



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

H-NÚCLEOS EN TORNEOS BIPARTITOS
H-COLOREADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

EDGAR JONATHAN MARTÍNEZ VÁZQUEZ

TUTOR

DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y mis hermanos

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Isabel y Gabriel, por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mis estudios y por todo su sacrificio. A mis hermanos, Brayan, que ha sido un gran ejemplo a seguir y a César, que me ve como un ejemplo a seguir, e incluso dice querer ser matemático de grande, como yo.

Agradezco profundamente a mi madre académica, la Dra. Rocío Sánchez López, por haber sembrado en mí un gran gusto por la Teoría de Gráficas, por su guía en la realización de esta tesis, y por su apoyo no solo en la vida académica.

También agradezco la beca otorgada bajo el proyecto PAPIIT IN100524 en el tiempo en que realicé esta tesis. Gracias al apoyo económico pude no solo terminar sin contratiempos y mejorar mi rendimiento en la realización de este trabajo, sino que también conseguimos junto con mi asesora resultados originales de los cuales haremos un artículo.

Finalmente quiero agradecer a mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo y por las observaciones que me hicieron para mejorar la redacción del mismo.

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares	7
1.0.1. Definiciones básicas de digráficas	7
1.0.2. Coloraciones	18
2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bi- partitos m -coloreados	31
3. H -núcleos en torneos bipartitos H -coloreados	66
Conclusiones	96
Bibliografía	100

Introducción

Sea D una digráfica. Un subconjunto N de $V(D)$ es un *núcleo* si $F(D[N]) = \emptyset$ y si para cualquier vértice u en $V(D) - N$ existe v en N tal que $(u, v) \in F(D)$. El concepto de núcleo tiene su origen en la Teoría de Juegos y fue introducido por von Neumann y Oskar Morgenstern en [10], sin embargo, originalmente recibió el nombre de *solución*. Posteriormente, Berge notó que este concepto podía ser aplicado no solo a la Teoría de Juegos, si no también a otros campos de la matemática. Así, con una pequeña redefinición de su parte, Berge definió lo que es el núcleo de una digráfica.

Dentro de la Teoría de Digráficas, la teoría de núcleos resulta de gran importancia debido a sus diversas aplicaciones en áreas afines, como lo son: la Teoría de Juegos [10], Teoría de las Decisiones [1], Lógica [9], por nombrar algunas.

En [2] Chvátal demostró que el problema de determinar cuándo una digráfica tiene núcleo es un problema *NP-completo*. Es por esta razón que varios autores han buscado condiciones suficientes para garantizar la existencia de al menos un núcleo. Entre los pioneros de esta línea de investigación se encuentran von Neumann, Morgenstern, Richardson, Berge, Köning, Duchet, Meyniel, Galeana-Sánchez, Jacob, entre otros.

Los primeros resultados que exhibieron condiciones suficientes para la existencia de al menos un núcleo en una digráfica principalmente exhiben condiciones sobre los ciclos dirigidos de dicha digráfica. Tal es el caso de Duchet [4], quien demostró que si una digráfica D cumple con que todos sus ciclos dirigidos tienen al menos

una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo. Este resultado será esencial para el desarrollo de esta tesis.

Existen varias generalizaciones del concepto de núcleo y una de ellas se debe a Hortensia Galeana Sánchez, quien introdujo en [5] el concepto de *núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas* en digráficas con sus aristas coloreadas. Dada una digráfica m -coloreada, decimos que un subconjunto N de $V(D)$ es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cualquier par de vértices u y v de N no existe una trayectoria dirigida monocromática entre u y v , y además para todo x en $V(D) - N$ existe una trayectoria dirigida monocromática de x hacia algún elemento de N .

Una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, y por lo tanto del concepto de núcleo, fue introducido por Hortensia Galeana Sánchez y Prieta Delgado Escalante en [3]. Dada una digráfica posiblemente con lazos H y una digráfica D , decimos que D es H -coloreada si a las flechas de D les asignamos mediante una función un vértice de H . Un subconjunto N de $V(D)$ es un H -núcleo si para cualquier par de vértices u y v de N no existe una H -trayectoria dirigida entre ellos, y además para todo x en $V(D) - N$ existe una H -trayectoria dirigida de x hacia algún elemento de N . Cuando la digráfica H tiene un lazo en cada vértice, entonces un H -núcleo es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y cuando H es una digráfica vacía, un H -núcleo es simplemente un núcleo.

En [6], Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro exhibieron resultados que garantizan la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas asimétricas m -coloreadas 3-cuasitransitivas, dando condiciones sobre los ciclos dirigidos de longitud 3 y 4 en D . Posteriormente, en [11], Carlos Cedillo Ponce y Rocío Sánchez López se encargaron de generalizar dichos resultados a través de la H -coloración. Sin embargo, ellos observaron que uno de los lemas

fundamentales que se utiliza para mostrar la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas no se podía extender al contexto de la H -coloración para torneos bipartitos con ciertas propiedades, lo que deja abierto el problema de encontrar condiciones suficientes para garantizar la existencia de H -núcleos en torneos bipartitos H -coloreados.

Esta tesis está motivada por el problema que quedó abierto en [11] y por lo tanto vamos a exhibir condiciones suficientes que garantizan la existencia de H -núcleos en torneos bipartitos H -coloreados. La estructura de este trabajo queda dividida como sigue:

El primer capítulo está dividido en dos secciones, en la primera veremos las definiciones básicas de la teoría de digráficas, junto con algunos resultados que son esenciales para el desarrollo de este trabajo. En la segunda sección introducimos la definición de digráfica m -coloreada, así como resultados de coloración que se necesitarán para demostrar el teorema que nos da condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas presentado en el capítulo 2.

En el segundo capítulo, Núcleos por Trayectorias dirigidas monocromáticas en Torneos Bipartitos m -coloreados, exponemos los resultados mostrados en [7], por Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy sobre núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos m -coloreados.

Finalmente, en el tercer capítulo, H -Núcleos en Torneos Bipartitos H -coloreados, explicamos el concepto de H -coloración junto con el de H -núcleo, para así culminar con la extensión a la H -coloración de los resultados expuestos en [7]. Cabe mencionar que todos los resultados obtenidos en este capítulo son originales.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dividido en dos secciones, en la primera vemos las definiciones de teoría de digráficas, así como algunos ejemplos y propiedades básicas que estaremos usando a lo largo de este trabajo. En la segunda sección vemos todo lo referente a teoría cromática que nos compete, al igual que resultados que nos servirán para demostrar teoremas más adelante.

1.0.1. Definiciones básicas de digráficas

Una **digráfica** D , consiste en un conjunto finito no vacío de objetos llamados **vértices**, denotado por $V(D)$, y un conjunto de pares ordenados de elementos de $V(D)$, llamados **flechas** o **arcos**, y que denotamos por $F(D)$. Decimos que dos vértices u y v son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos. Dada una flecha (u, v) en D , llamamos a u y v **extremos** de (u, v) y más específicamente decimos que u es un **vértice inicial** y que v es un **vértice final**, también decimos que la flecha va de u hacia v , que u es adyacente hacia v o bien, que v es adyacente desde el vértice u . Además, si $u = v$, entonces a la flecha la llamamos **lazo**. De aquí en adelante se asumirá que todas las digráficas no contienen lazos, a menos de que se especifique lo contrario. A una digráfica D que acepta más de una fle-

cha (en la misma dirección) entre dos vértices la llamamos **multidigráfica**. Toda digráfica D tiene una **representación geométrica** en el plano como sigue: a cada vértice v de la digráfica se le asigna un punto distinto en el plano y cada flecha, digamos (u, v) , es representada por una flecha que va del punto asociado u hacia el punto asociado v . Como ejemplo podemos considerar a la digráfica D con conjunto de vértices $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y conjunto de flechas $F(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_3), (v_3, v_1)\}$, cuya representación geométrica se encuentra en la Figura 1.1.

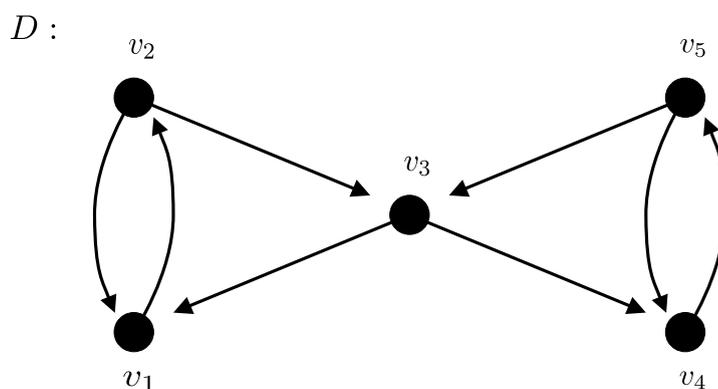


Figura 1.1: Representación geométrica de una digráfica.

En una digráfica D , definimos para un vértice u a los **vecinos exteriores** de u como el conjunto de los vértices de D que son adyacentes desde u , es decir, al conjunto $\{v \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$, y lo denotamos por $N^+(u)$. De manera análoga, definimos a los **vecinos interiores** de u como el conjunto de los vértices de D que son adyacentes hacia u , es decir, al conjunto $\{v \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$, y lo denotamos por $N^-(u)$. Dado un subconjunto S de los vértices de D , definimos al **conjunto de los invecinos** de S , denotado por $N^-(S)$, como el conjunto $\bigcup_{v \in S} N^-(v)$ y análogamente definimos al **conjunto de los exvecinos** de S , denotado por $N^+(S)$, como el conjunto $\bigcup_{v \in S} N^+(v)$. Definimos el **exgrado** de u como el número $|N^+(u)|$, y lo denotamos por $\delta^+(u)$, también definimos el **ingrado** de u como el número $|N^-(u)|$ y lo denotamos por $\delta^-(u)$. Si además la digráfica no tiene lazos,

entonces definimos el **grado** de u como el número $\delta^+(u) + \delta^-(u)$ y lo denotamos por $\delta(u)$. Si u es un vértice de D tal que $\delta^+(u) = 0$, entonces a u le llamamos **pozo** y si $\delta^-(u) = 0$, entonces a u le llamamos **fuelle**.

Dadas dos digráficas D_1 y D_2 , decimos que son **iguales** si $V(D_1) = V(D_2)$ y $F(D_1) = F(D_2)$. Por otra parte decimos que las digráficas son **isomorfas**, denotado por $D_1 \cong D_2$, si existe una función biyectiva $\varphi : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que $(u, v) \in F(D_1)$ si y solo si $(\varphi(u), \varphi(v)) \in F(D_2)$.

Decimos que una digráfica sin lazos D es **semicompleta** si para cualesquiera par de vértices u y v , sucede que $\{(u, v), (v, u)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, y si $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(D)$, entonces decimos que D es **completa**. El **complemento** de D , denotado por \overline{D} , es la digráfica con conjunto de vértices $V(\overline{D}) = V(D)$ y $(u, v) \in F(\overline{D})$ si y solo si $(u, v) \notin F(D)$. Decimos que H es una **subdigráfica** de D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$; si ocurre que $V(H) = V(D)$, entonces decimos que H es una **subdigráfica generadora** de D . Por otra parte, dado un subconjunto no vacío S de los vértices de D , definimos a la **subdigráfica inducida por S** , denotada por $D[S]$, como la subdigráfica con conjunto de vértices $V(D[S]) = S$ y con conjunto de flechas $F(D[S]) = \{(u, v) \in F(D) : \{u, v\} \subseteq S\}$. Dada una flecha (u, v) en D , decimos que es **simétrica** si (v, u) también es una flecha de D y decimos que (u, v) es **asimétrica** si (v, u) no es una flecha de D . Definimos a la **parte simétrica** de D , denotada por $Sim(D)$, como la subdigráfica generadora de D tal que sus flechas son las flechas simétricas de D . Análogamente definimos a la **parte asimétrica** de D , denotada por $Asim(D)$, como la subdigráfica generadora de D tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D . Decimos que una digráfica T es un **torneo** si T es semicompleta y asimétrica. En la Figura 1.2 tenemos la parte simétrica y asimétrica de la digráfica D de la Figura 1.1.

Sea D una digráfica y $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ una sucesión de vértices de D . Decimos

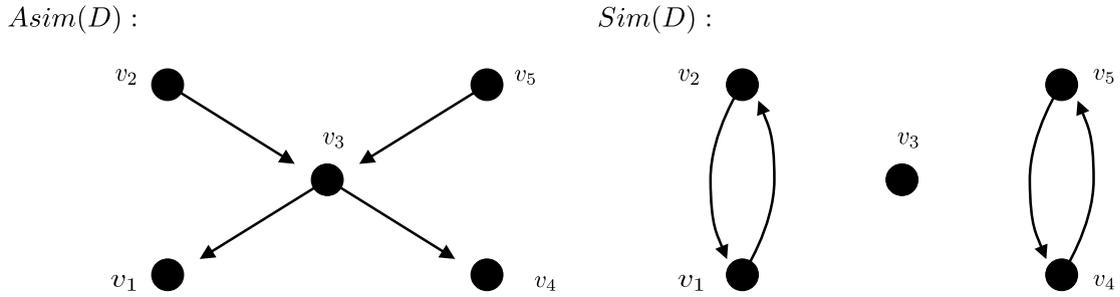


Figura 1.2: Parte simétrica y asimétrica de la digráfica D del ejemplo anterior.

que W es un **camino dirigido** si $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ para cada i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Si además todos los vértices de W son distintos, entonces al camino lo llamamos **trayectoria dirigida**. Denotamos por $\ell(W)$ al número k y lo llamamos **longitud** de W . Si tenemos $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, k\}$, con $i < j$, denotamos por (v_i, W, v_j) al subcamino de W , $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$. Dados dos caminos $W_1 = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ y $W_2 = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ tales que $u_r = v_1$, definimos la **concatenación** de W_1 con W_2 , y la denotamos como $W_1 \cup W_2$, como el camino $(u_1, u_2, \dots, u_r = v_1, v_2, \dots, v_s)$. Llamamos **camino cerrado dirigido** a un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice y si además dicho camino dirigido no repite vértices (salvo el primero y el último) y es de longitud al menos 2, entonces a éste lo llamamos **ciclo dirigido**. Si W es un camino (trayectoria) dirigida que empieza en u y termina en v , entonces decimos que W es un uv -camino (trayectoria) dirigido.

Teorema 1.0.1. *Sean D una digráfica y u y v vértices distintos de D . Todo uv -camino dirigido contiene una uv -trayectoria dirigida.*

Demostración. Sea $W = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = v)$ un uv -camino dirigido. Procedemos por inducción sobre k .

Paso base. Para $k = 1$, tenemos que W ya es una uv -trayectoria, pues $u \neq v$. Así W es la uv -trayectoria dirigida buscada.

Hipótesis inductiva. Supongamos que si W' es un uv -camino dirigido de longitud l ,

con $l < k$, entonces W' contiene una uv -trayectoria dirigida.

Paso inductivo. Sea $W = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = v)$ un uv -camino dirigido de longitud k . Tenemos los siguientes casos.

Caso 1: Todos los vértices en W son distintos.

En este caso W es una uv -trayectoria dirigida.

Caso 2: Existe un vértice en W que se repite, es decir, existen i y j en $\{0, 1, \dots, k\}$, con $i \neq j$, tales que $x_i = x_j$.

Como $i \neq j$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i < j$. Así, W se ve de la forma $(u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_k = v)$ y de aquí que obtenemos el uv -camino dirigido $W' = (u, W, x_i) \cup (x_j, W, v)$ el cual tiene una longitud menor a k (pues $i < j$), de donde por la hipótesis de inducción tenemos que W' contiene una uv -trayectoria dirigida. Pero como W' está contenido en W , entonces se sigue que W contiene una uv -trayectoria dirigida, que es lo que se quería demostrar. ■

Teorema 1.0.2. *Sea D una digráfica. Todo camino cerrado dirigido contiene un ciclo dirigido.*

Demostración. Sea $W = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ un camino cerrado dirigido en D . Procedemos por inducción sobre k .

Paso base: Para $k = 2$, tenemos que W es un ciclo dirigido de longitud 2.

Hipótesis inductiva: Supongamos que para cualquier camino cerrado dirigido W' de longitud l , con $2 < l < k$, se tiene que W' contiene un ciclo dirigido.

Paso inductivo: Sea $W = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ un camino cerrado dirigido de longitud k . Si para cualquier todos los vértices de W son distintos, salvo el primero y el último, entonces W es el ciclo dirigido buscado. Supongamos entonces que existen i y j en $\{2, 3, \dots, k\}$, con $i < j$, tales que $u_i = u_j$. Luego tenemos que $W' = (u_i, W, u_j)$ es un camino cerrado dirigido tal que $\ell(W') < k$, de donde por la hipótesis inductiva

tenemos que W' contiene un ciclo dirigido, pero como W' está contenido en W , entonces podemos concluir que W contiene un ciclo dirigido. ■

Teorema 1.0.3. *Sea D una digráfica. Todo camino cerrado dirigido de longitud impar en D contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_0)$ un camino cerrado dirigido en D de longitud impar. Procedemos por inducción sobre k .

Paso base. Para $k = 1$, tenemos que $W = (v_0, v_1, v_2, v_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 y éste es el ciclo buscado.

Hipótesis inductiva. Supongamos que si W' es un camino dirigido cerrado de longitud impar menor a $2k + 1$, entonces W' contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Paso inductivo. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud impar. Si W no repite vértices, salvo el primero y el último, entonces W es el ciclo dirigido de longitud impar buscado. Supongamos ahora que W repite un vértice distinto del primero y el último, es decir, existen i y j en $\{1, 2, \dots, 2k\}$, con $i \neq j$, tales que $v_i = v_j$. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $i < j$, tenemos que el camino W se ve de la forma $(v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{2k}, v_0)$. De aquí que obtenemos los caminos dirigidos cerrados $W_1 = (v_0, W, v_i) \cup (v_j, W, v_0)$ y $W_2 = (v_i, W, v_j)$. Observemos que como $\ell(W) = \ell(W_1) + \ell(W_2)$ y $\ell(W)$ es impar, entonces debemos tener que $\ell(W_1)$ es impar, o bien, que $\ell(W_2)$ lo es. Supongamos sin pérdida de generalidad que W_1 es de longitud impar, que además por construcción cumple con ser de longitud a lo más $2(k - 1) + 1$, que es menor a $2k + 1$. Así, por hipótesis de inducción tenemos que W_1 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, pero como W_1 está contenido en W , entonces se sigue que W contiene un ciclo dirigido de longitud impar. ■

Teorema 1.0.4. *Si D es una digráfica que cumple que para todo vértice v de D se tiene que $N^-(v) \neq \emptyset$, entonces D tiene al menos un ciclo dirigido.*

Demostración. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D . Como $N^-(v_0) \neq \emptyset$, tenemos que existe un vértice u de D tal que $(u, v_0) \in F(D)$. Resulta que $u = v_i$ para alguna i en $\{1, 2, \dots, k\}$, pues en caso contrario $(u, v_0) \cup (v_0, W, v_k)$ sería una trayectoria de longitud mayor a la de W contradiciendo nuestra elección de W . Así, $(u, v_0) \cup (v_0, W, v_i = u)$ es un ciclo dirigido en D . ■

Decimos que un subconjunto I de los vértices de una digráfica D es **independiente** si $F(D[I]) = \emptyset$, por otra parte decimos que un subconjunto A de $V(D)$ es **absorbente** si para cualquier u en $V(D) - A$, existe un vértice v en A tal que $(u, v) \in F(D)$. Si N es un subconjunto de los vértices de D que es independiente y absorbente, entonces le decimos **núcleo**. Decimos que D es una digráfica **núcleo-perfecta** si cada subdigráfica inducida H de D tiene núcleo.

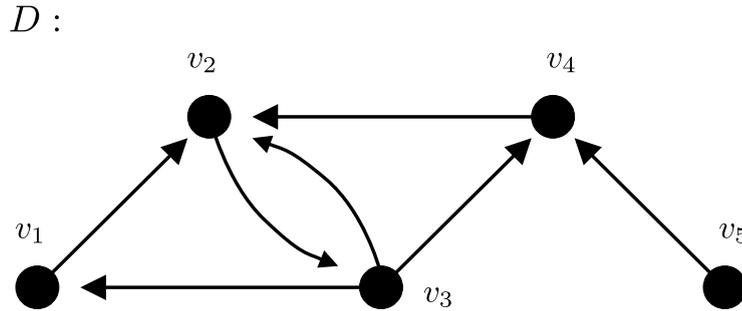


Figura 1.3: El conjunto $\{v_2, v_5\}$ es un núcleo de la digráfica D .

Teorema 1.0.5. *Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido de D contiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Consideremos la subdigráfica $Asim(D)$ de D y observe que en ésta no hay ciclos dirigidos, pues en caso contrario, como solo tenemos las flechas de D que son asimétricas, entonces esto implicaría que hay un ciclo dirigido en D que no tiene flechas simétricas, contradiciendo la hipótesis. Así, por el Teorema 1.0.4, tenemos que existe una fuente en $Asim(D)$. Procedemos por inducción sobre $|V(D)| = n$.

Paso base: Para $n = 1$, $V(D)$ es un núcleo para D .

Para $n = 2$, tenemos las siguientes posibilidades:

- $|F(D)| = 0$, en este caso D no tiene flechas y así $V(D)$ es un núcleo para D .
- $|F(D)| = 1$, en este caso D tiene una flecha asimétrica, digamos $(u, v) \in F(D)$.
Tenemos que $N = \{v\}$ es un conjunto independiente y absorbente, es decir, es un núcleo para D .
- $|F(D)| = 2$, en este caso D tiene una flecha simétrica, esto es, $\{(u, v), (v, u)\} = F(D)$, de donde $N = \{v\}$ es un núcleo para D .

Hipótesis inductiva: Supongamos que para cualquier digráfica H de orden n que cumpla con que todos sus ciclos dirigidos tienen al menos una flecha simétrica, se tiene que H tiene núcleo.

Paso inductivo: Sea D una digráfica de orden $n + 1$. Por la observación anterior tenemos que la digráfica $Asim(D)$ tiene una fuente, digamos w . Consideremos ahora a la digráfica $H = D - w$ que es de orden n y además cumple que todos sus ciclos dirigidos contienen al menos una flecha simétrica, pues si w pertenecía a algún ciclo de D , entonces en H dicho ciclo ya no está y todos los demás ciclos no se vieron afectados. Así, de la hipótesis inductiva tenemos que H tiene núcleo, digamos N' , para el cual tenemos los siguientes casos respecto a la digráfica D .

Caso A: Existe un vértice u en N' tal que $(w, u) \in F(D)$, en este caso N' es un núcleo para D .

Caso B: Para todo u en N' , no existe la flecha (w, u) .

Observemos que en este caso no puede ocurrir que tengamos alguna flecha de la forma (u, w) con u en N' , pues en dado caso, como w es una fuente en $Asim(D)$, entonces esta flecha sería simétrica y por tanto existiría la flecha (w, u) en D lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $N = N' \cup \{w\}$ es un conjunto independiente en D

que además ya era absorbente, esto es, N es un núcleo para D .

Por tanto, en cualquier caso concluimos que D tiene núcleo. ■

Corolario 1.0.5.1. *Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido de D contiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo-perfecta.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de D . Como H es inducida, preserva las flechas de la digráfica D y así cualquier ciclo dirigido que haya en H tendrá al menos una flecha simétrica, de donde por Teorema 1.0.5 tenemos que H tiene núcleo. Por lo tanto, D es núcleo-perfecta. ■

Decimos que una digráfica D es **bipartita** si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ en conjuntos independientes. Si además D cumple que para todo u en V_1 y para todo v en V_2 , $|\{(u, v), (v, u)\} \cap F(D)| = 1$, entonces decimos que D es un **torneo bipartito**. Escribimos $D = (V_1, V_2)$ para indicar la partición del torneo en dos conjuntos independientes.

$T :$

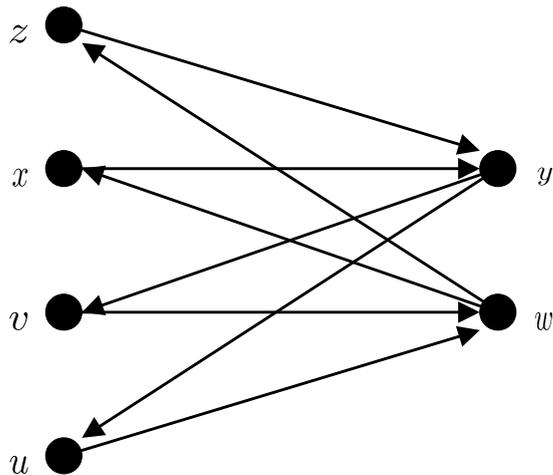


Figura 1.4: La digráfica T es un torneo bipartito.

Teorema 1.0.6. *Sea D un digráfica. Si D es bipartita, entonces D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.*

Demostración. Supongamos que D es una digráfica bipartita. Si D no contiene ciclos dirigidos, entonces en particular no contiene ciclos dirigidos de longitud impar. Supongamos ahora que D tiene al menos un ciclo dirigido y sea $C_k = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ un ciclo dirigido arbitrario. Basta probar que k es par. Efectivamente, como D es bipartita, podemos tomar $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(D)$ en conjuntos independientes. Como $V_1 \cup V_2 = V(D)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Luego, del hecho que $(v_1, v_2) \in F(D)$ y que V_1 y V_2 son conjuntos independientes, se sigue que v_2 pertenece a V_2 . Con un razonamiento análogo obtenemos que v_3 pertenece a V_1 y que v_4 pertenece a V_2 . De forma general, $v_i \in V_2$ si y solo si i es par. Finalmente, como $v_k v_1 \in F(D)$ y $v_1 \in V_1$, se sigue que v_k pertenece a V_2 , por lo que k es par, que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, en D no hay ciclos de longitud impar. ■

Lema 1.0.7. Sean $D = (V_1, V_2)$ un torneo bipartito y $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ un camino dirigido en D . Para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, \dots, n\}$, $\{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\} \cap F(D) \neq \emptyset$ si y solo si $j - i \equiv 1 \pmod{2}$.

Demostración. Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{0, 1, \dots, n\}$, con $i < j$.

(\implies) Supongamos sin pérdida de generalidad que $(v_i, v_j) \in F(D)$. Como D es un torneo bipartito, un extremos de la flecha (v_i, v_j) debe estar en el conjunto V_1 y el otro en el conjunto V_2 . Supongamos sin pérdida de la generalidad que $v_i \in V_1$ y que $v_j \in V_2$. Como $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ y $v_i \in V_1$, tenemos que $v_{i+1} \in V_2$. Con un argumento similar vemos que como $v_{i+1} \in V_2$ y $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in F(D)$, entonces se debe tener que $v_{i+2} \in V_1$. Siguiendo de una manera recursiva podemos observar que si k es par, entonces $v_{i+k} \in V_1$ y si k es impar, entonces $v_{i+k} \in V_2$. De aquí, como $v_j \in V_2$, tenemos que $j = i + l$ para algún l impar y así $j - i = (i + l) - i = l$, donde $l \equiv 1 \pmod{2}$, por lo que $j - i \equiv 1 \pmod{2}$.

(\impliedby) Supongamos que $j - i \equiv 1 \pmod{2}$ y supongamos sin pérdida de generalidad

que $v_i \in V_1$. Por un razonamiento análogo al anterior, tenemos que $v_{i+1} \in V_2, v_{i+2} \in V_1, v_{i+3} \in V_2$ y de esta manera como $j - i \equiv 1 \pmod{2}$, entonces se debe tener que $v_j \in V_2$. Luego, como D es torneo bipartito, tenemos que $\{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. ■

Lema 1.0.8. *Sea $D = (V_1, V_2)$ un torneo bipartito. Todo camino dirigido cerrado W de longitud a lo más 6 en D , es un ciclo dirigido en D .*

Demostración. Sea $W = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ un camino dirigido cerrado de longitud a lo más 6. Por los Teoremas 1.0.3 y 1.0.6, $k \notin \{3, 5\}$, ya que todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar y D al ser bipartita no contiene ciclos dirigidos de longitud impar. El caso en el que $k = 2$ tampoco es posible debido a que D no tiene flechas simétricas.

Veamos el caso en que $k = 4$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. De este modo tenemos que $\{v_1, v_3\} \subseteq V_1$ y $\{v_2, v_4\} \subseteq V_2$, para que W sea un ciclo basta ver que $v_1 \neq v_3$ y $v_2 \neq v_4$. Efectivamente, $v_1 \neq v_3$, pues en caso contrario, tendríamos que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq F(D)$, lo cual contradice el hecho de que D es un torneo bipartito. De manera similar ocurre que $v_2 \neq v_4$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(v_2, v_3), (v_3, v_2)\} \subseteq F(D)$ contradiciendo también el hecho de que D es un torneo bipartito. Por lo tanto, W es un ciclo de longitud 4.

Finalmente veamos el caso $k = 6$. Supongamos nuevamente sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$, de este modo tenemos que $\{v_1, v_3, v_5\} \subseteq V_1$ y $\{v_2, v_4, v_6\} \subseteq V_2$. Para que W sea un ciclo dirigido, basta mostrar que todos los vértices de W son diferentes (salvo el primero y el último). Efectivamente, con un razonamiento análogo al del caso $k = 4$ tenemos que $v_1 \neq v_3$ y $v_2 \neq v_4$. Ahora $v_3 \neq v_5$, pues en caso contrario, como $(v_4, v_5) \in F(D)$, tendríamos que $\{(v_3, v_4), (v_4, v_3)\} \subseteq F(D)$, lo cual contradice el hecho de que D es un torneo bipartito. Luego $v_1 \neq v_5$, pues en caso contrario, como $(v_5, v_6) \in F(D)$ y $(v_6, v_1) \in F(D)$, tendríamos que $\{(v_1, v_6), (v_6, v_1)\} \subseteq F(D)$,

lo cual también contradice el hecho de que D es un torneo bipartito.

Ahora $v_4 \neq v_6$, pues en caso contrario, como $(v_4, v_5) \in F(D)$ y $(v_5, v_6) \in F(D)$, se sigue que $\{(v_4, v_5), (v_5, v_4)\} \subseteq F(D)$, lo cual contradice el hecho que D es un torneo bipartito. Finalmente $v_2 \neq v_6$, pues en caso contrario, como $(v_1, v_2) \in F(D)$ y $(v_6, v_1) \in F(D)$, tendríamos que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq F(D)$ contradiciendo el hecho que D es un torneo bipartito. Por lo tanto, W es un ciclo dirigido de longitud 6. ■

1.0.2. Coloraciones

Sea D una digráfica sin lazos. Definimos una **m -coloración por flechas** como una función $c : F(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, donde al conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$ le llamamos **conjunto de colores**. De ahora en adelante diremos **m -coloración** en lugar de “ m -coloración por flechas”. Decimos que D es **m -coloreada** si tiene una m -coloración. En una digráfica m -coloreada D , un camino (ciclo) dirigido es **monocromático** si todas las flechas del camino (ciclo) dirigido tienen el mismo color. También decimos que un ciclo dirigido C , de longitud al menos 3, es **casí monocromático** si, con a lo más una excepción, todas las flechas de C tienen el mismo color. Si D es una digráfica m -coloreada y N es un subconjunto de $V(D)$ que satisface (i) entre cualquier par de vértices distintos u y v de N no existe una uv -trayectoria dirigida monocromática y (ii) para cada x en $V(D) - N$ existe un vértice v en N tal que existe una xv -trayectoria dirigida monocromática; entonces decimos que N es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas**. Además, definimos la **cerradura** de D , denotado por $\mathcal{C}(D)$, como la multidigráfica coloreada con conjunto de vértices $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y conjunto de flechas $F(\mathcal{C}(D)) = \{(u, v) \text{ con color } i : \text{ existe una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ contenida en } D\}$. Es fácil notar que $\mathcal{C}(D) \cong \mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$.

En la Figura 1.5 vemos una digráfica D , 2-coloreada bajo la función $c : F(D) \rightarrow$

$\{1, 2\}$ definida por:

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = (v_3, v_1) \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y su cerradura $\mathcal{C}(D)$.

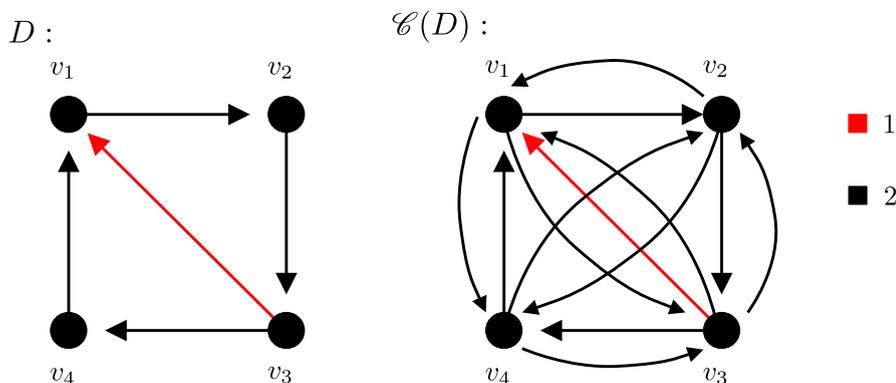


Figura 1.5: Digráfica D y su cerradura $\mathcal{C}(D)$.

Teorema 1.0.9. *Una digráfica m -coloreada D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y solo si $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. (\implies) Supongamos que D tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, digamos N . Afirmamos que N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Primero veamos que N es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$. Sean u y v vértices distintos en N , como N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en D , entonces no existen uv -trayectorias dirigidas monocromáticas en D , por lo que de la definición de $F(\mathcal{C}(D))$ se sigue que (u, v) no es una flecha en $\mathcal{C}(D)$. Veamos ahora que N es un conjunto absorbente, para ello sea x un vértice en $V(\mathcal{C}(D)) - N$. Como $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$, entonces x es un vértice en $V(D) - N$, y como N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D , tenemos que existe un vértice v en N tal que existe una xv -trayectoria dirigida monocromática en D , de donde por definición de $F(\mathcal{C}(D))$, sucede que (x, v) es una flecha de $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto, N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

(\Leftarrow) Supongamos que $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo, digamos N . Afirmamos que N es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D .

Primero veamos que entre cualquier par de vértices de N no hay trayectorias dirigidas monocromáticas. Sean u y v dos vértices distintos en N , de existir una uv -trayectoria dirigida monocromática en D , de la definición de $F(\mathcal{C}(D))$ tendríamos que (u, v) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$, pero esto no puede pasar debido a que N es un núcleo en $\mathcal{C}(D)$ y por lo tanto es un conjunto independiente. Por lo tanto, no existen uv -trayectorias dirigidas monocromáticas en D . Veamos ahora que para cualquier vértice x en $V(D) - N$, existe un vértice v en N tal que existe una xv -trayectoria dirigida monocromática en D . Sea x un vértice en $V(D) - N$, como $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$, entonces x es un vértice en $V(\mathcal{C}(D)) - N$, y como N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$, existe un vértice v en N tal que (x, v) es una flecha de $\mathcal{C}(D)$. Así, de la definición de $F(\mathcal{C}(D))$, sucede que existe una xv -trayectoria dirigida monocromática contenida en D . Por lo tanto, N es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en D . ■

Teorema 1.0.10. *Sea D una digráfica m -coloreada. Todo uv -camino dirigido monocromático contiene una uv -trayectoria dirigida monocromática.*

Demostración. Sea W un uv -camino dirigido monocromático. Por el Teorema 1.0.1, W contiene una uv -trayectoria dirigida, digamos T . Como T está contenido en W y W es un camino dirigido monocromático, tenemos que T también es monocromático. Por lo tanto, W contiene una uv -trayectoria dirigida monocromática. ■

Lema 1.0.11. *Sea $D=(V_1, V_2)$ un torneo bipartito m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 es casi monocromático y cada ciclo de longitud 6 es monocromático. Si para algunos u y v vértices de D existe una uv -trayectoria dirigida monocromática y no existe vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

(i) $(u, v) \in F(D)$

(ii) Existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

(iii) Existe una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

Demostración. Sean u y v vértices de D tales que existe una uv -trayectoria dirigida monocromática y no existe una vu -trayectoria dirigida monocromática. Observe que si existe una uv -trayectoria dirigida de longitud impar, entonces del Lema 1.0.7 se sigue que $(u, v) \in F(D)$ o bien $(v, u) \in F(D)$, pero no puede ocurrir que $(v, u) \in F(D)$, ya que tendríamos una vu -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo la hipótesis, por lo tanto, $(u, v) \in F(D)$ y así el punto (i) del Lema 1.0.11 se satisface. Asumamos que toda uv -trayectoria dirigida monocromática W tiene longitud par y procedemos por inducción sobre $\ell(W)$.

Sea $W = (u = x_0, \dots, x_{2r} = v)$ una uv -trayectoria dirigida monocromática y supongamos sin pérdida de generalidad que las flechas de W tienen asignado el color 1.

Paso base: Para $r = 1$, W ya es una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y el punto (ii) del Lema 1.0.11 se cumple.

Para $r = 2$, tenemos que W ya es una uv -trayectoria dirigida monocromática debido a que D no contiene ciclos dirigidos de longitud impar y tampoco tiene flechas simétricas, por lo que se cumple el punto (iii) del Lema 1.0.11.

Para $r = 3$, por el Lema 1.0.7, como $5 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $(u, x_5) \in F(D)$ o bien $(x_5, u) \in F(D)$. De manera análoga, como $6 - 1 = 5$ y $5 \equiv 1 \pmod{2}$, se sigue que $(x_1, v) \in F(D)$ o bien $(v, x_1) \in F(D)$. Observemos que si $(u, x_5) \in F(D)$ o $(x_1, v) \in F(D)$, entonces (u, x_5, v) o (u, x_1, v) son uv -trayectorias dirigidas de longitud 2, respectivamente, de donde el punto (ii) del Lema 1.0.11 se satisface. Supongamos que $\{(x_5, u), (v, x_1)\} \subseteq F(D)$, de aquí que obtenemos los ciclos dirigidos de longitud 6 $(u, W, x_5) \cup (x_5, u)$ y $(x_1, W, v) \cup (v, x_1)$, los cuales por hipótesis son monocromáticos y además de color 1, pues (x_2, x_3) es una flecha en ambos ciclos que es

de color 1. Así obtenemos en particular que las flechas (x_5, u) y (v, x_1) son de color 1 y por lo tanto la trayectoria dirigida $(v, x_1) \cup (x_1, W, x_5) \cup (x_5, u)$ es monocromática, contradiciendo el hecho de que no hay vu -trayectoria dirigida monocromática, por lo que este caso no puede pasar. De esta manera, concluimos que $(u, x_5) \in F(D)$ o $(x_1, v) \in F(D)$.

Hipótesis inductiva: Supongamos que si en D existe una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud s , con $6 \leq s \leq 2r$, y no existe vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple.

(i) $(u, v) \in F(D)$

(ii) Existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

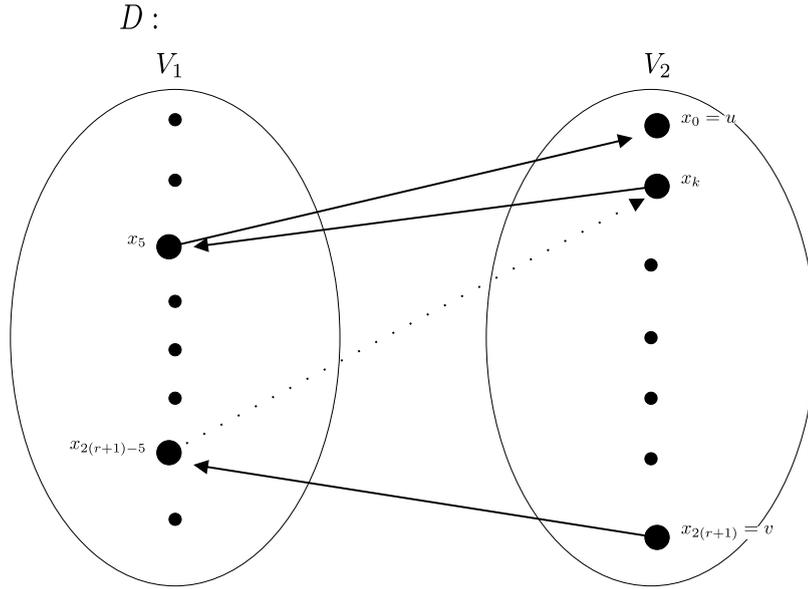
(iii) Existe una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

Paso inductivo: Sea $W = (u = x_0, x_1, \dots, x_{2(r+1)} = v)$ una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud $2(r+1)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que tiene color 1. También supongamos sin pérdida de generalidad que u pertenece a V_2 . Observemos que para cada i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, como $(i+5) - i \equiv 1 \pmod{2}$, entonces del Lema 1.0.7 tenemos que (x_i, x_{i+5}) o bien $(x_{i+5}, x_i) \in F(D)$, de aquí que obtenemos los siguientes casos.

Caso A: Para toda i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(x_{i+5}, x_i) \in F(D)$.

En este caso para cada i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, tenemos que $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+5}, x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 y por tanto, de la hipótesis, tenemos que éste es monocromático y además de color 1, pues comparte flechas de la trayectoria W que tienen el color 1. Así, en particular para cada i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, la flecha (x_{i+5}, x_i) es de color 1. Tomemos ahora k en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $k \equiv 2(r+1) \pmod{5}$, así tenemos al camino dirigido $(v = x_{2(r+1)}, x_{2(r+1)-5}, x_{2(r+1)-10},$

$\dots, x_k) \cup (x_k, W, x_5) \cup (x_5, x_0 = u)$ que es una vu -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.



Caso B: Para alguna i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$ tenemos que $(x_i, x_{i+5}) \in F(D)$.

Consideremos las siguientes observaciones:

Observación 1: Por Lema 1.0.7, como $2(r+1) - 1 \equiv 1 \pmod{2}$ y $(2r+1) - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $\{(x_1, v = x_{2(r+1)}), (v, x_1)\} \cap F(D) \neq \emptyset$ y $\{(x_0 = u, x_{2r+1}), (x_{2r+1}, u)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Nuevamente, en el caso en el que $(u, x_{2r+1}) \in F(D)$ o bien $(x_1, v) \in F(D)$, podemos construir las uv -trayectorias dirigidas de longitud 2, (u, x_{2r+1}, v) y (u, x_1, v) , respectivamente, por lo que el punto (ii) del Lema 1.0.11 se cumple. Supongamos que $\{(x_{2r+1}, u), (v, x_1)\} \subseteq F(D)$.

Observación 2: Si para alguna j en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(v, x_j) \in F(D)$ y las flechas (v, x_j) y (x_{2r+1}, u) tienen asignado el color 1, entonces tenemos que la trayectoria dirigida $(v, x_j) \cup (x_j, W, x_{2r+1}) \cup (x_{2r+1}, u)$, es una vu -trayectoria dirigida

monocromática, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, si para alguna j en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(v, x_j) \in F(D)$, entonces debemos tener que la flecha (v, x_j) no tiene color 1, o bien la flecha (x_{2r+1}, u) no tiene color 1.

De la *Observación 2* surgen los siguientes dos casos.

Caso B.1: (x_{2r+1}, u) no tiene color 1.

Por la suposición del *Caso B* sabemos que para alguna i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$ sucede que $(x_i, x_{i+5}) \in F(D)$. Tomamos $\{i_0, j_0\} \subseteq \{0, 1, \dots, 2(r+1)\}$ de tal manera que $j_0 - i_0 = \max\{j - i : \{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, 2(r+1)\} \text{ y } (x_i, x_j) \in F(D)\}$, los cuales sabemos que son tales que $j_0 - i_0 \geq (i+5) - i = 5$. Consideremos las siguientes posibilidades para i_0 y para j_0 .

Caso B.1.1: $i_0 \geq 2$ y $j_0 \leq 2r$.

Como $(x_{i_0}, x_{j_0}) \in F(D)$, entonces del Lema 1.0.7 se sigue que $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, lo que implica que $(j_0+2) - (i_0-2) \equiv 1 \pmod{2}$. Así, por el Lema 1.0.7, $\{(x_{i_0-2}, x_{j_0+2}), (x_{j_0+2}, x_{i_0-2})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero por la elección de i_0 y j_0 obtenemos que $(x_{j_0+2}, x_{i_0-2}) \in F(D)$. Por lo tanto, $(x_{i_0-2}, x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{j_0}, x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, x_{i_0-2})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (x_{i_0-2}, x_{i_0-1}) es una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1 y por lo tanto la trayectoria dirigida $(u = x_0, W, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{j_0}) \cup (x_{j_0}, W, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

Caso B.1.2: $i_0 = 0$.

Como $u = x_{i_0}$ es un vértice en V_2 y (x_{i_0}, x_{j_0}) , tenemos que x_{j_0} es un vértice en V_1 , esto es j_0 es un número impar.

Supongamos que $j_0 \leq 2r - 3$. Como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $(j_0 + 4) - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, y por el Lema 1.0.7 se sigue que $\{(x_0, x_{j_0+4}), (x_{j_0+4}, x_0)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero de la elección de i_0 y j_0 obtenemos que $(x_{j_0+4}, x_0) \in F(D)$. Así, $(u = x_0, x_{j_0}, x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, x_{j_0+3}, x_{j_0+4}, x_0 = u)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (x_{j_0+1}, x_{j_0+2}) es una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1 y por lo tanto la trayectoria dirigida $(u = x_0, x_{j_0}) \cup (x_{j_0}, W, v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

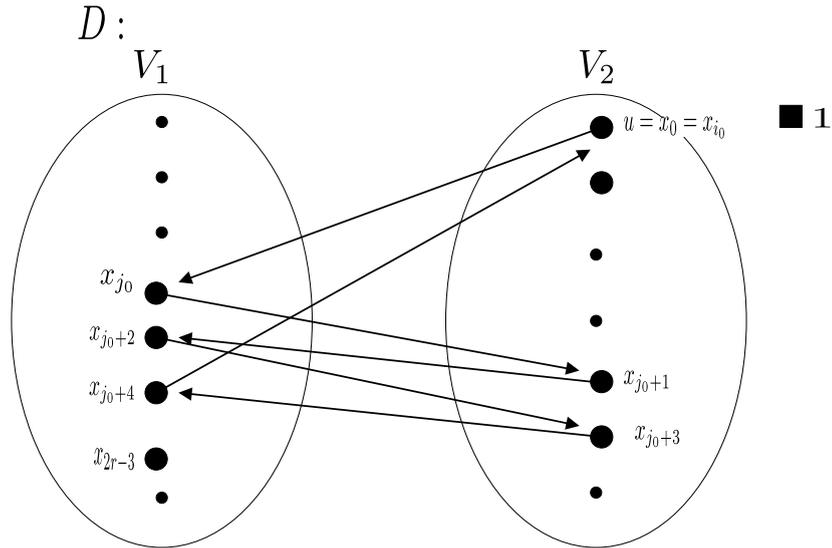


Figura 1.7: Caso B.1.2 donde $j_0 \leq 2r - 3$.

Supongamos ahora que $j_0 \geq 2r - 1$. Por la asimetría de D , notemos que no puede ocurrir que $j_0 = 2r + 1$, pues estamos suponiendo que (x_0, x_{j_0}) es una flecha de D y también estamos en el caso en que (x_{2r+1}, x_0) es una flecha de D . Así, obtenemos que $j_0 = 2r - 1$ y por lo tanto $(u = x_0, x_{j_0} = x_{2r-1}, x_{2r}, x_{2r+1}, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es casi monocromático. Como la flecha (x_{2r+1}, u)

no es de color 1 (por la suposición del *Caso B.1*), entonces en particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1. Por lo tanto, $(u = x_0, x_{j_0} = x_{2r-1}, x_{2r}, x_{2r+1}, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, por lo que se satisface el punto (iii) del Lema 1.0.11.

Caso B.1.3: $i_0 = 1$.

Como u es un vértice en V_2 , entonces $x_{i_0} = x_1$ es un vértice en V_1 y como (x_{i_0}, x_{j_0}) es una flecha en D , tenemos que x_{j_0} es un vértice en V_2 , esto es, j_0 es un número par.

Supongamos que $j_0 \leq 2r - 2$. Notemos que $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, por lo que $(j_0 + 4) - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, por Lema 1.0.7 tenemos que $\{(x_{j_0+4}, x_1), (x_1, x_{j_0+4})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero por la elección de i_0 y j_0 debe ocurrir que $(x_{j_0+4}, x_1) \in F(D)$. Así, $(x_1 = x_{i_0}, x_{j_0}, x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, x_{j_0+3}, x_{j_0+4}, x_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (x_{j_0+1}, x_{j_0+2}) es una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1 y por tanto, $(u, x_1 = x_{i_0}, x_{j_0}) \cup (x_{j_0}, W, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

Supongamos ahora que $j_0 \geq 2r$. Por la suposición final de la *Observación 1* y por la asimetría de D , no puede ocurrir que $j_0 = 2(r+1)$, pues de otra manera tendríamos que $\{(x_{2(r+1)}, x_1), (x_1 = x_{i_0}, x_{2(r+1)} = x_{j_0})\} \subseteq F(D)$, lo que es imposible. Así, obtenemos que $j_0 = 2r$ y por lo tanto $(x_1 = x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r}, x_{2r+1}, u, x_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es casi monocromático. Como la flecha (x_{2r+1}, u) no es de color 1 (por la suposición del *Caso B.1*), entonces en particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1. Por lo tanto, $(u, x_1 = x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r}, x_{2r+1}, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, por lo que se satisface el punto

(iii) del Lema 1.0.11.

Caso B.1.4: $j_0 = 2r + 1$.

Como $2r + 1$ es impar, tenemos que x_{j_0} es un vértice en V_1 y por tanto, dado que $(x_{i_0}, x_{j_0}) \in F(D)$, tenemos que x_{i_0} es un vértice en V_2 , esto es, i_0 es un número par. Supongamos que $i_0 \geq 4$. Como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, también ocurre que $j_0 - (i_0 - 4) \equiv 1 \pmod{2}$, de donde, por el Lema 1.0.7, tenemos que $\{(x_{2r+1}, x_{i_0-4}), (x_{i_0-4}, x_{2r+1})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero por la elección de i_0 y j_0 sucede que $(x_{2r+1}, x_{i_0-4}) \in F(D)$. Así, $(x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r+1}, x_{i_0-4}, x_{i_0-3}, x_{i_0-2}, x_{i_0-1}, x_{i_0})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (x_{i_0-4}, x_{i_0-3}) también es una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular, la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1 y por lo tanto $(u, W, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r+1}, v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

Supongamos ahora que $i_0 \leq 2$. Notemos que no puede suceder que $i_0 = 0$, pues tendríamos que $\{(x_0, x_{2r+1}), (x_{2r+1}, x_0)\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría de D . Así, $i_0 = 2$ y por lo tanto $(x_2 = x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r+1}, x_0, x_1, x_2)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es casi monocromático. Como la flecha $(x_{2r+1}, x_0 = u)$ no es de color 1 (por la suposición del *Caso B.1.*), tenemos que la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1. Por lo tanto, $(u, x_1, x_2 = x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2r+1}, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, por lo que se satisface el punto (iii) del Lema 1.0.11.

Caso B.1.5: $j_0 = 2(r + 1)$.

Como $2(r + 1)$ es par, tenemos que x_{j_0} es un vértice en V_2 y por tanto x_{i_0} es un vértice en V_1 , esto es, i_0 es un número impar.

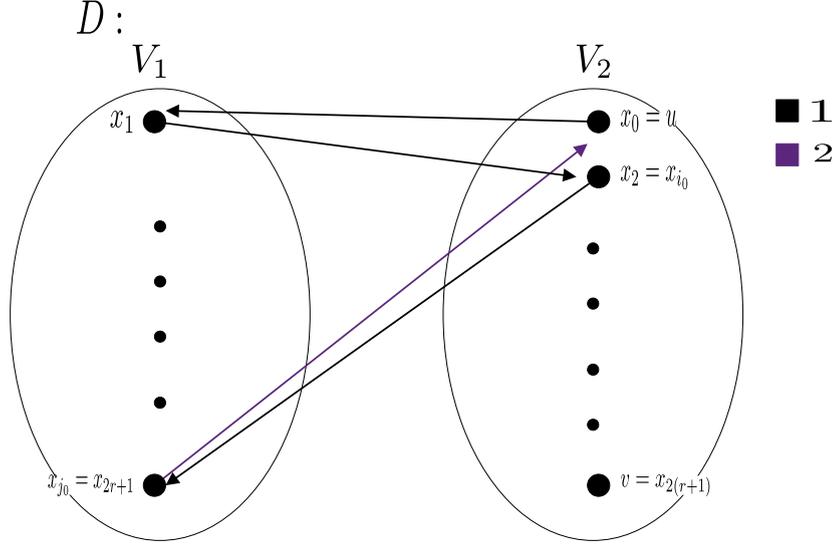


Figura 1.8: Caso B.1.4 donde $i_0 \leq 2$.

Supongamos que $i_0 \geq 5$. Como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, también sucede que $j_0 - (i_0 - 4) \equiv 1 \pmod{2}$, y por Lema 1.0.7 tenemos que $\{(x_{2(r+1)}, x_{i_0-4}), (x_{i_0-4}, x_{2(r+1)})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero por la elección de i_0 y j_0 debe ocurrir que $(x_{2(r+1)}, x_{i_0-4}) \in F(D)$. Así, $(x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2(r+1)}, x_{i_0-4}, x_{i_0-3}, x_{i_0-2}, x_{i_0-1}, x_{i_0})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (x_{i_0-4}, x_{i_0-3}) también es una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular la flecha (x_{i_0}, x_{j_0}) es de color 1 y por lo tanto $(u, W, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{j_0} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

Supongamos ahora que $i_0 \leq 3$. Notemos que no puede ocurrir que $i_0 = 1$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(x_1, x_{2(r+1)}), (x_{2(r+1)}, x_1)\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría de D . Así, $i_0 = 3$ y por lo tanto $(x_3 = x_{i_0}, x_{j_0} = x_{2(r+1)}, x_1, x_2, x_3)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es casi monocromático. Si la flecha (v, x_1) no es de color 1, entonces la flecha $(x_3, x_{2(r+1)})$ es de color 1 y por lo tanto $(u = x_0, x_1, x_2, x_3, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, cumpliéndose así el punto (iii) del Lema 1.0.11. Supongamos que la

flecha $(x_3, x_{2(r+1)})$ no es de color 1, lo que implica que la flecha (v, x_1) sí es de color 1. Consideremos las siguientes observaciones.

Observación A : Si para alguna i' en $\{3, 4, \dots, 2r + 1\}$ tenemos que $(x_{i'}, u)$ es una flecha de D , entonces ésta no es de color 1, pues en caso contrario $(v, x_1) \cup (x_1, W, x_{i'}) \cup (x_{i'}, u)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo nuestra hipótesis.

Observación B : (u, x_5) es una flecha de D , pues de no ser así, como $5 - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, tendríamos por Lema 1.0.7 que $(x_5, u) \in F(D)$ y por tanto $(u, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que es monocromático por hipótesis y además de color 1, puesto que (u, x_1) es también una flecha de la trayectoria W que es de color 1. En particular la flecha (x_5, u) es de color 1, que es una contradicción a la *Observación A*.

De la *Observación B* tenemos que el conjunto $\{i' \in \{5, 6, \dots, 2r - 1\} : (u, x_{i'}) \in F(D)\}$ es no vacío. Tomemos $k_0 = \max\{i' \in \{5, 6, \dots, 2r - 1\} : (u, x_{i'}) \in F(D)\}$. Así, $(u, x_{k_0}) \in F(D)$, por lo que $k_0 - 0 \equiv 1 \pmod{2}$ y también tenemos que $(k_0+2) - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, de donde por el Lema 1.0.7, $\{(x_{k_0+2}, u), (u, x_{k_0+2})\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Por la elección de k_0 tenemos que (x_{k_0+2}, u) es una flecha de D que no es de color 1 (por la *Observación A*). Ahora, $(u, x_{k_0}, x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es casi monocromático. Como la flecha (x_{k_0+2}, u) no es de color 1, tenemos que la flecha (u, x_{k_0}) sí es de color 1. Por lo tanto, $(u, W, x_{k_0}) \cup (x_{k_0}, W, v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11.

Caso B.2: (x_{2r+1}, u) tiene color 1.

De la *Observación 2* sabemos que si para alguna i' en $\{1, 2, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(v, x_{i'})$ es una flecha de D , entonces ésta no es de color 1.

Observemos que $(x_{2(r+1)-5}, v)$ es una flecha de D , pues en caso contrario, como $2(r+1) - (2(r+1) - 5) \equiv 1 \pmod{2}$, se sigue del Lema 1.0.7 que $(v, x_{2(r+1)-5})$ es una flecha de D , pero por otra parte $(x_{2(r+1)-5}, x_{2(r+1)-4}, x_{2(r+1)-3}, x_{2(r+1)-2}, x_{2(r+1)-1}, x_{2(r+1)} = v, x_{2(r+1)-5})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues $(x_{2(r+1)-5}, x_{2(r+1)-4})$ es también una flecha de la trayectoria W que tiene color 1. Así, en particular $(v, x_{2(r+1)-5})$ es también de color 1, contradiciendo nuestra suposición. Ahora, como (v, x_1) es una flecha de D , se sigue que ésta no es de color 1, por lo que en particular el conjunto $\{i' \in \{0, 1, \dots, 2(r+1) - 7\} : (v, x_{i'}) \in F(D)\}$ es no vacío. Sea $i_0 = \max\{i' \in \{0, 1, \dots, 2(r+1) - 7\} : (v, x_{i'}) \in F(D)\}$ y notemos que por la elección de i_0 tenemos que $\{(v, x_{i_0}), (x_{i_0+2}, v)\} \subseteq F(D)$, con la flecha (v, x_{i_0}) coloreada de un color distinto a 1. Así, $(v, x_{i_0}, x_{i_0+1}, x_{i_0+2}, v)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es casi monocromático. Como (v, x_{i_0}) no es de color 1, tenemos que la flecha (x_{i_0+2}, v) sí es de color 1. Por lo tanto $(u, W, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{i_0+1}, x_{i_0+2}, v)$ es una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 1.0.11. ■

Capítulo 2

Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos m -coloreados

En este capítulo presentamos el resultado principal del artículo *Monochromatic paths and quasi-monochromatic cycles in edge-coloured bipartite tournaments* escrito por Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy [7], en el cual se dan condiciones suficientes para asegurar la existencia de al menos un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos m -coloreados. De igual manera mostramos que algunas de las hipótesis de dicho teorema son suficientes y más aún, justas. Para ello, definimos al torneo bipartito \tilde{T}_6 como la digráfica coloreada con el siguiente conjunto de vértices y flechas:

$$V(\tilde{T}_6) = \{u, v, w, x, y, z\}.$$

$$F(\tilde{T}_6) = \{(u, w), (v, w), (w, x), (w, z), (x, y), (y, u), (y, v), (z, y)\}.$$

Donde cada flecha del conjunto $\{(u, w), (w, x), (y, u), (z, y)\}$ tiene color 1 y cada flecha del conjunto $\{(v, w), (w, z), (x, y), (y, v)\}$ tiene color 2. En la Figura 2.1 se

encuentra la digráfica \widetilde{T}_6 , donde el color 1 es el color rojo y el color 2 es negro.

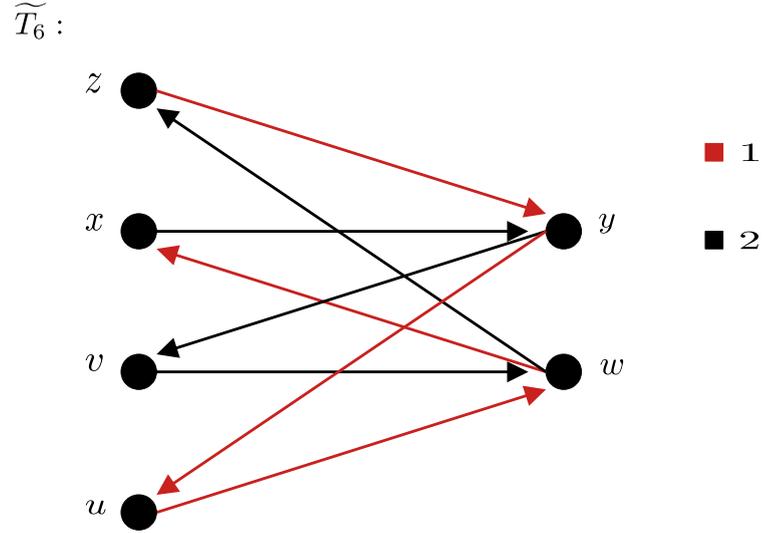


Figura 2.1: Torneo bipartito 2-coloreado \widetilde{T}_6 .

Teorema 2.0.1. Sea $D = (V_1, V_2)$ un torneo bipartito m -coloreado. Si D cumple las siguientes condiciones:

1. Cada ciclo dirigido de longitud 4 en D es casi monocromático.
2. Cada ciclo dirigido de longitud 6 en D es monocromático.
3. D no contiene subtorneos 2-coloreados isomorfos \widetilde{T}_6 .

Entonces $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo-perfecta.

Demostración. Debido al Corolario 1.0.5.1, basta probar que cualquier ciclo dirigido en $\mathcal{C}(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un ciclo dirigido, digamos $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$, contenido en $\mathcal{C}(D)$ que no tiene flechas simétricas, esto es, C está contenido en $Asim(\mathcal{C}(D))$ y por lo tanto, $n \geq 2$. De aquí en adelante, consideramos a los subíndices del ciclo C módulo $n + 1$. Debido a la definición de las flechas de la multidigráfica $\mathcal{C}(D)$,

sucede que para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$, existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D y no existe $x_{i+1} x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, donde por Lema 1.0.11 se satisface al menos uno de los siguientes enunciados:

- (i) $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$.
- (ii) Existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2.
- (iii) Existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

Para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$, tomamos T_i como sigue: $T_i = (x_i, x_{i+1})$, si $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$; T_i es una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2, si $(x_i, x_{i+1}) \notin F(D)$ y dicha trayectoria existe; o T_i es una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, en otro caso.

Definimos ahora $C' = \bigcup_{i=0}^n T_i$, que claramente es un camino cerrado dirigido en D que empieza y termina en x_0 . Digamos que $C' = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$, donde $z_0 = x_0$. Para relacionar los vértices del camino cerrado dirigido C' con los vértices del ciclo dirigido C , observemos que cada trayectoria dirigida T_i se ve de la forma $(x_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, \dots, z_{i_0+r_i} = x_{i+1})$ donde $r_i \in \{1, 2, 4\}$. Así, definimos $\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ como la función que a cada índice lo manda al primer vértice de la trayectoria dirigida T_i donde se encuentra el vértice con dicho índice, es decir, $\varphi(j) = z_{i_0}$ para cada j en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + (r_i - 1)\}$. Decimos que el índice j del vértice z_j es un *índice principal* si existe un i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_j$ y denotamos por I_p al conjunto de los índices principales.

Observación ★ : Como cada trayectoria dirigida T_i tiene longitud a lo más 4, obtenemos que para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ se satisface que $\{j, j+1, j+2, j+3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Por otra parte, debido a que $x_0 = z_0$, tenemos que $0 \in I_p$. De ahora en adelante los índices de los vértices de C' los consideramos módulo $k+1$.

Notemos que, debido al Lema 1.0.8, todos los caminos dirigidos cerrados de longitud

a lo más 6 en D son en realidad ciclos dirigidos. Por otra parte, como C' es un camino cerrado dirigido en un torneo bipartito, es de longitud par, de donde k es un número impar y además es al menos 3, pues $n \geq 2$. Veamos los siguientes casos para k .

Caso A: $k = 3$.

En este caso C' es de la forma $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$ y es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es casi monocromático. Notemos que no puede ocurrir que T_0 sea una trayectoria dirigida monocromática de longitud 4, pues en dado caso, T_0 es C' y así $x_0 = z_0 = x_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T_0 es la flecha (x_0, x_1) o bien, es una x_0x_1 -trayectoria dirigida de longitud 2; donde $x_1 \in \{z_1, z_2\}$. De igual manera, T_n puede ser la flecha (x_n, x_0) o bien una x_nx_0 -trayectoria dirigida de longitud 2; donde $x_n \in \{z_3, z_2\}$. De lo anterior surgen los siguientes casos:

Caso A.1. $x_1 = z_1$ y $x_n = z_2$.

Tenemos que $C' = (x_0, x_1, x_n = x_2, z_3, x_0)$ y como el ciclo dirigido es casi monocromático, se sigue que alguna de las flechas está coloreada de un color distinto.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_0, x_1) , entonces (x_1, x_n, z_3, x_0) es una x_1x_0 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_1, x_n) , entonces $(x_n = x_2, z_3, x_0, x_1)$ es una x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_n, z_3) o bien la flecha (z_3, x_0) , entonces (x_0, x_1, x_n) es una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción, por lo que este *Caso A.1* no puede ocurrir.

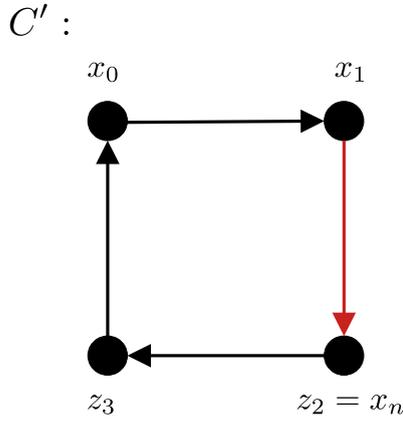


Figura 2.2: Caso A.1 donde (x_1, x_n) es la flecha de color distinto.

Caso A.2. $x_1 = z_1$ y $x_n = z_3$.

Así, $C' = (x_0, x_1, z_2, x_n, x_0)$ y como el ciclo es casi monocromático, alguna de las flechas está coloreada de un color distinto.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_0, x_1) , entonces (x_1, z_2, x_n, x_0) es una x_1x_0 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_1, z_2) , entonces puede ocurrir que $z_2 = x_2$ y en dado caso $(z_2 = x_2, x_n, x_0, x_1)$ es una x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción. Por otra parte puede ocurrir que $x_n = x_2$ y en dado caso, $(x_n = x_2, x_0, x_1)$ es una x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (z_2, x_n) , nuevamente puede ocurrir que $z_2 = x_2$ y en dado caso $x_n = x_3$, donde $(x_n = x_3, x_0, x_1, z_2 = x_2)$ es una x_3x_2 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción. Por otra parte, puede ocurrir que $x_n = x_2$ y en dado caso $(x_n = x_2, x_0, x_1)$ es una x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_n, x_0) , entonces (x_0, x_1, z_2, x_n) es una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción, por lo que este *Caso A.2* no puede

ocurrir.

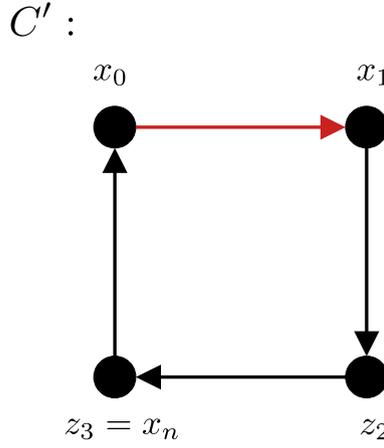


Figura 2.3: Caso A.2 donde (x_0, x_1) es la flecha de color distinto.

Caso A.3. $x_1 = z_2$ y $x_n = z_3$.

Así, $C' = (x_0, z_1, x_1, x_n = x_2, x_0)$ y como el ciclo es casi monocromático, alguna de las flechas está coloreada de un color distinto.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_0, z_1) o bien la flecha (z_1, x_1) , entonces (x_1, x_n, x_0) es una x_1x_0 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha $(x_1, x_n = x_2)$, entonces (x_2, x_0, z_1, x_1) es una x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

-Si la flecha de color distinto es la flecha (x_n, x_0) , entonces (x_0, z_1, x_1, x_n) es una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción, por lo que este *Caso A.3* no puede ocurrir.

En cada caso llegamos a que existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática para alguna i en $\{0, 1, \dots, n\}$, lo cual es una contradicción a nuestra suposición y por lo tanto, el *Caso A* no puede ocurrir.

Caso B: $k = 5$.

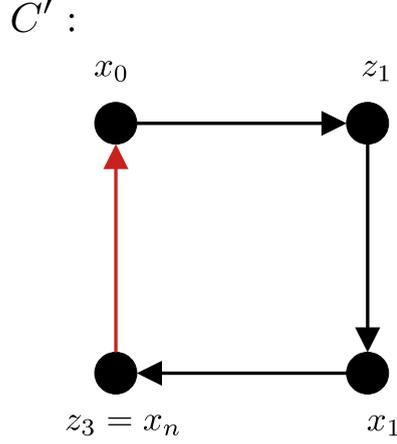


Figura 2.4: Caso A.3 donde (x_n, x_0) es la flecha de color distinto.

En este caso C' es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático, donde es claro que particularmente existe una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este *Caso B* no puede ocurrir.

Caso C: $k \geq 7$.

Para demostrar que este caso tampoco puede ocurrir, primero mostraremos algunas afirmaciones.

Afirmación 1(C). Para cada j en I_p se satisface que $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Efectivamente, dada j en I_p arbitraria, como $(j+5) - j \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos del Lema 1.0.7 que $\{(z_j, z_{j+5}), (z_{j+5}, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. No puede suceder que $(z_{j+5}, z_j) \in F(D)$, pues en dicho caso, $(z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}, z_{j+5}, z_j)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático. Además, como j es un índice principal, existe una i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_j$, de donde $x_{i+1} \in \{z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+4}\}$, dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual no puede ocurrir debido a nuestra suposición. Por lo tanto, $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Afirmación 2(C). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j+5$ es un índice principal, se satisface que $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Efectivamente, dada j en $\{0, 1, \dots, k\}$, tal que $j+5$ es un índice principal, como $(j+5) - j \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos del Lema 1.0.7 que $\{(z_j, z_{j+5}), (z_{j+5}, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. No puede suceder que $(z_{j+5}, z_j) \in F(D)$, pues en dicho caso, $(z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}, z_{j+5}, z_j)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático. Además, como $j+5$ es un índice principal, existe una i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j+5}$, de donde $x_{i-1} \in \{z_{j+4}, z_{j+3}, z_{j+1}\}$, dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Afirmación 3(C). Para cada j en $\{5, 6, \dots, k-2\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{4}$, se satisface que $(z_0, z_j) \in F(D)$.

Notemos que consideramos el conjunto $\{5, 6, \dots, k-2\}$ ya que por un lado el único número menor a 5 que es congruente a 1 módulo 4 es el 1 mismo, para el cual ya se cumple $(z_0, z_1) \in F(D)$. Por otro lado, como en D no hay flechas simétricas y ya tenemos que $(z_k, z_0) \in F(D)$, por lo que debemos considerar números menores a k , pero como k es impar y queremos una flecha de la forma (z_0, z_j) , se sigue que j debe ser menor o igual a $k-2$. Una vez que sabemos la razón de escoger este conjunto de índices, procedemos la demostración de esta afirmación por contradicción.

Supongamos que existe un índice j en $\{5, 6, \dots, k-2\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{4}$ y cumple que $(z_0, z_j) \notin F(D)$. Del Lema 1.0.7, como $j-0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $\{(z_j, z_0), (z_0, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, y así, $(z_j, z_0) \in F(D)$. De la *Afirmación 1(C)* tenemos que $(z_0, z_5) \in F(D)$, lo que implica, al ser D una digráfica asimétrica, que j debe ser distinto de 5. Así, como $j \equiv 1 \pmod{4}$, obtenemos que $j \geq 9$. En el caso en

que $k \leq 9$, la *Afirmación 3(C)* ya se satisface y no hay nada más que hacer, así que supongamos que $k > 9$, esto es, $k \geq 11$.

De lo anterior y de nuestra suposición tenemos que el conjunto $\{i \in \{5, 6, \dots, k-6\} : i \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } (z_{i+4}, z_0) \in F(D)\}$ es no vacío, sea $i_0 = \min\{i \in \{5, 6, \dots, k-6\} : i \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } (z_{i+4}, z_0) \in F(D)\}$. De la elección de i_0 tenemos que $\{(z_{i_0+4}, z_0), (z_0, z_{i_0})\} \subseteq F(D)$.

Definimos ahora $C^2 = (z_0, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}, z_{i_0+4}, z_0)$, el cual es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático, supongamos sin pérdida de generalidad que tiene el color 1. Consideramos ahora las siguientes posibilidades:

3(C).1. $i_0 \in I_p$.

En este caso existe un $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{i_0}$, de donde $x_{i+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción.

Notemos que si $i_0 \in \{5, 9\}$, entonces $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$ y también si $i_0 \geq 9$, entonces $i_0 - 4 \geq 5$, de donde por la elección de i_0 tenemos que $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$; en cualquier caso también tenemos que $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$.

3(C).2. $i_0 \notin I_p$.

En este caso, de la *Observación ★*, se satisface que $\{i_0 - 1, i_0 - 2, i_0 - 3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Sea $s \in \{i_0 - 1, i_0 - 2, i_0 - 3\} \cap I_p$ y sea x_i el vértice del ciclo C tal que $x_i = z_s$. Luego, de la *Afirmación 1(C)* se cumple que $(z_s, z_{s+5}) \in F(D)$, con $z_{s+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}, z_{i_0+2}\}$. Así, $C^3 = (z_{i_0-4}, C', z_s) \cup (z_s, z_{s+5}) \cup (z_{s+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (en cualquiera de los casos), que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (z_{i_0+4}, z_0) también es una flecha del ciclo dirigido C^2 que

es de color 1. Así, $W = (z_{i_0}, C^2, z_0) \cup (z_0, C^3, z_s = x_i)$ es un camino dirigido monocromático.

Por otra parte sabemos que $x_{i+1} \in \{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\}$ (pues $\ell(T_i)$ puede ser 1, 2 o 4), pero $\{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\} \subseteq \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Como $\{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\} \subseteq V(W)$, si $x_{i+1} \in \{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$, entonces es claro que existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática contenida en W , lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos que $x_{i+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$ y sea $i_1 \in \{i_0 - 1, i_0 - 2\}$ tal que $x_{i+1} = z_{i_1}$. Así, i_1 es un índice principal y de la *Afirmación 1(C)* tenemos que $(z_{i_1}, z_{i_1+5}) \in F(D)$, con $z_{i_1+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}\}$. Luego, $C^4 = (z_{i_0-4}, C', z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, z_{i_1+5}) \cup (z_{i_1+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (en cualquiera de los casos), que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (z_0, z_{i_0-4}) es también una flecha del ciclo C^3 que es de color 1; pero esto es una contradicción debido a que x_i es también un vértice de este ciclo y por lo tanto existiría una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática. Por lo tanto, este caso no puede suceder y así la *Afirmación 3(C)* es verdadera.

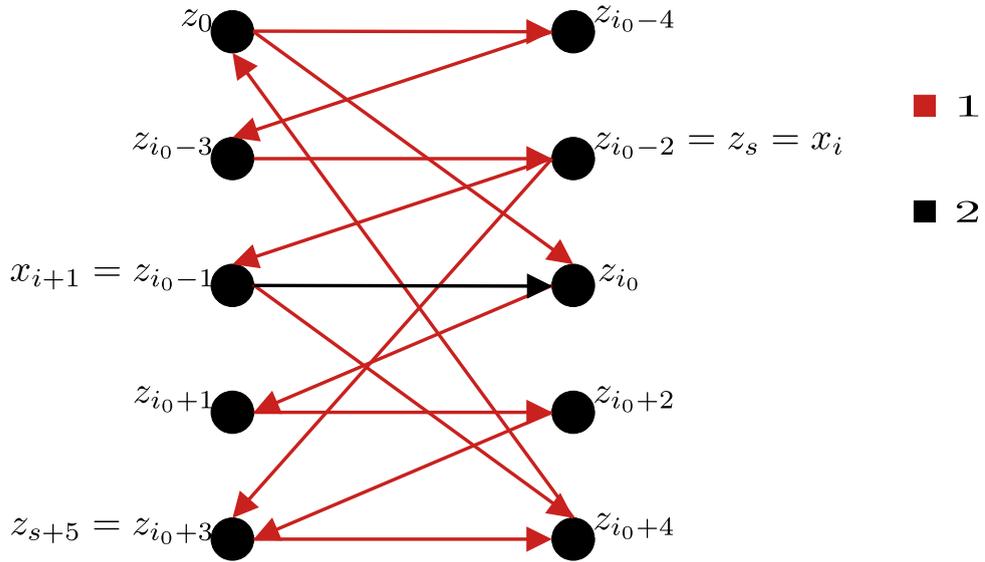


Figura 2.5: Caso 3(C).2 donde $x_i = z_{i_0-2}$ y $\ell(T_i) = 1$

Afirmación 4(C). Para cada j en $\{3, 4, \dots, k-4\}$ tal que $j \equiv k \pmod{4}$, se satisface que $(z_j, z_0) \in F(D)$.

Sea j en $\{3, 4, \dots, k-4\}$ tal que $j \equiv k \pmod{4}$. Notemos que como k es un número impar, se tiene que $k \equiv 1 \pmod{2}$. Así, también tenemos que $j-0 \equiv 1 \pmod{2}$, donde por el Lema 1.0.7 obtenemos que $\{(z_0, z_j), (z_j, z_0)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Supongamos en busca de una contradicción que $(z_0, z_j) \in F(D)$.

Notemos que para $k = 7$ tendríamos que $(z_0, z_3) \in F(D)$, pero en dicho caso $C^2 = (z_0, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático. Además, como $x_n \in \{z_7, z_6, z_4\}$ (dependiendo de si $\ell(T_n)$ es 1, 2 o 4), tenemos que $\{x_0, x_n\} \subseteq V(C^2)$ y por lo tanto existe una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Así, $(z_3, z_0) \in F(D)$ y por lo tanto la *Afirmación 4(C)* se satisface en este caso.

Por otra parte, no puede ocurrir que $k = 9$, pues en dado caso, de la *Afirmación 1(C)* tenemos que $(z_0, z_5) \in F(D)$. Así, $C^2 = (z_0, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es monocromático. Además, sabemos que $x_n \in \{z_9, z_8, z_6\}$ dependiendo de si $\ell(T_n)$ es 1, 2 o 4, pero en cualquier caso obtenemos que $\{x_0, x_n\} \subseteq V(C^2)$ y por lo tanto existe una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos que $k \geq 11$ y veamos que se cumple la afirmación.

Como $0 \in I_p$, de la *Afirmación 2(C)* tenemos que $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$ y como D es asimétrica, $j \leq k-8$. De aquí que el conjunto $\{i \in \{7, 8, \dots, k-4\} : i \equiv k \pmod{4} \text{ y } (z_0, z_{i-4}) \in F(D)\}$ es no vacío, y sea $i_0 = \max\{i \in \{7, 8, \dots, k-4\} : i \equiv k \pmod{4} \text{ y } (z_0, z_{i-4}) \in F(D)\}$. De la elección de i_0 tenemos que $\{(z_0, z_{i_0-4}), (z_{i_0}, z_0)\} \subseteq F(D)$. Notemos que si $i_0 = k-4$, entonces $(z_k, z_0) \in F(D)$ y también si $i_0 \leq k-8$, entonces $i_0+4 \leq k-4$, de donde por la elección de i_0 tenemos que $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$; en cualquier caso también tenemos que $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$.

Definimos ahora $C^2 = (z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_0)$, el cual es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático, supongamos sin pérdida de generalidad que tiene color 1. Consideramos ahora las siguientes posibilidades.

4(C).1. $i_0 \in I_p$.

En este caso existe un $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ tal que $x_i = z_{i_0}$, donde $x_{i-1} \in \{z_{i_0-1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción.

4(C).2. $i_0 \notin I_p$.

En este caso, de la *Observación* \star , se satisface que $\{i_0-1, i_0-2, i_0-3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Sea $s \in \{i_0-1, i_0-2, i_0-3\} \cap I_p$ y sea x_i el vértice del ciclo C tal que $x_i = z_s$. Luego, de la *Afirmación 1(C)* se cumple que $(z_s, z_{s+5}) \in F(D)$, con $z_{s+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}, z_{i_0+2}\}$. Así, $C^3 = (z_{i_0-4}, C', z_s) \cup (z_s, z_{s+5}) \cup (z_{s+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (sin importar qué valor tome s), que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (z_0, z_{i_0-4}) también es una flecha del ciclo dirigido C^2 que es de color 1.

Por otra parte sabemos que $x_{i+1} \in \{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\}$ (pues $\ell(T_i)$ puede ser 1, 2 o 4), pero $\{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\} \subseteq \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Como $\{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}\} \subseteq V(C^2)$, si $x_{i+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}\}$, entonces claramente existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos que $x_{i+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$ y sea $i_1 \in \{i_0+1, i_0+2, i_0+3\}$ tal que $x_{i+1} = z_{i_1}$. Así, i_1 es un índice principal y de la *Afirmación 2(C)* tenemos que $(z_{i_1-5}, z_{i_1}) \in F(D)$, con $z_{i_1-5} \in \{z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}\}$. Luego, $C^4 = (z_{i_0-4}, C', z_{i_1-5}) \cup (z_{i_1-5}, z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (para cualquiera de los tres valores de i_1), que por hipótesis es

monocromático y además de color 1, pues (z_0, z_{i_0-4}) es también una flecha del ciclo C^2 que es de color 1. Finalmente, $W = (x_{i+1} = z_{i_1}, C^4, z_{i_0-4}) \cup (z_{i_0-4}, C^2, z_s = x_i)$ es un camino dirigido monocromático que contiene una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este caso no puede suceder y así la *Afirmación 4(C)* es verdadera.

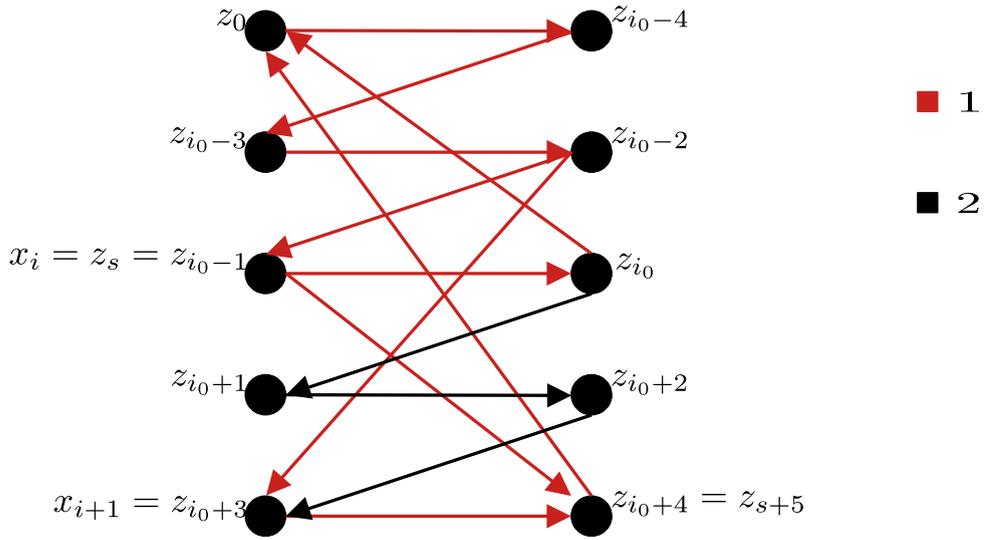


Figura 2.6: Caso 4(C).2 donde $x_i = z_{i_0-1}$ y $\ell(T_i) = 4$

Analizamos ahora dos posibilidades para k .

Caso C.1. $k \equiv 1 \pmod{4}$.

En este caso, como 0 es un índice principal, tenemos de la *Afirmación 2(C)* que $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$. Por otra parte, como $k \equiv 1 \pmod{4}$, tenemos que $k - 4 \equiv 1 \pmod{4}$ con $k - 4 \in \{5, 6, \dots, k - 2\}$, donde por la *Afirmación 3(C)* tenemos que $(z_0, z_{k-4}) \in F(D)$, pero esto es una contradicción, pues D es una digráfica asimétrica.

Caso C.2. $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Para este caso primero mostraremos algunas afirmaciones.

Afirmación 5(C.2). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j \equiv 3 \pmod{4}$ tenemos que $(z_j, z_0) \in F(D)$.

En efecto, dado j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j \equiv 3 \pmod{4}$, como $3 \equiv k \pmod{4}$, tenemos que $j \equiv k \pmod{4}$ y así de la *Afirmación 4(C)* se sigue que $(z_j, z_0) \in F(D)$. Recordemos que la *Afirmación 4(C)* era válida para $s \in \{0, 1, \dots, k-4\}$, por lo que faltaría cubrir los casos para cuando $s \in \{k-3, k-2, k-1, k\}$, pero como $k \equiv 3 \pmod{4}$ (debido a la suposición del *Caso C.2*), obtenemos que dichos casos están cubiertos al ya tener la flecha (z_k, z_0) .

Afirmación 6(C.2). Para cualquier subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 1 \pmod{4}$, se cumple que $(z_i, z_j) \in F(D)$.

Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 1 \pmod{4}$ y sea r en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_r = z_i$. Renombramos a los vértices del ciclo C de tal manera que ahora empiecen en x_r . Así, al unir las trayectorias T_s correspondientes obtenemos un camino cerrado dirigido $\overline{C'}$ que también es un renombramiento de los vértices del ciclo C' , digamos que $\overline{C'} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, \bar{z}_0)$, donde para cada t en $\{0, 1, \dots, k\}$ el renombramiento viene dado por $\bar{z}_t = z_{i+t}$ (de esta manera $\bar{z}_0 = z_i$). Ahora como $j - i \equiv 1 \pmod{4}$, $i \in I_p$ y por la *Afirmación 3(C)* tenemos que $(\bar{z}_0, \bar{z}_{j-i}) \in F(D)$, pero $\bar{z}_0 = z_i$ y $\bar{z}_{j-i} = z_{i+(j-i)} = z_j$. Por lo tanto, $(z_i, z_j) \in F(D)$. Recordemos que la *Afirmación 3(C)* era válida para $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, así que el unico caso que faltaría cubrir es para cuando $s = j - i = k$, pero este caso no cumple las hipótesis de la *Afirmación 6(C.2)*, pues $k \equiv 3 \pmod{4}$ (esto último debido a la suposición del *Caso C.2*).

Afirmación 7(C.2). Para cualquier subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satis-

face que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 3 \pmod{4}$, se cumple que $(z_j, z_i) \in F(D)$.

Efectivamente, sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 3 \pmod{4}$. Usando la misma construcción de \bar{C}' que hicimos en la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos de la *Afirmación 5(C.2)* que $(\bar{z}_{j-i}, \bar{z}_0) \in F(D)$, pero $\bar{z}_{j-i} = z_{(j-i)+i} = z_j$ y $\bar{z}_0 = z_i$. Por lo tanto, $(z_j, z_i) \in F(D)$.

Afirmación 8(C.2). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tenemos que $(z_j, z_{j-3}) \in F(D)$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $(z_{j-3}, z_j) \in F(D)$. Por una parte, como $j - (j - 3) \equiv 3 \pmod{4}$, de la *Afirmación 7(C.2)* podemos concluir que $j - 3 \notin I_p$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(z_{j-3}, z_j), (z_j, z_{j-3})\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría del torneo. Por otra parte, como $(j - 3) - j \equiv 1 \pmod{4}$, de la *Afirmación 6(C.2)* podemos concluir que $j \notin I_p$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(z_{j-3}, z_j), (z_j, z_{j-3})\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría del torneo. Así, de la *Observación ★* obtenemos que $\{j - 2, j - 1\} \cap I_p \neq \emptyset$, de donde surgen los dos siguientes casos.

Caso 8(C.2).1. $j - 2 \in I_p$.

Sea i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j-2}$. Como $(j+1) - (j-2) \equiv 3 \pmod{4}$, con $j-2 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j+1}, z_{j-2}) \in F(D)$, y de manera similar, como $(j-5) - (j-2) \equiv 1 \pmod{4}$ con $j-2 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(z_{j-2}, z_{j-5}) \in F(D)$. Así, $C^2 = (x_i = z_{j-2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_j, z_{j+1}, z_{j-2} = x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático, supongamos sin pérdida de generalidad que es de color 1. Sabemos además que $x_{i-1} \in \{z_{j-3}, z_{j-4}, z_{j-6}\}$ dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4, pero como $j - 3 \notin I_p$, tenemos que $x_{i-1} \in \{z_{j-4}, z_{j-6}\}$. Si $x_{i-1} = z_{j-4}$, entonces claramente existe una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida monocromática contenida en C^2 , contradiciendo nuestra

suposición. Supongamos que $x_{i-1} = z_{j-6}$ y observemos que como $(j+1) - (j-6) \equiv 3 \pmod{4}$ con $j-6 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j+1}, z_{j-6} = x_{i-1}) \in F(D)$. Así, $C^3 = (x_{i-1} = z_{j-6}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_j, z_{j+1}, z_{j-6} = x_{i-1})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (z_{j-3}, z_j) es también una flecha del ciclo C^2 que es de color 1. Por lo tanto, $(x_i = z_{j-2}, C^2, z_{j+1}) \cup (z_{j+1}, z_{j-6} = x_{i-1})$ es una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición, de donde podemos concluir que el *Caso 8(C.2).1* no puede suceder.

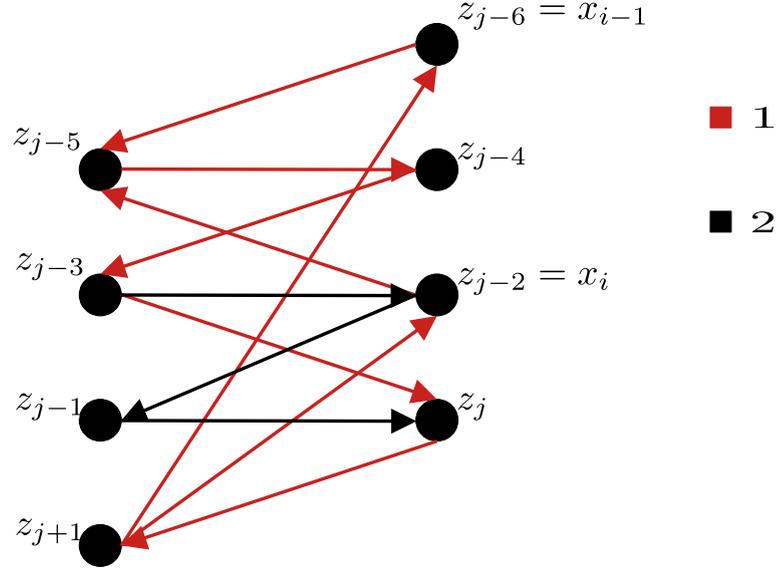


Figura 2.7: Caso 8(C.2).1 donde $x_{i-1} = z_{j-6}$

Caso 8(C.2).2. $j-1 \in I_p$.

Sea i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j-1}$. Como $(j+2) - (j-1) \equiv 3 \pmod{4}$ con $j-1 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j+2}, z_{j-1}) \in F(D)$, y de manera similar, como $(j-4) - (j-1) \equiv 1 \pmod{4}$ con $j-1 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(z_{j-1}, z_{j-4}) \in F(D)$. Así, $C^2 = (x_i = z_{j-1}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1} = x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático, supongamos sin pérdida de generalidad que es de color 1. Sabemos además que $x_{i+1} \in \{z_j, z_{j+1}, z_{j+3}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4, pero como $j \notin I_p$, entonces $x_{i+1} \in \{z_{j+1}, z_{j+3}\}$. Si

$x_{i+1} = z_{j+1}$, entonces claramente existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática contenida en C^2 , contradiciendo nuestra suposición. Supongamos entonces que $x_{i+1} = z_{j+3}$ y observemos que como $(j-4) - (j+3) \equiv 1 \pmod{4}$ con $j+3 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(x_{i+1} = z_{j+3}, z_{j-4}) \in F(D)$. Así, $C^3 = (x_{i+1} = z_{j+3}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3} = x_{i+1})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es monocromático y además de color 1, pues (z_{j-3}, z_j) es también una flecha del ciclo C^2 que es de color 1. Por lo tanto, $(x_{i+1} = z_{j+3}, z_{j-4}) \cup (z_{j-4}, C^2, z_{j-1} = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición, de donde podemos concluir que el *Caso 8(C.2).2* no puede suceder.

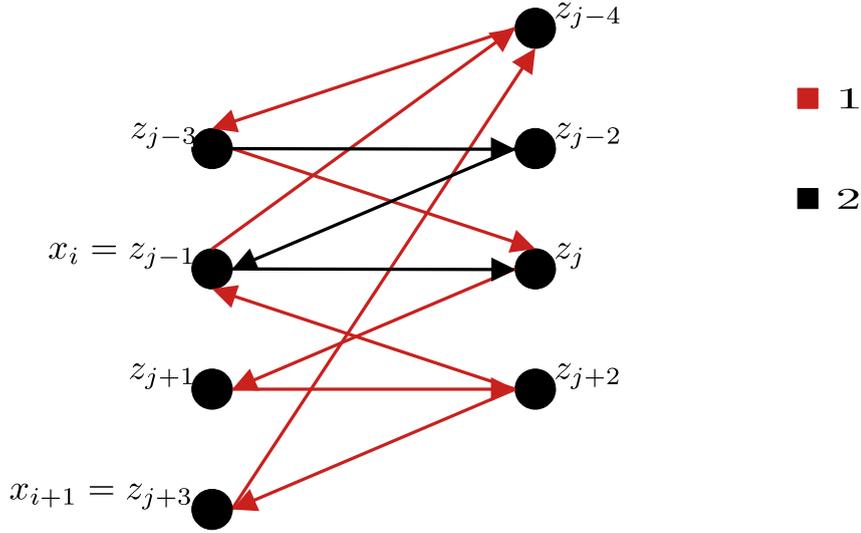


Figura 2.8: Caso 8(C.2).2 donde $x_{i+1} = z_{j+3}$

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que la *Afirmación 8(C.2)* es verdadera.

Afirmación 9(C.2). Si para alguna j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tenemos que (z_{j-1}, z_j) y (z_j, z_{j+1}) tienen diferente color, entonces $j \in I_p$.

Sabemos de la *Observación ★* que $\{j-3, j-2, j-1, j\} \cap I_p \neq \emptyset$. Tomamos

$r_0 = \min\{r \in \{0, 1, 2, 3\} : j - r \in I_p\}$, esto es, consideramos al índice más grande que es principal, también tomamos i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $z_{j-r_0} = x_i$. Además sabemos que $x_{i+1} \in \{z_{j-r_0+1}, z_{j-r_0+2}, z_{j-r_0+4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4, pero $\{z_{j-r_0+1}, z_{j-r_0+2}, z_{j-r_0+4}\} \subseteq \{z_{j-2}, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}\}$. Ahora tomamos $s_0 \in \{j - r_0 + 1, j - r_0 + 2, j - r_0 + 4\}$ tal que $z_{s_0} = x_{i+1}$. Notemos que $s_0 \notin \{j - 2, j - 1, j\}$, pues en caso contrario, como $s_0 \in I_p$ tendríamos que $z_{j-r_0} = x_i \leq x_{i+1} = z_{s_0}$, contradiciendo la elección de r_0 . Así, $s_0 \in \{j + 1, j + 2, j + 3, j + 4\}$. Hagamos casos respecto a la longitud de T_i .

- $\ell(T_i) = 1$. En este caso T_i es la flecha $(z_{j-r_0}, z_{j-r_0+1} = z_{s_0})$, pero como $z_{s_0} \in \{z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}\}$, sucede que $x_i = z_j$ y $x_{i+1} = z_{j+1}$. Por lo tanto, $j \in I_p$.
- $\ell(T_i) = 2$. En este caso, como $x_{i+1} = z_{s_0} \in \{z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}\}$, tenemos que $x_i \in \{z_{j-1}, z_j\}$. Necesariamente ocurre que $x_i = z_j$, pues en caso contrario, $x_i = z_{j-1}$, de donde $x_{i+1} = z_{j+1}$ y por la *Afirmación 8(C.2)* tenemos que $(z_{j+1}, z_{j-2}) \in F(D)$. Luego, $C^2 = (z_{j-2}, z_{j-1} = x_i, z_j, z_{j+1} = x_{i+1}, z_{j-2})$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es casi monocromático, pero como (z_{j-1}, z_j) y (z_j, z_{j+1}) tienen diferente color por hipótesis, se sigue que $(x_{i+1} = z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j-1} = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, $x_i = z_j$ y con esto, $j \in I_p$.
- $\ell(T_i) = 4$. En este caso T_i es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que $\{(z_{i-1}, z_i), (z_i, z_{i+1})\} \not\subseteq V(T_i)$ y la única manera en que esto ocurra considerando que $z_{s_0} \in \{z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}\}$ es cuando $x_i = z_j$ y $x_{i+1} = z_{j+4}$. Por lo tanto, $j \in I_p$.

En cualquier caso concluimos que la *Afirmación 9(C.2)* es verdadera.

Afirmación 10(C.2). Existe una j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que (z_{j-1}, z_j) y (z_j, z_{j+1}) tienen color distinto.

Efectivamente, pues de lo contrario C' sería un camino cerrado dirigido monocromático y por ende, existiría un x_0x_n -camino dirigido monocromático, de donde por el Teorema 1.0.10 se sigue que existe una x_0x_n -trayectoria dirigida monocromática, una contradicción.

Fijamos j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que (z_{j-1}, z_j) y (z_j, z_{j+1}) tienen color distinto. Supongamos además sin pérdida de generalidad que (z_{j-1}, z_j) tiene color 1 y (z_j, z_{j+1}) tiene color 2.

Afirmación 11(C.2). $j \in I_p$.

Esta afirmación se sigue de la *Afirmación 9(C.2)*, pues (z_{j-1}, z_j) tiene color 1 y (z_j, z_{j+1}) tiene color 2, es decir, hay un cambio de color en el vértice z_j .

Fijemos también i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_j$.

Afirmación 12(C.2). $\{(z_{j+3}, z_j), (z_{j+2}, z_{j-1}), (z_{j+1}, z_{j-2}), (z_j, z_{j-3})\} \subseteq F(D)$.

Esta afirmación se sigue directamente de la *Afirmación 8(C.2)*.

Afirmación 13(C.2). (z_{j+1}, z_{j+2}) y (z_{j+2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, digamos a , con $a \in \{1, 2\}$.

Consideramos a $C^2 = (z_{j-1}, z_j = x_i, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1})$ que por la *Afirmación 12(C.2)* es un ciclo dirigido de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático, pero como (z_{j-1}, z_j) tiene color 1 y (z_j, z_{j+1}) tiene color 2, obtenemos que (z_{j+1}, z_{j+2}) y (z_{j+2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, digamos a . Además $a \in \{1, 2\}$, pues C^2 solo tiene

dos colores, a saber 1 y 2.

Afirmación 14(C.2). (z_{j+1}, z_{j-2}) y (z_{j-2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, digamos b , con $b \in \{1, 2\}$.

Consideremos a $C^2 = (z_{j-2}, z_{j-1}, z_j = x_i, z_{j+1}, z_{j-2})$ que por la *Afirmación 12(C.2)* es un ciclo dirigido de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático, pero como (z_{j-1}, z_j) tiene color 1 y (z_j, z_{j+1}) tiene color 2, obtenemos que (z_{j+1}, z_{j-2}) y (z_{j-2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, digamos b . Además $b \in \{1, 2\}$, pues C^2 solo tiene dos colores, a saber 1 y 2.

Afirmación 15(C.2). $\{j-1, j+1\} \cap I_p = \emptyset$.

Supongamos en busca de una contradicción que $\{j-1, j+1\} \cap I_p \neq \emptyset$. Tenemos dos casos:

Caso 15(C.2).1. $j-1 \in I_p$.

Como $x_i = z_j$, es decir, j es un índice principal, y $j-1 \in I_p$, tenemos que $\ell(T_{i-1}) = 1$, esto es, $x_{i-1} = z_{j-1}$. Además, de la *Afirmación 13(C.2)*, (z_{j+1}, z_{j+2}) y (z_{j+2}, z_{j-1}) tienen el mismo color a . Si $a = 2$, $(x_i = z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1} = x_{i-1})$ es una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida de color 2 (debido a que de la *Afirmación 11(C.2)*, la flecha (z_j, z_{j+1}) tiene color 2), lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos ahora que $a = 1$. Así, de la *Afirmación 11(C.2)*, la flecha (z_j, z_{j+1}) tiene color 2 y la flecha (z_{j+1}, z_{j+2}) tiene color 1, por lo que de la *Afirmación 9(C.2)* se sigue que $j+1 \in I_p$, pero como $x_i = z_j$, entonces $\ell(T_i) = 1$ y por lo tanto $x_{i+1} = z_{j+1}$. De este modo, $(x_{i+1} = z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria dirigida de color 1 (debido a que de la *Afirmación 11(C.2)*, la flecha (z_{j-1}, z_j) tiene color 1), lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este caso 15(C.2).1 no

puede ocurrir.

Caso 15(C.2).2. $j + 1 \in I_p$.

Como $x_i = z_j$ y $j + 1 \in I_p$, tenemos que $\ell(T_i) = 1$, es decir, $x_{i+1} = z_{j+1}$. Además, de la *Afirmación 14(C.2)*, (z_{j+1}, z_{j-2}) y (z_{j-2}, z_{j-1}) tienen el mismo color b . Si $b = 1$, entonces $(x_{i+1} = z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 1 (debido a que de la *Afirmación 11(C.2)*, la flecha (z_{j-1}, z_j) tiene color 1), lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos ahora que $b = 2$. Así, de la *Afirmación 11(C.2)*, la flecha (z_{j-1}, z_j) tiene color 1 y la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) tiene color 2, por lo que de la *Afirmación 9(C.2)* se sigue que $j - 1 \in I_p$, pero ya vimos en el caso 15(C.2).1 que esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, este caso 15(C.2).2 no puede ocurrir.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que la *Afirmación 15(C.2)* es verdadera.

Afirmación 16(C.2). (z_{j+1}, z_{j+2}) es de color 2.

En efecto, recordemos que de la *Afirmación 13(C.2)*, la flecha (z_{j+1}, z_{j+2}) tiene color a , con $a \in \{1, 2\}$. En caso de que $a = 1$, de la *Afirmación 9(C.2)* tenemos que $j + 1 \in I_p$ (pues de la *Afirmación 10(C.2)*, la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2), pero esto es una contradicción a la *Afirmación 15(C.2)*. Por lo tanto, la flecha (z_{j+1}, z_{j+2}) tiene color 2.

Afirmación 17(C.2). (z_{j-2}, z_{j-1}) es de color 1.

Recordemos que de la *Afirmación 14(C.2)*, la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) tiene color b , con $b \in \{1, 2\}$. En caso de que $b = 2$, de la *Afirmación 9(C.2)* tenemos que $j - 1 \in I_p$ (pues de la *Afirmación 10(C.2)* la flecha (z_{j-1}, z_j) es de color 1), pero esto es impo-

sible, debido a la *Afirmación 15(C.2)*. Por lo tanto, la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) tiene color 1.

Afirmación 18(C.2). (z_{j+2}, z_{j-1}) es de color 2.

Efectivamente, de la *Afirmación 13(C.2)* tenemos que las flechas (z_{j+1}, z_{j+2}) y (z_{j+2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, pero de la *Afirmación 16(C.2)*, la flecha (z_{j+1}, z_{j+2}) tiene color 2. Por lo tanto, la flecha (z_{j+2}, z_{j-1}) es de color 2.

Afirmación 19(C.2). (z_{j+1}, z_{j-2}) es de color 1.

Efectivamente, de la *Afirmación 14(C.2)* tenemos que las flechas (z_{j+1}, z_{j-2}) y (z_{j-2}, z_{j-1}) tienen el mismo color, pero de la *Afirmación 17(C.2)*, la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) tiene color 1. Por lo tanto, la flecha (z_{j+1}, z_{j-2}) es de color 1.

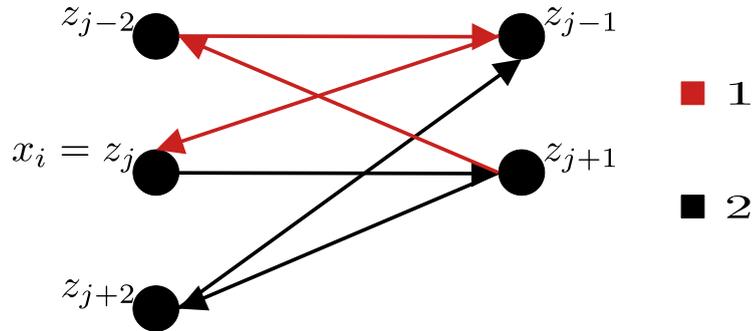


Figura 2.9: Coloraciones de D que sabemos hasta la *Afirmación 19(C.2)*

Analizamos ahora dos posibles casos, $j + 2 \in I_p$ o $j + 2 \notin I_p$.

Caso C.2.1. $j + 2 \notin I_p$.

De la *Afirmación 15(C.2)* sabemos que $j + 1 \notin I_p$, por lo que en este caso tenemos que $\ell(T_i) = 4$. Así, $j + 4 \in I_p$ y $x_{i+1} = z_{j+4}$. Para llegar a una contradicción veamos primero que se cumplen las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1(C.2.1). Las flechas (z_{j+2}, z_{j+3}) y (z_{j+3}, z_{j+4}) tienen color 2.

En efecto, como $T_i = (x_i = z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4} = x_{i+1})$ es una trayectoria dirigida monocromática que además es de color 2, pues de la *Afirmación 10(C.2)* la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2, entonces se sigue la *Afirmación 1(C.2.1)*.

Afirmación 2(C.2.1). $(z_{j+4}, z_{j-3}) \in F(D)$.

Como $(j-3) - (j+4) \equiv 1 \pmod{4}$ y $j+4 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(z_{j+4}, z_{j-3}) \in F(D)$.

Afirmación 3(C.2.1). $(z_{j-1}, z_{j+4}) \in F(D)$.

Como $(j-1) - (j+4) \equiv 3 \pmod{4}$ y $j+4 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j-1}, z_{j+4}) \in F(D)$.

Afirmación 4(C.2.1). $\{(z_{j+4}, z_{j+1}), (z_{j+3}, z_j)\} \subseteq F(D)$.

Esta afirmación se sigue directamente de la *Afirmación 8(C.2)*.

Afirmación 5(C.2.1). La flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) no tiene color 1.

Supongamos en busca de una contradicción que la flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) sí tiene color 1. Así, de las *Afirmaciones 17(C.2), 19(C.2)* y *10(C.2)*, obtenemos que $(x_{i+1} = z_{j+4}, z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 1, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, la flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) no tiene color 1.

Afirmación 6(C.2.1). La flecha (z_{j-1}, z_{j+4}) tiene color 1.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_{j+4}, z_{j+1})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Tenemos que de la *Afirmación 19(C.2)* la flecha (z_{j+1}, z_{j-2}) es de color 1, de la *Afirmación 17(C.2)* la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) es

de color 1 y de la *Afirmación 5(C.2.1)* la flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) no tiene color 1. Por lo tanto, podemos concluir que la flecha (z_{j-1}, z_{j+4}) también tiene color 1.

Afirmación 7(C.2.1). La flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) tiene color 2.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1}, z_{j+4}, z_{j+1})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Tenemos que de la *Afirmación 16(C.2)* la flecha (z_{j+1}, z_{j+2}) es de color 2, de la *Afirmación 18(C.2)* la flecha (z_{j+2}, z_{j-1}) es de color 2 y de la *Afirmación 6(C.2.1)* la flecha (z_{j-1}, z_{j+4}) tiene color 1. Por lo tanto, podemos concluir que la flecha (z_{j+4}, z_{j+1}) también tiene color 2.

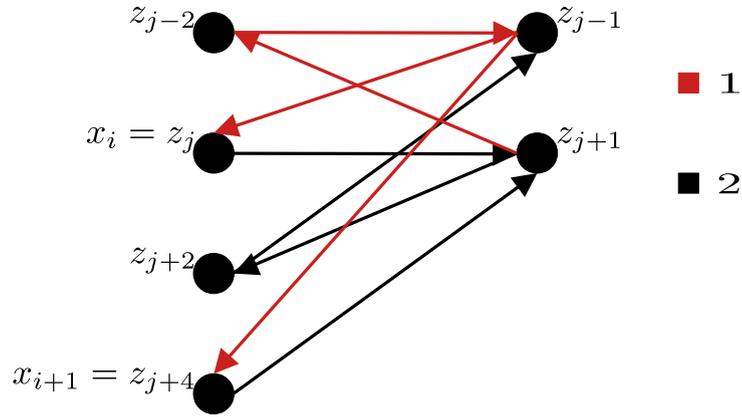


Figura 2.10: Coloraciones de D que sabemos hasta la *Afirmación 7(C.2.1)*

Afirmación 8(C.2.1). $(z_{j-3}, z_{j+2}) \in F(D)$.

Como $(j - 3) - (j + 2) \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tenemos que $\{(z_{j+2}, z_{j-3}), (z_{j-3}, z_{j+2})\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Supongamos en busca de una contradicción que $(z_{j+2}, z_{j-3}) \in F(D)$. Entonces $(z_{j+2}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis debería ser monocromático, pero de la *Afirmación 10(C.2)* tenemos que la flecha (z_{j-1}, z_j) es de color 1 y la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2, una contradicción. Por lo tanto, $(z_{j-3}, z_{j+2}) \in F(D)$.

Afirmación 9(C.2.1). $(z_{j-2}, z_{j+3}) \in F(D)$.

Como $(j - 2) - (j + 3) \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tenemos que $\{(z_{j+3}, z_{j-2}), (z_{j-2}, z_{j+3})\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Supongamos en busca de una contradicción que $(z_{j+3}, z_{j-2}) \in F(D)$. Se sigue que $(z_{j+3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis debería ser monocromático, pero de la *Afirmación 10(C.2)* tenemos que la flecha (z_{j-1}, z_j) es de color 1 y la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2, una contradicción. Por lo tanto, $(z_{j-2}, z_{j+3}) \in F(D)$.

Afirmación 10(C.2.1). La flecha (z_{j+3}, z_j) no es de color 2.

Supongamos en busca de una contradicción que la flecha (z_{j+3}, z_j) sí es de color 2. De esta suposición y de las *Afirmaciones 16(C.2), 1(C.2.1)* y *7(C.2.1)* se sigue que $(x_{i+1} = z_{j+4}, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 2, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, la flecha (z_{j+3}, z_j) no es de color 2.

Afirmación 11(C.2.1). Las flechas (z_{j-2}, z_{j+3}) y (z_{j+3}, z_j) tienen color 1.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+3}, z_j, z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j+3})$ que es de longitud 4, y por hipótesis casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación 10(C.2)* la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2, y de la *Afirmación 19(C.2)* la flecha (z_{j+1}, z_{j-2}) es de color 1. Así, las flechas (z_{j-2}, z_{j+3}) y (z_{j+3}, z_j) deben ser ambas de color 1 o color 2, pero de la *Afirmación 10(C.2.1)*, la flecha (z_{j+3}, z_j) no es de color 2, por lo que podemos concluir que las flechas (z_{j-2}, z_{j+3}) y (z_{j+3}, z_j) tienen color 1.

Afirmación 12(C.2.1). Las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) tienen el mismo color c , con c en $\{1, 2\}$.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j-2}, z_{j+3}, z_{j+4}, z_{j-3}, z_{j-2})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación 11(C.2.1)*

la flecha (z_{j-2}, z_{j+3}) tiene color 1, y de la *Afirmación 1(C.2.1)* la flecha (z_{j+3}, z_{j+4}) tiene color 2. Así, las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) tienen el mismo color, digamos c , con c en $\{1, 2\}$.

Por un lado, si las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) tienen color 1, entonces $(x_{i+1} = z_{j+4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 1 (debido a la *Afirmación 10(C.2)*), lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por otro lado, si las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) tienen color 2, entonces el ciclo dirigido de longitud 4, $(z_{j-1}, z_{j+4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1})$ es tal que las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) tienen color 2 y las flechas (z_{j-1}, z_{j+4}) y (z_{j-2}, z_{j-1}) tienen color 1 (debido a las *Afirmaciones 6(C.2.1)* y *17(C.2)*), lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis, pues este ciclo dirigido debería ser casi monocromático. En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que el *Caso C.2.1* no puede suceder.

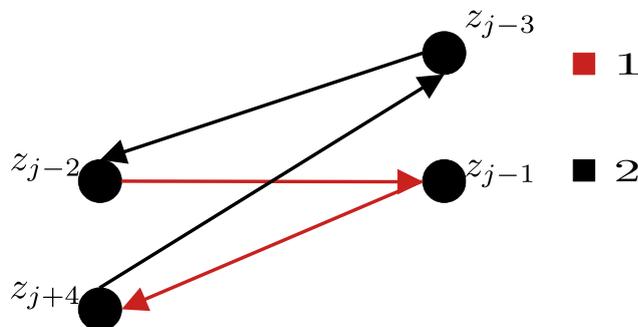


Figura 2.11: *Caso (C.2.1)* en el que las flechas (z_{j+4}, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j-2}) son de color 2.

Caso C.2.2. $j + 2 \in I_p$.

Como $j + 1 \notin I_p$, tenemos que $\ell(T_i) = 2$, esto es, $x_{i+1} = z_{j+2}$. Para llegar a una contradicción veamos primero que se cumplen las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1(C.2.2). $(z_{j+2}, z_{j-5}) \in F(D)$.

Como $(j - 5) - (j + 2) \equiv 1 \pmod{4}$ y $j + 2 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(z_{j+2}, z_{j-5}) \in F(D)$.

Afirmación 2(C.2.2). $(z_{j-3}, z_{j+2}) \in F(D)$.

Como $(j-3) - (j+2) \equiv 3 \pmod{4}$ y $j+2 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j-3}, z_{j+2}) \in F(D)$.

Afirmación 3(C.2.2). $(z_{j-4}, z_{j+1}) \in F(D)$.

Como $(j-4) - (j+1) \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tenemos que $\{(z_{j-4}, z_{j+1}), (z_{j+1}, z_{j-4})\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Supongamos en busca de una contradicción que $(z_{j+1}, z_{j-4}) \in F(D)$. Así, $(z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis debería ser monocromático, pero de la *Afirmación 10(C.2)* tenemos que la flecha (z_{j-1}, z_j) es de color 1 y la flecha (z_j, z_{j+1}) es de color 2, una contradicción. Por lo tanto, $(z_{j-4}, z_{j+1}) \in F(D)$.

Afirmación 4(C.2.2). $(z_{j-1}, z_{j-4}) \in F(D)$.

Esta afirmación se sigue directamente de la *Afirmación 8(C.2)*.

Afirmación 5(C.2.2). $(z_{j-5}, z_j) \in F(D)$.

Como $(j-5) - j \equiv 3 \pmod{4}$ y $j \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j-5}, z_j) \in F(D)$.

Afirmación 6(C.2.2). $(z_{j-2}, z_{j-5}) \in F(D)$.

Esta afirmación se sigue directamente de la *Afirmación 8(C.2)*.

Afirmación 7(C.2.2). Las flechas (z_j, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j+2}) tienen color 2.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j-1}, z_j, z_{j-3}, z_{j+2}, z_{j-1})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación 10(C.2)* la

flecha (z_{j-1}, z_j) es de color 1, y de la *Afirmación 18(C.2)* la flecha (z_{j+2}, z_{j-1}) es de color 2. Así, las flechas (z_j, z_{j-3}) y (z_{j-3}, z_{j+2}) tienen el mismo color, digamos d , con d en $\{1, 2\}$. Supongamos en busca de una contradicción que $d = 1$ y consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+2}, z_{j-1}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j+2})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Como la flecha (z_{j+2}, z_{j-1}) es de color 2 y estamos suponiendo que la flecha (z_{j-3}, z_{j+2}) es de color 1, entonces las flechas (z_{j-1}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son ambas de color 1, o bien de color 2. Analicemos ambas posibilidades.

Caso 7(C.2.2)A. Las flechas (z_{j-1}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 1.

Recordemos que de la *Afirmación 15(C.2)*, $j-1 \notin I_p$, así que $x_{i-1} \in \{z_{j-2}, z_{j-4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 2 o 4. Notemos además que la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) no es de color 1 (digamos que es de color 3), pues en caso contrario $(x_i = z_j, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_{j-4})$ es un camino dirigido de color 1 que contiene a x_{i-1} (debido a la *Afirmación 17(C.2)*), existiendo así una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo nuestra suposición. Ahora, como en los vértices z_{j-3} y z_{j-2} hay un cambio de color, de la *Afirmación 9(C.2)* tenemos que $\{j-3, j-2\} \subseteq I_p$, donde al tener que $j-1 \notin I_p$ se sigue que $x_{i-1} = z_{j-2}$ y $x_{i-2} = z_{j-3}$. Así, $(x_{i-1} = z_{j-2}, z_{j-1}, z_{j-4}, z_{j-3} = x_{i-2})$ es una $x_{i-1} x_{i-2}$ -trayectoria dirigida de color 1, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este caso 7(C.2.2)A no puede ocurrir.

Caso 7(C.2.2)B. Las flechas (z_{j-1}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 2.

Consideremos al ciclo dirigido $(z_{j-1}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación 17(C.2)* la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) es de color 1 y estamos suponiendo que las flechas (z_{j-1}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 2, por lo que podemos concluir que la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) también es de color 2. Así, la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) es de color 2 y la flecha (z_{j-2}, z_{j-1}) es de color 1, por lo que de la *Afirmación 9(C.2)* se sigue que $j-2 \in I_p$ y

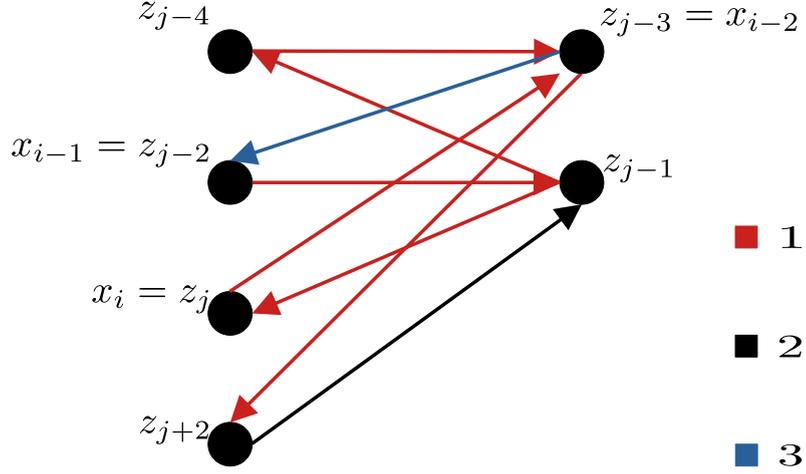


Figura 2.12: Caso $\gamma(C.2.2)A$.

de la *Afirmación 15(C.2)* $j - 1 \notin I_p$, obtenemos que $x_{i-1} = x_{j-2}$. Finalmente, $(x_i = z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2} = x_{i-1})$ es una $x_i x_{i-1}$ -trayectoria dirigida de color 2 (debido a las *Afirmaciones 10(C.2)*, *16(C.2)* y *18(C.2)*), lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este caso $\gamma(C.2.2)B$ no puede ocurrir. En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo necesariamente debe ocurrir que $d = 2$, así la *Afirmación $\gamma(C.2.2)$* es verdadera.

Afirmación 8(C.2.2). La flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) tiene color 1.

Consideremos al ciclo dirigido $(z_{j-2}, z_{j-1}, z_j, z_{j-3}, z_{j-2})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación $\gamma(C.2.2)$* la flecha (z_j, z_{j-3}) tiene color 2 y de las *Afirmaciones 17(C.2)* y *10(C.2)* las flechas (z_{j-2}, z_{j-1}) y (z_{j-1}, z_j) tienen color 1, por lo que necesariamente ocurre que la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) también tiene color 1.

Afirmación 9(C.2.2). Las flechas (z_{j-2}, z_{j-5}) y (z_{j-5}, z_j) tienen color 1.

Consideremos al ciclo dirigido $(z_j, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-5}, z_j)$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación $\gamma(C.2.2)$* la

flecha (z_j, z_{j-3}) tiene color 2 y de la *Afirmación 8(C.2.2)* la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) tiene color 1. Así, las flechas (z_{j-2}, z_{j-5}) y (z_{j-5}, z_j) tienen el mismo color, digamos d , con d en $\{1, 2\}$. Supongamos en busca de una contradicción que $d = 2$. Denotemos por a al color de la flecha (z_{j+2}, z_{j-5}) y observemos que $a \neq 2$, pues en caso contrario $(x_{i+1} = z_{j+2}, z_{j-5}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 2, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por otra parte, las flechas (z_{j-5}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son ambas de color 1, o bien de color 2 (debido a que el ciclo dirigido $(z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-5})$ es casi monocromático y la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) es de color 1, y la flecha (z_{j-2}, z_{j-5}) es de color 2). Analicemos ambas posibilidades.

Caso 9(C.2.2)A. las flechas (z_{j-5}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 1.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j+2})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. De la *Afirmación 7(C.2.2)* la flecha (z_{j-3}, z_{j+2}) es de color 2 y estamos suponiendo que las flechas (z_{j-5}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 1, por lo que debe ocurrir que la flecha (z_{j+2}, z_{j-5}) es de color 1. Así, $(x_{i+1} = z_{j+2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-1}, z_j = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida de color 1 (debido a las *Afirmaciones 8(C.2.2)*, *17(C.2)* y *10(C.2)*), lo cual es una contradicción a nuestra suposición.

Caso 9(C.2.2)B. las flechas (z_{j-5}, z_{j-4}) y (z_{j-4}, z_{j-3}) son de color 2.

En este caso la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) es de color 2 y por la *Afirmación 8(C.2.2)* la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) es de color 1, por la *Afirmación 9(C.2)* podemos concluir que $j - 3$ es un índice principal, pero como $j - 1 \notin I_p$ (por la *Afirmación 15(C.2)*) y $\ell(T_{i-1})$ debe ser 1, 2 o 4; debe ocurrir que $j - 2 \in I_p$ y de este modo $x_{i-2} = z_{j-3}$ y $x_{i-1} = z_{j-2}$. Así, $(x_{i-1} = z_{j-2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3} = x_{i-2})$ es una $x_{i-1}x_{i-2}$ -trayectoria dirigida de color 2, lo cual es una contradicción a nuestra suposición.

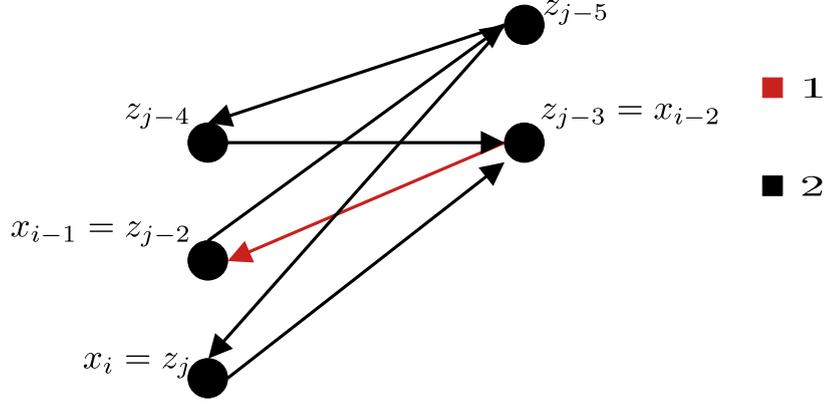


Figura 2.13: Caso 9(C.2.2)B.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo necesariamente debe ocurrir que $d = 1$, así la *Afirmación 9(C.2.2)* es verdadera.

Afirmación 10(C.2.2). La flecha (z_{j+2}, z_{j-5}) tiene color 2.

Consideremos el ciclo dirigido $(z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-5}, z_j)$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que de la *Afirmación 10(C.2)* y la *Afirmación 16(C.2)*, las flechas (z_j, z_{j+1}) y (z_{j+1}, z_{j+2}) son de color 2, además de la *Afirmación 9(C.2.2)* la flecha (z_{j-5}, z_j) es de color 1, por lo que necesariamente debe ocurrir que la flecha (z_{j+2}, z_{j-5}) tiene color 2.

Afirmación 11(C.2.2). La flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) no tiene color 2.

Supongamos en busca de una contradicción que la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) sí tiene color 2. De la *Afirmación 8(C.2.2)* tenemos que la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) es de color 1, podemos concluir de la *Afirmación 9(C.2)* que $j - 3 \in I_p$.

Consideremos por otra parte al ciclo dirigido $(z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-5})$ que es de longitud 4, el cual es casi monocromático por hipótesis. Recordemos que de la *Afirmación 8(C.2.2)* tenemos que la flecha (z_{j-3}, z_{j-2}) es de color 1 y de la *Afirmación 9(C.2.2)* la flecha (z_{j-2}, z_{j-5}) es también de color 1 y estamos supo-

niendo que la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) es de color 2, por lo que podemos concluir que la flecha (z_{j-5}, z_{j-4}) es de color 1 y nuevamente de la *Afirmación 9(C.2)* obtenemos que $j-4 \in I_p$. Sea r en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_r = z_{j-4}$. Como $j-3 \in I_p$, tenemos que $\ell(T_r) = 1$, por lo que $x_{r+1} = z_{j-3}$. Finalmente, $(x_{r+1} = z_{j-3}, z_{j-2}, z_{j-5}, z_{j-4} = x_r)$ es una $x_{r+1}x_r$ -trayectoria dirigida de color 1, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) no tiene color 2.

Afirmación 12(C.2.2). La flecha (z_{j-5}, z_{j-4}) tiene color 2.

En efecto, consideremos el ciclo dirigido $(z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j+2}, z_{j-5})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que por las *Afirmaciones 7(C.2.2)* y *10(C.2.2)* las flechas (z_{j-3}, z_{j+2}) y (z_{j+2}, z_{j-5}) son de color 2 y por la *Afirmación 11(C.2.2)* la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) no tiene color 2, por lo que podemos concluir que la flecha (z_{j-5}, z_{j-4}) tiene color 2.

Afirmación 13(C.2.2). La flecha (z_{j-4}, z_{j+1}) tiene color 1.

Efectivamente, consideremos el ciclo dirigido $(z_{j+1}, z_{j-2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j+1})$ que es de longitud 4, el cual por hipótesis es casi monocromático. Recordemos que por las *Afirmaciones 19(C.2)* y *9(C.2.2)* las flechas (z_{j+1}, z_{j-2}) y (z_{j-2}, z_{j-5}) son de color 1 y por la *Afirmación 12(C.2.2)* la flecha (z_{j-5}, z_{j-4}) es de color 2, por lo que podemos concluir que la flecha (z_{j-4}, z_{j+1}) también tiene color 1.

Afirmación 14(C.2.2) La digráfica $D[S]$, generada por el conjunto de vértices $S = \{z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-2}\}$ es isomorfa a la digráfica 2-coloreada \tilde{T}_6 . Considera la función $\varphi : S \rightarrow V(\tilde{T}_6)$ dada por $\varphi(z_j) = x, \varphi(z_{j+1}) = y, \varphi(z_{j+2}) = v, \varphi(z_{j-5}) = w, \varphi(z_{j-4}) = z, \varphi(z_{j-2}) = u$, la cual claramente es biyectiva, en la Figura 2.14 se muestra que preserva adyacencias y además tiene la misma coloración del

torneo bipartito \tilde{T}_6 debido a las *Afirmaciones* 10(C.2), 16(C.2), 19(C.2), 9(C.2.2), 10(C.2.2), 12(C.2.2) y 13(C.2.2).

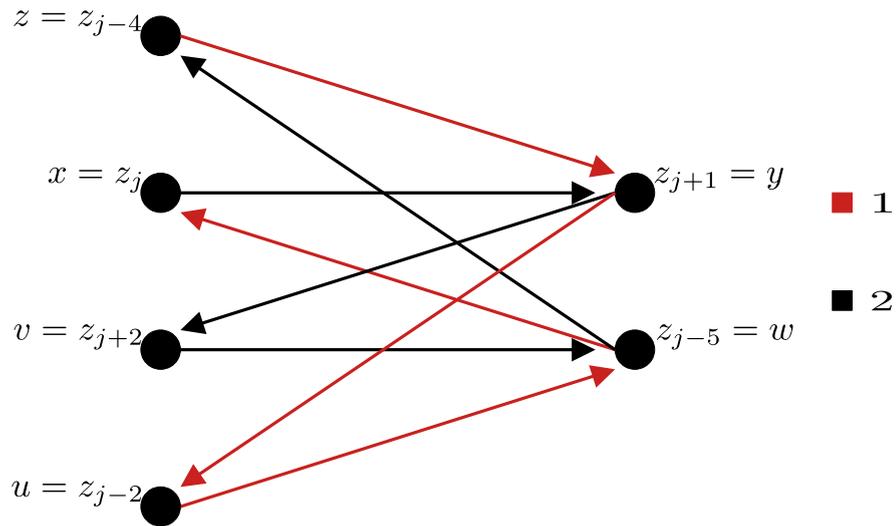


Figura 2.14: Subdigráfica $D[S]$ de D .

La *Afirmación* 14(C.2.2) contradice nuestra hipótesis, por lo que el *Caso* C.2.2 no puede ocurrir y en consecuencia el *Caso* C.2 tampoco puede suceder. Por lo tanto, el Teorema 2.0.1 se satisface.

■

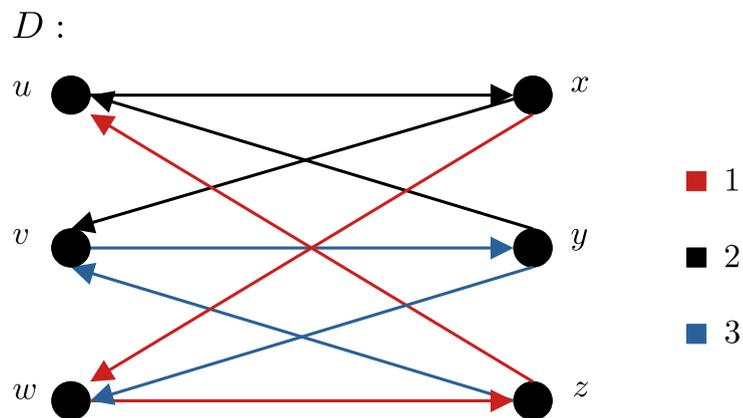


Figura 2.15: Torneo bipartito 3-coloreado D .

Observación 2.0.1. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 6 debe ser monocromático en el Teorema 2.0.1 es justa.*

Demostración. En efecto, consideremos el torneo bipartito 3-coloreado D que se puede ver en la Figura 2.15 dado por el conjunto de vértices $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$, el conjunto de flechas $F(D) = \{(u, x), (x, v), (v, y), (y, w), (w, z), (z, u), (x, w), (y, u), (z, v)\}$ y en donde las flechas $(x, w), (w, z)$ y (z, u) tienen color 1; las flechas $(y, u), (u, x)$ y (x, v) tienen color 2; y las flechas $(z, v), (v, y)$ y (y, w) tienen color 3. Notemos que en D únicamente hay tres ciclos dirigidos de longitud 4, a saber, $C^1 = (u, x, v, y, u), C^2 = (u, x, w, z, u), C^3 = (v, y, w, z, v)$, los cuales son todos casi monocromáticos. Además en D hay un único ciclo dirigido de longitud 6, a saber, $C = (u, x, v, y, w, z, u)$, el cual no es monocromático. Por último, D no contiene subtorneos bipartitos isomorfos a \tilde{T}_6 , pues en \tilde{T}_6 hay un conjunto independiente de cardinalidad 4 y en D el conjunto independiente de cardinalidad máxima es 3. Finalmente, $\mathcal{C}(D)$ (Figura 2.16) resulta ser una multidigráfica que no tiene núcleo. ■

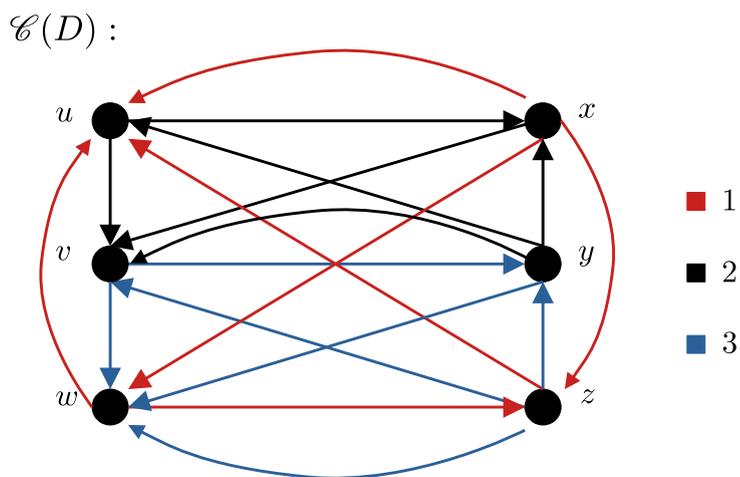


Figura 2.16: Cerradura del torneo bipartito 3-coloreado D .

Observación 2.0.2. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 6 en un torneo bipartito D es monocromático no implica que todo ciclo dirigido de longitud 4 en D es casi monocromático.*

Demostración. Consideremos al torneo bipartito 2-coloreado $T = (U, W)$ (Figura 2.17), definido por la bipartición $U = \{u, v, w, x, y\}$ y $W = \{a, b, c, d, e\}$. Las flechas de T y su coloración están dadas como sigue: $C^1 = (u, a, v, b, w, c, u)$ es un 6-ciclo dirigido de color 1; $C^2 = (x, d, y, e, x)$ es un 4-ciclo dirigido donde las flechas $(x, d), (y, e)$ son de color 1 y las flechas $(d, y), (e, x)$ son de color 2; las flechas que se forman del conjunto $U \cap V(C^1)$ al conjunto $W \cap V(C^2)$ tienen color 1; las flechas que se forman del conjunto $W \cap V(C^1)$ al conjunto $U \cap V(C^2)$ tienen color 1 y por último, T contiene las flechas $(u, b), (a, w)$ y (c, v) coloreadas de color 1. Observemos que C^1 es el único 6-ciclo dirigido en T y que C^2 es el único 4-ciclo dirigido contenido en T que no resulta ser casi monocromático, pues tiene dos flechas de color 1 y dos flechas de color 2. ■

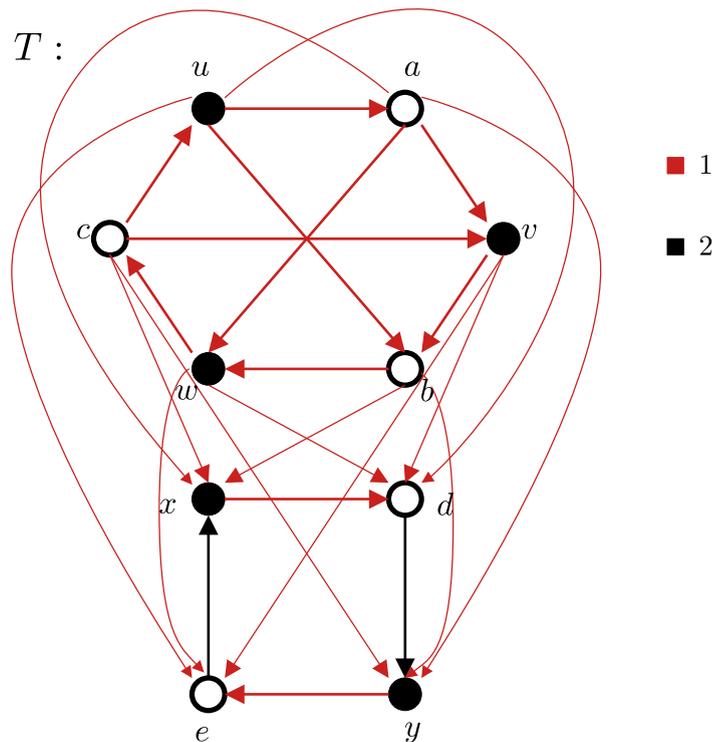


Figura 2.17: Todo ciclo dirigido de longitud 6 es monocromático y sin embargo no todo ciclo dirigido de longitud 4 es casi monocromático.

Capítulo 3

H -núcleos en torneos bipartitos

H -coloreados

En este capítulo presentamos el resultado principal de esta tesis, el cual es una generalización del Teorema 2.0.1 del capítulo anterior. Para ello primero presentamos la definición y algunos resultados básicos de la H -coloración, así como la generalización del Lema 1.0.11 que utilizaremos para demostrar nuestro resultado principal.

Dada una digráfica H posiblemente con lazos y una digráfica D sin lazos, definimos una **H -coloración** de la digráfica D como una función $c : F(D) \rightarrow V(H)$, esto es, vamos a colorear las flechas de la digráfica D con los vértices de la digráfica H . Llamamos al conjunto $V(H)$ **paleta de colores** y a sus elementos **colores**. Decimos que un camino dirigido $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ en D es un **H -camino** si $(c(v_i, v_{i+1}), c(v_{i+1}, v_{i+2}))$ es una flecha en H para cada i en $\{0, 1, \dots, k-2\}$, esto es, los colores consecutivos del camino W son flechas en H . Si W es una trayectoria, decimos que es una **H -trayectoria** y si W es un ciclo donde los colores de la última flecha y la primera flecha son vértices adyacentes en H , entonces decimos que W es un **H -ciclo**. Por otra parte, decimos que W tiene una **H -obstrucción** en el vértice

v_i si $(c(v_{i-1}, v_i), c(v_i, v_{i+1}))$ no es una flecha en H para i en $\{1, 2, \dots, k-1\}$, y en el caso en que W es un camino cerrado, es decir, $v_0 = v_k$, v_0 es una H -obstrucción si $(c(v_{k-1}, v_k), c(v_k, v_1))$ no es una flecha en H . En la Figura 3.1 tenemos una digráfica H -coloreada D , bajo la función $c : F(D) \rightarrow V(H)$, cuya regla de correspondencia es la siguiente: $c(u, v) = 2, c(v, x) = 3 = c(x, y)$ y $c(y, v) = 1$. En D , tenemos a (u, v, x, y) como ejemplo de una H -trayectoria dirigida y a y como una H -obstrucción en el camino dirigido (v, x, y, v) .

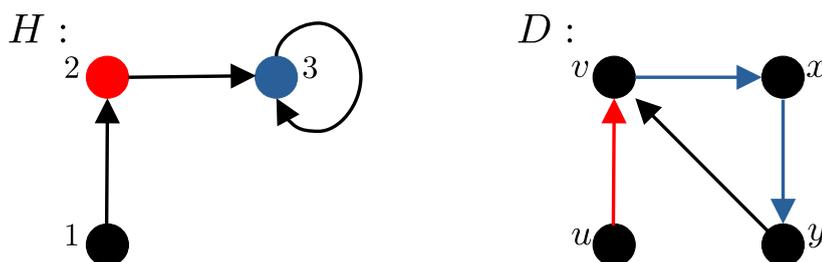


Figura 3.1: Digráfica H -coloreada D .

Consideremos H una digráfica que consta únicamente de vértices aislados que tienen lazos y sea D una digráfica H -coloreada. Observemos que si consideramos un H -camino en D , entonces las flechas de dicho camino constan de un único vértice en H , es decir, tendrán asignado el mismo vértice de H , por lo que podríamos considerarlo como un camino monocromático. Así, esta definición extiende la definición de m -coloración cuando H consta de m vértices aislados con lazos en cada vértice. Veamos ahora algunos resultados y algunas diferencias que hay con respecto a la coloración usual que resultan básicos en la teoría de la H -coloración y que estaremos utilizando en lo que resta de este trabajo.

Teorema 3.0.1. *Sea D una digráfica H -coloreada. Si W_1 y W_2 son H -caminos tales que la última flecha del camino W_1 es la primera flecha del camino W_2 , entonces la concatenación de W_1 con W_2 es un H -camino.*

Demostración. Sean $W_1 = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ y $W_2 = (u_0, u_1, \dots, u_l)$, H -caminos ta-

les que $(v_{k-1}, v_k) = (u_0, u_1)$. Veamos que $W = (v_0, W_1, v_k) \cup (v_k = u_1, W_2, u_l) = (x_0, x_1, \dots, x_{k+l-1})$ es H -camino. Como W_1 es un H -camino ya tenemos que se satisface la definición para cada i en $\{0, 1, \dots, k-2\}$, por lo que resta ver que se satisface para cada i en $\{k-1, k, \dots, k+l-3\}$, pero esto ya se cumple, pues si i está en $\{k-1, k, \dots, k+l-3\}$, entonces $x_i = u_{i-(k-1)}$, por lo que obtenemos el camino W_2 que por hipótesis es H -coloreado. Por lo tanto, W es un H -camino. ■

Observación 3.0.1. *La hipótesis de que se debe compartir una flecha es necesaria.*

Demostración. En efecto, consideremos las digráficas en la Figura 3.2, es decir, a la digráfica H cuyo conjunto de vértices es $V(H) = \{1, 2, 3\}$ y conjunto de flechas es $F(H) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$. Por otra parte definimos a D como la digráfica con conjunto de vértices $V(D) = \{u, v, x, y\}$, conjunto de flechas $F(D) = \{(u, v), (v, x), (x, y), (y, v)\}$ y consideramos la H -coloración c que viene dada por la siguiente regla de correspondencia: $c(u, v) = 1 = c(y, v)$, $c(v, x) = 2$, $c(x, y) = 3$. Notemos que las trayectorias dirigidas $W_1 = (u, v, x, y)$ y $W_2 = (y, v)$ son H -trayectorias que cumplen que el último vértice de W_1 es el primer vértice de W_2 y sin embargo, $W_1 \cup W_2$ no es una H -trayectoria, pues $(c(x, y), c(y, v)) = (3, 1)$ que no es una flecha de la digráfica H . ■

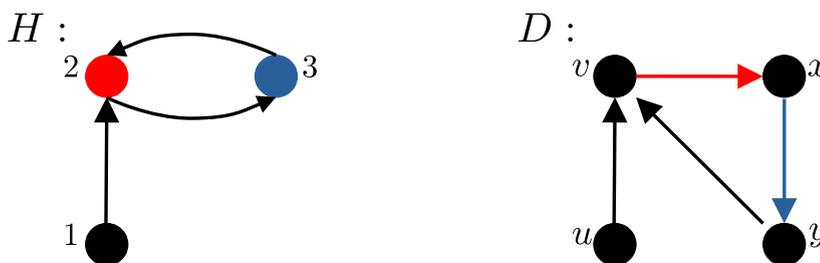


Figura 3.2: Las trayectorias dirigidas $W_1 = (u, v, x, y)$ y $W_2 = (y, v)$ son H -trayectorias y sin embargo $W_1 \cup W_2$ no lo es.

Observación 3.0.2. *Sea D una digráfica H -coloreada y sean u y v dos vértices distintos de D . No todo uv - H -camino dirigido contiene una uv - H -trayectoria dirigida.*

Demostración. En la Figura 3.3, (u, w, x, y, w, v) es un uv - H -camino contenido en D , que contiene una única uv -trayectoria dirigida, a saber (u, w, v) , sin embargo, ésta no resulta ser una uv - H -trayectoria. ■

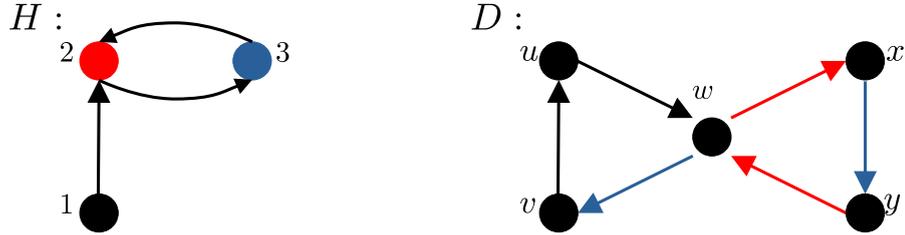


Figura 3.3: No todo uv - H -camino contiene una uv - H -trayectoria.

Como lo que buscamos es llevar el resultado del Teorema 2.0.1 en términos de la H -coloración, veamos lo que vendría siendo el análogo de algunas definiciones de la coloración usual en la H -coloración.

Dada una digráfica H posiblemente con lazos y una digráfica H -coloreada D , decimos que un subconjunto N de los vértices de D es un **H -núcleo** si satisface que:

- (i) Entre cualesquiera par de vértices u y v de N no existe una uv - H -trayectoria.
- (ii) Para cada x en $V(D) - N$ existe un vértice en v en N tal que existe una xv - H -trayectoria.

Definimos también la **H -cerradura** de D , denotada por $\mathfrak{C}_H(D)$, como la multidigráfica con conjunto de vértices $V(\mathfrak{C}_H(D)) = V(D)$ y conjunto de flechas $F(\mathfrak{C}_H(D)) = \{(u, v) : \text{existe una } uv\text{-}H\text{-trayectoria contenida en } D\}$. Es fácil notar que al igual que con la m -coloración, con esta definición también sucede que $\mathfrak{C}_H(D) \cong \mathfrak{C}_H(\mathfrak{C}_H(D))$. Por otra parte el Teorema 1.0.9 y el Lema 1.0.11 en este nuevo contexto de la H -coloración se siguen cumpliendo, es decir, se satisfacen el Teorema 3.0.2 y el Lema 3.0.3.

Teorema 3.0.2. *Si H es una digráfica posiblemente con lazos y D una digráfica H -coloreada. Entonces D tiene H -núcleo si y solo si $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. (\implies) Supongamos que D tiene un H -núcleo, digamos N . Afirmamos que N es un núcleo de $\mathfrak{C}_H(D)$.

Primero veamos que N es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}_H(D)$. Sean u y v vértices distintos en N , como N es H -núcleo en D , no existen uv - H -trayectorias contenidas en D , por lo que de la definición de $F(\mathfrak{C}_H(D))$ se sigue que (u, v) no es una flecha en $\mathfrak{C}_H(D)$. Veamos ahora que N es un conjunto absorbente, para ello sea x un vértice en $V(\mathfrak{C}_H(D)) - N$. Como $V(\mathfrak{C}_H(D)) = V(D)$, x es un vértice en $V(D) - N$, y como N es H -núcleo de D , existe un vértice v en N tal que existe una xv - H -trayectoria contenida en D , por lo que de la definición de $F(\mathfrak{C}_H(D))$, (x, v) es una flecha de $\mathfrak{C}_H(D)$. Por lo tanto, N es un núcleo de $\mathfrak{C}_H(D)$.

(\impliedby) Supongamos que $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene núcleo, digamos N . Afirmamos que N es un H -núcleo de D .

Primero veamos que entre cualquier par de vértices de N no hay H -trayectorias. Sean u y v dos vértices distintos en N , de existir una uv - H -trayectoria contenida en D , de la definición de $F(\mathfrak{C}_H(D))$ tendríamos que (u, v) es una flecha en $\mathfrak{C}_H(D)$, pero esto no puede pasar debido a que N es un núcleo en $\mathfrak{C}_H(D)$ y, por lo tanto es un conjunto independiente. Así, no existen uv - H -trayectorias contenida en D . Veamos ahora que para cualquier vértice x en $V(D) - N$, existe un vértice v en N tal que existe una xv - H -trayectoria contenida en D . Sea x un vértice en $V(D) - N$, como $V(\mathfrak{C}_H(D)) = V(D)$, tenemos que x es un vértice en $V(\mathfrak{C}_H(D)) - N$, y como N es núcleo de $\mathfrak{C}_H(D)$, existe un vértice v en N tal que (x, v) es una flecha de $\mathfrak{C}_H(D)$. Así, de la definición de $F(\mathfrak{C}_H(D))$ obtenemos que existe una xv - H -trayectoria contenida en D . Por lo tanto, N es un H -núcleo en D . ■

Lema 3.0.3. *Sean H una digráfica posiblemente con lazos y $D=(V_0, V_1)$ un torneo*

bipartito H -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 es un H -ciclo. Si para u y v vértices de D existe una uv - H -trayectoria dirigida y no existe una vu - H -trayectoria dirigida en D , entonces alguno de los siguientes enunciados se satisface:

(i) $(u, v) \in F(D)$.

(ii) Existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

(iii) Existe una uv - H -trayectoria dirigida de longitud 4.

Demostración. Sean u y v vértices de D tales que existe una uv - H -trayectoria dirigida en D y no existe una vu - H -trayectoria dirigida. Observemos que si existe una uv - H -trayectoria dirigida de longitud impar, entonces del Lema 1.0.7 se sigue que $(u, v) \in F(D)$ o bien $(v, u) \in F(D)$, pero no puede ocurrir que $(v, u) \in F(D)$, ya que tendríamos una vu - H -trayectoria dirigida, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $(u, v) \in F(D)$ y así el punto (i) del Lema 3.0.3 se satisface. Asumamos que toda uv - H -trayectoria dirigida W tiene longitud par y procedemos por inducción sobre $\ell(W)$.

Sea $W = (u = x_0, x_1, \dots, x_{2r} = v)$ una uv - H -trayectoria dirigida.

Paso base: Para $r = 1$, W es en particular una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y el punto (ii) del Lema 3.0.3 se cumple.

Para $r = 2$, tenemos que W ya es una uv - H -trayectoria dirigida de longitud 4, por lo que se cumple el punto (iii) del Lema 3.0.3.

Para $r = 3$, por el Lema 1.0.7, como $5 - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $(u, x_5) \in F(D)$ o bien $(x_5, u) \in F(D)$. De manera análoga, como $6 - 1 \equiv 1 \pmod{2}$, $(x_1, v) \in F(D)$ o bien $(v, x_1) \in F(D)$. Observemos que si $(u, x_5) \in F(D)$ o $(x_1, v) \in F(D)$, entonces (u, x_5, v) o (u, x_1, v) son uv -trayectorias dirigidas de longitud 2, respectivamente, de donde el punto (ii) del Lema 3.0.3 se satisface. Supongamos que $\{(x_5, u), (v, x_1)\} \subseteq$

$F(D)$, de aquí que obtenemos los ciclos dirigidos de longitud 6 $(u, W, x_5) \cup (x_5, u)$ y $(x_1, W, v) \cup (v, x_1)$, los cuales por hipótesis son H -ciclos. Así obtenemos en particular que las trayectorias dirigidas $(v = x_6, x_1, x_2)$ y $(x_1, W, x_5, x_0 = u)$ son H -trayectorias que comparten una flecha, de donde, por Teorema 3.0.1 $(v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u)$ es una vu - H -trayectoria, contradiciendo el hecho de que no hay vu - H -trayectorias dirigidas, por lo que este caso no puede pasar. De esta manera, concluimos que $(u, x_5) \in F(D)$ o $(x_1, v) \in F(D)$.

Hipótesis inductiva: Supongamos que si en D existe una uv - H -trayectoria dirigida de longitud s , con $8 \leq s \leq 2r$, y no existe vu - H -trayectoria dirigida, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple.

- (i) $(u, v) \in F(D)$.
- (ii) Existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.
- (iii) Existe una uv - H -trayectoria dirigida de longitud 4.

Paso inductivo: Sea $W = (u = x_0, x_1, \dots, x_{2(r+1)} = v)$ una uv - H -trayectoria dirigida de longitud $2(r+1)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que u pertenece a V_0 . Observemos que para cada i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, como $(i+5) - i \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tenemos que (x_i, x_{i+5}) o bien $(x_{i+5}, x_i) \in F(D)$, de aquí que obtenemos los siguientes casos.

Caso A: Para toda i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(x_{i+5}, x_i) \in F(D)$.

En este caso para cada i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, tenemos que $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+5}, x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo. De este modo, para cada i en $\{4, 5, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+5}, x_i)$ y $(x_{i-4}, x_{i-3}, \dots, x_{i+1}, x_{i-4})$ son dos H -ciclos que comparten la flecha (x_i, x_{i+1}) , de donde por Teorema 3.0.1 obtenemos que $(x_{i+5}, x_i, x_{i+1}, x_{i-4})$ es una H -trayectoria. Ahora, como $2(r+1)$ es par

y con $r \geq 3$, tenemos que $r = 3 + 2k$ o bien, $r = 4 + 2k$ para algún número natural k . Veamos ambos casos.

Caso A.1: $r = 3 + 2k$ para algún k natural.

En este caso $2(r + 1) = 2(3 + 2k + 1) = 2(4 + 2k) = 8 + 4k$, de donde $(v = x_{8+4k}, x_{3+4k}, x_{4+4k}, x_{4k-1}, x_{4k}, \dots, x_8, x_3, x_4, x_5, x_0 = u)$ es una vu - H -trayectoria dirigida, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, este *Caso A.1* no puede ocurrir.

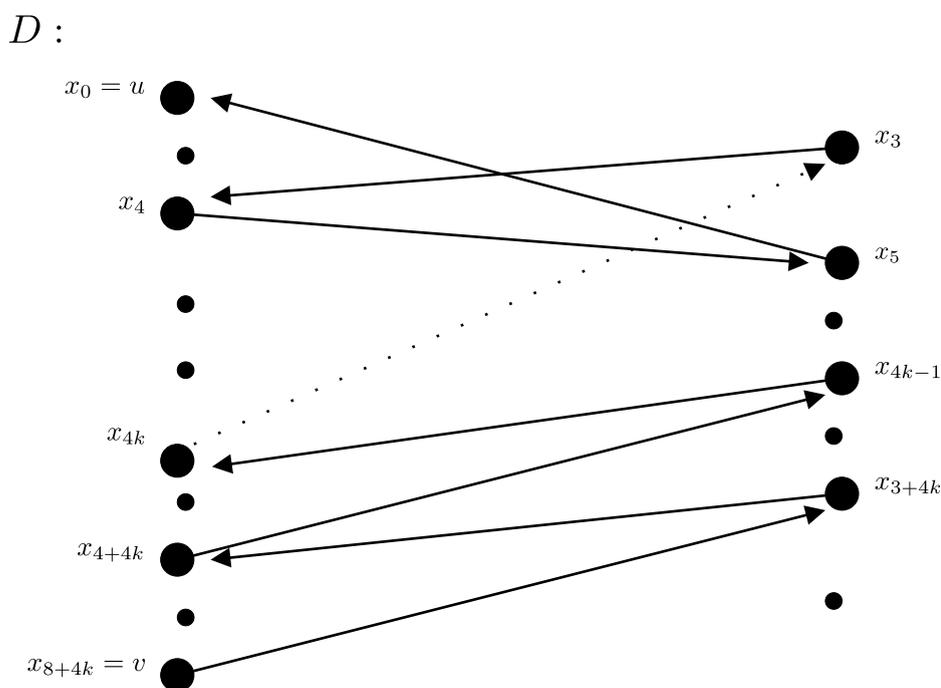


Figura 3.4: Caso A.1.

Caso A.2: $r = 4 + 2k$ para algún k natural.

En este caso $2(r + 1) = 2(4 + 2k + 1) = 2(5 + 2k) = 10 + 4k$.

Supongamos que $k = 0$, es decir, $2(r + 1) = 10$. De la suposición del *Caso A* tenemos entonces que $(v, x_5), (x_9, x_4), (x_8, x_3), (x_7, x_2), (x_6, x_1)$ y (x_5, u) son flechas de D . También tenemos que (v, x_3) es una flecha de D , pues en caso contrario, como $10 - 3 \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tendríamos que (x_3, v) es una flecha de D y

por lo tanto $(v, x_5, u, x_1, x_2, x_3, v)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es un H -ciclo, de donde (v, x_5, u) es una vu - H -trayectoria, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, (v, x_3) es una flecha de D . De manera similar, (v, x_7) es una flecha de D , pues en caso contrario, como $10 - 7 \equiv 1 \pmod{2}$, del Lema 1.0.7 tendríamos que (x_7, v) es una flecha de D y por lo tanto $C = (v, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, v)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es un H -ciclo. Observemos de esta manera que los H -ciclos C y $C_1 = (u, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u)$ comparten la flecha (x_3, x_4) y de este modo, se sigue del Teorema 3.0.1 que (v, x_3, x_4, x_5, u) es una vu - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, (v, x_7) es una flecha de D . Finalmente consideremos a los ciclos $C_1, C_2 = (v, x_7, x_8, x_9, v)$ y $C_3 = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_3)$ los cuales son H -ciclos por hipótesis (debido a que son de longitud 4 y 6), y observemos que C_2 comparte la flecha (x_7, x_8) con C_3 y a su vez C_3 también comparte flecha con C_1 , a saber, (x_3, x_4) , por lo que del Teorema 3.0.1 se sigue que $(v, x_7, x_8, x_3, x_4, x_5, u)$ es una vu - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, no puede ocurrir que $k = 0$.

Supongamos que $k \geq 1$, de este modo $2(r + 1) \geq 10 + 4 = 14$. En este caso, $(v = x_{10+4k}, x_{5+4k}, x_{6+4k}, x_{1+4k}, \dots, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_7, x_8, x_3, x_4, x_5, x_0 = u)$ es una vu - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, este *Caso A.2* no puede ocurrir.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que podemos concluir que el *Caso A* no sucede.

Caso B: Para alguna i en $\{0, 1, \dots, 2(r + 1) - 5\}$ tenemos que $(x_i, x_{i+5}) \in F(D)$.

Consideremos las siguientes observaciones:

Observación 1: Por Lema 1.0.7, como $2(r + 1) - 1 \equiv 1 \pmod{2}$ y $(2r + 1) -$

$0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $\{(x_1, v = x_{2(r+1)}), (v, x_1)\} \cap F(D) \neq \emptyset$ y $\{(x_0 = u, x_{2r+1}), (x_{2r+1}, u)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. En el caso en el que $(u, x_{2r+1}) \in F(D)$ o bien $(x_1, v) \in F(D)$, podemos construir las uv -trayectorias dirigidas de longitud 2, (u, x_{2r+1}, v) y (u, x_1, v) , respectivamente, por lo que el punto (ii) del Lema 3.0.3 se cumple. Supongamos entonces que $\{(x_{2r+1}, u), (v, x_1)\} \subseteq F(D)$.

Observación 2: Si para alguna i' en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(v, x_{i'}) \in F(D)$ y las trayectorias dirigidas $P_1 = (v, x_{i'}, x_{i'+1})$ y $P_2 = (x_{2r}, x_{2r+1}, u)$ son H -trayectorias, entonces tenemos del Teorema 3.0.1 que la trayectoria dirigida $(v, x_{i'}) \cup (x_{i'}, W, x_{2r+1}) \cup (x_{2r+1}, u)$, es una vu - H -trayectoria, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, si para alguna i' en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$, $(v, x_{i'}) \in F(D)$, entonces debemos tener P_1 no es una H -trayectoria, o bien P_2 no es una H -trayectoria.

De la *Observación 2* surgen los siguientes dos casos.

Caso B.1: P_2 no es una H -trayectoria.

Por la suposición del *Caso B* sabemos que para alguna i en $\{0, 1, \dots, 2(r+1) - 5\}$ sucede que $(x_i, x_{i+5}) \in F(D)$. Tomamos $\{i_0, j_0\} \subseteq \{0, 1, \dots, 2(r+1)\}$ de tal manera que $j_0 - i_0 = \max\{j - i : \{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, 2(r+1)\} \text{ y } (x_i, x_j) \in F(D)\}$, los cuales sabemos que son tales que $j_0 - i_0 \geq (i+5) - i = 5$. Consideremos las siguientes posibilidades para i_0 y para j_0 .

Caso B.1.1: $i_0 \geq 1$ y $j_0 \leq 2r + 1$.

Como $(x_{i_0}, x_{j_0}) \in F(D)$, del Lema 1.0.7 se sigue que $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, lo que implica que $(j_0 + 1) - (i_0 - 1) \equiv 1 \pmod{2}$. Así, por el Lema 1.0.7, $\{(x_{i_0-1}, x_{j_0+1}), (x_{j_0+1}, x_{i_0-1})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero por la elección de i_0 y j_0 obtenemos que (x_{j_0+1}, x_{i_0-1})

$\in F(D)$. Por lo tanto, $(x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{j_0}, x_{j_0+1}, x_{i_0-1})$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo. Notemos que este H -ciclo comparte las flechas (x_{i_0-1}, x_{i_0}) y (x_{j_0}, x_{j_0+1}) con la H -trayectoria W , por lo que del Teorema 3.0.1 se sigue que $(u = x_0, W, x_{i_0-1}) \cup (x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{j_0}, x_{j_0+1}) \cup (x_{j_0+1}, W, x_{2(r+1)} = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 3.0.3.

Caso B.1.2: $i_0 = 0$.

Como $u = x_{i_0}$ es un vértice en V_0 y $(x_{i_0}, x_{j_0}) \in F(D)$, tenemos que x_{j_0} es un vértice en V_1 , esto es j_0 es un número impar. Primero notemos que no puede ocurrir que $j_0 \geq 2r - 1$.

En efecto, en caso contrario, por la asimetría de D , debe ocurrir que $j_0 = 2r - 1$, de otro modo $j_0 = 2r + 1$ y además estamos suponiendo que (x_0, x_{j_0}) es una flecha de D y también estamos en el caso en que (x_{2r+1}, x_0) es una flecha de D , lo que es imposible. Así, obtenemos que $j_0 = 2r - 1$ y por lo tanto $(u = x_0, x_{j_0} = x_{2r-1}, x_{2r}, x_{2r+1}, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo. Luego, como P_2 está contenido en dicho ciclo, tenemos que P_2 es una H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición del *Caso B.1*.

Supongamos que $j_0 \leq 2r - 3$. Como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, también tenemos que $(j_0 + 2) - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, de donde por el Lema 1.0.7 se sigue que $\{(x_0, x_{j_0+2}), (x_{j_0+2}, x_0)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero de la elección de i_0 y j_0 obtenemos que $(x_{j_0+2}, x_0) \in F(D)$. Así, $(u = x_0, x_{j_0}, x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es un H -ciclo. Observemos que este H -ciclo comparte la flecha (x_{j_0}, x_{j_0+1}) con la H -trayectoria W , por lo que del Teorema 3.0.1 la trayectoria dirigida $(u = x_0, x_{j_0}) \cup (x_{j_0}, W, v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 3.0.3.

Caso B.1.3: $j_0 = 2(r + 1)$.

Como $2(r + 1)$ es par, x_{j_0} es un vértice en V_0 y por tanto x_{i_0} es un vértice en V_1 , esto es, i_0 es un número impar. Además, es claro que $i_0 \neq 1$, pues en caso contrario $\{(x_1, v), (v, x_1)\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría de D .

Supongamos que $i_0 \geq 3$. Como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, también tenemos que $j_0 - (i_0 - 2) \equiv 1 \pmod{2}$, de donde por el Lema 1.0.7 se sigue que $\{(x_{i_0-2}, v), (v, x_{i_0-2})\} \cap F(D) \neq \emptyset$, pero de la elección de i_0 y j_0 obtenemos que $(v, x_{i_0-2}) \in F(D)$. Así, $(x_{i_0-2}, x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{j_0} = v, x_{i_0-2})$ es un ciclo dirigido de longitud 4 que por hipótesis es un H -ciclo. Observemos que este H ciclo comparte la flecha (x_{i_0-1}, x_{i_0}) con la H -trayectoria W , por lo que del Teorema 3.0.1 se sigue que la trayectoria $(u, W, x_{i_0}) \cup (x_{i_0}, x_{j_0} = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud a lo más $\ell(W) - 4$, de donde por la hipótesis inductiva se satisface el Lema 3.0.3.

Caso B.2: P_2 es una H -trayectoria.

De la *Observación 2* tenemos que si para alguna i' en $\{1, 2, \dots, 2(r + 1) - 5\}$, $(v, x_{i'})$ es una flecha de D , entonces la trayectoria $P_1 = (v, x_{i'}, x_{i'+1})$ no es una H -trayectoria. Observemos que $(x_{2(r+1)-5}, v)$ es una flecha de D , pues en caso contrario, como $2(r + 1) - (2(r + 1) - 5) \equiv 1 \pmod{2}$, se sigue del Lema 1.0.7 que $(v, x_{2(r+1)-5})$ es una flecha de D , pero por otra parte $(x_{2(r+1)-5}, x_{2(r+1)-4}, x_{2(r+1)-3}, x_{2(r+1)-2}, x_{2(r+1)-1}, x_{2(r+1)} = v, x_{2(r+1)-5})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es un H -ciclo. Luego, como P_1 está contenido en dicho ciclo (con $i' = 2(r + 1) - 5$), tenemos que P_1 es una H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición del *Caso B.2*. Como (v, x_1) es una flecha de D , el conjunto $\{i' \in \{0, 1, \dots, 2(r + 1) - 7\} : (v, x_{i'}) \in F(D)\}$ es no vacío. Sea $i_0 = \max\{i' \in \{0, 1, \dots, 2(r + 1) - 7\} : (v, x_{i'}) \in F(D)\}$ y notemos que por la elección de i_0 tenemos que $\{(v, x_{i_0}), (x_{i_0+2}, v)\} \subseteq F(D)$, donde (v, x_{i_0}, x_{i_0+1})

no es una H -trayectoria. Pero, $(v, x_{i_0}, x_{i_0+1}, x_{i_0+2}, v)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, el cual por hipótesis es un H -ciclo, sin embargo, éste contiene a la trayectoria (v, x_{i_0}, x_{i_0+1}) que no es una H -trayectoria, una contradicción. Por lo tanto, este *Caso B.2* no puede ocurrir. ■

Observación 3.0.3. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 debe ser un H -ciclo en el Lema 3.0.3 es justa.*

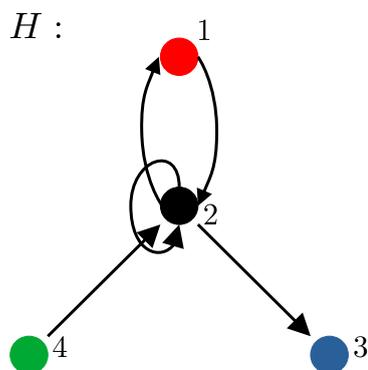


Figura 3.5: Digráfica H .

Demostración. En efecto, consideremos a la digráfica H , dada por el conjunto de vértices $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$ y el conjunto de flechas $F(H) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2)\}$. También consideremos al torneo bipartito H -coloreado D definido por el conjunto de vértices $\{x_0, x_1, \dots, x_{10}\}$ y conjunto de flechas como se muestra en la Figura 3.6. Finalmente tomamos la H -coloración $c : F(D) \rightarrow V(H)$ dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$c(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in \{(x_{10}, x_5), (x_5, x_0)\}, \\ 3 & \text{si } (x_i, x_j) \in \{(x_{10}, x_1), (x_{10}, x_3), (x_{10}, x_7)\}, \\ 4 & \text{si } (x_i, x_j) \in \{(x_3, x_0), (x_7, x_0), (x_9, x_0)\}, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, las flechas (x_{10}, x_7) y (x_3, x_0) están cada una en un único ciclo dirigido de longitud 4, a saber, $C^1 = (v, x_7, x_8, x_9, v)$ y $C^2 = (u, x_1, x_2, x_3, u)$ respectivamente. C^1 tiene solamente una H -obstrucción en el vértice x_7 , y C^2 también tiene una sola H -obstrucción en el vértice x_3 , por lo que tanto C^1 como C^2 son ciclos dirigidos de longitud 4 con a lo más una H -obstrucción.

Ahora bien, para los vértices $u = x_0$ y $v = x_{10}$ existe la uv - H -trayectoria $W = (u = x_0, x_1, \dots, x_{10} = v)$, no existe una vu - H -trayectoria (debido a que $(3, 2), (3, 4), (2, 4)$ y $(1, 1)$ no son caminos en H) y sin embargo no se satisface el Lema 3.0.3, es decir, (u, v) no es una flecha de D , no existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y tampoco existe una uv - H -trayectoria de longitud 4. ■

Observación 3.0.4. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 6 debe ser un H -ciclo en el Lema 3.0.3 es justa.*

Demostración. Consideremos a la digráfica H de la Figura 3.5 y al torneo bipartito H -coloreado G definido por el conjunto de vértices $V(G) = \{x_0, \dots, x_6\}$ y el conjunto de flechas como se muestra en la Figura 3.7. Finalmente tomamos la H -coloración $c : F(G) \rightarrow V(H)$ dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$c(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in \{(x_6, x_3), (x_3, x_0)\}, \\ 3 & \text{si } (x_i, x_j) = (x_6, x_1), \\ 4 & \text{si } (x_i, x_j) = (x_5, x_0), \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para verificar que todos los ciclos dirigidos de longitud 6 tienen a lo más una H -obstrucción y que todos los ciclos dirigidos de longitud 4 son H -ciclos, definimos al subconjunto $S = \{(x_6, x_3), (x_6, x_1), (x_3, x_0), (x_5, x_0)\}$ de las flechas de G . Como la mayoría de las flechas del torneo bipartito G tienen asignado el color 2 y la digráfica

H tiene un lazo en dicho vértice, basta ver que cada ciclo que contenga alguna flechas del conjunto S sea un H -ciclo o tenga a lo más una H -obstrucción, según sea el caso.

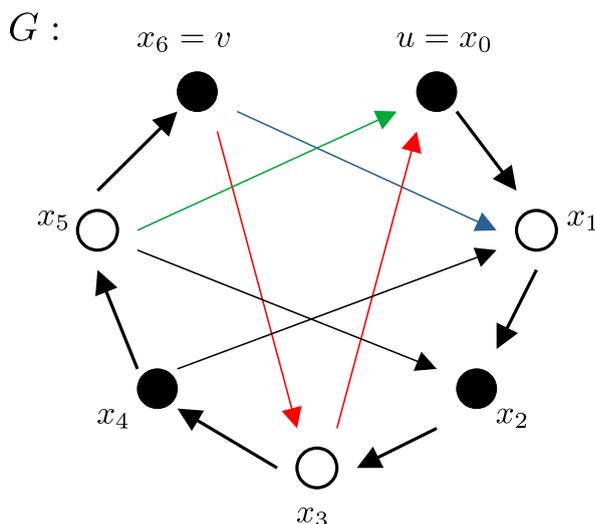


Figura 3.7: Existe una uv - H -trayectoria, no existe una vu - H -trayectoria y sin embargo (u, v) no es una flecha de G , no existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y tampoco existe una uv - H -trayectoria de longitud 4.

Por un lado, las flechas (x_6, x_3) y (x_3, x_0) se encuentran cada una en un único ciclo dirigido de longitud 4, a saber, $(x_6, x_3, x_4, x_5, x_6)$ y $(x_3, x_0, x_1, x_2, x_3)$, respectivamente, los cuales sí resultan ser H -ciclos, pues $(1, 2, 2, 2, 1)$ sí es un camino en H . Por otro lado, las flechas (x_5, x_0) y (x_6, x_1) están cada una en un único ciclo dirigido de longitud 6, a saber, $C^1 = (x_5, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ y $C^2 = (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ respectivamente. El ciclo C^1 tiene solamente una H -obstrucción en el vértice x_5 , y C^2 también tiene una sola H -obstrucción en el vértice x_1 , por lo que tanto C^1 como C^2 son ciclos dirigidos de longitud 6 con a lo más una H -obstrucción.

Ahora bien, para los vértices $u = x_0$ y $v = x_6$ existe la uv - H -trayectoria $W = (u = x_0, x_1, \dots, x_6 = v)$, no existe una vu - H -trayectoria (debido a que $(3, 2), (2, 4)$ y $(1, 1)$ no son caminos en H) y sin embargo no se satisface el Lema 3.0.3, es decir,

(u, v) no es una flecha de G , no existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y tampoco existe una uv - H -trayectoria de longitud 4. ■

Observación 3.0.5. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 en un torneo bipartito D es un H -ciclo no implica que todo ciclo dirigido de longitud 6 en D es un H -ciclo.*

Demostración. Definimos la digráfica H como la digráfica con conjunto de vértices $V(H) = \{1, 2\}$ y conjunto de flechas $F(H) = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Definamos ahora al torneo bipartito H -coloreado $T = (U, W)$ dado por la bipartición $U = \{u, v, w\}$ y $W = \{x, y, z\}$ en el cual las flechas y su colocación están dadas como sigue: $C^1 = (u, x, v, y, w, z, u)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que tiene todas sus flechas de color 1, a excepción de la flecha (v, y) que es de color 2 y las flechas (u, y) , (x, w) y (v, z) tienen asignado el color 1.

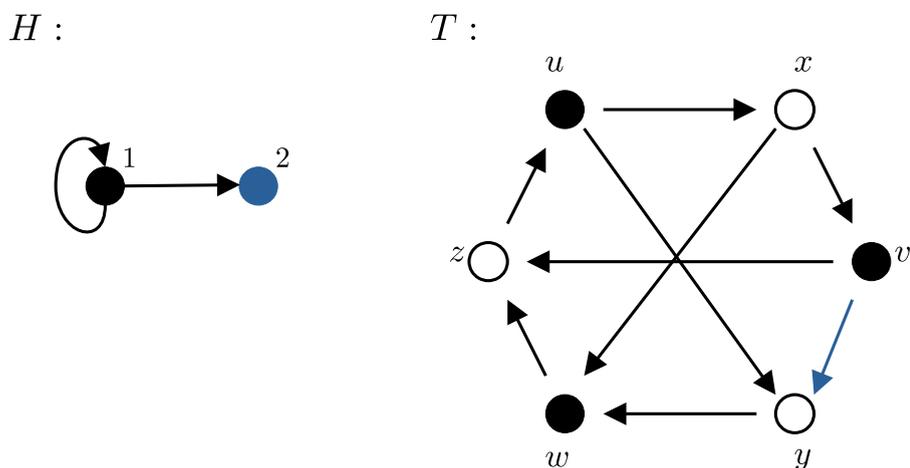


Figura 3.8: Todo ciclo dirigido de longitud 4 es un H -ciclo y sin embargo no todo ciclo dirigido de longitud 6 es un H -ciclo.

El torneo bipartito T contiene 3 ciclos dirigidos de longitud 4, a saber, (u, y, w, z, u) , (x, w, z, u, x) y (v, z, u, x, v) , los cuales son todos H -ciclos y sin embargo el ciclo dirigido de longitud 6 C^1 no resulta ser un H -ciclo, pues tiene una H -obstrucción en y . ■

Teorema 3.0.4. Sean H una digráfica posiblemente con lazos y $D = (V_0, V_1)$ un torneo bipartito H -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 contenido en D es un H -ciclo, entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Demostración. Debido al Corolario 1.0.5.1, basta probar que cualquier ciclo dirigido en $\mathfrak{C}_H(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un ciclo dirigido, digamos $C = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$, contenido en $\mathfrak{C}_H(D)$ que no tiene flechas simétricas, esto es, C está contenido en $Asim(\mathfrak{C}_H(D))$ y por lo tanto, $n \geq 2$. De aquí en adelante, consideramos a los subíndices del ciclo C módulo $n + 1$. Debido a la definición de las flechas de la multidigráfica $\mathfrak{C}_H(D)$, sucede que para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$, existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria contenida en D y no existe $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria, donde por Lema 3.0.3 se satisface al menos uno de los siguientes enunciados:

- (i) $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$.
- (ii) Existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2.
- (iii) Existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria de longitud 4.

Para cada i en $\{0, 1, \dots, n\}$, tomamos T_i como sigue: $T_i = (x_i, x_{i+1})$, si $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$; T_i es una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2, si $(x_i, x_{i+1}) \notin F(D)$ y dicha trayectoria existe; o T_i es una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria de longitud 4, en otro caso. Definimos ahora $C' = \bigcup_{i=0}^n T_i$, el cual claramente es un camino cerrado dirigido en D que empieza y termina en x_0 . Digamos que $C' = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$, donde $z_0 = x_0$. Para relacionar los vértices del camino cerrado dirigido C' con los vértices del ciclo dirigido C , observemos que cada trayectoria dirigida T_i se ve de la forma $(x_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, \dots, z_{i_0+r_i} = x_{i+1})$ donde $r_i \in \{1, 2, 4\}$. Así, definimos $\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \longrightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ como la función que a cada índice lo manda al primer vértice de la trayectoria dirigida T_i donde se encuentra el vértice con

dicho índice, es decir, $\varphi(j) = z_{i_0}$ para cada j en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + (r_i - 1)\}$. Decimos que el índice j del vértice z_j es un *índice principal* si existe un i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_j$ y denotamos por I_p al conjunto de los índices principales.

Observación ★ : Como cada trayectoria dirigida T_i tiene longitud a lo más 4, obtenemos que entonces para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ se satisface que $\{j, j + 1, j + 2, j + 3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Por otra parte, debido a que $x_0 = z_0$, tenemos que $0 \in I_p$. De ahora en adelante los índices de los vértices de C' los consideramos módulo $k + 1$.

Notemos que, debido al Lema 1.0.8, todos los caminos dirigidos cerrados de longitud a lo más 6 en D son en realidad ciclos dirigidos. Por otra parte, como C' es un camino cerrado dirigido en un torneo bipartito, es de longitud par, de donde k es un número impar y además es al menos 3, pues $n \geq 2$. Veamos los siguientes casos para k .

Caso A: $k = 3$.

En este caso C' es de la forma $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$ y es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo. No puede ocurrir que $\ell(T_0) = 4$, pues en dado caso $x_0 = z_0 = x_1$, lo cual es una contradicción al hecho de que T_0 es en particular una trayectoria. De este modo, $\ell(T_0)$ es 1 o 2, por lo que $x_1 \in \{z_1, z_2\}$, pero esto es una contradicción, pues $(z_1, z_2, z_3, z_0 = x_0)$ es una H -trayectoria que contiene una x_1x_0 - H -trayectoria. Por lo tanto, este *Caso A* no puede ocurrir.

Caso B: $k = 5$.

En este caso C' es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo, donde es claro que particularmente existe una x_0x_n - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este *Caso B* tampoco no puede ocurrir.

Caso C: $k \geq 7$.

Para demostrar que este caso tampoco puede ocurrir, primero mostraremos algunas afirmaciones.

Afirmación 1(C). Para cada j en I_p se satisface que $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Efectivamente, dada j en I_p arbitraria, como $(j + 5) - j \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos del Lema 1.0.7 que $\{(z_j, z_{j+5}), (z_{j+5}, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. No puede suceder que $(z_{j+5}, z_j) \in F(D)$, pues en dicho caso, $(z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}, z_{j+5}, z_j)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo. Además, como j es un índice principal, existe una i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_j$, de donde $x_{i+1} \in \{z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+4}\}$, dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria, lo cual no puede ocurrir debido a nuestra suposición. Por lo tanto, $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Afirmación 2(C). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j + 5$ es un índice principal, se satisface que $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Efectivamente, dada j en $\{0, 1, \dots, k\}$, tal que $j + 5$ es un índice principal, como $(j + 5) - j \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos del Lema 1.0.7 que $\{(z_j, z_{j+5}), (z_{j+5}, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. No puede suceder que $(z_{j+5}, z_j) \in F(D)$, pues en dicho caso, $(z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}, z_{j+4}, z_{j+5}, z_j)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo. Además, como $j + 5$ es un índice principal, existe una i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j+5}$, de donde $x_{i-1} \in \{z_{j+4}, z_{j+3}, z_{j+1}\}$, dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_i x_{i-1}$ - H -trayectoria, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(z_j, z_{j+5}) \in F(D)$.

Afirmación 3(C). Para cada j en $\{5, 6, \dots, k - 2\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{4}$, se

satisface que $(z_0, z_j) \in F(D)$.

Notemos que consideramos el conjunto $\{5, 6, \dots, k-2\}$ ya que por un lado el único número menor a 5 que es congruente a 1 módulo 4 es el 1 mismo, para el cual ya se cumple $(z_0, z_1) \in F(D)$. Por otro lado, como en D no hay flechas simétricas y ya tenemos que $(z_k, z_0) \in F(D)$, entonces debemos considerar números menores a k , pero como k es impar y queremos una flecha de la forma (z_0, z_j) , entonces j debe ser menor o igual a $k-2$. Una vez que sabemos la razón de escoger este conjunto de índices, procedemos la demostración de esta afirmación por contradicción.

Supongamos que existe un índice j en $\{5, 6, \dots, k-2\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{4}$ y cumple que $(z_0, z_j) \notin F(D)$. Del Lema 1.0.7, como $j-0 \equiv 1 \pmod{2}$, tenemos que $\{(z_j, z_0), (z_j, z_0)\} \cap F(D) \neq \emptyset$, y así, $(z_j, z_0) \in F(D)$. De la *Afirmación 1(C)* tenemos que $(z_0, z_5) \in F(D)$, lo que implica, al ser D una digráfica asimétrica, que j debe ser distinto de 5. Así, como $j \equiv 1 \pmod{4}$, obtenemos que $j \geq 9$. En el caso en que $k \leq 9$, la *Afirmación 3(C)* ya se satisface y no hay nada más que hacer, así que supongamos que $k > 9$, esto es, $k \geq 11$.

De lo anterior y de nuestra suposición tenemos que el conjunto $S = \{i \in \{5, 6, \dots, k-6\} : i \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } (z_{i+4}, z_0) \in F(D)\}$ es no vacío, y sea $i_0 = \min S$. De la elección de i_0 tenemos que $\{(z_{i_0+4}, z_0), (z_0, z_{i_0})\} \subseteq F(D)$.

Definimos ahora $C^2 = (z_0, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}, z_{i_0+4}, z_0)$, el cual es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo. Consideramos ahora las siguientes posibilidades:

3(C).1. $i_0 \in I_p$.

En este caso existe un $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{i_0}$, de donde $x_{i+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria contenida en C^2 , lo cual es una contradicción a nuestra suposición.

3(C).2. $i_0 \notin I_p$.

En este caso, de la *Observación* \star , se satisface que $\{i_0 - 1, i_0 - 2, i_0 - 3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Sea $s \in \{i_0 - 1, i_0 - 2, i_0 - 3\} \cap I_p$ y sea x_i el v3rtice del ciclo C tal que $x_i = z_s$. Luego, de la *Afirmaci3n* 1(C) se cumple que $(z_s, z_{s+5}) \in F(D)$, con $z_{s+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}, z_{i_0+2}\}$. As3, $C^3 = (z_{i_0-4}, C', z_s) \cup (z_s, z_{s+5}) \cup (z_{s+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (sin importar cual sea el valor de s), que por hip3tesis es un H -ciclo que comparte la flecha (z_{i_0+4}, z_0) con el H -ciclo C^2 . As3, del Teorema 3.0.1 tenemos que $W = (z_{i_0}, C^2, z_0) \cup (z_0, C^3, z_s = x_i)$ es una H -trayectoria.

Por otra parte sabemos que $x_{i+1} \in \{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4, pero $\{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\} \subseteq \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Como $\{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\} \subseteq V(W)$, si $x_{i+1} \in \{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$, entonces es claro que existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria contenida en W , lo cual es una contradicci3n a nuestra suposici3n. Supongamos entonces que $x_{i+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$ y sea $i_1 \in \{i_0 - 1, i_0 - 2\}$ tal que $x_{i+1} = z_{i_1}$. As3, i_1 es un 3ndice principal y de la *Afirmaci3n* 1(C) tenemos que $(z_{i_1}, z_{i_1+5}) \in F(D)$, con $z_{i_1+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}\}$. Luego, $C^4 = (z_{i_0-4}, C', z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, z_{i_1+5}) \cup (z_{i_1+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (sin importar el valor de i_1), que por hip3tesis es un H -ciclo, pero esto es una contradicci3n debido a que x_i es tambi3n un v3rtice de este ciclo y por lo tanto existir3a una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria. Por lo tanto, este caso no puede suceder y as3 la *Afirmaci3n* 3(C) es verdadera.

Afirmaci3n 4(C). Para cada j en $\{3, 4, \dots, k - 4\}$ tal que $j \equiv k \pmod{4}$, se satisface que $(z_j, z_0) \in F(D)$.

Sea j en $\{3, 4, \dots, k - 4\}$ tal que $j \equiv k \pmod{4}$. Notemos que como k es un n3mero impar, $k \equiv 1 \pmod{2}$. As3, tambi3n tenemos que $j - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, donde por el

Lema 1.0.7 obtenemos que $\{(z_0, z_j), (z_j, z_0)\} \cap F(D) \neq \emptyset$. Supongamos en busca de una contradicción que $(z_0, z_j) \in F(D)$.

Notemos que para $k = 7$ tendríamos que $(z_0, z_3) \in F(D)$, pero en dicho caso $C^2 = (z_0, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 6, el cual por hipótesis es un H -ciclo y además, como $x_n \in \{z_7, z_6, z_4\}$ dependiendo de si $\ell(T_n)$ es 1, 2 o 4, tenemos entonces que existe una x_0x_n - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Así, $(z_3, z_0) \in F(D)$ y por lo tanto la *Afirmación 4(C)* se satisface en este caso.

Por otra parte, no puede ocurrir que $k = 9$, pues en dado caso, de la *Afirmación 1(C)* tenemos que $(z_0, z_5) \in F(D)$. Así, $C^2 = (z_0, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud 6 que por hipótesis es un H -ciclo. Además, sabemos que $x_n \in \{z_9, z_8, z_6\}$ dependiendo de si $\ell(T_n)$ es 1, 2 o 4, pero en cualquier caso obtenemos que $\{x_0, x_n\} \subseteq V(C^2)$ y por lo tanto existe una x_0x_n - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos entonces que $k \geq 11$ y veamos que se cumple la afirmación.

Como $0 \in I_p$, de la *Afirmación 2(C)* tenemos que $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$ y como D es asimétrica, se sigue que $j \leq k - 8$. De aquí que el conjunto $\{i \in \{7, 8, \dots, k - 4\} : i \equiv k \pmod{4} \text{ y } (z_0, z_{i-4}) \in F(D)\}$ es no vacío, sea $i_0 = \max\{i \in \{7, 8, \dots, k - 4\} : i \equiv k \pmod{4} \text{ y } (z_0, z_{i-4}) \in F(D)\}$. De la elección de i_0 tenemos que $\{(z_0, z_{i_0-4}), (z_{i_0}, z_0)\} \subseteq F(D)$. Notemos que si $i_0 = k - 4$, entonces $(z_k, z_0) \in F(D)$ y también si $i_0 \leq k - 8$, entonces $i_0 + 4 \leq k - 4$, de donde por la elección de i_0 tenemos que $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$; en cualquier caso también tenemos que $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$.

Definimos ahora $C^2 = (z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_0)$, el cual es un ciclo dirigido de longitud 6, que por hipótesis es un H -ciclo. Consideramos ahora las siguientes posibilidades.

4(C).1. $i_0 \in I_p$.

En este caso existe un $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ tal que $x_i = z_{i_0}$, donde $x_{i-1} \in \{z_{i_0-1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-4}\}$ dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4. Así, claramente existe una $x_i x_{i-1}$ - H -trayectoria contenida en C^2 , lo cual es una contradicción.

4(C).2. $i_0 \notin I_p$.

En este caso, de la *Observación* \star , se satisface que $\{i_0-1, i_0-2, i_0-3\} \cap I_p \neq \emptyset$. Sea $s \in \{i_0-1, i_0-2, i_0-3\} \cap I_p$ y sea x_i el vértice del ciclo C tal que $x_i = z_s$. Luego, de la *Afirmación 1(C)* se cumple que $(z_s, z_{s+5}) \in F(D)$, con $z_{s+5} \in \{z_{i_0+4}, z_{i_0+3}, z_{i_0+2}\}$. Así, $C^3 = (z_{i_0-4}, C', z_s) \cup (z_s, z_{s+5}) \cup (z_{s+5}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (sin importar qué valor tome s), que por hipótesis es un H -ciclo. Por otra parte sabemos que $x_{i+1} \in \{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\}$ (pues $\ell(T_i)$ puede ser 1, 2 o 4), pero $\{z_{s+1}, z_{s+2}, z_{s+4}\} \subseteq \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Como $\{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}\} \subseteq V(C^2)$, si $x_{i+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}\}$, entonces claramente existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria contenida en C^2 , lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Supongamos que $x_{i+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$ y sea $i_1 \in \{i_0+1, i_0+2, i_0+3\}$ tal que $x_{i+1} = z_{i_1}$. Así, i_1 es un índice principal y de la *Afirmación 2(C)* tenemos que $(z_{i_1-5}, z_{i_1}) \in F(D)$, con $z_{i_1-5} \in \{z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}\}$. Luego, $C^4 = (z_{i_0-4}, C', z_{i_1-5}) \cup (z_{i_1-5}, z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, C', z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un ciclo dirigido de longitud 6 (sin importar cual valor tome i_1), que por hipótesis es un H -ciclo, el cual además comparte la flecha (z_0, z_{i_0-4}) con el H -ciclo C^2 . Así, del Teorema 3.0.1 se sigue que $W = (x_{i+1} = z_{i_1}, C^4, z_{i_0-4}) \cup (z_{i_0-4}, C^2, z_s = x_i)$ es una H -trayectoria que contiene una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, este caso tampoco puede suceder y así la *Afirmación 4(C)* es verdadera.

Analizamos ahora dos posibilidades para k .

Caso C.1. $k \equiv 1 \pmod{4}$.

En este caso, como 0 es un índice principal, tenemos de la *Afirmación 2(C)* que $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$. Por otra parte, como $k \equiv 1 \pmod{4}$, tenemos que $k - 4 \equiv 1 \pmod{4}$ con $k - 4 \in \{5, 6, \dots, k - 2\}$, donde por la *Afirmación 3(C)* tenemos que $(z_0, z_{k-4}) \in F(D)$, pero esto es una contradicción, pues D es una digráfica asimétrica.

Caso C.2. $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Para este caso primero mostraremos algunas afirmaciones.

Afirmación 5(C.2). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j \equiv 3 \pmod{4}$ tenemos que $(z_j, z_0) \in F(D)$.

En efecto, dado j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j \equiv 3 \pmod{4}$, como $3 \equiv k \pmod{4}$, entonces $j \equiv k \pmod{4}$ y así de la *Afirmación 4(C)* tenemos que $(z_j, z_0) \in F(D)$.

Recordemos que la *Afirmación 4(C)* era válida para $s \in \{0, 1, \dots, k - 4\}$, por lo que faltaría cubrir los casos para cuando $s \in \{k - 3, k - 2, k - 1, k\}$, pero como $k \equiv 3 \pmod{4}$ (debido a la suposición del *Caso C.2*), dichos casos están cubiertos al ya tener la flecha (z_k, z_0) .

Afirmación 6(C.2). Para cualquier subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 1 \pmod{4}$, se cumple que $(z_i, z_j) \in F(D)$.

Sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 1 \pmod{4}$ y sea r en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_r = z_i$. Renombramos a los vértices del ciclo C de tal manera que ahora empiecen en x_r . Así, al unir las trayectorias T_s correspondientes obtenemos un camino cerrado dirigido $\overline{C'}$ que también es un renombramiento de los vértices del ciclo C' , digamos que $\overline{C'} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, \bar{z}_0)$, donde para ca-

da t en $\{0, 1, \dots, k\}$ el renombramiento viene dado por $\bar{z}_t = z_{i+t}$ (de esta manera $\bar{z}_0 = z_i$). Ahora como $j - i \equiv 1 \pmod{4}$ y $i \in I_p$, de la *Afirmación 3(C)* tenemos que $(\bar{z}_0, \bar{z}_{j-i}) \in F(D)$, pero $\bar{z}_0 = z_i$ y $\bar{z}_{j-i} = z_{i+(j-i)} = z_j$. Por lo tanto, $(z_i, z_j) \in F(D)$. Recordemos que la *Afirmación 3(C)* era válida para $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, así que el unico caso que faltaría cubrir es para cuando $s = j - i = k$, pero este caso no cumple las hipótesis de la *Afirmación 6(C.2)*, pues $k \equiv 3 \pmod{4}$ (esto último debido a la suposición del *Caso C.2*).

Afirmación 7(C.2). Para cualquier subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 3 \pmod{4}$, se cumple que $(z_j, z_i) \in F(D)$.

Efectivamente, sea $\{i, j\}$ un subconjunto de $\{0, 1, \dots, k\}$ que satisface que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 3 \pmod{4}$. Usando la misma construcción de \bar{C}' que hicimos en la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos de la *Afirmación 5(C.2)* que $(\bar{z}_{j-i}, \bar{z}_0) \in F(D)$, pero $\bar{z}_{j-i} = z_{(j-i)+i} = z_j$ y $\bar{z}_0 = z_i$. Por lo tanto, $(z_j, z_i) \in F(D)$.

Afirmación 8(C.2). Para cada j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tenemos que $(z_j, z_{j-3}) \in F(D)$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un j en $\{0, 1, \dots, k\}$ tal que $(z_j, z_{j-3}) \notin F(D)$. Notemos que $j - (j - 3) \equiv 1 \pmod{2}$, por lo que del Lema 1.0.7, $\{(z_j, z_{j-3}), (z_{j-3}, z_j)\} \cap F(D) \neq \emptyset$ y así obtenemos que $(z_{j-3}, z_j) \in F(D)$. Por una parte, como $j - (j - 3) \equiv 3 \pmod{4}$, de la *Afirmación 7(C.2)* podemos concluir que $j - 3 \notin I_p$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(z_{j-3}, z_j), (z_j, z_{j-3})\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría del torneo. Por otra parte, como $(j - 3) - j \equiv 1 \pmod{4}$, de la *Afirmación 6(C.2)* podemos concluir que $j \notin I_p$, pues en caso contrario tendríamos que $\{(z_{j-3}, z_j), (z_j, z_{j-3})\} \subseteq F(D)$, contradiciendo la asimetría del torneo. Así, de la *Observación ★* obtenemos que $\{j - 2, j - 1\} \cap I_p \neq \emptyset$, de donde surgen los dos siguientes casos.

Caso 8(C.2).1. $j - 2 \in I_p$.

Sea i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j-2}$. Como $(j - 5) - (j - 2) \equiv 1 \pmod{4}$ con $j - 2 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos que $(z_{j-2}, z_{j-5}) \in F(D)$. Así, $C^2 = (x_i = z_{j-2}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-2} = x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo. Sabemos además que $x_{i-1} \in \{z_{j-3}, z_{j-4}, z_{j-6}\}$ dependiendo de si $\ell(T_{i-1})$ es 1, 2 o 4, pero como $j - 3 \notin I_p$, tenemos que $x_{i-1} \in \{z_{j-4}, z_{j-6}\}$. Si $x_{i-1} = z_{j-4}$, entonces claramente existe una $x_i x_{i-1}$ - H -trayectoria contenida en C^2 , contradiciendo nuestra suposición. Supongamos que $x_{i-1} = z_{j-6}$ y observemos que como $(j-3) - (j-6) \equiv 3 \pmod{4}$ con $j-6 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j-3}, z_{j-6} = x_{i-1}) \in F(D)$. Así, $C^3 = (x_{i-1} = z_{j-6}, z_{j-5}, z_{j-4}, z_{j-3}, z_{j-6} = x_{i-1})$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo y además comparte la flecha (z_{j-4}, z_{j-3}) con el H -ciclo C^2 . Por lo tanto, del Teorema 3.0.1 obtenemos que $(x_i = z_{j-2}, C^2, z_{j-3}) \cup (z_{j-3}, z_{j-6} = x_{i-1})$ es una $x_i x_{i-1}$ - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición, de donde podemos concluir que el *Caso 8(C.2).1* no puede suceder.

Caso 8(C.2).2. $j - 1 \in I_p$.

Sea i en $\{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = z_{j-1}$. Como $(j + 2) - (j - 1) \equiv 3 \pmod{4}$ con $j - 1 \in I_p$, de la *Afirmación 7(C.2)* obtenemos que $(z_{j+2}, z_{j-1}) \in F(D)$. Así, $C^2 = (x_i = z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j-1} = x_i)$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo. Sabemos además que $x_{i+1} \in \{z_j, z_{j+1}, z_{j+3}\}$ dependiendo de si $\ell(T_i)$ es 1, 2 o 4, pero como $j \notin I_p$, tenemos que $x_{i+1} \in \{z_{j+1}, z_{j+3}\}$. Si $x_{i+1} = z_{j+1}$, entonces claramente existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria contenida en C^2 , contradiciendo nuestra suposición. Supongamos que $x_{i+1} = z_{j+3}$ y observemos que como $j - (j + 3) \equiv 1 \pmod{4}$ con $j + 3 \in I_p$, de la *Afirmación 6(C.2)* obtenemos

que $(x_{i+1} = z_{j+3}, z_j) \in F(D)$. Así, $C^3 = (x_{i+1} = z_{j+3}, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3} = x_{i+1})$ es un ciclo dirigido de longitud 4, que por hipótesis es un H -ciclo y además comparte la flecha (z_j, z_{j+1}) con el H -ciclo C^2 . Por lo tanto, del Teorema 3.0.1 obtenemos que $(x_{i+1} = z_{j+3}, z_j) \cup (z_j, C^2, z_{j-1} = x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria, lo cual es una contradicción a nuestra suposición, de donde podemos concluir que el *Caso* 8(C.2).2 no puede suceder.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que la *Afirmación* 8(C.2) es verdadera.

Finalmente, de la *Afirmación* 8(C.2), tenemos en particular que $\{(z_0, z_{k-2}), (z_k, z_{k-3})\} \subseteq F(D)$. Así, $C^1 = (x_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, z_0)$ y $C^2 = (z_k, z_{k-3}, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k)$ son dos ciclos dirigidos de longitud 4, los cuales por hipótesis son H -ciclos. Notemos que C^1 y C^2 comparten la flecha (z_{k-1}, z_k) , por lo que del Teorema 3.0.1 se sigue que $W = (x_0 = z_0, C^1, z_k) \cup (z_k, z_{k-3})$ es una H -trayectoria. Además, sabemos que $x_n \in \{z_k, z_{k-1}, z_{k-3}\}$ dependiendo de si $\ell(T_n)$ es 1, 2 o 4, pero en cualquier caso x_n es un vértice en la H -trayectoria W , una contradicción. Por lo tanto, este *Caso* C.2 tampoco puede ocurrir y así, el Teorema 3.0.4 se satisface. ■

Observación 3.0.6. *La hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 debe ser un H -ciclo en el Teorema 3.0.4 es justa.*

Demostración. En efecto, consideremos a la digráfica H definida por el conjunto de vértices $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el conjunto de flechas $F(H) = \{(1, 2), (3, 4), (4, 3)\}$. También consideremos al torneo bipartito H -coloreado T definido por el conjunto de vértices $V(T) = \{u, v, w, x, y, z\}$ y el conjunto de flechas $F(T) = \{(u, x), (u, z), (x, w), (z, v), (x, v), (z, w), (w, y), (v, y), (y, u)\}$, donde las flechas (u, x) y (u, z) tienen asignado el color 1; las flechas (x, w) y (z, v) tienen asignado el color 2; las flechas (x, v)

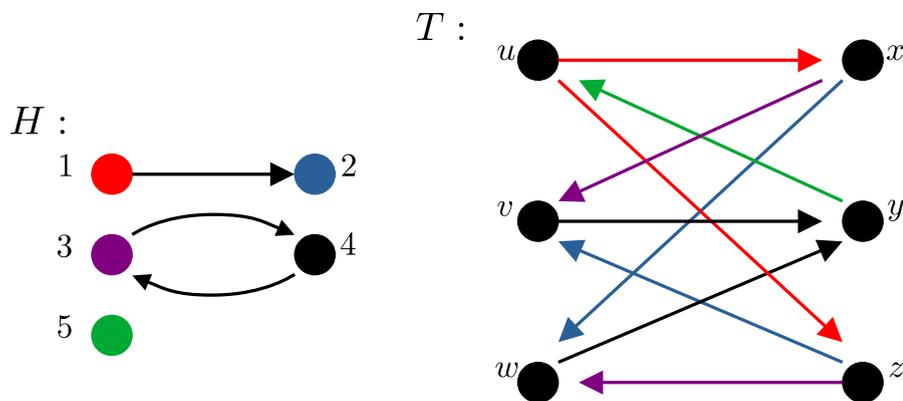


Figura 3.9: Todo ciclo dirigido de longitud 6 en T es un H -ciclo y no todo ciclo dirigido de longitud 4 es un H -ciclo.

y (z, w) tienen asignado el color 3; las flechas (w, y) y (v, y) tienen asignado el color 4 y la flecha (y, u) tiene asignado el color 5 (Figura 3.9).

Notemos que la digráfica T no tiene ciclos dirigidos de longitud 6, por lo que se cumple por vacuidad que todos los ciclos dirigidos de longitud 6 son H -ciclos y además se cumple que no todos los ciclos dirigidos de longitud 4 son H -ciclos, como por ejemplo el ciclo (u, x, v, y, u) .

Finalmente en la Figura 3.10 se encuentra la H -cerradura de T , en la cual es sencillo corroborar que no existe un núcleo, por lo que del Teorema 3.0.2 se sigue que T no tiene H -núcleo. ■

Corolario 3.0.4.1. *Sea D un torneo bipartito m -coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 es monocromático, entonces $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo-perfecta.*

Demostración. Sea D un torneo bipartito m -coloreado bajo la función $c : F(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 es monocromático. Definimos a la digráfica H como la digráfica con conjunto de vértices $V(H) =$

$\mathfrak{C}_H(T) :$

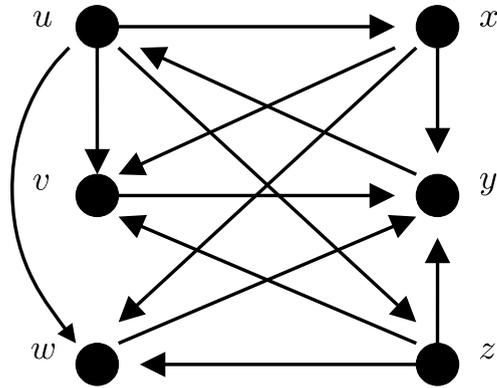


Figura 3.10: H -cerradura de T sin núcleo.

$\{1, 2, \dots, m\}$ y conjunto de flechas $F(H) = \{(j, j) : j \in V(H)\}$. Observemos que de esta manera D es una digráfica H coloreada bajo la misma función c , que además cumple que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 es un H -ciclo. Así, por el Teorema 3.0.4, tenemos que $\mathfrak{C}_H(D)$ es núcleo perfecta, pero $\mathfrak{C}_H(D) \cong \mathcal{C}(D)$. ■

Conclusiones

Comenzamos nuestro estudio sobre la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos m -coloreados, trabajo de Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy. En un primer artículo [8], Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy demostraron que con la hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 4 de un torneo bipartito m -coloreado fuera monocromático, aseguraban la existencia de un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Posteriormente en [7] debilitaron dicha hipótesis permitiendo que a lo más una flecha fuera de un color distinto en cada ciclo dirigido de longitud 4, pero a la vez agregaron la hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud 6 ahora fuera monocromático. Hicimos un análisis de las condiciones que se exponen en [7] para asegurar la existencia de al menos un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en tales digráficas para posteriormente dar una generalización de estas condiciones en torneos bipartitos H -coloreados, lo cual no fue posible debido a que el Lema 1.0.11 no se cumple para torneos bipartitos H -coloreados y la Figura 4.12 es prueba de ello, pues todo ciclo dirigido de longitud 4 tiene a lo más una H -obstrucción (bajo la digráfica H de la Figura 4.11), todos los ciclos dirigidos de longitud 6 son H -ciclos y no se satisface la conclusión.

Lema (1.0.11). *Sea $D=(V_1, V_2)$ un torneo bipartito m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 es casi monocromático y cada ciclo de longitud 6 es monocromático. Si para algunos u y v vértices de D existe una uv -trayectoria dirigida*

monocromática y no existe vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple.

(i) $(u,v) \in F(D)$.

(ii) Existe una w -trayectoria dirigida de longitud 2.

(iii) Existe una w -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

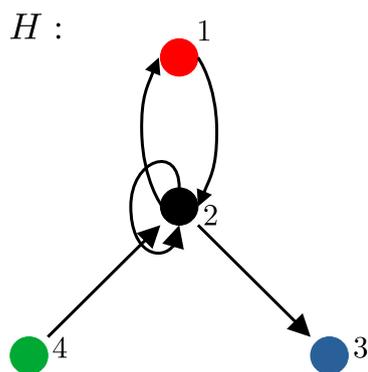


Figura 4.11: Digráfica H .

Debido a esto tuvimos que agregar la hipótesis de que los ciclos dirigidos de longitud 4 debían ser H -ciclos, lo cual nos condujo a analizar los resultados expuestos en [8] que tienen como única hipótesis que los ciclos dirigidos de longitud 4 sean monocromáticos, sin embargo uno de los resultados que se necesitan para asegurar la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, el Lema 4.0.5, no se cumple para torneos bipartitos H -coloreados.

Lema 4.0.5. *Sea $D=(V_1, V_2)$ un torneo bipartito m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 es monocromático. Si para algunos u y v vértices de D existe una w -trayectoria dirigida monocromática y no existe vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple.*

(i) $(u,v) \in F(D)$.

(ii) Existe una w -trayectoria dirigida de longitud 2.

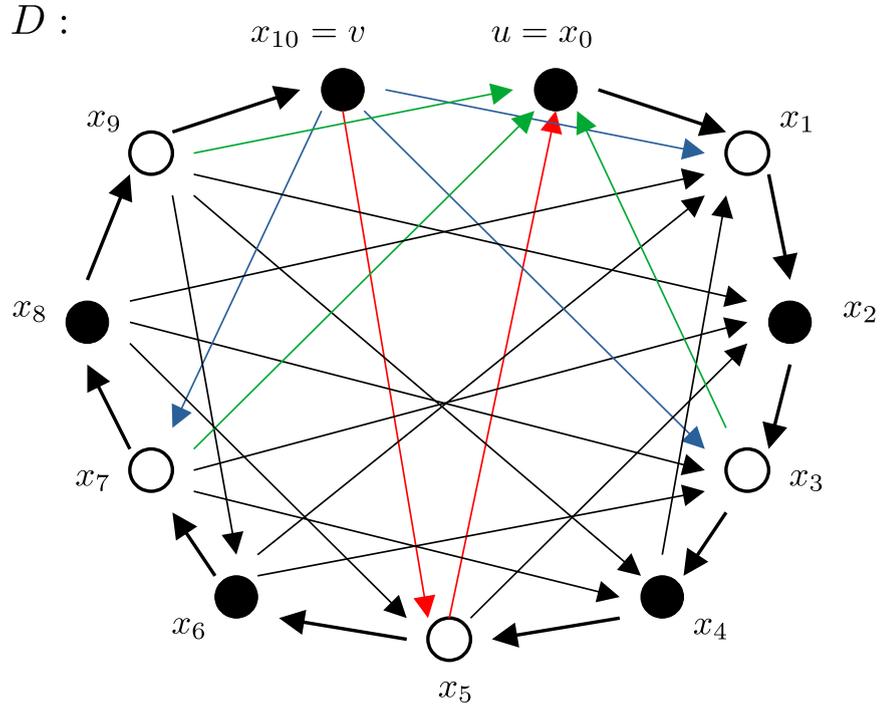


Figura 4.12: Existe una uv - H -trayectoria, no existe una vu - H -trayectoria y sin embargo (u, v) no es una flecha de D , no existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 y tampoco existe una uv - H -trayectoria de longitud 4.

En la Figura 4.13 tenemos que la digráfica mostrada cumple con que todos sus ciclos dirigidos de longitud 4 son H -ciclos y sin embargo no se satisface la conclusión del Lema 4.0.5.

Esto nos condujo a obtener un resultado original en esta tesis, el Teorema 3.0.4, el cual afirma lo siguiente:

Teorema (3.0.4). *Sean H una digráfica posiblemente con lazos y D un torneo bipartito H -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 6 contenido en D es un H -ciclo. Entonces $\mathfrak{C}_H(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.*

Por último, con base en este trabajo, nos podemos formular las siguientes preguntas: Con base a los resultados expuestos en [8], ¿qué condiciones le podemos pedir a la digráfica H -coloreada para garantizar la existencia de un H -núcleo además de que

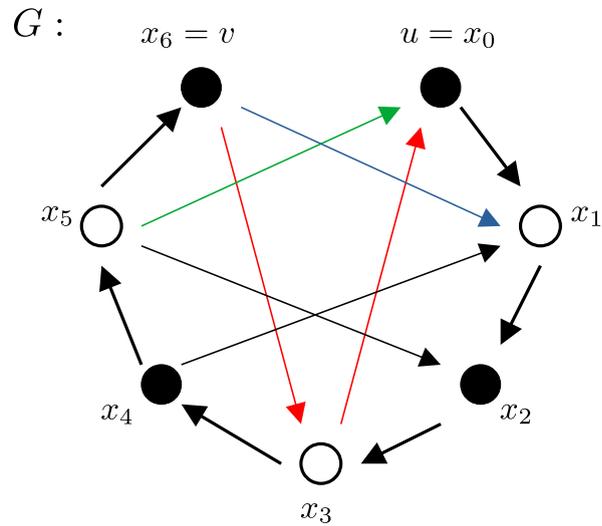


Figura 4.13: Existe una uv - H -trayectoria, no existe una vu - H -trayectoria y sin embargo (u, v) no es una flecha de G y tampoco existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2

todos sus ciclos dirigidos de longitud 4 sean H -ciclos? Dado que en la digráfica de la Figura 4.13 no se satisface el Lema 4.0.5, pero aún así ésta cuenta con un H -núcleo, ¿existirá alguna otra manera de garantizar la existencia de un H -núcleo sin pasar por dicho lema o pedir tales hipótesis?

Bibliografía

- [1] Claude Berge. *The theory of graphs*. Courier Corporation, 2001.
- [2] Vašek Chvátal. “On the computational complexity of finding a kernel” . En: *Report CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal* 592 (1973).
- [3] Pietra Delgado-Escalante y Hortensia Galeana-Sánchez. “Restricted domination in arc-colored digraphs”. En: *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 11.1 (2014), págs. 95-104.
- [4] Pierre Duchet. “Graphes Noyau-Parfaits” . En: *Annals of Discrete Mathematics* 9 (1980), págs. 93-101.
- [5] Hortensia Galeana-Sánchez. “Kernels in edge-colored digraphs”. En: *Discrete Mathematics* 184.1-3 (1998), págs. 87-99.
- [6] Hortensia Galeana-Sánchez, Eugenia O’Reilly-Regueiro y TW Haynes. “Monochromatic absorbency and independence in 3-quasi-transitive digraphs”. En: *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 10.4 (2013), págs. 415-426.
- [7] Hortensia Galeana-Sánchez y Rocío Rojas-Monroy. “Monochromatic paths and quasi-monochromatic cycles in edge-coloured bipartite tournaments”. En: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 28.2 (2008), págs. 285-306.

- [8] Hortensia Galeana-Sánchez y Rocío Rojas-Monroy. “On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments”. En: *Discrete mathematics* 285.1-3 (2004), págs. 313-318.
- [9] David Marker. *Model theory: an introduction*. Vol. 217. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] John von Neumann y Oskar Morgenstern. “Theory of games and economic behavior”. En: *Princeton University Press* (1944).
- [11] Carlos Cedillo Ponce. “ H -núcleos en digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas”. Universidad Nacional Autónoma de México, 2022.