



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

DESEMPEÑO DE AERO-GENERADORES EÓLICOS OPTIMIZADOS
PARA CORRIENTES DE CHORRO DE BAJA ALTITUD

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

JOSÉ MIGUEL RAYGOZA SERMENT

TUTOR

DR. JOSÉ ENRIQUE GUZMÁN VÁZQUEZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mex. Noviembre 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado Asignado

Presidente: **Dra. Catalina Stern Forgach**
Secretario: **Dr. José Luis Fernández Zayas**
Vocal: **Dr. Enrique Guzmán Vázquez**
Suplente: **Dr. Pablo Luis Rendón Garrido**
Suplente: **Dr. William Vicente y Rodríguez**

Agradecimientos

Este trabajo solo pude lograrse gracias a todas las personas que han estado conmigo durante toda mi vida y han contribuido con mi formación académica y personal. Es por ello que esta tesis es un dedicatorio a todas ellas.

Comenzando con las personas que contribuyeron para obtener los resultados comienzo agradeciéndole al Dr. Enrique Guzmán, mi tutor de tesis, quien no dejó de apoyarme en el desarrollo del trabajo. Le agradezco por la interacción armoniosa que tuvimos durante toda mi maestría, por las discusiones que me ayudaron a aclarar dudas que fueron saliendo en el desarrollo del trabajo y el apoyo que me brinda hasta la fecha para continuar con mi desarrollo personal y académico. Otra persona indispensable que debe ser mencionada es Diego Núñez García ya que esta tesis es una continuación de su trabajo, que es de gran calidad por sí solo, y sin este punto de apoyo el mismo no existiría además de que agradezco nuestra interacción así como la ayuda que proporcionada. Finalmente quiero agradecer a todos mis colegas de la licenciatura y maestría con las que interactué y pasé buenos momentos durante mi formación universitaria. Este trabajo es afín a las investigaciones de la Dra. Catalina Elizabeth Stern Folgach y el Dr. Luciano Castillo, quienes trajeron este proyecto a México por lo que agradecemos la oportunidad de continuar el mismo en el IIUNAM.

provecho para comentarle que he incluido en el borrador un agradecimiento explícito a usted y al Dr. Luciano Castillo, para reconocer que la idea original es de ustedes y que el trabajo se ha desarrollado en el marco de la colaboración correspondiente.

Las personas que más deben ser agradecidas (sin dejar de lado a las demás) son mis familiares y amigos de toda la vida. En especial a mi mamá Rosa Aurora Serment Guerrero quien me ha transmitido lo importante que es ser tenaz, trabajador y honesto como persona, que me ha apoyado más que ningún otro y ha luchado como nadie para darme una vida sin escasez ni sufrimiento en general. No dejo de lado a mi hermana Alejandra Raygoza Serment la persona junto a mi madre con la que más he compartido mis momentos buenos y malos, y que nunca ha dejado de expresarme su afecto y preocupación. Para terminar doy mis más grandes retribuciones a mis otros familiares y amigos. Esta tesis está dedicada a todos ustedes. Gracias.

RESUMEN

En este trabajo se hizo el estudio numérico de un aerogenerador inmerso en una corriente en chorro de baja altitud (LLJ por sus siglas en inglés) que es un tipo de corriente presente a bajas altitudes en la atmósfera terrestre con un pico de velocidades bien localizado. Se ha encontrado por otros investigadores que esta corriente aumenta la eficiencia de un parque eólico hasta un 10 % al compararse con una capa límite atmosférica turbulenta con un perfil logarítmico de velocidades. En este trabajo se corroboró este hallazgo de manera numérica en cuatro casos que incluyen un perfil de velocidades uniforme de laboratorio, el perfil LLJ de interés con la punta coincidiendo en el buje de la góndola y en la región por donde atraviesa la punta inferior, y por último en la capa límite atmosférica. En un trabajo anterior, el aerogenerador fue optimizado por medio de un algoritmo genético para operar en este tipo de corrientes.

Una vez investigado el caso de un generador, se estudió el caso de dos generadores para determinar el impacto que tiene la estela producida por el dispositivo al frente sobre el que se encuentra corriente abajo. Ambos generadores se dispusieron en una configuración alineada, con el objeto de establecer la potencia que el segundo generador “pierde” con respecto al generador localizado corriente arriba.

Contenido

RESUMEN	III
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Generadores eólicos	1
1.1.1. Definición y clasificación.	1
1.2. Papel histórico de la energía eólica	2
1.2.1. Ventajas y desventajas de la energía eólica.	3
1.3. Energía eólica en México	4
1.3.1. Atlas eólico mexicano	4
1.4. Corrientes en chorro de baja altitud (LLJ)	5
1.4.1. Regiones con chorros de baja altitud en México	7
1.5. Impacto de los LLJ en el desempeño de generadores	7
1.6. Objetivo del trabajo	11
2. MARCO TEÓRICO	14
2.1. Ecuaciones fundamentales de la aerodinámica+	15

2.2.	Simplificaciones hechas al modelo teórico	22
2.2.1.	Ecuación de Bernoulli	22
2.2.2.	Flujo incompresible	22
2.2.3.	Generador como cuerpo rígido	24
2.3.	Potencia entregada por un generador ideal: Límite de Betz	26
2.4.	Análisis teórico del flujo	30
2.4.1.	Modelado de la estela	30
2.5.	Parametrización del chorro de baja altitud	34
3.	MODELO NUMÉRICO	39
3.1.	Método de volúmenes finitos	39
3.2.	Desarrollo del modelo numérico en OpenFOAM	40
3.2.1.	Estructura de OpenFOAM	41
3.2.2.	Geometría	43
3.2.3.	Dominio computacional y mallado	44
3.2.4.	Calidad de la malla	51
3.3.	Implementación del chorro	53
3.4.	Rotación dinámica del generador	54
3.4.1.	Condiciones iniciales y de frontera	54
3.4.2.	Esquemas de solución	58
3.5.	Post-procesamiento	60
4.	RESULTADOS Y ANÁLISIS	63

4.0.1. Resultados preliminares: control de calidad	64
4.0.2. Evolución del flujo en torno a un generador aislado	68
4.0.3. Efectos del diseño del buje del rotor	72
4.0.4. Efecto del modelo de turbulencia.	76
4.0.5. Efectos de la velocidad angular inicial y la rapidez promedio del flujo incidente	79
4.0.6. Desempeño de un generador aislado ante diferentes perfiles de velocidad	83
4.0.7. Desempeño de dos generadores alineados.	94
5. CONCLUSIONES	125
5.0.1. Resumen	125
5.0.2. Aportaciones	126
5.0.3. Problemas encontrados	127
5.0.4. Recomendaciones	128
5.0.5. Trabajo futuro	128
A. Demostraciones	133
A.1. Demostración del Potencial generalizado	133
A.2. Demostración del potencial de fuerzas no inerciales	134
A.3. Demostración de la ecuación de Bernoulli	137
A.4. Demostración de la validez en la incompresibilidad del fluido	138
B. Modelos de Turbulencia	142
B.1. Modelos de turbulencia RANS	143

- B.1.1. Promediado de Reynolds 143
- B.1.2. Ecuaciones promediadas de Reynolds 145
- B.1.3. Modelos de viscosidad turbulenta 147
- B.1.4. Algunos modelos de turbulencia 148
- B.2. Modelos de turbulencia (LES) 151
 - B.2.1. Características relevantes 151
 - B.2.2. Proceso de filtrado y ecuaciones filtradas 153
 - B.2.3. Modelado de la sub-escala 157

Lista de Figuras

1.1. Tamaño y capacidad de los generadores con el paso de los años. Imagen tomada de ²⁶	3
1.2. Capacidad de energía eólica en México por entidad federativa. Imagen tomada de, ¹³ también puede ser consultada en ¹⁰	5
1.3. a) Rapidez del viento de 10 años a 200m de altura. b) Densidad de potencia del viento de 10 años a 200m de altura. Ambas imágenes fueron tomadas de ²⁸	8
1.4. a) Regiones con presencia de LLJ a nivel mundial. Se resaltan las zonas relevantes para México. Imagen editada a partir de. ¹⁴ b) Regiones en Norteamérica donde ocurren LLJ, se utiliza el índice <i>NLLJ</i> para indicar la frecuencia de observación de estos chorros. Imagen tomada de. ⁶	9
1.5. a) Perfil de velocidades de un LLJ (Imagen tomada de ¹⁹). b) Posibles zonas de impacto en un generador eólico respecto al pico de velocidades en el estudio llevados a cabo por Doosttalab et. al ¹⁴ (Imagen tomada del mismo artículo). c) Estudio llevado a cabo por Gadde et. al ¹⁷ (Imagen tomada del mismo artículo).	11
1.6. Resultados de la potencia relativa de un aerogenerador eólico colocado corriente abajo (imagen modificada a partir de artículo de Doosttalab et. al ¹⁴) . . .	12
2.1. Marco de referencia cilíndrico (no inercial) utilizado para describir el movimiento generador y un sistema de referencia cartesiano de referencia (inercial). Se muestra en dos perspectivas este sistema.	26

2.2. a) Variación en la orientación de los perfiles aerodinámicos con la distancia r^* . b) Diferencias de diseño óptimo ante diferentes números Str.	27
2.3. Volumen de control cilíndrico alrededor de una turbina eólica como un disco actuador. a) Vista lateral, b) Vista isométrica.	28
2.4. División del dominio completo en 5 regiones Ω_k ($k = 1, \dots, 5$) para modelar la estela con una discontinuidad de espesor ε	32
2.5. Datos utilizados en la tesis de D. Núñez ⁴⁰ y su curva de ajuste.	35
2.6. a) Diferentes perfiles de velocidad que incidiendo en el generador y el sistema S que se describió con anterioridad. b) Perfiles de velocidad utilizados como función de la posición z . c) Ángulo de paso que experimentará cada perfil con los diferentes chorros. d) Ángulo de paso en una región de espacio reducida. .	36
2.7. Diseño de álabes óptimo para operar en un LLJ en dos vistas. Imagen editada a partir de ⁴⁰	37
3.1. Estructura del caso base en OpenFoam	42
3.2. Álabes y ensamblado del generador	43
3.3. Modelos de generador utilizados. Vista isométrica.	44
3.4. a) Dimensiones del recinto base en términos del diámetro del generador. b) Recintos base y definitivo. Se muestran además el tamaño de celda base y el marco de referencia	46
3.5. Recinto computacional utilizado en la simulación con dos generadores.	47
3.6. Configuración de geometría con un archivo .obj para ser mallado	48
3.7. a) Algoritmo de refinamiento. b) Aproximación de la malla inicial a la geometría objetivo (local). c) Aproximación al mallado de refinamiento en una región especificada (global). Imagen inspirada en de. ⁶¹	48
3.8. Procesos de snappyHexMesh utilizados: <i>castellatedMesh</i> y <i>snap</i>	50

3.9. Resultado final del malla. a) Vista isométrica. b) Vista lateral. c) Vista lateral sobre el corte del plano $x = 0$	52
3.10. Malla final de un generador eólico. a) Geometría. b) Acercamiento a la geometría con elementos mallados. c) Malla alrededor del generador en un plano que corta al plano $x = 0$. d) Lo mismo que en c) pero utilizado un clip para evitar la distorsión en su visualización.	53
3.11. Resultado final de la malla. Se resaltan los parámetros más relevantes	54
3.12. Código de una malla rotatoria	55
3.13. Algoritmo PIMPLE. Imagen tomada de ³⁷	59
3.14. Planos para medir las propiedades de la estela	61
4.1. Diferentes mallas utilizadas para hacer el estudio de independencia. Se especifica del lado derecho el tamaño máximo del elemento de malla.	65
4.2. Resultados de celeridad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30s$	66
4.3. Resultados de la componente azimutal de la velocidad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30s$	67
4.4. Resultados de la componente azimutal de la vorticidad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30s$	68
4.5. Distribución de la magnitud de velocidad y la presión normalizadas y promediadas tal como fue descrito en la sección 3.5 en el tiempo final.	69
4.6. Distribución de la energía cinética del campo medio, la energía cinética turbulenta y la enstrofia normalizadas en el tiempo final.	69
4.7. Evolución de la rapidez promedio de un perfil de velocidades uniforme para un generador aislado.	70
4.8. Evolución de la componente azimutal de la vorticidad de un perfil de velocidades uniforme para un generador aislado.	71

4.9. Rapidez promedio para 3 modelos de buje diferentes vistos desde un plano que corta al tubo de corriente generado por la estela (lado izquierdo) y normal al plano de rotación del generador eólico.	73
4.10. Componente azimutal de la velocidad para 3 modelos de buje	74
4.11. Componente azimutal de la vorticidad para 3 modelos de buje	75
4.12. Velocidad angular del dispositivo y eficiencia cinética del flujo con los 3 diseños de buje.	77
4.13. Comparación en el coeficiente de potencia, la velocidad angular y la eficiencia y en un generador eólico con diferentes coeficientes de potencia.	78
4.14. Visualización de la rapidez promedio de un perfil uniforme para los diferentes modelos de turbulencia	79
4.15. Velocidad angular, Eficiencia cinética y Coeficiente de potencia en el generador ante variaciones de la rapidez del flujo promedio y la velocidad angular inicial.	80
4.16. Evolución de la velocidad angular ante variaciones del número de Strouhal inicial (Parte superior). En la parte inferior se muestra la evolución para un mismo número de Strouhal pero con valores (U, Ω_0) distintos entre sí.	81
4.17. Comparación de la rapidez del flujo para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	84
4.18. Comparación de la componente radial de la velocidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	85
4.19. Comparación de la componente azimutal de la velocidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	86
4.20. Comparación de la componente radial de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	87
4.21. Comparación de la componente azimutal de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	88

4.22. Comparación de la componente axial de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.	89
4.23. Evolución temporal de la rapidez media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador. Se muestran los casos para los 4 perfiles de velocidad utilizados	90
4.24. Variación espacial de la rapidez media del flujo en instantes de tiempo específicos. Se muestran los casos para los 4 perfiles de velocidad utilizados	91
4.25. Evolución temporal de la presión media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación de los generadores.	92
4.26. Variación espacial de la presión media en instantes de tiempo específicos	93
4.27. Evolución temporal de la energía cinética turbulenta media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.	94
4.28. Variación espacial de la energía cinética turbulenta media del flujo en instantes de tiempo específicos	95
4.29. Evolución temporal de la energía cinética del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.	96
4.30. Variación espacial de la energía cinética del flujo en instantes de tiempo específicos	97
4.31. Evolución temporal de la enstrofia del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.	98
4.32. Variación espacial de la enstrofia del flujo en instantes de tiempo específicos.	99
4.33. Potencia, Velocidad Angular y Eficiencia del generador ante diferentes perfiles.	99
4.34. Campo de celeridades en uno de los casos al final de una simulación con dos generadores.	100
4.35. Visualización de la rapidez del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano YZ.	101

4.36. Visualización de la rapidez del flujo en diferentes instantes del tiempo. Planos ZX.	102
4.37. Visualización de la componente radial de la velocidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.	103
4.38. Visualización de la componente azimutal de la velocidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.	104
4.39. Visualización de la componente azimutal de la vorticidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.	105
4.40. Visualización de la componente axial de la vorticidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.	106
4.41. Comparación de la rapidez del flujo en el último instante de la simulación de los diferentes perfiles de velocidad. Se muestran los 4 casos.	107
4.42. Comparación de la componente radial de la velocidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.	108
4.43. Comparación componente azimutal de la velocidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.	109
4.44. Comparación de la componente radial de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.	110
4.45. Comparación componente azimutal de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.	111
4.46. Comparación de la componente axial de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.	112
4.47. Evolución temporal de la rapidez media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos. Se muestran los 4 perfiles de velocidad utilizados.	113
4.48. Distribución espacial de la rapidez media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados. Se muestran los 4 perfiles de velocidad utilizados.	114

4.49. Evolución temporal de la presión media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.	115
4.50. Distribución espacial de la presión media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados.	116
4.51. Evolución temporal de la energía cinética turbulenta media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.	117
4.52. Distribución espacial de la energía cinética turbulenta media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados	118
4.53. Evolución temporal de la energía cinética del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.	119
4.54. Distribución espacial de la energía cinética del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados	120
4.55. Evolución temporal de la enstrofia del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.	121
4.56. Distribución espacial de la enstrofia del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados	122
4.57. Evolución de la velocidad angular de cada generador ante perfiles de velocidad diferentes.	123
4.58. Coeficiente de potencia de cada generador ante los diferentes perfiles de velocidad.	123
4.59. Eficiencia de cada una de las máquinas ante diferentes perfiles de velocidad. Se muestra la comparación con los resultados de. ¹⁴	124
4.60. Eficiencia de cada una de las máquinas ante diferentes perfiles de velocidad. .	124
5.1. a) Perfiles obtenidos ante variaciones de ϵ . b) Perfiles obtenidos ante variaciones de ϕ . c) Versión linealizada de los perfiles ((5.3) y (5.4)) (curva roja) y su comparación con las originales ((5.1) y (5.2)) (curva azul).	131

5.2. Malla generada por el sistema de coordenadas (μ, ν) . El perfil corresponde a $\mu = 0$	131
5.3. Diseños de álabe utilizando los perfiles de Joukouuski.	132
B.1. Malla y los remolinos que pueden ser resueltos. A la izquierda se muestran aquellos que su tamaño es menor a la malla y deben ser modelados y a la derecha los que si capta la malla y por ende son resueltos. Imagen inspirada de. ⁷⁸	152
B.2. a) Curva del espectro de energía cinética $E(k)$ en función del número de onda k . Se muestra también el proceso de Filtrado donde a la izquierda corresponde a la energía que fue resuelta por el filtro y a la derecha la que quedó como residuo y debe ser modelada. b) Longitud de malla adecuada para resolver los vórtices que corresponde a la quinta parte de la escala de longitud integral ℓ_0 . c) Filtrado aplicado con la escala de longitud integral ℓ_0 y con el espesor de filtro Δ . Imagen inspirada de ⁷⁸	153
B.3. Ruptura de los remolino en unos más pequeños hasta que su escala es tal que son disipados en calor (color rojo). Imagen inspirada de. ⁷⁹	158

Lista de Tablas

2.1. Potenciales	19
2.2. Parámetros de escala del caso particular	38
3.1. Dimensiones de malla base	44
3.2. Dimensiones de malla base	45
3.3. Longitud de los elementos dentro de las regiones mostradas y la geometría.	49
3.4. Tipos de condiciones de Frontera que aparecen en este trabajo y su descripción	56
3.5. Condiciones de frontera implementadas en los campos (Arriba) y su valor especificado si es el caso (Abajo)	57
3.6. Condición inicial en los diferentes campos físicos.	57
3.7. Esquemas numéricos implementados	60
4.1. Residuales después de 3 iteraciones con el algoritmo PIMPLE (valores máximos).	64
4.2. Parámetros relevantes al comparar las mallas.	70

NOMENCLATURA

Variables

Tiempo	t
Campo de velocidades	\mathbf{u}
Vector normal a una superficie	$\hat{\mathbf{n}}$
Fuerza de campo	\mathbf{F}
Presión	p
Velocidad del marco inercial	\mathbf{u}_I
Velocidad del marco giratorio	\mathbf{u}_R
Vector posición	\mathbf{x}
Energía total	e_T
Fuente de calor interna	Q_S
Flujo de calor	\mathbf{q}
Energía cinética	k
Energía potencial	V
Energía potencial efectiva	U
Energía mecánica	e_m
Energía interna	e
Entropía	s
Temperatura	T
Constante de gas ideal	R_g
Calor específico a volumen constante	c_V
Número de Mach	M
Número de Strouhal	Str
Número de Froude	Fr
Tensor de inercia	$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$
Momento angular de un cuerpo rígido	\mathbf{L}
Coefficiente de potencia	C_P

Flujo de masa	\dot{m}
Fuerza de empuje (Sec. 2.3)	T
Coordenada radial	\hat{r}
Radio de álabe	R
Diametro del aerogenerador	D
Rapidez media del flujo	U_{Mean}
Número de Euler	Eu
Energía cinética turbulenta	k_T
Entalpía	h
Campo de velocidades promedio	$\bar{\mathbf{u}}$
Campo de velocidades fluctuante	\mathbf{u}'
Producción de energía cinética turbulenta	\mathcal{P}
Longitud de mezclado de Prandtl	ℓ_m
Densidad de energía cinética	$E(k)$
Longitud integral	ℓ_0
Campo de velocidades filtrado	$\tilde{\mathbf{u}}$
Función de filtrado	G

Letras griegas

Densidad de masa	ρ
Tensor de esfuerzos	$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}}$
Tensor de esfuerzos cortantes	$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}}$
Viscosidad	μ
Segunda viscosidad	λ
Velocidad angular	$\boldsymbol{\Omega}$
Aceleración angular	$\boldsymbol{\alpha}$
Disipación viscosa	Φ
Vorticidad	$\boldsymbol{\omega}$
Enstrofia	ξ
Coefficiente de Laplace	γ
Conductividad térmica	κ
Difusividad térmica	α_d
Ángulo de paso	θ
Coordenada azimutal	$\hat{\boldsymbol{\theta}}$
Coordenada axial	$\hat{\boldsymbol{\zeta}}$
Viscosidad cinemática	ν
Presión cinemática	ϱ
Compresibilidad isotérmica	κ_T
Expansibilidad isobárica	β
Tensor de esfuerzos de Reynolds (RANS)	$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}}_R$
Disipación turbulenta	ε
Viscosidad turbulenta	μ_T
Disipación turbulenta específica	ω
Tensor de esfuerzos residuales (LES)	$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}}_R$
Viscosidad de sub-malla	ν_{sgs}

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Generadores eólicos

1.1.1. Definición y clasificación.

Un generador eólico es un dispositivo que tiene la capacidad de extraer la energía cinética del viento en energía mecánica y luego en energía eléctrica. En las turbinas modernas esto se logra gracias a que el viento ejerce una fuerza sobre los componentes de rotación, o álabes, que están unidos a un eje de rotación denominado buje. El sistema de fuerzas genera una torca neta que hace girar el rotor de la máquina. Este giro es aprovechado para mover un generador eléctrico, que se encarga de producir energía eléctrica aprovechable.

Existen diversas clasificaciones para los generadores eólicos; por ejemplo, de acuerdo a su eje de rotación, pueden ser de eje horizontal (“Horizontal Axis Wind Turbine”, o HAWT) o de eje vertical (“Vertical Axis Wind Turbine”, o VAWT); por el número de álabes unidas al buje, o de acuerdo a la fuerza principal que genera el movimiento de los álabes, pueden ser por *arrastre* o por *sustentación*. Entre los generadores comerciales de gran capacidad están los de eje vertical con 3 álabes. Sin embargo, se llegan a ver otros tipos de generadores de menor capacidad que ofrecen diferentes ventajas en aplicaciones de baja potencia. Aunque existen clasificaciones adicionales,¹⁻³ este trabajo se enfoca en los generadores de eje vertical.

1.2. Papel histórico de la energía eólica

Los generadores eólicos tienen como precursor a los molinos de viento conocidos en tiempos de los persas. Tiempo después, la configuración básica fue perfeccionada en Europa durante la edad media. Este tipo de energía solía ser de gran importancia para diversas regiones europeas, ya que era aprovechada para hacer diferentes importantes tareas como la molienda de granos, o el bombeo de agua. Después, se usó y fue descontinuado cuando comenzó la primera revolución industrial, debido a que el carbón presentaba ventajas notables sobre el viento. La más relevante era que el carbón podía suministrar mucha más energía aprovechable para mover máquinas (las cuales se hicieron cada vez más complejas en consecuencia), además de que podía ser “transportada” y utilizada donde y cuando fuera requerida, a diferencia del viento que depende de las condiciones atmosféricas.¹

Las primeras turbinas eólicas aparecieron a finales del siglo XIX, pues con el desarrollo científico y tecnológico de la teoría electromagnético, existió interés para transformar la energía del viento en electricidad. Algunos de los principales promotores de este desarrollo fueron el austriaco Josef Friedländer en 1883, el escocés James Blyth en 1887 y el estadounidense Charles F. Brush. Pero el desarrollo más importante se dio en Dinamarca entre 1891-1918, gracias a Poul La Cour quien logró construir más de 100 unidades con potencias entre 20-35 kW.^{1,2}

El limitado interés por estos dispositivos cambió cuando la bióloga marina estadounidense Rachel Louise Carson publicó su famoso libro *Primavera silenciosa*⁴ en 1962, en el cual alertaba sobre las consecuencias ambientales causadas por el uso desmedido del carbón a largo plazo. Esto provocó un cambio en el paradigma que obligó a la humanidad a tomar consciencia y emprender acciones para generar electricidad de maneras menos nocivas y satisfacer una demanda creciente.

Fue en la década de 1990 que la energía eólica fue realmente impulsada ante la crisis climática. A partir de esa época se han construido generadores eólicos cada vez más altos, con diámetros más grandes, con materiales que son más resistentes y ligeros, y con mejores diseños. El resultado es que los generadores eólicos han incrementado la potencia producida alrededor de 3 órdenes de magnitud (hasta los GW de potencia). La tendencia creciente queda ilustrada en la Figura 1.1.

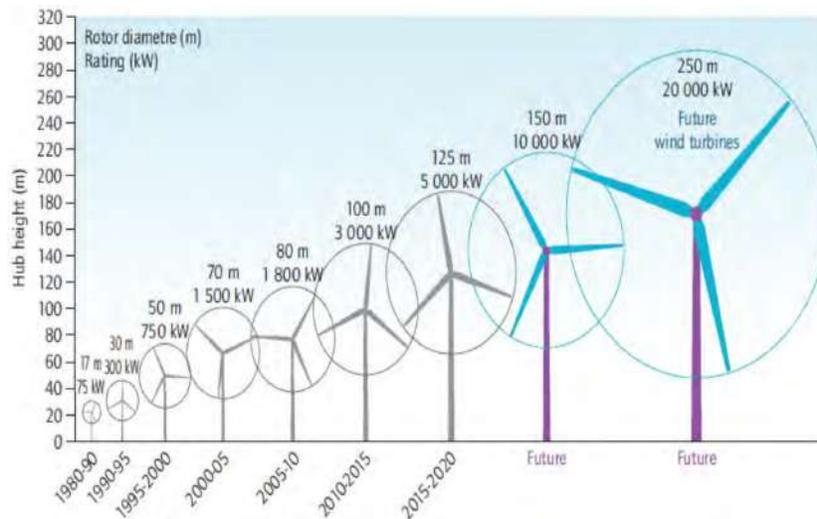


Figura 1.1: Tamaño y capacidad de los generadores con el paso de los años. Imagen tomada de²⁶

1.2.1. Ventajas y desventajas de la energía eólica.

Una importante ventaja de la energía eólica es que tiene un impacto ambiental relativamente bajo. Comenzando porque no emite gases de ningún tipo, no requiere de ningún uso ni almacenamiento de agua, afectaciones mínimas a la salud, una vida útil cada vez más larga de los dispositivos, la utilización de una fuente de energía renovable e inagotable que es el viento, costos de operación bajos en comparación a otras fuentes disponibles, compatibilidad con actividad agrícola y ganadera, y distribución de energía limpia a comunidades rurales.⁵

Sin embargo, existen también algunas desventajas asociadas a este tipo de fuente energética, tales como la afectación a la fauna local, principalmente aves y murciélagos que impactan contra los aerogeneradores, el ciclo de vida de los materiales utilizados para la construcción de las unidades, contaminación visual y acústica, una fuerte susceptibilidad a las condiciones climáticas que la hacen inconsistente para cubrir la demanda, etc.

En el caso concreto de México preocupa la pérdida de biodiversidad por el espacio requerido para la construcción de los parques eólicos, un mal manejo de la distribución eléctrica, las tecnologías de fabricación y operación provenientes de otros países, intereses de países extranjeros que ignoran parcial o totalmente el contexto energético nacional, el valor de la propiedad de tierra donde se construyen estos parques, los conflictos con la población local, entre otros problemas.⁷

A pesar de las desventajas mencionadas, de acuerdo con el Departamento de Energía de

los Estados Unidos,⁵ el impacto a la fauna es relativamente bajo en comparación con otras tecnologías, mientras que la contaminación visual y la afectación al valor de la propiedad son reducidos. Los argumentos a favor y en contra dependen del contexto de cada país, tal como expone la Asociación Mexicana de Energía Eólica (AMDEE), que promueve esta fuente de energía.⁸⁻¹⁰

1.3. Energía eólica en México

El 22 de Abril de 2016 se firmó el *Acuerdo de Paris* en donde se acordó como objetivo principal disminuir el aumento global de la temperatura media terrestre de $2.0C$ a $1.5C$ mediante una reducción de gases de efecto invernadero en un 50 % para el año 2030. México actualmente forma parte de la *Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático*, organismo de la ONU que se encarga de establecer un plan de acción a nivel mundial para mitigar los efectos del cambio climático, así como una adaptación a este.¹²

La Meta de México es generar al menos el 35 % de energía por medio de fuentes limpias para el año 2024 y 50 % para el año 2050 ante el creciente aumento en la población, industria y otros sectores cuya demanda de consumo en electricidad no parará de crecer.²⁵ El *Instituto Nacional de Electricidad y Energías limpias* (INEEL) es el actual encargado (2023) de realizar investigaciones con el fin de determinar los recursos eólicos potenciales que pueden ser aprovechados para cubrir la demanda energética.²⁵

1.3.1. Atlas eólico mexicano

México cuenta con diversas regiones donde los vientos tienen una capacidad de generación eléctrica alta, estima un potencial eólico en la región continental se encuentra por los 71,000 MW^{1, 13, 28} El atlas eólico mexicano actual fue aprobado en el año 2015 y a través de un estudio con 6 años de duración

Se encuentran instalados 68 parques eólicos que sumados produjeron en 2021 alrededor de 7,800 MW/hora. Se encuentran distribuidos en 14 estados del país siendo Oaxaca, Tlaxcala y Nuevo León los que producen la mayor cantidad de energía de este tipo en la actualidad (2023)¹³ como se observa en la Figura 1.2.

¹De acuerdo al último estudio publicado por el INEEL



Figura 1.2: Capacidad de energía eólica en México por entidad federativa. Imagen tomada de,¹³ también puede ser consultada en¹⁰

1.4. Corrientes en chorro de baja altitud (LLJ)

Debido a que los generadores eólicos han aumentado considerablemente su tamaño en las últimas décadas, estos alcanzan regiones de la atmósfera donde las condiciones del viento cambian significativamente. A partir de ciertas alturas, la máquina opera fuera de la capa límite de superficie (o atmosférica) cuyo perfil de velocidades es logarítmico.

Una de las corrientes que se ha observado en algunas regiones concretas del planeta son las denominadas *corrientes en chorro de baja altitud* (o LLJ, por sus siglas en Inglés). Estas corrientes atmosféricas se caracterizan principalmente por presentar un pico de celeridad en el perfil de velocidades (Figura 1.5 a)). Los LLJ suelen localizarse a altitudes relativamente bajas (de 50m hasta algunos Km de altitud). La figura 1.4 a)) muestra un mapa donde se presentan los LLJ más importantes, principalmente en verano y en horas nocturnas. Es de notar que la frecuencia e intensidad de estos chorros han aumentado en los últimos años, posiblemente debido al aumento a nivel global en la temperatura.^{11,14} Asimismo, los LLJ han podido ser detectados gracias al movimiento de nubes tipo "stratocumulus", "stratus fractus" y "cumulus fractus", con mayor frecuencia en regiones al este (u oeste, dependiendo de la latitud) de las grandes cadenas montañosas, o donde existen cambios sustanciales de

temperatura a nivel de mar.

De acuerdo con Stensrud et.al,¹¹ hay cinco mecanismos principales que intervienen en la formación de un LLJ. El primero se debe a un gradiente de temperatura (y por ende de presión) causado por la radiación solar no uniforme sobre la superficie de la Tierra. Este efecto es acompañado por la rotación de la Tierra, que introduce fuerzas de Coriolis y Centrífugas² que desvían el movimiento de las partículas del aire, generando un movimiento denominado *oscilación inercial*. Cuando la fuerza de presión y de Coriolis se equilibran, se genera el denominado *flujo geostrófico* en donde el aire se mueve perpendicularmente a ambas fuerzas. Debido a la rotación de la Tierra el gradiente de presión cambia durante el día, y se desequilibra con respecto a la fuerza de Coriolis. Cuando la región pasa del día a la noche, se crea entonces un *flujo subgeostrófico*. En la situación contraria se crea un *flujo supergeostrófico*, que es acompañado por una importante fricción del aire en contacto con el suelo.¹¹

Asimismo, el aire en contacto con el suelo se calienta y disminuye su densidad. Esto genera un flujo vertical ascendente que desplaza al aire frío en la parte superior. En las regiones costeras, esto provoca una estratificación en el fluido que implica la formación de un efecto *baroclínico*³ debido a la diferencia en las capacidades térmicas del aire y de la Tierra. Este mecanismo genera un LLJ que se alinea con el gradiente de temperatura horizontal. Por otra parte, debido a las variaciones en el relieve del terreno, especialmente en las regiones montañosas, el aire en las regiones elevadas se calienta menos que en las regiones bajas durante el día, lo que genera un mecanismo similar al descrito anteriormente para las regiones costeras. Por la noche ambos mecanismos se invierten creándose una circulación cíclica en el aire que favorece el desarrollo de los chorros de baja altitud.^{15,16}

Debe señalarse que todavía sigue en discusión qué tipo de corrientes con estas características son realmente LLJ. Esto se debe a que un gran número de procesos pueden crear corrientes con rapidez media mayor que en otras regiones vecinas, pero cuya escala no es suficiente para alcanzar el estatus de LLJ. Únicamente califican aquellas circulaciones cuya extensión espacial, tanto en la dirección vertical como en las direcciones laterales, es suficiente para generar un corte apreciable (es decir, que decae después de una distancia medible) en una extensión apreciable de terreno a rapidez de viento usuales.¹¹

²En menor medida también participan fuerzas de Euler que son relevantes en escalas temporales más largas, como las involucradas en el movimiento de precesión de los equinoccios.

³En el que los gradientes de presión y densidad no están alineados.

1.4.1. Regiones con chorros de baja altitud en México

De acuerdo a la figura 1.3 México existen al menos tres regiones donde se producen LLJ. En el noroeste del país, se observan LLJ en los estados de Baja California y Sonora. En la zona noreste, en los estados de Tamaulipas y Nuevo León, también se conoce la existencia de LLJ. Por último, en el estado de Quintana Roo hay una circulación activa de este tipo. De acuerdo con el estudio de Algarra et. al,⁶ también existen chorros de baja altitud en los estados de Chihuahua, Durango y Zacatecas (Figura 1.4 b)). Cabe mencionar que el oeste de la península de Yucatán es interesante desde el punto de vista de la explotación dada la poca profundidad del lecho marino en esa región. Por último un estudio publicado por Arfreuille et.al²⁷ encontró que en el estado de Colima también hay presencia de LLJs.

Como indica el estudio más reciente del Atlas eólico mexicano, solamente 10 de estos sitios fueron caracterizados en el país para determinar el potencial eólico. El resto se obtuvo mediante modelos numéricos como el *Regional Atmospheric Modeling System* (RAMS) y el *Weather Research and Forecasting* (WRF).²⁸ Dado que los LLJ son un evento climático inusual, se requiere de una series de investigaciones más profundas en otras regiones del país.

1.5. Impacto de los LLJ en el desempeño de generadores

Por lo mencionado anteriormente es importante considerar el impacto que tienen los LLJ sobre los generadores eólicos. A este respecto, deben ser tomados en consideración tanto los generadores aislados, como los que forman un arreglo en parques de producción. Este último caso, es evidentemente más complejo debido a la frecuente interacción entre dispositivos. Diversos estudios experimentales y numéricos han sido llevados a cabo para analizar diferentes casos de interés.

Es importante mencionar que debido al pico de velocidades en el LLJ, existe una región de esfuerzos cortantes positivos debajo del valor máximo, y otra de esfuerzos cortantes negativos encima de ese punto. En estas dos regiones se producen diferentes efectos, dependiendo del punto de incidencia del chorro respecto al generador.

La región de esfuerzos cortantes positivos (visto también en el típico perfil logarítmico) está asociada a una mayor turbulencia ocasionada por el gradiente de velocidades vertical positivo, que al provocar un flujo de momento negativo hacia abajo desfavorece la producción

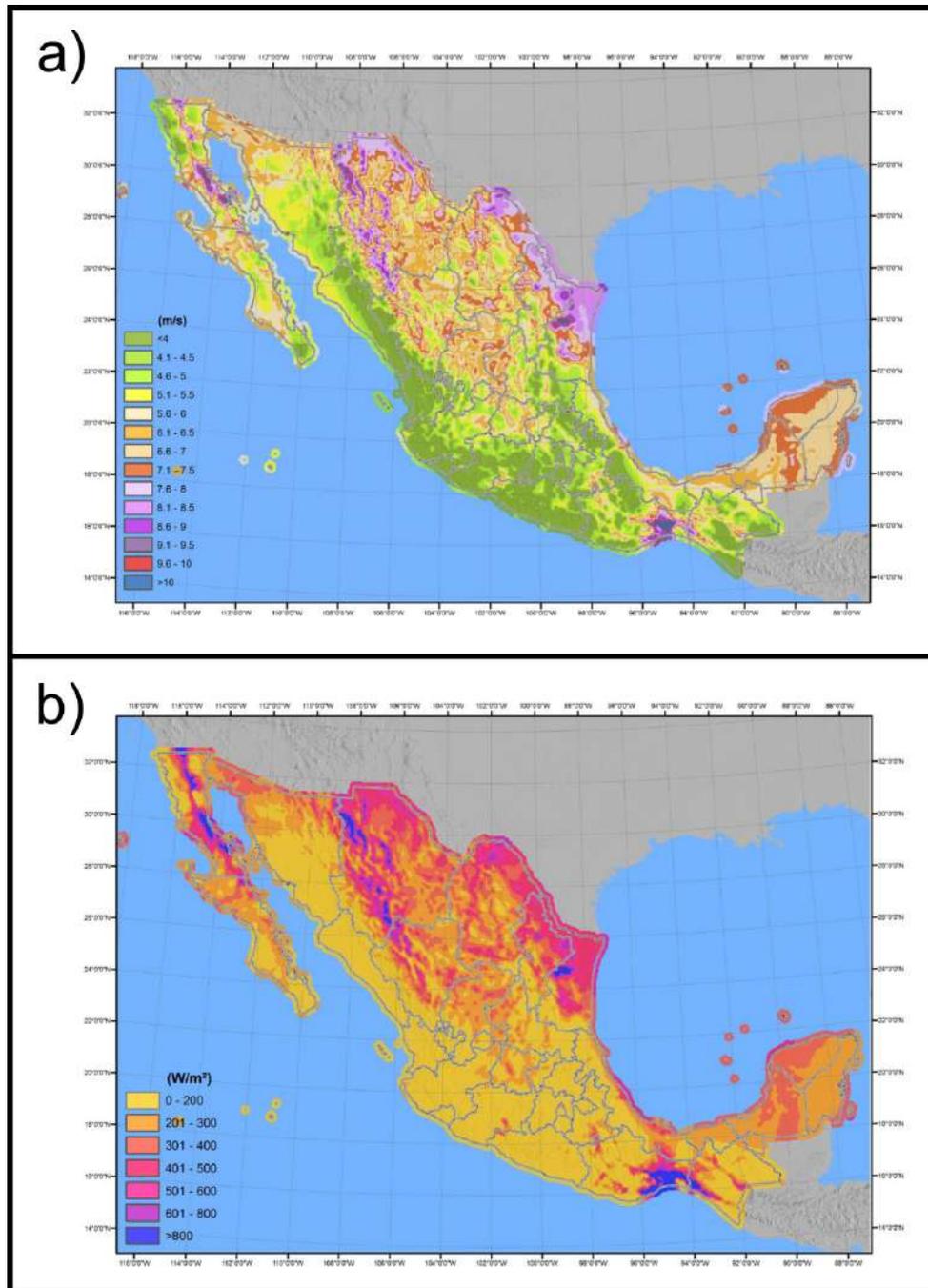


Figura 1.3: a) Rapidez del viento de 10 años a 200m de altura. b) Densidad de potencia del viento de 10 años a 200m de altura. Ambas imágenes fueron tomadas de²⁸

de turbulencia. Esto repercute en una recuperación más lenta de la estela del flujo. Lo opuesto sucede en la región de esfuerzos cortantes positivos.

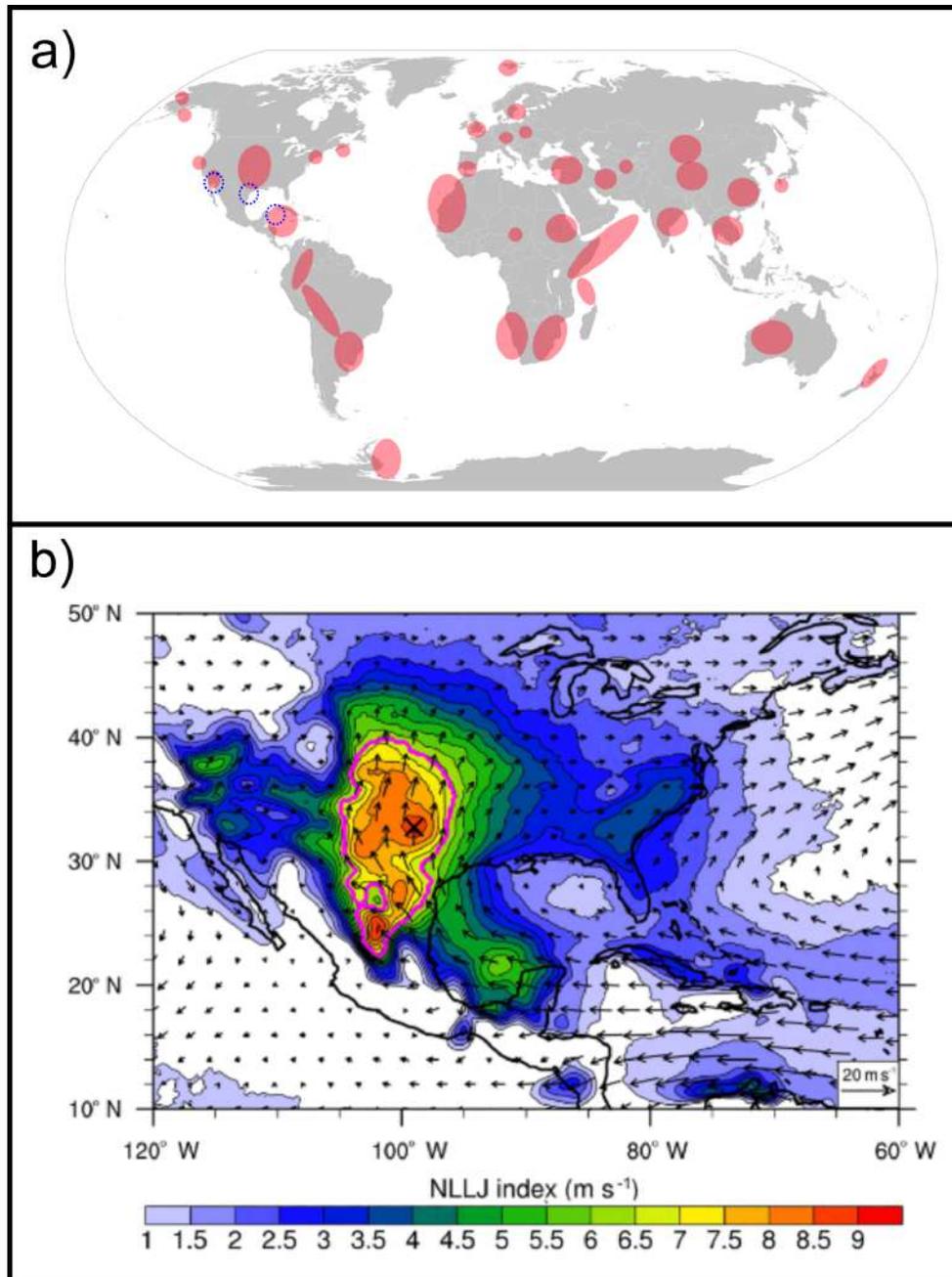


Figura 1.4: a) Regiones con presencia de LLJ a nivel mundial. Se resaltan las zonas relevantes para México. Imagen editada a partir de.¹⁴ b) Regiones en Norteamérica donde ocurren LLJ, se utiliza el índice *NLLJ* para indicar la frecuencia de observación de estos chorros. Imagen tomada de.⁶

En el ámbito energético, Doosttalab et.al¹⁴ llevaron a cabo un *estudio experimental* con generadores HAWT's sometidos a un LLJ con incidencia en 3 puntos distintos del generador: en el pico del chorro coincidente con el buje, y con las puntas inferior y superior, tal como

se ve en la Figura 1.5 b). Estas fueron comparadas con el perfil de capa límite atmosférica usual (logarítmico). El estudio se llevó a cabo primero con un dispositivo aislado y después en un arreglo para un parque eólico. Los autores encontraron que los generadores posicionados de forma tal, que las estelas producidas incidentes sobre cualquiera de las puntas de los dispositivos corriente abajo, tienen un efecto positivo en la eficiencia general del parque. Esto se debe a una recuperación más rápida de la estela a causa de un mejor mezclado turbulento. Como resultado se produce una menor pérdida en la potencia generada ($\sim 10\%$) en el generador localizado corriente abajo. Por el contrario, cuando el chorro incide sobre el buje el segundo generador pierde alrededor de un ($\sim 30\%$) de potencia (Figura 1.6).

Estos resultados fueron complementados por los mismos autores por medio de una *simulación de grandes escalas* (LES por sus siglas en inglés). Esto después fue profundizado por Gadde et.al⁽¹⁷⁾ quien, por medio de este mismo tipo de simulación numérica, analizó la forma en la que el cambio en la altura del chorro (con respecto al buje) afecta la recuperación de la estela y la subsecuente producción de potencia (Figura 1.5 c)). Encontraron que la recuperación de la estela es más rápida cuando el chorro incide en la parte superior del generador, debido a la elevada turbulencia generada por el cortante positivo en dicha región. Por otra parte, cuando el chorro incide en la parte inferior, la recuperación de la estela es más lenta debido a que la turbulencia generada se aleja de la vecindad del generador bajo la acción del esfuerzo cortante negativo. Por lo tanto, desde este punto de vista, ambos trabajos concluyen que el punto óptimo de incidencia del viento es la parte superior del generador.

No obstante, trabajos como el de Gutierrez et.al¹⁸,¹⁹ Abkar et. al,¹⁸¹⁹ Gadde et.al,²⁰ Ahmed et. al,²¹ Zhang et. al,²² y He et.al,²³ se focalizan en el estudio estructural de un generador sujeto a estas condiciones. Las investigaciones se realizan por medio de simulaciones numéricas con diferentes códigos. En general, se encontró que los LLJ tienen efectos estructurales negativos en la estructura. Los efectos son mínimos cuando el chorro incide debajo del buje. En cambio los efectos son perjudiciales cuando el pico de velocidades coincide con la punta del buje. Esto se debe a que la interacción con el flujo se produce en una región donde ambos tipos de esfuerzos cortantes están presentes.

En todos los trabajos mencionados, el aerogenerador es conceptualizado conforme al “modelo de disco actuador” (ADM por sus siglas en Inglés) en la vertiente energética, o como un “modelo de línea actuadora” (ALM por sus siglas en Inglés) en la vertiente estructural. El primer tipo de estudio no se ocupa de resolver el flujo en la capa límite alrededor de la superficie de los álabes (i.e. se modela como un cilindro). Esto disminuye considerablemente el costo computacional del cálculo.¹⁸ En el segundo tipo de estudio, los álabes se dividen en

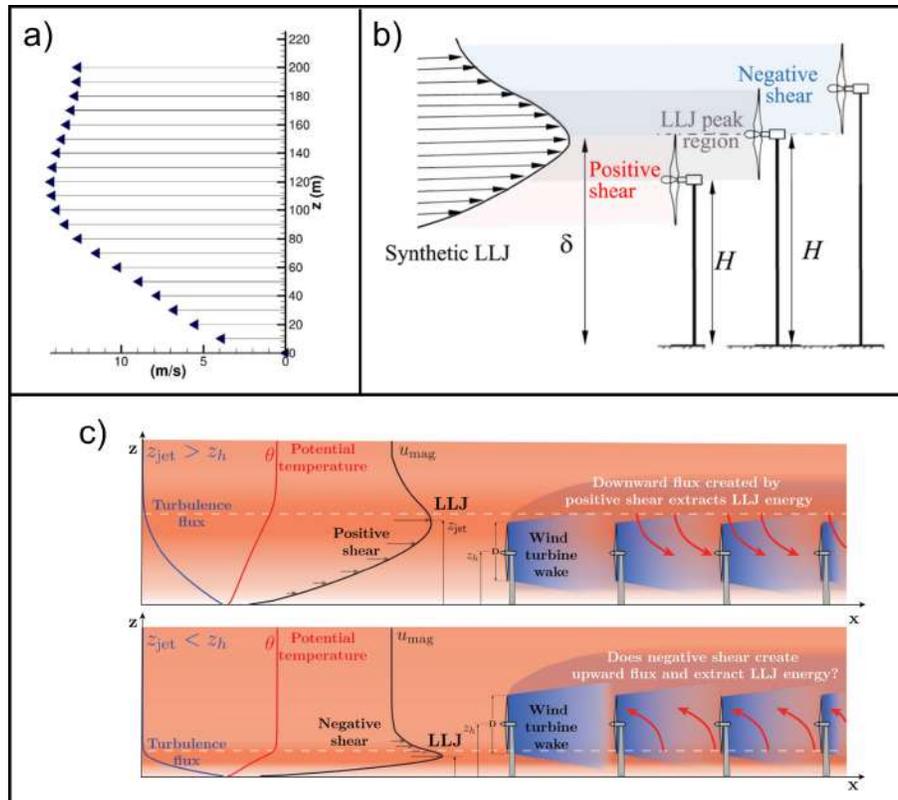


Figura 1.5: a) Perfil de velocidades de un LLJ (Imagen tomada de¹⁹). b) Posibles zonas de impacto en un generador eólico respecto al pico de velocidades en el estudio llevados a cabo por Doosttalab et. al¹⁴ (Imagen tomada del mismo artículo). c) Estudio llevado a cabo por Gadde et. al¹⁷ (Imagen tomada del mismo artículo).

un número N de elementos discretos, caracterizados por un perfil aerodinámico particular, sobre los que se calculan las fuerzas aerodinámicas. La fuerza total ejercida sobre el álabes se obtiene mediante la integración de las fuerzas en cada sección.²²

1.6. Objetivo del trabajo

Con base a los estudios experimentales y numéricos del impacto del chorro de baja altitud (LLJ) en el desempeño de aerogeneradores convencionales⁴ llevados a cabo por Doosttalab et.al¹⁴ y Gadde et.al,¹⁴ se tuvo como objetivo principal evaluar, mediante simulaciones numéricas, el desempeño de aerogeneradores cuyo álabes fue optimizado previamente para operar

⁴Enfocados para operar en una capa límite atmosférica

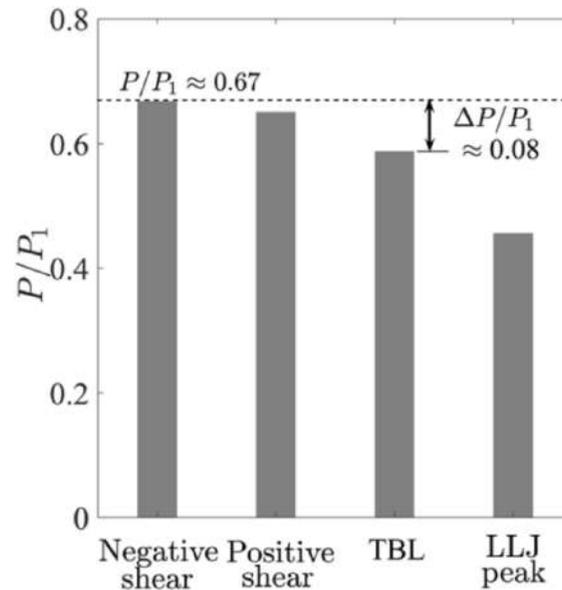


Figura 1.6: Resultados de la potencia relativa de un aerogenerador eólico colocado corriente abajo (imagen modificada a partir de artículo de Doosttalab et. al.¹⁴)

en un chorro de baja altitud. El método para llevar a cabo este estudio se hizo a través de un modelo numérico apropiado en el código *OpenFOAM*.

En la primera parte del estudio se consideró un solo dispositivo permitiendo una interacción fluido-estructura con la geometría ad-hoc⁵ y su repercusión en el desempeño del aerogenerador midiendo la evolución de su coeficiente de potencia (C_P). Además, fue medida la evolución en su velocidad angular así como las propiedades promedio de la estela producida por el dispositivo tales como su velocidad, presión y energía cinética. Después, en la segunda etapa se simuló dos aerogeneradores alineados consecutivamente para determinar el efecto de la estela generada por el dispositivo al frente en la eficiencia del segundo generador localizado corriente abajo. Se tomó como punto de partida la reducción del C_P en cada dispositivo para comparar los resultados del nuevo diseño con los de Doosttalab et.al.¹⁴

Debe recalarse que la geometría de los perfiles aerodinámicos en cada sección del álabe fue el resultado de la aplicación del algoritmo genético desarrollado por el Ing. Diego Núñez, realizado con base en la aplicación del *Método de Elementos de Hoja*⁶.

Se hace una mención rápida que este proyecto surgió en colaboración con la Dra. Catalina

⁵Es decir, sin utilizar los métodos ADM y ALM.

⁶En inglés se utiliza la abreviatura BEM que significa “Blade Element Method”

Stern Folgach y el Dr. Luciano Castillo con sus investigaciones del impacto de estos perfiles (LLJ) con las turbinas eólicas y su posible aplicación en México.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se revisarán en primer lugar los principios físicos que conducen a las ecuaciones fundamentales de la aerodinámica en un contexto general. Estas se simplifican¹ para el caso de interés considerando adicionalmente una interacción fluido-estructura con el aerogenerador como un cuerpo rígido². Por lo tanto, se retoman las ecuaciones que describen la dinámica de un cuerpo rígido que describen su movimiento con base a su velocidad angular³. Con esto en mente se pasa a describir el diseño de álabe adecuado utilizando las dos teorías anteriores. Después se recogen la formulación de Betz que describe un límite físico en la extracción de energía proveniente del viento a través del coeficiente de potencia (C_P). Una vez hecho esto se pasa a modelar la estela producida por la geometría, simplificada a un disco tal como se hace en el ADM, para describir con mayor detalle sus características en base a las ecuaciones de conservación simplificadas. Finalmente se recogen las parametrizaciones existentes para un LLJ para luego pasar a una nueva parametrización lograda en este trabajo que toma en cuenta el perfil específico con el que se optimizó el álabe del generador en el trabajo de D. Núñez.⁴⁰ Se muestran el diseño final del álabe logrado así como los parámetros del flujo y de diseño relevantes para la simulación al final de la sección.

¹Estas se justifican en el apéndice A.

²Esta hipótesis implica que no se tomarán en cuenta deformaciones de la geometría ni propiedades del material salvo la densidad del mismo.

³Se asumirá que el aerogenerador solo gira alrededor de su eje de simetría, no se toman en cuenta posibles desplazamientos que pueda experimentar la estructura.

2.1. Ecuaciones fundamentales de la aerodinámica+

En términos generales, el flujo de aire alrededor del dispositivo está gobernado por principios físicos fundamentales que se expresan a través de leyes de conservación. Dichas leyes pueden desarrollarse en forma integral⁴ o diferencial⁵.

Ambas formulaciones están relacionadas y pueden derivarse por medio del *Teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradsky*⁶. Es importante mencionar que las leyes se expresan en términos de cantidades extensivas como la masa, momento, o la energía. Sin embargo, es usual considerar las cantidades intensivas asociadas, tales como la densidad, la velocidad y la energía por unidad de masa. Esta vía es conveniente porque las cantidades no dependen del volumen (i.e el tamaño) del sistema.

Ley de conservación de masa: La masa en un sistema termodinámico cerrado se mantiene constante. La propiedad extensiva es la masa, (m), y su propiedad intensiva asociada es la densidad de masa, (ρ). Formalmente, la conservación de masa está dada por

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \iint_{\partial V(t)} \rho(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidades del fluido.

Ley de conservación de momento: Representa la aplicación de la *Segunda Ley de Newton* a un volumen de control que contiene partículas de fluido. En este caso la propiedad extensiva es el momento lineal \mathbf{p} y la propiedad intensiva es la velocidad \mathbf{u} . Explícitamente

⁴El método de volumen finito que se emplea en el modelo numérico se basa en la aplicación de esta formulación.

⁵Las propiedades de la estela producida por la interacción del fluido con el generador se describen en la formulación diferencial.

⁶Esto es posible siempre que el campo físico en cuestión sea continuamente diferenciable (es decir, los de clase C_V^1), con frontera suave y en un dominio compacto V . Esta restricción hace que sea más general la formulación integral, ya que únicamente requiere que los campos sean continuos y no necesariamente diferenciables.

se escribe como

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \oiint_{\partial V(t)} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u} dS = \oiint_{\partial V(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} dS + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{F}_B dV \quad (2.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{F}_B \quad (2.4)$$

donde p es la *presión termodinámica*, \mathbf{F}_B son las fuerzas de campo (por unidad de masa) que actúan sobre el fluido y $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}}$ es el *tensor de esfuerzos de Cauchy*. Para los fluidos newtonianos⁷ el tensor se desarrolla como

$$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} = -p \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_d + \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.5)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_d + 2\mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.6)$$

$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_d$ representa al tensor identidad y $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\tau}}$ al *tensor de esfuerzos cortantes*. Por su parte, μ es la viscosidad del fluido, y λ la “segunda viscosidad”, o segundo coeficiente de Lamé. Esta segunda viscosidad solo es relevante en el régimen compresible. Ambas están vinculadas por medio de la *Relación de Stokes*, dada por $\lambda = -\frac{2\mu}{3}$ ⁸

Es importante resaltar que la formulación original de esta ley es válida en *marcos de referencia inerciales*⁹. G. Coriolis introdujo una corrección para marcos de referencia no-inerciales, de forma que queden incluidos aquellos que presentan aceleraciones, o que rotan alrededor de un pivote.

En este trabajo se escribe la corrección de la velocidad únicamente para sistemas que rotan. Desde el punto de vista de este sistema de referencia, el generador se encuentra en una posición fija. Ello simplifica considerablemente las condiciones de frontera que se deben imponer al flujo sobre el generador. La corrección en cuestión está dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (2.7)$$

donde \mathbf{u}_R se refiere a la velocidad observada en el marco que rota, y \mathbf{u}_I es la velocidad observada desde el marco inercial (fijo) en el espacio. $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular con la que rota el marco no-inercial con respecto al marco inercial.

⁷Aquellos que se deforman de manera proporcional al esfuerzo aplicado. Es decir, la relación esfuerzo-deformación es lineal.

⁸Esta relación realmente solo es válida para gases monoatómicos; no obstante, se ha demostrado que para gases poliatómicos difiere muy poco de dicha relación.³¹

⁹Cabe recordar que un marco de referencia inercial está definido a partir de la Primera Ley de Newton, como aquel que se encuentra libre de interacciones externas. Por lo tanto, dichos marcos se trasladan con velocidad constante.

Por su parte, se puede mostrar que la corrección para la aceleración es

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_I - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} \quad (2.8)$$

La cual toma en cuenta la *aceleración centrípeta* ($-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$), la *aceleración de Coriolis* ($-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$) y la *aceleración angular, o de Euler*, ($-\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}$).

En ambas formulaciones, la corrección resultante de las ecuaciones (2.3) y (2.4) se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{u} dS &= \iint_{\partial V(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} dS + \\ &\iiint_{V(t)} \rho \mathbf{F}_B dV - \iiint_{V(t)} \rho (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) dV - \\ &\iiint_{V(t)} 2\rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) dV - \iiint_{V(t)} \rho (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}) dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} + \rho (\mathbf{F}_B - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}) \quad (2.10)$$

En el contexto de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se debe entender que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$, es decir que se trata de la velocidad observada en el sistema rotatorio. También es usual hacer $\mathbf{F}_B \mapsto \mathbf{F}_B - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}$ para el caso de sistemas no inerciales.

Ley de conservación del momento angular: Expresa que la rotación que sufre un cuerpo se debe a una torca externa neta aplicada sobre él. La propiedad extensiva es el momento angular (\mathbf{L}) y la intensiva es la velocidad angular orbital ($\boldsymbol{\Omega}_0$)¹⁰. Como la velocidad angular orbital está dada por $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{x} \times \mathbf{u}$, la ley adquiere la forma

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\partial (\mathbf{x} \times \mathbf{u})}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \boldsymbol{\Omega}_O dS &= \\ \iint_{\partial V(t)} (\mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}})) dS + \iiint_{V(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{F}_B) dV \end{aligned} \quad (2.11)$$

Es interesante notar que esta ley no tiene un análogo en la formulación diferencial, pues el resultado no es una ecuación independiente de la ecuación de conservación de momento

¹⁰No confundir con la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, que describe la rotación entre marcos de referencia. Por su parte $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{x} \times \mathbf{u}$ expresa al vector normal al plano de movimiento, definido como el plano $\mathbf{x} - \mathbf{p}$.

(2.4). Sin embargo, su desarrollo implica que el tensor de esfuerzos debe ser simétrico:³³

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}^T \quad (2.12)$$

Ley de conservación de energía total: Se trata de la primera ley de la termodinámica, que establece que la energía total se mantiene constante en un sistema aislado. Para un fluido newtoniano esta importante ley de conservación se escribe como

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\partial e_T}{\partial t} dV + \iint_{\partial V(t)} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) e_T dS = \\ \iint_{\partial V(t)} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{u}] dS + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u} dV \\ - \iint_{\partial V(t)} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}) dS + \iiint_{V(t)} Q_S dV \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial e_T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e_T = \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_S \quad (2.14)$$

En estas expresiones \mathbf{q} representa el flujo de calor que ingresa por las fronteras del volumen de control, y Q_S representa las fuentes de calor.

Es posible especificar la conservación de la energía mecánica total y de la energía térmica por separado. En términos de las energías cinética (k) e interna (e) se tiene que $e_T = k + e = \|\mathbf{u}\|^2/2 + e$, de modo que pueden ser descritas dos leyes de conservación para cada una de las formas de energía:

Ley de conservación de energía cinética: Se refiere únicamente a la contribución mecánica de la energía (2.13) (o (2.14)):

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k \right) = (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u} \quad (2.15)$$

En general, las fuerzas de campo pueden ser expresadas a través de un potencial $V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ que satisface³² (ver Apéndice A):

$$\mathbf{F}_B = \frac{d(\nabla_{\mathbf{u}} V)}{dt} - \nabla V \quad (2.16)$$

$$U := V - \nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \mathbf{u} \quad (2.17)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u} \quad (2.18)$$

Tabla 2.1: Potenciales

Fuerza de campo y potenciales			
Interacción	\mathbf{F}_B	V	U
Gravitatoria local	$-g\hat{\mathbf{z}}$	gz	$gz (U = V)$
No inerciales	$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$ $-\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}$ $-2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})$	$\frac{\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\ ^2}{2}$	$\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})$ $-\frac{\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\ ^2}{2}$

Conviene mencionar que la fuerza \mathbf{F}_B , donde es posible encontrar tal función que satisfaga (2.18), se le denomina *Fuerza conservadora*. Por otro lado, a la función U que aparece en (2.16) se le denomina *potencial efectivo, o generalizado*. Cuando V no depende de las velocidades se recupera la expresión más comúnmente reportada en la literatura.³⁰

Al sustituir esto en la ecuación de la energía cinética (2.15) se obtiene la **Ley de conservación de la energía mecánica (generalizada)**

$$\rho \left(\frac{\partial e_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e_m \right) = (\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{u} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.19)$$

Aquí $e_m := k + V - \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} V = k + U$.

Las fuerzas de campo que provienen de las interacciones fundamentales son de carácter conservador y pueden ser descritas por su respectivo potencial V que no depende explícitamente del tiempo.

En este trabajo, las fuerzas de campo relevantes son la gravitatoria y las fuerzas no-inerciales, cuyos potenciales están dados en la Tabla 2.1. La construcción del potencial para las fuerzas no-inerciales se puede consultar en el Apéndice A.

Ley de conservación de energía interna: Se refiere a la contribución térmica de la energía. Formalmente, la expresión apropiada es

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e \right) = \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_S \quad (2.20)$$

En particular, para fluidos newtonianos tenemos que

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e \right) = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_s + \Phi \quad (2.21)$$

donde Φ es la *función de disipación viscosa* dada por

$$\Phi = \mu \left(\|\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\|^2 \right) - \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad (2.22)$$

Ecuación de evolución para la entropía: Es la expresión formal de la segunda ley de la termodinámica, que postula la existencia de la propiedad de estado entropía (S). Esta importante propiedad permite caracterizar a los procesos irreversibles mediante la desigualdad de Clausius, $dS \geq 0$. Aunque la entropía es una propiedad extensiva del sistema termodinámico, regularmente se considera la entropía por unidad de masa, s , en el análisis hidrodinámico. La ecuación correspondiente se escribe de la siguiente manera

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) = \frac{1}{T} \left(\overset{\leftrightarrow}{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_s + p(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \quad (2.23)$$

Nuevamente, para fluidos newtonianos esto se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \left(Q_s + \Phi - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \right) \quad (2.24)$$

Una implicación fundamental de esta ley es que el término de la derecha en las ecuaciones (2.23) y (2.24) es no negativo.

Análisis: En total se debe resolver un sistema de 5 ecuaciones con 8 variables desconocidas, dos de las cuales son vectoriales. Las propiedades en cuestión son la densidad ρ , la velocidad \mathbf{u} , la presión p , las viscosidades λ, μ , la energía interna e , el flujo de calor \mathbf{q} y las fuentes de calor internas Q_s .

La presión, la energía interna y la temperatura están vinculadas a través de^{31,39}

$$p := \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.25)$$

$$T := \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad (2.26)$$

Las ecuaciones de estado térmica $\rho = \rho(p, T)$ y calórica $e = e(p, T)$ también juegan un papel crucial en el desarrollo teórico. Para las condiciones contempladas en este trabajo es

seguro asumir que el aire se comporta como un gas ideal. Por lo tanto se puede escribir³¹

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \quad (2.27)$$

$$e = c_V T \quad (2.28)$$

en la que R_g es la constante del gas en cuestión. $c_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho$ es el calor específico del gas a volumen (o densidad) constante. En general es común considerar R_g y c_V como constantes debido a que se requieren cambios muy grandes en la presión y/o temperatura para producir variaciones significativas. En particular, $R_g = c_p - c_v$, con $c_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p$ el calor específico a presión constante.

Las viscosidades por su parte también son funciones de la presión y la temperatura $\mu = \mu(p, T)$ y $\lambda = \lambda(p, T)$. De forma empírica se ha demostrado que las variaciones de μ y λ son muy pequeñas en los intervalos de temperaturas y presiones contemplados en el caso que ocupado en esta tesis. Como parte de las consideraciones de modelado se desprecian las fuentes de calor internas Q_s . Esto reduce el número de variables a 5: p , \mathbf{u} y T .

Finalmente, se considera la **ecuación de la vorticidad para flujos incompresibles** que tendrá una relevancia especial en la discusión de los resultados. La vorticidad es un campo que describe la circulación en cada punto del fluido

$$\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.29)$$

Al tomar el rotacional de la ecuación (2.4) en el caso incompresible se obtiene la ecuación de transporte correspondiente

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{F}_B \quad (2.30)$$

Esta expresión muestra que una banda de vorticidad (con polaridad definida) transportada por el fluido tiene la capacidad de estirarse (contraerse) y difundirse por el fluido. De acuerdo con algunos autores^{30,34-37} esta ecuación es de gran utilidad en la descripción de la turbulencia¹¹.

Una cantidad asociada que es importante para la descripción de la estela, pues da una posibilidad de cuantificar la vorticidad total dentro de la estela, es la *enstrofía*

$$\xi := \iiint_V \frac{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}{2} dV \quad (2.31)$$

¹¹Es importante señalar que la vorticidad no implica la existencia de la turbulencia.

De acuerdo con algunos autores^{30,34,38} la enstrofia puede interpretarse como una medida de la disipación de la energía debido a los vórtices que se producen en el flujo; por consiguiente, suele ser un parámetro utilizado para medir la turbulencia del flujo.

2.2. Simplificaciones hechas al modelo teórico

2.2.1. Ecuación de Bernoulli

Considere que se satisfacen las siguientes condiciones:

- La presión y el potencial V no dependen explícitamente del tiempo.
- El fluido es ideal¹²

Entonces el flujo satisface la ecuación de Bernoulli (la cual se demuestra en el apéndice A)

$$e_m + \int_{p_0}^p \frac{d\hat{p}}{\rho(\hat{p})} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} + U + \int_{p_0}^p \frac{d\hat{p}}{\rho(\hat{p})} = E \quad (2.32)$$

(con E una constante en el tiempo), la cual establece que en un fluido sin viscosidad, cuya energía potencial¹³ no depende explícitamente del tiempo, se conserva la energía mecánica del fluido en todo instante. Para expresarla en su forma diferencial se utilizan los potenciales U de la Tabla 2.1, de modo que

$$dp = -\rho d \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} + U \right) = -\rho d \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + gz \right) \quad (2.33)$$

2.2.2. Flujo incompresible

En este trabajo se considera al flujo como incompresible. Para validar este supuesto se desarrolla la derivada total de la ecuación de estado $\rho = \rho(p, T)$ como sigue

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT \quad (2.34)$$

¹²Un fluido se dice que es ideal cuando no tiene viscosidad

¹³Se asume que la presión es una especie de energía potencial que proviene de la energía interna.

Mediante las relaciones de Maxwell³⁹ esto puede escribirse como

$$d\rho = \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \frac{\gamma c_v}{T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p dT \quad (2.35)$$

en la que $\gamma = c_p/c_v$ es el coeficiente de Laplace.

Empíricamente se ha demostrado que el sonido es una onda que, a primer orden, se propaga de manera isentrópica. Por lo tanto, la derivada que acompaña a la diferencial de presión es el recíproco cuadrático de la celeridad del sonido c . Por otro lado, un desarrollo algebraico que permite reescribir esta expresión (apéndice A) en favor de la diferencial de entropía, y considerando que el gas es ideal, se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{\rho} - \frac{ds}{\gamma c_v} \quad (2.36)$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli (2.33) se puede eliminar la presión en favor de la energía mecánica; de igual forma, utilizando la ecuación de entropía (2.24) (donde se desprecian términos) y la Ley de Fourier para \mathbf{q} , da como resultado¹⁴

$$\frac{d\rho}{\rho} = -d \left(\frac{M^2(1 + Str^2)}{2} + \frac{M^2}{Fr^2} \right) - \frac{\alpha_d(\nabla^2 T)dt}{\gamma T} + \frac{Q_S + \Phi}{\rho \gamma c_v T} \quad (2.37)$$

donde $M := \|\mathbf{u}\|/c$ es el número de Mach, $Str := \|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|/\|\mathbf{u}\|$ es el número de Strouhal, $Fr = gz/\|\mathbf{u}\|$ es el número de Froude y $\alpha_d = \rho\kappa/c_v$ es la difusividad del gas.

En conclusión, las variaciones de densidad son despreciables si los números de Mach son pequeños y no hay cambios bruscos de la temperatura en todo el dominio¹⁵. Se considera que este es el caso del aerogenerador, puesto que opera en condiciones atmosféricas estándar.

¹⁴Siempre que la rapidez del sonido sea constante (en condiciones atmosféricas estándar es un supuesto válido).

¹⁵Se consideran despreciables los términos de disipación viscosa Φ y las fuentes de calor internas Q_S

2.2.3. Generador como cuerpo rígido

Evolución de la velocidad angular

La última simplificación relevante de modelado estriba en considerar que el aerogenerador se comporta como un cuerpo rígido. Por lo tanto, se toma en cuenta el tensor de inercia

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} := \iiint_V [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}_d - \mathbf{x}\mathbf{x}] dV \quad (2.38)$$

en el que $\mathbf{x}\mathbf{x}$ es el diádico formado por los vectores posición. A su vez, el momento angular del cuerpo rígido está dado por

$$\mathbf{L} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.39)$$

lo cual expresa que la relación entre el momento angular y la velocidad angular es lineal, siendo su factor de proporción el tensor de inercia. En general, estos vectores no son paralelos, pues dicha condición solo se cumple cuando el plano de simetría del cuerpo coincide con su plano de giro.

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo se obtiene la torca que actúa sobre el generador. Ésta está descrita por las *ecuaciones de Euler del cuerpo rígido*:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \sum_i \mathbf{N}_i \quad (2.40)$$

En esta expresión \mathbf{N}_i representa a las torcas externas que modifican el momento angular de la máquina.

Un generador eólico se diseña de manera que los ejes de simetría y de rotación coincidan. Esto quiere decir que el eje del buje es el centro de rotación y coincide con su plano de simetría, por lo que de manera ideal el segundo término se cancela. Además, se puede asumir que el eje de rotación se mantiene fijo. Denotando al eje por el vector unitario $\hat{\mathbf{y}}$ se obtiene

$$I_{22} \frac{d\Omega}{dt} = N_2(\Omega, t) \quad (2.41)$$

donde la torca neta $N_2 = (\mathbf{x} \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{y}}$ es la responsable de causar la rotación del dispositivo. Entre las torcas externas involucradas en N_2 se encuentran las que generan el gradiente de presiones del fluido y sus viscosidades.

En general, es muy complicado resolver la ecuación 2.41, ya que la torca experimentada depende la velocidad angular y del tiempo. A pesar de ello se ha mostrado, de manera

experimental, que estos dispositivos alcanzan una velocidad angular nominal de operación, de modo que se debe cumplir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = \Omega_{\infty} \quad (2.42)$$

donde Ω_{∞} es la velocidad angular de diseño del generador.

En términos generales esta velocidad angular no debe ser excesivamente pequeña o grande, ya que no se desea que la potencia entregada sea muy baja, o que se produzcan daños estructurales en la máquina.¹⁹⁻²¹

Ángulo de paso

Los generadores eólicos de eje horizontal son máquinas de sustentación. Esto significa que la fuerza de sustentación es la que genera el par necesario para mover a la turbina. A consecuencia de ello, el diseño de los perfiles aerodinámicos es crítico, porque la distribución de presiones debe ser tal que la sustentación producida sea mucho mayor que el arrastre.¹

Los perfiles aerodinámicos deben ser orientados de manera adecuada a lo largo de toda el aspa, ya que el generador se encuentra rotando continuamente. Esto implica que (en el marco de referencia no-inercial) sea indispensable conocer la velocidad del viento y la velocidad angular de diseño, con el objeto de que cada perfil maximice la sustentación producida.

La naturaleza del problema hace conveniente la utilización del sistema coordenadas cilíndricas, que debe ser orientado apropiadamente con respecto al eje de la máquina $\hat{\mathbf{y}}$ (Ver Figura 2.1). El sistema cilíndrico se relaciona con el sistema cartesiano (inercial) a través de las relaciones

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.43)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin(\theta)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = -\hat{\mathbf{y}} \quad (2.45)$$

Considerando que el generador rota con velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{y}} = -\Omega\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ y que la velocidad del viento es $\mathbf{u} = U\hat{\boldsymbol{\zeta}}$, un perfil aerodinámico localizado a una distancia r del eje experimenta una velocidad (de carácter no-inercial) descrita por la ecuación (2.7), que en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathbf{u} = \Omega r \hat{\boldsymbol{\theta}} + U \hat{\boldsymbol{\zeta}} \quad (2.46)$$

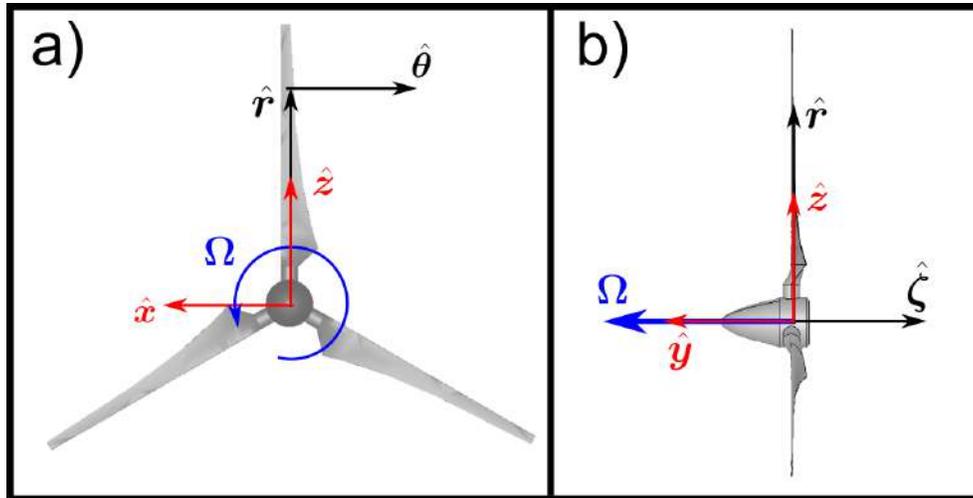


Figura 2.1: Marco de referencia cilíndrico (no inercial) utilizado para describir el movimiento generador y un sistema de referencia cartesiano de referencia (inercial). Se muestra en dos perspectivas este sistema.

Esto supone la existencia de un “ángulo de diseño” entre perfiles, dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Omega r}{U}\right) = \arctan(\text{Str } r^*) \quad (2.47)$$

donde se ha empleado el número de Strouhal $\text{Str} := \Omega R/U$, y la variable adimensional $r^* = r/R$, con R el radio de la turbina.

De esta manera, el perfil aerodinámico (localizado a una distancia r del eje) debe ser diseñado con un ángulo de ataque adicional, α , con respecto al ángulo de orientación θ para inducir un gradiente de presiones favorable a fin producir una sustentación adecuada con el menor arrastre posible. El ángulo efectivo se denota como $\theta_{\text{eff}} = \theta - \alpha$ ¹⁶. La Figura 2.2 ilustra el diseño final del álabe basado en el ángulo de paso θ .

2.3. Potencia entregada por un generador ideal: Límite de Betz

Un parámetro muy importante para caracterizar al generador eólico es la potencia que éste puede entregar en función de la tasa de conversión de energía cinética del viento en

¹⁶El signo menos en α se debe a que es deseable que el viento incida sobre la parte inferior de perfil para maximizar la sustentación.

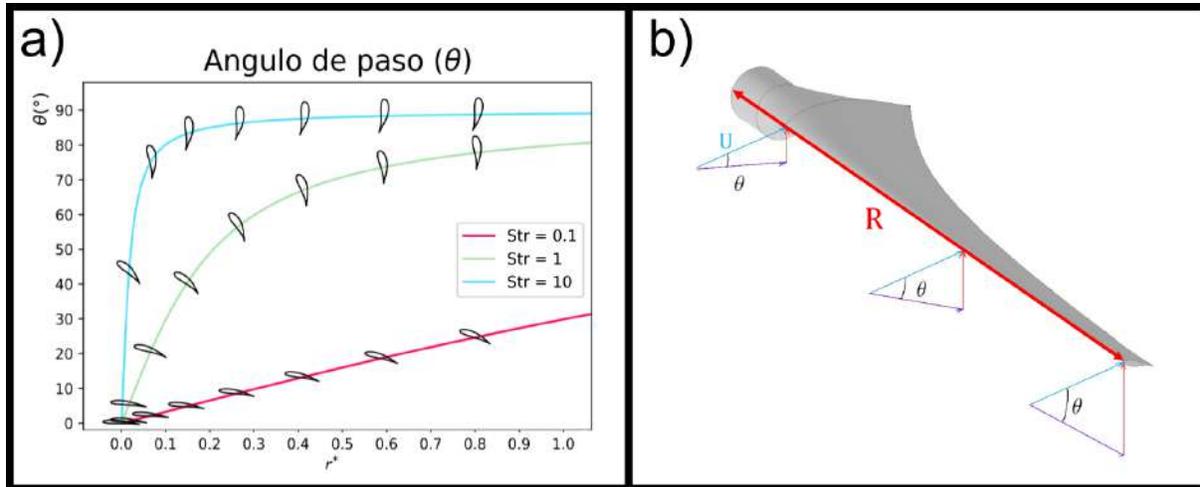


Figura 2.2: a) Variación en la orientación de los perfiles aerodinámicos con la distancia r^* . b) Diferencias de diseño óptimo ante diferentes números Str.

energía mecánica en el rotor. Una forma conveniente de expresar esta relación es mediante el *coeficiente de potencia*

$$C_P := \frac{P_{\text{gen}}}{P_{\text{flujio}}} = \frac{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\frac{\rho \|\mathbf{u}\|^3}{2}} \quad (2.48)$$

que mide la razón entre la potencia del generador con respecto a la potencia del flujo.

En 1919 el físico alemán A. Betz publicó el principio que establece el límite teórico para la potencia máxima que pueden entregar estos dispositivos.¹⁻³ Dicho límite existe de manera física, porque un generador no puede extraer toda la energía cinética proveniente del viento (si fuese posible, la velocidad del viento justo detrás del dispositivo sería nula y no se produciría una estela).

El límite de Betz se puede derivar fácilmente si se concibe al generador como un *disco actuador* que extrae energía de un fluido perfecto e incompresible, con un campo de velocidades promedio bien definido en las fronteras del volumen de control, en el régimen estacionario. En estas condiciones se puede aplicar la formulación integral de las leyes de conservación de masa y de momento, para el volumen de control que se muestra en la Figura 2.3.

De la ecuación ley de conservación de masa (2.1) se obtiene

$$\iint_{\partial V_C} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho u_1 A_{V_C} + (\rho u_2 A_2 + \rho u_1 (A_{V_C} - A_2)) + \rho u_r A_r = 0 \quad (2.49)$$

Claramente, u_1 es la celeridad de entrada del flujo, u_2 la celeridad de salida, u_r la componente

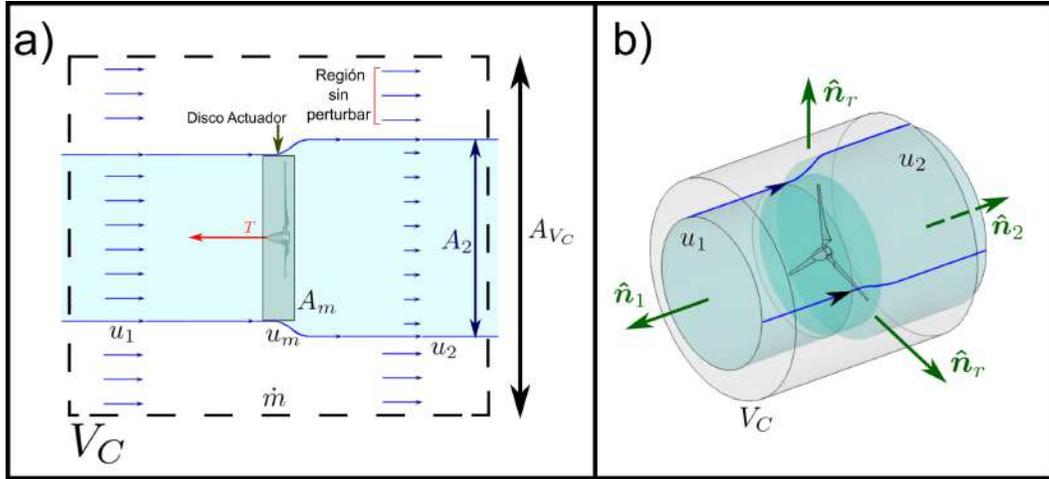


Figura 2.3: Volumen de control cilíndrico alrededor de una turbina eólica como un disco actuador. a) Vista lateral, b) Vista isométrica.

radial del flujo que sale por las paredes laterales y A_2 , A_{V_C} son las áreas que abarcan el flujo de salida y la pared lateral trasera del volumen de control, respectivamente. Identificando al flujo de masa como $\dot{m} = \rho u_r A_r$, se llega a

$$\dot{m} = \rho A_2 (u_1 - u_2) \quad (2.50)$$

Aplicando esta misma ecuación a un volumen de control que solo contenga al disco actuador, así como al flujo corriente abajo, se obtiene

$$\dot{m} = \rho u_m A_m = \rho u_2 A_2 \quad (2.51)$$

en la que u_m es la velocidad del flujo en el disco y A_m su área.

A través de una aplicación similar de la ley de conservación del momento (2.3) se puede demostrar que la única componente relevante es la componente axial. Esto da como resultado

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_C} \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) u_{Ax} = - \oint_{\partial V_C} p \hat{\mathbf{n}} dS + \iiint_{V_C} \mathbf{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \\ -(\rho u_1 A_{V_C}) u_1 + ((\rho u_2 A_2) u_2 + \rho u_1 (A_{V_C} - A_2) u_1) + \dot{m} u_1 = (p_1 - p_2) A_{V_C} - T \end{aligned} \quad (2.52)$$

con T representando a la fuerza de empuje que ejerce el generador sobre el fluido. El volumen de control es suficientemente extenso para que las presiones en la entrada y en la salida sean iguales (en promedio) a la presión atmosférica ($p_1 = p_2 = p_0$). Tras reducir términos y usar la ecuación (2.50) queda

$$T = \dot{m} (u_2 - u_1) \quad (2.53)$$

Por otro lado se aplica la ecuación de Bernoulli al volumen de control corriente arriba del generador y en otro localizado corriente abajo. El flujo experimenta una caída de presión Δp tras su paso por el generador. Respectivamente, esto conduce a

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p + \frac{\rho u_m^2}{2} \quad (2.54)$$

$$p - \Delta p + \frac{\rho u_m^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} \quad (2.55)$$

$$(2.56)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \quad (2.57)$$

Asimismo, el empuje T también es función de la caída de presión, de modo que

$$T = \Delta p A_m \quad (2.58)$$

Combinando las ecuaciones (2.51), (2.57) y (2.58), se encuentra la relación entre rapidezces

$$u_m = \frac{u_1 + u_2}{2} = (1 - a)u_1 \quad (2.59)$$

donde a es el denominado *factor de inducción axial* que mide la razón en la diferencia de celeridades el flujo medio antes de la turbina y el que se tiene en el plano de entrada de la turbina

$$a := \frac{u_1 - u_m}{u_1} \quad (2.60)$$

Sustituyendo en (2.59) se encuentra de igual manera que

$$u_2 = (1 - 2a)u_1 \quad (2.61)$$

Lo anterior impone una restricción física al valor de $a \in [0, \frac{1}{2})$ ya que, si $a = 1/2$, la celeridad del viento corriente abajo sería nula. Finalmente, de la ecuación para la energía (2.13) se deduce la potencia del flujo

$$P = \frac{\rho u_m A_m}{2} (u_1^2 - u_2^2) = 2\rho u_1^3 A_m a(1 - a)^2 \quad (2.62)$$

De acuerdo con la ecuación (2.48), el coeficiente de potencia C_P es igual a

$$C_P = 4a(1 - a)^2 \quad (2.63)$$

lo cual resalta el hecho de que C_P (bajo estas simplificaciones) es únicamente función de a , y que su valor máximo es $a = \frac{1}{3}$. Sigue que el coeficiente de potencia máximo es

$$(C_P)_{\max} = \frac{16}{27} \quad (2.64)$$

Al incluir los efectos de rotación se debe hacer un desarrollo adicional que tome en cuenta el potencial no-inercial de la tabla 2.1 en la ecuación de Bernoulli. En este caso se puede demostrar que el límite teórico para C_P es el mismo que sin rotación.¹⁻³ No obstante, dicho análisis muestra que este límite se acerca a la potencia a la ideal a medida que la velocidad angular crece.

2.4. Análisis teórico del flujo

2.4.1. Modelado de la estela

Este modelo buscó mejorar los modelos que se discuten en la literatura para explicar la formación de la estela viento abajo del generador. Se parte de las ecuaciones (2.10) en el caso

incompresible que en coordenadas cilíndricas se expresa de la siguiente manera

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right] + u_\zeta \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} = \\ & -\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \zeta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \Omega^2 r - 2\Omega u_\theta - g \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right] + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} = \\ & -\frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \zeta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ & + \alpha r + 2\Omega u_r - g \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\zeta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = \\ & -\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \zeta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Donde ϱ y ν son las denominadas presión cinemática, definidas como $\varrho = p/\rho$ y viscosidad cinemática ($\nu = \mu/\rho$) respectivamente.

Se dividió el problema en 5 regiones, estas para explicar lo que sucede antes y después de que el flujo incida en el generador, y una región externa como se muestra en la Figura 2.4.

En Ω_1 el flujo viene con la velocidad de entrada del viento, el cual se asume uniforme por simplicidad¹⁷.

Por lo que las componentes de velocidad expresadas desde el marco de referencia no inercial

¹⁷Esto facilita la posibilidad de integrar las ecuaciones.

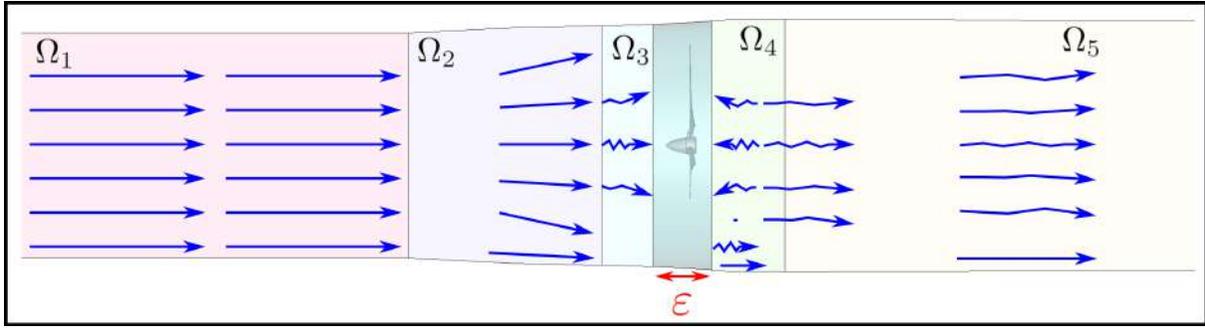


Figura 2.4: División del dominio completo en 5 regiones Ω_k ($k = 1, \dots, 5$) para modelar la estela con una discontinuidad de espesor ε

son¹⁸

$$u_r = 0 \quad (2.69)$$

$$u_\theta = \Omega r \quad (2.70)$$

$$u_\zeta = U \quad (2.71)$$

Y la presión por

$$p = \rho \varrho = p_0 \quad (2.72)$$

Con U la velocidad del viento, y p_0 la presión atmosférica estándar.

En Ω_2 el fluido se acerca al generador y reduce su rapidez a causa de los efectos viscosos, por conservación de masa aparece una componente radial en la velocidad en concordancia con la expansión del flujo. Por ello, se observa que está confinada en un cilindro con un radio bien especificado R . De manera que en esta región la solución se encuentra por

$$u_r = \frac{U(1 - \lambda_1)r}{2L_1} \quad (2.73)$$

$$u_\theta = \Omega r \quad (2.74)$$

$$u_\zeta = U \left[1 - (1 - \lambda_1) \frac{(\zeta + L_1 + \delta)}{L_1} \right] \quad (2.75)$$

$$p = p_0 - \frac{\rho U^2}{2} \left[\left(\frac{(1 - \lambda_1)r}{2L_1} \right)^2 + \left(1 - (1 - \lambda_1) \frac{(\zeta + L_1 + \delta)}{L_1} \right)^2 \right] \quad (2.76)$$

$$0 < r < R \quad - (L_1 + \delta) < \zeta < -\delta$$

¹⁸Observe que la velocidad tangencial desde el marco de referencia inercial está dada por $u_\theta = 0$ como se puede mostrar de la ecuación (2.7)

Poco antes de llegar al obstáculo cilíndrico, en Ω_3 , el flujo comienza a sentir los efectos de rotación a partir de una distancia δ del cilindro. Por lo tanto, muy cerca del generador la componente angular desde el sistema inercial es $u_\theta = \Omega r$, de manera que desde el no inercial $u_\theta = 0$ y la debido a que el flujo reduce su velocidad a un valor muy próximo a $\mathbf{0}$. Por ello, la solución tiene el siguiente aspecto

$$u_r = \left[\Omega + \frac{\lambda_1 U}{2\delta} \right] r \quad (2.77)$$

$$u_\theta = 0 \quad (2.78)$$

$$u_\zeta = -2 \left[\Omega + \frac{\lambda_1 U}{2\delta} \right] \zeta \quad (2.79)$$

$$p = p_0 - \frac{\rho r^2}{2} \left(\alpha + \frac{\lambda_1 \Omega U}{\delta} + \frac{\lambda_1 U^2}{4\delta^2} \right) + \rho \zeta^2 \left[2\alpha - \left(\Omega + \frac{\lambda_1 U}{2\delta} \right)^2 \right] \quad (2.80)$$

$$0 < r < R \quad -\delta < \zeta < 0$$

Observe que en general, la solución ya es transitoria en Ω_3 , esto debido a que la rotación puede no ser constante. Se observa que siempre que Ω aumente la componente radial de la velocidad también lo hace mientras que la axial disminuye. La presión por su parte presenta un incremento en ζ y una reducción en r , lo cual es consistente con la ecuación de Bernoulli. El punto de máxima presión corresponde al punto $(r, \zeta) = (0, 0)$ que corresponde a la presión de estancamiento $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Entre Ω_3 y Ω_4 se encuentra una región de espesor ε donde el flujo presenta una naturaleza no lineal debido a la presencia de la geometría. Esta región no fue resuelta para esta tesis y se deja como trabajo futuro.

Una vez que el flujo abandona esta región y comienzan a manifestarse las características de la estela producida por la geometría. Esta se describe en la solución para Ω_4 en la región cercana de desprendimiento.

$$u_r = \Omega r \quad (2.81)$$

$$u_\theta = 0 \quad (2.82)$$

$$u_\zeta = -2\Omega(\zeta - \varepsilon) \quad (2.83)$$

$$p = p_0 - \alpha r + 2(\zeta - \varepsilon) [\alpha - \Omega^2] \quad (2.84)$$

$$0 < r < R \quad \varepsilon < \zeta < L_2 + \varepsilon$$

Observe que la solución arroja una velocidad axial negativa, es decir que habrá flujo que se quedé atrapado en la capa límite del generador, recirculando constantemente en dicha región.

Por último en una región Ω_5 , la estela solo puede rotar en la región confinada del cilindro, esta ya no puede expandirse. Al contrario, dado que el flujo tiende a recuperar las condiciones de entrada se debe reducir gradualmente el radio de la estela. Por lo tanto:

$$u_r = -\frac{U(1-\lambda_2)r}{2L_3} \quad (2.85)$$

$$u_\theta = 0 \quad (2.86)$$

$$u_\zeta = U \left(1 + \frac{(1-\lambda_2)(\zeta - (L_2 + L_3 + \varepsilon))}{L_3} \right) \quad (2.87)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho r^2}{2} \left(\frac{\Omega^2}{2} + \left(\frac{U(1-\lambda_2)}{2L_3} \right)^2 \right) \left(1 - (1-\lambda_2) \frac{(\zeta - (L_2 + L_3 + \varepsilon))}{L_3} \right)^2 \quad (2.88)$$

$$0 < r < R \quad L_2 + \varepsilon < \zeta < L_2 + L_3 + \varepsilon$$

2.5. Parametrización del chorro de baja altitud

El chorro fue parametrizado tomando como referencia el perfil de velocidades de la capa límite atmosférica (ABL por sus siglas en Inglés)¹

$$U(z) = A_0 \ln(1 + B_0(z - C_0)) \quad (2.89)$$

Donde A_0 describe su intensidad, B_0 su esfuerzo cortante $z = C_0$, y C_0 representa el punto sobre la superficie que en este caso se tomo como $C_0 = 0$. Se resalta que la forma (2.89) satisface la condición de no deslizamiento en $z = C_0$.

Como fue mencionado en la Sección 1.4 el chorro de baja altitud difiere del perfil ABL en que se presenta un crecimiento notorio en la velocidad horizontal media y que se forma un pico de velocidad a altitudes suficientemente bajas.

Autores como Zhang et.al,²² He et.al²³ y Ahmed et. al²¹ modelan este perfil por medio de la ecuación

$$U = \left\{ v_{\text{ref}} + v_m \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{C_s(H - H_s)}{H_s} \right) \right] \right\} \left(\frac{H}{H_s} \right)^\alpha \quad (2.90)$$

Ahmed et.al²¹ utiliza dicha ecuación solo para altitudes mayores a $z > 150$ m. En el caso $z < 150$ m utiliza una ley de potencia $(H/H_s)^\alpha$. Otros autores como Doossttalab et.al¹⁴ tomaron una base de datos conocida en lugar de un LLJ sintético.

Sin embargo en este trabajo se tomó como base los datos utilizados en la tesis de D. Núñez⁴⁰ del LLJ. Primero se tomó el perfil ABL como base y se le añadió un número N de secantes hipérbolicas (para este trabajo fue suficiente con $N = 3$) para hacer el ajuste final. La expresión para el perfil objetivo es

$$U(z) = A_0 \ln(1 + B_0(z - C_0)) + \sum_{j=1}^N A_j \operatorname{sech}(B_j(z - C_j)) \quad (2.91)$$

Donde A_j, B_j, C_j reproducen la intensidad, pendiente y el punto de desfase de cada secante hipérbolica para representar el chorro. La gráfica comparativa entre el perfil y los datos se muestra en la Figura 2.5.

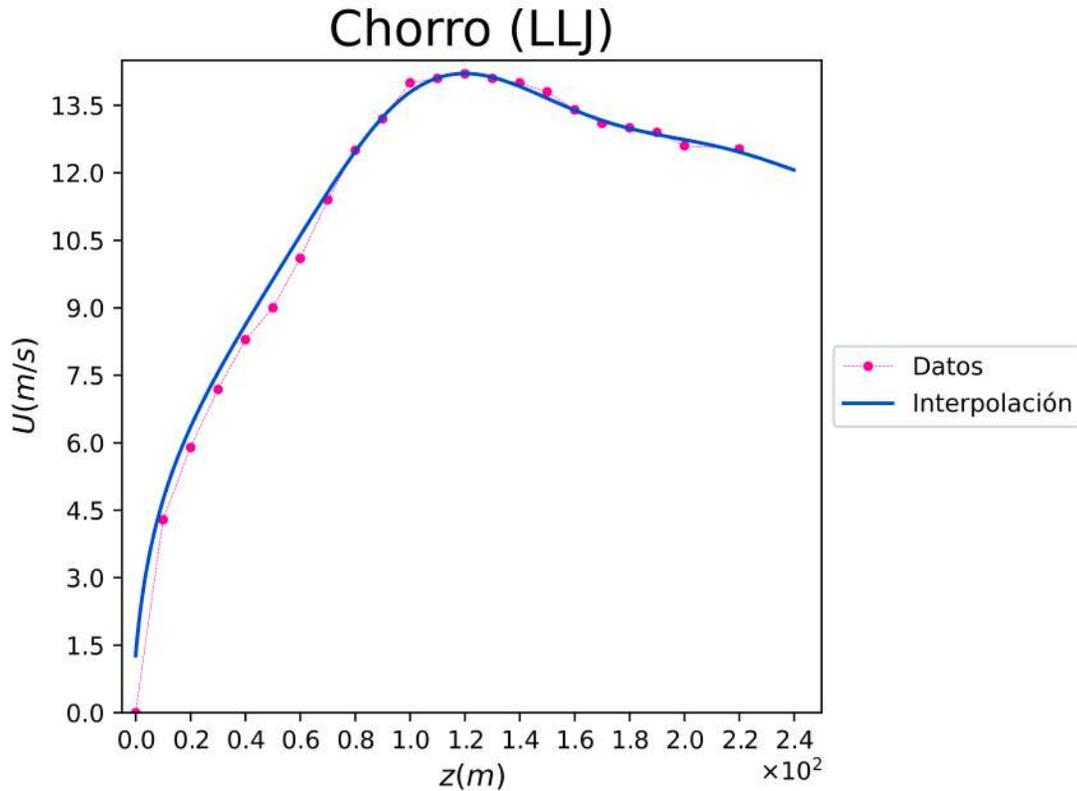


Figura 2.5: Datos utilizados en la tesis de D. Núñez⁴⁰ y su curva de ajuste.

En las Figuras 2.6 a) y 2.6 b) se representa el perfil LLJ cuyo pico impacta en un generador eólico sobre su buje, ubicado a una altura H (curva azul), sobre su punta inferior (curva

verde), un perfil de velocidades promedio (tomando el promedio de la curva en la región que abarca el generador $[H - R, H + R]$) y un perfil ABL en donde se tomó la ecuación (2.5) con las secantes hiperbólicas nulas. En la Figura 2.6 a) se ha incluido la torre del generador, sin embargo en este trabajo esta no se utilizó con el fin de simplificar el mallado. En la Figura 2.6 c) y d) se muestra que el ángulo del perfil de velocidades del flujo promedio se encuentra en el punto medio entre los de incidencia del perfil LLJ con su pico localizado en los puntos mencionados.

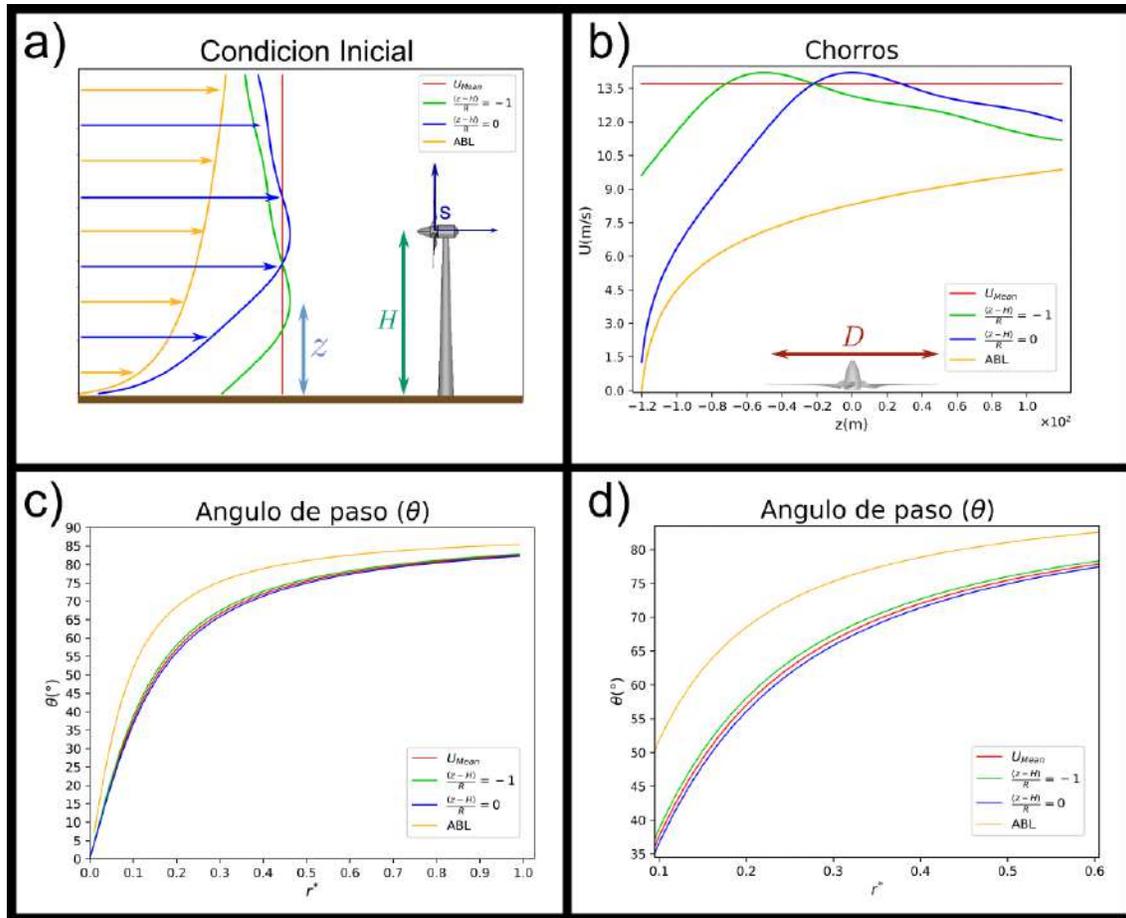


Figura 2.6: a) Diferentes perfiles de velocidad que incidiendo en el generador y el sistema S que se describió con anterioridad. b) Perfiles de velocidad utilizados como función de la posición z . c) Ángulo de paso que experimentará cada perfil con los diferentes chorros. d) Ángulo de paso en una región de espacio reducida.

Por otro lado, se observa que el ángulo de paso de un perfil ABL difiere del de las condiciones del problema. Como fue explicado en la Sección 2.2.3 esto repercute en la eficiencia del generador eólico. Por ello el diseño del álabes fue rediseñado por D. Núñez en su tesis de licenciatura⁴⁰ para que el generador considerado opere de manera eficiente con este perfil de

velocidades (Figura 2.7).

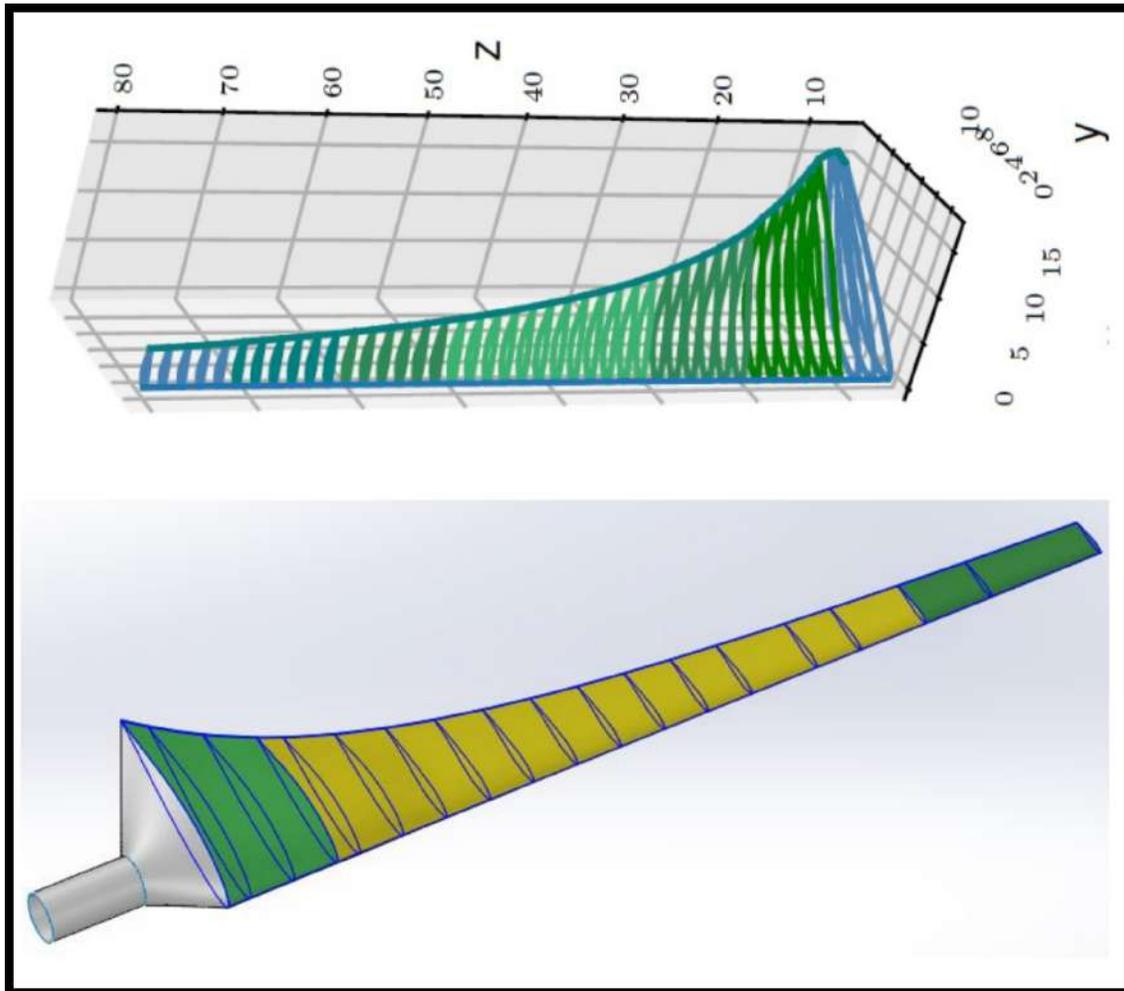


Figura 2.7: Diseño de álabes óptimo para operar en un LLJ en dos vistas. Imagen editada a partir de⁴⁰

Este diseño tomó en cuenta las condiciones de entorno reportados en la Tabla 2.2. En la misma también se reportan parámetros geométricos relevantes del generador eólico.

Tabla 2.2: Parámetros de escala del caso particular

Parámetros de Escala		
Generador		
Radio del álabe	R	50 m
Espesor medio de perfil	t_a	0.7 m
Cuerda media de perfil	c	3.4 m
Velocidad angular inicial	Ω_0	2.11 rad/s
Área de superficie del generador	A	1546.342 m ²
Volumen del generador	V	1180.928 m ³
Tensor (Momento) de Inercia	I	1.24473124×10^9 Kg m ²
Densidad del generador (Resina epoxi)	ρ_{gen}	1140Kg/m ³
Condiciones del entorno		
Rapidez media flujo	U_{Mean}	13.7 m/s
Presión atmosférica a 395.15K	p_0	1.01325×10^5 Pa
Viscosidad cinemática del aire a 395.15K	ν_{aire}	1.5×10^{-5} m ² /s
Densidad del aire a 395.15K	ρ_{aire}	1.3 Kg/m ³
Aceleración gravitatoria	g	9.81 m/s ²
Celeridad del sonido del aire a 395.15K	c_s	343 m/s

Capítulo 3

MODELO NUMÉRICO

En este capítulo se darán primero una breve descripción del método de volúmenes finitos (MVF) y de la estructura para llevar a cabo simulaciones en el código de uso libre OpenFOAM. Se explicarán primero los pasos que condujeron al dominio computacional y mallado implementando la geometría, luego la implementación de los perfiles ABL y LLJ, así como de la rotación dinámica del aerogenerador en la simulación. Finalmente se resumirá el post-procesamiento de los campos a analizar.

3.1. Método de volúmenes finitos

El método de volumen finito es aquel que está basado en las ecuaciones integrales del flujo cuya ventaja principal es que es un esquema conservativo en una región de espacio adecuada. Por lo tanto este esquema numérico satisface propiedades análogas con ecuaciones discretizadas. El punto de partida es la ecuación genérica de transporte para una cantidad ϕ ¹

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \iint_{\partial V} (\Gamma \nabla \phi + \phi \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V Q dV + \iint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (3.1)$$

Donde el primer término representa la variación de ϕ dentro del volumen en el tiempo, el

¹Todas las ecuaciones que se derivan de mecánica de fluidos tienen esta estructura.

segundo término se refiere a los flujos de ϕ que engloba fenómenos como lo son la difusión o la convección. Del lado derecho se representan las fuentes externas, como pueden ser aquellas dentro del volumen Q , como de flujos externos \mathbf{S} , que repercuten en la variabilidad de ϕ .

Para aplicar el método se comienza por discretizar el dominio, aproximando la geometría objetivo por medio de polígonos o figuras delimitadas por rectas que sean sencillas de analizar. El segundo paso consiste en dividir el dominio en elementos o celdas suficientemente pequeñas, en donde se aplica el siguiente teorema de la teoría de la medida: Si Ω_1, Ω_2 son dos regiones contenidas en \mathbb{R}^3 , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y f es una función integrable, entonces $\int_{\Omega} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$. Con el fin de descartar el último término, la división del dominio se hace de forma que todos los elementos sean ajenos entre sí, lo que reduce a calcular la integral de todo el dominio como una suma de integrales sobre cada uno de los subdominios Ω_k . Es dentro de cada uno de estos que se resuelven la ecuación (3.1) con cada término ya discretizado. Para el cálculo de las integrales de volumen se considera el valor de la cantidad ϕ en centroide de cada celda y su respectivo volumen. Por otro lado las integrales de superficie se aproximan sumando los valores en todas las caras de la celda y tomando en cuenta sus vectores normales.

Existen diversos algoritmos y esquemas numéricos para llevar a cabo este procedimiento. La finalidad de los métodos numéricos es pasar de ecuaciones integrales o diferenciales que requieren un dominio continuo a un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma $[A][\phi] = [b]$, siendo A la matriz de coeficientes de ϕ que proviene de la discretización de los términos a la izquierda en (3.1), ϕ la cantidad que se desea resolver y b los términos fuente. Lo deseable es que este sistema sea lineal y utilizar diversos teoremas y algoritmos que facilitan su resolución. Se puede consultar con mayor detalle como se implementa este método en^{37,41-44}

3.2. Desarrollo del modelo numérico en OpenFOAM

El problema fue resuelto utilizando el software OpenFOAM², el cual es un programa de uso libre escrito en el lenguaje de programación C++ que resuelve problemas de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD por sus siglas en Inglés) por el MVF. En este caso utilizó la versión: OpenFOAM 2306.

OpenFOAM tiene la ventaja de ser un código libre y validado, razón por la cual la co-

²Versión de la fundación disponible en: <https://openfoam.org/> y ESI-Openfoam disponible en: <https://www.openfoam.com/>

munidad científica opta por utilizar este software ya que brinda resultados de alta calidad. Sin embargo OpenFOAM también presenta desventajas como la ausencia de una interfaz gráfica al usuario y documentación desorganizada que implica una curva de aprendizaje elevada y es por ello que todavía existe cierto rezago en su uso. Afortunadamente gracias a la comunidad, se ha facilitado el aprendizaje del software por diferentes medios con el paso de los años.^{45–55} Particularmente, este trabajo tomó como inspiración el código desarrollado *propeller* que viene incluido en la carpeta de tutoriales precargados en OpenFoam: *open-foam2306/tutorials/incompressible/pimpleFoam/RAS/propeller* donde se simula un flujo a través de un propulsor dentro de una cavidad cilíndrica. Las diferencias principales con respecto al caso base radica en 3 puntos: La geometría utilizada, la rotación no uniforme del generador y los perfiles de velocidad no uniformes.

Por lo tanto se hará énfasis en el desarrollo de estos, aunque primero será descrita la estructura del código de manera breve con el fin de clarificar el mallado, algoritmos y esquemas numéricos implementados.

3.2.1. Estructura de OpenFOAM

Toda simulación de OpenFoam se encuentra organizada en 3 carpetas (Figura 3.1) que se describen a continuación³⁴

- **0:** Se incluyen las condiciones iniciales y de frontera de todos los campos que deben ser resueltos. Para este trabajo estos corresponden a la velocidad \mathbf{u} ⁵, la presión cinemática ϱ , la energía cinética turbulenta k_T , la disipación turbulenta ε o en su defecto la disipación turbulenta específica ω ⁶ y la viscosidad turbulenta ν_T .

El uso de ε y ω depende del modelo de turbulencia utilizado. En este trabajo se utilizaron los modelos $k-\varepsilon$, $k-\omega$ -SST de la familia *RANS*, y $k-Eqn$ y *Spallart-AllMaras* de la familia *LES* con el fin de comparar resultados de las simulaciones preliminares para así elegir el modelo adecuado.

Adicionalmente, si se incluyen mallas dinámicas es necesario otro campo para describir el desplazamiento de cada elemento. En el código tiene el nombre de *pointDisplacement*

³Para mayor detalle se pueden consultar los manuales de OpenFOAM^{45,46}

⁴Es importante aclarar que los nombres de los archivos y de ciertas palabras clave del código pueden diferir entre versiones. En este trabajo se hace referencia a la versión de ESI-OpenCFD.

⁵En una simulación tipo RANS corresponde al promedio de velocidad \bar{u} . Véase el Apéndice B.

⁶Nombradas respectivamente como k , epsilon y omega en el software

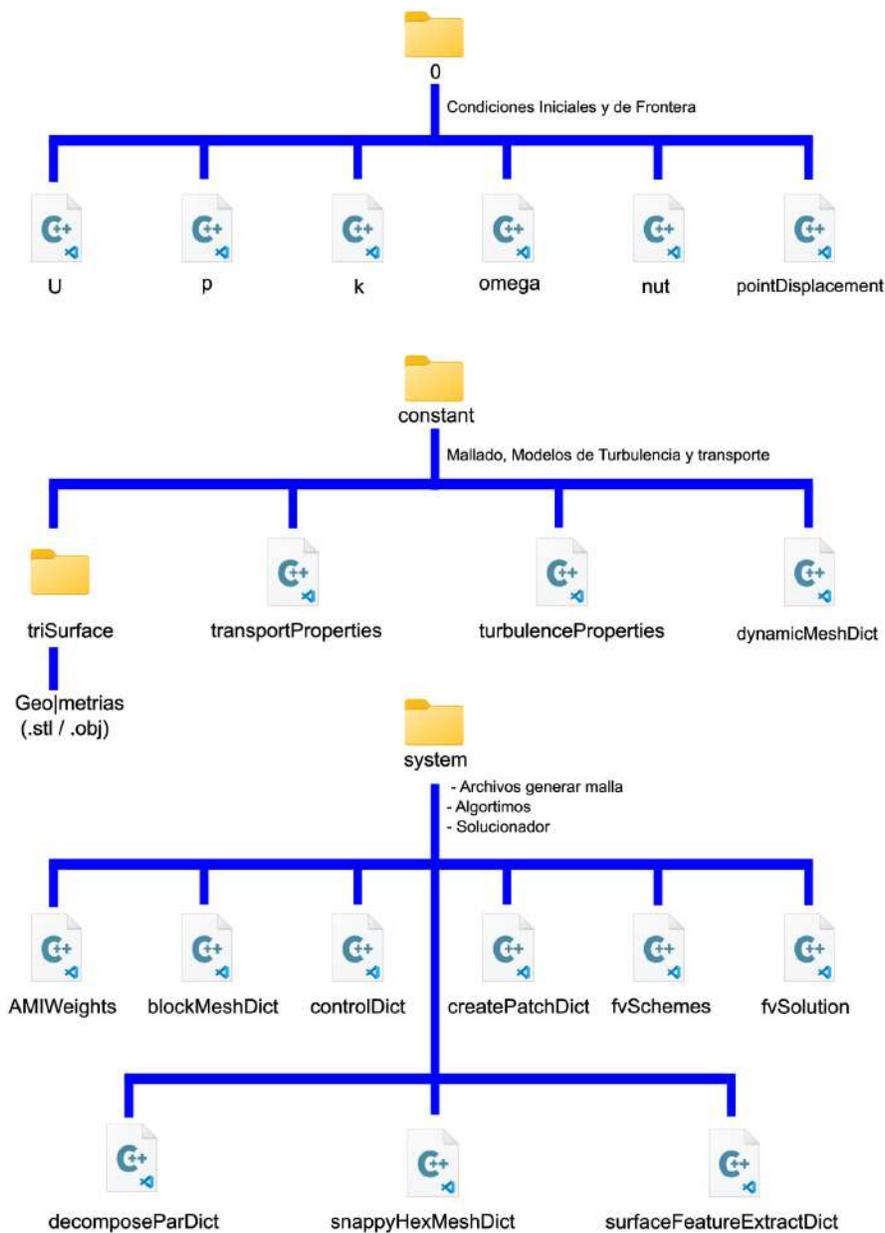


Figura 3.1: Estructura del caso base en OpenFoam

el cual será denotado por el vector pD .

- **constant:** Contiene la malla, propiedades de transporte, el modelo de turbulencia utilizado y el archivo para generar la malla dinámica.
- **system:** Contiene todos los archivos que serán utilizados para realizar la simulación

tales como la generación de la malla, algoritmos, esquemas numéricos, solucionador (o solver de su nombre en Inglés) y archivos para el postprocesado que incluyen el cálculo de las fuerzas resultantes sobre el generador, el campo de vorticidad ω ⁷ o sondas para monitorear la evolución de los campos en puntos de malla especificados.

Se comienza por describir el diseño de la geometría base, la construcción del dominio de solución y su mallado correspondiente.

3.2.2. Geometría

Con el diseño de álabes base descrito en la Sección 2.5 se completó el diseño el resto del generador a través de un programa CAD. El diseño final (Figura 3.2) consistió en 3 aspas junto con su buje correspondiente. De acuerdo a,¹⁻³ este es el número óptimo de estas en términos de costo-eficiencia. Sus medidas fueron reportadas en la Tabla 2.2.

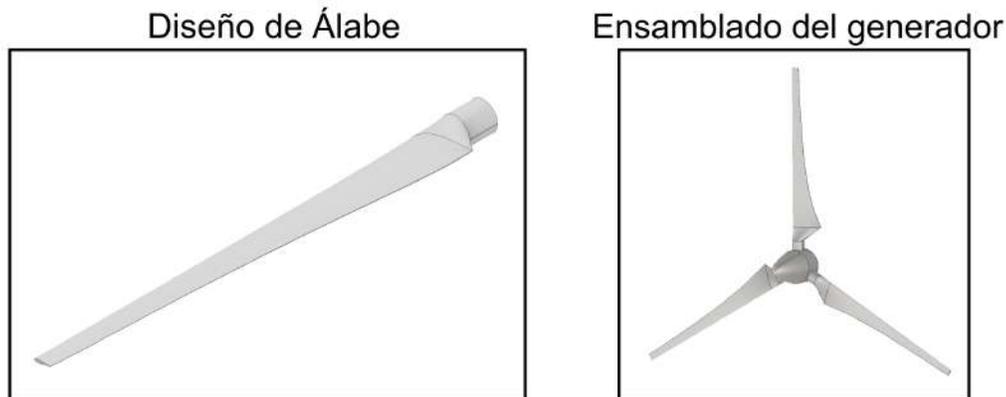


Figura 3.2: Álabes y ensamblado del generador

Una cuestión importante que surgió al inicio del desarrollo de este trabajo fue en la repercusión del tamaño del buje del generador para una operación eficiente. Se consideraron 3 diseños (Figura 3.3) para resolver esta cuestión.

⁷No confundir la disipación turbulenta específica ω con la vorticidad ω

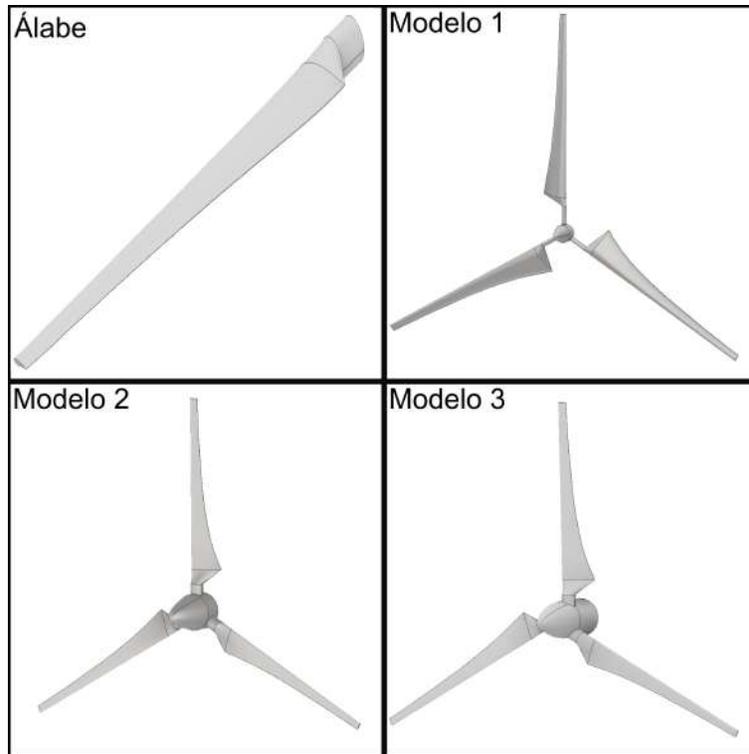


Figura 3.3: Modelos de generador utilizados. Vista isométrica.

Tabla 3.1: Dimensiones de malla base

Caso	Dimensiones
1 Generador	$240 \times 400 \times 240 \text{ m}^3$
2 Generadores	$240 \times 600 \times 240 \text{ m}^3$

3.2.3. Dominio computacional y mallado

Se describe el procedimiento para generar la malla.

1. Primero se creó una geometría base con el mallador de OpenFOAM *blockMesh*^{56,57} que permite crear mallas sencillas como lo es un prisma rectangular. Esta malla tuvo dimensiones tales que el dominio computacional final y las geometrías objetivo quedarán cubiertas en su totalidad. En este trabajo se simuló un generador aislado y dos que interactúan entre sí, lo que requirió dos mallas base de diferente tamaño como se puede consultar en la Tabla 3.1.

Tabla 3.2: Dimensiones de malla base

Dominio	Radio
Cilindro externo	120 m
Subcilindro 1	100 m
Subcilindro 2	80 m
Subcilindro 3	60 m
Mallas rotatorias	55 m

La malla fue extendida 100m⁸ desde el origen del sistema de coordenadas viento arriba y el resto corriente abajo en el eje y . En los otros dos ejes se extendió de forma simétrica lo que corresponde a $x/D = 1.2$ a ambos lados.⁹ Esto puede visualizarse con la Figura 3.4 en el caso de dos generadores.

El número de subdivisiones para el recinto se hizo de forma que los elementos base tuvieran dimensiones de $(10 \times 10 \times 10)$ m³ lo cual se consiguió tomando en cuenta las dimensiones iniciales de la malla base. De esta forma, se facilita la estimación tanto del número de elementos finales en la malla como del volumen mínimo de sus elementos.

2. Una vez creado el recinto base, se hizo la intersección del recinto creado con blockMesh y el recinto final. La malla definitiva consistió en un dominio cilíndrico cuyo diámetro tenía las mismas dimensiones que las paredes laterales del recinto base (Ver Figura 3.4). Dentro de este se consideraron cilindros internos, que serán denominados por subcilindros en adelante, para controlar el refinamiento de la malla con la finalidad de obtener resultados satisfactorios en tiempo razonable. Finalmente se consideró un cilindro que contiene al generador y tiene dimensiones aproximadas a este y cuyo centro coincide con los centroides de los generadores que sirvió para representar la rotación del generador. Se muestra el caso con dos dispositivos en la Figura 3.5 y sus radios se muestran en la Tabla 3.2.
3. Tomando en cuenta los requisitos previos, se utilizó el mallador de OpenFOAM *snappyHex-Mesh* para mallar el recinto final con el que se ejecutó la simulación. Los 3 procesos que

⁸Esta distancia es menor al recomendado de $y/D = 2$. Sin embargo, dada la predominancia en la componente axial del flujo, se consideró en reducir esta longitud con el fin de disminuir los tiempos requeridos para construir la malla final y de los cálculos.

⁹Cabe resaltar que, tomando como referencia al buje del generador, no se puede superar una distancia de $L_{\max} = 120$ m en vertical hacia abajo debido a que se alcanza el nivel de piso, como fue indicado en las Figuras 2.5 y 2.6.

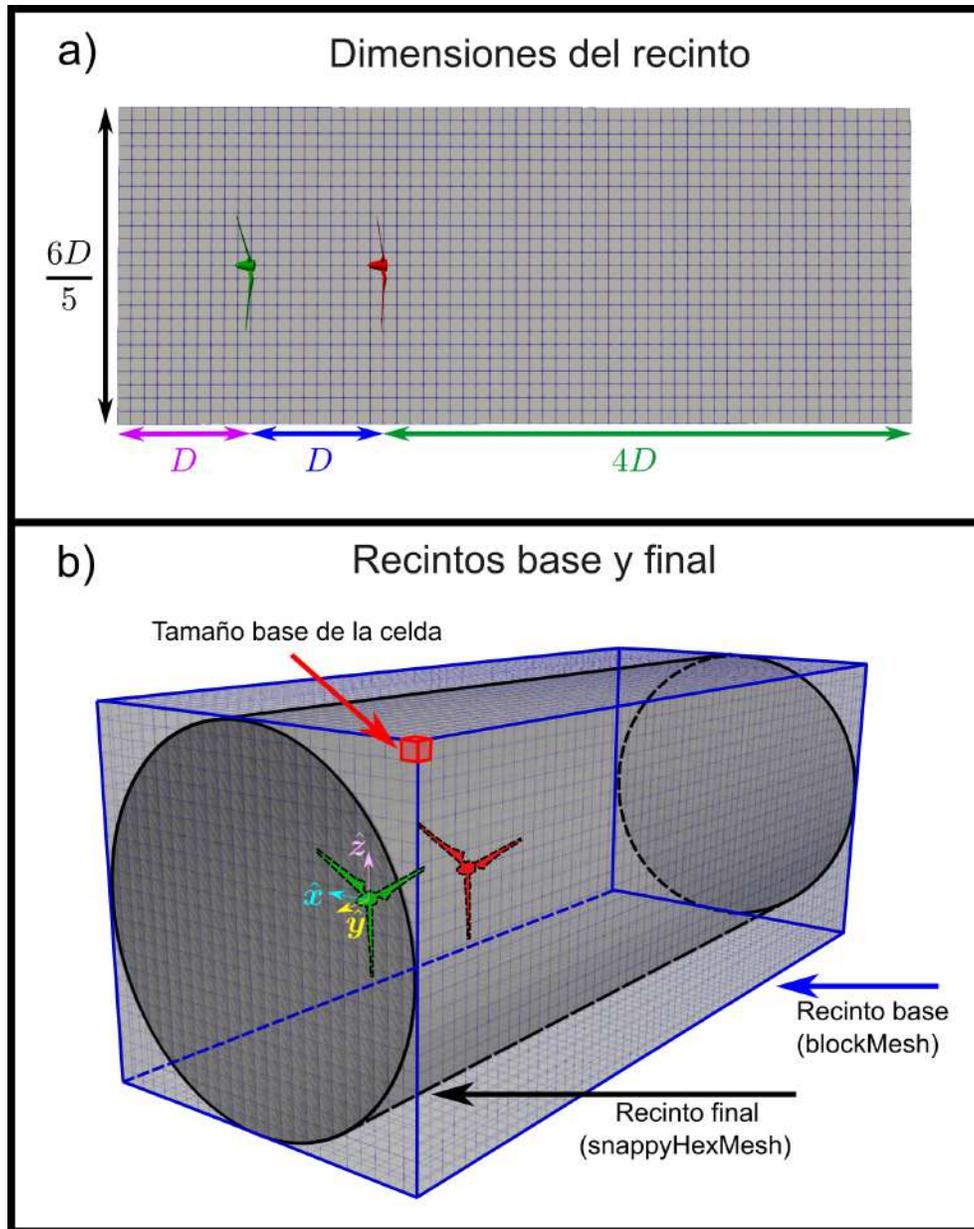


Figura 3.4: a) Dimensiones del recinto base en términos del diámetro del generador. b) Recintos base y definitivo. Se muestran además el tamaño de celda base y el marco de referencia

son ejecutados por este son *castellatedMesh*, *snap* y *addlayers*. Se explicará brevemente a continuación el procedimiento que ejecuta cada uno junto con un paso previo y con un paso final para indicar la malla rotatoria dentro del dominio:

- **Preparación de Geometría:** Este es el proceso que se describió en los pasos anteriores y consiste en indicarle a *snappyHexMesh* cuales geometrías debe incluir

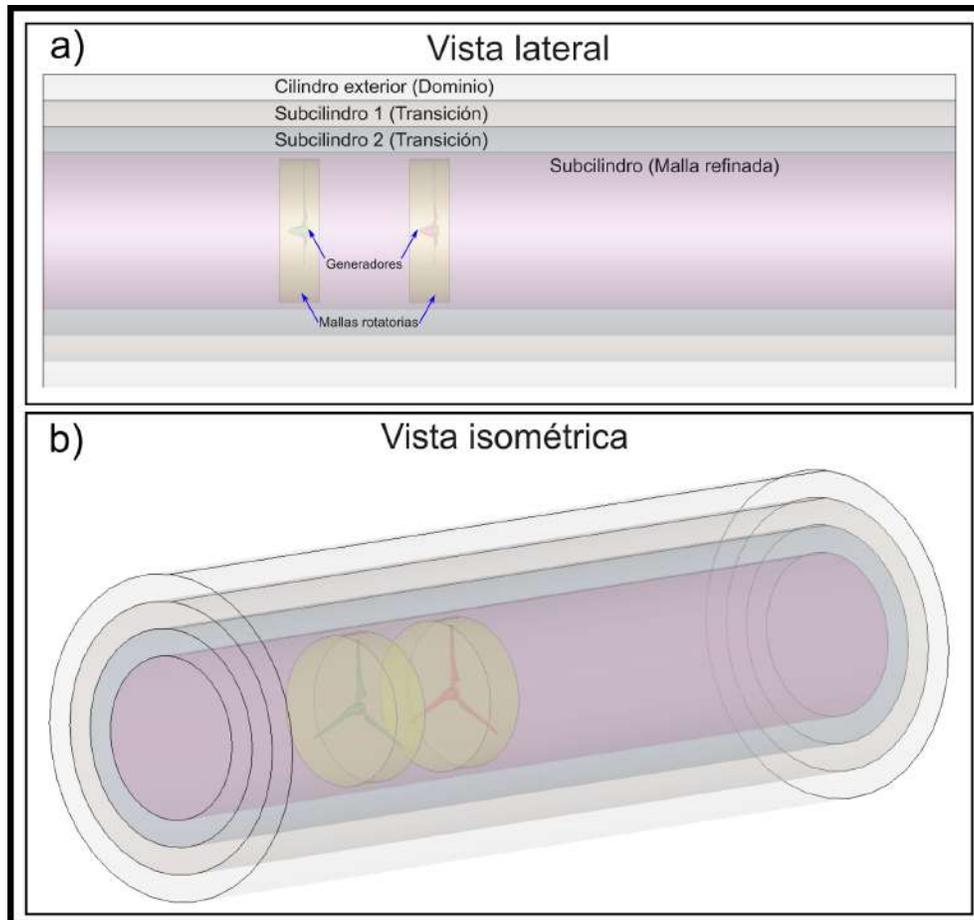


Figura 3.5: Recinto computacional utilizado en la simulación con dos generadores.

para ser malladas (Figura 3.6):

- **Castellated Mesh:** Este es el primer paso, donde se indica el nivel de refinamiento en las superficies o regiones deseadas.

Utiliza el elemento de malla previamente construido con *blockMesh* como se muestra en la Figura 3.4 para aproximar la geometría objetivo, que es en este caso el aerogenerador. Esto hace que las mallas sean por defecto hexagonales en todo el dominio y puede ser visualizado en la Figura 3.7 a).

Este algoritmo (Figura 3.7 b)) consiste en dividir un elemento de la malla para así formar 8 nuevos, cada uno con la mitad de longitud del original y en consecuencia la octava parte de su volumen. Dado que su tamaño se ve reducido se aproximarán mejor a la geometría objetivo, por lo cual es importante que esta sea lo suficientemente fina para conseguir una que sea lo más cercana posible a la original sin sobrecargar el número de éstos ya que se trata de un algoritmo de orden

```

generator1.obj ← Geometría (.stl o .obj)
{
  type      triSurfaceMesh;
  name      generator1;
  regions
  {
    generator1
    {
      name  generator1;
    }
  }
}

```

Figura 3.6: Configuración de geometría con un archivo .obj para ser mallado

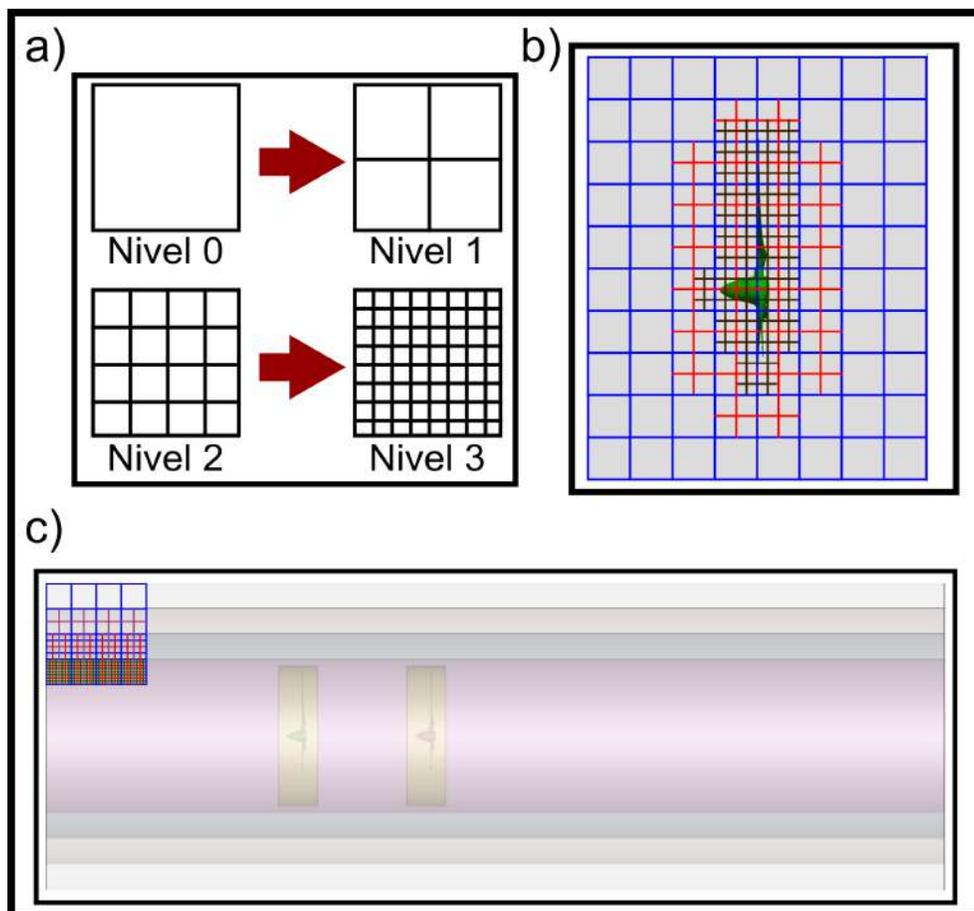


Figura 3.7: a) Algoritmo de refinamiento. b) Aproximación de la malla inicial a la geometría objetivo (local). c) Aproximación al mallado de refinamiento en una región especificada (global). Imagen inspirada en de.⁶¹

Tabla 3.3: Longitud de los elementos dentro de las regiones mostradas y la geometría.

Región/Superficie	Nivel	Longitud promedio de los elementos
Cilindro externo	0	$R/5$
Subcilindro 1	1	$R/10$
Subcilindro 2	2	$R/20$
Subcilindro 3	3	$R/40$
Mallas rotatorias	3	$R/40$
Generador(es)	6	$R/320$

exponencial cuyo número de elementos E_n crece de acuerdo a $E_n = 8^n$ con cada división de celda, la longitud de sus aristas decae con $L_n = L/2^n$ y su volumen como $V_n = L_n^3$, con L a longitud del elemento original. En este caso $L = 10\text{m} = R/5$. En la tabla 3.3 se especifican el nivel de refinamiento del algoritmo y la longitud de los elementos por región.

El nivel de refinamiento cerca de los generadores debe ser lo suficientemente pequeño para que se capte lo mejor posible la geometría objetivo, evitando la mayor cantidad de desperfectos generados por la malla. En un aerogenerador esto es crucial para captar correctamente la potencia que alcanza el dispositivo tal como reporta en.¹⁴ En este caso, el último nivel de refinamiento tiene un tamaño comparable a la cuerda media del perfil en la Tabla 2.2.

- **Snap** En este algoritmo se suaviza la geometría que fue construida con el algoritmo de *Castellated Mesh* con el propósito de que la malla original se acerque mejor a la geometría base. En la Figura 3.8 se muestran los procesos mencionados y la malla obtenida de todo el dominio y en la región cercana al generador con vista isométrica.
 - **addLayers** Este algoritmo utiliza el concepto de la capa límite para regular los elementos vecinos a la geometría de forma que sean paralelos a esta. Esto logra que la malla resultante sea acorde a la frontera de la geometría pero se debe tener cuidado con este algoritmo ya que puede alterar la calidad de la malla en elementos lejanos. En este caso este proceso fue omitido.
4. El último paso del mallado consistió en indicarle a OpenFOAM la existencia de mallas rotatorias,⁶⁵ que se hizo con el algoritmo *Interfaz de malla adaptativa*⁶⁴ (AMI por sus siglas en Inglés). Este consiste en tener dos mallas idénticas donde se crea una copia de la geometría objetivo, que en este caso corresponde al cilindro que rotará

Procesos de SnappyHexMesh

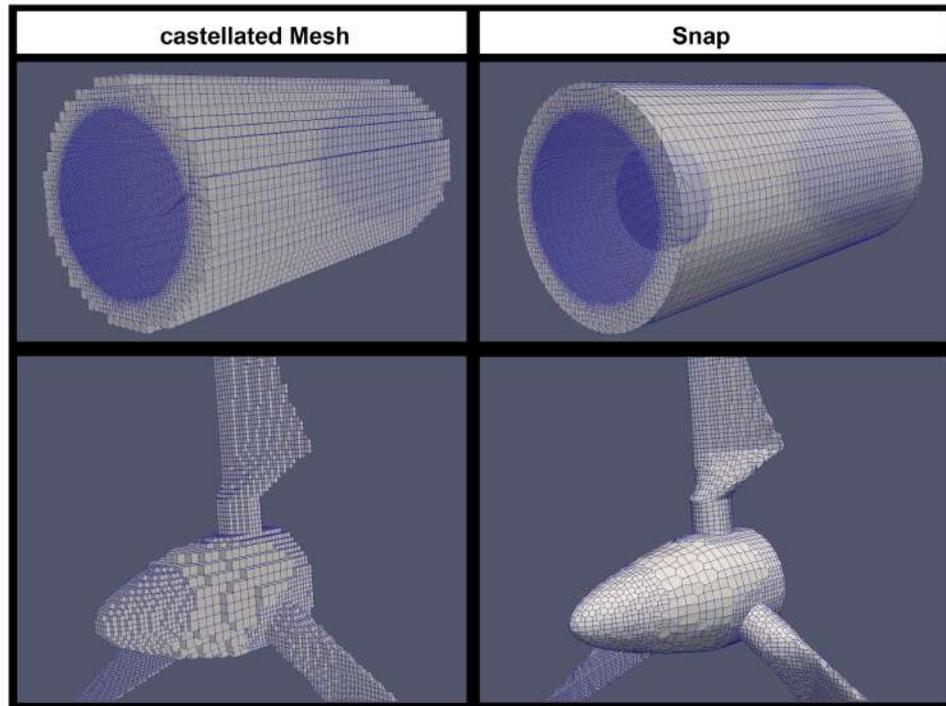


Figura 3.8: Procesos de snappyHexMesh utilizados: *castellatedMesh* y *snap*

con el generador. La primera copia permanecerá fija durante la simulación y la segunda representará la rotación de todos los elementos en su interior. Para hacer el cálculo se interpola el desplazamiento que sufren los elementos de la malla móvil respecto a la fija y con ello se hacen correcciones de los campos obtenidos en cada paso de tiempo. Entre más rápida sea esta deformación de malla mayor número de elementos será requerido para evitar un colapso durante la simulación.

Para seguir este proceso la lista de comandos es:

1. `blockMesh` → Ejecuta `blockMesh`.
2. `surfaceFeatureExtract` → Se identifican las geometrías que serán malladas por `snappyHexMesh`.
3. `decomposePar` → Se utiliza para realizar simulaciones en paralelo, distribuyendo en los núcleos del CPU las diferentes regiones de la malla.

4. `mpirun -np N snappyHexMesh -overwrite -parallel` → Ejecuta `snappyHexMesh` en paralelo y conserva solo el último proceso de este mallado. N se sustituye por el número de procesadores.
5. `reconstructParMesh -constant` → Reconstruye la malla distribuida en carpetas que representan a los procesadores en una sola dentro de la carpeta *constant*.
6. `renumberMesh` → Renumera los elementos de la malla.
7. `topoSet -dict system/createInletOutletSets.topoSetDict` → Se utiliza para definir las fronteras del dominio: Entrada, Salida, paredes, etc.
8. `createPatch -overwrite`: Se identifican las mallas rotatorias y crea las dos copias requeridas por el algoritmo AMI. Además se crean las fronteras identificadas en el paso anterior.

La malla generada para el caso de con dos generadores junto con sus condiciones de frontera se muestra en la Figura 3.9. En la Figura 3.10 se muestra la malla obtenida cerca del generador.

3.2.4. Calidad de la malla

Una vez terminada la malla se revisó la calidad de la misma previo al comienzo de la simulación. Por ello, se utilizó el comando *checkMesh*. Para el caso de dos generadores se muestran todos los parámetros de la malla en la Figura 3.11. En la malla final se contó con $N_E = 4,306,104$ celdas de las cuales el 95.74% son hexaédricas. Dado este alto porcentaje de elementos hexaédricos, se consideró que la malla contó con buena calidad en la mayor parte de sus celdas.

El volumen mínimo de los elementos es del orden de $\sim 10^{-3}$ y se encuentran en la región cercana del generador, mientras que el máximo es del orden $\sim 10^3$. Esto coincidió con lo estimado a partir de la malla inicial (Tabla 3.1).

Se observó además que la no ortogonalidad promedio es de 6.14, con un máximo de 64.98 con 6 celdas que son muy oblicuas, aunque solo representó el (1.3×10^{-3}) % del total¹⁰.

¹⁰Se debe tener cuidado con esto ya que aún con un porcentaje de este orden en la oblicuidad se pueden afectar los resultados de toda la malla.

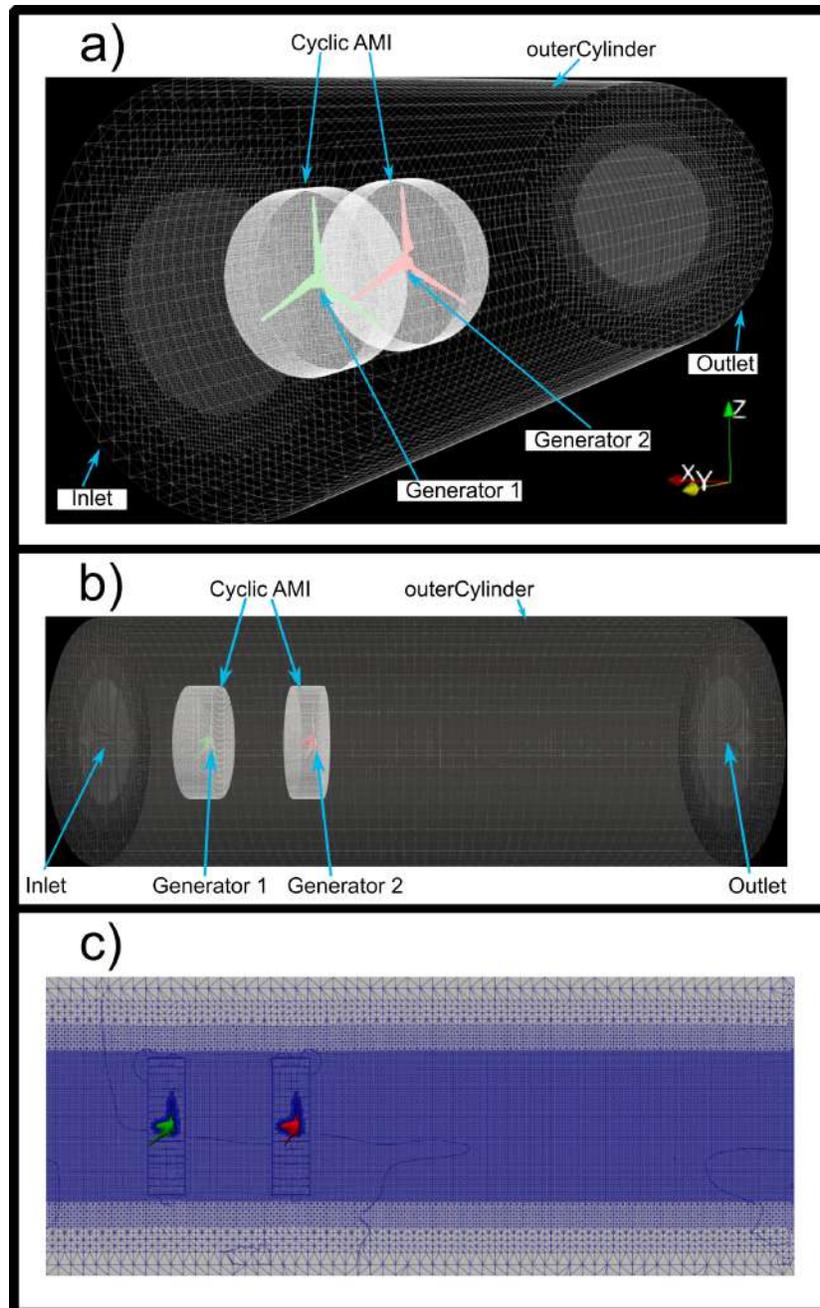


Figura 3.9: Resultado final del malla. a) Vista isométrica. b) Vista lateral. c) Vista lateral sobre el corte del plano $x = 0$.

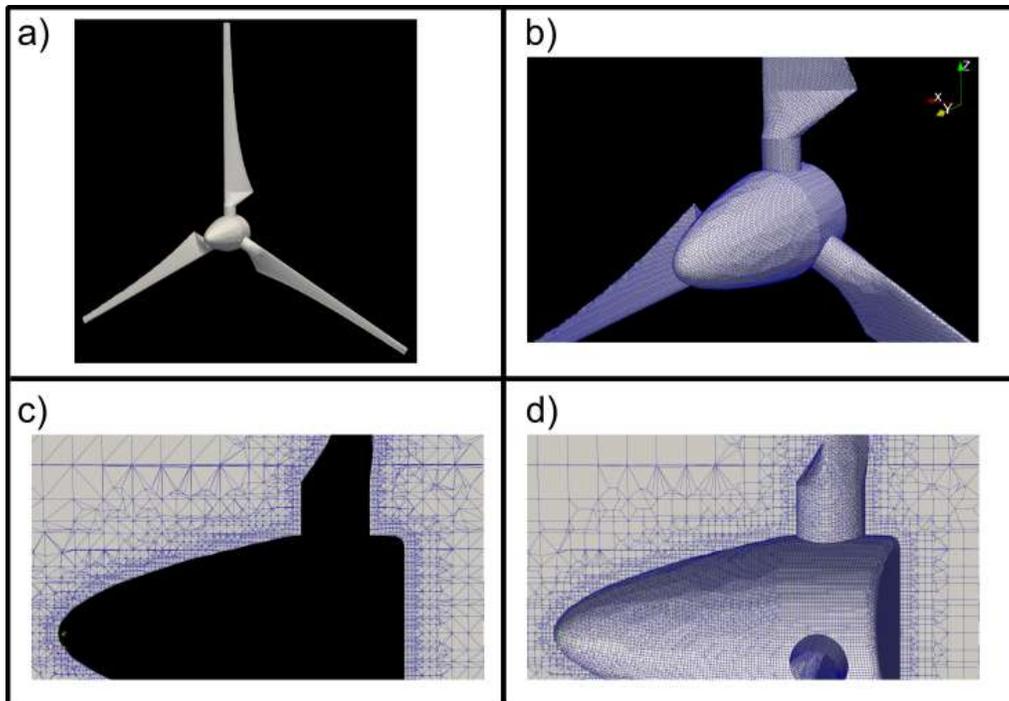


Figura 3.10: Malla final de un generador eólico. a) Geometría. b) Acercamiento a la geometría con elementos mallados. c) Malla alrededor del generador en un plano que corta al plano $x = 0$. d) Lo mismo que en c) pero utilizado un clip para evitar la distorsión en su visualización.

3.3. Implementación del chorro

Una vez descrita la malla se procedió a implementar el perfil de velocidades no uniforme. La manera de lograrlo fue extrayendo las coordenadas de los centroides de cada uno de los elementos que conforman la malla ejecutando en la terminal el comando:

```
postProcess -func writeCellCentres
```

Que imprime en archivos por separado las coordenadas cartesianas X, Y, Z de los centroides de cada celda.

Estos valores fueron utilizados con las interpolaciones (2.89) (ABL) o (2.91) (LLJ) para obtener el valor de la velocidad axial en cada una de las celdas, mismos que se escribieron con el formato de OpenFOAM en los archivos de las condiciones iniciales¹¹.

¹¹Es importante señalar que este método solo funciona si las condiciones de frontera son estacionarias.

```

Mesh stats
points:          4604854
faces:          13203625
internal faces: 12999989
cells:          4306104
faces per cell: 6.08523
boundary patches: 9
point zones:    1
face zones:    2
cell zones:    2

Overall number of cells of each type:
hexahedra:     4122992
prisms:        20628
wedges:        0
pyramids:      0
tet wedges:    41
tetrahedra:    0
polyhedra:     162443

Checking geometry...
Overall domain bounding box (-120.426 -500 -119.648) (120.426 100 120)
Mesh has 3 geometric (non-empty/wedge) directions (1 1 1)
Mesh has 3 solution (non-empty) directions (1 1 1)
Boundary openness (-5.94721e-17 1.08867e-15 2.65805e-16) OK.
Max cell openness = 3.46658e-16 OK.
Max aspect ratio = 8.60761 OK.
Minimum face area = 0.00036081. Maximum face area = 150.981. Face area magnitudes OK.
Min volume = 0.000257825. Max volume = 1436.71. Total volume = 2.69855e+07. Cell volumes
Mesh non-orthogonality Max: 64.9781 average: 6.14382
Non-orthogonality check OK.
Face pyramids OK.
***Max skewness = 17.2648,
6 highly skew faces detected which may impair the quality of the results
<<Writing 6 skew faces to set skewFaces
Coupled point location match (average 0) OK.

Failed 1 mesh checks.

```

Figura 3.11: Resultado final de la malla. Se resaltan los parámetros más relevantes

3.4. Rotación dinámica del generador

Por último la rotación del cuerpo fue implementada con el solver de OpenFOAM *sixDoFRigidBodyMotion*^{66,67} que implementa una rotación con velocidad angular descrita por la ecuación de Euler (2.41) y que en consecuencia, no es uniforme. Se muestra en la Figura 3.12 el código requerido para su implementación. Se puede consultar con detalle el significado de cada parámetro en.⁶⁶

3.4.1. Condiciones iniciales y de frontera

Se tuvieron 4/5 fronteras bien definidas del dominio. La entrada del flujo (*Inlet*), la salida (*Outlet*), las paredes del flujo (*outerCylinder*), 1 o 2 generadores (Generator i con $i = 1, 2$) y las mallas rotatorias (*AMI j* , con $j = 1, 2, 3, 4$). Estas se esquematizan en la Figura 3.9 a) y b).

Código para establecer la malla dinámica

```

16
17 dynamicFvMesh dynamicMultiMotionSolverFvMesh;
18 motionSolverLibs ("libFvMotionSolvers.so");
19
20 dynamicMultiMotionSolverFvMeshCoeffs
21 {
22     generator1
23     {
24
25         dynamicFvMesh dynamicMotionSolverFvMesh;
26         cellZone innerCylinder1;
27         motionSolverLibs ("libsixDoFRigidBodyMotion.so");
28         solver sixDoFRigidBodyMotion;
29
30         sixDoFRigidBodyMotionCoeffs
31         {
32             patches (generator1);
33             innerDistance 51;
34             outerDistance 51.5;
35             rho rhoInf;
36             rhoInf 1.293;
37             mass 994523.68572;
38             momentOfInertia (72280656.68796 124473124.00092 72280656.68568);
39             centreOfMass (0 -1.395 0);
40             g (0 0 -9.8865 );
41             velocity (0 0 0);
42             acceleration (0 0 0);
43             angularMomentum (0 262638291.6419412 0);
44             torque (0 0 0);
45             report on;
46             reportToFile on;
47             accelerationRelaxation 1.0;
48             accelerationDamping 0.3;
49
50             solver
51             {
52                 type Newmark;
53             }
54
55             constraints
56             {
57                 zAxis
58                 {
59                     sixDoFRigidBodyMotionConstraint axis;
60                     axis (0 1 0);
61                 }
62                 fixedPt
63                 {
64                     sixDoFRigidBodyMotionConstraint point;
65                     point (0 0.1 0);
66                 }
67             }
68
69             restraints
70             {
71                 sixDoFRigidBodyMotionRestraint sphericalAngularDamper;
72                 | | coeff 0.02;
73             }
74

```

Multiples mallas móviles

Frontera de aplicación

Malla dinámica

Densidad aire a 20 °C

Parámetros físicos

Momento angular inicial

Torca inicial

Constricciones al movimiento

Eje de rotación

Pivote

Coef. de amortiguamiento

Figura 3.12: Código de una malla rotatoria

Las condiciones de frontera utilizadas se describen en la Tabla 3.4¹² y la implementación de las mismas a las del problema se muestran en la Tabla 3.5. Por otro lado las condiciones iniciales del dominio se denotan en OpenFOAM con la palabra clave *internalField* y se exponen en la Tabla 3.6.

¹²Para mayores detalles ver. ³⁷

Tabla 3.4: Tipos de condiciones de Frontera que aparecen en este trabajo y su descripción

Nombre	Tipo	Expresión Matemática/Descripción.
fixedValue (fV)	Dirichlet	$\phi = \phi_0$
zeroGradient (zG)	Neumann	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$
inletOutlet (iO)	Dirichlet y Neumann	$\phi = \phi_0$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ La misma que <i>zeroGradient</i> si el flujo sale del dominio salvo que exista una reversión de flujo donde cambia a <i>fixedValue</i>
freestreamVelocity (fsV)	Dirichlet y Neumann	$\phi = \phi_0$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ La misma que <i>inletOutlet</i> salvo que permite manipular los valores de entrada en la frontera.
freestreamPressure (fsP)	Dirichlet y Neumann	$\phi = \phi_0$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ Se acopla siempre con <i>freestreamVelocity</i> . Hace lo mismo que esta C.F salvo que la variable es la presión.
calculated	Ninguna	Se calcula el valor del campo en el nodo de la frontera
cyclicAMI	Cíclica	Acopla un par de entradas que comparten frontera y cuya construcción no necesariamente es similar.
movingWallVelocity (mWV)	Dirichlet	$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$

Tabla 3.5: Condiciones de frontera implementadas en los campos (Arriba) y su valor especificado si es el caso (Abajo)

Campo	Inlet	Outlet	OuterCylinder	generators	AMI's
\mathbf{u} ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	Dirichlet $\mathbf{u}_{\text{chorro}}$	fsV $\mathbf{u}_{\text{chorro}}$	fsV $\mathbf{u}_{\text{chorro}}$	mWV $\mathbf{u} = \mathbf{0}$	-
ϱ ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$)	fsP $\varrho = 0$	fsP $\varrho = 0$	zG	zG	cyclicAMI $\varrho = 0$
k_t ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$)	fV $k_t = 0.06$	iO $k_t = 0.06$	zG $k_t = 0.06$	-	-
ν_t ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$)	calculated $\nu_t = 0$	calculated $\nu_t = 0$	calculated $\nu_t = 0$	calculated $\nu_t = 0$	cyclicAMI $\nu_t = 0$
ω ($\frac{1}{\text{s}}$)	fV $\omega = 0.005$	iO $\omega = 0.005$	zG $\omega = 0.005$	-	-
pD (m)	fV $pD = 0$	fV $pD = 0$	fV $pD = 0$	calculated	cyclicAMI -

Tabla 3.6: Condición inicial en los diferentes campos físicos.

Campo	InternalField
\mathbf{u} ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{chorro}}$
ϱ ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$)	$\varrho = \varrho_{\text{chorro}}$
ν_t ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$)	$k_t = 0.006$
ν_t ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$)	$\nu_t = 0$
ω ($\frac{1}{\text{s}}$)	$\omega = 0.005$
pD (m)	$pD = 0$

3.4.2. Esquemas de solución

El algoritmo utilizado para resolver las ecuaciones discretizadas fue mediante el algoritmo PIMPLE³⁷ que combina los algoritmos SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked-Equations) y PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators).

Los pasos del algoritmo SIMPLE en resumen son:^{37,42,43,52,55}

1. Proponer valores iniciales para los campos de velocidad (\mathbf{u}) y de presión (ρ).
2. Resolver la ecuación matricial obtenida de la discretización de (3.1) para el campo de velocidades.
3. Calcular flujos de masa en los centroides de las celdas.
4. Corregir el campo de presión a partir de la ecuación de continuidad.
5. Corregir los flujos en las caras de las celdas.
6. Corregir las velocidades basado en el campo de presiones.
7. Actualizar las condiciones de frontera y el campo de presión.
8. Repetir el paso 2 un número N de ciclos bajo un criterio de convergencia.

Mientras que en el algoritmo PISO, el algoritmo es^{37,43,55}.

1. Proponer valores iniciales para los campos de velocidad y presión.
2. Obtener nuevos valores para el campo de velocidad a partir de la ecuación de Navier-Stokes.
3. Calcular los flujos máxicos en los centroides de las celdas.
4. Corregir los campos de presión a partir de la ecuación de la presión.
5. Corregir los flujos máxicos
6. Corregir las velocidades a partir de los campos de presión.
7. Repetir el paso 3 para mejorar la precisión.

8. Incrementar el paso de tiempo en una unidad y repetir desde el paso 1.

El algoritmo se ilustra con un caso genérico en la Figura 3.13.

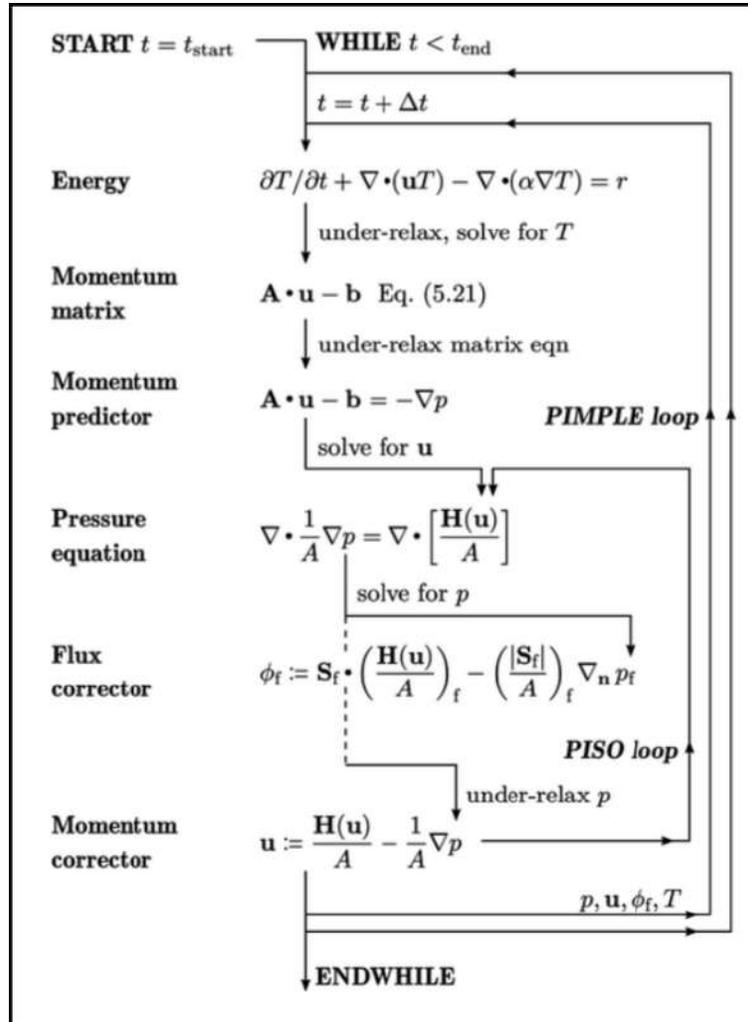


Figura 3.13: Algoritmo PIMPLE. Imagen tomada de³⁷

Del algoritmo PIMPLE se activó la corrección a los flujos ϕ ¹³ mientras que se omitió el paso predictor para p en la ecuación de momento. Por último se utilizaron $N_O = 3$ correctores externos, $N_I = 1$ correctores internos y $N_N = 1$ correctores no ortogonales.

Los factores de relajación, que mejoran la estabilidad del algoritmo fueron 0.3 para el campo de presión y de 1 para las ecuaciones de momento \mathbf{u} , k_T y ω .

¹³De masa y momento

Tabla 3.7: Esquemas numéricos implementados

Concepto matemático	Esquema de discretización
$\frac{\partial}{\partial t}$	<i>Euler</i>
Grad (∇)	<i>Gauss lineal</i>
Div ($\nabla \cdot$)	<i>Gauss linear-Upwind</i>
Lapl (∇^2)	<i>Gauss linear limitado y corregido a 0.33</i>
Interpolaciones	Lineal
Derivada normal (o Gradiente normal a superficie)	<i>limited corrected 0.33</i>

Los algoritmos utilizados para la resolución de las ecuaciones fueron el método *GAMG* (De las siglas en Inglés del método de Multi-malla algebraica y geométrica) para el campo p ,³⁷ y *smoothSolver* (Solucionador suave) para los campos \mathbf{u} , k_T y ω .

La tolerancia máxima permitida para las variables fue de 1×10^{-6} y se permitieron hasta 50 iteraciones dentro del ciclo interno del algoritmo.

Los esquemas numéricos de discretización para se muestran en la Tabla 3.7:

3.5. Post-procesamiento

Una finalizada la simulación se guardaron los pasos de tiempos en carpetas individuales que indican el estado de los campos durante una simulación transitoria.

Estos fueron post-procesados con el software de uso libre *Paraview*⁶⁸ para visualizar y manejar los campos. En este programa se obtuvieron las coordenadas cilíndricas del campo de velocidad y vorticidad (calculados en OpenFOAM)

$$\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{r}} + u_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + u_\zeta \hat{\boldsymbol{\zeta}} \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \hat{\mathbf{r}} + \omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \omega_\zeta \hat{\boldsymbol{\zeta}} \quad (3.3)$$

Cuya relación con el sistema de Cartesiano quedó expresada por las ecuaciones (2.43)-(2.45).

Con el fin de simplificar el análisis cuantitativo de la estela que deja el aerogenerador, se midieron a través de planos normales al flujo incidente cada 0.1 s de la simulación con una separación espacial de $\zeta/R = 0.5$ (o cada 25 m)¹⁴, con el fin de obtener valores promedio mediante

$$\hat{f}(\zeta, t) = \frac{\iint_S f(r, \theta, \zeta, t) dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R f(r, \theta, \zeta, t) r dr d\theta}{2\pi R} \quad (3.4)$$

Donde el área considerada fue la correspondiente a la que abarca la cauda producida tal como se aprecia en la Figura 3.14

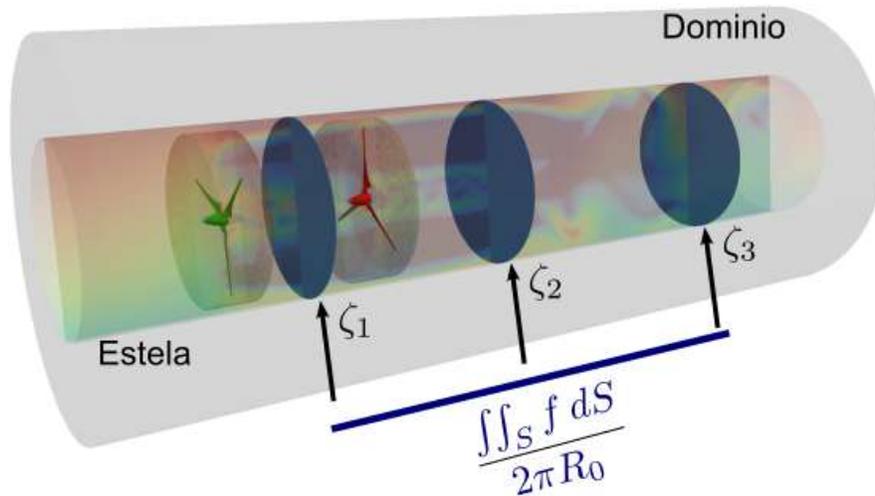


Figura 3.14: Planos para medir las propiedades de la estela

Los campos f que fueron tomados en cuenta para llevar a cabo estas mediciones fueron la

¹⁴A excepción del caso en que los planos se encontrarán en los planos donde se encontraban los generadores en donde se aumentó ligeramente este espaciamiento para medir estas cantidades deseadas.

rapidez del flujo ($\|\mathbf{u}\|$), la presión (p), la energía cinética por unidad de masa ($k = \|\mathbf{u}\|^2/2$), la energía cinética turbulenta (k_T) y la enstrofia ($\xi = \|\boldsymbol{\omega}\|^2/2$)

Una vez extraída esta información se procedió a calcular la eficiencia del generador a través de la energía cinética del flujo dada por el cociente

$$\eta := \frac{\|\mathbf{u}\|_{\text{corriente abajo}}^2}{\|\mathbf{u}\|_{\text{corriente arriba}}^2} \quad (3.5)$$

en un plano anterior y uno posterior al mismo. Este permitió conocer cuanta energía cinética perdió el flujo, o en otras palabras, la energía que extraen los dispositivos.

Capítulo 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

La visualización de los campos mostrados en las siguientes figuras utiliza el siguiente esquema de colores:

- Negro-Azule-Blanco: Rapidez normalizada con respecto a la rapidez media del viento corriente arriba.

La rapidez del flujo se escala en relación con el perfil promedio del flujo en la entrada U_{Mean} (tabla 2.2)

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{U - U_{\text{medio}}}{U_{\text{medio}}} \quad (4.1)$$

El intervalo correspondiente es $[-1, 1]$, por lo que colores oscuros representarán una caída en la rapidez y claros un incremento.

- Verde-Blanco-Morado: Componente radial de la velocidad.
- Blanco-Rojo-Azul: Componente axial de la velocidad.

Las componentes de la velocidad se escalan con respecto a su rapidez, por lo que realmente se representan las componentes del vector unitario (nuevamente en el intervalo $[-1, 1]$).

- Morado-Blanco-Naranja: Componente radial de la vorticidad.
- Blanco-Azules-Negro-Rojos-Amarillo: Componente azimutal de la vorticidad.
- Violetas-Verdes: Componente axial de la vorticidad.

Las componentes de la vorticidad se escalan utilizando el diámetro $D = 2R$ del generador y la rapidez media del flujo

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i D}{U_{\text{Mean}}} \quad i = r, \theta, \zeta \quad (4.2)$$

Por conveniencia, la escala en las figuras correspondientes se encuentra en el intervalo $[-10, 10]$.

4.0.1. Resultados preliminares: control de calidad

Residuales

La Tabla 4.1 contiene los valores de los residuales para el caso de dos generadores, con un modelo $k - \omega$ -SST para la turbulencia.

Tabla 4.1: Residuales después de 3 iteraciones con el algoritmo PIMPLE (valores máximos).

(ϱ)	k_T	ω
9.67×10^{-7}	7.05×10^{-7}	9.84×10^{-7}

Evidentemente, el diminuto orden de magnitud de los residuales implica que el error relativo en los resultados numéricos resulte, a su vez, muy pequeño. Entonces puede asumirse que la convergencia ha sido adecuada y que los valores calculados son aceptables.

Análisis de sensibilidad de malla

El conjunto de figuras 4.1-4.4 muestran, respectivamente, diferentes grados de refinamiento de la malla computacional, el valor de ϵ_{rel} (celeridad media), el valor de U_θ (celeridad azimutal), y el valor de ω_θ (vorticidad azimutal).

De igual forma, las figuras 4.5 y 4.6 muestran las gráficas de U (celeridad), p (presión), la k (energía cinética), la k_T (energía cinética turbulenta), y la ξ (enstrofia), medidas en la estela a $t = 30$ s (i.e. en el último valor del intervalo de tiempo simulado).

La Tabla 4.2 resume los principales parámetros de las corridas de simulación. Estos son: L_{\max} (longitud máxima), V_{\min} (volumen mínimo), V_{\max} (volumen máximo), N (número de

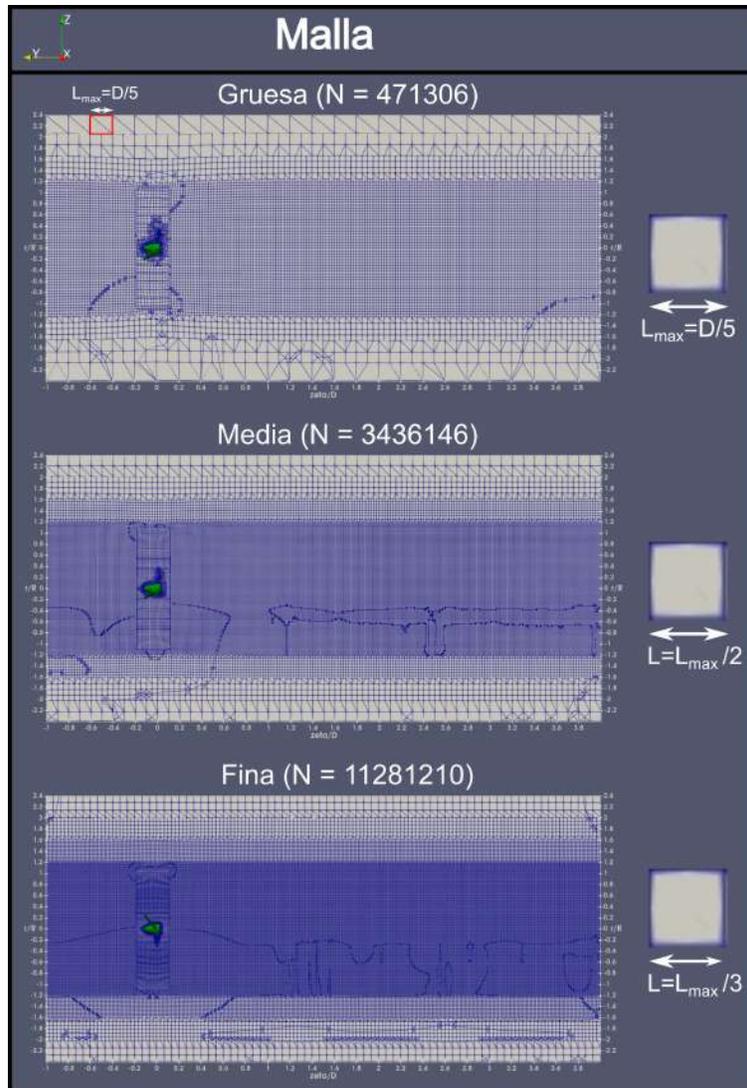


Figura 4.1: Diferentes mallas utilizadas para hacer el estudio de independencia. Se especifica del lado derecho el tamaño máximo del elemento de malla.

elementos), t_{Mesh} (tiempo de mallado), t_{Sim} (tiempo de simulación), Δt (paso de tiempo medio), y W (tamaño de los archivos de resultados guardado en cada paso de tiempo).

Se observa claramente que los resultados numéricos difieren mucho dependiendo del tipo de malla empleada. Por ejemplo, se puede observar que U decrece con el refinamiento de la malla (Figura 4.5l), mientras que P presenta diferencias más notorias cerca del aerogenerador localizado en $\zeta = 0$. Igualmente, k y ξ crecen considerablemente a medida que la malla es refinada (Figura 4.6). Como se puede observar en 4.1-4.4, los vórtices generados en la estela y su distribución espacial (determinada por medio de las distancias entre centroides)

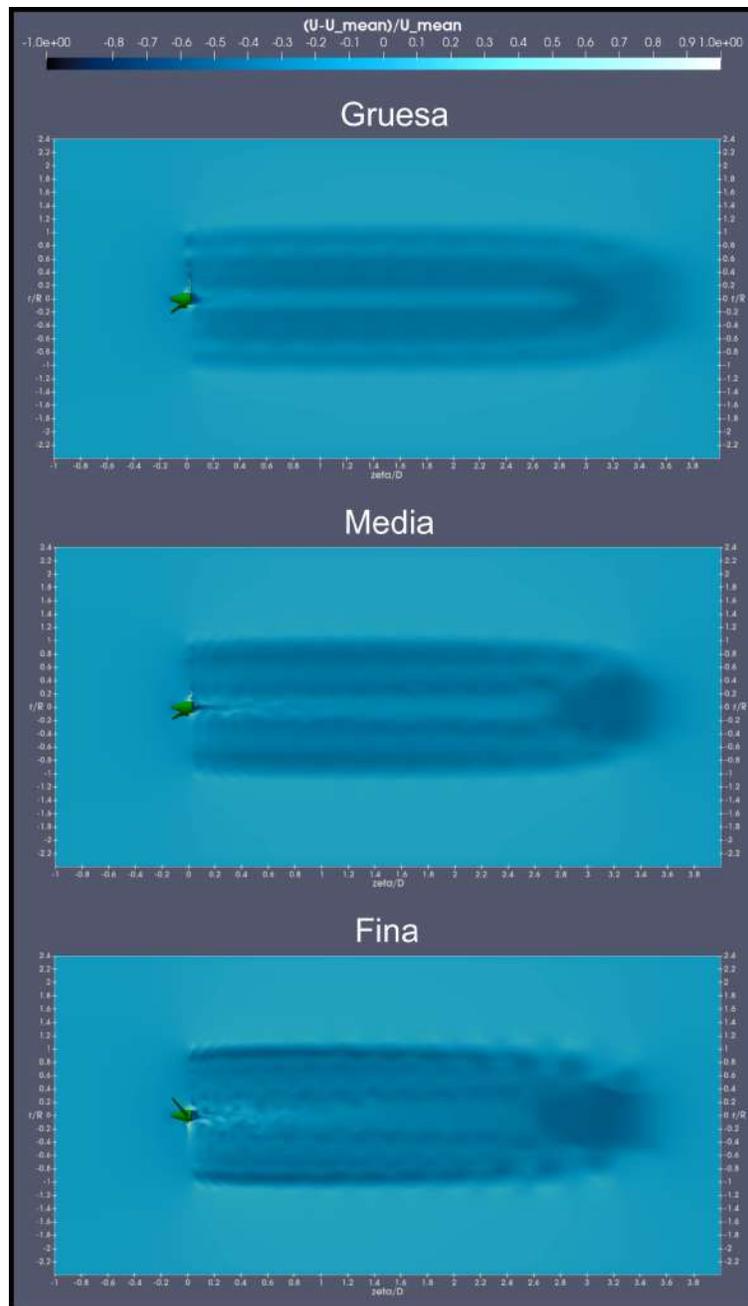


Figura 4.2: Resultados de celeridad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30s$.

se resuelven mejor con una malla altamente refinada. Esto repercute directamente en la evolución de la vorticidad en la cauda que interactúa con el segundo aerogenerador colocado corriente abajo. Sin embargo, debido al tamaño de los archivos de resultados, así como al elevado tiempo para su manejo y procesamiento, se optó por realizar las simulaciones con mallas con un tamaño de elementos intermedio (con $V_{min} \sim 10^{-5}$ m). Se deja como trabajo

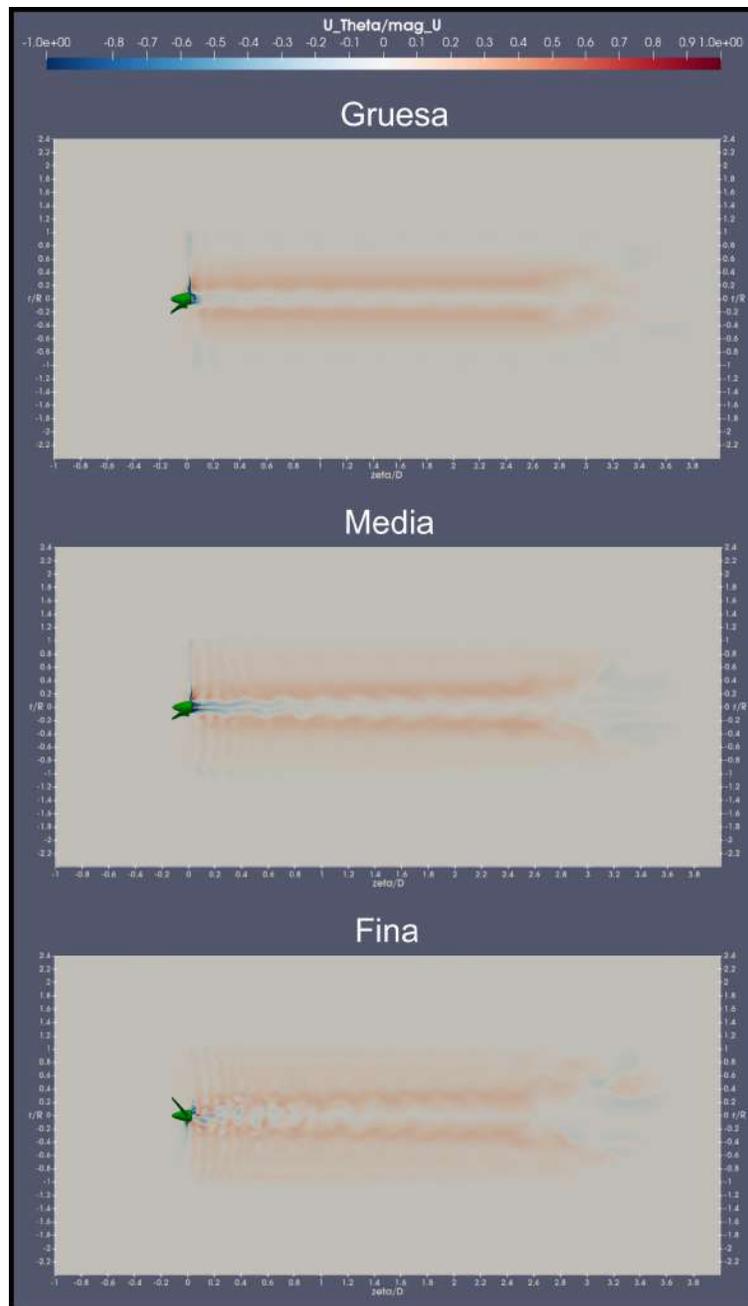


Figura 4.3: Resultados de la componente azimutal de la velocidad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30\text{s}$.

futuro un análisis de sensibilidad con mayor detalle.

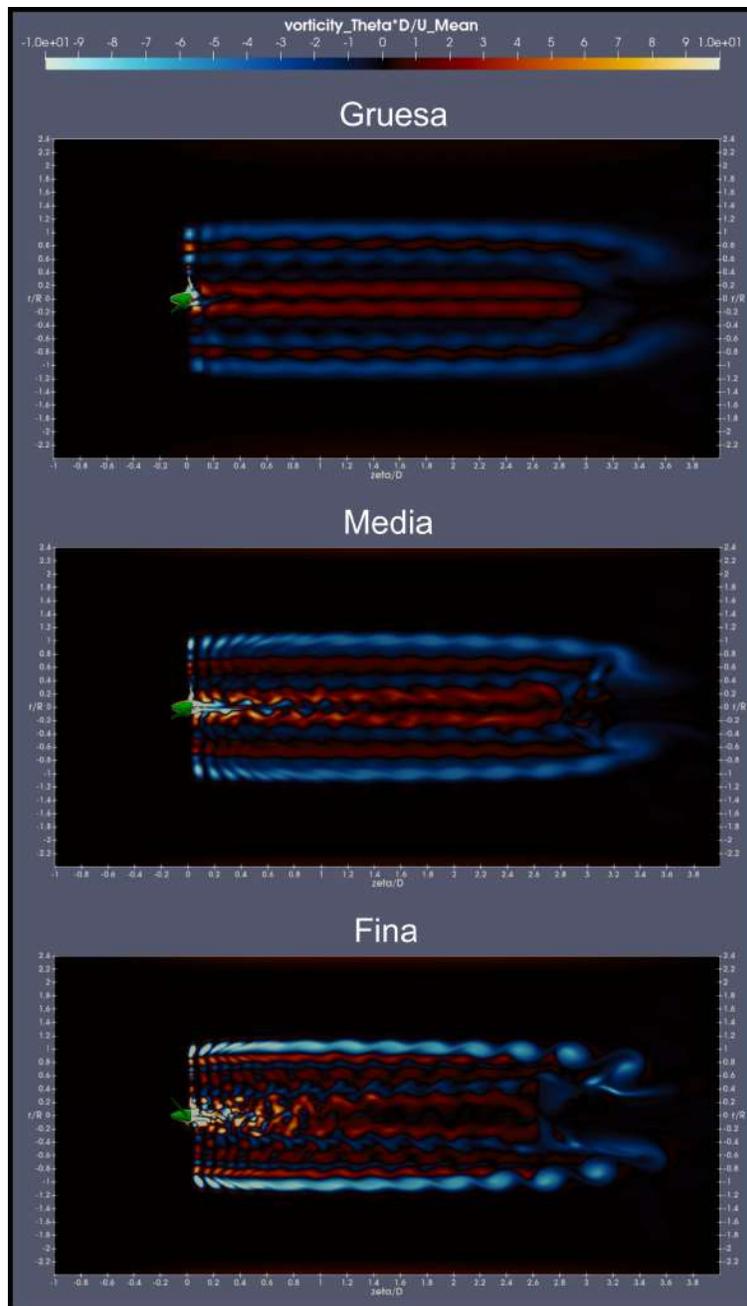


Figura 4.4: Resultados de la componente azimutal de la vorticidad para 3 diferentes mallas empleadas en el tiempo $t = 30s$.

4.0.2. Evolución del flujo en torno a un generador aislado

El desarrollo temporal del flujo en torno a un solo generador inmerso en un LLJ se ilustra en las figuras 4.7 y 4.8, para la celeridad indicada en la tabla 2.2.

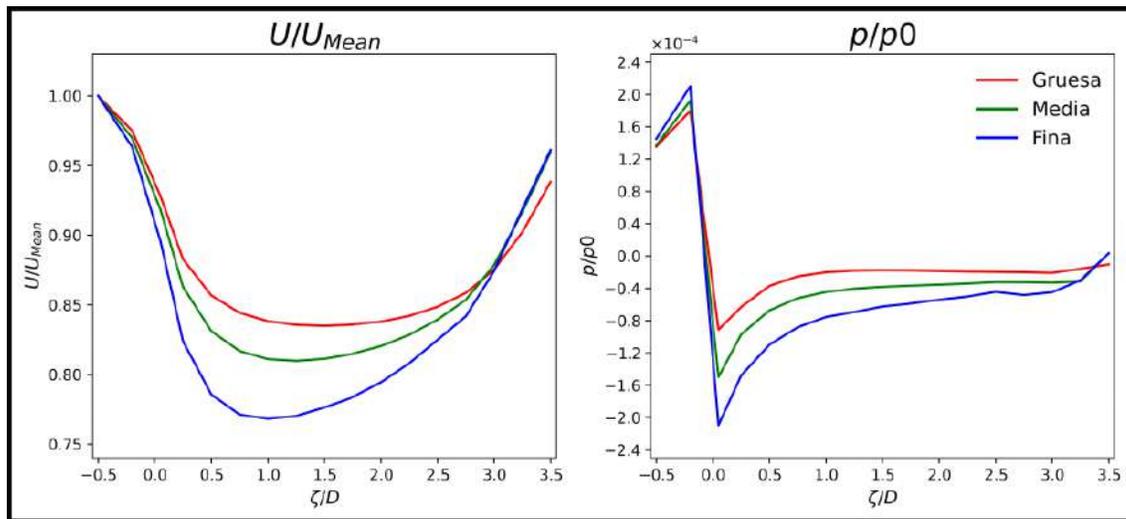


Figura 4.5: Distribución de la magnitud de velocidad y la presión normalizadas y promediadas tal como fue descrito en la sección 3.5 en el tiempo final.

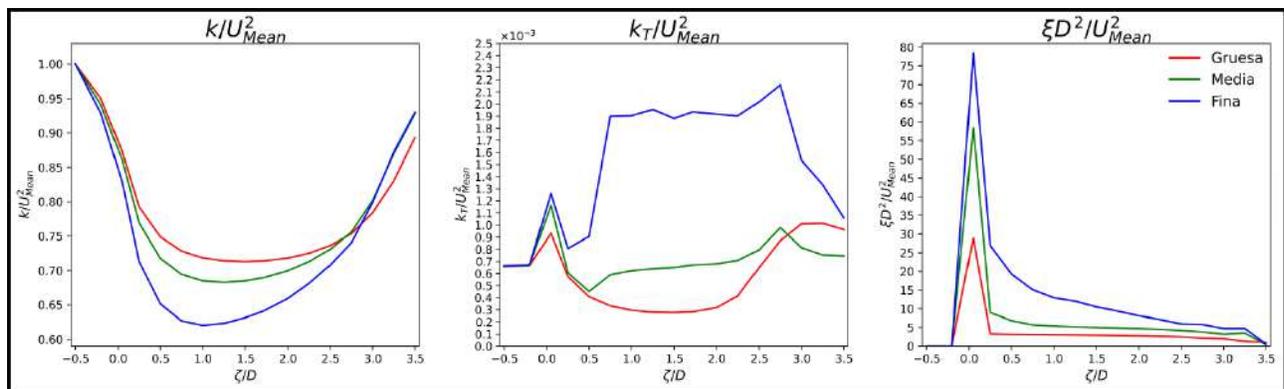
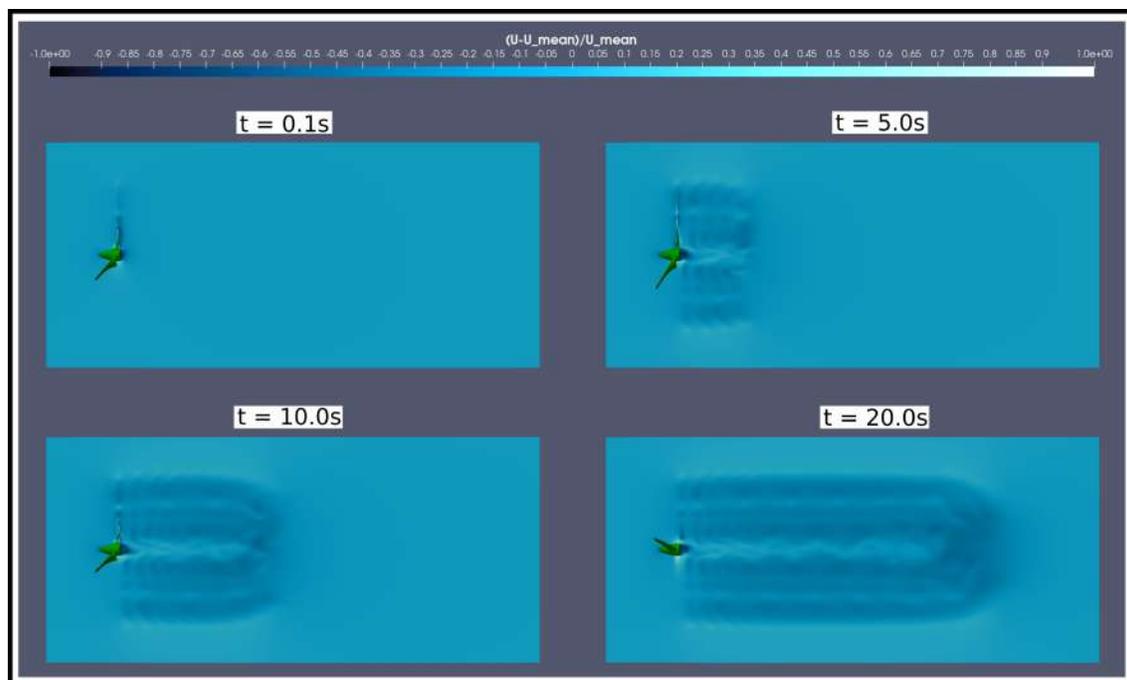


Figura 4.6: Distribución de la energía cinética del campo medio, la energía cinética turbulenta y la enstrofia normalizadas en el tiempo final.

Tabla 4.2: Parámetros relevantes al comparar las mallas.

	Gruesa	Media	Fina
L_{\max}	$D/5 = 20$ m	$D/10$	$D/15$
V_{\min}	2.59×10^{-3} m ³	2.57×10^{-4} m ³	6.80×10^{-5} m ³
V_{\max}	6.38×10^3 m ³	1.31×10^3 m ³	3.76×10^2 m ³
N	471306	3436146	11281210
t_{Mesh}	12.11 s	121.52 s	300.51 s
$t_{\text{Sim}} (30s)$	0.35 días	5.59 días	22.28 días
Δt	1.07×10^{-3} s	5.21×10^{-4} s	3.97×10^{-4} s
W	121 MB	861 MB	2730 MB

**Figura 4.7:** Evolución de la rapidez promedio de un perfil de velocidades uniforme para un generador aislado.

La primera imagen de la figura 4.7 muestra que el flujo inicial es uniforme en todo el dominio; su valor respectivo es $U_{\text{Mean}} = 13.7$ m/s. La vorticidad correspondiente es cero en todos lados, salvo en la proximidad del generador que comienza a rotar en ese instante. En $t = 5$ s se ve el desarrollo incipiente de la estela corriente abajo del generador. En este punto, el efecto de la caída de presión detrás de la máquina puede notarse como una “convergencia” de las estructuras de flujo hacia el centro de la estela ($t = 10$ s). Hacia el final de la simulación ($t = 20$ s) la estela alcanza una especie de *estado estacionario promedio*, caracterizado por

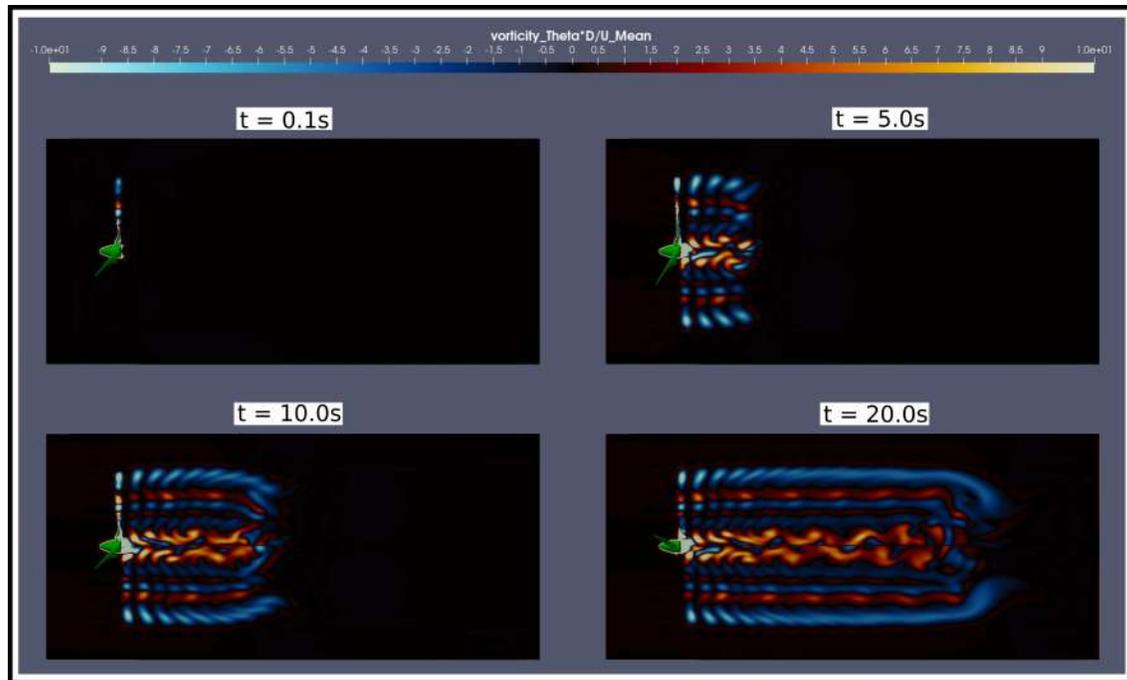


Figura 4.8: Evolución de la componente azimutal de la vorticidad de un perfil de velocidades uniforme para un generador aislado.

circulaciones similares a ambos lados del eje del buje. Sin embargo, el campo de vorticidad azimutal muestra que este estado no es estrictamente simétrico con respecto a dicho eje (Fig. 4.8). Cabe notar que, en función del sistema de coordenadas polares adoptado, el vector $\hat{\theta}$ tiene sentidos opuestos en los dos semi-planos. En el centro este vector no está definido ya que el plano mostrado contiene al origen del sistema de coordenadas. Este hecho es importante ya que *permite reducir el análisis a solamente una de las mitades del dominio*. En adelante el análisis se refiere al semi-plano superior solamente.

Por su parte, la estela adquiere un diámetro ligeramente mayor que el rotor de la máquina. Esto es consistente con la ecuación (2.73), ya que se induce una componente radial en la velocidad debido a la presencia del rotor y a la interacción del flujo con los álabes. Esta componente está orientada desde del eje del buje hacia afuera de la máquina. Dentro de la estela la celeridad se reduce, en promedio, alrededor de un 25 % con respecto al flujo incidente. Inicialmente dicha reducción se manifiesta como una serie de bandas alrededor del eje ζ (causadas por el paso de los álabes por el plano mostrado). El periodo correspondiente es $T = 2\pi/(N\Omega)$, donde el factor $N = 3$ indica el número de aspas. Asimismo, puede verse que estas bandas se “fragmentan” de acuerdo con la posición radial debido al cambio de la geometría del

álabe¹. Se observa, además, que la rapidez en la punta crece debido al significativo dominio de la velocidad rotacional de la máquina en esa región. Consecutivamente se genera una banda a una distancia $d = U/T \sim 0.2R$, la cual se distorsiona en la dirección del viento. Esto se debe al efecto del transporte advectivo del flujo. Corriente abajo ambas bandas se mezclan y se disipa la organización por bandas.

También se advierte la existencia de un punto de estancamiento en la región posterior del buje, lo que da pie a un incremento considerable de la presión en ese punto. Esto implica la generación de un gradiente “adverso” de la presión en la parte posterior de la máquina capaz de inducir una aceleración en el flujo, contraria a la dirección del flujo axial incidente. La parte externa de la circulación asociada tiende a girar (en sentido opuesto mientras fluye corriente abajo), generando los vórtices característicos del desprendimiento del flujo.

La figura 4.8 muestra igualmente que las regiones de vorticidad cambian de polaridad a lo largo de los álabes. En la mitad superior el fluido que gira en sentido horario se representa con el color azul, mientras que el que gira en sentido antihorario se representa con el color rojo². Esta dependencia en la polaridad puede deberse, entre otras cosas, al cambio en el perfil aerodinámico de los álabes. Los filamentos de vorticidad se trasladan como bandas discretas, de una forma muy similar a las estructuras de celeridad en la estela, hasta que se encuentran y deforman conjuntamente bajo la acción de variaciones del momento con respecto al flujo de entrada, de modo que se forman bandas horizontales bien definidas a lo largo de la estela. La capa límite en la región cercana al buje se desprende dando lugar a una vorticidad de gran intensidad. Por último, la antisimetría observada en la polaridad de los vórtices permite suponer que la circulación neta tiende a conservarse, excepto por los efectos de disipación viscosa (en consonancia con el Teorema de Kelvin). Esto sucede en todos los tiempos e indica que los vórtices dentro de la estela no evolucionan de forma aislada.

4.0.3. Efectos del diseño del buje del rotor

Diferentes diseños de bujes fueron considerados (Fig. 3.3) para analizar sus efectos. El tiempo de la simulación en este caso se redujo a $t = 10s$ y se emplearon la velocidad angular inicial y la celeridad del perfil de la tabla 2.2. Se mantuvo el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$.

Las Figuras 4.9 - 4.10 muestran los campos de rapidez y la componente azimutal de la

¹Se mostrará más adelante que el buje también induce un efecto

²Esta situación se invierte en la mitad inferior

velocidad. La componente azimutal de la vorticidad también se muestra en la Figura 4.11. El plano que corta al generador por el centro contiene las propiedades de la estela.

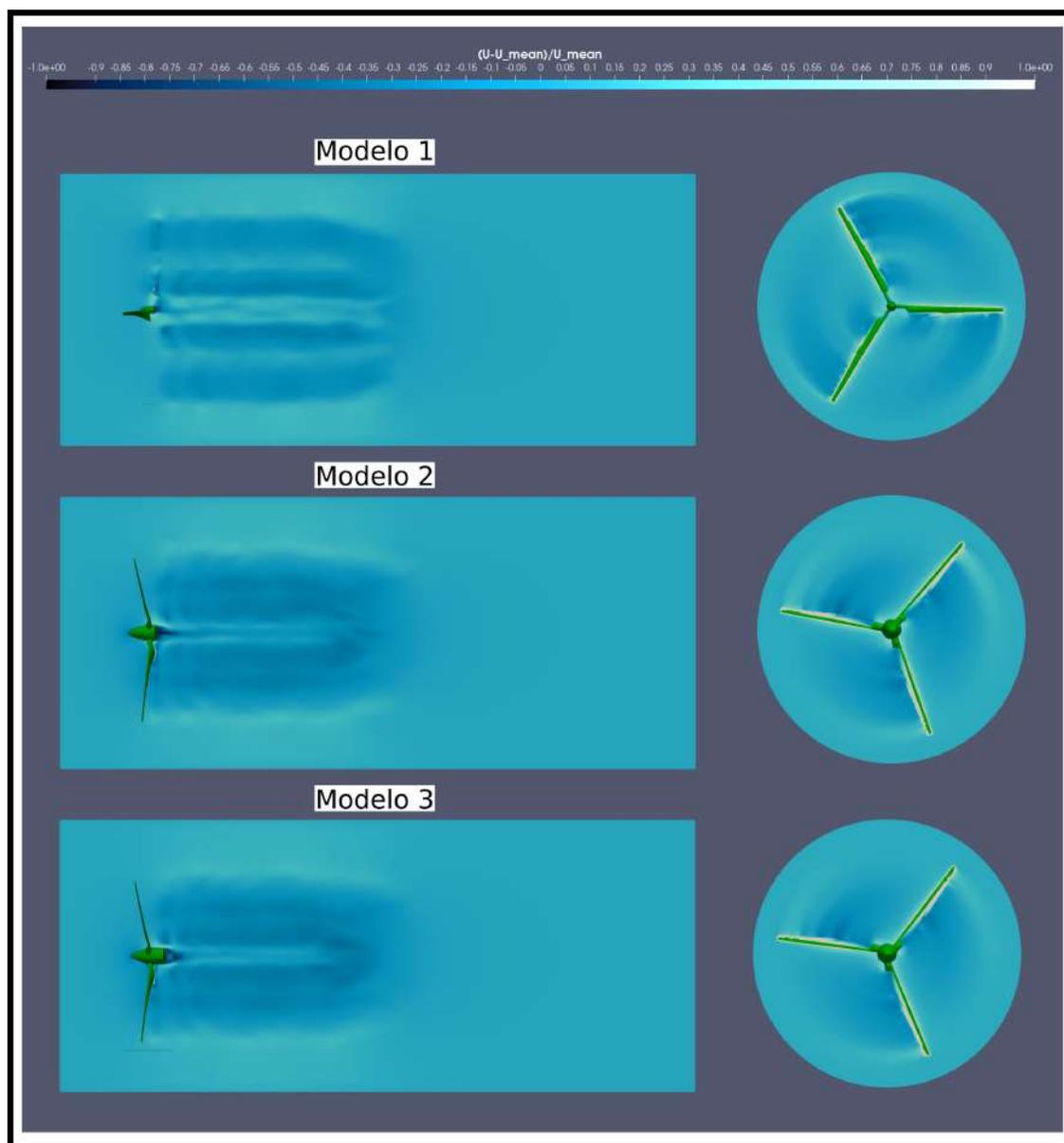


Figura 4.9: Rapidez promedio para 3 modelos de buje diferentes vistos desde un plano que corta al tubo de corriente generado por la estela (lado izquierdo) y normal al plano de rotación del generador eólico.

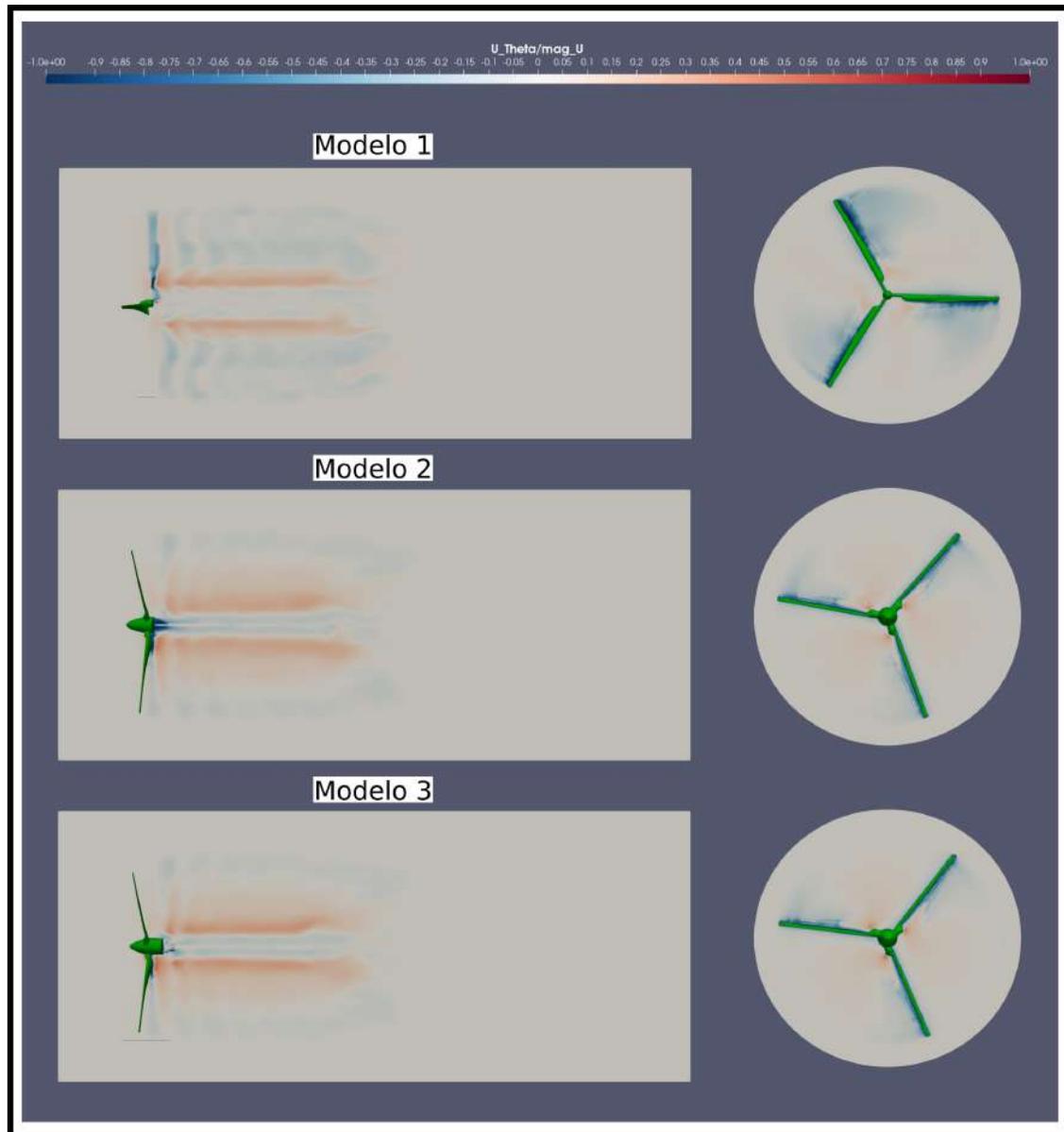


Figura 4.10: Componente azimutal de la velocidad para 3 modelos de buje

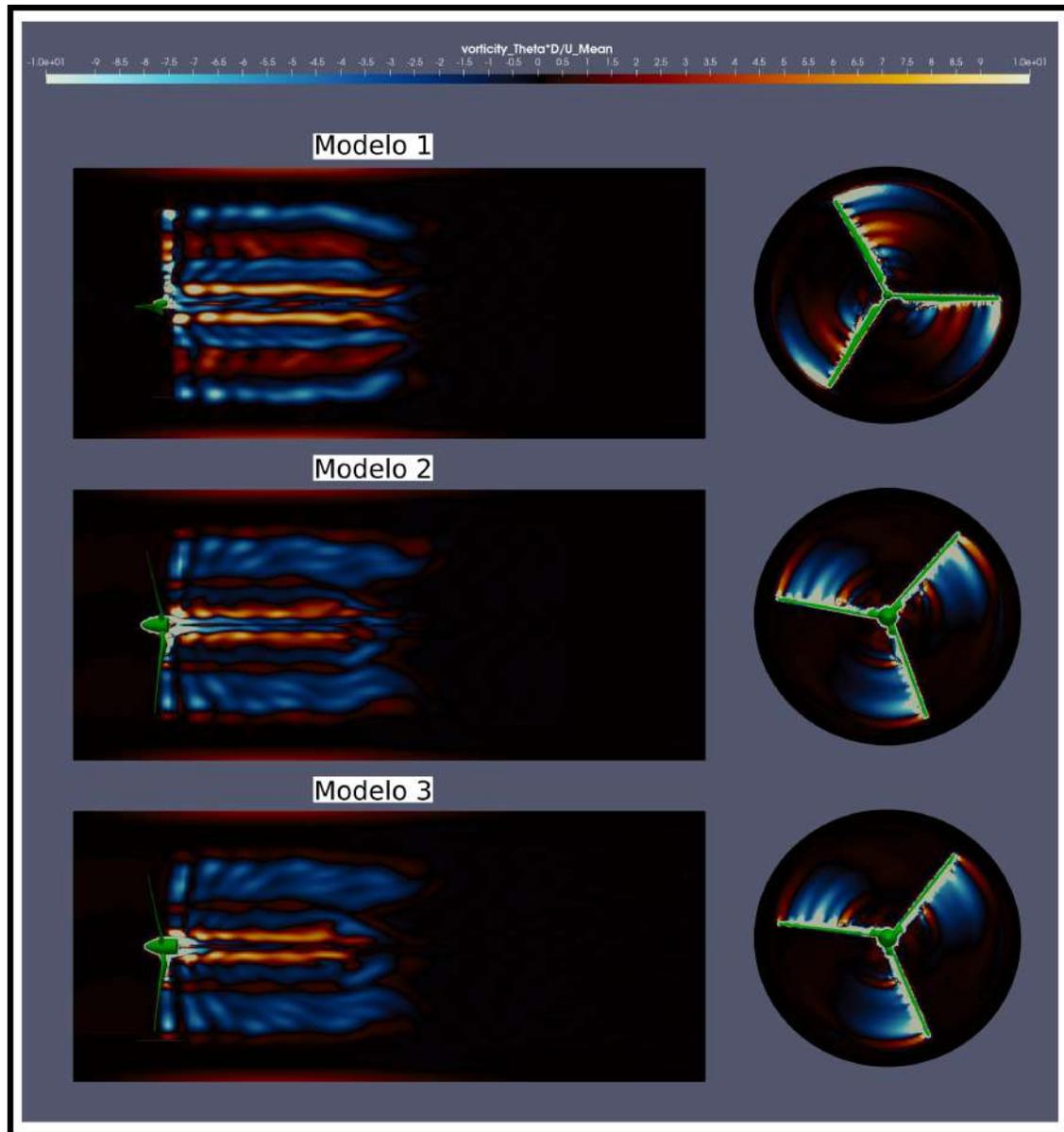


Figura 4.11: Componente azimutal de la vorticidad para 3 modelos de buje

Como se puede observar en la Figura 4.9, la estructura del primer modelo es muy diferente al de los otros dos, ya que produce una caída significativa en la rapidez del flujo y un desprendimiento en la región posterior del buje. Las estructuras de los modelos 2 y 3 son similares, pues el cambio principal es el posicionamiento de la geometría base sobre el buje. Esto se aprecia mejor en los planos YZ , que contienen a la estela.

En la parte superior del plano en la Figura 4.10, los azules indican que el fluido entra al plano de corte; como sucede con la vorticidad, hay antisimetría entre los dos sub-planos. Se

aprecia que en el primer modelo esta componente es muy diferente en la sección de la punta ya que la rotación del flujo es a favor de la rotación del generador³. Posteriormente, en los 3 modelos se observa que el flujo rota en sentido contrario a la rotación del generador (en los Modelos 2 y 3 el efecto se nota más). Dentro de esta región de “contra-rotación”, se encuentra la zona de desprendimiento de flujo. En el primer modelo esta región es más amplia en la dirección radial que en los otros modelos. Esto sucede porque la geometría de la zona de acoplamiento⁴ se caracteriza por una distancia radial mayor, propia de un diseño que no es óptimo.

Los últimos dos modelos tienen regiones de vorticidad muy similares entre sí (Fig. 4.11); puede verse que en el primer modelo existe una gran diferencia en la disposición de estos anillos. Nótese que, en la región de desprendimiento, la vorticidad en el primer modelo es relativamente más elevada (el confinamiento de esta región de desprendimiento es menos eficiente). Dicho desarrollo afecta a las regiones de vorticidad próximas a la punta, cambiando radicalmente la polaridad. El efecto más importante es que el rendimiento de los modelos se altera (ver Fig. 4.12). La figura ilustra comparativamente la velocidad angular y la eficiencia cinética (como función del tiempo) entre las 3 máquinas.

En términos generales se observa que la velocidad angular disminuye en los 3 modelos. Esta reducción es de 2 – 4% para los modelos 2 y 3, y de aproximadamente 13% para el primer diseño. Por otro lado, la eficiencia es muy similar en los modelos 3 y decae a un 95%, mientras que en el modelo 1 decae a un 91%. En conclusión, el diseño del buje es sumamente importante para la operación eficiente de un generador. En los 3 casos el modelo 1 tuvo un peor desempeño mientras que los modelos 2 y 3 tuvieron un desempeño similar. Se constata que la región de flujo cercana del buje influye en el desarrollo de la estela, incluso en la región posterior a los álabes. Con base en estas conclusiones, el resto del análisis se realizó con el modelo 2.

4.0.4. Efecto del modelo de turbulencia.

En primera instancia debe considerarse que Doosttalab et.al¹⁴ y Gadde et.al¹⁷ utilizaron modelos de grandes circulaciones, es decir, los de tipo LES. Este uso responde al hecho

³En la sección 2.4 se dejó implícito que la rotación es en sentido horario viendo en la dirección de flujo favorable. Por lo que en este plano los álabes del generador entran al plano en la parte superior y salen por la parte inferior.

⁴Es decir, donde se encastran los perfiles aerodinámicos que forman al álabe

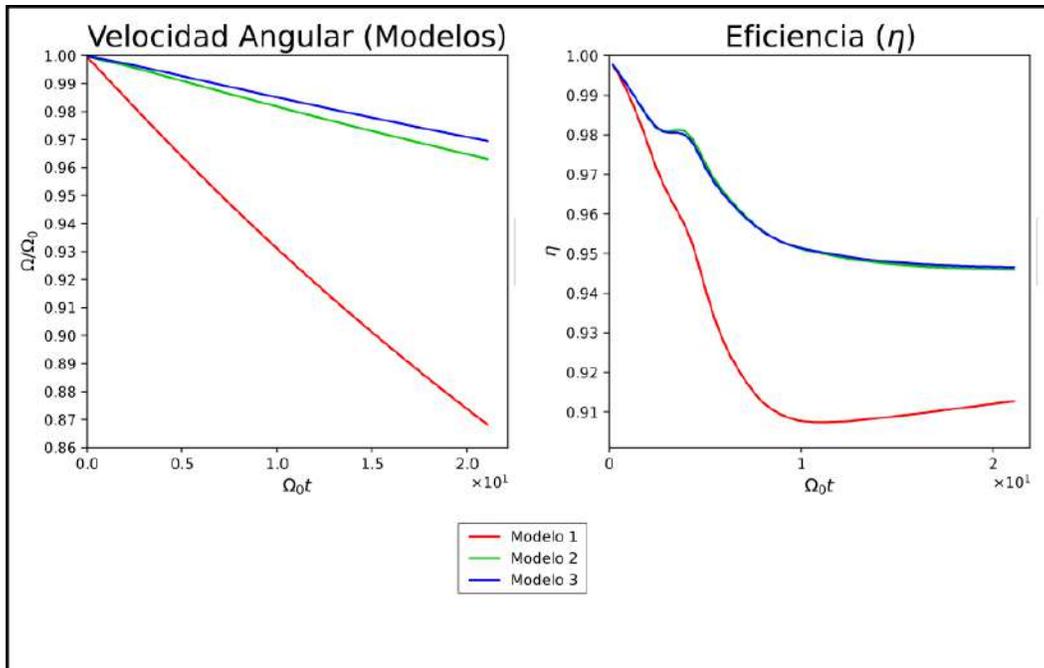


Figura 4.12: Velocidad angular del dispositivo y eficiencia cinética del flujo con los 3 diseños de buje.

de que las turbinas eólicas requieren mallas muy finas para resolver con buena precisión los detalles del flujo a partir de los cuales se determina la potencia de la máquina. Por otro lado, estos modelos ofrecen ciertas ventajas computacionales cuando se consideran procesos transitorios. Por otra parte, los modelos basados en las *ecuaciones aleatorias de Navier-Stokes promediadas* (o RANS por sus siglas en inglés) requieren del desarrollo de ecuaciones promediadas de ensamble, como la ecuación (B.10).

En este trabajo se instrumentaron ambos tipos de modelos (detallados en el Apéndice B). En particular, para el esquema de modelos RANS se utilizaron los modelos $k - \epsilon$ y $k - \omega$ SST. Para los modelos LES se utilizaron los modelos $k - Eqn$ Y Spalart. Los dos modelos fueron probados con el misma malla y condiciones (iniciales y de frontera) en todos los casos. En la Figura 4.13 se comparan el coeficiente de potencia, la velocidad angular y la eficiencia calculados.

Con los modelos $k - \epsilon$ y LES-Spalart se observa que la velocidad angular decae en el tiempo, mientras que con los modelos $k - \omega$ SST y LES- $kEqn$ ésta crece. La diferencia puede llegar a ser del 20% en los instantes finales de la simulación. En los 3 casos la potencia decae de forma prácticamente igual. Sin embargo, con el modelo $k - \omega$ -SST se produce la mayor eficiencia, mientras que con los dos modelos LES el valor correspondiente es prácticamente igual.

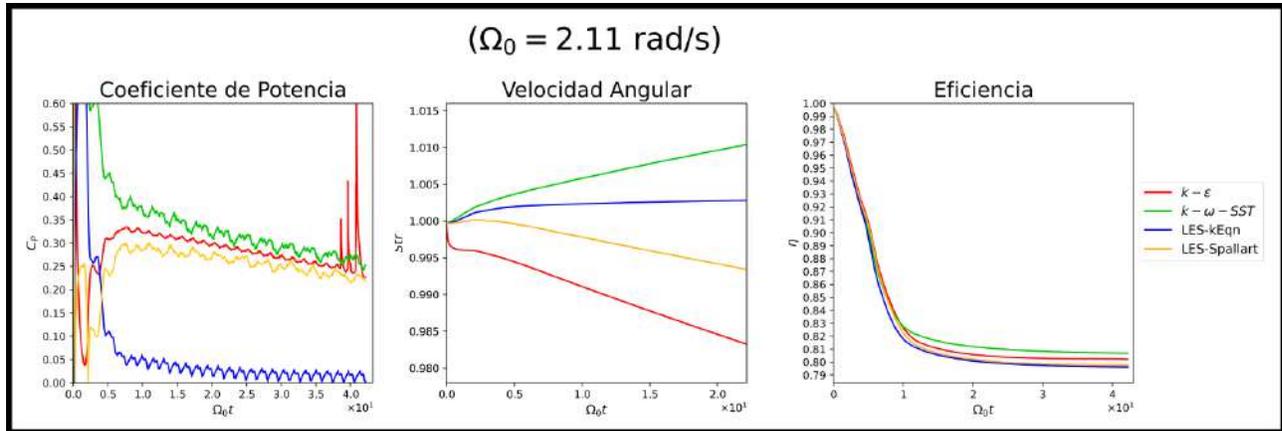


Figura 4.13: Comparación en el coeficiente de potencia, la velocidad angular y la eficiencia y en un generador eólico con diferentes coeficientes de potencia.

El cambio más notable ocurre en la evolución de la potencia. La potencia con el modelo $k - \omega - SST$ es mayor que en todos los demás casos, y decae a un valor dentro del intervalo $0.24 < C_p < 0.3$. Al utilizar el modelo $LES - Spallart$ se tiene una tendencia similar, aunque a una potencia ligeramente menor. Por su lado el modelo $k - \epsilon$ mantiene esta misma tendencia hasta instantes previos a la terminación de la simulación (nótese que en este caso se presentan unos picos muy pronunciados al final de la simulación). Un aspecto importante que debe notarse es que con el modelo $LES - kEqn$ las torcas calculadas son significativamente menores que en el resto de los casos. Los picos que se presentan en las curvas de potencia se deben a efectos transitorios en el flujo, y al hecho de que las torcas que actúan en el generador se calculan con base en los gradientes de presión y de velocidad. Los valores correspondientes oscilan debido a un efectos “Bernoulli”. Asimismo, se observa una tendencia hiperbólica en las envolventes de las oscilaciones, cuya amplitud disminuye progresivamente con el tiempo. Eventualmente, la amplitud de las oscilaciones es mínima en el estado estacionario.

De acuerdo con la literatura disponible,^{72,73,77,83} se sabe que el modelo $k - \epsilon$ falla en presencia de gradientes adversos, tal como ocurre con los perfiles aerodinámicos y demás bordes que conforman al aerogenerador. A consecuencia de ello, se manifiestan los picos pronunciados en la curva del coeficiente de potencia (porque se altera el valor de las torcas calculadas a partir de los gradientes de presión). Este problema no se presenta con el modelo $k - \omega - SST$, donde la curva de potencia es más “estable”. Con el modelo de Spalart-Allmaras se predice mejor la curva de potencia que con el modelo $k - Eqn$. Como se puede ver en la Figura 4.14, las pequeñas diferencias en las características del flujo no permiten distinguir los resultados producidos con los modelos LES y los $RANS$ en esta etapa de la evolución debido

a que la malla no es lo suficientemente fina.

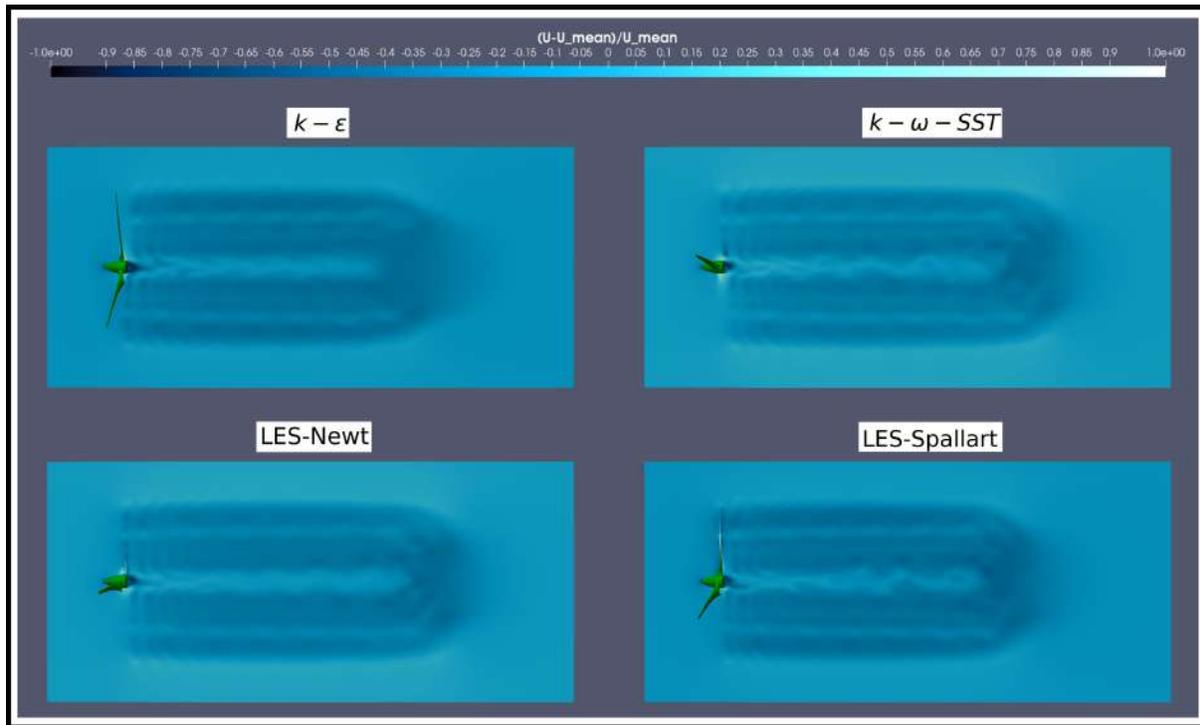


Figura 4.14: Visualización de la rapidez promedio de un perfil uniforme para los diferentes modelos de turbulencia

En conclusión, se optó por utilizar el modelo $k - \omega$ -SST, que produjo resultados superiores a los que entregó el modelo $k - \varepsilon$. No obstante, en la transición a una malla más fina, el modelo LES-Spalart daría mejores resultados.

4.0.5. Efectos de la velocidad angular inicial y la rapidez promedio del flujo incidente

Una cuestión de interés en este estudio es la forma en la que opera el dispositivo al modificar tanto la velocidad angular inicial del generador, como la rapidez promedio del flujo. Para esto se analiza comparativamente el desarrollo del número de Strouhal

$$St = \frac{U_1}{(\Omega_o)_1} = \frac{U_2}{(\Omega_o)_2} \quad (4.3)$$

Se trata de una cuestión relevante porque el álabe fue diseñado para operar con un flujo incidente y una velocidad angular que maximizan la potencia y la eficiencia del aerogenerador.

Adicionalmente, los resultados de esta sección sirven para validar el diseño optimizado del álabe.⁴⁰ En la Figura 4.15 se muestra la evolución de la velocidad angular, la eficiencia y del coeficiente de potencia.

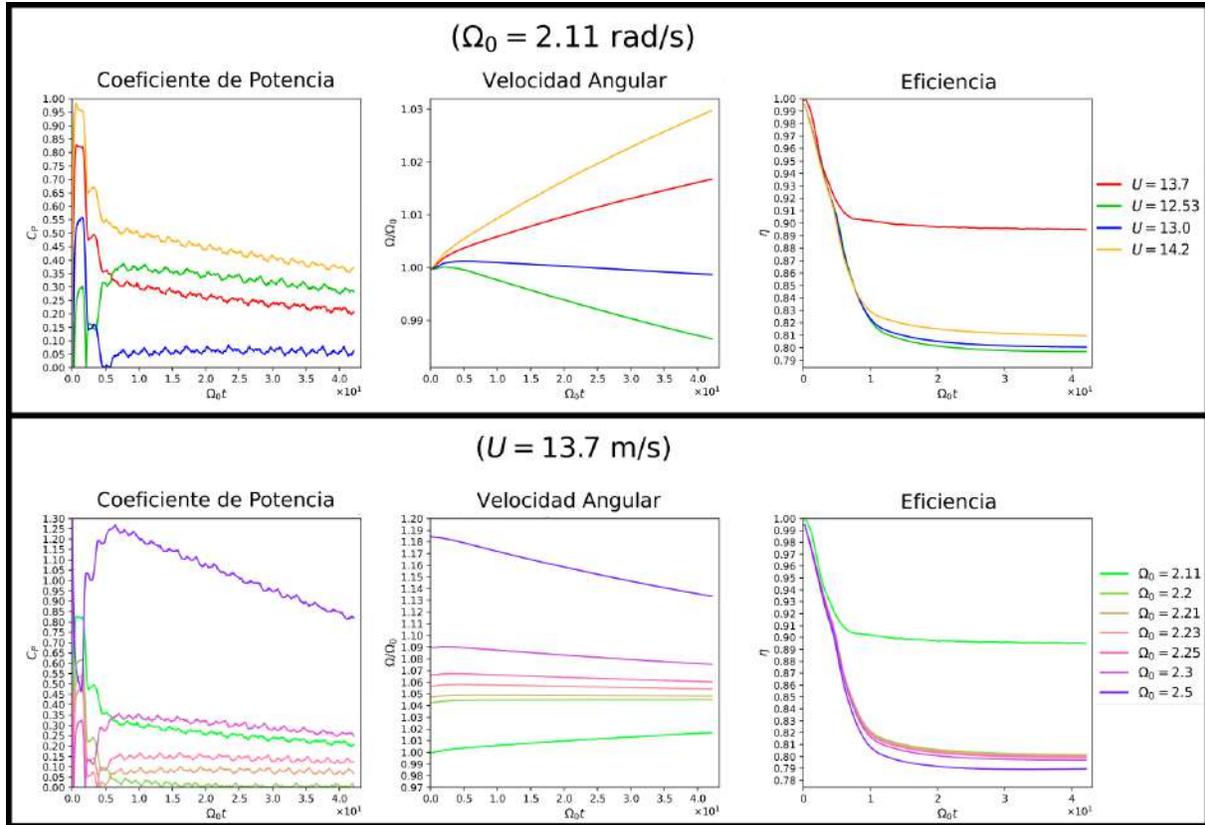


Figura 4.15: Velocidad angular, Eficiencia cinética y Coeficiente de potencia en el generador ante variaciones de la rapidez del flujo promedio y la velocidad angular inicial.

Por su lado, la parte superior de la Figura 4.16 ilustra la evolución del número de Strouhal (con respecto a su valor inicial). En la parte inferior, queda registrada esta misma cantidad y demuestra que se cumple la condición (4.3), es decir, que St se conserva.

El incremento del coeficiente de potencia global depende del incremento en la velocidad angular, cuyo valor aumenta a un ritmo mayor conforme crece la celeridad del viento incidente (Figura 4.15). La tendencia en la velocidad angular con $\Omega_0 = const.$ es monótona, lo cual es consistente con la teoría. Es de notar que la potencia no tiene una tendencia monótona en general, pues para el caso con $U = 12.53 \text{ m/s}$ entrega el segundo coeficiente de potencia más alto. Este resultado es peculiar y puede deberse a la forma en que se calcularon las torcas durante la simulación de acuerdo con la expresión (2.48).

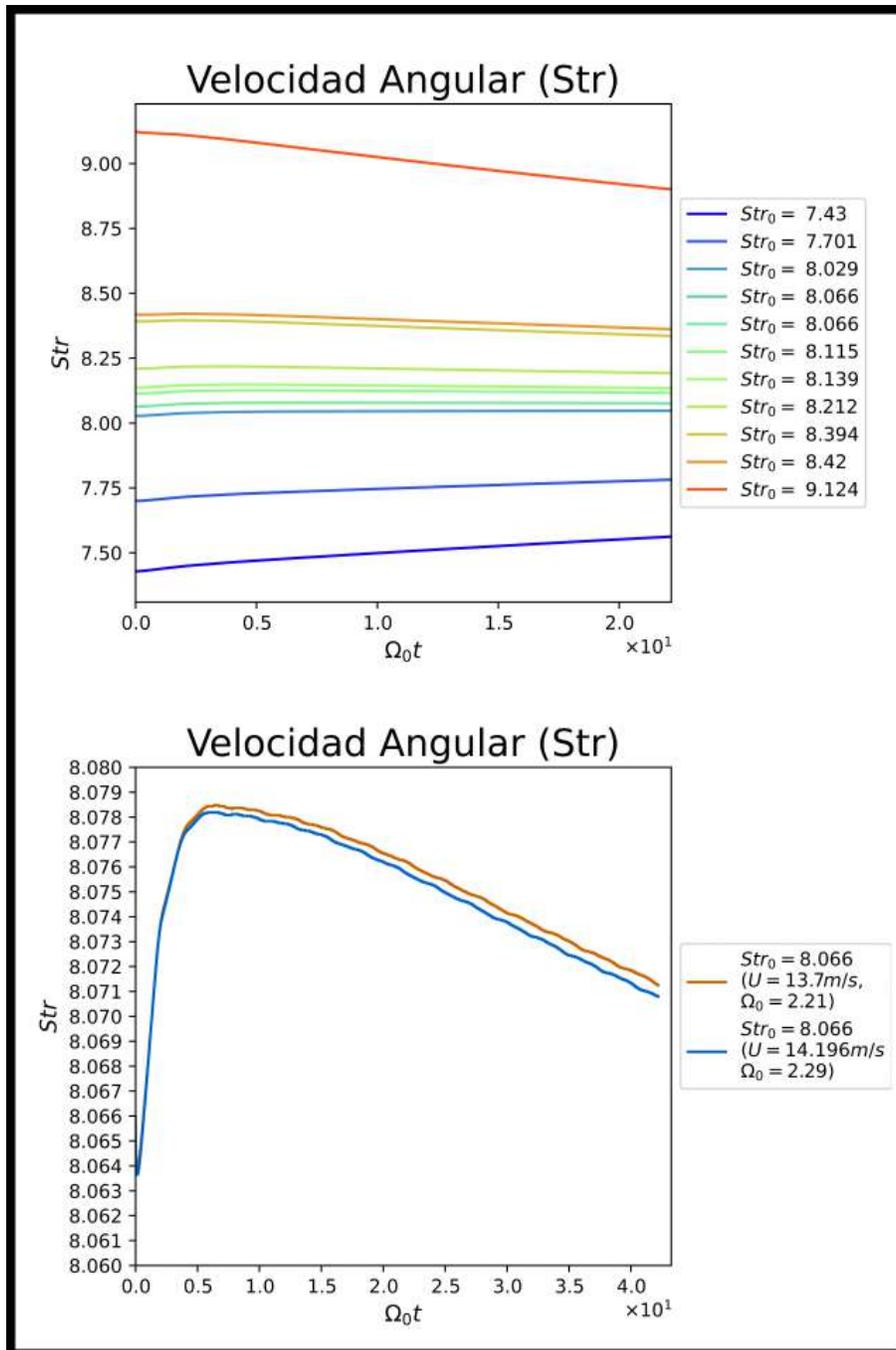


Figura 4.16: Evolución de la velocidad angular ante variaciones del número de Strouhal inicial (Parte superior). En la parte inferior se muestra la evolución para un mismo número de Strouhal pero con valores (U, Ω_0) distintos entre sí.

La eficiencia tampoco tiene una tendencia monótona. Se observa en este caso que con $U = 13.7$ m/s la eficiencia se maximiza y adquiere el valor 0.9. La importancia de este resultado

estriva en que se refiere precisamente de la rapidez del diseño del álabe obtenida en.⁴⁰ La eficiencia decae alrededor de 10% en relación con los demás casos. Esto es inconveniente porque implica que el flujo viento en la parte inferior de la máquina tiene menor energía cinética, afectando a la potencia que puedan generar los generadores localizados corriente abajo.

Asimismo, cuando el valor de la velocidad angular inicial es $\Omega_0 \leq 2.23$ rad/s, la rotación del generador tiende a incrementarse con el tiempo. Lo opuesto sucede cuando su valor es $\Omega_0 \geq 2.25$ rad/s. También se observa que la magnitud con la que cambia $\Omega(t)$ depende de la condición inicial, y que hay una tendencia a que $\Omega(t) \mapsto C$, con $1.06\Omega_0 < C < 1.07\Omega_0$. Por lo tanto cabe la conjetura que este límite C existe y es único. Las curvas y la teoría respaldan esta conjetura pero se requiere ampliar el intervalo temporal de la simulación para explorar el respectivo valor asintótico.

Por su parte la potencia tiene la misma tendencia hiperbólica cuando varía la velocidad angular. En este caso, cuando $\Omega_0 = 2.5$ rad/s tanto su valor como su decaimiento son mayores. En contraste, con $\Omega_0 = 2.3$ rad/s la potencia es ligeramente mayor a la de diseño, aunque ambas tienden a un valor cercano a $C_P = 0.3$. En los demás casos esta resulta ser menor. Se observa nuevamente que con la velocidad angular de diseño $\Omega_0 = 2.11$ rad/s el valor asintótico de la eficiencia es mayor en al menos un 5% con respecto a otras velocidades angulares iniciales.

Finalmente, la Figura 4.16 indica que el St también tiene una evolución monótona con respecto a su valor inicial. La tendencia es positiva para valores $St \leq 8.139$ y negativa para $8.212 \leq St$. En la parte interior de la Figura queda ilustrados dos comportamientos ligeramente distintos para dos casos de (U, Ω_0) con el mismo número de Strouhal. El orden de magnitud de esta diferencia es menor a 10^{-3} , por lo que esto se atribuye a un error de carácter numérico. Este resultado permite concluir que, en los intervalos considerados, puede analizarse la física de los generadores con base en la conservación del número de Strouhal. Señalo finalmente, que estos resultados validan la tesis de D. Núñez⁴⁰ puesto que el diseño optimizado del álabe maximiza la eficiencia durante la operación en un chorro de baja altitud (LLJ).

4.0.6. Desempeño de un generador aislado ante diferentes perfiles de velocidad

En esta sección, H denota a la altura del buje con respecto a nivel de suelo, y z denota a la ubicación del pico de velocidades⁵. Se muestran los resultados para los casos siguientes:

- Perfil de velocidad promedio sintético de laboratorio como en los casos anteriores ($U = 13.7$ m/s).
- Chorro de baja altitud (con el perfil mostrado en la Figura 2.5) cuando el pico de velocidad incide sobre la punta inferior del generador. La expresión correspondiente es

$$\frac{z - H}{R} = -1 \quad (4.4)$$

- LLJ cuando el pico incide sobre el buje del generador

$$\frac{z - H}{R} = 0 \quad (4.5)$$

- Perfil de una *capa límite atmosférica terrestre* (ABL por sus siglas en inglés), cuya expresión formal es (2.89).

La rapidez del flujo en los diferentes perfiles de velocidad se ve con toda claridad en la Figura 4.17, a continuación.

Con un perfil de velocidad uniforme (la rapidez dada en la Tabla 2.2) se genera una estela simétrica con respecto al eje del rotor. Esto contrasta con el efecto producido por el chorro incidiendo sobre el generador, en el que la simetría se pierde debido a la aparición de gradientes verticales en la velocidad, que eventualmente inducen la “ruptura” de la estela. En el caso del flujo ABL, la pérdida de celeridad con respecto al valor promedio es mucho menor, mientras que la zona de desprendimiento se mezcla más activamente detrás de los álabes. La asimetría es más notoria que en presencia de un LLJ.

En las Figuras 4.18, 4.19 se muestran las componentes radial y azimutal del campo de velocidad, tal como describe la ecuación (3.2).

⁵Hay un ligero cambio de notación, ya que anteriormente z indicaba la coordenada vertical en un sistema cartesiano. A menos que se indique lo contrario, se debe entender a z en las ecuaciones (4.4) y (4.5) como se describe en el presente contexto.

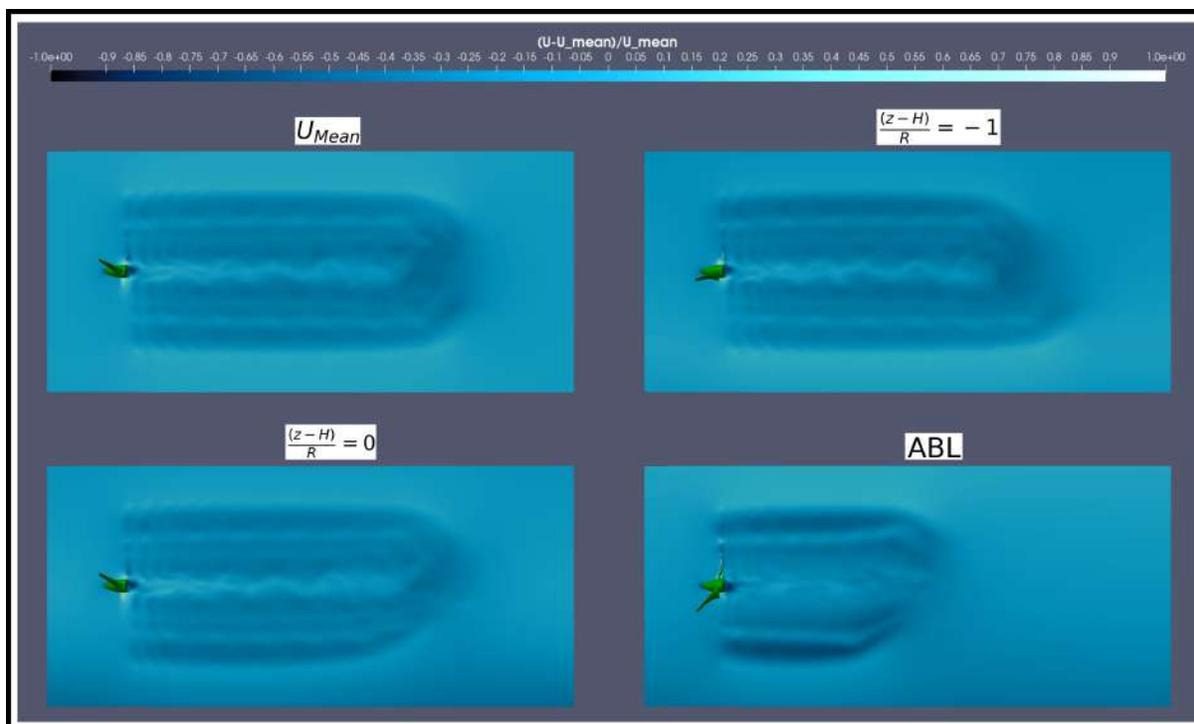


Figura 4.17: Comparación de la rapidez del flujo para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

Para los 4 casos la componente radial de la velocidad es más notoria cerca de la punta de los álabes (Figura 4.18).⁶

En general, la componente radial deja de ser despreciable a una distancia $\Delta \approx 3/5R$. Este efecto se mantiene a través de la primera banda, cambia de signo en la siguiente banda; a partir de ahí oscila periódicamente. Esto indica que la estela se mezcla con el flujo externo, no perturbado, que se encuentra fuera de la envolvente global de la estela. En el caso de flujo ABL, el desprendimiento del flujo es más tardío, y se produce un mayor mezclamiento en comparación con los otros 3 casos. Por otro lado, la región posterior a la zona de desprendimiento se mantiene la componente radial, aunque cambia en función de la posición axial. Esto se debe al predominio de los vórtices asociados al desprendimiento del flujo. El efecto se nota más con un flujo ABL que entre los otros 3 casos (donde es muy similar).

En la Figura 4.19 se ilustra la componente azimutal de la velocidad. Se advierte un cambio

⁶En el plano mostrado, la velocidad radial es positiva (color morado) en la mitad superior cuando la velocidad tiene una componente vertical hacia arriba; lo opuesto se verifica con los colores verdes. Estos papeles se invierten en la mitad inferior; por ejemplo, el color morado indica que el vector velocidad tiene una componente radial hacia abajo.

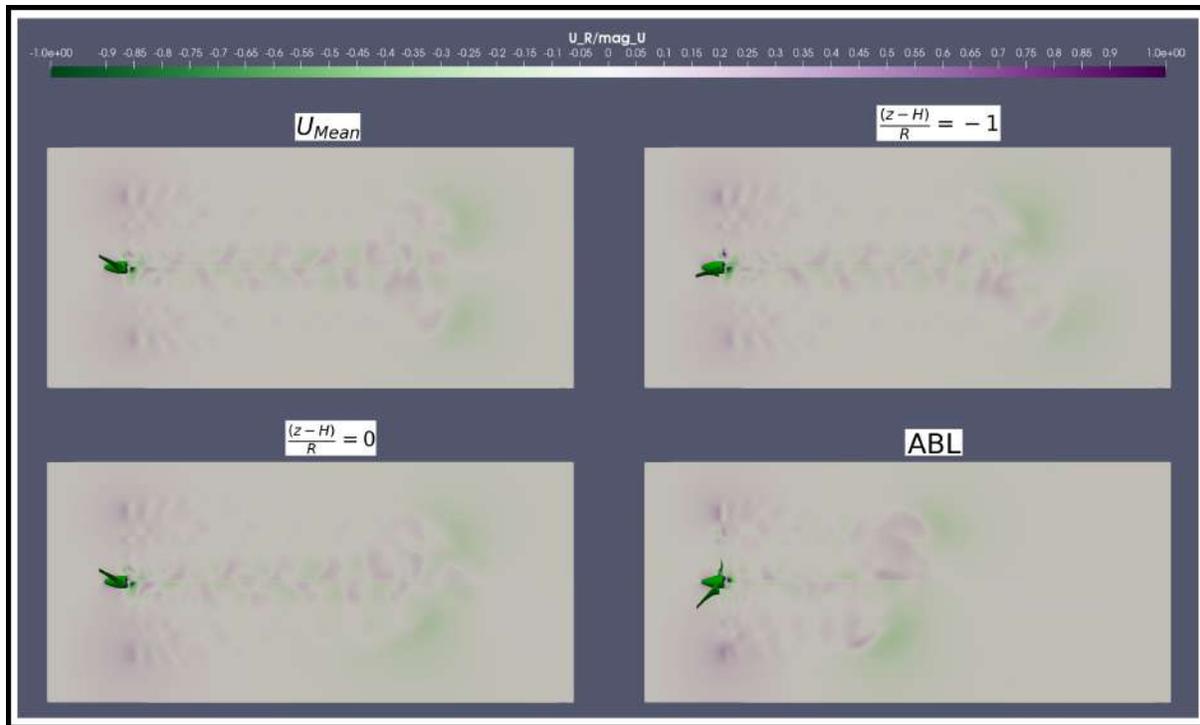


Figura 4.18: Comparación de la componente radial de la velocidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

de signo en función del radio, que es similar en el flujo promedio y en el chorro de baja altitud. Este comportamiento es distinto en el caso del perfil ABL, pues la dirección en la que rota el flujo es congruente con la rotación del generador, por lo que abarca una mayor distancia radial (desde la punta), mientras que en la región de desprendimiento se observa que el flujo tiende a rotar en sentido contrario en mayor medida que en los otros 3 casos. Además, el perfil ABL ostenta una asimetría en esta componente de velocidad, causada por el gradiente de velocidades y la rotación de la máquina. Esta asimetría es más marcada en el chorro que incide sobre el buje ($((z - H)/R = 0)$) que cuando incide sobre la punta. Sin embargo, esta es menos pronunciada que con el perfil ABL y se acerca al de un flujo uniforme.

En las Figuras 4.20-4.22 se muestran las 3 componentes de vorticidad para los 4 perfiles de interés.

Por tratarse de una estructura de flujo helicoidal, la componente radial en la mitad superior indica una rotación que entra en el plano por lado derecho, que luego sale por el lado izquierdo del plano (color naranja y lo contrario se indica con el color morado). La componente axial indica un giro que entra al plano por la parte superior, que luego sale de la hoja hacia el

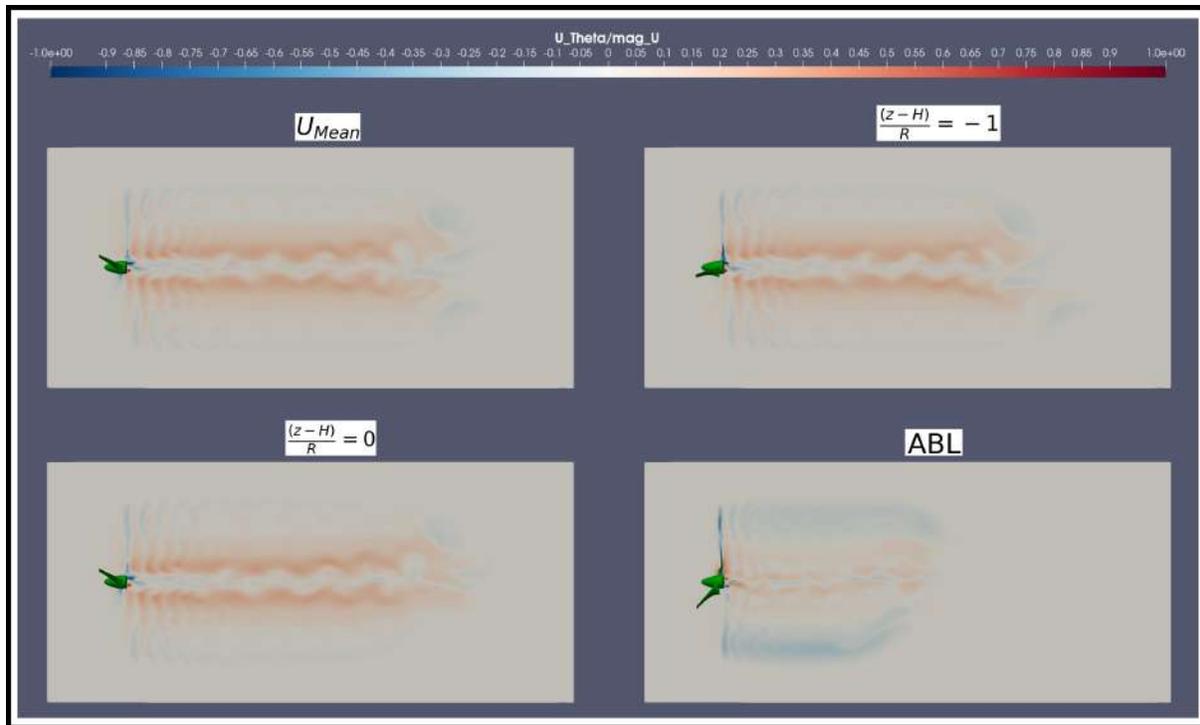


Figura 4.19: Comparación de la componente azimutal de la velocidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

observador en la parte inferior (color verde, y lo opuesto indicado en color lila).

Las figuras 4.20-4.22 muestran que la vorticidad tiene un comportamiento muy similar en el caso del LLJ y del perfil uniforme. Con el perfil ABL las 3 direcciones de la vorticidad son muy distintas respecto a los otros casos.

Primero se analiza la componente radial de la vorticidad en la Figura 4.20.

Inicialmente existe una componente dominante de la vorticidad que forma bandas discretas que alternan signo, y cuya magnitud disminuye a medida que se aleja del generador, en la raíz de los álabes. En la región posterior del buje la magnitud se intensifica por las razones discutidas con anterioridad, mientras que en la región de desprendimiento ésta va alternando su comportamiento.

De la Figura 4.21 se aprecian las bandas de vorticidad. Cuando el chorro incide en la punta, la banda en la mitad inferior recorre una distancia mayor que en la mitda superior y, en consecuencia, pierde la simetría. Cuando el chorro incide en el centro se produce el efecto contrario. Fuera de esa asimetría, la estructura de las bandas y los vórtices formados por el

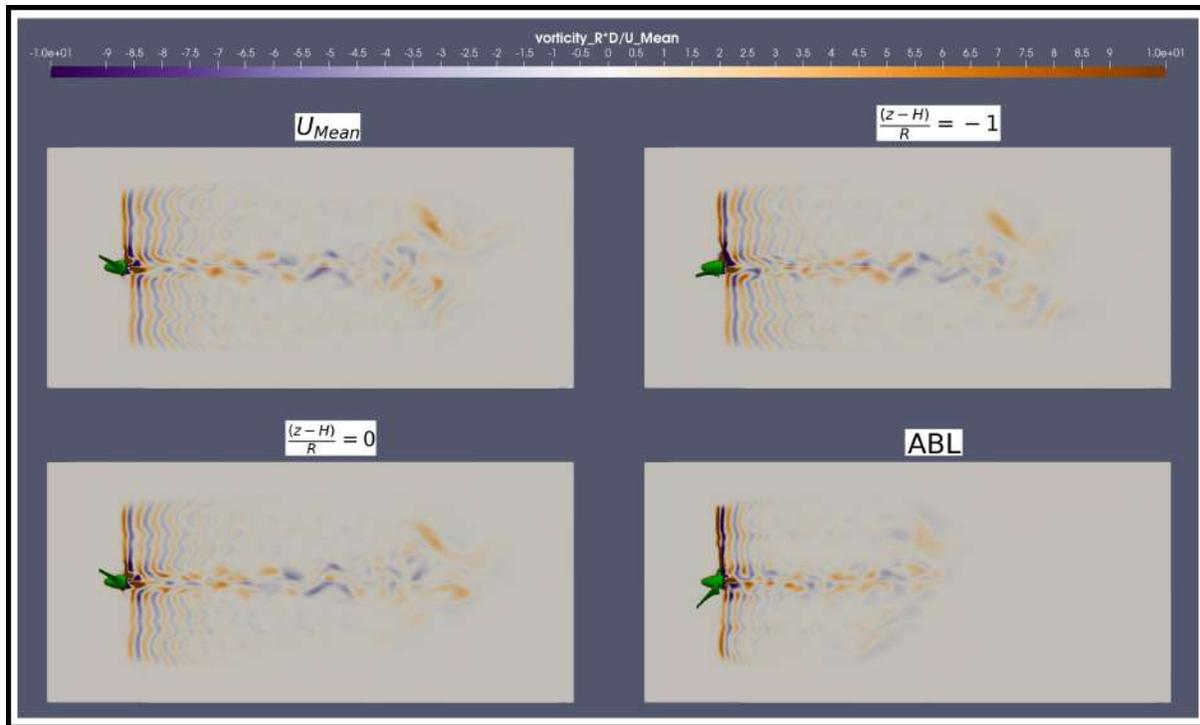


Figura 4.20: Comparación de la componente radial de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

desprendimiento de la capa son muy similares entre sí en los 3 casos.

En presencia del flujo ABL la intensidad de esta componente de la vorticidad es mayor que en los 3 casos anteriores. Las bandas de vorticidad tienen una estructura similar cerca de la punta (aunque con un grosor distinto) que cambia radicalmente en la zona de desprendimiento. Se observa que la vorticidad abarca una mayor distancia radial en la región donde tiene un sentido antihorario. Este es un resultado esperado puesto que el generador fue diseñado para operar en un LLJ con una celeridad mayor al de una ABL.

Por último, en la Figura 4.22 se observa que la vorticidad también se organiza en “bandas”, y que mantiene el signo correspondiente a lo largo de la estela. Este es un comportamiento opuesto al que manifiesta la componente radial. En la región de la punta, esta componente revela nuevamente que el generador induce al flujo a desviarse, alejándolo de la máquina. Puede notarse, asimismo, que la magnitud crece significativamente en la región de desprendimiento del flujo. Justo en la región posterior del buje la magnitud alcanza su valor máximo y se producen cambios significativos en la dirección de giro en el flujo. En cambio, en la región de la calle de Von Kármán, se observa que al inicio la vorticidad se propaga manteniendo

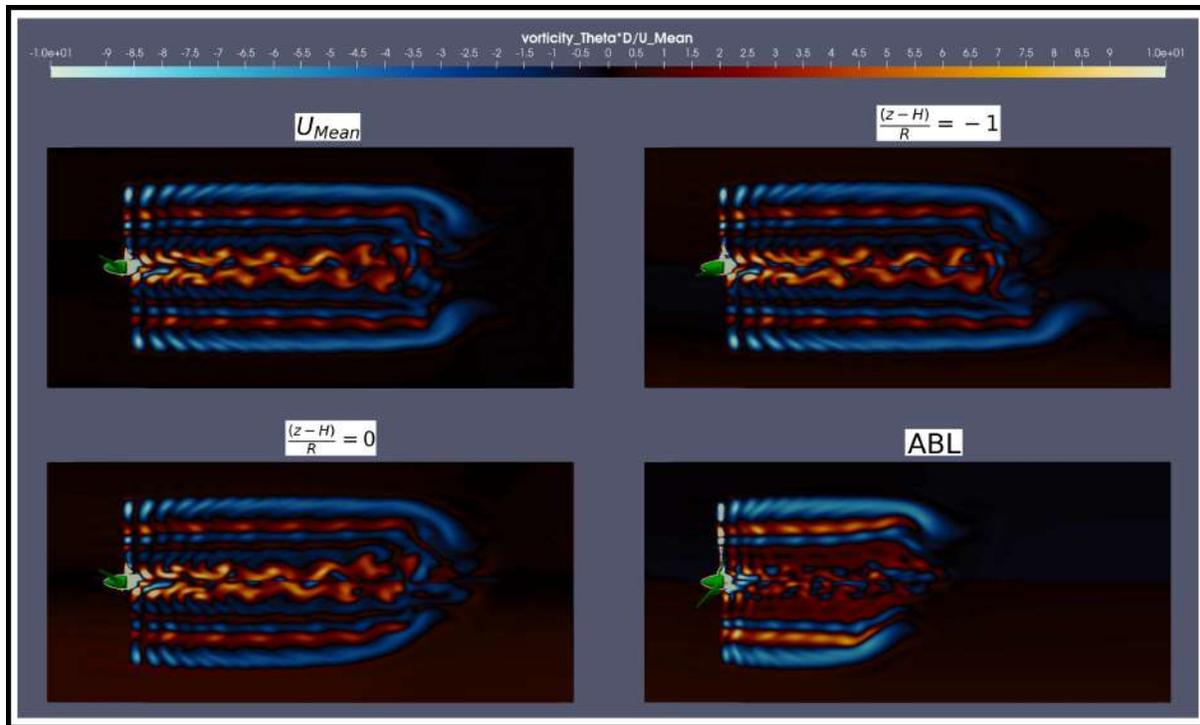


Figura 4.21: Comparación de la componente azimutal de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

un giro esencialmente positivo y que en las regiones de signo negativo se atenúan progresivamente (en tanto que la dirección ζ crece). En general, la componente axial de la vorticidad mantiene una estructura semejante en los 4 casos.

A continuación, se considera el análisis cuantitativo con base en el procedimiento descrito en la Sección 3.12. Las Figuras 4.23 - 4.32 muestran la evolución temporal de los campos previamente descritos, en diferentes planos ζ . Los valores están normalizadas con los parámetros U_{Mean} , $D = 2R$ y p_0 resumidos en la Tabla 2.2.

Las Figuras 4.23 y 4.24 indican que la rapidez del flujo dentro de la estela decae un 16% con el flujo promedio y con el LLJ (incidiendo sobre el perfil), y un 18% con el perfil ABL. Sobre un plano corriente arriba (curva roja), la rapidez del flujo no se ve perturbada por la estela (Figura 4.23). Sin embargo, en un plano subsiguiente una ligera disminución y alcanza un valor promedio ligeramente inferior al promedio.

En otros planos localizados corriente abajo la rapidez promedio del flujo disminuye (en concordancia con la visualización 4.17). En las regiones próximas al generador hay una fuerte

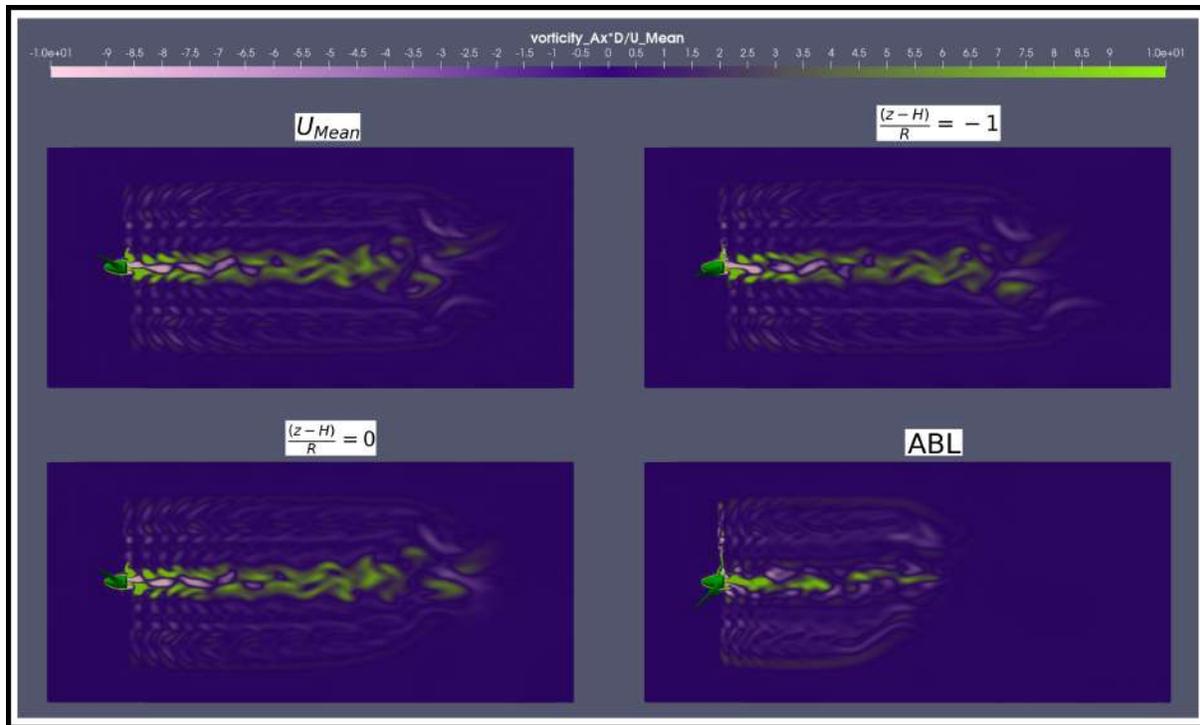


Figura 4.22: Comparación de la componente axial de la vorticidad para los diferentes perfiles de velocidad utilizadas.

influencia del flujo que proviene de la región de la punta, donde la velocidad de rotación predomina. A partir de cierta distancia (las curvas en color verde) la celeridad se reduce a valores cercanos en los diferentes planos, y se observa un desfase entre ellos debido a causa del tiempo que le toma a la estela alcanzarlos. En cambio, la Figura 4.24 muestra que el campo de velocidades se encuentra distribuido de forma homogénea en todo el dominio. A medida que avanza el tiempo, la rapidez promedio evoluciona progresivamente y adquiere la forma de una distribución de campana invertida. La distribución espacial y evolución temporal de los otros campos descritos siguen un patrón similar. Nuevamente, esto se debe a que los efectos advectivos son dominantes.

La presión, por su parte, adopta una distribución espacial similar a la reportada en la literatura^{1,2} (Figuras 4.25 y 4.26). Tras el aumento de la presión sigue una caída súbita en $\zeta = 0$ causada por el cuerpo del generador. La caída de presión es menor con el perfil logarítmico ABL.

Con respecto a la energía cinética turbulenta, k_T , cabe observar que el flujo uniforme es el que produce el menor valor (Figura 4.27). El valor (normalizado) de referencia es 4×10^{-3}

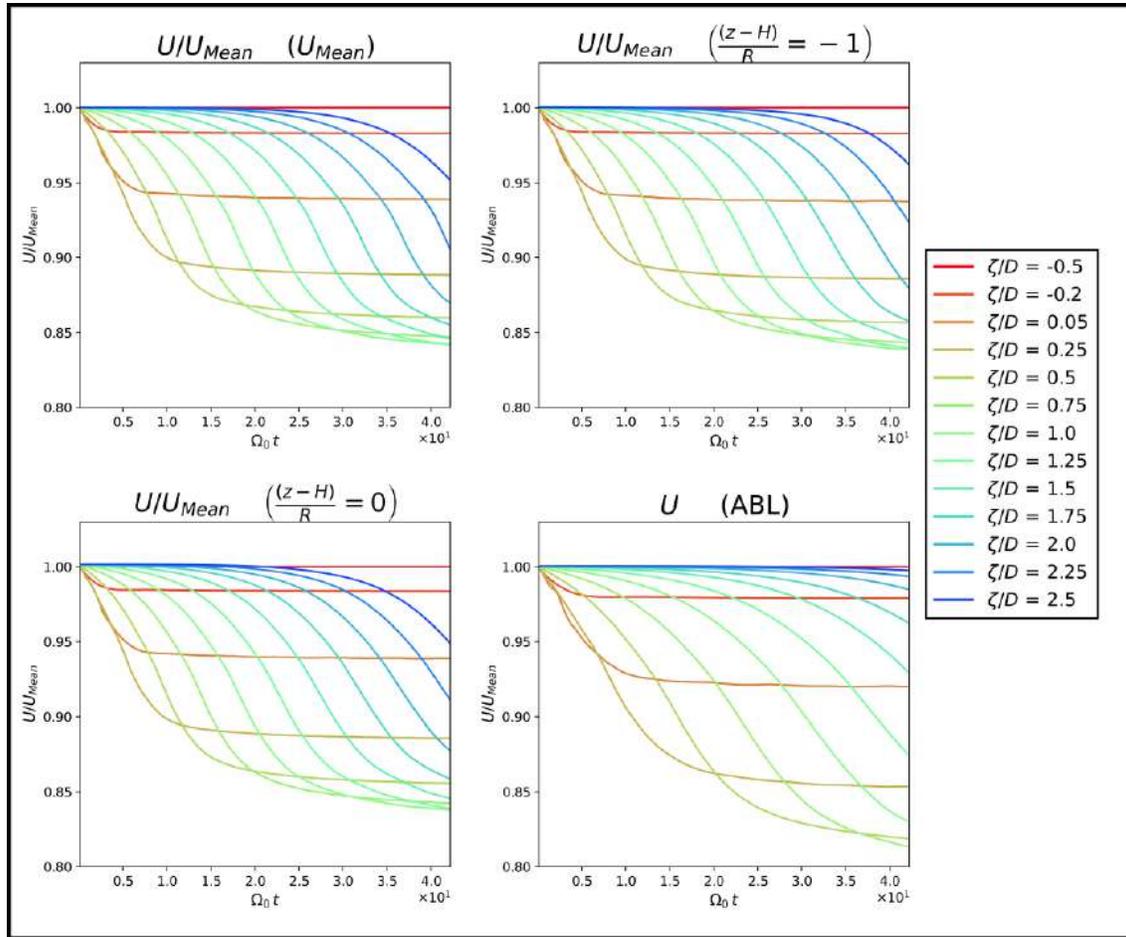


Figura 4.23: Evolución temporal de la rapidez media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador. Se muestran los casos para los 4 perfiles de velocidad utilizados

en un plano alejado corriente arriba. En el caso del LLJ, k_T tiende a un valor ligeramente mayor con ambas incidencias, mientras que en la capa límite atmosférica este valor crece hasta 18×10^{-3} . Esto revela que este perfil tiende a inducir mayor turbulencia. Además, la energía cinética turbulenta es mayor en la parte posterior del generador, en todos los casos.

Como puede apreciarse en la Figura 4.28, la distribución de equilibrio de k_T cambia significativamente en los 4 casos. Por ejemplo, en un flujo uniforme k_T disminuye progresivamente con la distancia ζ en toda la estela. En cambio, en un perfil incidido en la punta, esta disminuye a un valor que es mayor (en promedio) dentro de la estela. Posiblemente el responsable de dicho comportamiento sea el gradiente de velocidades inducido en el flujo. Si el chorro incide en el centro se observa que k_T es ligeramente mayor lo que provoca una estela más turbulenta. El perfil de capa límite atmosférica muestra una variación más pronunciada.

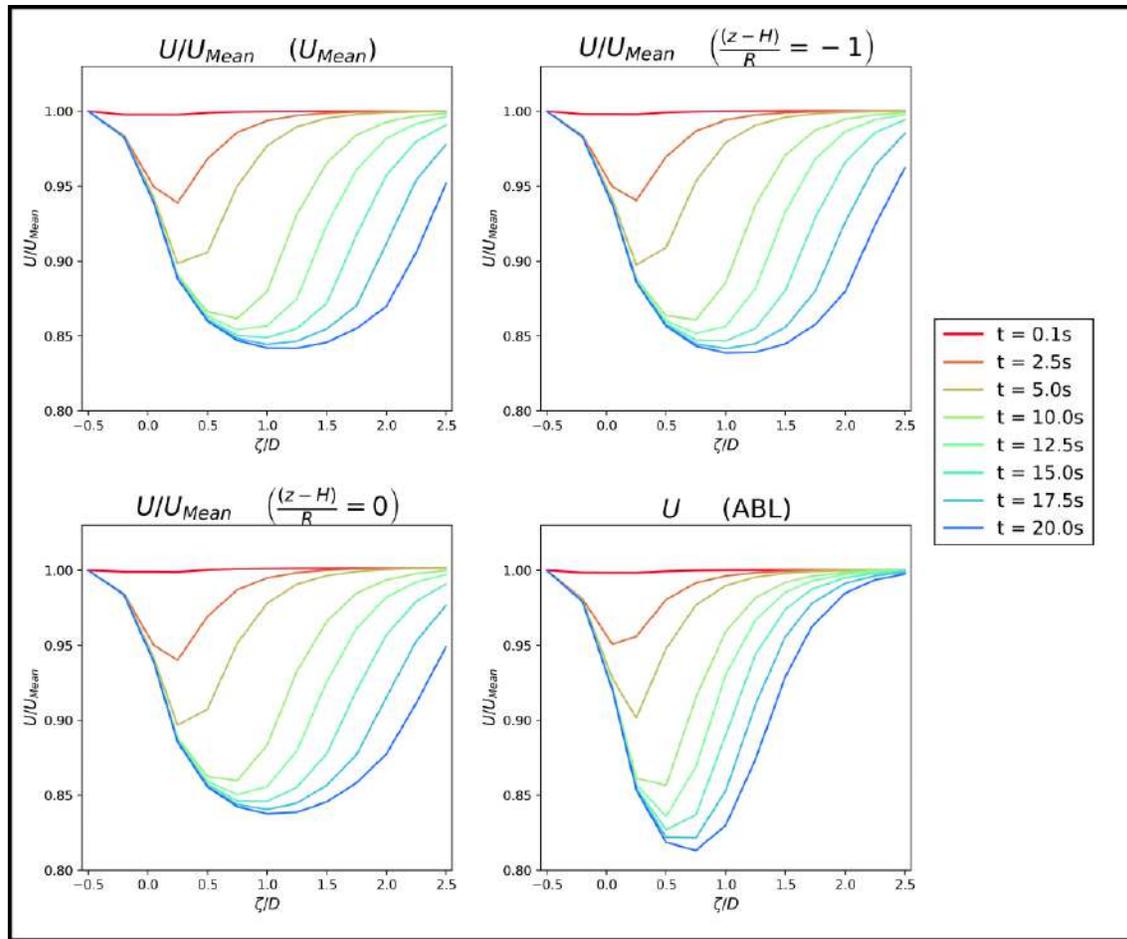


Figura 4.24: Variación espacial de la rapidez media del flujo en instantes de tiempo específicos. Se muestran los casos para los 4 perfiles de velocidad utilizados

Tanto su valor mínimo como el máximo son mayores y la tendencia a la distribución final sucede más rápidamente que en los otros casos. Como cabe esperara, k_T tiene la misma distribución que la rapidez (Figuras 4.29 y 4.30). En general, la energía cinética disminuye un 25 – 30 % en la estela, con respecto al flujo incidente. Esta disminución es menor en un flujo uniforme y mayor en la capa límite atmosférica.

Finalmente, las 4.31 y 4.32 revelan que el valor de la enstrofia es mucho mayor en el plano localizado inmediatamente detrás del generador. La forma de la distribución correspondiente demuestra que la contribución de la región cercana a los álabes, los efectos de punta y la región de circulación, son muy relevantes para el flujo en la región próxima.

Nuevamente, el perfil de velocidades uniforme es el que presenta menor enstrofia. Nóteses que cuando el chorro incide directamente sobre el buje, la enstrofia aumenta ligeramente y se

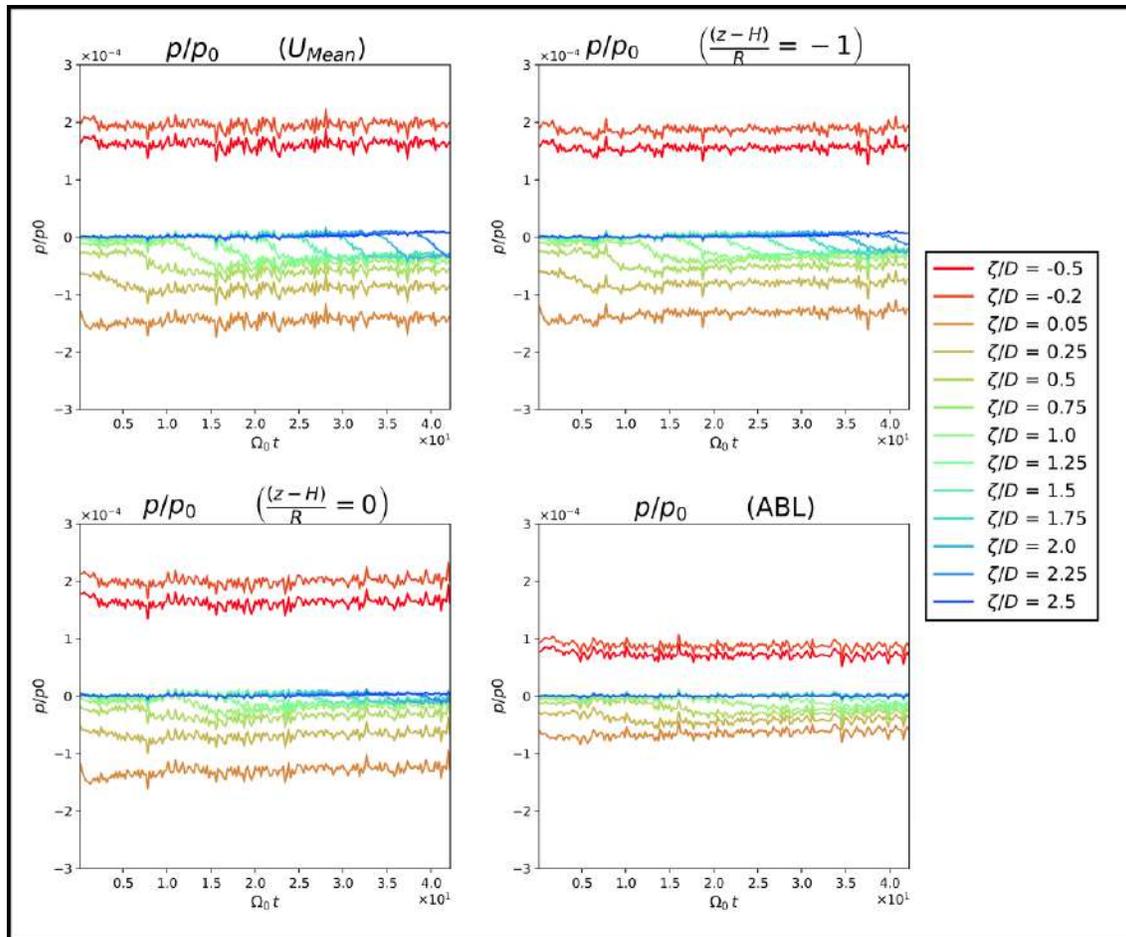


Figura 4.25: Evolución temporal de la presión media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación de los generadores.

producen diferencias en las amplitudes alrededor del valor promedio. El valor y crecimiento de la enstrofia aumenta, en parte, gracias al perfil de velocidades. En el caso del LLJ el flujo primero aumenta hasta alcanzar un pico y luego disminuye a un valor uniforme. Esto hace que la vorticidad se mitigue y en consecuencia el total sea menor al de una capa límite.

Un parámetro de suma importancia es la potencia de la máquina. La Figura 4.33 ilustra las curvas de potencia, de velocidad angular y de eficiencia.

Se ve con claridad que la potencia en presencia del perfil uniforme y del chorro incidiendo sobre el buje es mayor que en los otros casos. Su valor se acerca lentamente a $C_P = 0.3$. En el chorro las oscilaciones son muy grandes en comparación con el flujo uniforme, pues conforme rota el generador pasa por regiones donde el flujo cambia de celeridad, lo que promueve cambios importantes en las presiones. Estas se hacen más pronunciadas en el caso $z = H - R$

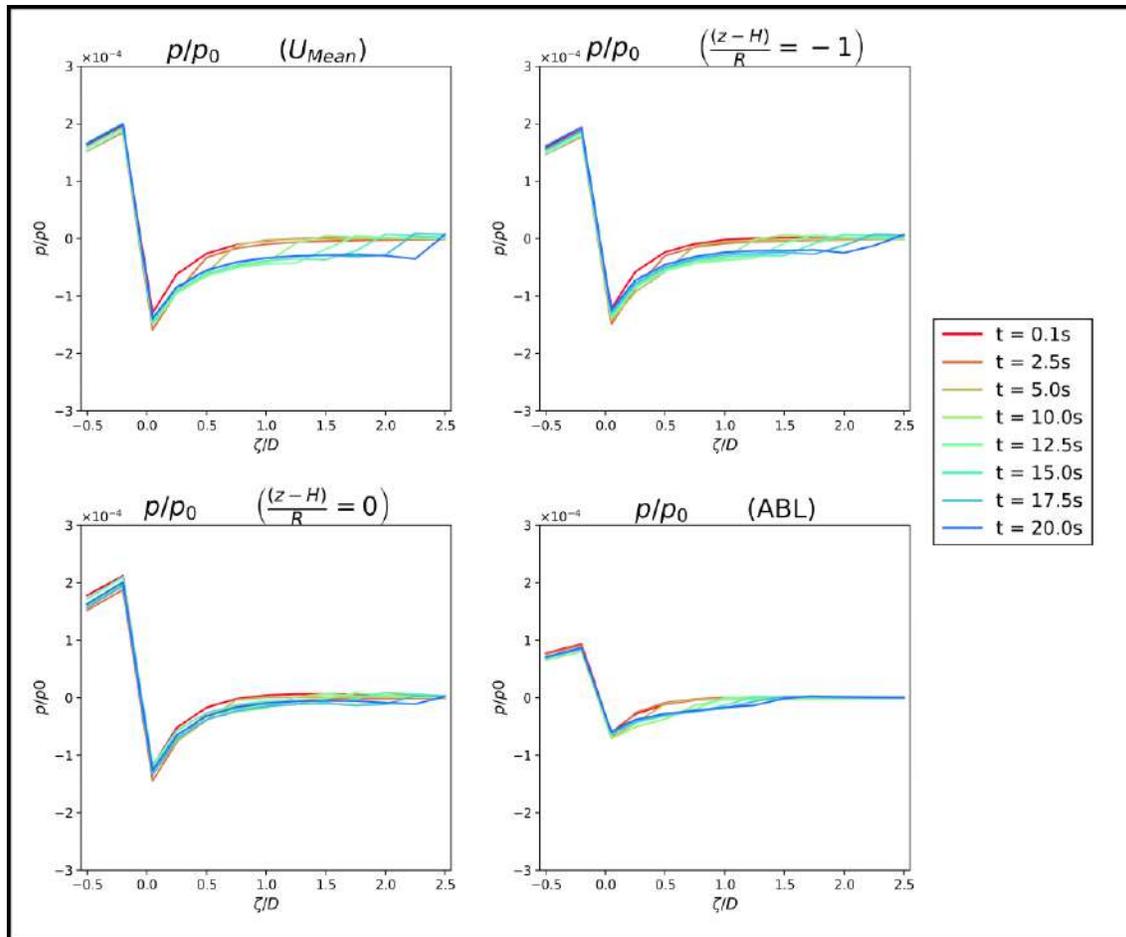


Figura 4.26: Variación espacial de la presión media en instantes de tiempo específicos

donde, además, se observa que el coeficiente de potencia tiende a un valor menor. Con el perfil ABL la potencia decae a 10 % y no se producen oscilaciones bruscas. El conjunto de resultados son congruentes con lo esperado.

La Figura 4.33 sugiere que la velocidad angular crece 2 % con el perfil uniforme y el LLJ, teniendo el mayor crecimiento en $z = H$. Cuando el chorro incide sobre la punta, el crecimiento no llega al 1 %, tal como corresponde de acuerdo con el valor de diseño. En la capa límite atmosférica, la velocidad angular disminuye, pues el generador está expuesto a un perfil de velocidades con celeridad promedio menor.

En relación con la operación de un generador aislado, cabe comentar que la eficiencia es mayor con el flujo uniforme pero los papeles de incidencia del chorro se invierten. Es decir, cuando el chorro incide sobre la punta, la eficiencia del chorro aumenta ligeramente en

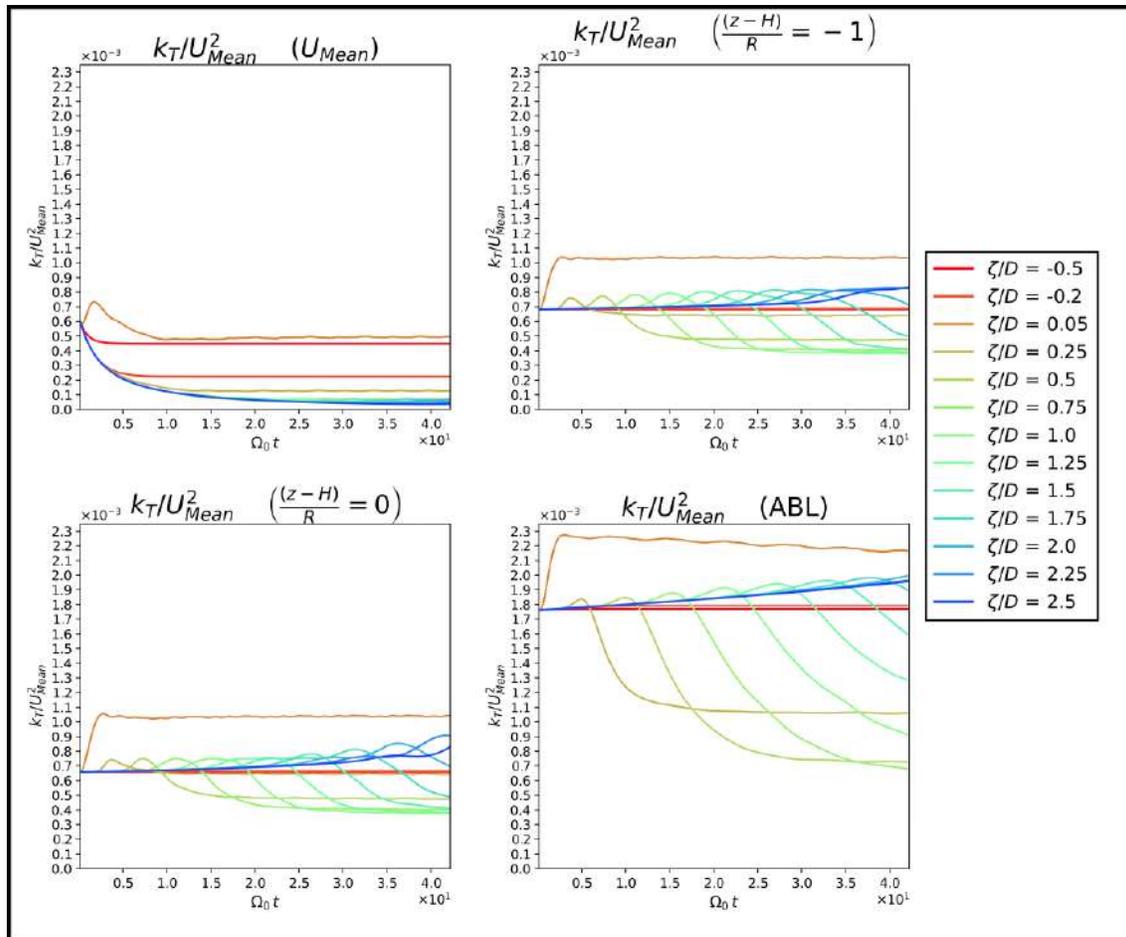


Figura 4.27: Evolución temporal de la energía cinética turbulenta media del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.

comparación con el caso de incidencia sobre el buje. En un perfil ABL esta eficiencia cae 5 %.

4.0.7. Desempeño de dos generadores alineados.

La operación conjunta de dos aerogeneradores (alineados a lo largo del eje de rotación) tiene una relevancia especial para el diseño de arreglos. El objetivo de dichos arreglos es que los generadores operen con la mayor eficiencia posible, a pesar del acoplamiento dinámico que se produce entre ellos. Este estudio se focaliza en un arreglo de dos generadores alineados con respecto a sus respectivos ejes de rotación.

La Figura 4.34 muestra la configuración considerada, en la que los generadores están loca-

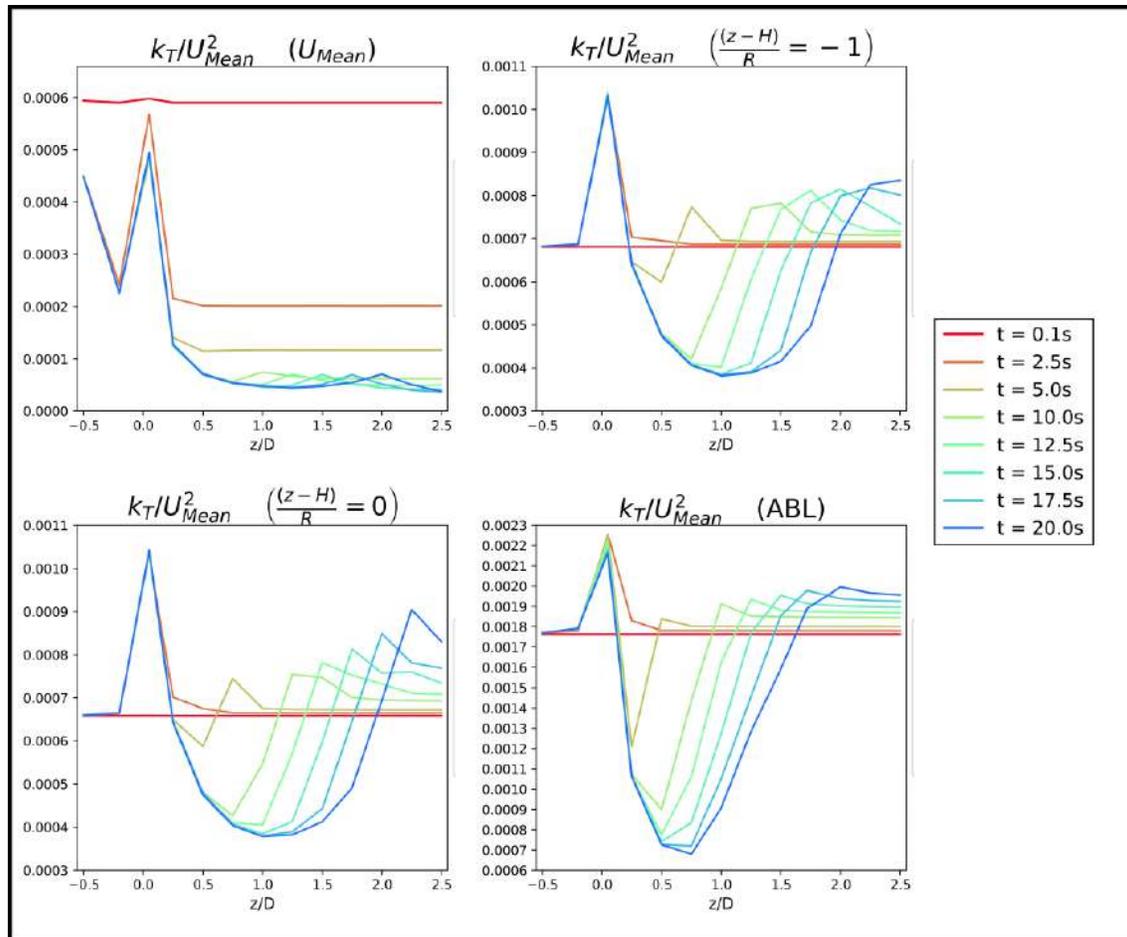


Figura 4.28: Variación espacial de la energía cinética turbulenta media del flujo en instantes de tiempo específicos

lizados a una distancia de $2R = 100$ m. Se dio prioridad a esta disposición por tratarse de un caso severo en el que la interacción es significativamente elevada. Otras configuraciones están fuera del alcance de la tesis y se proponen como trabajo futuro.⁷

Como característica prominente de la interacción aerodinámica entre máquinas se observa el marcado cambio en la estela corriente abajo del segundo generador. La evolución temporal en la celeridad del flujo en el caso de un perfil de velocidades uniforme con dos generadores se ve con mayor detalle en las Figuras 4.35 - 4.36. En ellas se muestran los resultados para 6 tiempos significativos en los planos YZ y ZX.

Como indican las Figuras 4.35 - 4.36, inicialmente ($t = 0.1$) los campos se encuentran en un

⁷Otra razón por la cual se prefirió hacer un estudio con diferentes perfiles de velocidad en lugar de diferentes arreglos espaciales, es el elevado costo computacional asociado al segundo caso.

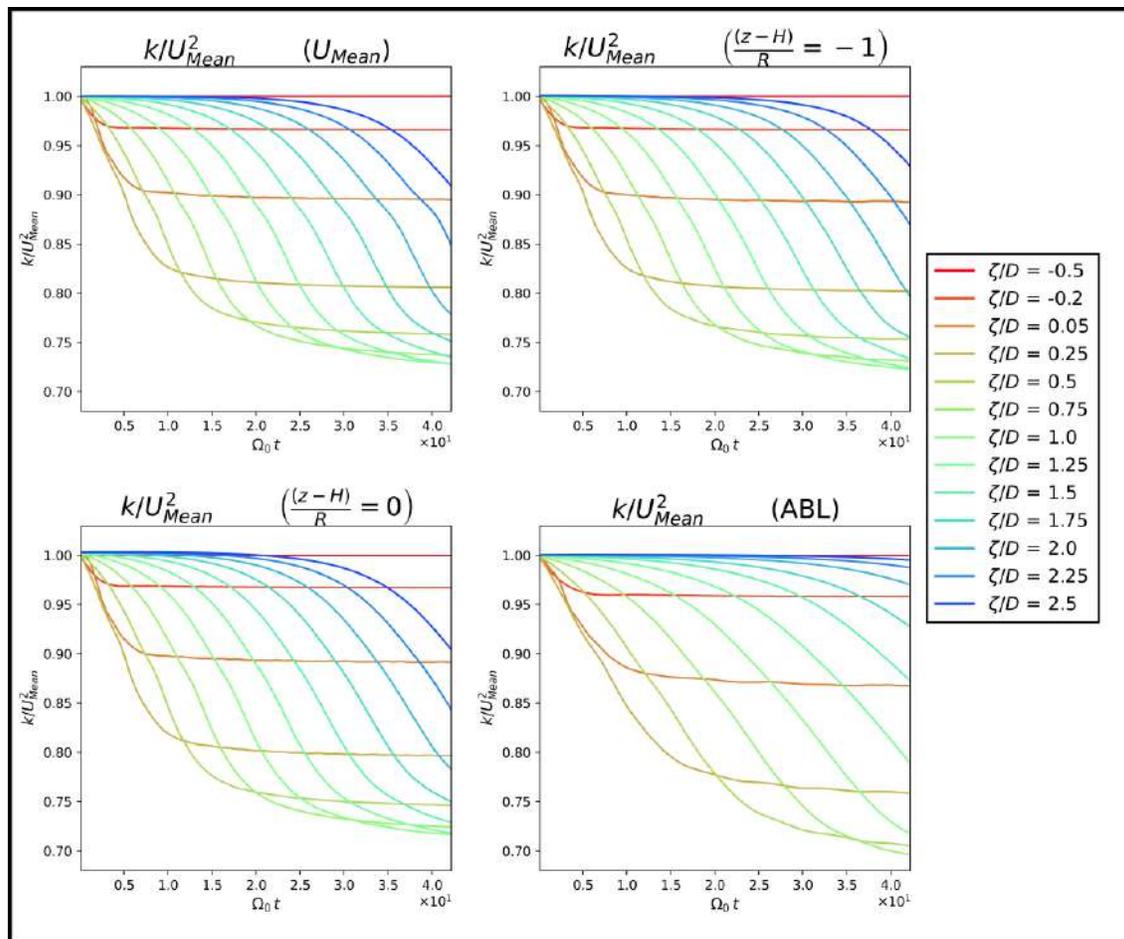


Figura 4.29: Evolución temporal de la energía cinética del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.

estado no-perturbado. Poco tiempo después (en $t = 5$ s) se observa la misma estructura de la estela detrás de ambos generadores en el plano $Y - Z$, mientras que en el plano $Z - X$ hay una rotación síncrona en ambos dispositivos. En $t = 10$ s la estela proveniente del generador corriente arriba impacta en el segundo generador, causando que las estructuras de flujo en las estelas de cada generador comiencen a diferenciarse. Esto se visualiza de mejor manera en el plano $Z - X$, pues se nota que el segundo generador experimenta efectos transitorios significativos. Dichos efectos se verifican de igual manera en las componentes radial (u_r) y azimutal (u_θ) de la velocidad (Figuras 4.37 y 4.38), así como de las componente azimutal (ω_θ) y axial (ω_z) de la vorticidad (Figuras 4.39 y 4.40). Sin embargo, la rotación de ambos generadores se mantiene relativamente sincronizada.

En $t = 20$ s se observa una notable disminución de la rapidez del flujo detrás de la segunda

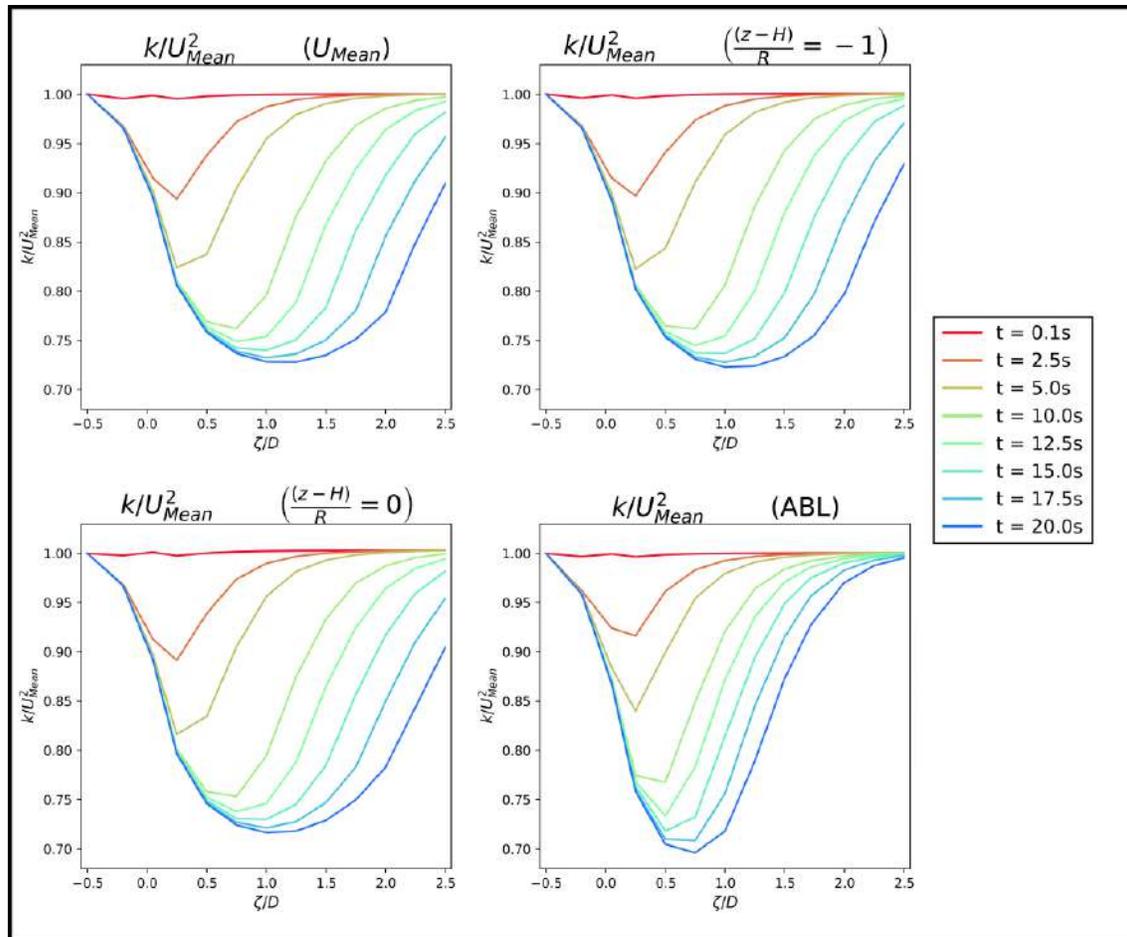


Figura 4.30: Variación espacial de la energía cinética del flujo en instantes de tiempo específicos

máquina, así como efectos difusivos prominentes en el plano $Y - Z$. Se aprecia en los planos $Z - X$ que el primer generador alcanza el estado estacionario, mientras que en el segundo generador los campos mencionados alcanzan distribuciones distintas a las observadas en el primero. Claramente este proceso no es estacionario, ya que el segundo generador se encuentra bajo la influencia de la estela del primer generador y la interacción tiene un efecto retardado. Posteriormente, en $t = 35s$, puede verse que la región del plano $Y - Z$ donde el flujo reduce su velocidad a $U \simeq 0$ m/s ha crecido. El segundo generador alcanza la rotación estacionaria con la celeridad del flujo de entrada reducida (plano $Z - X$). Asimismo, se observa que la sincronía en la rotación de ambos generadores se pierde. Esto tiene la importante implicación de que el segundo generador deja de operar de forma eficiente (como cabe esperar, dada la cercanía entre las dos máquinas).

Finalmente, en $t = 55$ s la estela de los dos generadores alcanza el estado estacionario.

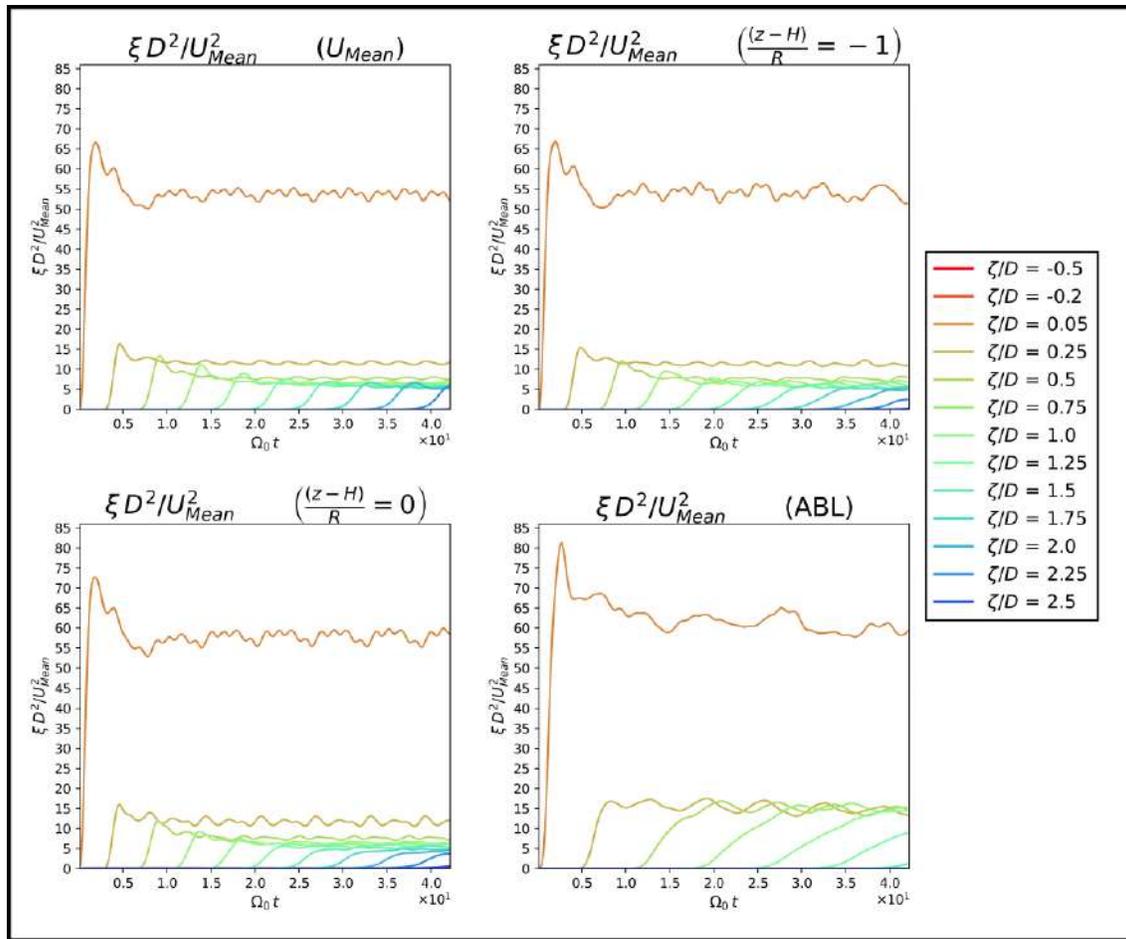


Figura 4.31: Evolución temporal de la enstrofia del flujo en diferentes planos perpendiculares al plano de rotación del generador.

Por lo tanto, en tiempos de operación suficientemente prolongados, la celeridad del flujo detrás de cada generador decae debido al gradiente adverso de presión, afectando con ello la operación de los generadores instalados corriente abajo. Un rasgo distintivo es que la región de desprendimiento detrás del buje del segundo generador crece con respecto al primero y se difunde más a medida que la distancia axial crece. También se advierte que la región donde la celeridad es nula alcanza un tamaño comparable al de los generadores. En resumen, la cercanía de los generadores alineados implica que: 1) la rapidez global del flujo se reduce, 2) las componentes angular y radial se vuelven más importantes que la componente axial, y 3) la zona de desprendimiento aumenta de tamaño.

Como en la Sección 4.0.6, se optó por tomar el tiempo final $t = 55$ s para la visualización, a continuación se analizan comparativamente los campos de velocidad y vorticidad que se

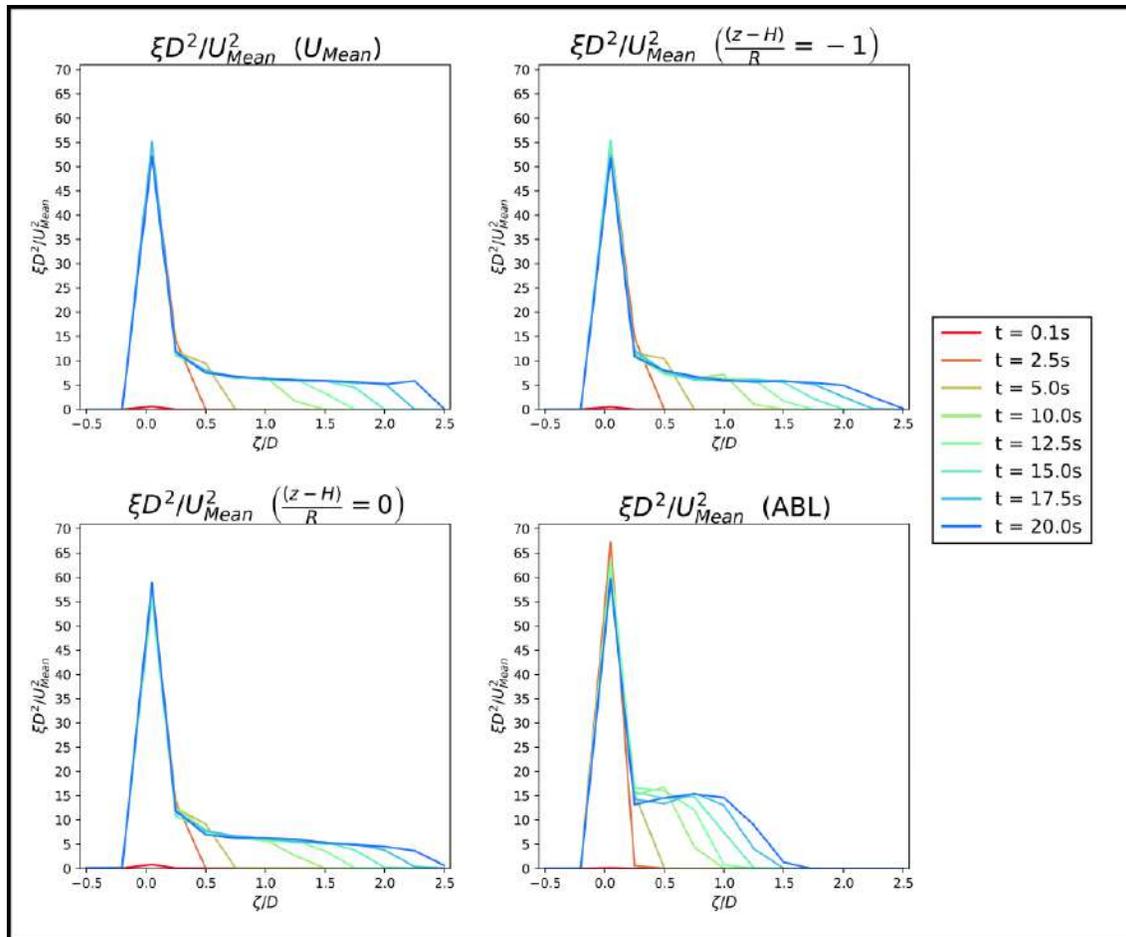


Figura 4.32: Variación espacial de la enstrofia del flujo en instantes de tiempo específicos.

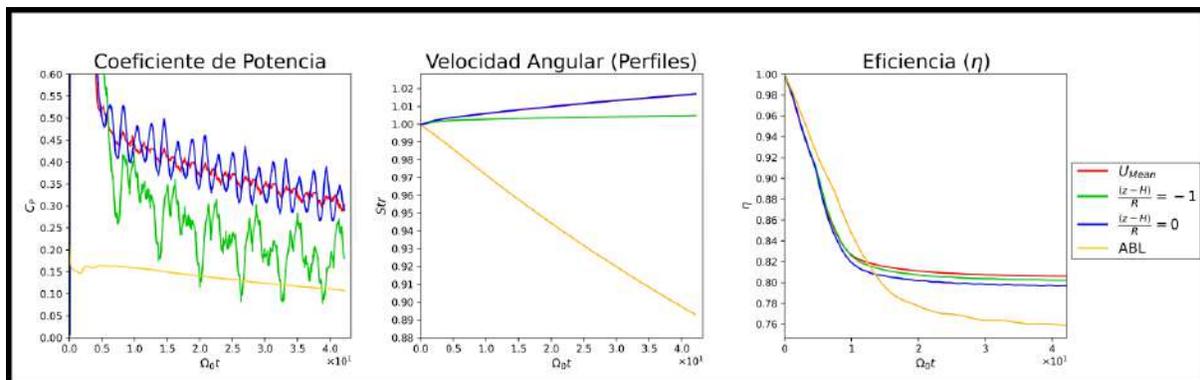


Figura 4.33: Potencia, Velocidad Angular y Eficiencia del generador ante diferentes perfiles.

muestran en las Figuras 4.41 - 4.46. En términos generales, la estructura del flujo con el perfil de velocidad uniforme y con el LLJ es similar a la de un generador aislado. Sin embargo, en

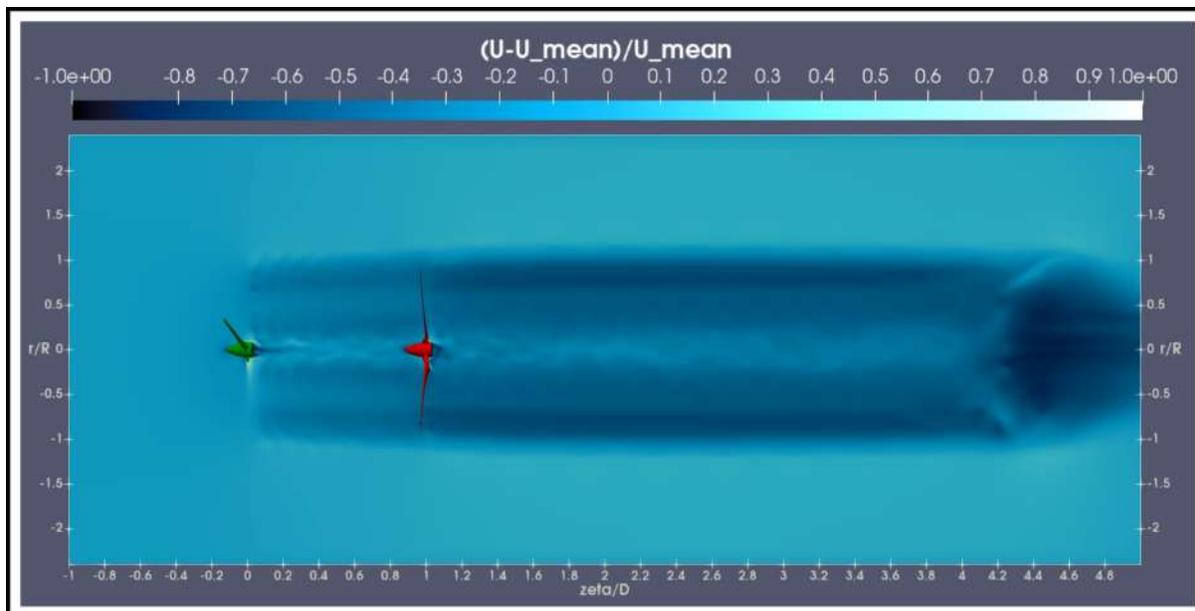


Figura 4.34: Campo de celeridades en uno de los casos al final de una simulación con dos generadores.

el caso del flujo ABL, la estela sufre una “ruptura” en la proximidad del segundo generador.

La Figura 4.42 revela que la componente radial se parece a la de un solo generador cuando la estela ha pasado por el segundo generador. La diferencia principal es que la componente radial no se difunde detrás del primer generador a causa de la presencia de la segunda máquina. Con el perfil ABL se observa, en contraste, que la componente radial tiene una magnitud mayor que en los otros casos, debido a la inestabilidad y ruptura de la estela.

Por otro lado, la componente angular de la velocidad se incrementa, en la región posterior de los álabes, cuando el flujo pasa a través del segundo generador (Figura 4.43). Asimismo, al final de la estela esta componente crece por las mismas razones que fueron mencionadas para el caso de la componente radial. Resulta llamativo que esta componente cambia de dirección con el perfil ABL, tal como sucedía con un solo generador (Figura 4.19) y que, además, se incrementa en dicha dirección cuando el flujo pasa a través del segundo generador.

Por su parte, la componente radial de la vorticidad detrás de cada generador sigue un patrón similar al observado con un generador aislado (Figura 4.44). Se aprecia que el efecto de la mutua interacción en la región intermedia (i.e. entre las dos máquinas) causa que la componente de la vorticidad se difunda con menor intensidad que en la región de la estela detrás de la segunda máquina. En contraste con el resto de los campos, el patrón de esta componente de vorticidad resulta ser similar en los cuatro casos.

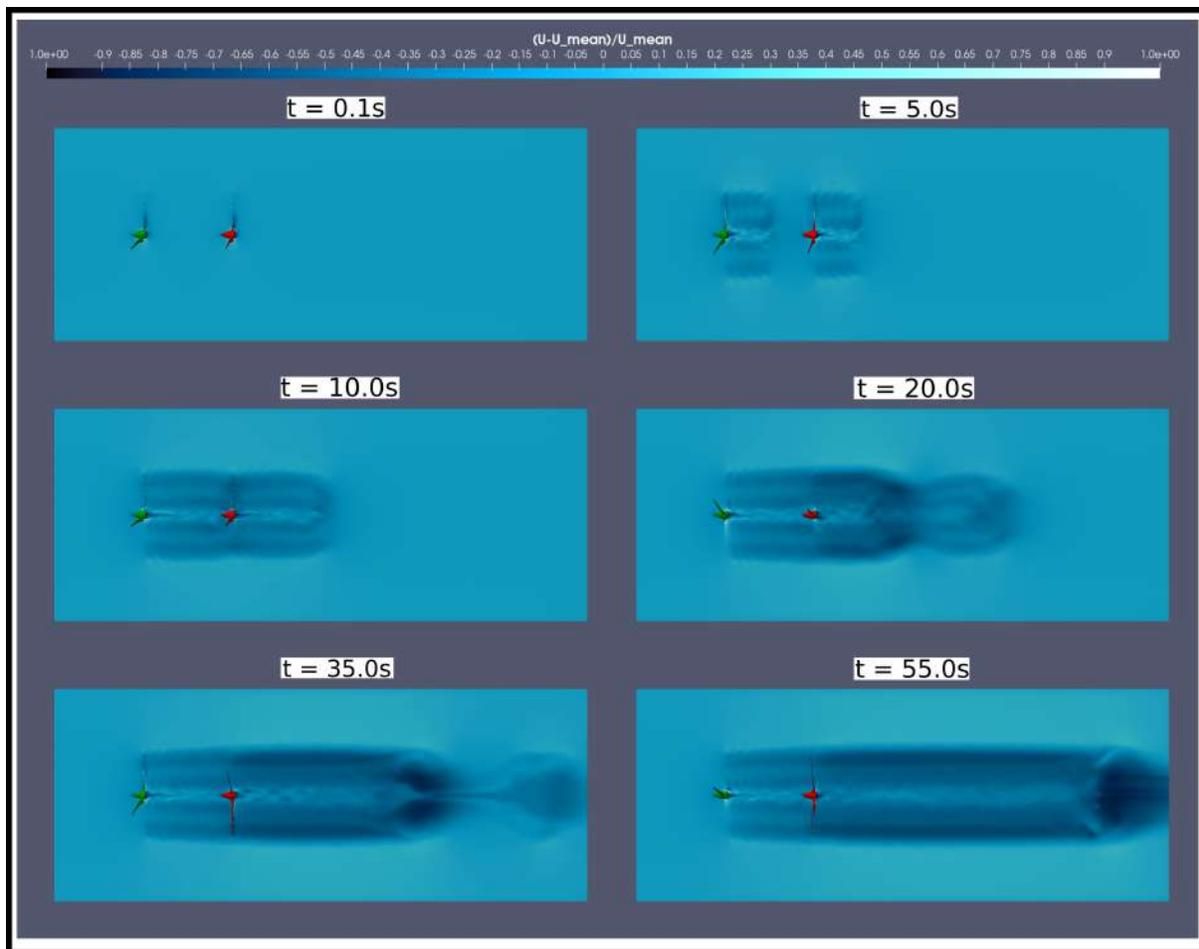


Figura 4.35: Visualización de la rapidez del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano YZ.

De la misma forma, las bandas de la componente angular de la vorticidad son similares a las que se forman en el caso aislado, tal como se aprecia en la Figura 4.45. En cuanto la vorticidad atraviesa el plano del segundo generador, las bandas provenientes de la primera máquina cambian de espesor; además, aparece una nueva banda muy delgada detrás de la punta del segundo generador. En conformidad con la predicción teórica, al reducirse la celeridad esta componente se expande nuevamente. El análisis de esta componente de la vorticidad evidencia con mayor claridad como la región de desprendimiento crece detrás del segundo generador, abarcando una mayor porción de la estela. Nuevamente, la diferencia más notoria se presenta con el perfil ABL, ya que la magnitud correspondiente aumenta y las bandas se ensanchan considerablemente.

Por último, la Figura 4.46 muestra que la vorticidad axial se reduce en todos los casos que detrás del segundo generador. Únicamente en la región de desprendimiento en el buje

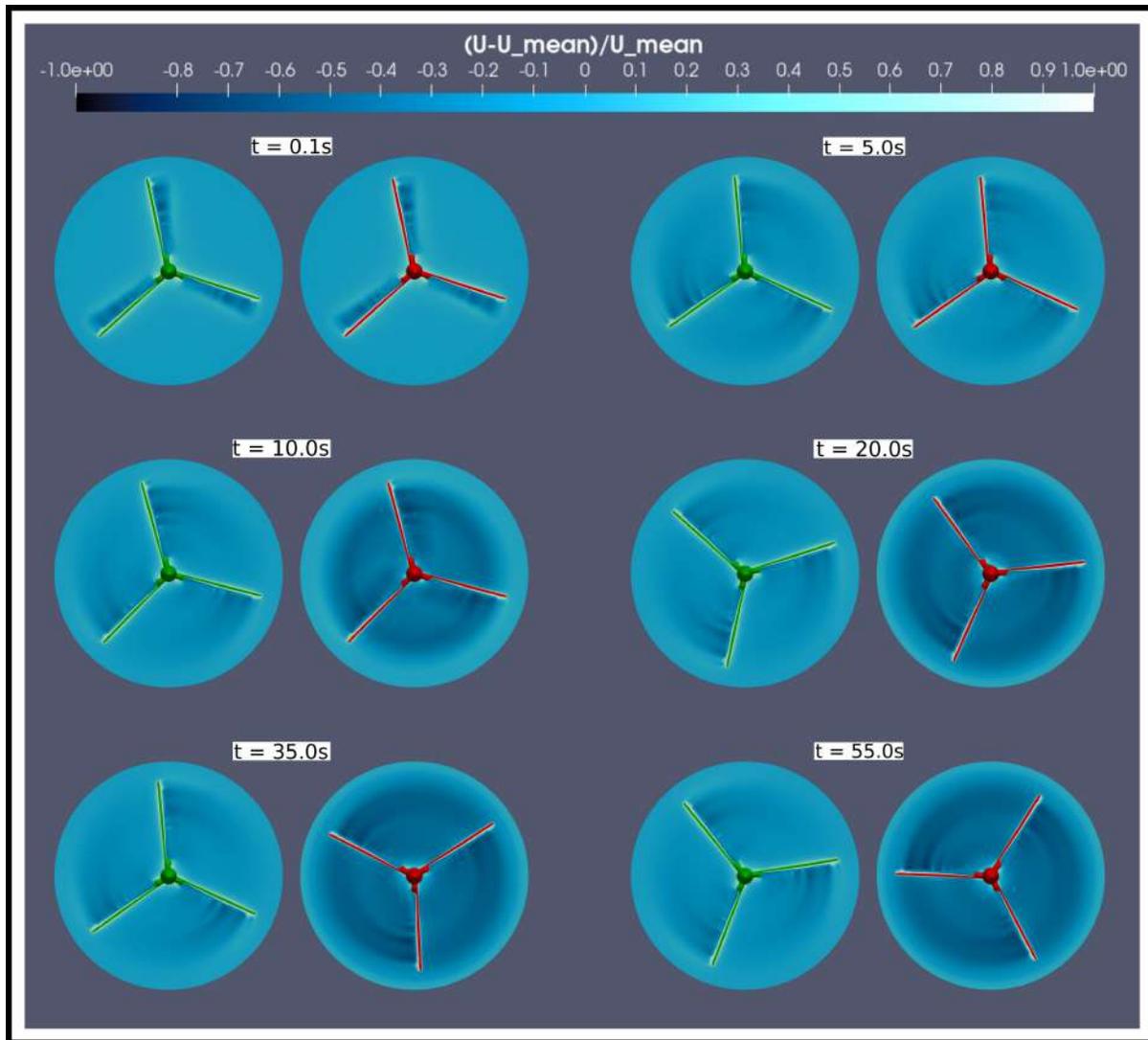


Figura 4.36: Visualización de la rapidez del flujo en diferentes instantes del tiempo. Planos ZX.

y en las puntas se manifiesta con mayor intensidad. Debe notarse que con el perfil ABL esta componente tiene magnitud significativamente mayor que en los otros casos, revelando claramente la estela producida por este perfil de velocidades genera mucha más vorticidad que los demás.

Las gráficas en las Figuras 4.47 - 4.56 ilustran, cuantitativamente, las características y propiedades de la evolución temporal y la distribución espacial de los diversos campos.

En primer lugar, las Figuras 4.47 y 4.48 revelan que la rapidez promedio del flujo decrece hasta un nivel de 40%. Esto representa una reducción a la mitad en la rapidez del flujo

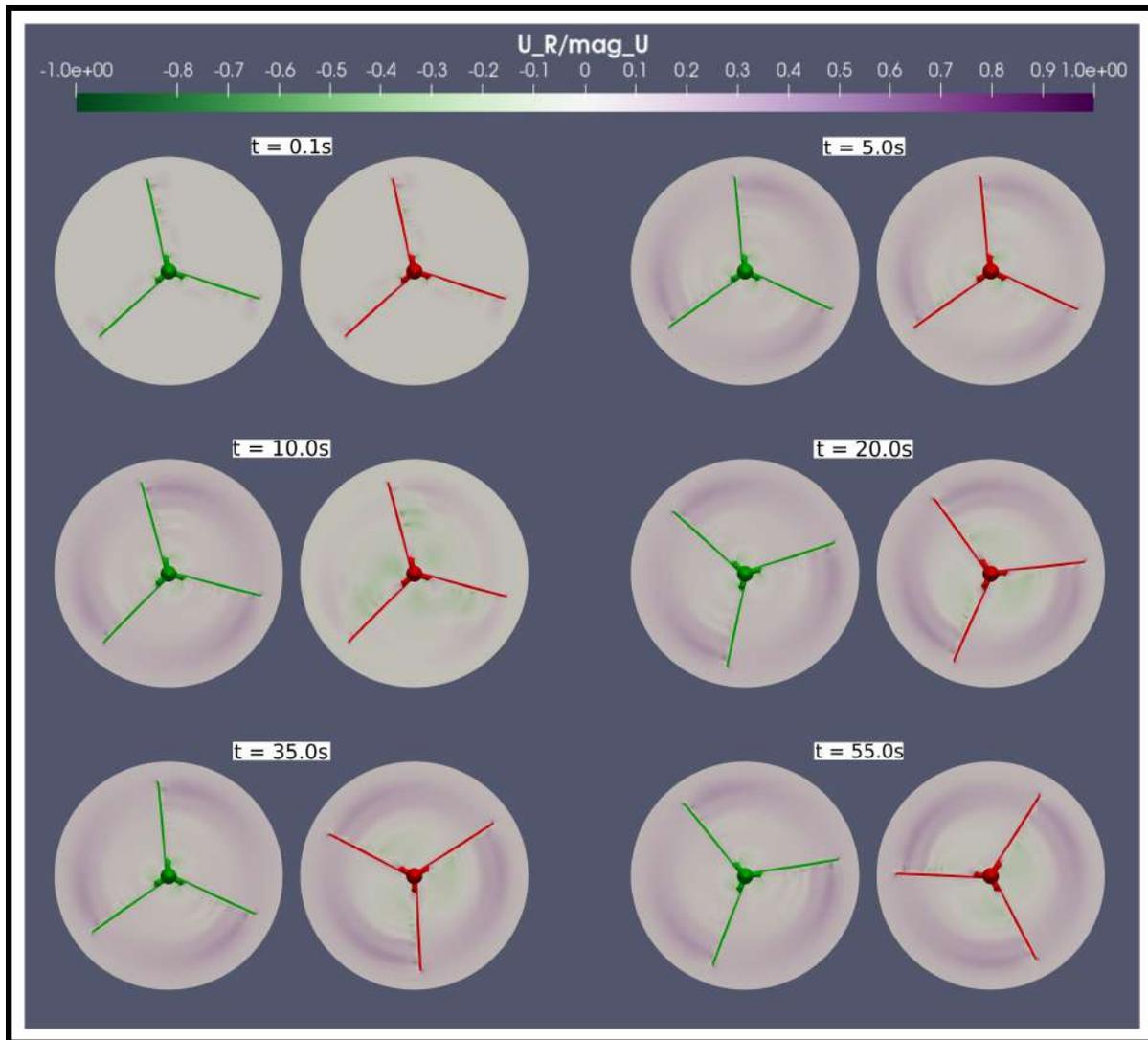


Figura 4.37: Visualización de la componente radial de la velocidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.

en el interior de la estela. Más aún, en un plano suficientemente alejado corriente arriba, la rapidez del flujo se mantiene inalterada en todo momento (Figura 4.47). No obstante, en la vecindad frontal del generador el flujo reduce la celeridad hasta alcanzar su valor mínimo en $\zeta/D = 2.0$. En los planos siguientes se produce un desfase de los valores, tal como se mostró anteriormente. Una novedad interesante es que existe al menos una zona donde la rapidez vuelve a crecer a partir de ese mismo punto, lo que indica una recuperación del flujo. La figura 4.48 revela que la distribución se desvía de la forma parabólica que tenía con un generador aislado. También se ve que la zona inferior de la curva es más ancha en este caso.

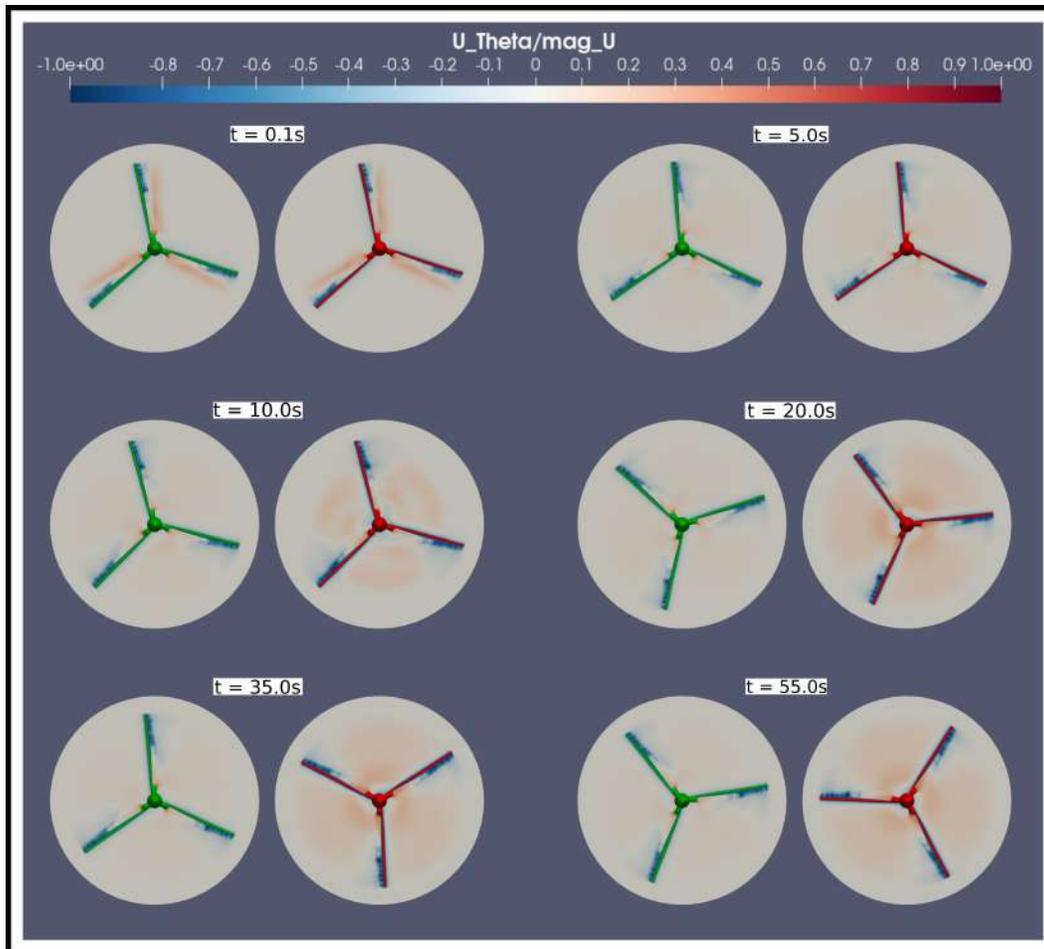


Figura 4.38: Visualización de la componente azimutal de la velocidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.

Cabe notar que el flujo causado por un chorro incidente en la punta del álabe se recupera más rápidamente que en un flujo uniforme y alcanza el 80 % de su valor inicial al final de la simulación. En cambio, si el chorro incide en el buje, la recuperación es ligeramente menor, mientras que con un flujo uniforme apenas recupera el 65 % del valor inicial. Con el perfil ABL el pico presenta un valle más pronunciado, y el flujo se reduce ligeramente más que en los casos anteriores. En el tiempo final el flujo alcanza un valor superior que los anteriores. Sin embargo, esta recuperación aparente se debe a que la estela no ha alcanzado esos planos al final de la simulación.

Observamos en las Figuras 4.49 y 4.50 que la caída de presión tiene rasgos similares a los producidos por un generador aislado. Aún así, los dos generadores producen dos picos de presión debido a que la estela impacta en el segundo aerogenerador corriente abajo. Notése

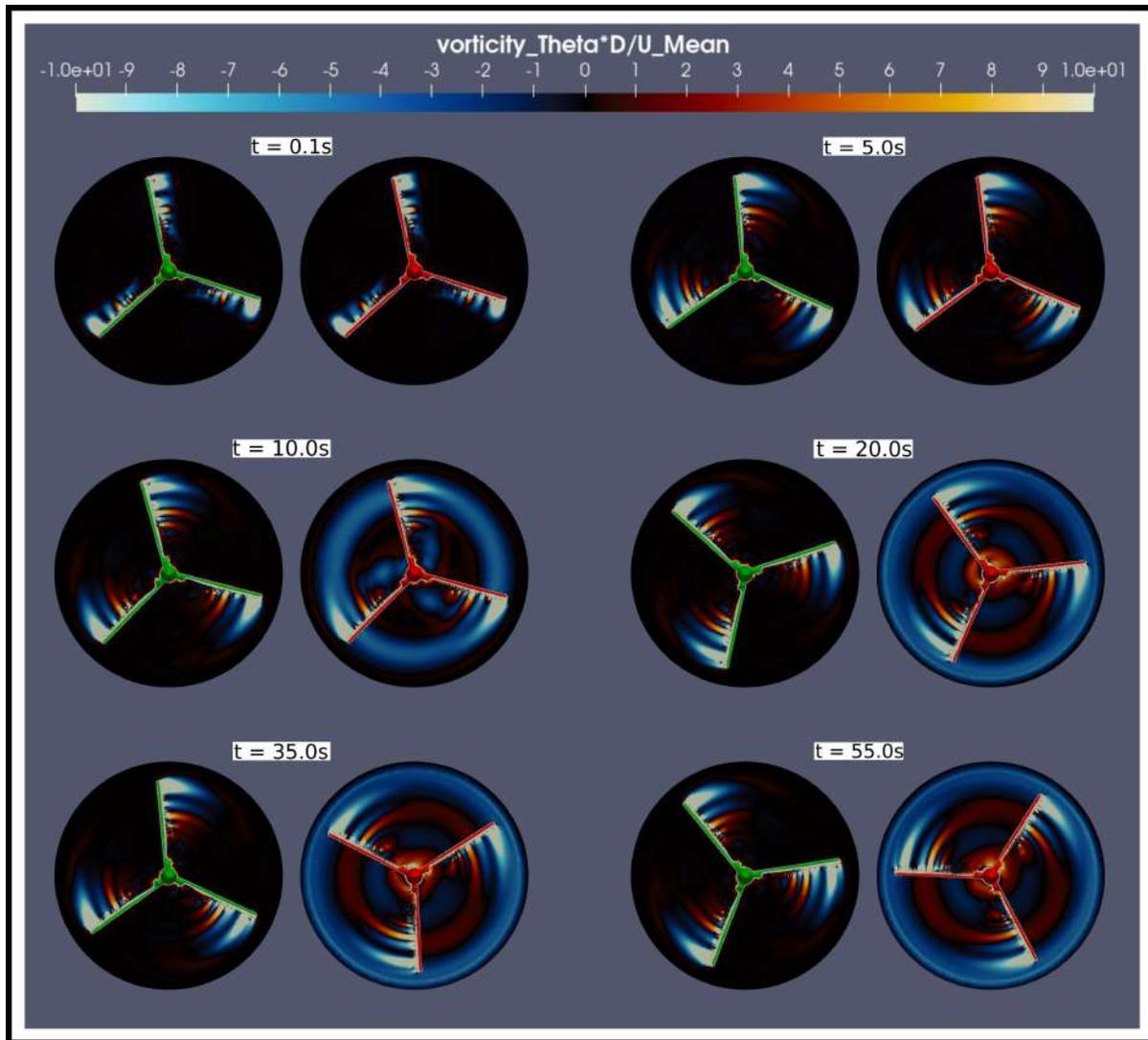


Figura 4.39: Visualización de la componente azimutal de la vorticidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.

que, en el flujo medio, la presión tiende a un valor menor que el de la atmósfera circundante (en las regiones más lejanas). Esto contrasta con los casos en los que la presión en el chorro alcanza nuevamente el valor de la referencia atmosférica. Con el perfil ABL la evolución de la estela es tal que la presión no logra caer de forma pronunciada (como en los 3 casos anteriores).

La energía cinética, por su parte, presenta una distribución espacial con dos picos característicos. Éstos se producen detrás de los generadores y su valor aumenta (ver Figuras 4.51 y 4.52). Se observa que k se maximiza detrás del primer generador; en contraste, k se reduce

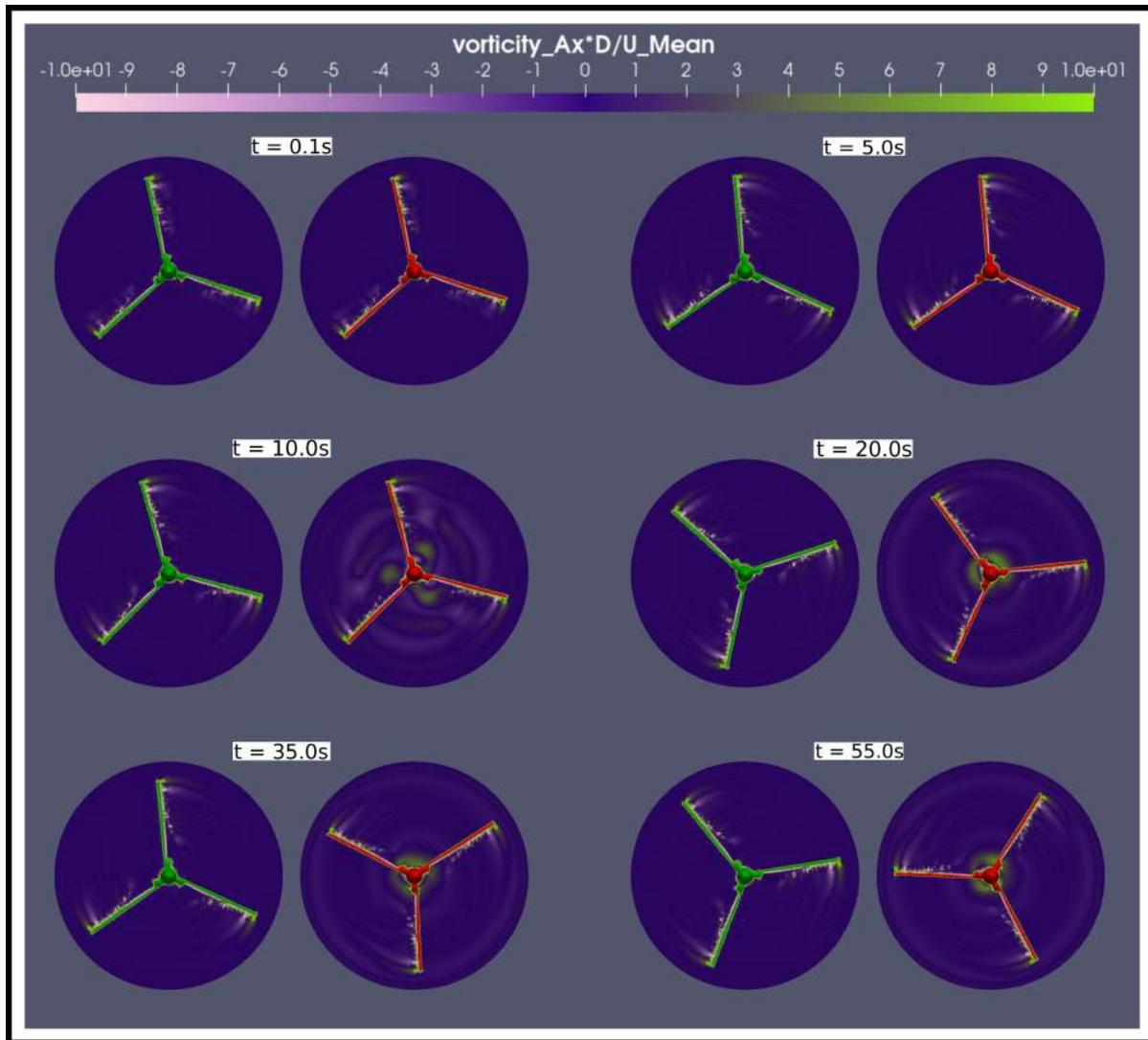


Figura 4.40: Visualización de la componente axial de la vorticidad del flujo en diferentes instantes del tiempo. Plano ZX.

detrás del segundo generador. Dentro de la estela, la energía cinética disminuye respecto con respecto a la que produce el flujo de entrada. Es de notar que k aumenta de forma abrupta con todos los perfiles, en los planos que se encuentran más alejados del segundo generador. Este es el efecto de la condición inicial discutido con anterioridad: aún en la región de baja celeridad, las componentes radial y azimutal no necesariamente son pequeñas comparadas con la componente axial, lo que ocasiona que el flujo tienda a circular de tal manera que aumenta la energía cinética turbulenta en esa región.

En términos comparativos puede apreciarse que sucede un efecto similar con un generador

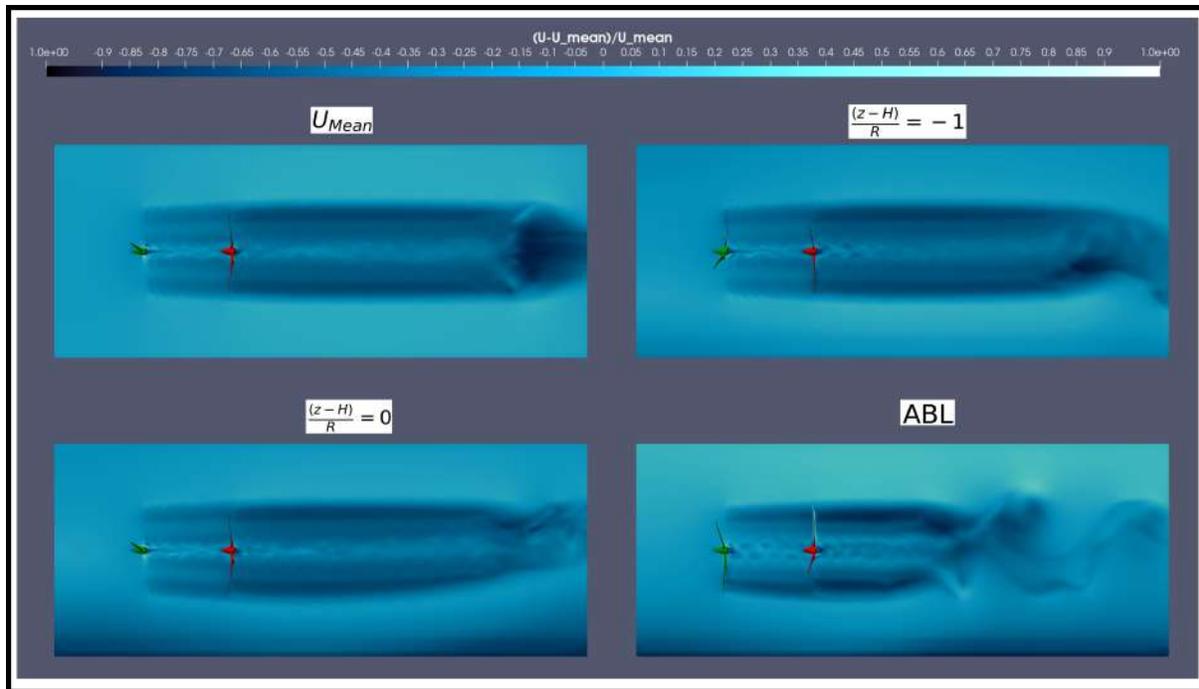


Figura 4.41: Comparación de la rapidez del flujo en el último instante de la simulación de los diferentes perfiles de velocidad. Se muestran los 4 casos.

aislado, en el sentido de que el perfil ABL induce la energía cinética turbulenta máxima (Figuras 4.27 y 4.28). Sin embargo, a diferencia de ese caso la energía cinética turbulenta cae en menor medida en comparación con el generador aislado (sobre todo con el perfil uniforme). Esto revela que hay una interacción entre los generadores que produce una estela más turbulenta.

Además, en el caso de los dos generadores, la k en el plano $z = H - R$ es menor que la registrada en el plano incidente $z = H$; la energía cinética detrás del segundo generador es generada más rápidamente. Esto sugiere que si el chorro incide sobre la punta del álabe, hay una menor tendencia a inducir turbulencia en la estela favoreciendo, con ello, la colocación de generadores corriente abajo.

La distribución en la energía cinética mostrada en las Figuras 4.53 y 4.54 revela que, con dos generadores, se produce una pérdida de k cercana al 60% (es decir, una reducción 30% superior a la producida por un generador aislado). Por supuesto, este efecto limita considerablemente la energía disponible que podría ser aprovechada por otros generadores instalados corriente abajo.

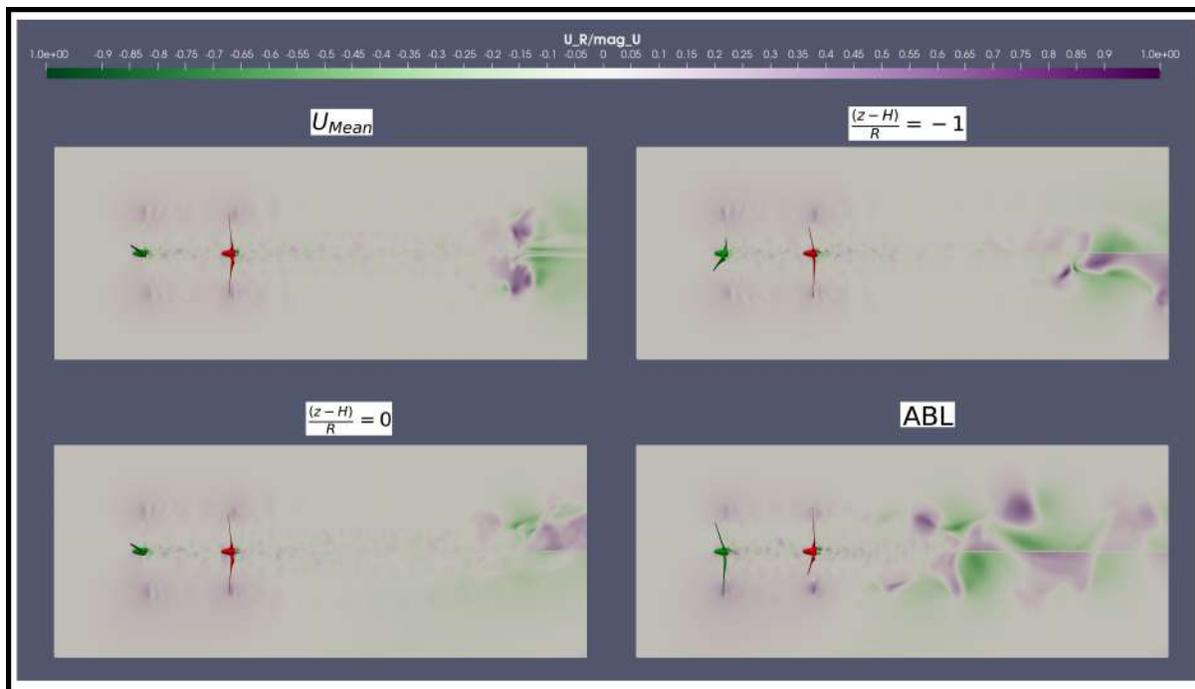


Figura 4.42: Comparación de la componente radial de la velocidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.

En analogía con los casos anteriores, la energía cinética del flujo promedio es 3 órdenes de magnitud mayor que la energía cinética turbulenta. Esto se debe a la importante influencia que tiene la componente axial del flujo. Contrario a lo que sucede con un solo generador, la reducción de k en el flujo con perfil ABL es menor que en el resto de los casos. En parte esto puede deberse a que el tiempo de simulación fue insuficiente, como ya ha sido establecido anteriormente.

Por otro lado, al comparar el perfil uniforme con el perfil LLJ, se observa que la región donde la energía cinética es mínima es más extensa que la región donde el flujo es uniforme. Sigue en relevancia el caso de la incidencia del chorro en $z = H - R$. Sin embargo, cuando el perfil LLJ incide en la punta del álabe el flujo se recupera más rápidamente que con el flujo uniforme y con el chorro incidente; en principio, esto también favorecería la colocación de otros generadores corriente abajo.

Los picos característicos también se observan en la enstrofia, tal como ilustran las figuras 4.55 y 4.56. Como es de esperar, el valor de ξ aumenta significativamente en los planos localizados justo detrás de los generadores. Entre ambos picos ξ adquiere un valor de “estancamiento” menor al registrado en del segundo generador. Cuantitativamente, esto se debe a

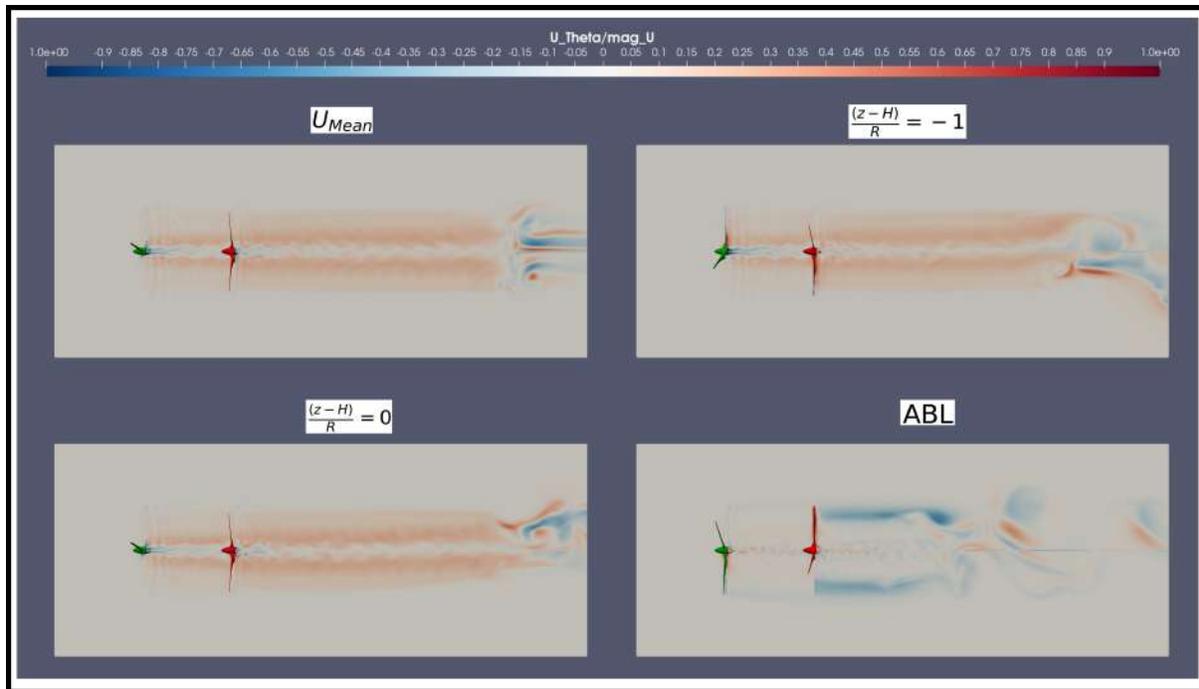


Figura 4.43: Comparación componente azimutal de la velocidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.

que la vorticidad detrás del segundo generador aumenta considerablemente (aproximadamente al doble del valor de referencia). En la región final de la estela se registra un incremento debido a la influencia de la baja celeridad y alta presión en esa zona. Asimismo, cabe notar que la vorticidad es mayor en el plano posterior del primer generador, indicando con ello que la primera máquina extrae más energía cinética del flujo, induce más vorticidad (producto de la rotación), y funciona como obstáculo para el flujo incidente.

En los casos de flujo uniforme y con un LLJ incidiendo en el plano $z = H - R$, la enstrofia tiende a valores similares detrás de ambos generadores. En particular, la vorticidad detrás del primer generador es 25% mayor. Por otra parte, si se hace incidir el LLJ en $z = H$, la enstrofia es ligeramente mayor (sobretudo detrás del primer generador). Cuando la incidencia se produce en el plano $z = H$ la enstrofia crece más rápidamente que en los otros dos casos, debido a la inestabilidad de la estela. Con el perfil ABL la ξ aumenta globalmente respecto a los otros perfiles. Se hace notorio que las amplitudes de las oscilaciones de ξ detrás de los generadores es mucho mayor y que su valor no se reduce de forma significativa, de modo que el desempeño de la segunda turbina se ve perjudicado.

Por último, en las Figuras 4.57 y 4.58 se muestran, respectivamente, los resultados de la

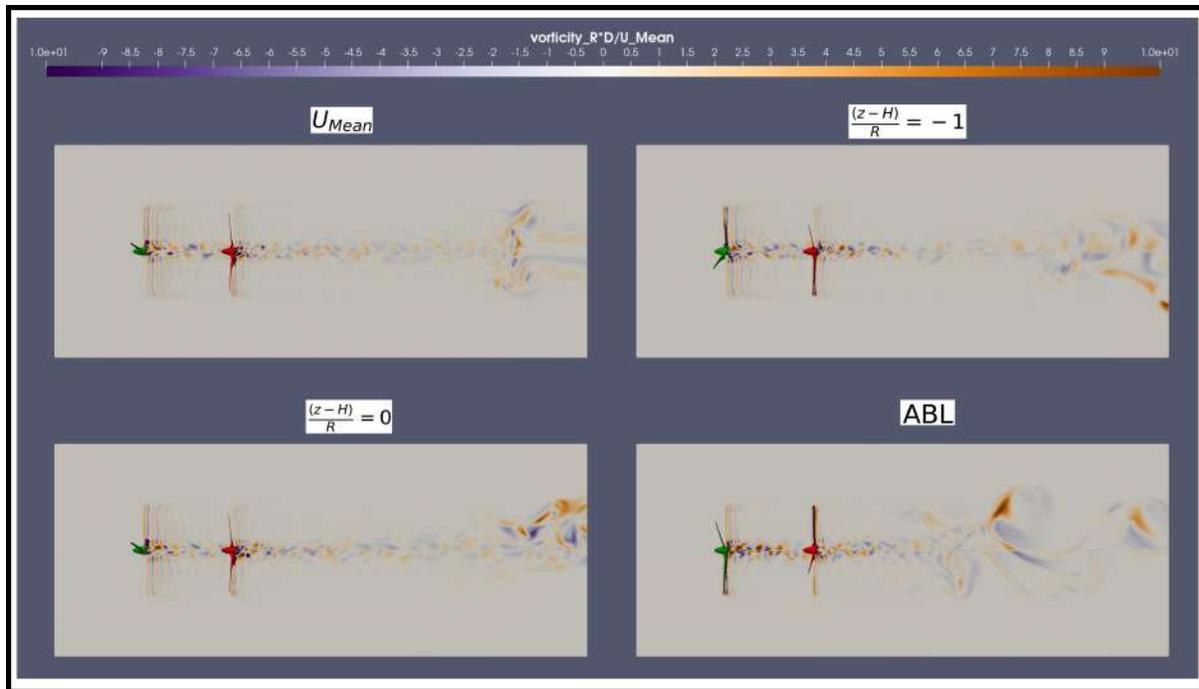


Figura 4.44: Comparación de la componente radial de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.

velocidad angular y del coeficiente de potencia de los aerogeneradores. La eficiencia cinética queda ilustrada en la Figura 4.60.

En la Figura 4.57 se puede ver que el perfil de velocidades uniforme y el LLJ inducen un incremento de la velocidad angular, debido a que la energía cinética del flujo se encuentra disponible en grado suficiente. Con el perfil uniforme y el chorro incidente en el centro del buje, la velocidad presenta el mayor aumento posible, mientras que con el chorro incidiendo en la punta del álabe el aumento es marginal.

Es importante notar que al incrementar el tiempo de simulación se observó un crecimiento logarítmico en la velocidad angular del primer generador. El valor correspondiente creció hasta 0.07%, lo que abre la necesidad de revisar el modelo numérico para garantizar la convergencia de Ω , como dicta la ecuación (2.42). En conclusión, para validar este punto se requieren dominios y tiempos de simulación más amplios. Con el perfil ABL la velocidad angular decae tal como sucede en los casos anteriores.

Por su parte, con el perfil de velocidades uniforme, el segundo generador aumenta su velocidad angular, llega a un máximo y luego decae. Esta disminución ocurre pocos segundos

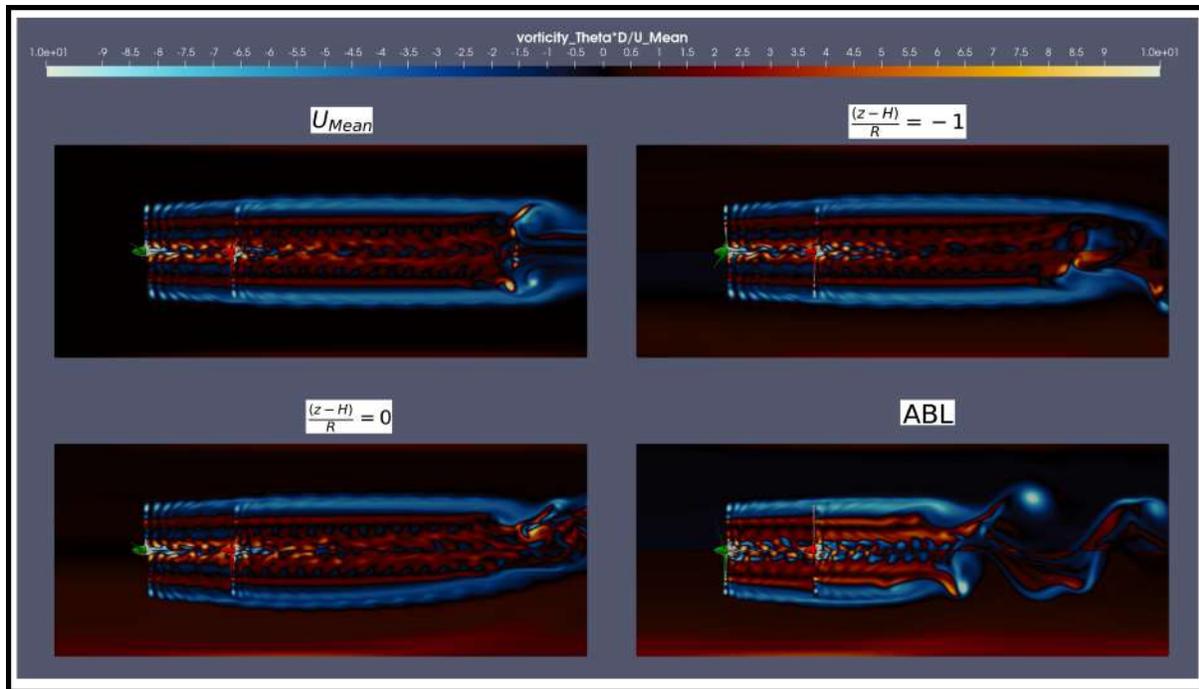


Figura 4.45: Comparación componente azimutal de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.

después del impacto de la estela. Al reducirse la celeridad del flujo (y por ende su energía cinética) el gradiente de presiones es insuficiente para producir una torca neta capaz de incrementar la aceleración angular; como resultado de este proceso, domina la torca asociada a la fricción en el eje afectando el buen desarrollo de la velocidad angular. En este caso, el perfil U_{Mean} tiene la menor disminución, seguida del chorro LLJ en $z = H$ con una reducción un poco más pronunciada, y con LLJ en $z = H - R$ donde la reducción es menos significativa. Con el perfil ABL la velocidad angular disminuye al principio (al mismo ritmo que el primero), y alcanza un valor 0.06 % menor al valor inicial cuando impacta la estela. Como en las ocasiones anteriores, no se observa en este caso una tendencia asintótica en Ω .

El desempeño general de los aerogeneradores se representa a través de los conocidos *factores de potencia*. La Figura 4.58 ilustra el comportamiento de C_P para el primer generador, donde puede verse que $C_P = 0.3$ cuando se aplica un perfil uniforme en $z = H$. En el plano $z = H - R$ el valor se sitúa en el intervalo $0.2 < C_P < 0.3$, lo cual es inesperado puesto que no hay una reducción drástica en la celeridad del flujo. Esto sugiere que los efectos debidos a circulaciones menores alrededor de la máquina y en la estela tienen una influencia que no debe ser despreciada. Con el perfil ABL, $C_P < 0.2$. Con el chorro LLJ incidiendo en el buje del primer generador, la potencia extraída con respecto a la capa límite atmosférica aumenta alrededor de 10 %.

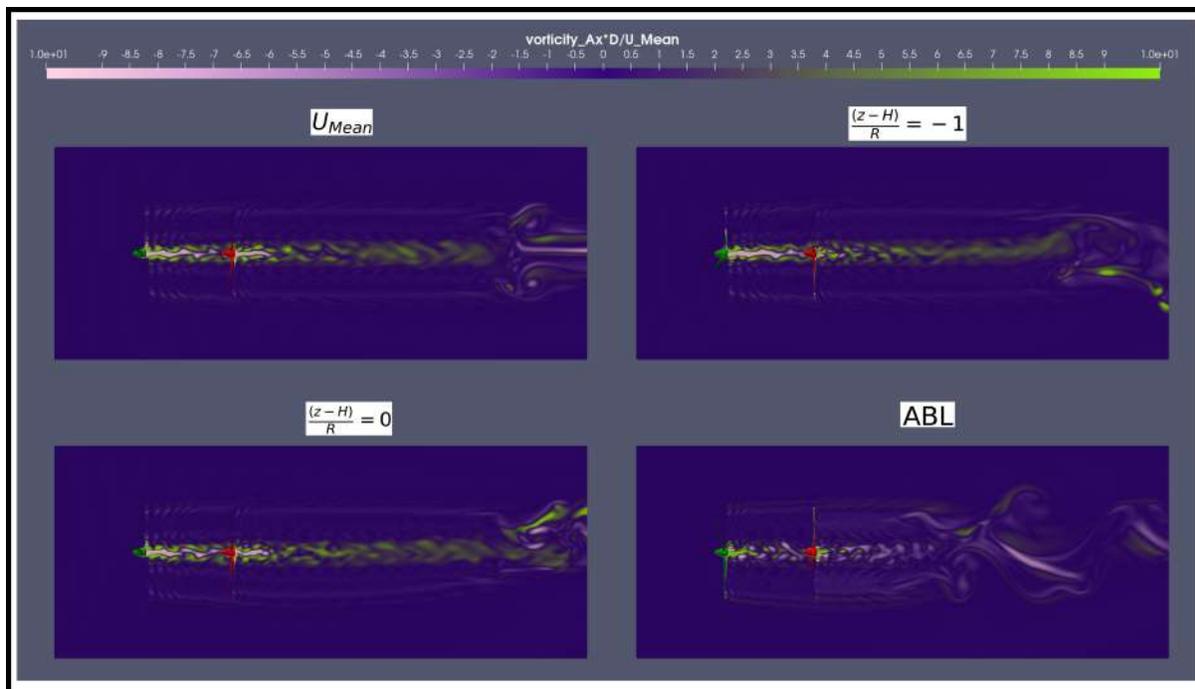


Figura 4.46: Comparación de la componente axial de la vorticidad del flujo en los diferentes perfiles de velocidad.

En cambio, en el segundo generador se observa una reducción en la potencia extraída. Por ejemplo, con el perfil de velocidades uniforme se obtiene $0.15 < C_P < 0.2$, mientras que con el LLJ la potencia extraída en el segundo generador es prácticamente la misma que en el primero ($C_P = 0.15$). Esto demuestra que el segundo generador extrae la misma cantidad de energía del flujo con ambas incidencias del LLJ, por lo que hay una reducción en la conversión de energía cuando el chorro incide directamente sobre el buje. Finalmente, con el perfil ABL se obtiene $C_P = 0.1$, que es significativamente más bajo que en los otros casos. Una comparación de las potencias de los generadores en el tiempo final es la que se ilustra en la Figura 4.59. Observe que el chorro LLJ induce la menor pérdida de potencia, mientras que cuando incide en $z = H$ la potencia se maximiza. Vale la pena resaltar que esto es consistente con lo reportado en.¹⁴

Por último, a partir de la Figura 4.60 se concluye que la eficiencia del flujo es máxima con el perfil uniforme en ambos generadores. El flujo también es más eficiente cuando el chorro incide sobre las puntas de los álabes que cuando incide en el buje. De la discusión previa queda claro que en el caso de la capa límite atmosférica la operación es significativamente menos eficiente.

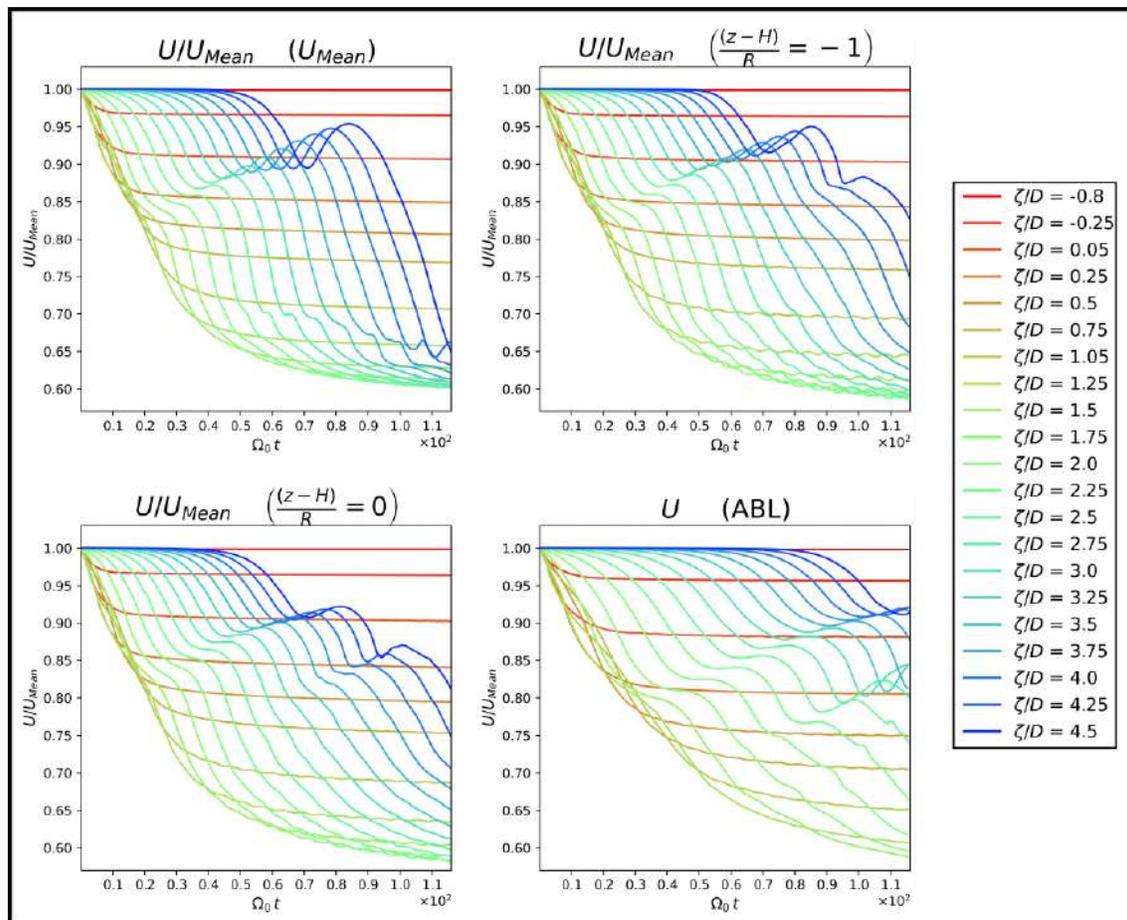


Figura 4.47: Evolución temporal de la rapidez media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos. Se muestran los 4 perfiles de velocidad utilizados.

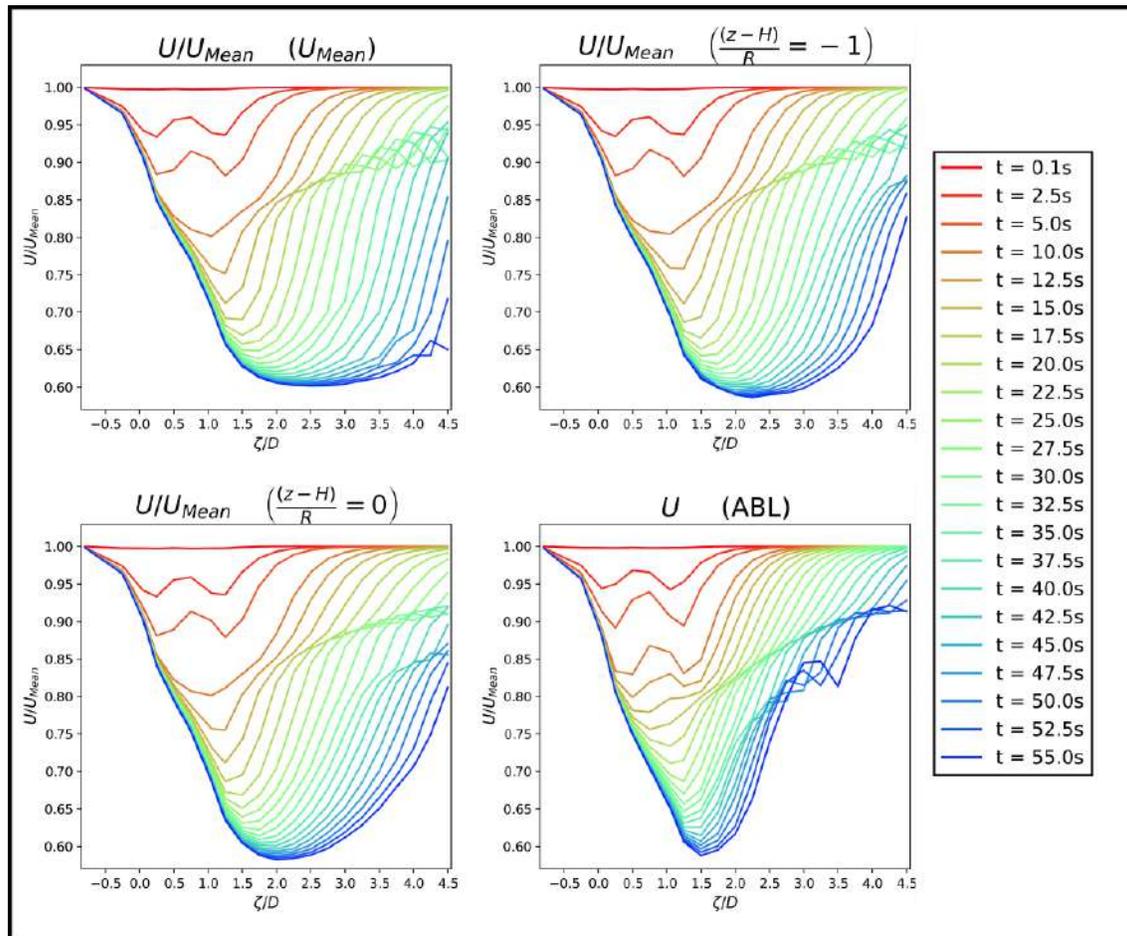


Figura 4.48: Distribución espacial de la rapidez media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados. Se muestran los 4 perfiles de velocidad utilizados.

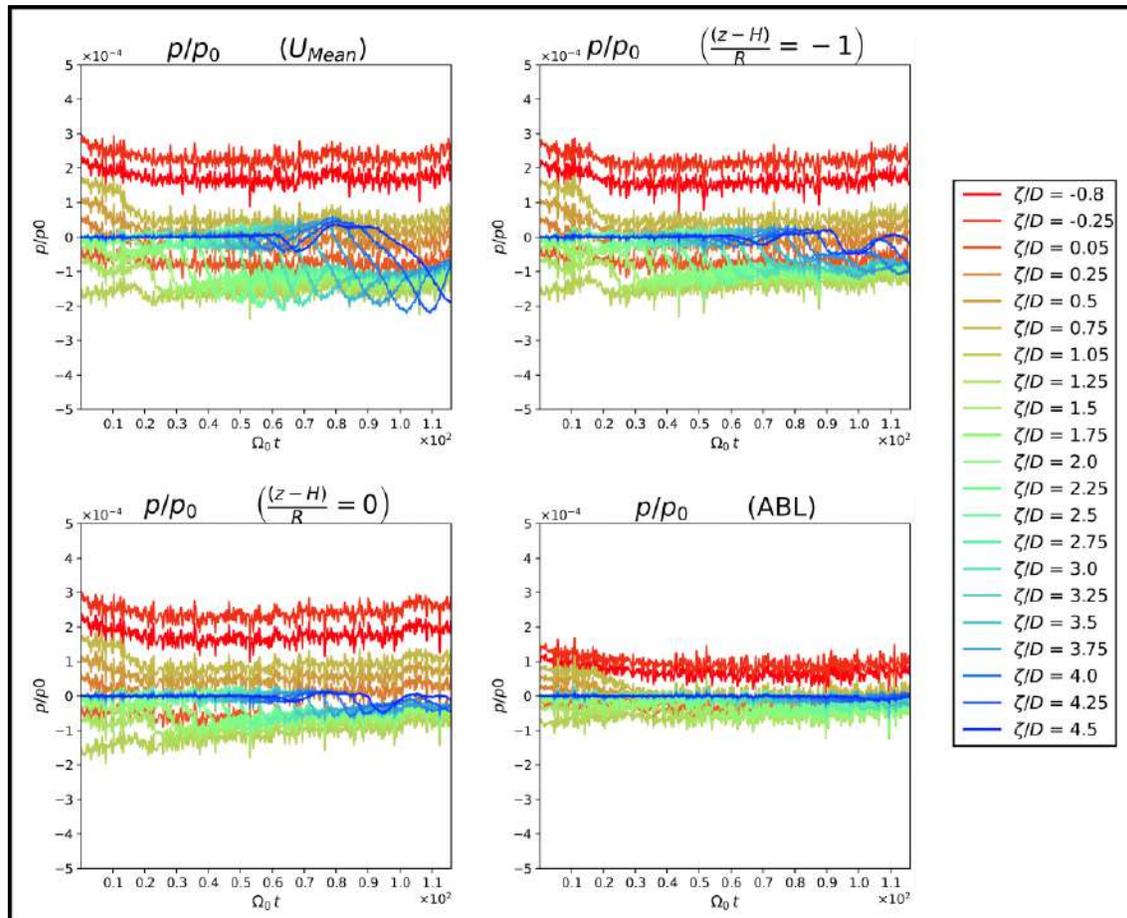


Figura 4.49: Evolución temporal de la presión media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.

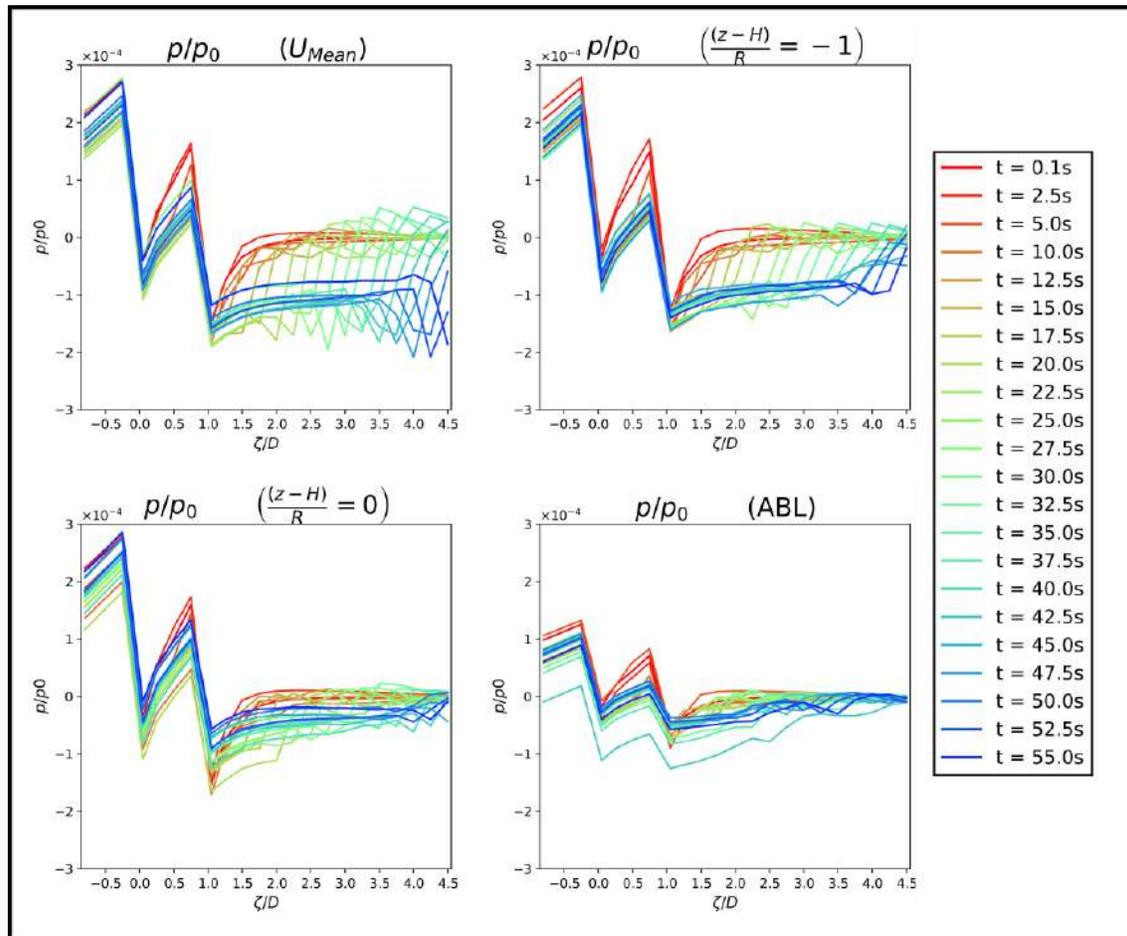


Figura 4.50: Distribución espacial de la presión media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados.

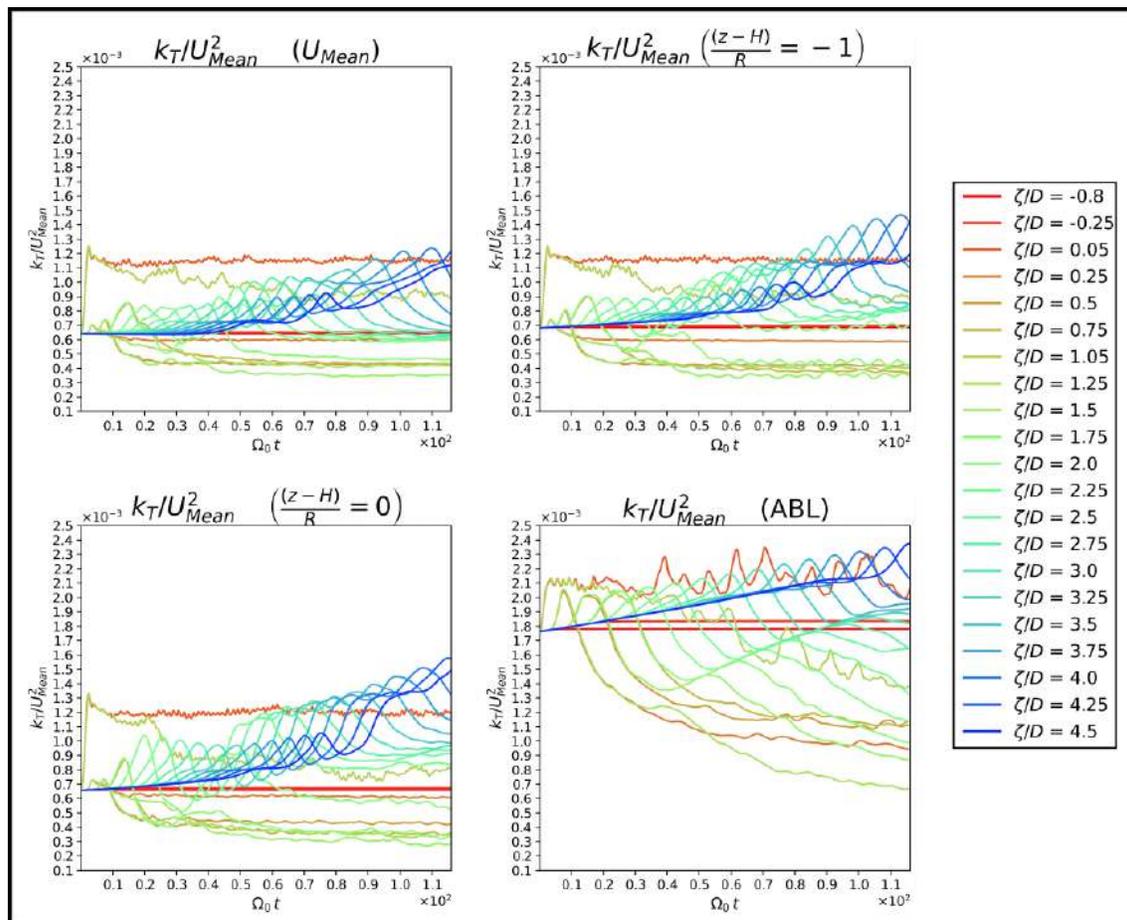


Figura 4.51: Evolución temporal de la energía cinética turbulenta media del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.

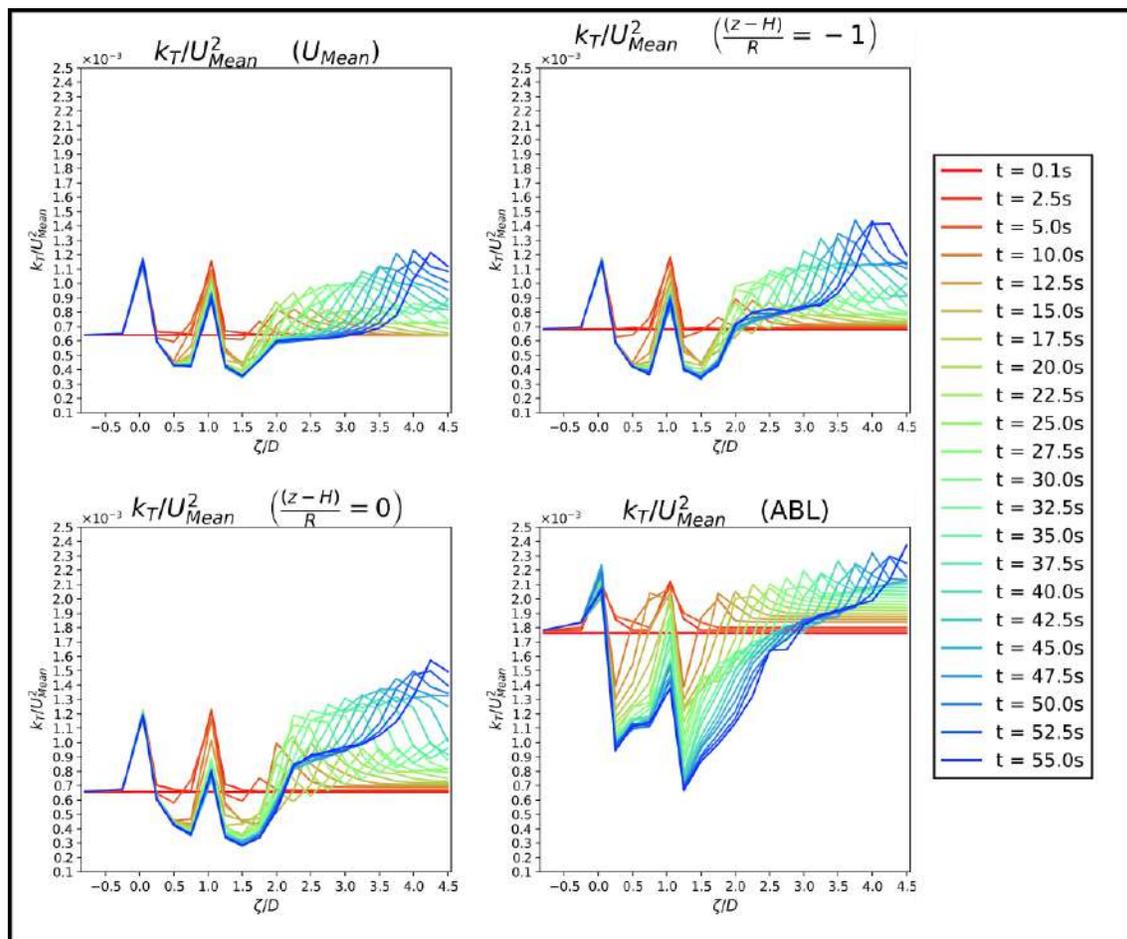


Figura 4.52: Distribución espacial de la energía cinética turbulenta media del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados

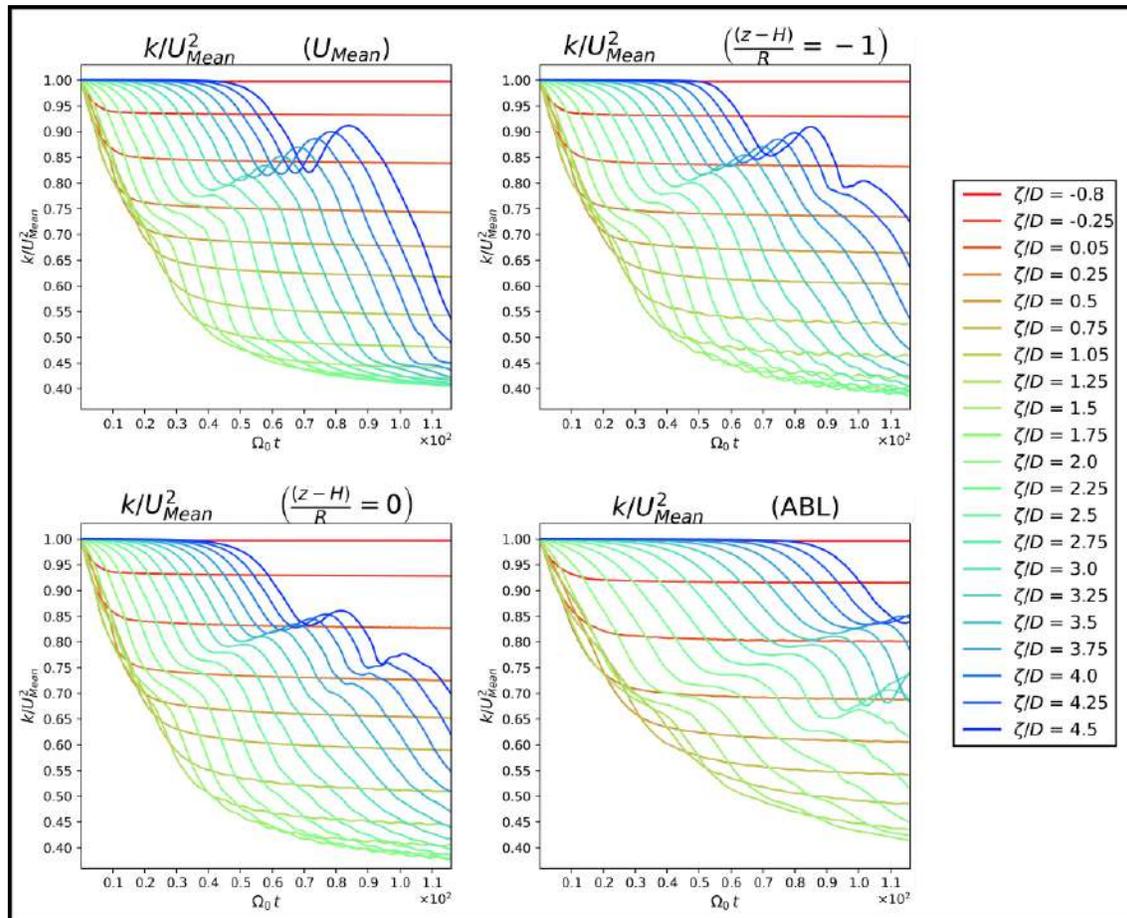


Figura 4.53: Evolución temporal de la energía cinética del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.

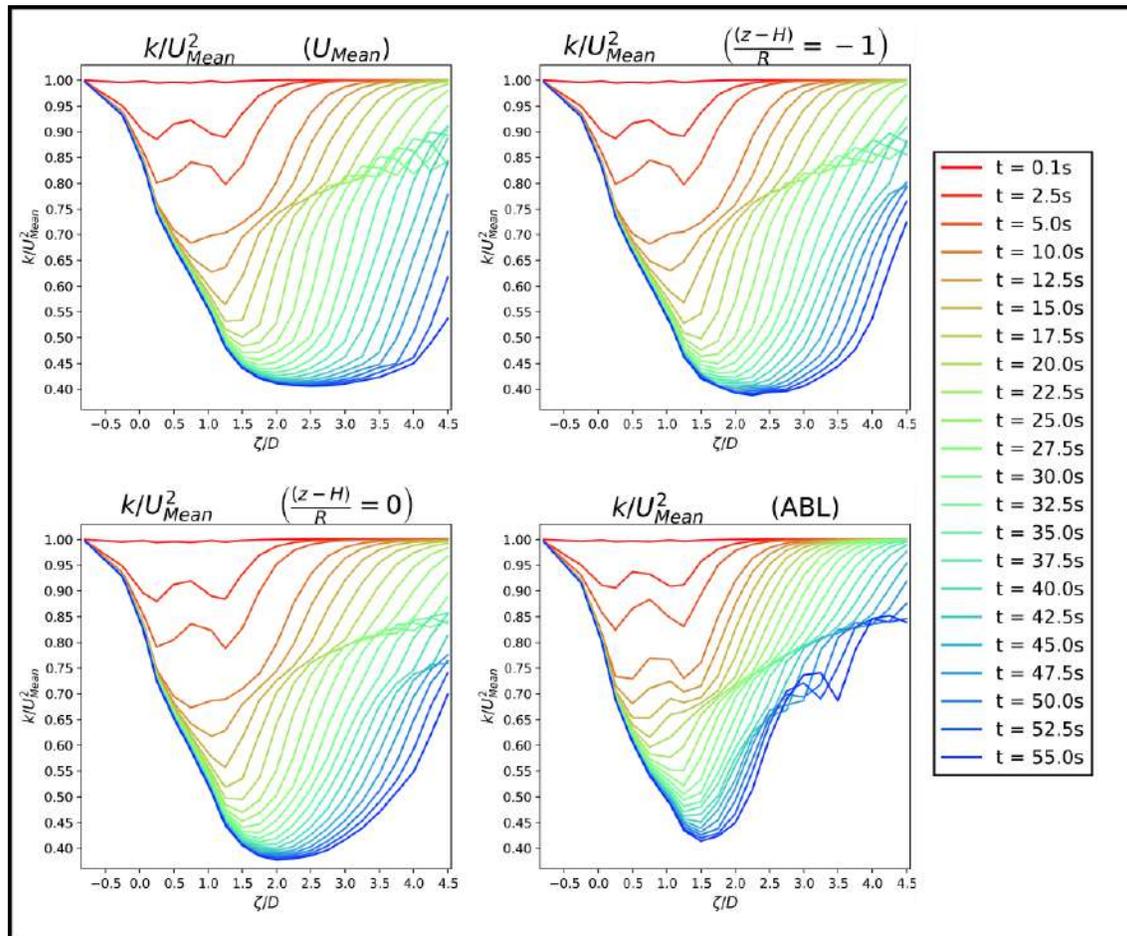


Figura 4.54: Distribución espacial de la energía cinética del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados

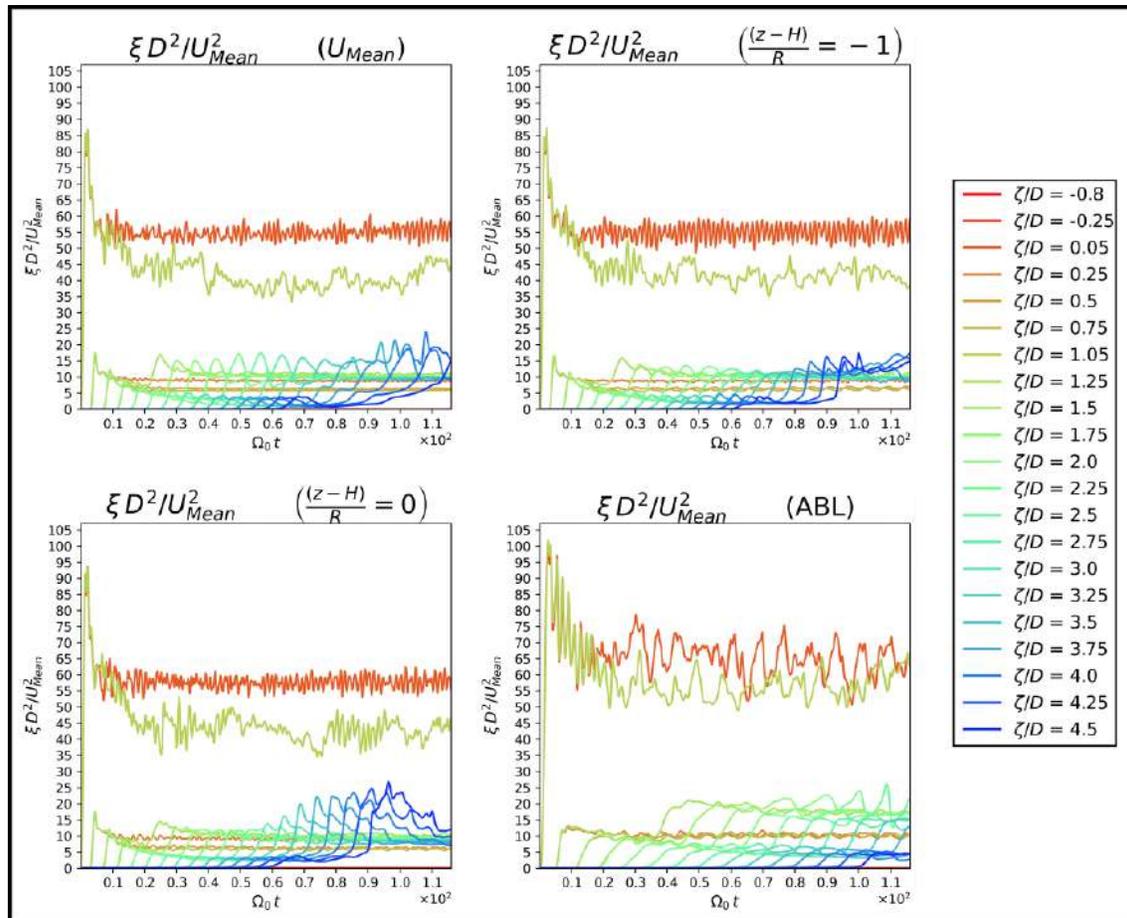


Figura 4.55: Evolución temporal de la enstropía del flujo en el caso con dos generadores en diferentes planos.

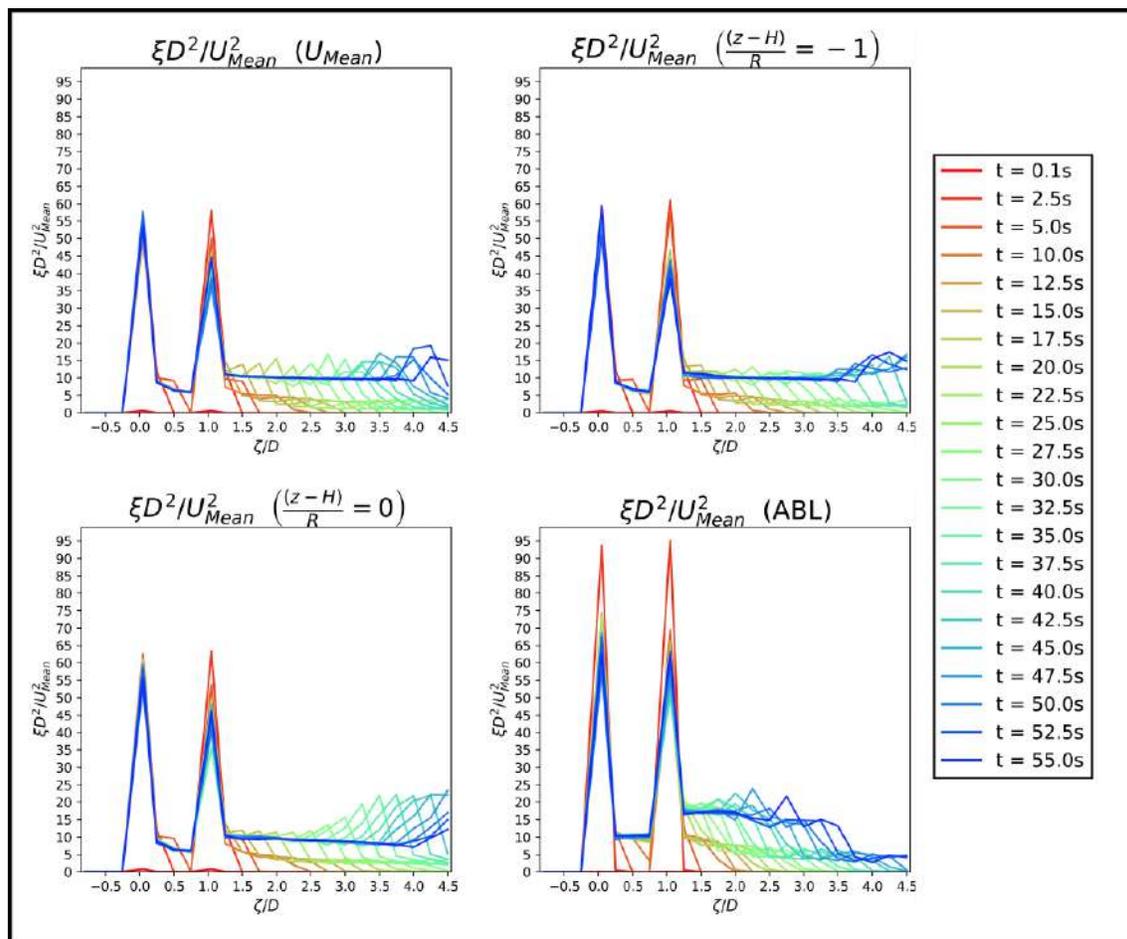


Figura 4.56: Distribución espacial de la enstrofia del flujo en el caso con dos generadores en instantes de tiempo especificados

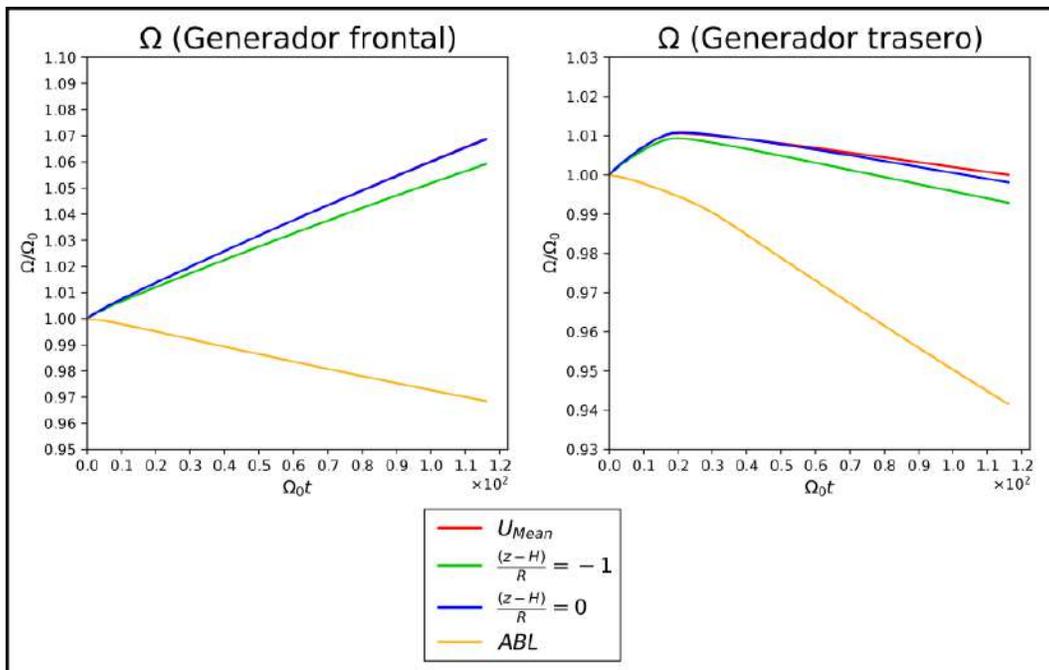


Figura 4.57: Evolución de la velocidad angular de cada generador ante perfiles de velocidad diferentes.

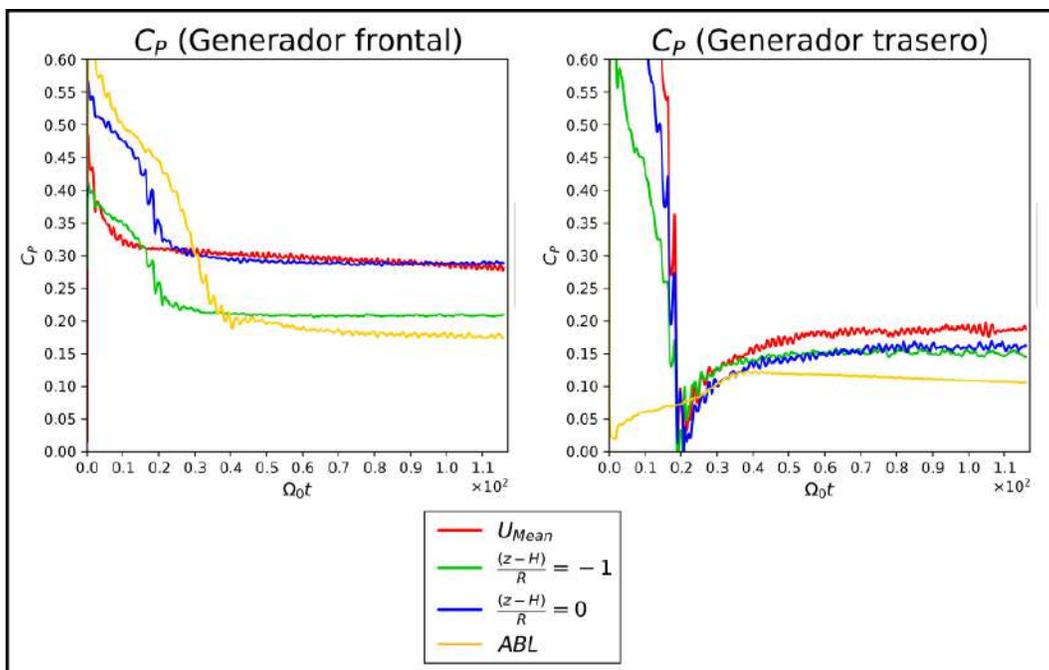


Figura 4.58: Coeficiente de potencia de cada generador ante los diferentes perfiles de velocidad.

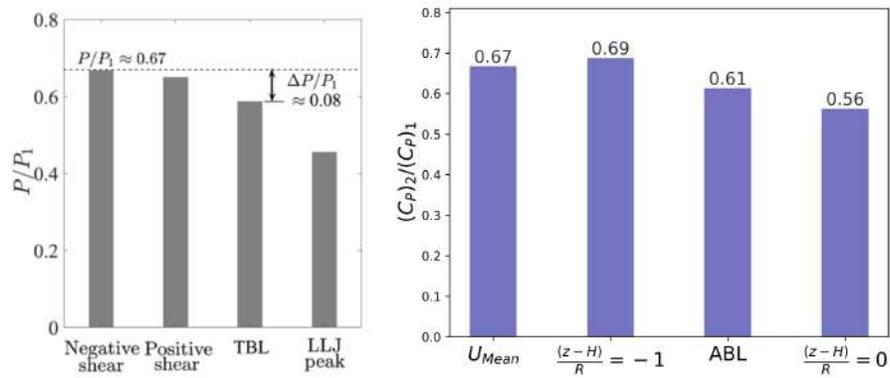


Figura 4.59: Eficiencia de cada una de las máquinas ante diferentes perfiles de velocidad. Se muestra la comparación con los resultados de.¹⁴

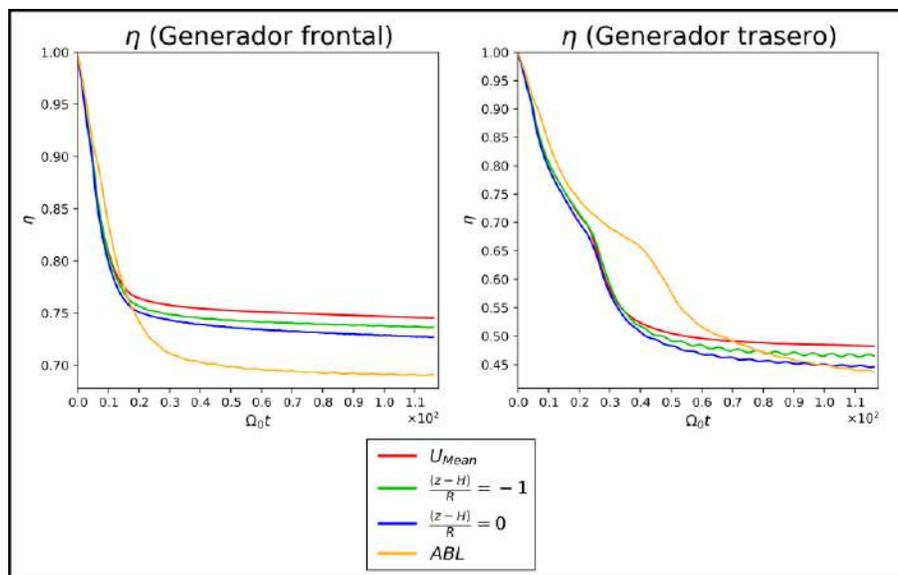


Figura 4.60: Eficiencia de cada una de las máquinas ante diferentes perfiles de velocidad.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.0.1. Resumen

En este trabajo se muestran los resultados numéricos del desempeño de generadores eólicos, especialmente diseñados para operar dentro de los denominados *chorros de baja altitud* (o LLJ, por su siglas en inglés). Este es un caso relevante en el contexto energético de México por tratarse de corrientes atmosféricas ininterrumpidas, que están presentes en distintas regiones dentro del territorio nacional.

El objetivo central de la tesis fue probar la operación conjunta de dos generadores instalados cercanamente, con la finalidad de caracterizar el tipo de interacciones mutuamente desarrolladas, así como su impacto en la eficiencia global del arreglo.

Para ello, se adoptó la geometría base diseñada por el Ing. D. Núñez.⁴⁰ Dicha geometría fue optimizada para operar eficientemente en la región de esfuerzos cortantes negativos dentro del LLJ. El diseño de los álabes se probó como parte de un rotor completo, ensamblado en torno a diferentes diseños del buje de la máquina.

El diseño resultante (álabes, rotor y buje) se estudió numéricamente con cuatro diferentes condiciones de flujo incidente: a) un perfil uniforme, b) un LLJ con el pico de velocidades incidiendo en el eje del buje, c) el aerogenerador operando en la zona de esfuerzos cortantes negativos del LLJ, d) un perfil logarítmico que representa la capa límite atmosférica. Las propiedades de flujo en la estela fueron calculadas con precisión razonable, como función de la distancia axial y del tiempo.

Resalta que, en términos generales, los resultados obtenidos concuerdan con los reportados por Doosttalab et.al¹⁴ (ver Figura 4.59). Sin embargo, aún no es posible hacer una validación experimental de estos resultados, porque el único trabajo experimental reportado se refiere a generadores convencionales.^{14,17} Por esta razón se desarrolló un modelo teórico simplificado, para tratar de explicar con mayor detalle los factores clave que dictan la evolución del sistema físico.

5.0.2. Aportaciones

1. En primer lugar fue llevado a cabo el estudio del desempeño de un nuevo diseño de aerogenerador que no había sido estudiado previamente, y que representa una mejora significativa, de un 5% aproximadamente, con respecto a los diseños convencionales cuando éstos operan dentro de un LLJ.
2. A diferencia de los trabajos citados que utilizaron el *modelo de disco actuador* como en Doosttalab et.al,¹⁴ Gadde et.al,¹⁷ Abkar et.al,¹⁸ o en su defecto el *modelo de línea actuadora* como en Zhang et.al,²² Gutierrez et.al,¹⁹ o Gadde et.al,²⁰ en este trabajo se utilizó una geometría *ad hoc* para operar dentro de un LLJ, por lo que las fuerzas se obtienen directamente como parte del cálculo general. Esto permite mostrar explícitamente características adicionales de la estela formada corriente abajo del arreglo de generadores.
3. Se realizó una simulación para la interacción flujo-estructura, donde la rotación del generador es un producto de dicha interacción. Esto es un punto importante que distinga a este trabajo de los realizados por Enger⁵² y por Salazar.⁵⁵ No obstante, existen trabajos donde la velocidad angular del aerogenerador es variable, como en el caso de Chen et.al,⁷⁰ en los que se reportan problemas de estabilidad.
4. Se creó un modelo numérico viable para simular la interacción de dos generadores, sin simplificaciones ni reducciones de características importantes del caso base.
5. Con el arreglo de generadores dispuestos cercanamente, se demostró que el segundo generador no pudo operar eficientemente a causa de la interacción con la estela generada por el primer generados.

5.0.3. Problemas encontrados

En primer lugar, aunque entre las versiones de OpenFOAM normalmente hay poca diferencia (por ejemplo, cambios de sintaxis), en el presente se vieron diferencias relevantes entre versiones del código que dictaron el desarrollo del modelo numérico. En este sentido, al inicio se utilizó la versión de la fundación (www.openfoam.org) que causó los siguientes problemas: a) creación de la malla, b) construcción de la malla rotatoria con una rotación no uniforme, y c) la implementación del chorro no uniforme. Por estas razones, se utilizó la versión ESI-openFOAM (www.openfoam.com).

Algunas limitaciones relacionados con el código openFOAM incluyen la dificultad para encontrar información apropiada. Por ejemplo, para implementar la malla rotatoria rígida por fuerzas fue necesario investigar en páginas externas. Para resolver otras limitaciones hubiera sido necesario “adentrarse” en el código (por ejemplo, para implementar correctamente la ecuación (2.41), o para imprimir la velocidad en coordenadas cilíndricas).

Para procesar la información, los archivos de resultados tuvieron que ser convertidos a otro formato por medio de un código en Python. Además se encontró que la versión disponible de openFOAM no imprime ciertos datos relevantes para el análisis, tales como los residuales o la velocidad angular para una y dos máquinas. Por ello, antes de iniciar cualquier simulación se utilizó el comando:

```
$ nohup -np N pimpleFoam -parallel >log -&
```

donde `nohup` y `&` se utilizan para que el proceso se mande a segundo plano, lo cual es muy útil para simulaciones que toman mucho tiempo. `> log` significa que la simulación será impresa en un archivo generador con el nombre `log`. Debido a que el tamaño de los archivos de resultados es muy grande, fue necesario crear un código de python para recuperar la información no incluida tras terminar la simulación.

Por último, no se puede dejar de lado el tiempo requerido para efectuar las simulaciones. Típicamente, las simulaciones tomaron alrededor de 10 días (en cada caso con dos generadores) y luego otros 4 días en el post-procesado con Paraview para extraer datos y visualizaciones adicionales. Puede considerarse que este factor fue muy limitante para producir resultados de mejor calidad, en un dominio más grande y con una malla refinada.

Asimismo, se llegaron a crear hasta 500 carpetas de salida para hacer el análisis requerido

con archivos cuyo tamaño estaba entre 0.5 – 1.1 GB. Esto hizo necesario liberar memoria entre iteraciones¹ para terminar cada caso.

5.0.4. Recomendaciones

1. Tal como se describe en⁶⁹ es recomendable importar la geometría en formato .stp en SALOME-CFD, y luego utilizar dicho programa para exportar la geometría al formato .stl (y de ahí a .obj si así se desea). Esto se debe a que los programas CAD comerciales trabajan típicamente en el sistema milimétrico, mientras que SALOME lo hace en metros y esto distorsiona las medidas cuando se exporta directamente.
2. Una importante recomendación es la de evaluar la malla generada antes de iniciar la simulación. Posiblemente este sea el paso más difícil para llevar a cabo la simulación, ya que se debe revisar que los elementos de la malla sean suficientemente regulares, y que exista una cantidad suficiente de nodos en las mallas rotatorias para minimizar los errores de la interpolación, e inestabilidades numéricas.
3. También es recomendable generar un dominio numérico de mayor tamaño, donde se puede renunciar a la transición suave entre el dominio y la primera región de transición. Esta estrategia permitiría mejorar la convergencia del algoritmo PIMPLE porque el campo de presión es el más difícil de estabilizar. Con dominios más grandes se puede cumplir de mejor manera la condición de frontera de Neumann.

5.0.5. Trabajo futuro

A partir de este trabajo es posible considerar los siguientes desarrollos futuros:

1. Reformular el modelo numérico para realizar simulaciones en el régimen compresible. Como se vio en los casos analizados, el flujo en las puntas de los álabes puede alcanzar un número de Mach de $M = 0.31$, lo que implica un cierto efecto de compresibilidad tenue en la región donde se producen las mayores pérdidas por circulaciones secundarias.
2. Se puede efectuar una comparación directa con la teoría desarrollada para validar ciertos aspectos del modelo numérico.

¹OpenFoam tiene la capacidad de limitar el número de carpetas que se escriben

3. Se requiere una genuina validación experimental por medio de la realización de pruebas en un túnel de viento.
4. Repetir el experimento con una malla más fina y optar por un modelo LES para investigar, con mayor detalle, la evolución de la estela. Esta propuesta se debe a que las simulaciones RANS se basan en el cálculo de campos promediados, donde se calcula y modela la viscosidad turbulenta, la energía cinética turbulenta, y la disipación turbulenta a través de ecuaciones de transporte. Esta no es información proveniente de la malla, contrario a lo que sucede con LES.
5. Realizar un diseño de góndola óptimo para el perfil correspondiente, ya que amerita un estudio dedicado.
6. Hacer un estudio paramétrico con la altura de incidencia z del chorro. En este trabajo solo se realizó esto en los dos casos extremos, es decir, con $z = H$ y $Z = H - R$. Mediante este análisis se podría determinar con exactitud la altura óptima del generador con respecto al pico del chorro.
7. Es importante realizar un estudio paramétrico que se encargue de analizar el efecto de la separación de los generadores, ya que el presente caso quedó limitado a la separación $\Delta = D$. Además, es preciso incluir un segundo parámetro que permita desalinearse el segundo generador con respecto al primero.
8. Repetir el experimento numérico introduciendo ruido en el chorro. Aquí se planteó que el flujo incidente es un flujo perfecto (es decir, sin deformaciones). Siguiendo esta línea es pertinente introducir condiciones iniciales dependientes del tiempo: en los flujos reales el chorro no se queda fijo en un punto y es importante conocer como afectará al desempeño de la turbina.
9. Modificar el código de OpemFOAM para mejorar la convergencia en la velocidad angular.
10. Debe continuarse el estudio que se realizó para generalizar los perfiles aerodinámicos, mediante la aplicación de la teoría de Joukowski que dio lugar a las ecuaciones para-

métricas²:

$$x(\mu, \nu; \varepsilon; \phi_0) = c[(1 + \mu)(\cos(\nu) + \varepsilon \cos(\nu - \phi_0)) - \varepsilon \cos(\phi_0)] \cdot \left[1 + \frac{1}{(1 + \mu)^2[1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(\phi_0)] - 2\varepsilon(1 + \mu)[\cos(\nu + \phi_0) + \varepsilon \cos(\nu)] + \varepsilon^2} \right] \quad (5.1)$$

$$y(\mu, \nu; \varepsilon; \phi_0) = c[(1 + \mu)(\sin(\nu) + \varepsilon \sin(\nu - \phi_0)) + \varepsilon \sin(\phi_0)] \cdot \left[1 - \frac{1}{(1 + \mu)^2[1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(\phi_0)] - 2\varepsilon(1 + \mu)[\cos(\nu + \phi_0) + \varepsilon \cos(\nu)] + \varepsilon^2} \right] \quad (5.2)$$

En estas expresiones (μ, ν) forman un sistema de coordenadas curvilíneo y ortogonal³, μ es la coordenada que parte del perfil aerodinámico y se aleja, ortogonalmente al perfil, cuando toma el valor $\mu = 0$. Este parámetro puede tomar valores entre $\mu \in [0, \infty)$. Por otra parte ν es la coordenada que recorre el perfil aerodinámico y toma valores en $\nu \in (-\pi, \pi]$. ε es un parámetro que modera el espesor del perfil aerodinámico y $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mide la curvatura del perfil.

Estas ecuaciones fueron linealizadas en ε y su forma con $\mu = 0$ está dada por

$$x(\nu; \varepsilon; \phi_0) = 2c[\cos(\nu) + \varepsilon[\cos(\nu - \phi_0) - \cos(\phi_0) + [\cos(\nu + \phi_0) - \cos(\phi_0)] \cos(\nu)]] \quad (5.3)$$

$$y(\nu; \varepsilon; \phi_0) = 2c\varepsilon[\cos(\phi_0) - \cos(\nu + \phi_0)] \sin(\nu) \quad (5.4)$$

La Figura 5.1 ilustra la variedad de perfiles que pueden obtenerse para optimizar la geometría de los álabes.

Se puede utilizar este perfil con dos objetivos: el primero es generar una malla ortogonal al perfil para estudiar los coeficientes dinámicos C_D , C_L , C_M . Además se pueden resolver analíticamente las ecuaciones de flujo potencial, Stokes y ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes. Estas mallas se muestran en la Figura 5.2.

Una vez analizados los perfiles⁴, éstos pueden ser utilizados para generar un nuevo diseño de álabes adaptado para el caso estudiado. Esta técnica tiene la ventaja de que la transición de la geometría es suave en todo punto. Véase la Figura 5.3.

²Estas fueron obtenidas utilizando la variable compleja y el mapeo conformal de Joukowski. Este se puede consultar en³¹

³Esto queda pendiente por demostrar

⁴Sin olvidar un estudio experimental

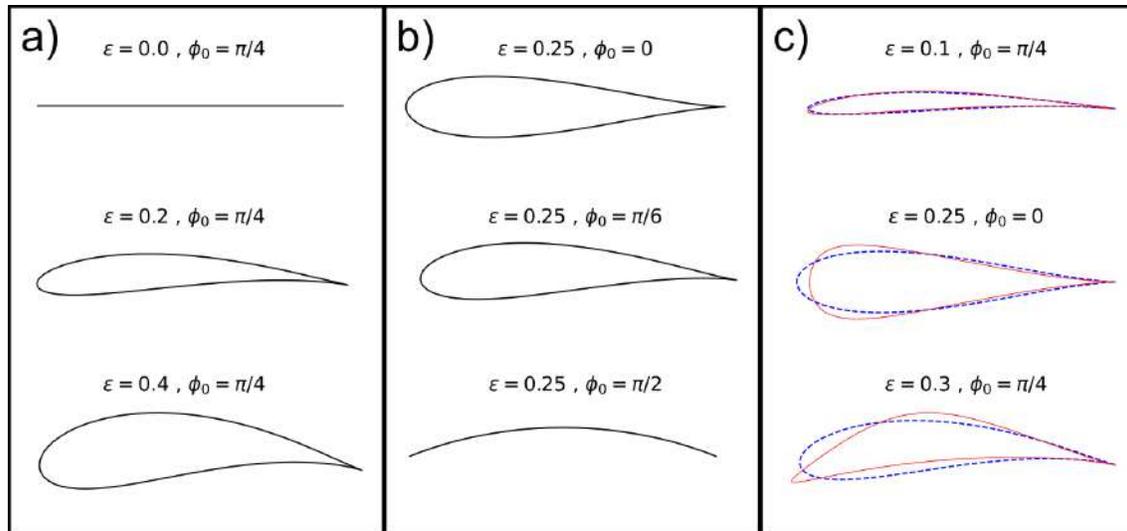


Figura 5.1: a) Perfiles obtenidos ante variaciones de ϵ . b) Perfiles obtenidos ante variaciones de ϕ . c) Versión linealizada de los perfiles ((5.3) y (5.4)) (curva roja) y su comparación con las originales ((5.1) y (5.2)) (curva azul).

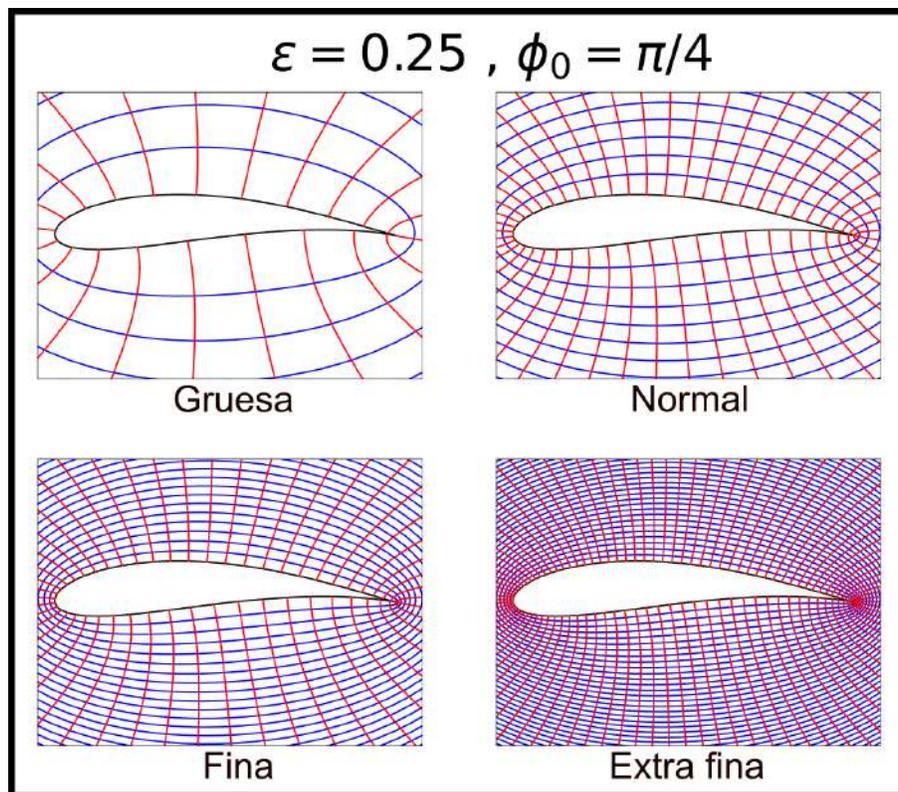


Figura 5.2: Malla generada por el sistema de coordenadas (μ, ν) . El perfil corresponde a $\mu = 0$

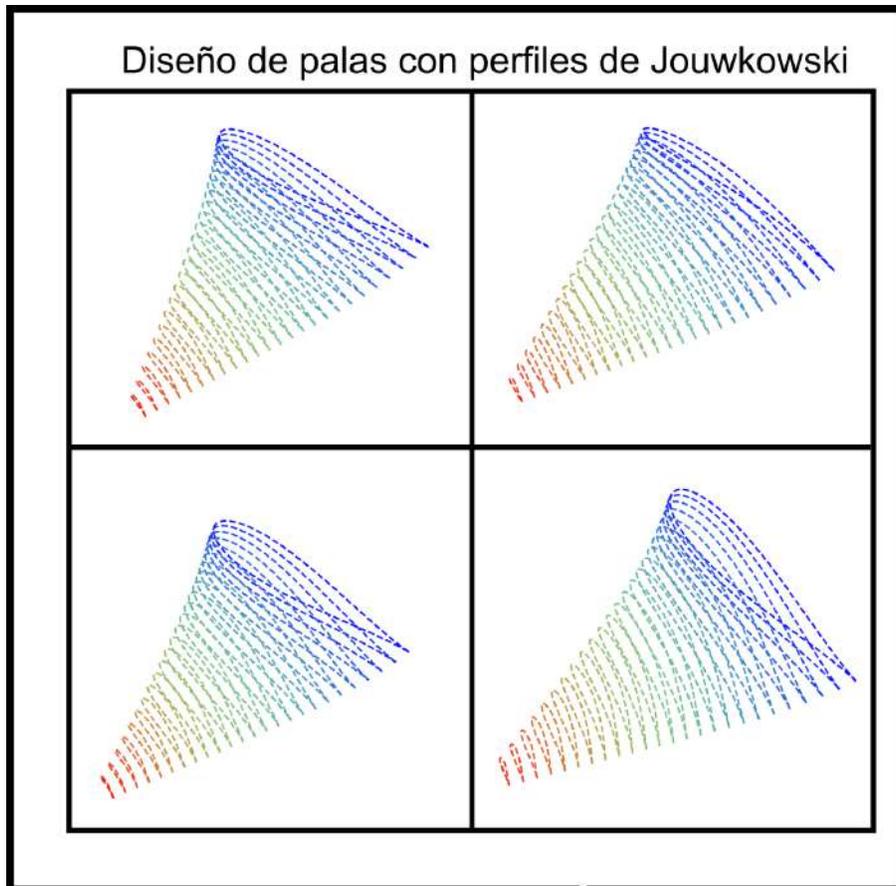


Figura 5.3: Diseños de álabes utilizando los perfiles de Joukowski.

Apéndice A

Demostraciones

A.1. Demostración del Potencial generalizado

Se demuestran las ecuaciones (2.16) y (2.17). Para ello, considere una función $U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ que satisface:

$$dU = -\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

Ahora, considere otra función $V = V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$. Derivándola respecto al tiempo se cumple

$$\frac{dV(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V \cdot \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (\text{A.2})$$

Descomponiendo el último miembro del lado derecho y despejando se tiene

$$\frac{d}{dt}(V + \nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\nabla V - \frac{d(\nabla_{\mathbf{u}} V)}{dt} \right) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

Si se multiplica por dt y se recuerda que $d\mathbf{x} = \mathbf{u}dt$, resulta natural definir a la nueva función U y a la fuerza \mathbf{F}_B en términos de V de la siguiente manera.

$$U := V - \nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{F}_B = \frac{d(\nabla_{\mathbf{u}} V)}{dt} - \nabla V \quad (\text{A.5})$$

En donde se satisface que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.6})$$

Observe que la igualdad (A.1) se cumplirá siempre que V no dependa explícitamente del tiempo ($V = V(\mathbf{x}, \mathbf{u})$). $\partial V/\partial t$ representa fuerzas que no son conservadoras, o dicho de otra forma, disipadoras. Ejemplos de este tipo de fuerzas son la fricción durante el contacto de dos superficies.

A.2. Demostración del potencial de fuerzas no inerciales

Las fuerzas no inerciales medidas desde el sistema que rota tienen la forma

$$\mathbf{F}_B = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I) \quad (\text{A.7})$$

con la velocidad medida desde el sistema inercial. Se mostrará primero que para la fuerza centrífuga (desde el marco inercial), su potencial es

$$V = \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} \quad (\text{A.8})$$

Primero, se expresa esta fuerza como

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = -\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 \mathbf{x} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A.9})$$

Aplicando el producto escalar con el vector $d\mathbf{x}$ da como resultado

$$\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{x} = -\|\boldsymbol{\Omega}\|^2(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{x}) \quad (\text{A.10})$$

El primer miembro del lado derecho se puede expresar como:

$$\|\boldsymbol{\Omega}\|^2(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) = \|\boldsymbol{\Omega}\|^2 d\left(\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}\right) = d\left(\frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|^2\|\mathbf{x}\|^2}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

Donde la última igualdad se debe a que la velocidad angular es independiente del vector posición, dado que afecta por igual a todos los puntos del marco de referencia que gira. En consecuencia el segundo miembro queda expresado de la siguiente manera

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})d(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}) = d\left(\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2}{2}\right) \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{x} = d \left(-\frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2}{2} + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Comparando con (A.1) y (A.5) se llega a la expresión deseada para U , y por lo mencionado arriba también para V , y es

$$U = V = \frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2}{2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2}{2} = \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} \quad (\text{A.14})$$

Con esto queda demostrada la forma del potencial V para la fuerza centrífuga (por unidad de masa).

Por otro lado si se toma el producto escalar con el vector $d\mathbf{x}$ en las fuerzas de Euler y Coriolis se obtiene (Adoptando \mathbf{u}_I como \mathbf{u})

$$\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{x} = -(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Lo que implica que $dU = 0 \rightarrow U = \text{cte}$. Se toma esta constante con valor igual a 0^1 . Por lo tanto, de (A.4) se observa que V cumple

$$V = \nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.16})$$

Dada la naturaleza de esta fuerza, se propone a V de la siguiente forma

$$V = \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \quad (\text{A.17})$$

Aplicando el gradiente de velocidades a V se observa que²:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} V = & -[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times (\nabla_{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \\ & + \mathbf{u} \times (\nabla_{\mathbf{u}} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Aplicando producto escalar con \mathbf{u} se verifica la validez de (A.30). Por otro lado, aplicando el gradiente respecto al vector posición a V queda como

$$\nabla V = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.19})$$

¹Añadir una constante al potencial no afecta el aspecto de la fuerza \mathbf{F}_B .

²En estos pasos se asume que el vector posición y velocidad son independientes. Este resultado es válido en el contexto de la mecánica clásica.

Por lo tanto:

$$\mathbf{F}_B = \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{u}}V) - \nabla V = -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.20})$$

Este potencial V ya cumple los requisitos pedidos, así que sumando (A.8) con (A.16) se obtiene el potencial de las fuerzas no inerciales

$$V = \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.21})$$

Sin embargo, si se hace el cambio al sistema rotatorio mediante $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ se obtiene:

$$V = -\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.22})$$

Observe que el potencial generalizado U es invariante ante este cambio de referencia, pues

$$\begin{aligned}
U_R &= V_R - \nabla_{\mathbf{u}_R} V_R \cdot \mathbf{u}_R = \\
&= -\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R) - \nabla_{\mathbf{u}_R} (\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R)) \cdot \mathbf{u}_R = \\
&= -\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R) - \nabla_{\mathbf{u}_R} \mathbf{u}_I \cdot \nabla_{\mathbf{u}_I} (\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R)) \cdot \mathbf{u}_R = \\
&= -\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R) - \nabla_{\mathbf{u}_I} (\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R)) \cdot \mathbf{u}_R = \\
&= -\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) - \nabla_{\mathbf{u}_I} (\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}))) \cdot (\mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})) = \\
&= \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I) - \nabla_{\mathbf{u}_I} (\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I)) \cdot (\mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = \\
&= \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = \\
&= \left[\frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2} + \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I) \right] - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_I = \\
&= V_I - \nabla_{\mathbf{u}_I} V_I \cdot \mathbf{u}_I = U_I
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Concluyendo así que

$$U_I = U_R = \frac{\|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}\|^2}{2}. \tag{A.24}$$

A.3. Demostración de la ecuación de Bernoulli

Se toma como punto de partida la ecuación de la energía cinética (2.15) con el tensor de esfuerzos (2.5) dado únicamente por la presión termodinámica, dado que el fluido es perfecto

por hipótesis y no hay acción de los esfuerzos viscosos.

$$\rho \frac{dk}{dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{F}_B \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo las fuerzas de campo en favor del potencial V dado por (2.16) y dividiendo entre ρ la ecuación (A.25) toma la forma

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla p) + \frac{d}{dt} (d(\nabla_{\mathbf{u}} V) - V) \quad (\text{A.26})$$

Dado que por se asume $p = p(\mathbf{x})$ y $V = V(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, o en otras palabras no hay dependencia explícita en el tiempo. Si además se considera que la densidad es barotrópica ($\rho = \rho(p)$) se tiene la siguiente identidad.

$$\frac{dp}{\rho} = d \left[\int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\rho(\tilde{p})} \right] \quad (\text{A.27})$$

Y dado que $dp/\rho = (d\tilde{p}/dt)/\rho = (\mathbf{u} \cdot \nabla p)dt$ por hipótesis se reescribe la expresión (A.26) de la siguiente manera

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\rho(\tilde{p})} \right] + \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathbf{u}} V \cdot \mathbf{u} - V) \quad (\text{A.28})$$

Despejando, se consigue el resultado (2.32).

A.4. Demostración de la validez en la incompresibilidad del fluido

Para llevar a cabo esta demostración es necesario utilizar las definiciones de la *compresibilidad isotérmica* (κ_T), la *expansibilidad isobárica* (β), los calores específicos (c_v), (c_p) y el

coeficiente de Laplace (γ):³⁹

$$\kappa_T := \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (\text{A.29})$$

$$\beta := -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.30})$$

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho \quad (\text{A.31})$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_v + \frac{\beta}{\rho} \left[p - \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_T \right] \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A.33})$$

Donde h es la entalpía del sistema. Definida como $h = e - p/\rho$ ³.

Son necesarias otras dos identidades. La primera de ellas es

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_p \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{\gamma c_v}{T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_s \quad (\text{A.34})$$

Y la segunda se basa en la relación de Maxwell³⁹

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial \nu} \right)_s = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \nu^2} \right)_{s,s} = \frac{\gamma}{\nu \kappa_T} \quad (\text{A.35})$$

Donde ν es el volumen específico del gas, que se relaciona con la densidad mediante $\nu = 1/\rho$. Utilizando las definiciones (2.25) y (A.29), donde se reemplaza en (A.35) ν por ρ se consigue

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (\text{A.36})$$

Para demostrar la ecuación (2.37) se toma como punto de partida la ecuación de estado térmica $\rho = \rho(p, T)$ que al diferenciarse toma la siguiente expresión con ayuda de las ecuaciones

³Si se compara con las ecuaciones (2.25) y (2.26) se encuentra un par de relaciones similares para la entalpía $1/\rho^2 = (\partial h/\partial p)_T$ y $T = (\partial h/\partial s)_p$

(A.34) y (A.36)

$$\begin{aligned} d\rho &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dT \Rightarrow \\ \frac{d\rho}{\rho} &= \gamma \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{\rho} + \frac{\gamma c_v}{\rho T} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p dT. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Todo lo que queda es eliminar la diferencial de temperatura dT . Una manera de hacerlo es recurrir a la ecuación de estado calórica $e = e(p, T)$ donde nuevamente se toma su expresión diferencial y se

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_T dp + c_v dT \quad (\text{A.38})$$

Utilizando las ecuaciones (A.29) - (A.32) se puede reescribir la diferencial de la energía respecto a la presión a temperatura constante como

$$\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_T = \frac{c_v \kappa_T}{\beta} \left[1 - \gamma + \frac{p\beta}{\rho c_v}\right] \quad (\text{A.39})$$

Que al sustituir en (A.39) da como resultado al despejar dT

$$dT = \frac{de}{c_v} - \frac{pc_v \kappa_T}{\beta} \left[1 - \gamma + \frac{p\beta}{\rho c_v}\right] \frac{dp}{\rho} \quad (\text{A.40})$$

Tomando la ecuación de estado $de = p/\rho^2 d\rho + T ds$ para reemplazar la diferencial de energía en favor de diferenciales de densidad $d\rho$ y entropía ds se llega a que

$$dT = \frac{T}{c_v} ds + \frac{p}{\rho c_v} \frac{d\rho}{\rho} - \frac{pc_v \kappa_T}{\beta} \left[1 - \gamma + \frac{p\beta}{\rho c_v}\right] \frac{dp}{\rho} \quad (\text{A.41})$$

Finalmente, al reemplazar la expresión (A.41) en (A.37) y luego despejar $d\rho/\rho$ se consigue la expresión deseada para la diferencial de ρ en términos de las diferenciales de presión y de entropía

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s - \frac{\kappa_T c_v}{\beta} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \left(1 - \gamma + \frac{p\beta}{\rho c_v}\right)\right] \frac{dp}{\rho} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{\rho}}{\frac{1}{\gamma} - \frac{p}{\rho^2 T} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p}. \quad (\text{A.42})$$

Observe que la ecuación (A.42) es muy general y aplica para toda sustancia ya que no requirió de expresiones explícitas para las ecuaciones de estado térmica y calórica. Todo

queda descrito en términos de diferenciales de densidad y entropía las cuales son las variables de estado extensivas⁴ para una ecuación de la forma $e = e(\rho, s)$.

Si se utilizan las ecuaciones de estado para el gas ideal (2.27) y (2.28) y se asume que los cambios de temperatura y presión no son muy bruscos entonces se halla que $\kappa_T = 1/p$ y $\beta = 1/T$. Además, en (2.27) la constante del gas ideal (R_g) se puede expresar en términos de c_v y γ mediante $R_g = c_p - c_v = c_v(\gamma - 1)$ y, a primer orden, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = 1/c^2$. Donde c es la celeridad local del sonido. Lo que simplifica la reduce (A.41) a

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{\rho} - \frac{ds}{\gamma c_v} \quad (\text{A.43})$$

Que se trata de la expresión dada en la ecuación (2.36).

⁴ignorando que son por unidad de masa

Apéndice B

Modelos de Turbulencia

Existen 3 grandes vertientes en cuanto a la forma de llevar a cabo simulaciones en CFD que son ¹:

- **RANS:** Las siglas provienen de su nombre en Inglés *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS). En este enfoque se utilizan las ecuaciones promediadas de Reynolds que, como indica su nombre, se promedian las ecuaciones de conservación (2.2), (2.4) y (2.14). Este proceso da lugar a nuevas variables que impiden cerrar el sistema de ecuaciones. Para hacerlo, se proponen ecuaciones de transporte tal como aparecieron en (3.1)² para las cantidades nuevas.^{72,76} Este se detalla en la Sección B.1
- **LES:** Su traducción al español es *Simulación de remolinos a gran escala* y viene de sus siglas en Inglés *Large eddy simulation* (LES). En estos modelos tanto la malla numérica como una función especificada son ocupadas para filtrar al campo de velocidades del fluido lo cual da lugar a *ecuaciones de conservación filtradas de los campos*. O dicho de otra manera, se resuelven las ecuaciones de conservación (2.2), (2.4) y (2.14) hasta una escala determinada por el tamaño de las celdas que conforman la malla y con ello se logran capturar los remolinos que son característicos de la turbulencia hasta la escala que permite la malla. Las escalas menores al tamaño mínimo de malla son resueltas con ayuda de esta función de filtrado lo que implica, al igual que con los modelos RANS, en un sistema que no es cerrado. Es ahí donde juegan un papel importante los modelos

¹Existen más métodos para aproximar las ecuaciones de conservación sin embargo como los son DDES o los métodos espectrales.

²En su forma diferencial, que se obtiene aplicando el Teorema de Gauss-Ostrogradsky.

analíticos que buscan resolver los campos filtrados.^{72,76}

- **DNS:** *Direct Navier -Stokes* o *Simulación directa de Navier Stokes*. En este proceso se resuelven directamente las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que implica resolver la turbulencia hasta la escala de Kolmogorov que es aquella en donde la viscosidad es predominante en el flujo y se encarga de disipar los remolinos en energía térmica. Esto implica que para resolver todos los vórtices hasta esta escala es requerida una malla que pueda capturar todos los vórtices hasta las escalas más pequeñas. Esto imposibilita utilizar hacer simulaciones directas de manera práctica resolver salvo para casos muy particulares.^{72,82}

B.1. Modelos de turbulencia RANS

Se describen abreviadamente los diferentes modelos RANS cuyo punto de partida, como fue mencionado, son *las ecuaciones promediadas de Reynolds*.^{76,77} Por ello, se comienza por describir operaciones matemáticas para llevar a cabo este promediado y su aplicación en las ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.14) que dará lugar a dichas ecuaciones.

B.1.1. Promediado de Reynolds

O. Reynolds en (1887)⁷¹ propuso que un fluido puede descomponerse en una componente promediada y una fluctuación, para resolver las ecuaciones de conservación. En primer lugar si se define por

$$\langle \alpha(\mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.1})$$

al promedio de una cantidad α , entonces, como propuso Reynolds, toda cantidad α estará dada por

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \langle \alpha(\mathbf{x}, t) \rangle + \alpha'(\mathbf{x}, t) = \bar{\alpha} + \alpha' \quad (\text{B.2})$$

Entre sus propiedades más relevantes se encuentran:

1. El promedio de un promedio es sí mismo, y consecuencia de ello es que el promedio de

una fluctuación es cero:

$$\langle\langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle\rangle = \langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle \quad (\text{B.3})$$

$$\langle\alpha'(\mathbf{x}, t)\rangle = 0 \quad (\text{B.4})$$

2. Es un operador lineal:

$$\langle\lambda_1\alpha_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2\alpha_2(\mathbf{x}, t)\rangle = \lambda_1\langle\alpha_1(\mathbf{x}, t)\rangle + \lambda_2\langle\alpha_2(\mathbf{x}, t)\rangle \quad (\text{B.5})$$

3. El promedio del producto de una cantidad α y el promedio de otra β es el producto de los promedios, o

$$\langle\alpha(\mathbf{x}, t)\beta(\mathbf{x}, t)\rangle = \langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle\langle\beta(\mathbf{x}, t)\rangle \quad (\text{B.6})$$

6. Las operaciones de promedio y derivación, sin importar la variable son conmutativas. En particular

$$\nabla\langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle = \langle\nabla\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left\langle\frac{\partial\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right\rangle \quad (\text{B.8})$$

Dos tipos de promedio que se utilizan comúnmente en las simulaciones para casos transitorios son⁴¹ :

- Promedio temporal con tiempos grandes:

$$\langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha(\mathbf{x}, \tilde{t} + t) d\tilde{t} \quad (\text{B.9})$$

- Promedio de ensamble:

$$\langle\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.10})$$

En los códigos de CFD generalmente se aplican la temporal para los casos estacionarios, y el de ensamble para los casos transitorios.

B.1.2. Ecuaciones promediadas de Reynolds

El resultado de aplicar la descomposición (B.2), junto con sus propiedades descritas, a las ecuaciones (2.2), (2.4), (2.14) (o en su defecto a las ecuaciones (2.15) y (2.21)) *en el caso de un flujo incompresible* resulta en las ecuaciones promediadas de Reynolds^{72,83} que se escribirán de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) = \nabla \cdot \left(-p \overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d + \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R \right) + \rho \bar{\mathbf{F}}_B \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{2} + \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle}{2} \right) + \nabla \cdot [\langle \bar{\mathbf{u}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R + \rho \langle (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u}' \rangle] = \\ \nabla \cdot \left[-\langle \bar{p} \bar{\mathbf{u}} \rangle - \langle p' \mathbf{u}' \rangle + \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \langle \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \mathbf{u}' \rangle \right] - \frac{2}{\mu} \left(\left\| \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \right\|^2 + \left\langle \left\| \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}' \right\|^2 \right\rangle \right) \\ + \rho \bar{\mathbf{F}}_B \cdot \bar{\mathbf{u}} + \langle \rho \mathbf{F}'_B \cdot \mathbf{u}' \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{e} \right) = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} + \bar{Q}_s + \frac{2}{\mu} \left(\left\| \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \right\|^2 + \left\langle \left\| \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}' \right\|^2 \right\rangle \right) \quad (\text{B.14})$$

Donde, en (B.12) y (B.13), $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}$ es el tensor de esfuerzos cortantes del flujo promedio y $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}'$ es el tensor de esfuerzos a causa de las fluctuaciones del campo de velocidades. Sus expresión son:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \left[\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T \right] \quad (\text{B.15})$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}' = 2\mu \left[\nabla \mathbf{u}' + (\nabla \mathbf{u}')^T \right]. \quad (\text{B.16})$$

Y el tensor $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$, es el conocido tensor de esfuerzos de Reynolds, que para flujos incompresibles está dado por

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \quad (\text{B.17})$$

Observe que, aunque las ecuaciones de conservación de momento (2.2) y de energía cinética (2.15) (o la de energía mecánica (2.19) si todas las fuerzas son conservadoras) son equivalentes, las ecuaciones promediadas (B.12) y (B.13) ya no lo son a causa de las fluctuaciones de

velocidad que están contenidas en los términos $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}'$ y $\rho\langle\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')\rangle$. Por ello la ecuación (B.13) se suele separar en dos, donde se hacen las definiciones:

$$\bar{k} = \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{2} \quad (\text{B.18})$$

$$k_T = \frac{\langle\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'\rangle}{2} = \frac{\text{Tr}(\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle)}{2} = \frac{1}{2}\text{Tr}\left(\frac{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R}{\rho}\right). \quad (\text{B.19})$$

A \bar{k} se le conoce como la *energía cinética del flujo promedio* y a k_T es la *energía cinética turbulenta*³. Las ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\partial\bar{k}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla\bar{k} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} = -\mathcal{P} - \bar{\varepsilon} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial k_T}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla k_T + \nabla \cdot \mathbf{T}' = \mathcal{P} - \varepsilon \quad (\text{B.21})$$

Donde $\bar{\mathbf{T}}$ es el flujo de energía cinética del promedio y \mathbf{T}' es el flujo de energía cinética turbulenta cuyas expresiones en términos de $\bar{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}' son

$$\bar{\mathbf{T}} := \langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{\overline{p\mathbf{u}}}{\rho} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{T}' := \frac{\langle(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u}'\rangle}{2} + \frac{\langle p'\mathbf{u}'\rangle}{\rho} - \left\langle\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \mathbf{u}\right\rangle \quad (\text{B.23})$$

A \mathcal{P} se le denomina la *producción de energía cinética turbulenta*, a $\bar{\varepsilon}$ la *disipación debida al flujo medio* y a ε la *disipación debida a las fluctuaciones o disipación turbulenta*. En términos de $\bar{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}' se escriben como

$$\mathcal{P} := -\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle : \nabla\bar{\mathbf{u}} = -\frac{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R : \nabla\bar{\mathbf{u}}}{\rho} \quad (\text{B.24})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\left\|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}\right\|^2}{\rho\mu} = 2\nu\left\|\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T\right\|^2 \quad (\text{B.25})$$

$$\varepsilon = \frac{2\left\|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}'\right\|^2}{\rho\mu} = 2\nu\left\|\langle\nabla\mathbf{u}' + (\nabla\mathbf{u}')^T\rangle\right\|^2 \quad (\text{B.26})$$

Como se adelantó al inicio de la sección, el sistema de ecuaciones (B.11) - (B.14), (B.20), (B.21) no es un sistema de ecuaciones cerrado. Se deja ver que la razón de ello es porque

³No confundir, no es la energía cinética promedio del flujo (observe el orden de las palabras): $\bar{k} \neq \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}/2$. Lo que si se cumple es $\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}/2 = \bar{k} + k_T$.

aparecieron términos extra como lo son el tensor de Reynolds, la energía cinética turbulenta o la disipación ε .

Es aquí donde entran en juego los modelos RANS, donde se postulan relaciones entre estos términos nuevos y tanto el flujo promedio $\bar{\mathbf{u}}$ como sus gradientes, con el objetivo de cerrar este sistema de ecuaciones. Los modelos más comunes son los denominados *Modelos de viscosidad de turbulenta*, aunque no son los únicos,^{55,76,83} y se describen a continuación.

B.1.3. Modelos de viscosidad turbulenta

En estos modelos se recurre a la hipótesis de J. Boussinesq, quien propuso en 1877^{72,76,77,83} que el tensor de esfuerzos $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$ sigue una ley análoga a un fluido Newtoniano (2.6), es decir que se relaciona linealmente al gradiente del campo promedio del flujo de acuerdo a⁴

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R = 2\mu_T(\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T) - \frac{2k_T}{3}\overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d = \frac{\mu_T}{\mu}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} - \frac{2\rho k_T}{3}\overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d \quad (\text{B.27})$$

Donde μ_T es la viscosidad turbulenta debida a los remolinos que se forman cerca de las paredes, la cual representa una nueva incógnita que debe ser calculada. Una vez que esta sea conocida se utiliza (B.27) para conocer a $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$ y con ello resolver el sistema de ecuaciones (B.11)-(B.14). Un modelo relevante para μ_T que se aplica en flujos de capa límite es la *hipótesis de mezclado de Prandtl* que relaciona la viscosidad turbulenta con una longitud de mezcla del flujo medio. Físicamente establece un límite permitido en el tamaño máximo para los vórtices. En su versión moderna, propuesta por Smagorinsky (1963) está dada por:

$$\mu_T = \ell_m^2 \sqrt{2} \|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}\| \quad (\text{B.28})$$

Donde ℓ_m es la longitud de mezclado de Prandtl. Se resumen los modelos de turbulencia utilizados, dando énfasis en los resultados principales.

⁴Esta hipótesis surge de una analogía con el movimiento Browniano de un gas con las fluctuaciones turbulentas y expresa que el momento neto es transportado en la dirección del gradiente de velocidades⁷²

B.1.4. Algunos modelos de turbulencia

Dado que (B.11), (B.12), (B.20) y (B.21) son ecuaciones de transporte para ρ^5 , $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{k} y k_T . Se requiere, además del modelo para $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$ descrito en la sección anterior, expresiones para \mathcal{P} y \mathbf{T}' y ε en términos de los campos promedio $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{k} y k_T . Esto implica que en los modelos RANS *se evitan resolver las fluctuaciones del campo \mathbf{u}* , y como consecuencia se simplifica el tiempo requerido para resolver al campo de velocidades del fluido, a costo de perder información del flujo como lo es la captación de vórtices.

Las expresiones de los términos \mathcal{P} y \mathbf{T}' y ε serán descritas en lo que sigue

Modelo $k_T - \varepsilon$:

Este modelo fue propuesto en su forma más actual por Launder & Sherma (1974)^{77, 73}. Las hipótesis relevantes son, primero, que se vinculan k_T y ε a la viscosidad turbulenta por medio de la ecuación:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k_T^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.29})$$

Donde C_μ es una constante de proporción entre estas cantidades. Lo anterior implica que también se resuelve la longitud de mezclado de Prandtl

$$\ell_m = \frac{\mu_T}{\rho k_T^{1/2}} = \frac{C_\mu k_T^{3/2}}{\varepsilon} \quad (\text{B.30})$$

El flujo de energía cinética turbulenta \mathbf{T}' se modela de acuerdo a

$$\rho \mathbf{T}' = - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k_T \quad (\text{B.31})$$

Donde σ_k es el número de turbulento de Prandtl. Por lo que la ecuación (B.21) queda como ⁶:

$$\frac{\partial(\rho k_T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} k_T) = \nabla \cdot \left(\left[\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right] \right) \nabla k_T + \rho \mathcal{P} - \rho \varepsilon \quad (\text{B.32})$$

Por otra parte para ε se propone *ecuación de transporte* con estructura acorde a (3.1) que es de carácter empírico y su aspecto es

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\left[\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right] \nabla \varepsilon \right) + \frac{C_1 \mathcal{P} \varepsilon}{k_T} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k_T} \quad (\text{B.33})$$

⁵En este caso trivial por ser incompresible

⁶Existen diferentes formas de escribir esta ecuación. Se utiliza la que viene reportada en ⁷⁴

En su forma actual los coeficientes del modelo son $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_1 = 1.44$ y $C_2 = 1.92$.⁷

La función de los coeficientes C_1 , C_2 y C_μ es amortiguar ℓ_m en regiones cercanas a las paredes.

El modelo $k_T - \varepsilon$ tiene varias limitaciones. Se ha documentado por ejemplo que falla en regiones cercanas a las paredes así como en presencia de gradientes adversos de presión, flujos supersónicos, entre otros. Por ello se han propuesto modelos alternativos que buscan evadir estos problemas. La primera de ellas es el modelo $k_T - \omega$.

Modelo $k_T - \omega$:

El modelo $k_T - \omega$ fue propuesto por Wilcox en 1988⁷⁷ que busca lidiar con los problemas de $k_T - \varepsilon$. En este modelo se resuelve una nueva variable que se denomina *disipación turbulenta específica* ω , que se define como

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k_T}, \quad (\text{B.34})$$

en favor de ε . Por lo que las ecuaciones de transporte para k_T y ω quedan como

$$\frac{\partial(\rho k_T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} k_T) = \nabla \cdot \left(\left[\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right] \nabla k_T \right) + \rho \mathcal{P} - \rho \beta^* k_T \omega \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \omega) = \nabla \cdot \left(\left[\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right] \nabla \omega \right) + \frac{\rho \gamma \mathcal{P}}{\mu_t} - \beta \rho \omega^2. \quad (\text{B.36})$$

Uno de los aspectos relevantes es que los coeficientes difieren de $k_T - \varepsilon$, pues sus valores numéricos son (Kox 1999)⁸³ $\sigma_k = 2$, $\sigma_\omega = 2$, $\beta = 3/40$, $\beta^* = 0.09$, $\gamma = 5/9$.

El modelo $k_T - \omega$ se desempeña mejor que $k_T - \varepsilon$ en presencia de gradientes adversos y en la capa límite en donde no requiere de funciones de pared a diferencia de $k_T - \varepsilon$ que sí las necesita para predecir mejor la separación de flujos.⁷⁶

Sin embargo $k_T - \omega$ posee una alta susceptibilidad a las condiciones de flujo libre en donde pequeños cambios en los valores de $(k_T)_\infty$ (flujo lejano) resulta en grandes cambios en μ_T . De aquí que surjan versiones actualizadas que buscan eliminar simultáneamente la susceptibilidad de $k_T - \omega$ y los fallos de $k_T - \varepsilon$. Uno de los más comunes es el modelo $k_T - \omega - SST$

Modelo $k_T - \omega - SST$:

El modelo $k_T - \omega - SST$ es una versión mejorada de $k_T - \omega$ y $k_T - \varepsilon$ ya que busca aprovechar las ventajas de ambos así como mitigar sus debilidades.^{73,75,77,83}

⁷Estos coeficientes pueden tener valor distinto dependiendo de cual versión de $k_T - \varepsilon$ sea utilice.

La razón por la que $k_T - \omega$ es muy susceptible a condiciones de flujo libre se explica si se sustituye (B.34) en la ecuación de transporte de ε (B.33) en donde se encuentra un término adicional que no aparece en la ecuación (B.36):

$$\frac{2\rho\sigma_\omega 2}{\omega} \nabla k_T : \nabla \omega \quad (\text{B.37})$$

Que se conoce como *difusión cruzada*.

La ecuación para k_T no se ve afectada de la mostrada en (B.35), solo la de ω (B.36) debe ser modificada. Para hacer la mezcla de los modelos se multiplica el término de difusión cruzada por un factor $(1 - F_1)$, en donde a F_1 se le conoce como *función de mezclado*, tal que si $F_1 = 0$ se recupere $k_T - \varepsilon$ y si $F_1 = 1$ devuelva el modelo $k_T - \omega$.

La forma moderna de F_1 utilizada hoy en día tiene el aspecto:

$$F_1 = \tanh(\alpha^4) \quad (\text{B.38})$$

$$\alpha = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k_T}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_\omega 2 k_T}{CD_{k\omega} d^2} \right] \quad (\text{B.39})$$

La función que se encarga de combinar los coeficientes se define como:

$$\Phi = F_1 \phi_\omega + (1 - F_1) \phi_\varepsilon \quad (\text{B.40})$$

Donde ϕ_ω es la constante de $k_T - \omega$ (β^*) y ϕ_ε es la constante de $k_T - \varepsilon$ (C_μ).

La viscosidad turbulenta μ_t se modifica con el fin de mejorar la predicción de la separación dentro de la capa límite. Su nueva ecuación es:

$$\mu_t = \frac{\rho k_T}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (\text{B.41})$$

F_2 es otra función de mezclado cuyo aspecto es:

$$F_1 = \tanh(\Gamma^2) \quad (\text{B.42})$$

$$\Gamma = \max \left(\frac{\sqrt{k_T}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \nu}{d^2 \omega} \right) \quad (\text{B.43})$$

Todas estas consideraciones resultan en la ecuación modificada para ω en su forma moderna^{8377,82}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{u}\omega) &= \nabla \cdot \left(\left[\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right] \nabla \omega \right) \\ + \frac{\rho\gamma\mathcal{P}}{\mu_t} - \beta\rho\omega^2 + 2(1 - F_1)\frac{\rho\sigma_\omega^2}{\omega} \nabla k_T : \nabla \omega & \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Se considera que este modelo de turbulencia es el mejor disponible para aerodinámica externa o en simulaciones donde es importante la separación del flujo.

Finalizada esta sección, se pasan a explicar los modelos LES.

B.2. Modelos de turbulencia (LES)

Se abordan las características generales de LES con poco énfasis en la parte matemática.

B.2.1. Características relevantes

En LES se resuelven los remolinos hasta un tamaño limitado por la malla como se muestra en la Figura B.1.⁷⁶

Para el filtrado de las variables se utiliza el número de onda, k , del vórtice⁸ ya que se ha mostrado experimentalmente que la energía cinética se distribuye entre los remolinos de acuerdo a su tamaño. Cuanto mayores sean sus dimensiones este más energía cinética posee tal como se muestra en la Figura B.2 a). En ella, se aprecia que el área bajo la curva en la Figura B.2 corresponde a la energía cinética resuelta por la malla,^{78,84} dicho de otra forma,

$$k_{\text{Resuelta}} = k_R = \int_0^k E(k) dk. \quad (\text{B.45})$$

El objetivo es que la energía cinética resuelta sea lo mayor posible (o $k_R \mapsto 1$)⁹ y de acuerdo a algunos autores,^{72,78,81} debe ser resuelta al menos un 80%. El inconveniente es que para

⁸Esta cantidad es el análogo espacial a la frecuencia angular y se define como $k = 2\pi/d$, con d una distancia dada que es comúnmente la longitud de onda.

⁹Si $k_R = 1$ en realidad se trata de una simulación LES

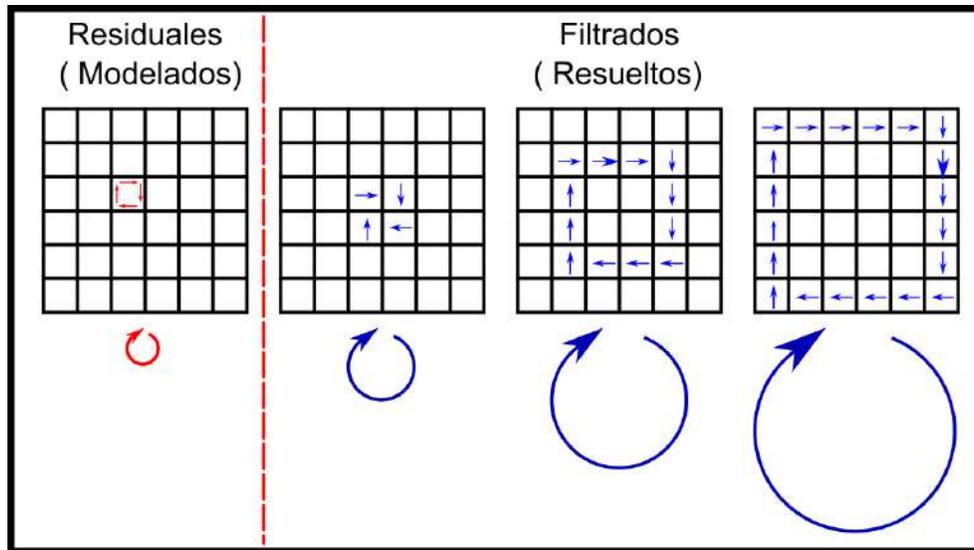


Figura B.1: Malla y los remolinos que pueden ser resueltos. A la izquierda se muestran aquellos que su tamaño es menor a la malla y deben ser modelados y a la derecha los que si capta la malla y por ende son resueltos. Imagen inspirada de.⁷⁸

lograrlo se requieren de mallas muy finas y el costo computacional se incrementa. Es por ello que es necesaria una estimación en el espesor de malla Δ para conseguirlo. Para ello se utiliza en la práctica la *escala de longitud integral* (ELI) (ℓ_0) que se define como la longitud de un remolino que tiene la misma energía cinética promedio que todos sus remolinos vecinos.^{72,78} Esta es una escala representativa de los tamaños de todos los remolinos en una localidad y sirve para simplificar los cálculos de un espectro de longitudes. Matemáticamente su expresión es

$$\ell_0 = \frac{\int_0^\infty \frac{E(k)}{k} dk}{\int_0^\infty E(k) dk}. \quad (\text{B.46})$$

Una manera de calcular ℓ_0 es por medio de una simulación RANS previa, ya sea por medio de (B.29) ($k_T - \varepsilon$) o de (B.33) ($k_T - \omega$). Este valor indicará un estimado de malla requerido para cumplir con el requisito pedido.

Una vez estimado ℓ_0 , se define al espesor de la malla Δ (que hará el filtro) de forma que corresponda a la raíz cúbica del volumen de celda más pequeño de la malla y sea la quinta parte de ℓ_0 ⁷⁸ (ver Figura B.2 b)), o dicho de otra forma

$$\Delta = \sqrt[3]{\text{Volumen mínimo de celda}}, \quad (\text{B.47})$$

$$\Delta = \frac{\ell_0}{5}. \quad (\text{B.48})$$

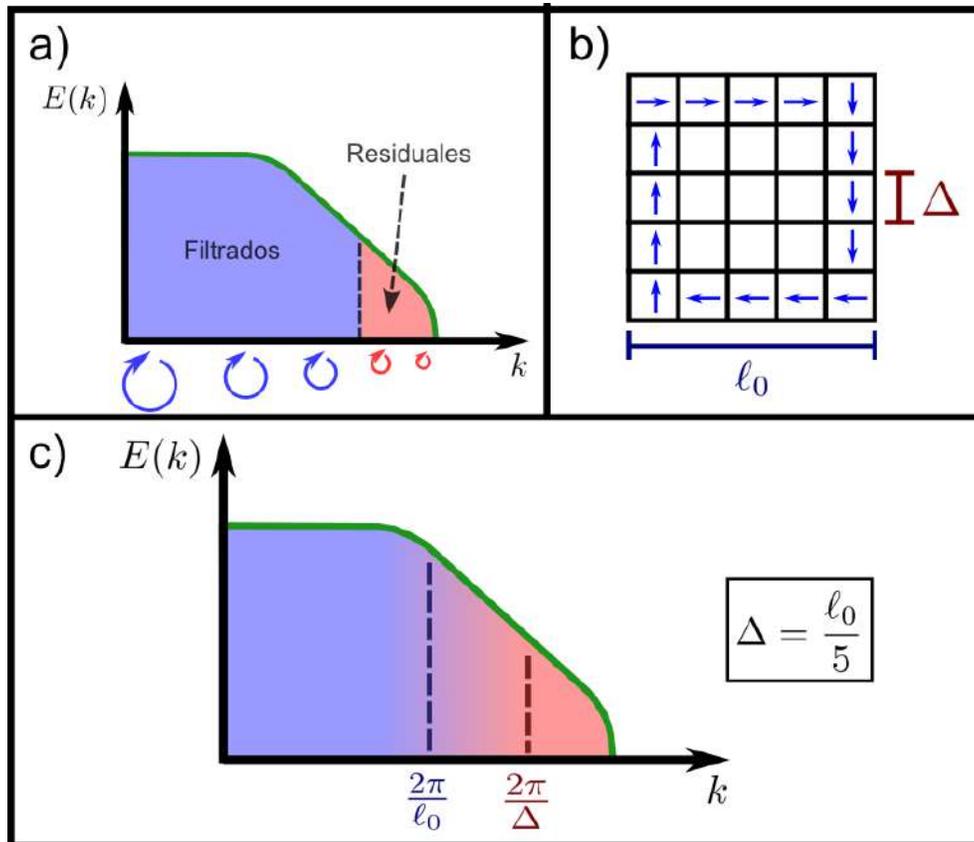


Figura B.2: a) Curva del espectro de energía cinética $E(k)$ en función del número de onda k . Se muestra también el proceso de Filtrado donde a la izquierda corresponde a la energía que fue resuelta por el filtro y a la derecha la que quedó como residuo y debe ser modelada. b) Longitud de malla adecuada para resolver los vórtices que corresponde a la quinta parte de la escala de longitud integral ℓ_0 . c) Filtrado aplicado con la escala de longitud integral ℓ_0 y con el espesor de filtro Δ . Imagen inspirada de⁷⁸

El proceso de filtrado utilizando la escala de longitud integral ℓ_0 y el tamaño de malla necesario Δ es mostrado en la Figura B.2 c).

B.2.2. Proceso de filtrado y ecuaciones filtradas

Se introducen los conceptos clave para llevar a cabo el filtrado y las ecuaciones resultantes.

Definición matemática

La operación de filtrado se define como

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) d^3\boldsymbol{\xi} d\tau = G * \phi \quad (\text{B.49})$$

Es de notar que esta operación corresponde a un producto de convolución en el espacio físico. En consecuencia se heredan todas las propiedades de esta operación y por a la función G se le conoce como el *núcleo de convolución del filtro utilizado*.

Una de sus propiedades más útiles es la propiedad del producto de su transformada de Fourier

$$\tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{B.50})$$

Donde \mathbf{k} es el vector de onda y ω es la frecuencia angular en este contexto. Otra propiedad importante del núcleo G es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{\xi}, \tau) d^3\boldsymbol{\xi} d\tau = 1. \quad (\text{B.51})$$

En analogía al operador promedio, se define el *residual* (o parte no resuelta) de ϕ como

$$\phi' = \phi - \tilde{\phi} \quad (\text{B.52})$$

La cual cumple la propiedad $\hat{\phi}' = (1 - \hat{G})\hat{\phi}$, lo que implica que, a diferencia de lo que ocurre con el promediado de Reynolds, el filtrado del residual no tiene porque ser nulo.

Filtros utilizados

Los 3 filtros más utilizados en la práctica son¹⁰ el *filtro de caja*, el *filtro Gaussiano* y el *filtro espectral*. Se enuncian sus definiciones matemáticas así como sus transformadas de Fourier

¹⁰Esto es en una dimensión, pero se generaliza fácilmente a las 3 dimensiones

11.72,81

Caja:

$$G(x - \xi) = \frac{H\left(\frac{\Delta}{2} - |x - \xi|\right)}{\Delta} \quad | \quad G(\hat{k}) = \text{sinc}(k\Delta) \quad (\text{B.53})$$

Gaussiano:

$$G(x - \xi) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma|x - \xi|^2}{\Delta^2}\right) \quad | \quad G(\hat{k}) = \exp\left(\frac{-(\Delta k)^2}{4\gamma}\right) \quad (\text{B.54})$$

Espectral:

$$G(x - \xi) = \text{sinc}(k_c(x - \xi)) \quad | \quad G(\hat{k}) = H(k_c - k) \quad (\text{B.55})$$

Donde $k_c = \pi/\Delta$ en el filtro espectral, y se toma además $\gamma = 6$ para el filtro Gaussiano de manera práctica.

En particular el filtro espectral resulta de gran utilidad ya que corta todos los números de onda tales que $k > k_c$, los cuales son definidos por el tamaño Δ de la malla. Esto quiere decir que los espaciamentos menores a Δ de la malla serán ignorados con este filtro.

Ecuaciones filtradas

Las ecuaciones que se obtienen al aplicar la operación (B.49) a las ecuaciones de movimiento dan como resultado la forma filtrada de las ecuaciones

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{B.56})$$

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla\tilde{p} + \mu\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \rho\tilde{\mathbf{F}}_B \quad (\text{B.57})$$

Es importante mencionar que $\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} \neq \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}$, como puede comprobarse con su definición. Es posible descomponer el producto $\rho\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}$ de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}' \quad (\text{B.58})$$

¹¹Se utiliza la notación $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$

Se definen tensores para agrupar estos términos¹²:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R := \rho (\widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{B.59})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{C}} := \rho (\widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}'} + \widetilde{\mathbf{u}'\mathbf{u}}) \quad (\text{B.60})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{R}} := \rho (\widetilde{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \quad (\text{B.61})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{L}} := \rho (\widetilde{\widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}}) \quad (\text{B.62})$$

Al tensor $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$ se le conoce como el *tensor de esfuerzos residuales*, el cual agrupo los términos que no dependen exclusivamente de las escalas grandes. Por otro lado $\overleftrightarrow{\mathbf{C}}$ es el *tensor de esfuerzos cruzados* que representa las interacciones entre las escalas grandes y pequeñas, $\overleftrightarrow{\mathbf{R}}$ por su parte es el tensor de Reynolds de la sub-malla que refleja la interacción entre las escalas de la submalla y finalmente $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ es el tensor de Leonard que expresa las interacciones entre las escalas grandes.^{72,81,82}

Observe que estos tensores no son independientes ya que se relacionan de acuerdo a

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R = \overleftrightarrow{\mathbf{L}} + \overleftrightarrow{\mathbf{R}} + \overleftrightarrow{\mathbf{C}} \quad (\text{B.63})$$

Esto permite reescribir la ecuación de conservación de momento como

$$\frac{\partial(\rho\widetilde{\mathbf{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}}) = -\nabla\widetilde{p} + \mu\nabla^2\widetilde{\mathbf{u}} + \rho\widetilde{\mathbf{F}}_B - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R \quad (\text{B.64})$$

Observe que la ecuación (B.64) tiene una estructura muy similar a la que se obtuvo por medio del promedio de Reynolds (B.12). Sin embargo hay diferencias destacables, comenzando con que el filtrado nunca es estacionario y las fluctuaciones no oscilan alrededor de un promedio. El tensor de esfuerzos residuales $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$ es dependiente del filtro y de la especificación de la malla. Únicamente si el filtro G es un operador de Reynolds se tendrá que $\overleftrightarrow{\mathbf{C}} = \overleftrightarrow{\mathbf{L}} = \overleftrightarrow{\mathbf{0}}$ y ambas descomposiciones serán idénticas. A estas alturas se ha clarificado que el proceso de filtrado es una generalización de la descomposición de Reynolds.

Finalmente es importante discutir lo que sucede con la energía cuando es filtrada. En esta sección, con el fin de no confundir con el número de onda, se denotará la energía cinética por

¹²Algunos autores omiten la densidad ρ , matemáticamente esto es irrelevante para casos incompresibles pero la densidad es requerida para mantener las unidades de esfuerzo

E . La energía cinética filtrada se obtiene a partir de aplicar el filtrado a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/2$:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = E_f + E_R \quad (\text{B.65})$$

$$E_f = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{B.66})$$

$$E_R = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R}{\rho} \right) \quad (\text{B.67})$$

Así, La ecuación de la energía cinética filtrada es

$$\frac{\partial(\rho E_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{u}} E_f) - \nabla \cdot \left[\left(2\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R - \tilde{p} \overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] = -\rho \varepsilon_f - \rho \mathcal{P}_r \quad (\text{B.68})$$

Donde \mathcal{P}_f es la tasa de producción de energía cinética residual y ε_f es la tasa de disipación viscosa relacionada directamente con el campo de velocidad filtrado. Sus expresiones son

$$\varepsilon_f := 2\nu \left\| \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \right\|^2, \quad (\text{B.69})$$

$$\mathcal{P}_r := - \left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R - \frac{2}{3} E_R \overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d \right) : \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{B.70})$$

B.2.3. Modelado de la sub-escala

El sistema de ecuaciones (B.56), (B.58) y (B.68) no es cerrado, en analogía a RANS. Similar a este enfoque, se utilizan modelos para las sub-escalas que están contenidas en ε_f y \mathcal{P}_r .

La manera de modelarlos es observando que los remolinos tienden a romperse y formar nuevos de tamaños cada vez menores. Estos remolinos pequeños nuevamente se descomponen en unos más pequeños hasta llegar al punto donde se disipa su energía en forma de calor a través de la viscosidad molecular (Figura B.3). Como se observa de la Figura B.1 a), cuando los remolinos son pequeños tienen un gradiente de velocidades de magnitud mayor al ser más brusco el cambio de dirección del vector velocidad de las partículas del fluido que conforman dicho vórtice.

Estas dos cuestiones sugieren que para disipar más rápido los remolinos se puede aumentar la viscosidad del fluido para que su ruptura en energía calórica ocurra con tamaños de remolinos mayores; esto con el fin de que la malla sea capaz de capturarlos.⁷⁹ Por ello se propone

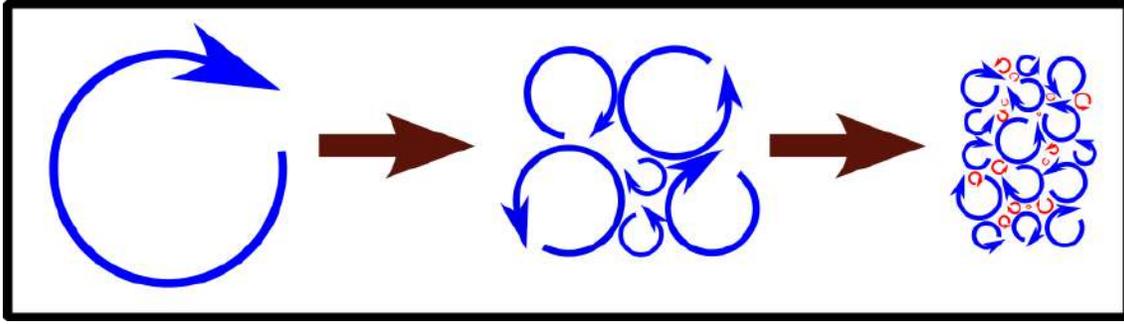


Figura B.3: Ruptura de los remolino en unos más pequeños hasta que su escala es tal que son disipados en calor (color rojo). Imagen inspirada de.⁷⁹

que la disipación sea de la forma

$$\epsilon_f = (\nu + \nu_{sgs}) \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \quad (\text{B.71})$$

Que hace que los remolinos que tengan un tamaño apenas superior a la longitud característica de la malla Δ sean disipados. Esta nueva viscosidad ν_{sgs} proviene de un esfuerzo adicional que corresponde al tensor de esfuerzos residual $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R$, y se le conoce como la *viscosidad residual* o de sub-malla.

El modelo más sencillo para ν_{sgs} (o μ_{sgs} multiplicando por ρ) es el debido a Smagorinsky et.al.^{76,82,85} que la modela con una expresión análoga a un fluido Newtoniano ((2.6)) y a la hipótesis de Boussinesq (B.27) como el coeficiente que relaciona linealmente al tensor residual con el tensor de esfuerzos filtrado⁷²

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_R = -\frac{\mu_{sgs}}{\mu} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} - \frac{2\rho E_R}{3} \overleftrightarrow{\mathbf{I}}_d \quad (\text{B.72})$$

En analogía a la hipótesis de mezclado de Prandtl (B.28), la viscosidad residual se modela de acuerdo a (Smagorinsky 1963)

$$\mu_{sgs} = \rho \ell_S^2 \sqrt{2} \|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}\| = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2} \|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}\| \quad (\text{B.73})$$

Donde a ℓ_S se le conoce como *escala de longitud de Smagorinsky* que a través del coeficiente C_S se toma de forma proporcional al tamaño del filtro Δ . Como consecuencia de (B.72) y (B.70) la tasa de transferencia de energía es:

$$\mathcal{P}_r = \sqrt{2} \nu_{sgs} \|\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}\| \quad (\text{B.74})$$

De acuerdo a este modelo, se puede reescribir la ecuación de conservación de momento para LES (B.64) como:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla\tilde{p} + (\mu + \mu_{sgs})\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \rho\tilde{\mathbf{F}}_B \quad (\text{B.75})$$

Hay más detalles que fueron omitidos para no hacer una discusión extensa del tema, pero pueden revisarse a detalle en.^{72,81}

En este trabajo fueron utilizados los modelos k-Eqn y Spalart-Allmaras de OpenFOAM que difieren del de Smagorinsky. Pueden consultarse sus ecuaciones en^{83,86-88}

Bibliografía

- ¹ J.F. Manwell, J.G McGowan, A.L. Rogers, *Wind Energy Explained. Theory, Design and application*, Segunda Edición, Wiley, Reino Unido, 2009, pp. 1-21, 91-101, 115-154 [1](#), [2](#), [25](#), [27](#), [30](#), [34](#), [43](#), [89](#)
- ² M.O.L. Hansen, *Aerodynamics of Wind Turbines*, Segunda Edición, Earthscan, Londres - U.K, 2008, pp.1-40. [1](#), [2](#), [27](#), [30](#), [43](#), [89](#)
- ³ E. Hau, *Wind Turbines. Fundamentals, Technologies, Application, Economics*, Segunda edición, Springer, Alemania, 2005, pp. 1- 22, 67-160. [1](#), [27](#), [30](#), [43](#)
- ⁴ Wikipedia The Free Encyclopedia *Silent Spring* , última edición: 16 Junio 2024, url: https://en.wikipedia.org/wiki/Silent_Spring [2](#)
- ⁵ U.S. Department of Energy, Energy Efficiency & Renewable Energy, *Wind Energy Impacts*, url: <https://windexchange.energy.gov> [3](#), [4](#)
- ⁶ I. Algarra, J. Eiras-Barca, G. Miguez-Macho, R. Nieto, & L. Gimeno (2019), *On the assessment of the moisture transport by the Great Plains low-level jet*, earth syst. J. of the European Geosciences Union, DOI: <https://doi.org/10.5194/esd-10-107-2019> [7](#), [9](#)
- ⁷ Secretaría de Gobernación, *La energía eólica en México*, Comisión para el diálogo con los Pueblos Indígenas de México, url:<https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/31621/eolico.pdf> [3](#)
- ⁸ Página de la Asociación Mexicana de Energía Eólica, Documentos y Estudios, 2023. url: https://amdee.org/es_es/02-nosotros/ [4](#)
- ⁹ P. J. Coldwell *Mapa de Ruta Tecnológica. Energía eólica en Tierra* (2017), Secretaría de Energía. url: <https://amdee.org/wp-content/uploads/mapa-ruta.pdf> [4](#)

- ¹⁰ P. J. Coldwell *Reporte Anual 2022* (2022), Asociación Mexicana de Energía Eólica. url: <https://amdee.org/wp-content/uploads/INFORME-ANUAL-AMDEE-V3-LR.pdf>
- ¹¹ D. J. Stensrud. (1996) *Importance of Low-Level Jets to Climate: A Review*, Journal of Climate (9), pp:1698-1711. 4, 5
- ¹² *Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático*, México ante el Cambio Climático Sitio oficial del país, url: <https://cambioclimatico.gob.mx> 5, 6
- ¹³ S. Salinas, U. Miranda, *Energía Eólica*, Reportaje, Transición Energética, Febrero-Abril 2021. url: <https://transicionenergetica.ineel.mx/Revista.mvc/R1n2v3> 4
- ¹⁴ A. Doosttalab, D. S. Alvarado, V. Pulletikurthi, Y. Jin, H.B. Evans & L. Castillo (2020), *Interaction of low-level jets with wind turbines: On the basic mechanisms for enhanced performance*, J. Renewable Sustainable Energy (12), 053301, <https://doi.org/10.1063/5.0017230> 4, 5
5, 9, 11, 12, 35, 49, 76, 112, 124, 126
- ¹⁵ R.M. Banta, R.K. Newsom, J.K. Lundquist, Y.L. Pichugina, R.L. Coulter & L. Mahrt, (2002) *Nocturnal Low level jet characteristics over Kansas during cases-99*, Boundary-Layer Meteorology (105), Kluwer Academic Publishers, Países Bajos, pp:221-252 6
- ¹⁶ E.N. Smith, J.G. Gebauer, P.M. Klein, E. Fedorovich., J.A. Gibbs, (2019), *The Great Plains Low-Level Jet during PECAN: Observed and Simulated Characteristics*, Monthly Weather Review (147), American Meteorological Society, U.S., pp:1846-1868, DOI:10.1175/MWR-D-18-0293.1 6
- ¹⁷ S.N. Gadde, R.J.A.M. Stevens, (2021) *Effect of low level jet height on wind farm performance*, J. Renewable Sustainable Energy (13), 013305 <https://doi.org/10.1063/5.0026232> 10, 11, 76, 126
- ¹⁸ M. Abkar, A. Sharifi, F. Porté-Angel (2015), *Large-eddy simulation of the diurnal variation of wake flows in a finite-size wind farm*, Wake Conference 2015, Journal of Physics: Conference Series 625 (2015) 012031, DOI:10.1088/1742-6596/625/1/012031 10, 126
- ¹⁹ W. Gutierrez, A. Ruiz-Columbie, M. Tutkun, L. Castillo. (2019) *The structural response of a wind turbine under operating conditions with a low-level jet.*, Renewable and Sustainable Energy Reviews (108), pp. 380-391, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.03.058> 10, 11, 25, 126

- ²⁰ S. N. Gadde, L. Liu & R J.A.M. Stevens (2021). *Effect of low-level jet on turbine aerodynamic blade loading using large-eddy simulations*, Wake Conference , Journal of Physics: Conference Series 1934 (2021) 012001, DOI: 10.1088/1742-6596/1934/1/012001 [10](#), [25](#), [126](#)
- ²¹ F.M. Ahmed, M.B. Paskyabi, *Effects of negative shear on loads for a 15 MW offshore wind turbine during low-level jet events*, EERA DeepWind conference (2023), Journal of Physics: Conference Series 2626 (2023) 012046, DOI:10.1088/1742-6596/2626/1/012046 [10](#), [25](#), [34](#), [35](#)
- ²² X. Zhang, C. Yang & S. Li, *Influence of Low-Level Jet intensity on aerodynamic loads of horizontal axis wind turbine rotor*, Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics (2019), 13:1, 300-308, <https://doi.org/10.1080/19942060.2019.1585953> [10](#), [11](#), [34](#), [126](#)
- ²³ P. He, J. Xia, *Study on the Influence of Low-Level Jet on the Aerodynamic Characteristics of Horizontal Axis Wind Turbine Rotor Based on the Aerodynamics-Controller Interaction Method* Energies 2022, 15, 2709. <https://doi.org/10.3390/en15082709> [10](#), [34](#)
- ²⁴ R.B. Cal, J. Lebrón, L. Castillo (2010), *Experimental study of the horizontally averaged flow structure in a model wind-turbine array boundary layer*, J. Renewable Sustainable Energy (2), 0133106, <https://doi.org/10.1063/1.3289735>
- ²⁵ U.M. Miranda, R.Saldaña, *El Atlas Eólico Mexicano, avances*, Transición Energética, Febrero-Abril 2019. url: <https://transicionenergetica.ineel.mx/Revista.mvc/CD2n2v1>. [4](#)
- ²⁶ IEA (2013). *Technology Roadmap Wind Energy*. Paris: IEA [3](#)
- ²⁷ G. Arfeuille, A.L. Quintanilla, F.C. Viesca, L.Z. Villareal (2013) *Observational Characteristics of Low-Level Jets in Central Western Mexico*, Boundary-Layer Meteorology, 155:483–500, DOI: 10.1007/s10546-015-0005-0 [7](#)
- ²⁸ U. Miranda, F. Morales, G. Pérez, R. Saldaña *El Atlas Eólico Mexicano: un mecanismo para el desarrollo eólico de México*, Transición Energética, Febrero-Abril 2021. url: <https://transicionenergetica.ineel.mx/Revista.mvc/CD1n2v3> [4](#), [7](#), [8](#)
- ²⁹ *Infografía Atlas eólico Mexicano (AEM)*, INEEL. url: <https://transicionenergetica.ineel.mx/Infografia/LaInfografian2v3.pdf>
- ³⁰ Kundu P. K. & , Cohen I.M, *Fluid Mechanics*, Segunda Edición, San Diego, U.S.A, 1990, pp: 297-302, 497,. [19](#), [21](#), [22](#)

- ³¹ Currie I., *Fundamental Fluid Mechanics*, Tercera Edición, Mc Graw Hill, Toronto, Canada, 1993, pp 288, 306. [16](#), [20](#), [21](#), [130](#)
- ³² F.A. Viniegra, *Mecánica Libro 1*, Prensas de Ciencias, UNAM, Ciudad de México, México, 2007, pp:50, [18](#)
- ³³ F.A. Viniegra, *Mecánica de los cuerpos deformables*, Prensas de Ciencias, UNAM, Ciudad de México, México, 2011, pp: 198 - 211. [18](#)
- ³⁴ T. Kambe, *Elementary Fluid Mechanics*, Primera Edición, World Scientific Publishing, Singapur,2007, pp: 251-262. [21](#), [22](#)
- ³⁵ L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Segunda Edición, Pergamon Press, 1987 ,pp. 146-167 [21](#)
- ³⁶ J.H. Spurk, N. Askel, *Fluid Mechanics*, Segunda Edición, Springer, Berlin-Alemania, 2008, pp. 98-105 [21](#)
- ³⁷ C.J. Greenshields, H.G. Weller, *Notes on COmputational Fluid Dynamics: General Principles*, Primera Edición, CFD Direct Ltd, Reino Unido, 2022, pp. 193-224. Disponible de forma gratuita en <https://doc.cfd.direct/notes/cfd-general-principles/index> [21](#), [40](#), [55](#), [58](#), [59](#), [60](#)
- ³⁸ C.Foias, O. Manley, R. Rosa, R.Temam, *Navier-Stokes Equations and turbulence*, Primera Edición, Cambridge, Cambridge-Reino Unido, 2004, pp. 28,41,42,55-56,201,207,215 [22](#)
- ³⁹ G. Carmona, *Termodinámica clásica*, Segunda Edición, Prensas de Ciencias, Ciudad de México-México ,2010, pp. 219-226,310-319 [20](#), [23](#), [139](#)
- ⁴⁰ D. Núñez *Optmización de Perfiles Aerodinámicos de álabes para aerogeneradores mediante algoritmos genéticos.*, UNAM. [14](#), [35](#), [36](#), [37](#), [80](#), [82](#), [125](#)
- ⁴¹ J.H. Ferziger, M.Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*,3a edición, Springer, Berlin-Alemania, 2002. [40](#), [144](#)
- ⁴² S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Primera Edición, Mc Graw Hill, Minnesota-USA, 1980. [40](#), [58](#)
- ⁴³ F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, *The Finite Volume Method in Computarional Fluid Dynamics*, Primera Edición, Springer,Suiza ,2016 [40](#), [58](#)

- ⁴⁴ H. Jasak *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Universidad de Londres, 1996. 40
- ⁴⁵ OpenFOAM v11 User guide: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v11/index> 41
- ⁴⁶ ESI-OpenFOAM User guide. url: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide> 41
- ⁴⁷ CFD Online-OpenFOAM. url: <https://www.cfd-online.com/Forums/openfoam/> 41
- ⁴⁸ Holzmann CFD, *Computational Fluid Dynamics OpenFOAM Knowledge Base*. url: <https://holzmann-cfd.com/> 41
- ⁴⁹ József Nagy, CFD Introduction: <https://www.youtube.com/@OpenFOAMJozsefNagy> 41
- ⁵⁰ wolf dynamics, multiphysics simulations. optimization & data analytics, Università degli Studi di Genova. url: <http://www.wolfdynamics.com/tutorials.html> 41
- ⁵¹ NSIV IO, OpenFOAM & ANSYS CFD. urls: <https://www.youtube.com/@CFD/featured> <https://nsiv.io/> 41
- ⁵² M. Enger, *Wind Turbine Simulations with OpenFOAM*, Norwegian University of Science and Technology, 2017. 41, 58, 126
- ⁵³ Hoem M. E., *Implementation and testing of an actuator disk in openfoam*, Norwegian University of Science and Technology, 2017. 41
- ⁵⁴ E., Oct 2010. *Implementation of an actuator disk in openfoam.*, url: https://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2010/erikSvenning/erikSvenningReport.pdf 41
- ⁵⁵ D. Salazar, *Estudio del proceso de conversión de energía de una turbina eólica mediante simulación numérica*, UNAM, 2019. 41, 58, 126, 147
- ⁵⁶ C. Greenshields, CFD Direct The Architects of OpenFOAM, *OpenFOAM v11 User Guide - 5.4 Mesh generation with the blockMesh utility*, 2023. url: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v11/blockmesh> 44
- ⁵⁷ OpenCFD ESI-Group, *Mesh generation with the blockMesh utility*. url: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/4-mesh-generation-and-conversion/4.3-mesh-generation-with-the-blockmesh-utility> 44

- ⁵⁸ SALOME, EDF-CEA, 2021-2024. url: <https://www.salome-platform.org/>
- ⁵⁹ C. Greenshields, CFD Direct The Architects of OpenFOAM, *OpenFOAM v11 User Guide - 5.5 Mesh generation with the snappyHexMesh utility*, 2023. url: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v11/blockmesh>
- ⁶⁰ OpenCFD ESI Group, *Mesh generation with the snappyHexMesh utility*. url: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/4-mesh-generation-and-conversion/4.4-mesh-generation-with-the-snappyhexmesh-utility>
- ⁶¹ *A Comprehensive Tour of snappyHexMesh*, engys, 7th OpenFOAM WorkShop, 25 June 2012. url: <https://openfoamwiki.net/images/f/f0/Final-AndrewJacksonSlidesOFW7.pdf> 48
- ⁶² A. Jackson, D.P. Combest, *snappyHexMesh Theory and Application*, engys, 11th OpenFOAM WorkShop, 30 June 2016. url: <https://openfoamwiki.net/images/b/b2/OFW11-Jackson-advSHM-FINAL.pdf>
- ⁶³ *Mesh generation using snappyHexMesh*, Wolf Dynamics. url: http://www.wolfdynamics.com/wiki/meshing_OF_SHM.pdf
- ⁶⁴ S. Vilfaeau, C. Pesci, S. Ferraris, A. Heather, F. Roesler, *Improvement of Arbitrary Mesh Interface (AMI) Algorithm for External Aerodynamic Simulation with Rotating Wheels* (2021), Fourth international conference in numerical and experimental aerodynamics of, road vehicles and trains (Aerovehicles 4), Berlin, Germany. url: https://www.esi-group.com/sites/default/files/resource/other/2544/2020-07-14-SVU-CFD-RE-B_AeroVehicule_Abstract.pdf 49
- ⁶⁵ wolf dynamics, *Dynamic meshes in OpenFOAM: Mesh morphing, overset meshes, sliding meshes, moving bodies, rigid body motion, and adaptive mesh refinement*, 2021. url: http://www.wolfdynamics.com/training/movingbodies/OF2021/dynamicmeshes_2021_OF8.pdf 49
- ⁶⁶ *Parameter Definitions -dynamicMotionSolverFvMesh*, OpenFOAMWiki, 2016. url: https://openfoamwiki.net/index.php/Parameter_Definitions_-_dynamicMotionSolverFvMesh 54
- ⁶⁷ M. Urquhart, *A tutorial of the sixDofRigidBodyMotion library with multiple bodies* (2016), CFD with OpenSource Software. url: https://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2015/MagnusUrquhart/reportMagnusUrquhart.pdf 54

- ⁶⁸ kitware,inc., Paraview, 2024. url: <https://www.paraview.org/> 61
- ⁶⁹ G. Chavez, D. Salazar, *Estudio del proceso de conversión de energía de una turbina eólica mediante simulación numérica*, UNAM, 2019., UNAM, 2018. 128
- ⁷⁰ Chen G., Hajaiej H., Morris P.J., Paterson E.G., Sergeev A., *OpenFOAM computation of interacting wind turbine flows and control (I): free rotating case* (2014), International Journal of Hydromechatronics-4. doi: [10.1504/IJHM.2021.114169](https://doi.org/10.1504/IJHM.2021.114169) 126
- ⁷¹ D. Jackson, B. Launder *Osborne Reynolds and the Publication of His Papers on Turbulent Flow* (2007), Annual Review of Fluid Mechanics Volume 3:19-35, url: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110241> 143
- ⁷² S.B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, U.K, 2000. 78, 142, 143, 145, 147, 151, 152, 155, 156, 158, 159
- ⁷³ K. Gahib *Introduction to Computational FLuid Dynamics*, 1a Edición, Springer, Alemania, 2023, pp. 47-69. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-37619-2> 78, 148, 149
- ⁷⁴ k-epsilon, OpenFOAM: UserGuide v 2112, The open source CFD Toolbox, 2016-2020 OpenCFD Ltd. url: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-turbulence-ras-k-epsilon.html> 148
- ⁷⁵ D.C. Wilcox, *Formulation of the k-omega Turbulence Model Revisited* (2008), AIAA Journal. doi: [DOI:10.2514/1.36541](https://doi.org/10.2514/1.36541) 149
- ⁷⁶ Fluid Mechanics 101 U.K. urls: <https://www.youtube.com/@fluidmechanics101>, <https://www.fluidmechanics101.com/> 142, 143, 147, 149, 151, 158
- ⁷⁷ S. Rodriguez *Applied Computational Fluid Dynamics and Turbulence Modeling. Practical Tools, Tips ans Techniques*, Springer, 2019 pp. 121-209. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-28691-0> 78, 143, 147, 148, 149, 151
- ⁷⁸ [CFD] *Large Eddy Simulation (LES): An Introudction*, Fluid Mechanics 101. urls: https://www.youtube.com/watch?v=r5vP45_6fB4 151, 152, 153
- ⁷⁹ [CFD] *Large Eddy Simulation (LES) 3: Sub-Grid Modelling*, Fluid Mechanics 101. url: https://www.youtube.com/watch?v=N81Io_yrOQU&list=PLnJ81IgfDbkoPrNWatlYdR0iPrRU4XeUA&index=3&ab_channel=FluidMechanics101 157, 158

- ⁸⁰ [CFD] *The Smagorinsky Turbulence Model (Part 1)*. url: https://www.youtube.com/watch?v=V8ydRrdCzl0&ab_channel=FluidMechanics101
- ⁸¹ P. Sagaut *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. An Introduction*, 3a edición, Springer, Alemania, 2006. pp. 14-82,109-128 [151](#), [155](#), [156](#), [159](#)
- ⁸² M. Ciofalo *Thermofluid Dynamics of Turbulent Flows. Fundamentals and Modelling*, Springer, Università degli studi di Palermo, 2022, pp. 16, 37,38,41-91. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-030-81078-8> [143](#), [151](#), [156](#), [158](#)
- ⁸³ A.A. ALiabadi, *Turbulence. A Fundamental Approach for Scientists and Engineers*, 1a Edición, Springer, Canada, 2022, pp. 191-229. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-030-95411-6> [78](#), [145](#), [147](#), [149](#), [151](#), [159](#)
- ⁸⁴ L.C. Berseli, T.Iliescu, W.J.Layton, *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*, 1a Edición, Springer, Alemania, 2006, pp. 71-121 [151](#)
- ⁸⁵ J.A. Gibbs, *LES of Turbulent Flows: Lecture 13*, Department of Mechanical Engineering, University of Utah-USA, 2016. url:https://gibbs.science/les/lectures/lecture_13.pdf [158](#)
- ⁸⁶ Spalart-Allmaras, OpenFOAM: UserGuide v 2112, The open source CFD Toolbox, 2016-2020 OpenCFD Ltd.url:<https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-turbulence-ras-spalart-allmaras.html> [159](#)
- ⁸⁷ k Equation, OpenFOAM: UserGuide v 2112, The open source CFD Toolbox, 2016-2020 OpenCFD Ltd.url:<https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-turbulence-les-k-eqn.html> [159](#)
- ⁸⁸ D.R. Launchbury *Unsteady Turbulent Flow Modelling and Applications*, 1a Edición, Springer, Suiza, 2016. pp. 7-13. [159](#)