diferente de cero. Entonces, en términos del marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$ se obtiene que el campo vectorial:

$$\eta = \lambda_1 \psi_u + \lambda_2 \psi_v, \quad (3.9)$$

así definido cumple con las condiciones planteadas en la Ecuación (3.8). Por lo tanto, al restringir η a cada regla de M se obtiene el campo vectorial determinado por ξ que completa el marco de Frenet de cada regla γ de M . Esto permite darle sentido a la conexión $\nabla_\eta \gamma'$ alrededor de cada regla de la superficie al valuarla en dichos campos.

La necesidad de saber cómo se comporta la conexión de M respecto de los elementos del marco $\{\gamma', \eta\}$ nace de la posibilidad de dar alguna condición sobre la segunda curvatura de las reglas al hacer variar el operador de forma en estas direcciones. Así, la Proposición 1.32 permite conocer los valores de la conexión de M respecto de los elementos de este marco tipo luz:

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'} \gamma' &= 0 & ; & & \nabla_{\gamma'} \eta &= 0, \\ \nabla_\eta \gamma' &= -g\gamma' & ; & & \nabla_\eta \eta &= g\eta,\end{aligned} \quad (3.10)$$

donde g es una función C^∞ sobre M . Los particulares valores que se aprecian en las Ecuaciones (3.10) son consecuencia de que las reglas γ de la superficie sean geodésicas del ambiente.

Con esto se está en condiciones de calcular las siguientes variaciones del operador de forma de la superficie:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\eta) &= \nabla_{\gamma'} A_\xi \eta - A_\xi (\nabla_{\gamma'} \eta) \\ &= \nabla_{\gamma'} A_\xi \eta, \\ (\nabla_\eta A_\xi)(\gamma') &= \nabla_\eta A_\xi \gamma' - A_\xi (\nabla_\eta \gamma') \\ &= \nabla_\eta \kappa_2 \gamma' + g A_\xi \gamma' \\ &= (\eta \cdot \kappa_2) \gamma' + \kappa_2 \nabla_\eta \gamma' + g \kappa_2 \gamma' \\ &= (\eta \cdot \kappa_2) \gamma',\end{aligned}$$

y haciendo uso de la ecuación de Codazzi se obtiene que:

$$\nabla_{\gamma'} A_\xi \eta = (\eta \cdot \kappa_2) \gamma'. \quad (3.11)$$

La expresión que se encuentra al costado izquierdo de la igualdad mostrada en la Ecuación (3.11) es tangente a la superficie M y se puede expresar como

una combinación lineal del marco $\{\gamma', \eta\}$. Los coeficientes de dicha combinación lineal se pueden encontrar fácilmente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\gamma'} A_\xi \eta, \gamma' \rangle &= \gamma' \langle A_\xi \eta, \gamma' \rangle - \langle A_\xi \eta, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle \\ &= \gamma' \langle \eta, A_\xi \gamma' \rangle = \gamma' \langle \eta, \kappa_2 \gamma' \rangle \\ &= \gamma' \cdot \kappa_2 , \\ \langle \nabla_{\gamma'} A_\xi \eta, \eta \rangle &= \gamma' \langle A_\xi \eta, \eta \rangle - \langle A_\xi \eta, \nabla_{\gamma'} \eta \rangle \\ &= \gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle , \end{aligned}$$

donde h es la segunda forma fundamental de M . Entonces:

$$\nabla_{\gamma'} A_\xi \eta = [\gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle] \gamma' + (\gamma' \cdot \kappa_2) \eta ,$$

y la igualdad en la Ecuación (3.11) lleva a la siguiente combinación lineal de los elementos del marco:

$$[\gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle - (\eta \cdot \kappa_2)] \gamma' + (\gamma' \cdot \kappa_2) \eta = 0 ,$$

que, dada la independencia lineal de dichos elementos, implica las siguientes identidades:

$$\eta \cdot \kappa_2 = \gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle \quad ; \quad \gamma' \cdot \kappa_2 = 0 . \quad (3.12)$$

Por lo tanto se cumple que $\gamma' \cdot \kappa_2 = 0$ para cualquier regla de M , es decir, la segunda curvatura de cada regla γ de la superficie se mantiene constante en la dirección de la regla γ correspondiente. \square

Del teorema egregio de Gauss se sigue que la curvatura intrínseca K de una superficie temporal M se puede expresar como el determinante del operador de forma:

$$K = \det A_\xi .$$

Además, dado que las hipótesis que se plantean en la Proposición 3.5 implican, como se vio en la demostración de dicha proposición, que las direcciones de las reglas de la superficie M serán direcciones principales de la misma, se concluye que la segunda curvatura κ_2 de las reglas tendrá que aparecer en la expresión del determinante $\det A_\xi$, es decir, que la segunda curvatura κ_2 de cada regla de M aparecerá en la expresión de la curvatura K de M . Así, las Ecuaciones (3.12) contienen información relevante de la curvatura de la superficie.

Corolario 3.6. Sea M una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 cuyas reglas son rectas tipo luz del espacio ambiente. Entonces la superficie M tiene curvatura constante si y sólo si todas las reglas de M tienen el mismo valor en su segunda curvatura.

Demostración. Que las reglas γ de M sean rectas tipo luz del ambiente implica que cada regla γ cumplirá con las ecuaciones de Frenet (3.6) respecto del marco de Frenet adaptado $\{\gamma', \eta, \xi\}$, donde ξ es el campo normal unitario de M y η es el campo vectorial definido en la Ecuación (3.9), ambos restringidos a cada regla γ . Esto implica lo siguiente:

$$A_\xi \gamma' = \kappa_2 \gamma' ,$$

es decir, las reglas de M son líneas de curvatura tipo luz con curvatura principal κ_2 .

Si A_ξ posee una dirección principal tipo luz se sigue del Lema 1.33 y la Observación 1.38 que el operador A_ξ solo puede tomar una de las representaciones canónicas que se muestran en las Ecuaciones (1.11) y (1.12). Cualquiera que sea el caso se sigue lo siguiente:

$$K = \det A_\xi = \kappa_2^2, \quad (3.13)$$

es decir, que la curvatura de M depende por completo de de la segunda curvatura κ_2 de las reglas γ de M .

Entonces, si M tiene curvatura constante se sigue de inmediato, por la Ecuación (3.13), que todas las reglas de M tienen la misma curvatura.

La implicación recíproca se demuestra análogamente como consecuencia de la Ecuación (3.13). Sin embargo, las Ecuaciones (3.12) dicen un poco más al respecto ya que las condiciones del Corolario 3.6 implican el resultado de la Proposición 3.5, es decir, la segunda curvatura κ_2 de cada regla es constante en la dirección de la regla misma pero, tomando en cuenta el marco adaptado $\{\gamma', \eta\}$ de M , se tiene también la siguiente igualdad:

$$\eta \cdot \kappa_2 = \gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle.$$

Esto quiere decir que si κ_2 es constante en la dirección de η , la segunda forma fundamental h de M valuada en η será constante en la dirección de cada regla γ de la superficie.

Por lo tanto, dado que ya se tiene que κ_2 es constante en la dirección de γ' , se sigue que K es constante si y sólo si la segunda forma fundamental h valuada en η es constante en la dirección de cada regla de M , es decir, que el valor de $h(\eta, \eta)$ puede variar de regla en regla pero se mantiene constante a lo largo de una regla dada.

□

Un ejemplo de esto último es el caso del espacio de De Sitter unitario S_1^2 que, como se vio en Ejemplo 1.44, se puede describir como una superficie tipo B-scroll y por tanto como una superficie reglada de \mathbb{R}_1^3 con reglas tipo luz. La parametrización de S_1^2 como B-scroll es la siguiente:

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\vartheta(u)$$

donde la curva base α y la dirección ϑ de las reglas dependen del parámetro u de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= (u, 1, u), \\ \vartheta(u) &= \left(-\frac{1}{2}(u^2 + 1), -u, -\frac{1}{2}(u^2 - 1) \right), \end{aligned}$$

haciendo que el marco coordenado de S_1^2 respecto de esta parametrización se exprese de la siguiente forma:

$$\psi_u = (1 - uv, -v, 1 - uv) \quad ; \quad \psi_v = \vartheta(u).$$

Así, en términos del marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$ de S_1^2 se puede expresar el marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \xi\}$ de cada regla γ como:

$$\begin{aligned}\gamma' &= \psi_v , \\ \eta &= \psi_u - \frac{v^2}{2}\psi_v , \\ \xi &= \psi_{uv} - v\psi_v .\end{aligned}$$

Por lo tanto, un cálculo directo lleva a la siguiente expresión:

$$D_\eta \eta = \nabla_\eta \eta = -v\eta ,$$

que a su vez implica que:

$$h(\eta, \eta) = 0 ,$$

es decir, la segunda forma fundamental de S_1^2 se anula al evaluarla en la dirección de η y, en términos de las Ecuaciones (3.12), la segunda curvatura de cada regla γ de S_1^2 obtiene el mismo valor constante. Dicho de otra forma:

$$\eta \cdot \kappa_2 = \gamma' \langle h(\eta, \eta), \xi \rangle = 0 \quad ; \quad \gamma' \cdot \kappa_2 = 0 .$$

La condición de que una superficie esté foliada por rectas tipo luz del ambiente, como se menciona en la Proposición 3.5, es crucial para que la segunda curvatura de cada regla sea constante en la dirección de la regla. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 3.7. La superficie M descrita por la siguiente parametrización:

$$\psi(u, v) = (u(1 + 2v), u(1 + v \cos u), uv \operatorname{sen} u) , \quad (3.14)$$

en \mathbb{R}_1^3 contiene una recta tipo luz del ambiente cuya segunda curvatura no es constante.

Si se toma $v = 0$ en la Ecuación (3.14) se puede verificar fácilmente que la superficie M contiene una recta tipo luz γ descrita a partir de la parametrización misma de la superficie M . Entonces, si:

$$\gamma(u) = \psi(u, 0) = (u, u, 0) ,$$

se verifica que la curva γ es en realidad una recta del espacio ambiente:

$$\gamma' = (1, 1, 0) \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 \quad ; \quad \gamma'' = 0 .$$

Una manera de calcular la segunda curvatura κ_2 de la recta γ es derivando el campo normal unitario ξ de M en la dirección de γ , y para conocer una expresión de ξ es prudente describir el marco coordenado $\{\psi_u, \psi_v\}$ de M . De la Ecuación (3.14) se sigue que:

$$\begin{aligned}\psi_u &= (1 + 2v, 1 + v \cos u - uv \operatorname{sen} u, v \operatorname{sen} u + uv \cos u) , \\ \psi_v &= (2u, u \cos u, u \operatorname{sen} u) ,\end{aligned}$$

y en $v = 0$, que es la ecuación que caracteriza a la recta γ , se obtiene la siguiente expresión para el marco coordenado de la superficie:

$$\begin{aligned}\psi_u|_{v=0} &= (1, 1, 0) , \\ \psi_v|_{v=0} &= (2u, u \cos u, u \sin u) .\end{aligned}$$

Así, el campo normal unitario de M a lo largo de la recta γ se expresa de la siguiente manera:

$$\xi(u) = \left(\frac{\sin u}{2 - \cos u}, \frac{\sin u}{2 - \cos u}, 1 \right) .$$

Por lo tanto, el campo ξ varía en la dirección de γ como se muestra a continuación:

$$\xi' = \left(\frac{2 \cos u - 1}{(2 - \cos u)^2}, \frac{2 \cos u - 1}{(2 - \cos u)^2}, 0 \right) = \frac{2 \cos u - 1}{(2 - \cos u)^2} \gamma' ,$$

implicando que la segunda curvatura de γ es:

$$\kappa_2(u) = \frac{1 - 2 \cos u}{(2 - \cos u)^2} ,$$

que evidentemente no es constante.

3.2. Superficies normales tipo luz

El teorema de Bonnet [12], como ya se ha establecido, relaciona la geometría de la superficie normal Σ_γ con las propiedades de la curva γ en M cuando el espacio ambiente es \mathbb{R}^3 . El objetivo de esta sección es demostrar que en el espacio de Minkowski se puede demostrar un resultado similar en términos de la causalidad de Σ_γ .

El siguiente lema es un primer paso que resultará de mucha utilidad en la discusión posterior. Además, se debe notar que en el siguiente enunciado no es necesario hacer alguna suposición sobre la causalidad de la curva en la intersección de M y Σ_γ .

Lema 3.8. Sea M una superficie tipo tiempo en \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M . La superficie Σ_γ es tipo luz alrededor de γ en \mathbb{R}_1^3 si y sólo si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$.

Demostración. Si $\phi(s, t)$ es la parametrización de la superficie normal a lo largo de γ la métrica g de Σ_γ , en términos del marco coordenado $\{\phi_s, \phi_t\}$, se representa por la siguiente matriz:

$$[g] = \begin{pmatrix} \langle \phi_s, \phi_s \rangle & \langle \phi_s, \phi_t \rangle \\ \langle \phi_t, \phi_s \rangle & \langle \phi_t, \phi_t \rangle \end{pmatrix} , \quad (3.15)$$

entonces, basta con calcular los productos escalares de los elementos del marco coordenado para saber cuándo la métrica será degenerada. Usando las expresiones en (2.2) para el marco coordenado se obtiene que:

$$\begin{aligned}\langle \phi_s, \phi_s \rangle &= \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2t \langle \gamma', \xi' \rangle + t^2 \langle \xi', \xi' \rangle , \\ \langle \phi_s, \phi_t \rangle &= 0 \quad ; \quad \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 ,\end{aligned}$$

implicando que $\det g = \langle \phi_s, \phi_s \rangle$. De esto último se sigue que la métrica g es degenerada si y sólo si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$. \square

En la intersección entre M y Σ_γ se halla la curva γ y como consecuencia, el elemento ϕ_s del marco coordenado de la superficie normal es igual a γ' en dicha intersección. Así, una consecuencia directa del pasado Lema 3.8 es el siguiente corolario.

Corolario 3.9. Sea M una superficie tipo tiempo en \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M tal que la superficie Σ_γ es tipo luz alrededor de γ en \mathbb{R}_1^3 . Entonces la curva γ es tipo luz.

Se ha decidido nombrar *Teorema de Bonnet tipo luz* al siguiente resultado por su increíble semejanza con el Teorema 2.12. El *Teorema de Bonnet tipo luz* es una primera muestra de la rigidez entre los objetos geométricos que han capturado mi atención a lo largo de esta tesis cuando la curva base es tipo luz. Una muestra de ello es lo siguiente: basta que γ sea una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 contenida en una superficie M para que Σ_γ se vea obligada a ser un plano.

Teorema de Bonnet tipo luz 3.10. Sea M una superficie temporal de \mathbb{R}_1^3 y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) γ es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 .
- (b) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .
- (c) Σ_γ es un plano tipo luz.
- (d) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Demostración. Empezaré por suponer que γ es una recta tipo luz del ambiente. Entonces:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = t [2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle] .$$

Como γ es una recta tipo luz del ambiente, el Corolario 1.24 me asegura que su primera curvatura es igual a cero sin importar la parametrización de γ . Tomando a ξ como parte del marco de frenet de γ , de las ecuaciones (3.1) se sigue que:

$$\xi' = -\kappa_2 \gamma' ,$$

asegurando que, $\langle \gamma', \xi' \rangle = \langle \xi', \xi' \rangle = 0$. Por lo tanto $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$ y, por el Lema 3.8, se obtiene que la superficie Σ_γ tiene una métrica degenerada. Entonces (a) implica (d).

Para ver que (a) implica (c) basta recordar que un plano cuya métrica inducida es degenerada se encuentra completamente determinado como el complemento ortogonal de una dirección tipo luz en \mathbb{R}_1^3 , a pesar de que dicha dirección sea parte del mismo plano. Entonces, como γ es una recta tipo luz del ambiente, esta siempre se puede parametrizar de tal forma que $\gamma' = u_0$ sea un vector tipo luz constante en \mathbb{R}_1^3 . Con esto, si p_0 es un punto de M por el cual pasa la recta γ , la siguiente expresión es una parametrización de dicha recta:

$$\gamma(s) = p_0 + s u_0 ,$$

de tal forma que la parametrización de Σ_γ se expresa de la siguiente manera:

$$\phi(s, t) = p_0 + su_0 + t\xi(s) . \quad (3.16)$$

Como u_0 es una dirección tipo luz constante de \mathbb{R}_1^3 y p_0 es un punto sobre γ , los puntos q en \mathbb{R}_1^3 que se encuentran en el plano tipo luz del espacio de Minkowski que contiene a la dirección generada por u_0 y pasa por p_0 cumplen con la ecuación $\langle u_0, p_0 - q \rangle = 0$. Entonces, usando la expresión (3.16) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \langle u_0, p_0 - \phi(s, t) \rangle &= \langle u_0, p_0 - p_0 - su_0 - t\xi(s) \rangle \\ &= -s\langle u_0, u_0 \rangle - t\langle u_0, \xi(s) \rangle \\ &= 0 , \end{aligned}$$

ya que u_0 es tipo luz y tangente a M . Por lo tanto Σ_γ es un plano degenerado de \mathbb{R}_1^3 .

Que (c) implica (d) es evidente ya que cualquier conjunto abierto de un plano degenerado de \mathbb{R}_1^3 es una superficie tipo luz del espacio de Minkowski.

Si se empieza por suponer (b), γ es una línea de curvatura tipo luz de M y se sigue que:

$$A_\xi \gamma' = \lambda \gamma' \quad \text{y} \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 ,$$

entonces:

$$\langle h(\gamma', \gamma'), \xi \rangle = \langle A_\xi \gamma', \gamma' \rangle = \langle \lambda \gamma', \gamma' \rangle = 0 ,$$

implicando que $h(\gamma', \gamma') = 0$ y, a su vez, que $D_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} \gamma'$. Por otro lado, como γ es una curva tipo luz:

$$\gamma' \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \langle D_{\gamma'} \gamma', \gamma' \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma' \rangle = 0 .$$

Entonces, dado que $\dim M = 2$ y que γ' es un vector tipo luz en cada espacio tangente $T_p M$, se obtiene que la conexión $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ es un múltiplo escalar de γ' . Así:

$$D_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} \gamma' = f \gamma' ,$$

para alguna función f de clase C^∞ sobre γ , implicando que γ es una pregeodésica de M y del ambiente \mathbb{R}_1^3 . Al inicio de esta tesis se estableció que todas las curvas tendrán un parámetro afín, esto permite concluir que $f = 0$ y por tanto que la curva γ es en realidad una geodésica de M y \mathbb{R}_1^3 . Así, como las únicas geodésicas del ambiente son rectas, γ debe ser una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 demostrando así que (b) implica (a).

Por último, si Σ_γ es tipo luz alrededor de γ , existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle(t) = 0 ,$$

para toda $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Así:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2t \langle \gamma', \xi' \rangle + t^2 \langle \xi', \xi' \rangle = 0 , \quad (3.17)$$

para t suficientemente pequeña. Esta expresión de $\langle \phi_s, \phi_s \rangle$ es un polinomio en t ya que los coeficientes son funciones que sólo dependen de s y, junto con la

ecuación (3.17), esto implica que los coeficientes son funciones constantes igual a cero. Es decir:

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle \gamma', \xi' \rangle = \langle \xi', \xi' \rangle = 0 .$$

Entonces γ es una curva tipo luz y ξ' es un campo vectorial tipo luz sobre γ . Además, ξ' es un múltiplo escalar de γ' , es decir, que $\xi' = g\gamma'$ para alguna función g que es C^∞ sobre γ . Por lo tanto, de la fórmula de Wiengarten se obtiene la siguiente relación:

$$\xi' = D_{\gamma'}\xi = -A_\xi\gamma' = g\gamma' .$$

Dicho de otra forma, $A_\xi\gamma'$ es un múltiplo de γ' a lo largo de la curva. Esto demuestra que γ es una línea de curvatura tipo luz de M y que (d) implica (b). \square

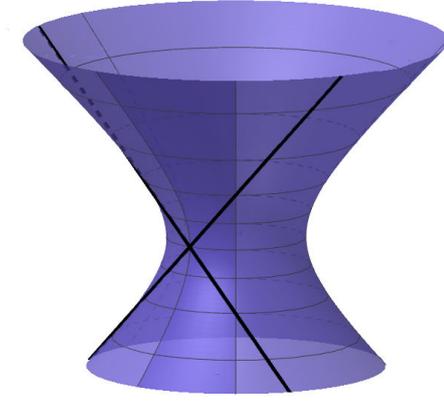


Figura 3.1: Por cada punto de la superficie $S_1^2(r)$ pasan dos rectas nulas completamente contenidas en la superficie.

El Teorema 3.10 permite caracterizar las superficie tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 cuyos puntos son umbilicales. Esto es posible gracias a que en cada punto de estas superficies pasan dos geodésicas tipo luz que también son líneas de curvatura.

Antes de enunciar el siguiente corolario vale la pena recordar que cuando las hipótesis de un enunciado especifican que dos curvas γ_i son diferentes en un punto p de una superficie M , lo que se está tratando de decir es que el conjunto de vectores tangentes $\{\gamma'_i\}$ a las curvas γ_i en p es una base del espacio tangente T_pM .

Corolario 3.11. Sea M una superficie temporal de \mathbb{R}_1^3 . Entonces, por cada punto p de M pasan dos curvas diferentes γ_i tales que las superficies Σ_{γ_i} son superficies tipo luz en una vecindad de γ_i si y sólo si M es una superficie umbilical de \mathbb{R}_1^3 .

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas diferentes en M que pasan por un punto p . Por hipótesis se tiene que las superficies normales Σ_{γ_i} son degeneradas en una vecindad de cada curva γ_i . Entonces, por el Teorema 3.10 las curvas γ_1 y γ_2

son líneas de curvatura de la superficie M y, por tanto, sus vectores tangentes son direcciones principales de M en p . Finalmente, como los vectores γ'_1 y γ'_2 son linealmente independientes en T_pM , la Observación 1.38 me asegura que el punto p es umbilical. Como esto sucede para cualquier punto p de M se sigue que M es una superficie umbilicales de \mathbb{R}_1^3 .

Si M es umbilical, $A_\xi = \lambda \text{id}$ en T_pM para toda p en M . Esto quiere decir que cualquier curva tipo luz de M es una línea de curvatura de la superficie y, por el Teorema 3.10, Σ_γ es un plano degenerado del ambiente. \square

Un lugar común en la geometría de subvariedades es preguntarse por los diferentes espacios ambientes donde un resultado sigue siendo válido. El pasado Teorema 3.10 es cierto en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 y una versión de él sigue siendo válida en espacios modelo $N_1^3(K)$ no planos, es decir, espacios con curvatura $K \neq 0$, simplemente conexos y geodésicamente completos. Estos espacios son:

$$N_1^3(K) = \begin{cases} S_1^3(r) & \text{si } K = \frac{1}{r^2} \\ \mathbb{R}_1^3 & \text{si } K = 0 \\ H_1^3(r) & \text{si } K = -\frac{1}{r^2} \end{cases} .$$

El *espacio de De Sitter* $S_1^3(r)$ y el *espacio anti De Sitter* $H_1^3(r)$ son las cubiertas universales de las siguientes subvariedades cuadráticas de codimensión 1, respectivamente:

$$\bar{S}_1^3(r) = \{p \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle p, p \rangle = r^2\} \quad ; \quad \bar{H}_1^3(r) = \{p \in \mathbb{R}_2^4 \mid \langle p, p \rangle = -r^2\}$$

es decir, estos espacios modelos lorentzianos se pueden describir localmente como subvariedades hipercuadráticas de codimensión 1 en los ambientes \mathbb{R}_1^4 y \mathbb{R}_2^4 . Con esto, la Definición 2.1 implica que las superficies normales Σ_γ en dichos ambientes se pueden parametrizar localmente usando las geodésicas de cada espacio ambiente correspondiente.

Proposición 3.12. Sea M una superficie en $N_1^3(K)$ con $K \neq 0$ y γ una curva contenida en M . La superficie Σ_γ normal a M a lo largo de γ se encuentra descrita por la parametrización:

$$\begin{aligned} \phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^4 & ; & \quad \text{si } N_1^3(K) = S_1^3(r) \\ \phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_2^4 & ; & \quad \text{si } N_1^3(K) = H_1^3(r) \end{aligned}$$

donde U es un abierto de \mathbb{R}^2 y:

$$\phi(s, t) = F(t)\gamma(s) + G(t)\xi(s) , \quad (3.18)$$

con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para alguna $\varepsilon > 0$ y $\xi(s)$ un campo normal unitario de M en $N_1^3(K)$ restringido a γ . Además, las funciones:

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad G : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

adquieren las siguientes expresiones según sea el espacio ambiente $N_1^3(K)$ en el que se encuentre M :

$$\begin{aligned} F(t) = \cos\left(\frac{t}{r}\right) & \quad \text{y} \quad G(t) = r \sin\left(\frac{t}{r}\right) & \quad \text{en} \quad S_1^3(r) , \\ F(t) = \cosh\left(\frac{t}{r}\right) & \quad \text{y} \quad G(t) = r \sinh\left(\frac{t}{r}\right) & \quad \text{en} \quad H_1^3(r) . \end{aligned}$$

Se avanzará sin demostrar la pasada Proposición 3.12 pero se instiga al lector verificar que las funciones F y G parametrizan geodésicas de $N_1^3(K)$ en la dirección $\xi(s)$ con condición inicial $\gamma(s)$. Se trata de una cuenta sencilla si se toma en cuenta que γ'' debe ser ortogonal a la superficie M y al mismo tiempo un campo vectorial tangente a $N_1^3(K)$.

La descripción que se hace de las superficies Σ_γ en la Ecuación (3.18) permite expresar el marco coordenado $\{\phi_s, \phi_t\}$ de una superficie normal como:

$$\begin{aligned}\phi_s &= F(t)\gamma'(s) + G(t)\xi'(s) , \\ \phi_t &= \dot{F}(t)\gamma(s) + \dot{G}(t)\xi(s) .\end{aligned}\tag{3.19}$$

Por último, cabe recordar que la segunda forma fundamental de los espacios hipercuadráticos en ambientes planos tiene una expresión bastante sencilla:

$$\bar{h}_{S_1^3(r)}(X, Y) = -\frac{1}{r}\langle X, Y \rangle \bar{\xi} \ ; \ \bar{h}_{H_1^3(r)}(X, Y) = \frac{1}{r}\langle X, Y \rangle \bar{\xi} .\tag{3.20}$$

Lema 3.13. Sea M una superficie tipo tiempo en $N_1^3(K)$ y γ una curva en M . La superficie normal Σ_γ es tipo luz alrededor de γ en $N_1^3(K)$ si y sólo si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$.

Demostración. En la demostración del Lema 3.8 se vio que la métrica g de Σ_γ está completamente determinada por los productos escalares de los elementos del marco coordenado. Así, bastará con probar que $\det g = \langle \phi_s, \phi_s \rangle$ para lograr el resultado previsto.

Según las ecuaciones (3.19) el producto $\langle \phi_s, \phi_t \rangle$ tiene la siguiente expresión:

$$\langle \phi_s, \phi_t \rangle = F\dot{F}\langle \gamma', \gamma \rangle + F\dot{G}\langle \gamma', \xi \rangle + G\dot{F}\langle \xi', \gamma \rangle + G\dot{G}\langle \xi', \xi \rangle .$$

Como γ es el vector de posición de la curva en M desde \mathbb{R}_1^4 ó \mathbb{R}_2^4 y ξ es normal a M en $N_1^3(K)$, se sigue que:

$$\langle \gamma', \gamma \rangle = \langle \gamma', \xi \rangle = \langle \xi', \gamma \rangle = \langle \xi', \xi \rangle = 0 ,$$

mostrando que el producto $\langle \phi_s, \phi_t \rangle = 0$.

Por otra parte:

$$\langle \phi_t, \phi_t \rangle = [\dot{F}(t)]^2 \langle \gamma, \gamma \rangle + [\dot{G}(t)]^2 \langle \xi, \xi \rangle ,$$

ya que $\langle \gamma, \xi \rangle = 0$. Entonces, si $K = \frac{1}{r^2}$:

$$\begin{aligned}\langle \phi_t, \phi_t \rangle &= \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{r}\right) \langle \gamma, \gamma \rangle + \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \langle \xi, \xi \rangle \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) = 1 ,\end{aligned}$$

ya que $\langle \gamma, \gamma \rangle = r^2$ y $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ por la causalidad de M . De manera similar, si $K = -\frac{1}{r^2}$:

$$\begin{aligned}\langle \phi_t, \phi_t \rangle &= \frac{1}{r^2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{t}{r}\right) \langle \gamma, \gamma \rangle + \cosh^2\left(\frac{t}{r}\right) \langle \xi, \xi \rangle \\ &= -\operatorname{senh}^2\left(\frac{t}{r}\right) + \cosh^2\left(\frac{t}{r}\right) = 1 ,\end{aligned}$$

por la causalidad de M y porque $\langle \gamma, \gamma \rangle = -r^2$.

Por lo tanto $\langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1$ en ambos casos y, representando la métrica g de Σ_γ en el marco coordenado $\{\phi_s, \phi_s\}$, se obtiene finalmente que:

$$\det g = \langle \phi_s, \phi_s \rangle .$$

La equivalencia propuesta se demuestra fácilmente a partir de la pasada ecuación de manera similar a como se hizo en el Lema 3.8. \square

El siguiente teorema también es un teorema de Bonnet tipo luz en el mismo sentido que el Teorema 3.10 lo es.

Teorema de Bonnet tipo luz 3.14. Sea M una superficie en el espacio modelo $N_1^3(K)$ y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) γ es una geodésica tipo luz del ambiente.
- (b) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .
- (c) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Demostración. La demostración abarcará los casos en que $K \neq 0$ ya que el caso plano se ha tratado en el Teorema 3.10.

Así, empecemos por suponer que γ es una geodésica tipo luz del ambiente. Entonces se cumple que $\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0$ y, usando las ecuaciones de Frenet (3.1) de γ con el marco adaptado a M , se sigue que $\kappa_1 = 0$. Por lo tanto, la Ecuación (3.2) asegura lo siguiente:

$$A_\xi \gamma' = \kappa_2 \gamma' ,$$

es decir, que γ es una línea de curvatura de M tipo luz. Con esto se ha demostrado que (a) implica (b).

Por otro lado, se sabe que $\langle \gamma', \xi \rangle = 0$. Entonces, usando las Ecuaciones (3.20) se sigue que:

$$\xi' = D_{\gamma'} \xi = \bar{\nabla}_{\gamma'} \xi = -A_\xi \gamma' .$$

Si ahora se asume que γ es una línea de curvatura tipo luz de M , se obtiene lo siguiente:

$$\xi' = -A_\xi \gamma' = -\lambda \gamma' ,$$

es decir, ξ' es un múltiplo de γ' . Por lo tanto:

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle \gamma', \xi' \rangle = \langle \xi', \xi' \rangle = 0 ,$$

y finalmente:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = [G(t)]^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2F(t)G(t) \langle \gamma', \xi' \rangle + [G(t)]^2 \langle \xi', \xi' \rangle = 0 ,$$

que por el Lema 3.13 implica que Σ_γ es una superficie degenerada. Esto demuestra que (b) implica (c).

Por último, si Σ_γ es una superficie degenerada del ambiente se sigue que $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$ en toda la superficie Σ_γ . Esto es cierto particularmente en $t = 0$, donde las funciones F y G adquieren los siguientes valores:

$$F(0) = 1 \quad ; \quad G(0) = 0 .$$

Esto sucede en todos los casos donde $K \neq 0$. Entonces:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 ,$$

en los puntos $\phi(s, 0)$ de Σ_γ , implicando que γ es una curva tipo luz de $N_1^3(K)$ contenida en M . El producto $\langle \phi_s, \phi_s \rangle$ se puede expresar ahora de la siguiente manera:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = G(t) [F(t)\langle \gamma', \xi' \rangle + G(t)\langle \xi', \xi' \rangle] = 0 .$$

Tomando en cuenta las diferentes expresiones que la función G puede tomar según sea el espacio ambiente en el que se encuentre M , se sigue que:

$$F(t)\langle \gamma', \xi' \rangle + G(t)\langle \xi', \xi' \rangle = 0 \quad ; \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) ,$$

por continuidad. Por lo tanto:

$$\langle \gamma', \xi' \rangle = 0 ,$$

en $t = 0$ y usando las ecuaciones de Frenet:

$$\xi' = D_{\gamma'} \xi = \bar{\nabla}_{\gamma'} \xi = -\kappa_2 \gamma' - \kappa_1 \eta ,$$

se obtiene finalmente que:

$$\langle \gamma', \xi' \rangle = -\kappa_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0 ,$$

demostrando que (c) implica (a). □

Como se está asumiendo que todas las curvas tipo luz están bien parametrizadas, cualquier recta tipo luz en \mathbb{R}_1^3 es una geodésica del espacio de Minkowski. Con esto debe quedar claro que el Teorema 3.14 es una generalización del Teorema 3.10.

De manera similar a como se hizo en el caso de un espacio ambiente plano, el Teorema 3.14 permite establecer una caracterización de las superficies umbilicales de los espacios modelo $N_1^3(K)$.

Corolario 3.15. Sea M una superficie temporal de $N_1^3(K)$. Por cada punto p de M pasan dos curvas γ_i tales que las superficies Σ_{γ_i} son tipo luz si y sólo si M es una superficie umbilical de $N_1^3(K)$.

Demostración. Dado que los enunciados del Teorema 3.14 tienen la misma información que los enunciados correspondientes en el Teorema 3.10, la demostración de este corolario es análoga a aquella del Corolario 3.11. □

Con esto se obtiene finalmente una caracterización geométrica de las superficies umbilicales en los espacios modelo lorentzianos.

A continuación se atisba un posible camino para llevar estas ideas a mayor dimensión.

Teorema 3.16. Sea M una hipersuperficie en el espacio modelo $N_1^{n+1}(K)$ y γ una curva en M . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) γ es una línea de curvatura tipo luz de M .

(b) Σ_γ es una superficie tipo luz.

Demostración. Como Σ_γ sigue siendo una superficie, los puntos $\phi(s, t)$ en la superficie se pueden describir por las mismas parametrizaciones que se usaron en los casos pasados. Entonces se sigue cumpliendo que la superficie Σ_γ es degenerada alrededor de γ si y sólo si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$.

Si γ es una línea de curvatura de la hipersuperficie M se cumple lo siguiente:

$$A_\xi \gamma' = \lambda \gamma' \Rightarrow \xi' = \bar{\nabla}_{\gamma'} \xi = -\lambda \gamma' ,$$

donde $\bar{\nabla}$ representa la conexión del espacio ambiente en cualquiera de los casos en que $K = 0$ ó $K \neq 0$. Además, γ es una curva tipo luz:

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle \gamma', \xi' \rangle = \langle \xi', \xi' \rangle = 0 .$$

Por lo tanto, $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$ en una vecindad de γ y la superficie Σ_γ será degenerada en consecuencia.

Si se empieza por suponer que la superficie normal Σ_γ es degenerada se puede asumir que $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$, particularmente sobre la curva γ . Entonces, en cualquier parametrización de Σ_γ se cumple lo siguiente:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle_\gamma = \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 ,$$

es decir, γ es una curva tipo luz contenida en la hipersuperficie M . Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \phi_s, \phi_s \rangle &= t [2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle] = 0 && ; \text{ Si } K = 0 , \\ \langle \phi_s, \phi_s \rangle &= G(t) [2F(t)\langle \gamma', \xi' \rangle + G(t)\langle \xi', \xi' \rangle] = 0 && ; \text{ Si } K \neq 0 . \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones implican que $\langle \gamma', \xi' \rangle = \langle \xi', \xi' \rangle = 0$ por continuidad. Por lo tanto, $\xi' = \lambda \gamma'$ que a su vez implica que γ es una línea de curvatura. \square

Los enunciados del Teorema 3.16 bastan para volver a dar con una caracterización de puntos umbilicales, que ahora será un poco diferente dado que se está tratando con hipersuperficies.

Corolario 3.17. Sea M una hipersuperficie temporal de $N_1^{n+1}(K)$. Entonces, por cada punto p de M pasan n curvas diferentes γ_i tales que las superficies Σ_{γ_i} son degeneradas si y sólo si M es umbilical.

Demostración. Sea p un punto de M por el cual pasan n curvas diferentes γ_i tales que cada una de las superficies Σ_{γ_i} son degeneradas, entonces el Teorema 3.16 asegura que cada una de las curvas γ_i cumple lo siguiente:

$$A_\xi \gamma'_i = \lambda_i \gamma'_i \quad ; \quad \langle \gamma'_i, \gamma'_i \rangle = 0 .$$

Por lo tanto, dado que el conjunto $\{\gamma'_i\}_p$ es una base de $T_p M$, el operador de forma A_ξ de M tiene una representación diagonal en p . Como se puede ver en [10, p. 261], si A_ξ tiene una representación diagonal siempre existe una base ortonormal en la cual hacer una representación de este tipo. Entonces, dado que $\{\gamma'_i\}$ está compuesto por vectores tipo luz la representación de A_ξ en ambas bases debe ser un múltiplo de la identidad, es decir, p es un punto umbilical de M .

Si M es de antemano una hipersuperficie umbilical de $N_1^3(K)$, todas las direcciones posibles en M son direcciones principales. El Teorema 3.16 da el resto del resultado. □

Esto completa la caracterización de puntos umbilicales en subvariedades tipo tiempo de codimensión 1.

3.3. Superficies paralelas tipo tiempo

Regresando la dirección de esta tesis hacia las superficies en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , se puede observar del trabajo hecho hasta ahora que, si M es una superficie temporal, la métrica g de una superficie normal Σ_γ cumple lo siguiente:

$$\det g = \langle \phi_s, \phi_s \rangle ,$$

y como el marco coordenado $\{\phi_s, \phi_t\}$ siempre es ortogonal, el determinante de g determina la causalidad de Σ_γ alrededor de la curva γ .

Observación 3.18. Sea γ una curva regular en una superficie tipo tiempo M en \mathbb{R}_1^3 . Entonces:

- Si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle > 0$ en γ , Σ_γ es tipo espacio.
- Si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle < 0$ en γ , Σ_γ es tipo tiempo.
- Si $\langle \phi_s, \phi_s \rangle = 0$ alrededor de γ , Σ_γ es degenerada.

Como se puede observar, en los primeros dos enunciados basta con conocer la causalidad de ϕ_s sobre γ para determinar la causalidad de Σ_γ alrededor de de la curva γ . Sin embargo, en el tercer enunciado hace falta conocer la causalidad de ϕ_s en un abierto de Σ_γ para determinar la causalidad de ésta. Esto quiere decir que Σ_γ podría cambiar de causalidad alrededor de γ si la curva es tipo luz. Para abordar esta discusión de la manera adecuada es prudente hacer la siguiente definición.

Definición 3.19. Sea γ una curva contenida en una superficie M del espacio ambiente \mathbb{R}_1^3 . Se definen las *superficies normales* Σ_γ^+ y Σ_γ^- a lo largo de γ a partir de las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned}\Sigma_\gamma^+ & : \quad \phi^+(s, t) = \gamma(s) + t\xi(s) \quad ; \quad \text{para } t > 0 , \\ \Sigma_\gamma^- & : \quad \phi^-(s, t) = \gamma(s) + t\xi(s) \quad ; \quad \text{para } t < 0 .\end{aligned}$$

Las superficies Σ^\pm son conjuntos abiertos dentro de Σ_γ ya que las restricciones $t > 0$ y $t < 0$ son condiciones abiertas dentro del intervalo de definición de t para Σ_γ .

Proposición 3.20. Sea γ una curva tipo luz en una superficie M tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Si Σ_γ^+ ó Σ_γ^- es no degenerada se obtiene lo siguiente:

- (a) Si Σ_γ^+ es tipo tiempo entonces Σ_γ^- es tipo espacio.
- (b) Si Σ_γ^+ es tipo espacio entonces Σ_γ^- es tipo tiempo.

Demostración. Sea γ una curva tipo luz de M tal que la superficie normal Σ_γ^+ es no degenerada. El Lema 3.8 asegura que $\langle \phi_s, \phi_s \rangle \neq 0$ si $0 < t < \varepsilon$ para alguna $\varepsilon > 0$. Además, si la superficie normal Σ_γ^+ es temporal, se obtiene que:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = t [2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle] < 0 ,$$

implicando a su vez:

$$2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle < 0 ,$$

para $t \in (0, \varepsilon)$. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} 2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \gamma', \xi' \rangle \leq 0 .$$

Como $\xi' = -A_\xi \gamma'$, el producto $\langle \gamma', \xi' \rangle$ no puede ser cero ya que de serlo ξ' sería un múltiplo escalar de γ' y, por el Teorema 3.10, Σ_γ sería un plano degenerado del ambiente en una vecindad de γ . Así, $\langle \gamma', \xi' \rangle < 0$ y:

$$2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle < 0 \quad ; \quad \text{si } t \in (-\varepsilon, 0) \quad \text{para alguna } \varepsilon > 0 ,$$

por continuidad. Por lo tanto, para $-\varepsilon < t < 0$ se cumple:

$$\langle \phi_s, \phi_s \rangle = t [2\langle \gamma', \xi' \rangle + t\langle \xi', \xi' \rangle] > 0 ,$$

que a su vez implica que la superficie normal Σ_γ^- es tipo espacio, demostrando el primer enunciado de esta proposición. El segundo enunciado se demuestra de manera análoga con los cambios de signo adecuados. □

La Proposición 3.20 asegura que la causalidad de las superficies normales no puede variar de manera arbitraria. Así mismo, el siguiente corolario a la Proposición 3.20 nos habla de la rigidez de la condición de nulidad sobre las superficies normales.

Corolario 3.21. La superficie Σ_γ^+ es degenerada si y sólo si la superficie Σ_γ^- es degenerada.

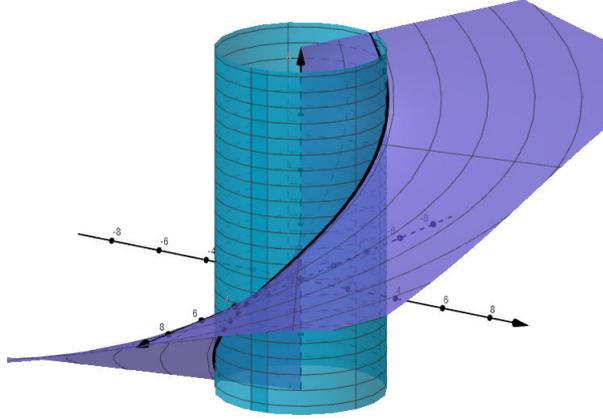


Figura 3.2: Cilindro circular con superficie normal sobre geodésica tipo luz. En este caso Σ_γ^+ es tipo espacio mientras que Σ_γ^- es tipo tiempo.

Los siguientes resultados son un esfuerzo de rescatar diversos resultados del capítulo 2 en este contexto donde γ es una curva nula y las superficies Σ_γ^+ y Σ_γ^- no son degeneradas. El objetivo es caracterizar de nuevo las superficies paralelas M de \mathbb{R}_1^3 sin restringir la causalidad de las curvas γ en M .

Lema 3.22. Sea γ una curva tipo luz de M tal que Σ_γ^+ es no degenerada. Entonces $H^+ = 0$ si y sólo si ϕ_{ss}^+ es tangente a Σ_γ^+ .

Demostración. Antes que nada cabe recordar que ϕ_{ss}^+ es la restricción de ϕ_{ss} a la superficie Σ_γ^+ y que H^+ es la curvatura media de Σ_γ^+ . Además, como Σ_γ^+ es una superficie no degenerada se cumple que $H^+ = 0$ si y sólo si $h^+(\phi_s, \phi_s) = 0$, donde h^+ es la segunda forma fundamental de Σ_γ^+ .

Entonces, si $H^+ = 0$ se sigue que $h^+(\phi_s, \phi_s) = 0$ y usando la fórmula de Gauss para Σ_γ^+ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\phi_{ss}^+ &= D_{\phi_s^+} \phi_s^+ \\ &= \nabla_{\phi_s^+}^+ \phi_s^+ + h^+(\phi_s^+, \phi_s^+) \\ &= \nabla_{\phi_s^+}^+ \phi_s^+ .\end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ_{ss}^+ es tangente a Σ_γ^+ .

Por otro lado, si ϕ_{ss}^+ es tangente a Σ_γ^+ , ϕ_{ss}^+ debe ser ortogonal a cualquier campo normal a dicha superficie. Entonces si $Y \neq 0$ es un campo ortogonal a Σ_γ^+ se cumple que:

$$\begin{aligned}\langle Y, \phi_{ss}^+ \rangle &= \langle Y, \nabla_{\phi_s^+}^+ \phi_s^+ + h^+(\phi_s^+, \phi_s^+) \rangle \\ &= \langle Y, h^+(\phi_s^+, \phi_s^+) \rangle = 0 .\end{aligned}$$

Como Σ_γ^+ no es degenerada, el vector Y no es tipo luz. Entonces, dado que Y y h^+ apuntan en la misma dirección, la ecuación $\langle Y, h^+(\phi_s^+, \phi_s^+) \rangle = 0$ implica que $h^+(\phi_s^+, \phi_s^+) = 0$. Por lo tanto, ϕ_{ss}^+ es tangente a Σ_γ^+ .

□

Si una curva tipo luz γ se encuentra contenida en una superficie tipo tiempo M de \mathbb{R}_1^3 y está bien parametrizada, ésta será una geodésica de M . Esto facilita el uso del marco de Frenet de γ ya que se encontrará adaptado a la superficie M . Entonces:

$$\begin{aligned}\gamma'' &= \kappa_1 \xi, \\ \eta' &= \kappa_2 \xi, \\ \xi' &= -\kappa_2 \gamma' - \kappa_1 \eta.\end{aligned}$$

Así, el marco coordenado $\{\phi_s, \phi_t\}$ de Σ_γ se puede reescribir en términos del marco de Frenet $\{\gamma', \eta, \xi\}$ de γ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\phi_s &= [1 - t\kappa_2] \gamma' - t\kappa_1 \eta, \\ \phi_t &= \xi.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Esto permite dar la siguiente expresión del campo normal Y siempre que Σ_γ^+ no sea degenerada:

$$Y(s, t) = [1 - t\kappa_2] \gamma' + t\kappa_1 \eta.\tag{3.22}$$

Hasta aquí no es claro que la expresión que aparece en la Ecuación (3.22) para Y sea diferente de cero pero basta con observar la Ecuación (3.21) para caer en cuenta que $Y = 0$ si y sólo si $\phi_s^+ = 0$, es decir, siempre que Σ_γ^+ esté bien definida la expresión dada para Y será diferente de cero.

El siguiente lema refuerza aún más la noción de que la dinámica entre las superficies Σ_γ^+ y Σ_γ^- es mucho más rígida de lo se podría suponer en un principio.

Lema 3.23. Sea γ una curva tipo luz de M tal que Σ_γ^+ es no degenerada. Entonces $H^+ = 0$ si y sólo si $H^- = 0$.

Demostración. Para empezar, la Proposición 3.20 asegura que si Σ_γ^+ no es degenerada Σ_γ^- tampoco lo será. Así, la curvatura media H^- de Σ_γ^- está bien definida.

Por otro lado, la Ecuación (3.21) permite describir al marco coordenado de Σ_γ en términos del marco de Frenet de γ adaptado a M , obteniendo así la siguiente expresión para el campo ϕ_{ss} sobre Σ_γ :

$$\phi_{ss} = t\kappa_2' \gamma' - t\kappa_1' \eta + [\kappa_1 - 2t\kappa_1\kappa_2] \xi.\tag{3.23}$$

Entonces, usando la Ecuación (3.22):

$$\begin{aligned}\langle Y, \phi_{ss} \rangle &= [1 - t\kappa_2] \langle \gamma', \phi_{ss} \rangle + t\kappa_1 \langle \eta, \phi_{ss} \rangle \\ &= -t\kappa_1' [1 - t\kappa_2] + t\kappa_1 [t\kappa_2'] \\ &= -t\kappa_1' + t^2 \kappa_1' \kappa_2 + t^2 \kappa_1 \kappa_2' \\ &= -\kappa_1' t + [\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'] t^2,\end{aligned}\tag{3.24}$$

obteniendo así una ecuación que relaciona la curvatura media de Σ_γ^+ y Σ_γ^- con la geometría de γ .

Entonces, si se empieza por suponer que $H^+ = 0$, del Lema 3.22 se sigue que:

$$\begin{aligned}\langle Y, \phi_{ss}^+ \rangle &= \langle Y, \phi_{ss} \rangle = 0 & ; & \text{ para } t > 0, \\ &= -\kappa_1' t + [\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'] t^2 = 0 & ; & \text{ para } t > 0,\end{aligned}$$

que a su vez implica las siguientes relaciones:

$$\kappa'_1 = 0 \quad ; \quad [\kappa'_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa'_2] = 0 . \quad (3.25)$$

Como estos valores no dependen de t , de la Ecuación (3.24) se sigue que el producto $\langle Y, \phi_{ss} \rangle = 0$ en Σ_γ . Por lo tanto $\langle Y, \phi_{ss}^- \rangle = 0$ y $H^- = 0$.

Si por otro lado se asume de inicio que Σ_γ^- es máxima o mínima, el resto de la demostración sigue un camino análogo. La clave está en que la Ecuación (3.24) es válida a ambos lados de γ . □

Hasta ahora, la Proposición 3.20 ha enseñado que Σ_γ^+ no es degenerada si y sólo si Σ_γ^- tampoco lo es, pero el pasado Lema 3.23 permite ver aún más lejos.

Corolario 3.24. Sea γ una curva tipo luz en una superficie tipo tiempo M de \mathbb{R}_1^3 . Entonces, siempre que las superficies Σ_γ^+ y Σ_γ^- sean no degeneradas se cumple lo siguiente:

- La superficie Σ_γ^+ es máxima si y sólo si Σ_γ^- es mínima.
- La superficie Σ_γ^+ es mínima si y sólo si Σ_γ^- es máxima.

Esto permite abreviar las hipótesis referentes a la curvatura media de las superficies Σ_γ^+ y Σ_γ^- . Con esto se busca simplificar este tipo de hipótesis al expresarlas solamente en términos de la superficie normal Σ_γ^+ . El siguiente lema es una muestra de esta simplificación.

Proposición 3.25. Sea γ una curva tipo luz de M tal que Σ_γ^+ es no degenerada. Entonces $H^+ = 0$ si y sólo si γ tiene curvaturas constantes tal que $\kappa_1 \neq 0$.

Demostración. En la demostración del Lema 3.23 se obtuvo que, en caso de cumplirse la hipótesis $H^+ = 0$ sobre Σ_γ^+ , se cumplen las Ecuaciones (3.25). Esto quiere decir que $\kappa'_1 = 0$ y que las Ecuaciones (3.25) se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\kappa'_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_1 \kappa'_2 = 0 . \quad (3.26)$$

Las Ecuaciones (3.26) aseguran que la primera curvatura de γ es constante, lo cual lleva a contemplar dos posibles casos.

Si $\kappa_1 = 0$, γ es una recta tipo luz de \mathbb{R}_1^3 y el Teorema de Bonnet 3.10 asegura que Σ_γ es una superficie degenerada del ambiente, saliendo del caso que delimitan las hipótesis de la proposición. Por lo tanto, $\kappa_1 \neq 0$ y las Ecuaciones (3.26) aseguran a su vez que κ_2 es constante.

De regreso, si las curvaturas κ_i de γ son constantes y $\kappa_1 \neq 0$, la expresión del campo ϕ_{ss} que se muestra en la Ecuación (3.23) se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= [\kappa_1 - 2t\kappa_1\kappa_2] \xi , \\ \phi_{ss} &= [\kappa_1 - 2t\kappa_1\kappa_2] \phi_t . \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ_{ss} es tangente a Σ_γ para $t > 0$, implicando que $H^+ = 0$. □

Como se ha dicho antes, la Proposición 3.25 es válida para la superficies Σ_γ^- con su respectiva hipótesis sobre su curvatura media.

3.4. Curvas tipo luz y superficies paralelas

Ahora es posible enunciar resultados de caracterización similares a los del capítulo anterior, con la restricción de que las superficies sean tipo tiempo y tomando en cuenta curvas degeneradas.

Lema 3.26. Sea γ una geodésica tipo luz de M . Si γ tiene curvaturas constantes entonces:

$$(\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') = 0, \quad (3.27)$$

a lo largo de γ .

Demostración. Que γ sea una geodésica tipo luz de M implica que su marco de Frenet adaptado $\{\gamma', \eta, \xi\}$ cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \kappa_1 \xi, \\ \eta' &= \kappa_2 \xi, \\ \xi' &= -\kappa_2 \gamma' - \kappa_1 \eta, \end{aligned}$$

que en términos del operador de forma de M se expresan de la siguiente manera:

$$A_\xi \gamma' = \kappa_2 \gamma' + \kappa_1 \eta.$$

Entonces, si las curvaturas de γ son constantes a lo largo de la misma se sigue que:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'} A_\xi)(\gamma') &= \nabla_{\gamma'} A_\xi \gamma' - A_\xi(\nabla_{\gamma'} \gamma') \\ &= \nabla_{\gamma'} (\kappa_2 \gamma' + \kappa_1 \eta) \\ &= \kappa_2 \nabla_{\gamma'} \gamma' + \kappa_1 \nabla_{\gamma'} \eta \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que γ es una geodésica de la superficie y $D_{\gamma'} \eta$ está en la dirección del campo ξ . □

Esto deja claro cuál es el camino que se ha decidido recorrer en las siguientes páginas.

Corolario 3.27. Sean γ_1 y γ_2 dos geodésicas tipo luz diferentes en M que se cruzan en un punto p y tienen curvaturas constantes. Entonces se cumple que $\nabla A_\xi|_p = 0$.

Demostración. Que dos geodésicas tipo luz γ_1 y γ_2 de M sean distintas entre ellas en p quiere decir que el conjunto $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ es una base de $T_p M$. Así, para mostrar que A_ξ es paralelo en p basta con calcular el valor de ∇A_ξ en los elementos de la base $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ en $T_p M$.

Del Lema 3.26 se sigue que:

$$(\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_1) = 0 \quad ; \quad (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_2) = 0,$$

a lo largo de las curvas γ_1 y γ_2 , respectivamente. En particular, ambas igualdades se cumplen en el punto de intersección p .

Como el operador $\nabla_X A_\xi$ es autoadjunto para cualquier campo vectorial X sobre M , se obtiene lo siguiente en $T_p M$:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2), \gamma'_1 \rangle &= \langle \gamma'_2, (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_1) \rangle \\ &= 0, \\ \langle (\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2), \gamma'_2 \rangle &= \langle (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_1), \gamma'_2 \rangle \\ &= \langle \gamma'_1, (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_2) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las relaciones anteriores junto con la ecuación de Codazzi implican que:

$$(\nabla_{\gamma'_1} A_\xi)(\gamma'_2) = 0 = (\nabla_{\gamma'_2} A_\xi)(\gamma'_1),$$

en $T_p M$. Esto muestra que $\nabla A_\xi|_p = 0$, es decir, que el operador de forma de M es paralelo en p . □

Hasta aquí es evidente hacia donde se están dirigiendo los esfuerzos de esta tesis. Así, para poder enunciar un resultado similar al Teorema 2.25 usando curvas tipo luz es necesario apuntalar los siguientes resultados sobre geodésicas tipo luz en superficies paralelas del espacio de Minkowski.

Ejemplo 3.28. Sea M una superficie paralela tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Entonces, cualquier geodésica tipo luz de M tiene curvaturas constantes

- Espacio de De Sitter

De la Definición 1.50 se sigue que el operador de forma del espacio de De Sitter $S_1^2(r)$, al ser una superficie cuadrática de \mathbb{R}_1^3 , es un múltiplo de la identidad:

$$A_\xi = -\frac{1}{r}I.$$

Por lo tanto, si γ es una geodésica tipo luz de $S_1^2(r)$ y ξ es el campo normal unitario de la superficie, se cumple lo siguiente:

$$A_\xi \gamma' = -\frac{1}{r} \gamma' = \kappa_2 \gamma',$$

que, en concordancia con el Teorema 3.10, implica que los valores de las curvaturas de γ son:

$$\kappa_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r}.$$

El valor de κ_1 hace recordar que al ser γ una línea de curvatura de $S_1^2(r)$ también es una línea recta del ambiente.

- Cilindro circular plano tipo tiempo

Las geodésicas tipo luz del cilindro circular $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$ siguen estando descritas por la parametrización que se muestra en la Ecuación (2.22), aunque la causalidad de las geodésicas añade la siguiente restricción:

$$\lambda_2 = \pm \frac{\lambda_1}{r}, \tag{3.28}$$

para cualquier $\lambda_1 \neq 0$. Así, tomando el valor $\lambda_1 = 1$ para facilitar los cálculos, se sigue de la parametrización de $\mathbb{R}_1 \times S^1(r)$ que aparece en la Definición 1.51 que toda geodésica tipo luz γ del cilindro cumple lo siguiente:

$$\gamma' = \psi_u \pm \frac{1}{r}\psi_v \quad ; \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 ,$$

de tal manera que el campo transversal nulo η a la geodésica γ esta descrito en términos del marco coordenado como sigue:

$$\eta = -\frac{1}{2}\psi_u \pm \frac{1}{2r}\psi_v ,$$

siempre que los signos en el coeficiente que acompaña al campo ψ_v coincidan, esto para evitar que γ' y η sean múltiplos escalares.

Por otro lado, se sabe que el campo normal unitario ξ del cilindro se describe en términos de la parametrización como se muestra a continuación:

$$\xi = \frac{1}{r}\psi_{vv} .$$

Entonces, sin importar que signo se escoja en la Ecuación (3.28) se obtiene la siguiente expresión para la derivada de ξ en la dirección de la geodésica en cuestión:

$$\xi'(s) = \pm \frac{1}{r^2}\psi_v = -\frac{1}{2r}\gamma' - \frac{1}{r}\eta .$$

Por lo tanto, las curvaturas de γ obtienen los siguientes valores constantes:

$$\kappa_1 = \frac{1}{2r} \quad ; \quad \kappa_2 = \frac{1}{r} ,$$

en el caso particular que $\lambda_1 = 1$. Basta con observar el proceso que se siguió hasta aquí para caer en cuenta que si se toma un valor arbitrario para λ_1 las curvaturas de γ seguirán siendo constantes.

- Cilindro hiperbólico plano tipo tiempo

De manera análoga al caso del cilindro circular, las geodésicas tipo luz γ del cilindro hiperbólico $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ se describen por la parametrización mostrada en la Ecuación (2.25) al agregar la siguiente restricción:

$$\lambda_2 = \pm r\lambda_1 .$$

Entonces, si se establece que $\lambda_1 = 1$, en términos de la parametrización de $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ que aparece en la Definición 1.52 se sigue que:

$$\gamma' = \psi_u \pm r\psi_v ,$$

de tal forma que el campo transversal nulo η a la geodésica γ se expresa como:

$$\eta = -\frac{1}{2r^2}\psi_u \pm \frac{1}{2r}\psi_v ,$$

siempre que los coeficientes que acompañan al campo ψ_v en las expresiones de γ' y η tengan el mismo signo, evitando así que estos últimos sean múltiplos escalares.

El campo normal unitario ξ del cilindro $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ se encuentra descrito en términos de la parametrización de la siguiente manera:

$$\xi = \frac{1}{r}\psi_{uu} ,$$

descripción que lleva de inmediato a la siguiente expresión para la variación de ξ en la dirección de cualquier geodésica tipo luz del cilindro, salvo un factor constante:

$$\xi' = \frac{1}{r}\psi_u = \frac{1}{2r}\gamma' - r\eta .$$

Por lo tanto, los valores para las curvaturas de una geodésica tipo luz en el caso que $\lambda_1 = 1$ son los siguientes:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{2r} \quad ; \quad \kappa_2 = r ,$$

mostrando que las geodésicas tipo luz del cilindro hiperbólico $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ tienen curvaturas constantes. En caso que λ_1 tenga un valor constante arbitrario, el valor de las curvaturas de γ diferirá del encontrado por un factor constante.

- Superficie mínima y plana de Chen-Van der Veken

Las geodésicas tipo luz γ de la superficie de Chen-Van der Veken M_0 se encuentran descritas por la parametrización que aparece en la Ecuación (2.28), añadiendo la siguiente restricción:

$$\lambda_2 = \pm\lambda_1 .$$

Así, eligiendo una vez más el valor $\lambda_1 = 1$ para facilitar los cálculos, el campo tangente a las geodésicas tipo luz de M_0 se describe como:

$$\gamma' = \psi_u \pm \psi_v ,$$

en términos de la parametrización (1.37) de M_0 . Esto hace que para cada geodésica tipo luz se obtenga la siguiente expresión para el campo transversal nulo:

$$\eta = -\frac{1}{2}\psi_u \pm \frac{1}{2}\psi_v ,$$

siempre que los coeficientes del campo ψ_v tengan el mismo signo en las expresiones de γ' y η , para evitar así que estos campos sean múltiplos escalares entre sí.

Además, la expresión del campo normal unitario ξ de M_0 en términos de la parametrización es:

$$\xi = \psi_{uu} ,$$

que a su vez implica que la derivada de ξ en la dirección de la geodésica tipo luz que se escoja se expresa de la siguiente manera:

$$\xi' = \psi_u + \psi_v \pm (-\psi_u - \psi_v) .$$

Por lo tanto, en caso que $\lambda_2 = 1$ se sigue que:

$$\xi' = 0 ,$$

implicando que las curvaturas de γ adquieren los siguientes valores constantes:

$$\kappa_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_2 = 0 .$$

Mientras tanto, en el caso que $\lambda_2 = -1$ se sigue que:

$$\xi' = 2(\psi_u + \psi_v) = -4\eta ,$$

implicando a su vez que las curvaturas de γ adquieren los siguientes valores constantes:

$$\kappa_1 = 4 \quad ; \quad \kappa_2 = 0 .$$

Considerando la geometría de las geodésicas tipo luz en las superficies paralelas tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 , se está en posición de enunciar el siguiente teorema de caracterización para superficies paralelas.

Teorema 3.29. Sea M una superficie tipo tiempo de \mathbb{R}_1^3 . Entonces por cada punto p de M pasan dos geodésicas tipo luz de M con curvaturas constantes si y sólo si M es paralela.

Demostración. Si por cada punto p de una superficie temporal M pasan dos geodésicas tipo luz con curvaturas constantes, el Corolario 3.27 asegura que en cada punto p el operador de forma de M es paralelo, es decir, se cumple que $\nabla A_\xi|_p = 0$. Por lo tanto:

$$\nabla A_\xi = 0 ,$$

en todo M , o dicho de otra manera, la superficie temporal M es paralela.

Por otro lado, en el Ejemplo 3.28 se puede notar que todas las superficies temporales que aparecen en la clasificación a cargo de Bang-Yen Chen y Joeri Van der Veken, en el Teorema 1.54, cumplen que las curvaturas de todas sus geodésicas tipo luz son constantes. Por lo tanto, como en todo punto p de una superficie temporal M pasan dos geodésicas tipo luz diferentes, se llega al resultado buscado. □

La relación entre una superficie M y sus superficies normales Σ_γ a lo largo de una curva γ contenida en M ha sido el tema central de esta tesis. En este capítulo se ha permitido que la causalidad de dicha curva γ sea nula y esto ha dejado ver que las posibles formas en que estos objetos se pueden relacionar, aunque nutridas, son bastante rígidas. La dinámica que se ha mostrado en este caso abre una ventana a un mundo que sin duda se seguirá explorando. Una invitación a regresar.

Conclusión

Sin mayor problema se puede afirmar que el viaje no acaba aquí. Aún falta llevar los resultados del capítulo 2 a espacios modelo lorentzianos, trabajo que discretamente ya se empezó a hacer en el capítulo 3 pero que de momento tomó otro rumbo. Además, los esfuerzos vistos al final de esta tesis por traer de vuelta los resultados del capítulo 2 con la novedad de las curvas nulas pueden llegar aún más lejos. Así, no es descabellado pensar en una versión del Teorema 2.37, teorema principal de este trabajo, que no requiera de alguna restricción sobre la causalidad las tres curvas en la hipótesis principal.

Por otro lado, si bien se discutió el caso de hipersuperficies en espacios modelos lorentzianos de dimensión n en el capítulo 3, no se llegó muy lejos ni se ahondó más en las nuevas posibilidades que se abren al aumentar la dimensión del espacio ambiente y mantener la condición de codimensión 1. Dicho de manera más puntual, no se respondió el por qué el Teorema de Bonnet tipo luz 3.14 no se cumple de la misma manera al aumentar la dimensión; es más, tampoco se respondió por qué el Teorema de Bonnet tipo luz 3.10 en \mathbb{R}_1^3 tiene más equivalencias que el Teorema de Bonnet tipo luz 3.14 en espacios modelos $N_1^3(K)$ con $K \neq 0$. Claramente hay mucho espacio para seguir trabajando y pulir los resultados aquí trabajados.

Por último, una vez que se decidió en el capítulo 3 quitar la condición de nulidad sobre la superficie normal Σ_γ , se estableció la nueva hipótesis de que las componentes Σ_γ^+ y Σ_γ^- de la superficie normal fueran no degeneradas. Aunque esta es una hipótesis razonable por donde se le vea, aún se puede debilitar esta última condición.

Los caminos de la geometría están lejos de agotarse y esta tesis es un testigo claro de ello.

En algún punto de largo camino que el doctorado representó para mí, y esto último lo escribo a título personal, Gabriel me compartió la siguiente imagen: mientras que el trabajo de algunos matemáticos es equivalente al diseño de ciudades enteras con sus calles e infraestructura, otros matemáticos se dedican al diseño y construcción de todas las estructuras que en ellas habitan para que así, los restantes miembros de este gremio se puedan dedicar a dibujar mapas del territorio explorado y de las construcciones que los demás han legado; nosotros somos parte estos últimos, con la particularidad de que nuestro trabajo es el de pintar casas y estructuras, nos hacemos cargo de darles color y vida al tiempo que exploramos cada mínimo detalle de las obras construidas por otros. El trabajo que aquí presento es mi personal esfuerzo por dotar de color y vida a una parte muy pequeña de la geometría que tanto tiempo he explorado, visión

que fue tomando forma gracias a las lecturas y comentarios que Gabriel Ruiz, Didier Solís y Oscar Palmas hicieron sobre mi trabajo.

Aprovechando este desliz emocional también quiero agradecer a mis sinodales Matías Navarro, Josué Meléndez y Adriana Ortiz por las atenciones que siempre tuvieron conmigo, particularmente le agradezco a Adriana Ortiz sus muchos comentarios sobre el texto preliminar, comentarios que enriquecieron el resultado final que aquí se muestra.

Bibliografía

- [1] CHEN, B.-Y., AND VAN DER VEKEN, J. Complete classification of parallel surfaces in 4-dimensional Lorentzian space forms. *Tohoku Math. J. (2)* 61, 1 (2009), 1–40.
- [2] CLELLAND, J. N. Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$. *Asian J. Math.* 16, 2 (2012), 189–208.
- [3] DUGGAL, K. L., AND SAHIN, B. *Differential geometry of lightlike submanifolds*. Frontiers in mathematics. Birkhäuser, 2010.
- [4] GRAVES, L. K. Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), 367–392.
- [5] HERNÁNDEZ-LAMONEDA, L., AND RUIZ-HERNÁNDEZ, G. A characterization of isoparametric surfaces in space forms via minimal surfaces. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 49, 2 (2018), 447–462.
- [6] KOBAYASHI, O. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 . *Tokyo Journal of Mathematics* 6 (1983).
- [7] LÓPEZ, R., AND RUIZ-HERNÁNDEZ, G. A characterization of isoparametric surfaces in \mathbb{R}^3 via normal surfaces. *Results Math.* 67, 1-2 (2015), 87–94.
- [8] MELÉNDEZ, J., AND HERNÁNDEZ, M. Geometric properties of normal submanifolds. *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.* 26, 3 (2020), 1273–1288.
- [9] MELÉNDEZ, J., AND RODRÍGUEZ-ROMERO, E. Some geometric properties of normal and tangent submanifolds. *Differ. Geom. Appl.* 91 (2023), 16. Id/No 102063.
- [10] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry : with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
- [11] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*, Third ed., vol. II. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1999.
- [12] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*, Third ed., vol. III. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1999.

- [13] VAN DE WOESTIJNE, I. Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. In *Geometry and Topology of Submanifolds II* (1990), Boyom, M, World Scientific Publishing; Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, pp. 344–369.