



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE GENERALIZADA PARA EL MODELO
CUÁNTICO DE RABI CON INTERACCIÓN OPTOMECÁNICA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

WALLACE JAY HERRON MONTAÑO

TUTOR PRINCIPAL

DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA
CNYN-UNAM

COMITÉ TUTOR

DR. ERNESTO COTA ARAIZA
CNYN-UNAM

DR. FERNANDO ROJAS ÍÑIGUEZ
CNYN-UNAM

ENSENADA B.C., JUNIO DE 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Modelo cuántico de Rabi y algunas aproximaciones	6
2.1. Modelo cuántico de Rabi	7
2.1.1. Formulación del hamiltoniano cuántico de Rabi	8
2.1.2. Regímenes del hamiltoniano cuántico de Rabi	11
2.1.3. Integrabilidad y propiedades del modelo cuántico de Rabi	13
2.2. Aproximación de onda rotante (RWA)	16
2.2.1. Sistema desacoplado	16
2.2.2. Modelo de Jaynes-Cummings	17
2.3. Aproximación adiabática	22
2.3.1. Base de oscilador armónico desplazado	22
2.3.2. Aproximación adiabática	23
2.4. Aproximación de onda rotante generalizada (GRWA)	26
2.5. Espectros de energía en las aproximaciones RWA, adiabática y GRWA .	31
2.6. Entrelazamiento en el modelo cuántico de Rabi y sus aproximaciones .	32
3. Modelo cuántico de Rabi con interacción optomecánica	38
3.1. Hamiltoniano optomecánico	38
3.2. Hamiltoniano cuántico de Rabi con interacción optomecánica	39
3.3. Diagonalización mediante dos aproximaciones de onda rotante sucesivas	41
3.3.1. Hamiltoniano RWA-RWA	41

3.3.2.	Espectro energético y estados propios (enfoque RWA)	47
3.4.	Diagonalización mediante dos aproximaciones GRWA sucesivas	48
3.4.1.	Hamiltoniano GRWA-GRWA	49
3.4.2.	Espectro energético y estados propios (enfoque GRWA-GRWA)	58
3.5.	Diagonalización mediante un enfoque mixto GRWA-RWA	61
3.5.1.	Hamiltoniano GRWA-RWA	62
3.5.2.	Espectro energético y estados propios (enfoque mixto GRWA- RWA)	64
3.6.	Comparación con la solución numérica exacta	66
4.	Sistema optomecánico híbrido con acoplamiento átomo-fonón	73
4.1.	Diagonalización RWA con acoplamiento átomo-fonón	75
4.2.	Espectro energético y estados RWA-RWA	77
4.3.	Diagonalización GRWA con acoplamiento átomo-fonón	78
4.4.	Espectro energético y estados GRWA-GRWA	81
4.5.	Espectro energético y estados mixto GRWA-RWA	83
4.6.	Comparación de los espectros energéticos con la solución numérica exacta	83
5.	Entrelazamiento de los estados híbridos	87
5.1.	Entrelazamiento bipartito polaritón-fonón	88
5.2.	Entrelazamiento en presencia de acoplamiento átomo-fonón	95
6.	Dinámica cuántica en el sistema híbrido átomo-fotón-fonón	100
6.1.	Rebotes de fotones dentro de las cadenas de paridad	103
6.2.	Colapso y resurgimiento de las probabilidades de ocupación	104
6.3.	Enfriamiento y amplificación asistida del oscilador mecánico	106
6.3.1.	Enfoque Mixto en el régimen resonante de acoplamiento débil	106
6.3.2.	Enfoque completamente GRWA en el régimen resonante de acoplamiento fuerte	112

FIGURAS

2.1. Probabilidad de que el estado base del QRM esté en cada uno de los estados del sistema desacoplado. La figura (a) ilustra los estados con paridad positiva, mientras que la figura (b) representa los estados con paridad negativa.	15
2.2. Cadenas de paridad en el modelo cuántico de Rabi desacoplado. El sistema evoluciona en dos espacios de Hilbert independientes, cada uno con una paridad diferente.	16
2.3. Niveles de energía del sistema desacoplado descritos por $\hat{H}_R(g_{ac} = 0)$ y, comparación con el subespacio M_N del JCM.	19
2.4. Cadenas de paridad en el QRM y bloques en el JCM. En esta figura, observamos cómo las cadenas de paridad están conectadas a través de los términos resonantes (R) o anti-resonantes (AR). Es importante destacar que los estados que componen los bloques de 2×2 en el modelo de Jaynes-Cummings poseen una paridad específica que depende del número de excitaciones (N_{JC}).	20
2.5. Representación gráfica de la base del oscilador armónico desplazado. Los estados con el mismo número N exhiben una degeneración y su desplazamiento, ya sea positivo o negativo, está directamente relacionado con la constante de acoplamiento (g_{ac}). Figura adaptada de la referencia [1].	23
2.6. Representación gráfica de la base adiabática para el QRM. Figura adaptada de la referencia [1].	27

2.7.	Comparación entre la solución numérica (líneas discontinuas con puntos color negro), la aproximación de la RWA (líneas sólidas rojas) y la aproximación de la GRWA (líneas discontinuas azules) en los siguientes casos: (a) Resonancia ($\delta = 0$), (b) Desintonización negativa ($\omega_a < \omega_c$) y (c) Desintonización positiva ($\omega_a > \omega_c$).	33
2.8.	Razón de participación como función del acoplamiento átomo-cavidad g_{ac} para el estado de Jaynes-Cummings $ \psi_{+,3}^{JC}\rangle$, el estado GRWA $ \psi_{+,3}^{grwa}\rangle$, el estado adiabático $ \psi_{-,4}^{grwa}\rangle$, y el resultado exacto correspondiente (numérico). Por consistencia solo en la figura (c) se debió considerar el estado $ \psi_{+,3}^{ad}\rangle$ en lugar del estado ya mencionado. (a) Caso resonante $\omega_a = \omega_c$, (b) Caso no resonante $\omega_c = 3\omega_a$ en donde el “detuning” es negativo y (c) caso de “detuning” positivo $\omega_a = 3\omega_c$	37
3.1.	Sistema híbrido que combina la interacción átomo-fotón con la interacción optomecánica. Un sistema de dos niveles (el “átomo”) se encuentra dentro de una cavidad óptica (fotones), uno de cuyos espejos oscila armónicamente (fonones).	40
3.2.	En esta figura, se representa el acoplamiento de los N subespacios de polaritón con los estados fonónicos. Cada subespacio fonónico se encuentra desplazado una cantidad $q_N = \frac{g_{om}}{\omega_m}(N + \frac{1}{2})$ [2].	46
3.3.	Acoplamientos efectivos polaritón-fonón y la frecuencia de Rabi GRWA T_N en función del acoplamiento átomo-fotón (g_{ac}) para dos valores de acoplamiento optomecánico: (a) $g_{om} = 0.1$ y (b) $g_{om} = 0.5$. Se muestran curvas para $N = 0$ (línea sólida), $N = 4$ (línea punteada y guionada) y $N = 8$ (línea discontinua), considerando resonancia $\omega_c = \omega_a$. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, marcada por $g_{ac} = \omega_c$	55

3.4. Cociente entre los elementos de matriz de los términos de interacción efectiva polaritón-fonón en $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om})$ y la separación de energía de los niveles de $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om} = 0)$ en función de g_{ac} . (a) Representa el cociente asociado al término $g_{shift}^{(N)}(\hat{b}^\dagger + \hat{b})\hat{\sigma}_z^{(N)}$ para distintos valores de M cuando $N = 0$, (b) corresponde al mismo caso pero con $N = 4$. (c) Muestra el cociente correspondiente al término $(2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)}\hat{\sigma}_x^{(N)}$ y, (d) presenta el cociente para el término $g_{eff}^{(N)}(\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N)\hat{\sigma}_x^{(N)}$ para dos números cuánticos bajos cuando $g_{om} = 0.1$. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, $g_{ac} = \omega_c$ 57

3.5. Cociente entre los elementos de matriz de los términos de interacción del hamiltoniano (3.57) y la separación de energía de los niveles $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om} = 0)$ en función de g_{ac} . (a) Ilustración de la desigualdad (3.60) asociada a los términos resonantes del hamiltoniano (3.57) para $g_{om}/\omega_m = 0.1$. (b) Representación de la desigualdad (3.63) correspondiente a los términos anti-resonantes. En este caso, las líneas verdes indican $g_{om}/\omega_m = 0.1$, y las moradas, $g_{om}/\omega_m = 0.5$. Se incluye una línea vertical discontinua que marca la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, definida por $g_{ac} = \omega_c$ 65

- 3.6. Comparación de los niveles de energía con respecto a g_{ac} del hamiltoniano híbrido en diferentes enfoques: RWA-RWA (línea roja sólida), GRWA-RWA (línea verde densamente punteada y guionada), GRWA-GRWA (línea azul discontinua), y la solución numérica exacta (línea negra discontinua con puntos). Los paneles (a) y (b) muestran la parte del espectro energético que contiene cero polaritones átomo-cavidad E_M (3.20,3.46) para $M = 0, 1, \dots, 5$ en el caso de resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. Los paneles (c) y (d) representan la parte del espectro energético con cero fonones desplazados $E_G^{(N)}$ para $N = 0, 1, \dots, 5$ en resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. Por último los paneles (e) y (f) corresponden a los dobletes $E_{\pm, M}^{(N)}$ de nuevo en resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. En todos los casos hemos tomado $g_{om} = 0.1\omega_m$. Además, se incluye una línea vertical punteada que marca la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, definida por $g_{ac} = \omega_c$. 70
- 3.7. La fidelidad $|\langle \Psi_{\pm, 2}^{(0)} | \Psi^{numerico} \rangle|^2$ de los estados en la figura 3.6 (e) y (f) se muestra en (a) y (b), respectivamente. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, $g_{ac} = \omega_c$ 71
- 3.8. Niveles de energía $E_{\pm, M}^{(N)}$ versus el acoplamiento optomecánico g_{om} , en resonancia $\omega_c = \omega_a = 5, \omega_m$, mediante las aproximaciones RWA (línea roja sólida) y GRWA (línea azul discontinua), y la solución exacta numérica (línea negra discontinua con puntos). (a) $g_{ac} = 0.5\omega_m$. (b) $g_{ac} = 0.5\omega_m$. En (a), las curvas con pendientes positivas (negativas) corresponden a $S = +, (S = -)$ 72
- 4.1. Sistema híbrido completamente acoplado. Interacción átomo-fotón g_{ac} , interacción optomecánica g_{om} e interacción dispersiva átomo-fonón g_{am} . 74

- 4.2. Comparación de los niveles de energía en función del acoplamiento g_{am} para el hamiltoniano híbrido (4.2) utilizando diferentes enfoques: RWA-RWA, GRWA-RWA, GRWA-GRWA, y la solución numérica exacta. El panel (a) ilustra la porción del espectro energético que comprende los cero polaritones átomo-cavidad E_M , ecuaciones (4.14) y (4.29) para $M = 0, 1, \dots, 5$, en el caso de resonancia. El panel (b) representa la contribución al espectro energético correspondiente a las ecuaciones (3.22), (4.38) y 4.31 para $N = 0, 1, \dots, 5$. El panel (c) muestra la parte del espectro que corresponde a los dobletes $E_{\pm, M}^{(N)}$, ecuaciones (4.16), (4.40) y (4.33). La fidelidad respecto a la solución numérica de los estados $|\Psi_{\pm, 2}^{(0)}\rangle$ se presenta en el panel (d). Por último en los paneles (e) y (f) encontramos el espectro para un acoplamiento g_{am} mayor y para estados más energéticos, respectivamente. 86
- 5.1. (a) Razón de participación $\xi_{N, M}^{rwa}$ del estado $|\Psi_{+, 2}^{(2)}\rangle$ RWA-RWA en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} . (b) Razón de participación $\xi_{N, M}^{mix}(g_{ac}, g_{om})$ correspondiente a este estado calculado con el enfoque mixto. (c) Mapa de $\xi_M^{(N)}$ correspondiente al enfoque GRWA-GRWA, en todos los casos se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = \omega_m$. Las líneas anaranjadas verticales y horizontales en las figuras corresponden a los cortes presentados en la figura 5.2. 91
- 5.2. (a) Comparación de las razones de participación $\xi_{N, M}^{rwa}$, $\xi_{N, M}^{mix}$ y $\xi_M^{(N)}$ en función de g_{ac} para $g_{om}/\omega_m = 0.025$. Corte de las cantidades $\xi_{N, M}^{rwa}$, $\xi_{N, M}^{mix}$ y $\xi_M^{(N)}$ en función del acoplamiento optomecánico g_{om} para: (b) $g_{ac}/\omega_m = 0.3$ y (c) $g_{ac}/\omega_m = 1.0$ 93
- 5.3. Razón de participación asociada al estado $|\Psi_{+, 2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N, M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N, M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$ 94

5.4.	Razón de participación de la ecuación (5.14) en función del acoplamiento optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} para el estado $ \Psi_G^{(0)}\rangle$. (a) caso con resonancia átomo-fotón ($\omega_a = \omega_c$), (b) caso fuera de resonancia. ($\omega_a = \omega_c$)/2	95
5.5.	Razón de participación asociada al estado $ \Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fonón g_{am} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N,M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. (d) Corte de los mapas (a), (b) y (c) en función del acoplamiento átomo-fonón para $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$	97
5.6.	Razón de participación asociada al estado $ \Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fonón g_{am} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N,M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. (d) Corte de los mapas (a), (b) y (c) en función del acoplamiento átomo-fonón para $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$	99
6.1.	Dinámica de rebote de un paquete de ondas de fotones en una cadena de paridad. El estado inicial utilizado fue $ \psi_0\rangle = +,z, N = 0\rangle M = 1\rangle$. Se empleó la relación de frecuencias $\omega_a = \omega_c = 100\omega_m$, y los acoplamientos $g_{ac}/\omega_m = 0.5$ y $g_{om}/\omega_m = 0.1$	104
6.2.	(a) Probabilidad de medir el estado fundamental atómico $ -z \rangle$ en función de $g_{ac} t$ para el estado inicial $ -z \rangle \alpha = 3\rangle$ en el modelo de Jaynes-Cummings. (b) Probabilidad de medir el estado $ \psi_{-,0}^{grwa}\rangle$ en función de $g_{eff}^{(0)} t$ para el estado inicial $ \psi_{-,0}^{grwa}\rangle \alpha = 3\rangle$ en el sistema híbrido.	106

6.3.	Proceso de enfriamiento (líneas inferiores color azul) y amplificación (líneas superiores color rojo) de las oscilaciones mecánicas. El sistema se encuentra interactuando con una fuente externa de fotones de frecuencia ω_p y en contacto un baño térmico con un número promedio de fonones n_{th} . La tasa de disipación de los electrones, fotones y fonones son γ_a , γ_c y γ_m , respectivamente.	108
6.4.	Densidad espectral para los distintos enfoques y la solución numérica exacta. El panel (a) corresponde a un acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$, mientras que el panel (b) considera un acoplamiento más fuerte de $g_{om}/\omega_m = 0.1$. En todos los casos se consideró $N = 0$ para los estados vestidos y las combinaciones que resultan de $M, M' = 0, 1, 2, \dots, 10$	109
6.5.	Población de fonones en el régimen estacionario ($t = \infty$) en función de las frecuencias de bombeo ω_p/ω_m para los distintos enfoques. El panel (a) corresponde al acoplamiento $g_{om}/\omega_m = 0.001$, mientras el caso (b) corresponde a $g_{om}/\omega_m = 0.1$	111
6.6.	Función de autocorrelación de segundo orden estacionaria para diferentes frecuencias de la fuente externa. El panel (a) corresponde al caso $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y el panel (b) al caso $g_{om}/\omega_m = 0.1$	112
6.7.	Densidad espectral para los distintos enfoques y la solución numérica exacta. El panel (a) corresponde a un acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y un acoplamiento átomo-fonón $g_{am}/\omega_m = 0.004$, mientras que el panel (b) considera un acoplamiento de $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{om}/\omega_m = 0.4$. En todos los casos se considero $N = 0$ para los estados vestidos y las combinaciones que resultan de $M, M' = 0, 1, 2, \dots, 10$	113

6.8.	Población de fonones en el régimen estacionario ($t = \infty$) en función de las frecuencias de bombeo ω_p/ω_m para los distintos enfoques. El panel (a) corresponde al acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y un acoplamiento átomo-fonón $g_{om}/\omega_m = 0.004$, mientras el caso (b) corresponde a los acoplamientos $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{om}/\omega_m = 0.4$	114
6.9.	Función de autocorrelación de segundo orden estacionaria para diferentes frecuencias de la fuente externa. El panel (a) corresponde al caso de acoplamiento optomecánico $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y átomo-fonón $g_{am}/\omega_m = 0.004$ y el panel (b) al caso $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{om}/\omega_m = 0.4$	115

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por otorgarme la oportunidad de realizar mis estudios de doctorado en el Posgrado en Ciencias Físicas (PCF).

Al personal académico, técnico y administrativo del CNyN y a la coordinación, dirección y Comité Académico del PCF por su amabilidad, empatía, atención y comprensión durante mis años en este posgrado.

A mi tutor principal el Dr. Jesús Maytorena, por su confianza, paciencia y amistad.

A mis tutores el Dr. Ernesto Cota Araiza y el Dr. Fernando Rojas Íñiguez por su apoyo y enseñanzas.

A mi compañera y esposa Abril, por todo su apoyo, cariño, confianza y paciencia.

A mi madre Elizabeth por creer siempre en mi.

A mis compañeros del PCF.

Al programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PA-PIIT) por su financiamiento para el proyecto IN111122.

Finalmente mi gratitud y reconocimiento al CONAHCyT por financiar mis estudios de posgrado.

Resumen

Se investigan el espectro de energía y los estados propios de un sistema híbrido átomo-fotón-oscilador mecánico. La interacción entre un modo en la cavidad óptica, un modo mecánico de un espejo vibrante y un átomo de dos niveles se explora mediante la aproximación cuasi-resonante *generalizada* (GRWA), superando las limitaciones de la aproximación cuasi-resonante (RWA). Los resultados revelan un espectro de energía más preciso en un amplio rango de acoplamientos átomo-fotón y fotón-fonón, destacando la eficacia de la GRWA en situaciones de acoplamientos fuertes. Además, este enfoque permite reescribir el hamiltoniano híbrido en una forma bipartita que proporciona una descripción consistente con un modelo de Rabi, donde los estados átomo-campo vestidos (polaritones) se acoplan a modos mecánicos.

La aplicación de la GRWA al sistema átomo-fotón-oscilador nos lleva a dos enfoques para su solución: uno completamente GRWA (GRWA-GRWA) y otro mixto (GRWA-RWA). Ambos superan las limitaciones de la RWA en distintas regiones de acoplamiento. En cuanto a los estados propios, estas aproximaciones ofrecen una alta fidelidad entre los estados propios exactos y sus equivalentes aproximados.

La investigación se amplía al introducir un acoplamiento adicional entre el átomo y los fonones en el sistema, destacándose el enfoque completamente GRWA en el régimen de acoplamiento fuerte. Se estudia el entrelazamiento polaritón-fonón en las distintas aproximaciones y encontramos que el enfoque GRWA-GRWA presenta oscilaciones características como función de los acoplamientos incluso en regiones donde otras aproximaciones no lo hacen.

Además, se aborda la dinámica cuántica del sistema híbrido empleando el hamiltoniano completo. Se examina la aparición de rebotes de fotones dentro de las cadenas de paridad, involucrando los tres grados de libertad del sistema. También se analiza la evolución dinámica de un estado inicial que considera una excitación átomo-cavidad en su estado fundamental y el oscilador mecánico en un estado coherente de fonones, lo que conduce al fenómeno de colapso y resurgimiento para estas excitaciones.

Posteriormente, se estudia la dinámica disipativa al introducir el sistema en un entorno térmico y al incorporar una fuente externa de fotones y se explora el fenómeno de enfriamiento y amplificación asistida del oscilador mecánico para acoplamientos débiles y fuertes. Destaca que la aproximación GRWA logra capturar de manera significativa las resonancias previstas por la solución numérica exacta, brindando así una descripción precisa del número de fonones en el estado estacionario final del sistema para diversas frecuencias de bombeo.

Esta investigación es relevante para el estudio de sistemas híbridos cuánticos fuertemente acoplados, con posibles implicaciones en el desarrollo de tecnologías cuánticas y la exploración de fenómenos cuánticos y mecánicos.

Capítulo 1

Introducción

La interacción entre la radiación electromagnética y la materia es un proceso fundamental de enorme importancia en la Física. La óptica cuántica investiga esta interacción con un enfoque que varía según el sistema en estudio o la interacción misma, y puede abordarse en tres esquemas: el campo está cuantizado y se considera que el medio material es clásico, la materia se cuantiza y se considera que el campo es clásico, o tanto la materia como el campo están cuantizados.

El éxito de esta área se debe en gran medida al hecho de que los fotones son de naturaleza bosónica y pueden ocupar el mismo estado cuántico, además, no poseen una carga eléctrica, por lo tanto rara vez interactúan con otros fotones. No obstante, la radiación electromagnética puede interactuar con medios dieléctricos, semiconductores, metales, iones o incluso espines y átomos; lo que da lugar a una serie de fenómenos físicos como refracción, reflexión, difracción, dispersión, absorción y emisión que son de gran interés por sus aplicaciones tecnológicas y relevancia teórica. Adicionalmente, se destaca la existencia de procesos no lineales fotón-fotón, donde los fotones pueden interactuar entre sí, generando nuevas frecuencias, sin embargo, estos ocurren a través de materiales, como cristales o fibras ópticas con propiedades ópticas no lineales.

La Electrodinámica Cuántica de Cavidades (cQED, por sus siglas en inglés) y la Optomecánica Cuántica de cavidades (cOM, por sus siglas en inglés) son dos campos

paradigmáticos de la óptica cuántica en donde se estudia esta interacción en sistemas confinados en su forma eléctrica y mecánica respectivamente.

El modelo más simple en cQED es el Modelo Cuántico de Rabi (QRM, por sus siglas en inglés), que en general describe la interacción entre un sistema cuántico de dos niveles (qubit) y un campo bosónico monocromático [3]. Su versión semi-clásica nació hace más de ocho décadas en el contexto de la resonancia magnética nuclear [4, 5] y su forma completamente cuántica ha sido fundamental para el entendimiento de la emisión atómica espontánea y otros fenómenos como la inversión de la población atómica (atomic population inversion, en inglés) y la creación de estados cuánticos entrelazados. Además, por su carácter ubicuo y versatilidad también ha sido aplicado en la descripción de realizaciones experimentales de sistemas físicos en otros campos de la ciencia. Por ejemplo, iones ópticamente atrapados en donde los estados electrónicos del ion interactúan con sus modos fonónicos [6, 7, 8, 9], puntos cuánticos semiconductores acoplados a nanocavidades [10], un qubit de flujo acoplado a un circuito LC superconductor [11], un qubit de carga acoplado a un oscilador de microondas [12] y en física molecular [13, 14, 15]. Recientemente también ha sido propuesto como base para el desarrollo de compuertas cuánticas [16], protocolos de información cuántica [17] y realización de mediciones no destructivas [18, 19].

En el campo de la optomecánica, el modelo más sencillo de interacción es el Modelo Optomecánico Estándar (Standard Optomechanical Model, en inglés), el cual se puede describir como una cavidad óptica con un espejo capaz de mantener oscilaciones mecánicas. En este sistema los fotones atrapados dentro de la cavidad intercambian momento con el espejo oscilante mediante presión de radiación al reflejarse múltiples veces en el mismo [20, 21]. Este modelo y sus variantes han desempeñado un papel muy importante en el objetivo de alcanzar el control del movimiento mecánico a nivel cuántico y la detección de fuerzas o desplazamientos más allá del límite cuántico estándar (SQL, por sus siglas en inglés), y también en un numerosas aplicaciones como astronomía de ondas gravitacionales [22, 23], sensores de alta precisión [24], transductores

cuánticos [25], experimentos con átomos fríos [26] y creación de estados macroscópicos no clásicos [27].

En la actualidad, existe un gran interés por combinar sistemas como los descritos por el QRM que involucran la interacción qubit-oscilador con sistemas de carácter optomecánico. Estos sistemas híbridos cuánticos son de particular interés, ya que permiten estudiar la interacción entre electrones, fotones y fonones en un mismo marco de descripción. Este enfoque multidisciplinario brinda la oportunidad de explorar y comprender mejor los aspectos cuánticos y mecánicos de estos sistemas, y puede tener implicaciones importantes en el desarrollo de tecnologías cuánticas y la comprensión de fenómenos fundamentales de la física cuántica.

Recientemente se ha llevado a cabo un estudio analítico de un modelo átomo-fotón-oscilador. En este modelo, la parte cQED se describe mediante el conocido Modelo de Jaynes-Cummings (JCM, por sus siglas en inglés), mientras que la parte optomecánica se describe por un oscilador armónico cuántico cuyo operador de posición canónico está acoplado al operador de número de fotones (Standard Optomechanical Model). Este sistema ha predicho la posibilidad de enfriar el movimiento mecánico a su estado base mediante la excitación de polaritones átomo-fotón, así como la aparición de estados “antibunching” en el movimiento mecánico [2, 28].

Como es bien conocido, el JCM se deriva del QRM utilizando la Aproximación de Onda Rotante (RWA, por sus siglas en inglés), que funciona bien en condiciones de cuasi-resonancia y para una fuerza de acoplamiento átomo-cavidad pequeña en comparación con la energía de los fotones [29, 30, 31]. Esta aproximación ignora los términos anti-resonantes y restringe el espacio de Hilbert a un conjunto infinito de subespacios 2D, cada uno caracterizado por la conservación del número de excitaciones [30, 32].

En la última década, se han logrado avances significativos en la interacción luz-materia con circuitos superconductores, pozos cuánticos de semiconductores, sistemas optomecánicos y otras plataformas híbridas. En particular, se han alcanzado los re-

gímenes de acoplamiento ultrafuerte (USC) y ultrafuerte profundo (DSC) en arreglos experimentales de estas plataformas [33, 34]. En el lado teórico, esto motivó el desarrollo de varios métodos de aproximación para el QRM que van más allá de la RWA [1, 35, 36]. La solución exacta del QRM, para cualquier magnitud de los parámetros, ya se conoce desde hace más de una década [37, 38]; se expresa en términos de los polos de funciones trascendentales y carece de expresiones analíticas del espectro de energía y de los estados propios. Por lo tanto, sigue siendo conveniente recurrir a modelos aproximados que conduzcan a una comprensión intuitiva de la física, como en el enfoque de la RWA.

La presente investigación se inspira en el trabajo previo de Restrepo et al. [2, 28], y tiene como objetivo calcular el espectro de energía, los estados propios y las propiedades de entrelazamiento de un sistema átomo-fotón-oscilador que incluye la parte cQED descrita por el QRM, y considera valores arbitrarios de las fuerzas de acoplamiento átomo-fotón y fotón-fonón. Para lograr esto, adaptamos la versión generalizada de la aproximación de onda rotante (GRWA) [35], desarrollada por E. K. Irish para el QRM, al hamiltoniano híbrido completo. Los resultados de nuestra investigación indican que este enfoque permite obtener expresiones analíticas precisas de los niveles energéticos y estados propios en todo el rango de acoplamientos y para una desintonización (detuning, en inglés) de la frecuencia de transición atómica y fotónica mucho mayor; así como un grado de entrelazamiento entre las excitaciones virtuales átomo-fotón (polaritones) y las oscilaciones mecánicas que difiere significativamente de los resultados obtenidos con la RWA.

Este estudio también aborda dos fenómenos distintivos que son accesibles de estudiar en el marco del modelo cuántico de Rabi para el sistema átomo-fotón-oscilador: rebotes en las cadenas de paridad y colapso y resurgimiento. Además, se examina el sistema en contacto con un baño térmico y una fuente externa de fotones, explorando el fenómeno de enfriamiento y amplificación asistida del oscilador mecánico. En este contexto, resaltamos que nuestra aproximación basada en la GRWA ofrece una descripción

razonable del estado del sistema en un amplio rango de acoplamientos.

Capítulo 2

Modelo cuántico de Rabi y algunas aproximaciones

El tema principal de este trabajo es la aplicación de la “Generalized rotating-wave-approximation”, o “Generalized-RWA”, (que abreviaremos como GRWA, por sus siglas en inglés) al hamiltoniano híbrido átomo-fotón-oscilador (véase el Capítulo 3). Este desarrollo está inspirado en el trabajo de Restrepo et al. [2], el cual utiliza el modelo de Jaynes-Cummings para realizar convenientemente una bipartición y diagonalización del sistema en el régimen cuasi-resonante de acoplamiento débil (véase la Sección 3.3). La secuencia de pasos que seguiremos para obtener expresiones analíticas de los estados propios y el espectro de energía del hamiltoniano de interacción completo en el rango de acoplamiento grande hará uso de múltiples bases de estados para estudiar el modelo cuántico de Rabi.

El propósito de este capítulo es hacer una revisión breve de este modelo y las aproximaciones que dan lugar a estas bases de estados. Primero, revisaremos el hamiltoniano y sus propiedades, luego obtendremos el JCM a partir del QRM y estudiaremos las consecuencias de dicha aproximación. Posteriormente, obtendremos la base GRWA $|\psi_G^{grwa}\rangle, |\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle, N = 0, 1, 2, \dots$, para ello, necesitamos la base adiabática $|\psi_{\pm,N}^{ad}\rangle, N = 0, 1, 2, \dots$, utilizada para reescribir la parte del hamiltoniano de Rabi H_R ,

que a su vez necesita la base de oscilador desplazado $|N_{\pm}\rangle$, $N = 0, 1, \dots$

2.1. Modelo cuántico de Rabi

El modelo cuántico de Rabi es una herramienta fundamental para explorar la interacción entre un sistema cuántico de dos niveles y un campo bosónico confinado [37]. En la física existen numerosos ejemplos de sistemas cuánticos de diversa naturaleza que pueden ser descritos utilizando este modelo; sin embargo, históricamente el contexto de implementación natural tanto teórica como experimental es el de las cavidades fotónicas (cQED).

En el contexto de cQED, este modelo se refiere a la interacción entre un átomo de dos niveles con momento dipolar eléctrico y un modo fotónico dentro de una cavidad óptica resonante. Aunque en la realidad no existe un átomo de dos niveles como tal, es común utilizar esta idealización en muchos fenómenos de interacción resonante coherente que involucran solo unos pocos niveles energéticos. Esta simplificación se considera razonable cuando se cumplen las condiciones de cuasi-resonancia y acoplamiento débil entre el átomo y los fotones.

En las últimas décadas se han llevado a cabo experimentos importantes en cQED bajo estas restricciones, empleando átomos alcalinos o de Rydberg que interactúan con el modo electromagnético de una cavidad óptica [39] o una cavidad de microondas [40]. Estos experimentos han tenido como objetivo principal revelar la naturaleza corpuscular de la luz y poner a prueba los fundamentos de la mecánica cuántica. No obstante, una de las dificultades más importantes en este tipo de sistemas es el control limitado que se tiene sobre los parámetros como el momento dipolar eléctrico del átomo y la magnitud del acoplamiento átomo-fotón.

Recientemente han sido realizados importantes avances en el ámbito experimental, donde se han logrado realizar sistemas cuánticos que simulan la dinámica del QRM para valores arbitrarios de sus parámetros mediante el uso de circuitos cuánticos su-

perconductores en donde átomos artificiales están acoplados a cavidades resonantes integradas en chips [41, 42, 43], sistemas fotónicos, en donde la propagación óptica es descrita mediante este formalismo [44] o bien utilizando otras plataformas como iones confinados [45].

En estos arreglos experimentales es posible mantener la descripción de la interacción que considera la participación de solo dos niveles en condiciones que de otro modo serían imposibles de lograr con átomos en una cavidad resonante [46].

Esto ha motivado el estudio del régimen de acoplamiento ultrafuerte, donde la frecuencia de acoplamiento átomo-fotón es comparable a la frecuencia de ambos componentes por separado. En este régimen, la interacción entre átomos y fotones se vuelve altamente no lineal y da lugar a fenómenos importantes, como la generación de estados de luz comprimida y la creación de estados entrelazados.

Además se han propuesto e investigado numerosas generalizaciones del modelo que involucran múltiples qubits [47, 48], múltiples modos electromagnéticos [49], átomos de varios niveles [50], una cavidad llena de un medio Kerr [51, 52], entre otras.

Por lo tanto, el QRM y sus variantes desempeñan un papel fundamental en la comprensión de la interacción coherente entre la radiación electromagnética y la materia en sistemas confinados. Este campo de investigación proporciona valiosas herramientas y perspectivas para explorar fenómenos cuánticos avanzados y desarrollar aplicaciones en el ámbito de la computación cuántica.

2.1.1. Formulación del hamiltoniano cuántico de Rabi

Consideremos un modo de radiación en una cavidad óptica de volumen V , cuyo hamiltoniano se expresa de la siguiente forma

$$H_{field} = \frac{1}{2} \int_V dV (\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)), \quad (2.1)$$

aquí, \mathbf{E} y \mathbf{B} representan los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico tiene polarización lineal en la dirección arbitraria $\hat{\mathbf{e}}$. Utilizando el formalismo de segunda cuantización es posible escribir los campos en términos de los operadores de aniquilación (\hat{a}) y creación (\hat{a}^\dagger) como sigue [53]

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{e}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \hbar \omega_c^3}{V}} \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.3)$$

donde ω_c es la frecuencia del campo, \mathbf{k} su vector de onda y los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Al sustituir los campos (2.2) y (2.3) en el hamiltoniano electromagnético (2.1) y realizar la integral sobre todo el volumen de la cavidad, obtenemos el hamiltoniano que describe al campo cuantizado

$$\hat{H}_{field} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.4)$$

en donde por simplicidad fue omitida la energía de punto cero.

En cuanto al átomo de dos niveles, consideremos que su estado base (excitado) $|g\rangle$ ($|e\rangle$) tiene una energía E_g (E_e). El hamiltoniano del sistema puede ser expresado en términos de una descomposición espectral de la siguiente manera

$$\hat{H}_{atom} = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|; \quad (2.5)$$

esta expresión puede reescribirse convenientemente a través de un corrimiento de energía $\frac{E_g + E_e}{2}$ y la diferencia de energía entre niveles dada por $\hbar\omega_a = \frac{E_e - E_g}{2}$

$$\hat{H}_{atom} = \frac{\hbar\omega_a}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|). \quad (2.6)$$

Esto sugiere introducir matrices de Pauli, definidas como $\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$, $\hat{\sigma}_x = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|$ y $\hat{\sigma}_y = -i |e\rangle \langle g| + i |g\rangle \langle e|$, de modo que el hamiltoniano atómico puede

escribirse en la forma

$$\hat{H}_{atom} = \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2.7)$$

En lo que resta en este trabajo tomaremos $\hbar = 1$.

Finalmente, el término de interacción entre el átomo y el campo electromagnético en la aproximación dipolar, se representa como $-\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, en donde $\hat{\mathbf{d}}$ es el operador de momento dipolar y $\hat{\mathbf{E}}$ el campo eléctrico. Es posible expresar el operador de momento dipolar en la base de los estados atómicos de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{i,j=g,e} |i\rangle \langle i| \hat{\mathbf{d}} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j=g,e} \hat{\mathbf{d}}_{i,j} |i\rangle \langle j|. \quad (2.8)$$

Si suponemos que los estados atómicos son simétricos bajo inversión espacial y consideramos que $\hat{\mathbf{d}}$ es un operador impar debido a su proporcionalidad con el vector de posición del electrón, se sigue que $\langle e| \hat{\mathbf{d}} |e\rangle = \langle g| \hat{\mathbf{d}} |g\rangle = 0$. Además, bajo la asunción de simetría de inversión, podemos establecer que $\langle e| \hat{\mathbf{d}} |g\rangle = \langle g| \hat{\mathbf{d}} |e\rangle^*$. Es importante destacar que estos términos suelen ser coeficientes complejos. No obstante, es común aplicar una rotación al hamiltoniano para transformarlos en números reales. Por consiguiente, es conveniente expresarlos siempre de esta manera. Con estas consideraciones, la expresión original se simplifica de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}_{e,g} |e\rangle \langle g| + \hat{\mathbf{d}}_{e,g} |g\rangle \langle e| = \hat{\mathbf{d}}_{e,g} \hat{\sigma}_x, \quad (2.9)$$

al multiplicar el operador de momento dipolar (2.9) por el campo eléctrico cuantizado (2.2) obtenemos

$$\hat{H}_i = g_{ac} \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.10)$$

en donde $g_{ac} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{e,g}$.

Al combinar el hamiltoniano del sistema atómico (2.7), el del campo fotónico (2.4)

y el de interacción (2.10), obtenemos el hamiltoniano cuántico de Rabi.

$$\hat{H}_R = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + g_{ac} \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.11)$$

2.1.2. Regímenes del hamiltoniano cuántico de Rabi

A continuación se presentan los regímenes más relevantes del modelo cuántico de Rabi, basados en la relación entre las frecuencias y la magnitud del acoplamiento [38].

- *Régimen Jaynes-Cummings.* Sucede cuando $g_{ac} \ll |\omega_c|, |\omega_a|$ y $|\omega_a - \omega_c| \ll |\omega_a + \omega_c|$. En este régimen, los términos anti-resonantes del hamiltoniano se pueden ignorar mediante la RWA, ya que oscilan a una frecuencia alta y tienen una contribución pequeña a la dinámica del sistema.
- *Régimen Anti-Jaynes-Cummings.* Ocurre cuando $g_{ac} \ll |\omega_c|, |\omega_a|$ y $|\omega_a + \omega_c| \ll |\omega_a - \omega_c|$. Aquí, se requiere un acoplamiento átomo-cavidad débil, al igual que en el régimen Jaynes-Cummings. Sin embargo, en este caso, las frecuencias del sistema deben tener signos opuestos. Como resultado, los términos anti-resonantes (resonantes) se vuelven dominantes (despreciables).
- *Régimen dispersivo dual (Two-fold regime, en inglés).* Se presenta cuando $g_{ac} < |\omega_c|, |\omega_a|, |\omega_a - \omega_c|, |\omega_a + \omega_c|$. En este régimen, se producen interacciones dispersivas en el sistema, y cualquier combinación de signos en las frecuencias del sistema dará lugar a un hamiltoniano efectivo que contiene términos de segundo orden en g_{ac} . Como consecuencia, se produce un desplazamiento AC-Stark en los niveles energéticos del qubit, el cual depende del número de fotones presentes en el sistema.
- *Régimen de acoplamiento ultrafuerte (ultrastrong-coupling regime - USC, en inglés).* Se considera que se accedió a este régimen cuando la relación entre la frecuencia del campo y el átomo cumple la condición, $0.1\omega_c < g_{ac} < \omega_c$; sin embargo, se debe tener en cuenta que esta condición no es tan rígida. En general,

este régimen comienza cuando los términos resonantes y anti-resonantes tienen una importancia similar y la aproximación de la RWA deja de ser adecuada para describir el sistema de manera precisa.

- *Régimen de acoplamiento ultrafuerte profundo (Deep Strong Coupling regime - DSC, en inglés)*. Aquí el acoplamiento átomo-fotón excede a las frecuencias características del sistema, $g_{ac} > |\omega_c|$. La dinámica en este régimen puede explicarse en términos de paquetes de ondas de número de fotones que se propagan de ida y vuelta a lo largo de *cadena de paridad* bien definidas.
- *Régimen de desacoplamiento*. Este régimen sucede cuando $\omega_a \sim 0$, $g_{ac} \ll |\omega_c|$. En este caso, el qubit está completamente fuera de resonancia con los fotones, lo que da lugar a una dinámica dispersiva muy específica. El hamiltoniano se vuelve constante y el sistema no experimenta evolución en esta región de parámetros.
- *Régimen intermedio*. $|\omega_a| \sim g_{ac} \ll |\omega_c|$. La dinámica del sistema puede ser bastante compleja. A la fecha, no se ha investigado tanto como los otros regímenes del modelo.

Existe otra clasificación de los regímenes de acoplamiento en el modelo cuántico de Rabi que considera tanto la energía accesible del sistema como la relación entre la magnitud del acoplamiento y las frecuencias [54]. Esta clasificación se basa en la validez de los criterios perturbativos y se distinguen tres regiones.

- *Régimen perturbativo ultrafuerte (pUSC, por sus siglas en inglés)*. Esta región se encuentra antes de los primeros puntos Juddianos (primer cruce o degeneración entre estados vecinos) y está definida por la siguiente relación $g_{pUSC}^x/\omega_c = 1/\sqrt{2(2N+1)}$. Aquí los términos de interacción del hamiltoniano aun pueden ser tratados de manera perturbativa. En este régimen se encuentra el modelo de Jaynes-Cummings.

- *Régimen perturbativo de acoplamiento ultrafuerte profundo (pDSC, por sus siglas en inglés)*. Este régimen ocurre después de los últimos puntos Juddianos, es decir, cuando las energías propias se vuelven cuasi-degeneradas. Se caracteriza por la propagación de paquetes de ondas de número de fotones de ida y vuelta a lo largo de las cadenas de paridad. También se produce el fenómeno de colapso y renacimiento (*Collapse and Revivals* en inglés) incluso cuando el sistema se encuentra en su estado base.
- *Régimen no perturbativo de acoplamiento ultrafuerte/profundo*. En este régimen todos los elementos del hamiltoniano contribuyen de igual manera a la dinámica.

En conclusión, el modelo cuántico de Rabi, que es de gran relevancia en la física cuántica, permite estudiar diferentes comportamientos del sistema átomo-fotón según la relación entre las frecuencias y la magnitud de su acoplamiento. Cada uno de estos regímenes presenta propiedades únicas que impactan significativamente en la dinámica del sistema.

2.1.3. Integrabilidad y propiedades del modelo cuántico de Rabi

Consideremos el operador

$$\hat{P} = -(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \otimes \hat{\sigma}_z. \quad (2.12)$$

El hamiltoniano cuántico de Rabi (2.11) exhibe invariancia bajo la transformación $\hat{P}\hat{H}_R\hat{P} = \hat{H}_R$. Esta propiedad está asociada a una simetría de paridad que podemos expresar mediante la relación de conmutación

$$[\hat{P}, \hat{H}_R] = 0. \quad (2.13)$$

Como consecuencia de esta simetría, el espacio de Hilbert se divide en dos subespa-

cios de dimensión infinita, cada uno con una paridad distinta, es decir, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-$. Estos subespacios son conocidos como *subespacios de paridad* o *cadena de paridad* y corresponden a las dos representaciones irreducibles del grupo Z_2 .

Para entender cómo se desarrolla la dinámica del sistema dentro del espacio de Hilbert, consideremos la llamada “base de paridad” $|p, N_p\rangle$, donde $\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p |N_p\rangle = N_p |N_p\rangle$, y el operador de aniquilación modificado $\hat{a}_p = \hat{a} \hat{\sigma}_x$. Podemos expresar el modelo cuántico Rabi de la siguiente manera

$$\hat{H}_R = \omega_c \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + g_{ac} (\hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger) - \frac{\omega_a}{2} (-1)^{\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p} \hat{P}. \quad (2.14)$$

Nótese como en esta representación para cada paridad tenemos dos osciladores armónicos desplazados y perturbados por un término proporcional a la frecuencia del átomo ω_a .

En 2011, D. Braak demostró que la simetría de paridad del modelo es suficiente para obtener el espectro energético exacto. El espectro energético se divide en dos partes: la parte *regular* y la parte *excepcional*. La parte regular se determina mediante los ceros de una función trascendental $G_\pm(x)$. Esta función se define mediante la siguiente suma

$$G_\pm(x) = \sum_{N=0}^{\infty} K_N(x) \left[1 \mp \frac{\omega_a/2}{x - N\omega_c} \right] \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \right)^N. \quad (2.15)$$

Los coeficientes K_N se definen recursivamente mediante la relación

$$NK_N = f_{N-1}(x)K_{N-1} - K_{N-2}, \quad (2.16)$$

además, se debe imponer la condición inicial $K_0 = 1$ y $K_1(x) = f_0(x)$. Aquí, $f_N(x)$ se define como

$$f_N(x) = \frac{2g_{ac}}{\omega_c} + \frac{1}{2g_{ac}} \left(N\omega_c - x + \frac{\omega_a^2/4}{x - N\omega_c} \right). \quad (2.17)$$

Con estas definiciones, las energías regulares para cada subespacio de paridad (\pm)

se calculan como

$$E_N^\pm = x_N^\pm - \frac{g_{ac}^2}{\omega_c}, \quad (2.18)$$

donde x_N^\pm son los valores de x que hacen que la función trascendental $G^\pm(x)$ se anule, es decir, $G_\pm(x_N^\pm) = 0$.

Por otro lado, las soluciones excepcionales ya han sido estudiadas y tienen la forma

$$E_N^{exc} = N\omega_c - \frac{g_{ac}^2}{\omega_c}. \quad (2.19)$$

Estas soluciones son degeneradas con respecto a los subespacios de paridad y coinciden con el caso $\omega_a = 0$. La obtención de los estados asociados a estas energías se encuentra detallada en la referencia [55].

La simetría de paridad inherente al QRM también se manifiesta en sus estados propios, los cuales presentan una paridad bien definida. Para ilustrar este punto, consideremos el estado base del hamiltoniano (2.14), expresado en la base desacoplada (2.21). En la figura 2.1, podemos observar que este estado solo se encuentra poblado por estados de la misma paridad. Esta propiedad se verifica en todos los estados propios del hamiltoniano, independientemente de la magnitud del acoplamiento o las frecuencias características del sistema.

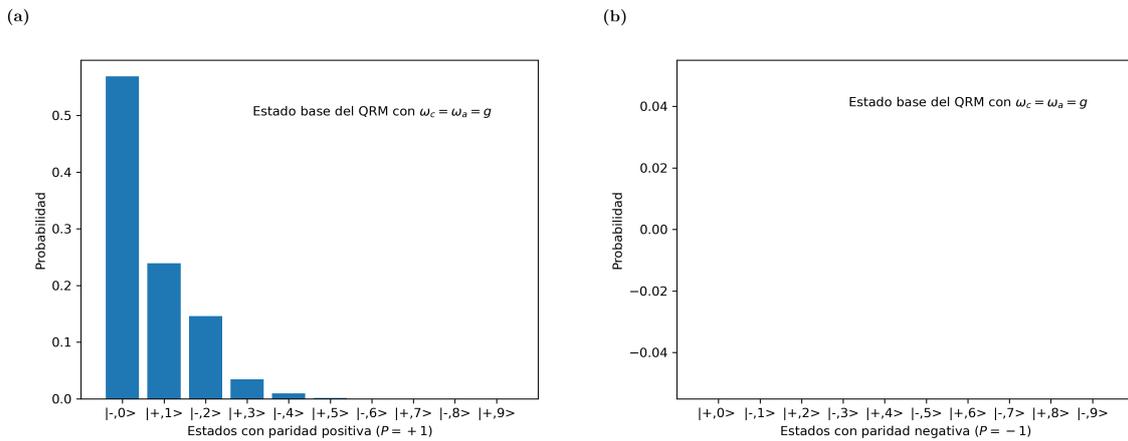


Figura 2.1: Probabilidad de que el estado base del QRM esté en cada uno de los estados del sistema desacoplado. La figura (a) ilustra los estados con paridad positiva, mientras que la figura (b) representa los estados con paridad negativa.

En la figura 2.2 se identifican los estados según su paridad.

$$\begin{aligned} | +z, 0 \rangle &\longleftrightarrow | -z, 1 \rangle \longleftrightarrow | +z, 2 \rangle \longleftrightarrow \dots \quad P = -1 \\ | -z, 0 \rangle &\longleftrightarrow | +z, 1 \rangle \longleftrightarrow | -z, 2 \rangle \longleftrightarrow \dots \quad P = +1 \end{aligned}$$

Figura 2.2: Cadenas de paridad en el modelo cuántico de Rabi desacoplado. El sistema evoluciona en dos espacios de Hilbert independientes, cada uno con una paridad diferente.

Una consecuencia adicional de esta simetría es que, al examinar la evolución temporal de un estado cuántico arbitrario con una paridad definida, se observa que su evolución solo involucra estados que pertenecen a su mismo subespacio de paridad.

2.2. Aproximación de onda rotante (RWA)

2.2.1. Sistema desacoplado

Cuando no hay interacción entre el átomo y la cavidad en el modelo cuántico de Rabi ($g_{ac} = 0$), el hamiltoniano (2.11) se simplifica a

$$\hat{H}_0 = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2.20)$$

En este caso, podemos diagonalizar (2.20) considerando el producto directo de los estados propios de cada subsistema de forma separada ($|\pm z, N\rangle = |\pm z\rangle \otimes |N\rangle$), donde $|\pm z\rangle$ son los autoestados de la matriz de Pauli $\hat{\sigma}_z$ y $|N\rangle$ es la base de número de fotones, con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\hat{H}_0 |\pm z, N\rangle = E_{\pm, N}^{(0)} |\pm z, N\rangle. \quad (2.21)$$

Las eigenenergías de manera explícita se muestran a continuación

$$E_{\pm, N}^{(0)} = \omega_c N \pm \frac{\omega_a}{2}. \quad (2.22)$$

Notemos que cuando el sistema se encuentra en resonancia ($\omega_a = \omega_c$), existe una degeneración entre los estados $|+z, N\rangle$ y $|-z, N+1\rangle$ (vease Fig. 2.3).

2.2.2. Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings describe la interacción entre un sistema cuántico de dos niveles (átomo) y un modo de radiación, bajo la aproximación dipolar y la aproximación cuasi-resonante, también conocida como la aproximación de onda rotante (RWA).

Para derivar este modelo, es conveniente representar el hamiltoniano (2.11) en términos de los operadores de escalera $\hat{\sigma}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$ de la siguiente manera

$$\hat{H}_R = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + g_{ac}(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger), \quad (2.23)$$

Los primeros dos términos de interacción de izquierda a derecha (en color azul) se conocen como términos *resonantes*, mientras que los últimos dos (en color rojo) se llaman términos *anti-resonantes*.

Consideremos (2.23) en la representación de interacción respecto a \hat{H}_0 mediante el operador $\hat{U} = \exp(i\hat{H}_0 t)$, el hamiltoniano transformado es

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_R - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= g_{ac} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\omega_c - \omega_a)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_c - \omega_a)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i(\omega_c + \omega_a)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_c + \omega_a)t}) \\ &\stackrel{\text{RWA}}{\approx} g_{ac} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\omega_c - \omega_a)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_c - \omega_a)t}), \quad g_{ac} \ll \omega_c \approx \omega_a. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si el sistema se encuentra bajo condiciones de cuasi-resonancia ($\omega_a \approx \omega_c$) y acoplamiento débil ($g_{ac} \ll \omega_c, \omega_a$) los términos anti-resonantes varían rápidamente y su promedio es cero a escalas de tiempo del orden de $1/\omega_c$. En este régimen, la aproximación al hamiltoniano consiste en despreciar estos términos, ya que no contribuyen significativamente a la dinámica del sistema. Al aplicar la RWA y regresar a la representación de

Schrödinger, el término de interacción está compuesto únicamente por los términos resonantes. El modelo reducido resultante se conoce como *modelo de Jaynes-Cummings*, cuya forma es

$$\hat{H}_R^{JC} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_x + g_{ac} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (2.25)$$

Otra forma de entender el efecto de la aproximación en el hamiltoniano cuántico de Rabi (2.23) es examinando los elementos de matriz del hamiltoniano H_R en la base desacoplada $|\pm z, N\rangle$, con $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \langle s', M | \hat{H}_R | s, N \rangle &= \langle s', M | \hat{H}_0 | s, N \rangle + \langle s', M | (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) | s, N \rangle + \langle s', M | (\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger) | s, N \rangle \\ &= \delta_{s',s} \delta_{M,N} (E_{+,N}^{(0)} \delta_{s,+} + E_{-,N}^{(0)} \delta_{s,-}) \\ &\quad + g_{ac} \sqrt{N+1} \delta_{s',-} \delta_{s,+} \delta_{M,N+1} + g_{ac} \sqrt{N} \delta_{s',+} \delta_{s,-} \delta_{M,N-1} \\ &\quad + g_{ac} \sqrt{N+1} \delta_{s',+} \delta_{s,-} \delta_{M,N+1} + g_{ac} \sqrt{N} \delta_{s',-} \delta_{s,+} \delta_{M,N-1} \\ &= \delta_{s',s} \delta_{M,N} (E_{+,N}^{(0)} \delta_{s,+} + E_{-,N}^{(0)} \delta_{s,-}) + \frac{1}{2} (\Omega_N \delta_{M,N+1} + \Omega_{N-1} \delta_{M,N-1}) (1 - \delta_{s',s}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se ha introducido la *frecuencia de Rabi para N fotones* en la última expresión, definida como:

$$\Omega_N = 2g_{ac} \sqrt{N+1}. \quad (2.27)$$

La representación matricial de \hat{H}_R se escribe de la siguiente manera

$$\hat{H}_R = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{(0)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_{+,0}^{(0)} & \frac{1}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_0 & E_{-,1}^{(0)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2}\Omega_0 & 0 & 0 & E_{+,1}^{(0)} & \frac{1}{2}\Omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_1 & E_{-,2}^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_1 & 0 & 0 & E_{+,2}^{(0)} & \frac{1}{2}\Omega_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_2 & E_{-,3}^{(0)} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

en donde renglones y columnas se ordenan según la lista: $| -z, 0 \rangle$, $| +z, 0 \rangle$, $| -z, 1 \rangle$, $| +z, 1 \rangle$, \dots

La diagonal principal en la matriz (2.28) está formada por las energías del sistema desacoplado dadas por la ecuación (2.22), los términos resonantes (color azul) se encuentran en las diagonales secundarias de la matriz, estos términos conservan energía ya que involucran transiciones entre los estados $| +z, N \rangle$ y $| -z, N + 1 \rangle$ y por último, los términos en las diagonales más alejadas son los anti-resonantes (rojos), estos a diferencia de los anteriores involucran transiciones entre los estados $| -z, N \rangle$ y $| +z, N + 1 \rangle$ y no conservan energía, por lo que son los únicos descartados por la RWA.

Nótese cómo los niveles se organizan en dobletes estrechamente espaciados, donde las energías de los dos niveles en cada doblete M_N ($| -z, N + 1 \rangle$ y $| +z, N \rangle$) difieren por $E_{+,N}^{(0)} - E_{-,N+1}^{(0)} = \delta \equiv (\omega_a - \omega_c)$, y los dobletes sucesivos están separados por una energía del orden de ω_c (ver Fig. 2.3).

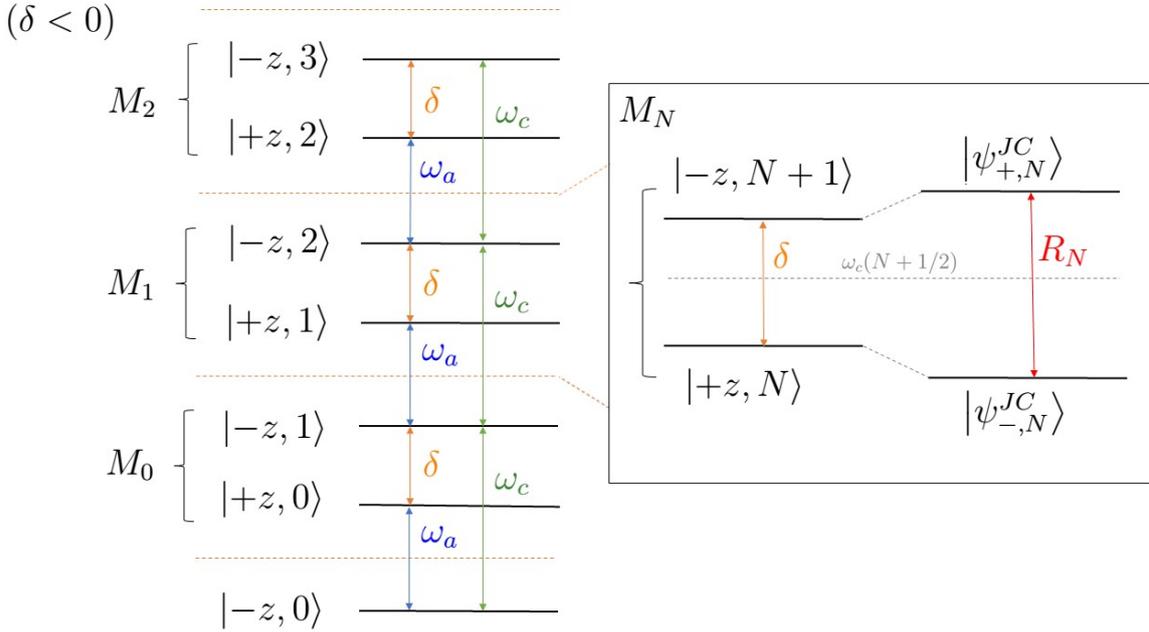


Figura 2.3: Niveles de energía del sistema desacoplado descritos por $\hat{H}_R(g_{ac} = 0)$ y, comparación con el subespacio M_N del JCM.

Al despreciar los términos anti-resonantes del hamiltoniano (2.23), se rompe la simetría de paridad mencionada anteriormente en la ecuación (2.13) (véase Fig. 2.4).

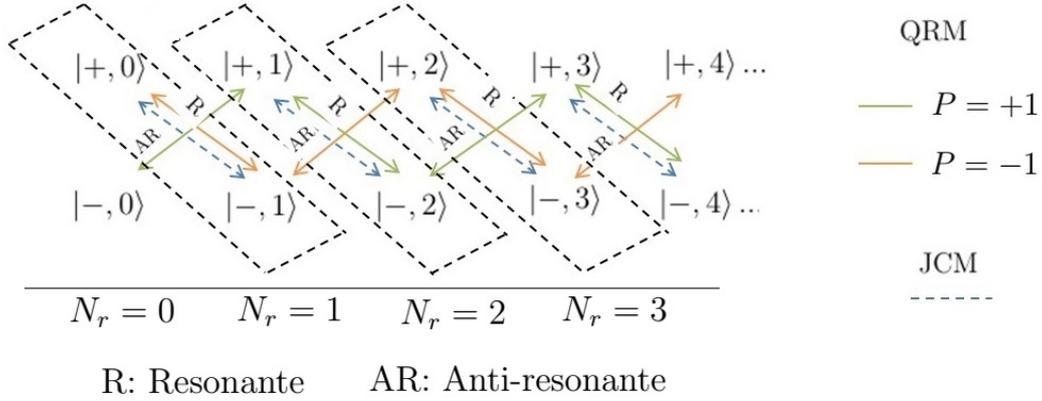


Figura 2.4: Cadenas de paridad en el QRM y bloques en el JCM. En esta figura, observamos cómo las cadenas de paridad están conectadas a través de los términos resonantes (R) o anti-resonantes (AR). Es importante destacar que los estados que componen los bloques de 2×2 en el modelo de Jaynes-Cummings poseen una paridad específica que depende del número de excitaciones (N_{JC}).

Sin embargo, surge una nueva cantidad conservada $[\hat{H}_{JC}, \hat{N}_{JC}] = 0$, que resulta ser el número de excitaciones del sistema

$$\hat{N}_{JC} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-. \quad (2.29)$$

Como consecuencia, el espacio de Hilbert se descompone en subespacios invariantes de 2×2 excepto por el estado base que forma un subespacio de 1×1 . En cada uno de estos subespacios se conserva el número de excitaciones N_{JC} , consulte la ecuación (2.29).

La matriz (2.28) adquiere una estructura diagonal por bloques, lo que facilita su diagonalización. A continuación se muestra el bloque M_N

$$\hat{H}_{JC}^{(N)} = \begin{pmatrix} E_{+,N}^{(0)} & \frac{\Omega_N}{2} \\ \frac{\Omega_N}{2} & E_{-,N+1}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

el ordenamiento del bloque es $|+z, N\rangle, |-z, N+1\rangle$.

La energía del estado base y la que resulta de diagonalizar el bloque (2.30) son las

siguientes

$$\begin{aligned}
E_G^{JC} &= E_{-,0}^{(0)} = -\frac{\omega_a}{2}, \\
E_{\pm,N}^{JC} &= \frac{1}{2}(E_{+,N}^{(0)} + E_{-,N+1}^{(0)}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_N^2 + (E_{+,N}^{(0)} - E_{-,N+1}^{(0)})^2} \\
&= \omega_c(N + 1/2) \pm \frac{1}{2}R_N,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para la última expresión, se definió la *frecuencia de Rabi generalizada* como:

$$R_N = \sqrt{\Omega_N^2 + \delta^2}. \tag{2.32}$$

Los eigenestados asociados a estas energías son

$$\begin{aligned}
|\psi_G^{JC}\rangle &= |-z, 0\rangle, \\
|\psi_{\pm,N}^{JC}\rangle &= f_{\pm}(\theta_N/2) | +z, N\rangle \pm f_{\mp}(\theta_N/2) |-z, N + 1\rangle,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

con $\tan \theta_N = -\frac{\Omega_N}{\delta}$, por conveniencia hemos adoptado la notación $f_+(\frac{\theta_N}{2}) = \sin(\frac{\theta_N}{2})$ y $f_-(\frac{\theta_N}{2}) = \cos(\frac{\theta_N}{2})$.

En la figura 2.3 se comparan las energías y eigenestados del JCM con las del QRM desacoplado ($g_{ac} = 0$).

Nótese que en este modelo cuando el sistema se encuentra en resonancia ($\delta = 0$), los estados se encuentran máximamente entrelazados para cualquier valor de acoplamiento g_{ac} .

$$\begin{aligned}
|\psi_{+,N}^{JC}\rangle_{(\delta=0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} | +z, N\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, N + 1\rangle, \\
|\psi_{-,N}^{JC}\rangle_{(\delta=0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} | +z, N\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, N + 1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Es importante mencionar que, aunque este modelo ha sido exitoso para explicar numerosos experimentos hasta la fecha [56, 57, 58, 59], presenta limitaciones cuando el acoplamiento aumenta o nos alejamos de la resonancia. En estas condiciones, la contribución de los términos anti-resonantes se vuelve significativa y el modelo no

puede reproducir de manera precisa la dinámica real del sistema [60, 61].

En conclusión, la RWA, simplifica convenientemente el modelo cuántico de Rabi, y da lugar a un modelo más manejable matemáticamente, el cual ha demostrado ser muy útil y famoso en la física cuántica que lleva su propio nombre (JCM). La principal ventaja de este modelo es que puede ser diagonalizado de manera directa, lo que permite obtener soluciones analíticas para la dinámica del sistema.

2.3. Aproximación adiabática

2.3.1. Base de oscilador armónico desplazado

Esta base se obtiene al hacer la frecuencia atómica de transición igual a cero ($\omega_a = 0$) en el QRM (véase hamiltoniano (2.11)), y considerando los estados propios $|\pm x\rangle \otimes |N_\pm\rangle$ del siguiente hamiltoniano

$$\hat{H}_R^{(\omega_a=0)} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g_{ac} \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.35)$$

donde $|\pm x\rangle$ son los eigenestados de $\hat{\sigma}_x$.

De esta manera, la ecuación de eigenvalores $\hat{H}_R^{\omega_a=0} |\pm x, N_\pm\rangle = E |\pm x, N_\pm\rangle$ se reduce a $[\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \pm g_{ac} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})] |N_\pm\rangle = E |N_\pm\rangle$, lo que corresponde a osciladores armónicos desplazados a las posiciones de equilibrio $\pm 2(g_{ac}/\omega_c)x_0$, donde $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega_c}$.

El espectro de energía está dado por la ecuación

$$E_N^{(\omega_a=0)} = \omega_c (N - g_{ac}^2/\omega_c^2), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

y los eigenestados correspondientes son

$$|\pm x, N_\pm\rangle = |\pm x\rangle e^{\mp(g_{ac}/\omega_c)(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} |N\rangle, \quad (2.37)$$

donde $|N\rangle$ son los estados de Fock de un oscilador armónico cuántico [62]. Es importante

destacar que los estados $|+x, N_+\rangle$ y $|-x, N_-\rangle$ son degenerados en energía y no son mutuamente ortogonales (Fig. 2.5).

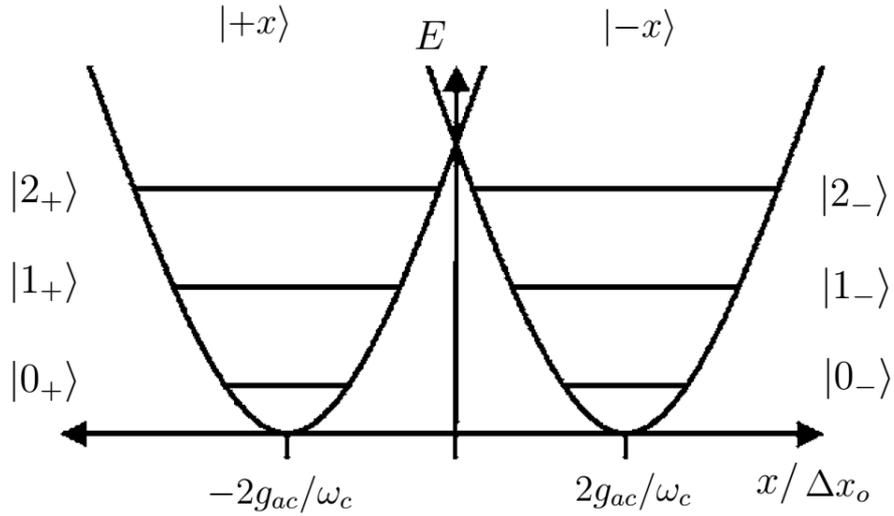


Figura 2.5: Representación gráfica de la base del oscilador armónico desplazado. Los estados con el mismo número N exhiben una degeneración y su desplazamiento, ya sea positivo o negativo, está directamente relacionado con la constante de acoplamiento (g_{ac}). Figura adaptada de la referencia [1].

2.3.2. Aproximación adiabática

La aproximación adiabática para el QRM se basa en la suposición de que la frecuencia de los fotones es mucho mayor que la frecuencia atómica, es decir, $\omega_a \ll \omega_c$. Para derivar esta aproximación, se puede expresar el hamiltoniano (2.11) en la base de oscilador armónico desplazado (2.37). La forma matricial resultante es la siguiente

$$\hat{H}_R = \begin{pmatrix} E_0^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle 0_+|0_- \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 0_+|1_- \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 0_+|2_- \rangle & \dots \\ \frac{\omega_a}{2} \langle 0_-|0_+ \rangle & E_0^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle 0_-|1_+ \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 0_-|2_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 1_+|0_- \rangle & E_1^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle 1_+|1_- \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 1_+|2_- \rangle & \dots \\ \frac{\omega_a}{2} \langle 1_-|0_+ \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 1_-|1_+ \rangle & E_1^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle 1_-|2_+ \rangle & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 2_+|0_- \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 2_+|1_- \rangle & E_2^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle 2_+|2_- \rangle & \dots \\ \frac{\omega_a}{2} \langle 2_-|0_+ \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 2_-|1_+ \rangle & 0 & \frac{\omega_a}{2} \langle 2_-|2_+ \rangle & E_2^{(\omega_a=0)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

En la matriz anterior, el ordenamiento de renglones y columnas sigue la secuencia $|+x, 0_+\rangle, |-x, 0_-\rangle, |+x, 1_+\rangle, |-x, 1_-\rangle, \dots$ y el traslape de dos estados Fock desplazados en posición está dado por

$$\langle M_-|N_+\rangle = e^{-2g_{ac}^2/\omega^2} (2g_{ac}/\omega)^{N-M} \sqrt{M!/N!} L_M^{N-M}(4g_{ac}^2/\omega^2), \quad M \leq N, \quad (2.39)$$

donde $L_M^N(x)$ son polinomios de Laguerre asociados.

En la base desplazada $|\pm x, N_\pm\rangle \equiv |s, N_s\rangle$ ($s = \pm x$), la inclusión del término atómico $\omega_a \hat{\sigma}_z/2$ en $\hat{H}_R^{\omega_a=0}$ rompe la degeneración e introduce términos no diagonales, dados por los últimos términos de izquierda a derecha del siguiente elemento de matriz

$$\langle s', M_{s'}|H_R|s, N_s\rangle = E_N \delta_{s's} \delta_{MN} + (1 - \delta_{s's}) \langle M_{s'}|N_s\rangle \omega_a/2. \quad (2.40)$$

La mezcla ocurre solo entre estados desplazados opuestamente ($s' \neq s$), es decir,

solo implica las superposiciones $\langle M_{\pm}|N_{\mp}\rangle$.

La aproximación adiabática se basa en truncar la matriz a una forma diagonal por bloques, donde cada bloque corresponde a niveles de pozos cuánticos opuestos con la misma energía, $\langle N_{\pm}|N_{\mp}\rangle$. Esto es posible debido a que los términos que involucran la mezcla entre niveles desplazados con diferentes números de fotones ($N \neq M$) son pequeños (**términos en color rojo**) en comparación con los anteriores y se pueden ignorar.

La condición $\omega_a \ll \omega_c$ implica que la separación entre los niveles del oscilador es mucho mayor que la separación del sistema de dos niveles, por lo que una transición en el sistema de dos niveles nunca puede excitar al oscilador. Se puede decir que el campo permanece en su estado inicial de energía (un valor dado de N), y este estado sigue adiabáticamente cualquier cambio en el estado del sistema de dos niveles (que está acoplado al campo a través del operador $\hat{\sigma}_x$). Esto se puede pensar como si el campo estuviera monitoreando constantemente el observable del sistema de dos niveles $\hat{\sigma}_x$ y ajustándose para estar en el estado de energía instantánea que corresponde a ese valor de $\hat{\sigma}_x$.

El bloque 2×2 correspondiente al valor N está dado por

$$\hat{H}_N^{ad} = \begin{pmatrix} E_N^{(\omega_a=0)} & \frac{\omega_a}{2} \langle N_-|N_+\rangle \\ \frac{\omega_a}{2} \langle N_-|N_+\rangle & E_N^{(\omega_a=0)} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

el ordenamiento del bloque sigue la secuencia $|+z, N_+\rangle, |-z, N_-\rangle$.

Cabe destacar que cada uno de estos bloques se caracteriza por una cantidad conservada dada por la expresión

$$\hat{N}_R^{ad} = \hat{D}_s^\dagger \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{D}_s \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right), \quad (2.42)$$

en donde $\hat{D}_s(\nu \hat{\sigma}_i) = e^{\nu \hat{\sigma}_i (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$ es el operador de desplazamiento dependiente de espín.

La diagonalización del bloque (2.41) nos lleva a obtener el espectro de energías y

eigenestados que constituyen la aproximación adiabática

$$E_{\pm, N}^{ad} = E_N^{(\omega_a=0)} \pm \frac{\omega_a}{2} \langle N_- | N_+ \rangle, \quad (2.43)$$

$$|\Psi_{\pm, N}^{ad}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x, N_+\rangle \pm |-x, N_-\rangle). \quad (2.44)$$

La presencia de los polinomios de Laguerre en los traslapes $\langle N_- | M_+ \rangle$ introducen una estructura ondulada en la suave variación de la energía en función de g_{ac}/ω_c . Se observa que $\langle N_- | N_+ \rangle \rightarrow 0$ cuando $g_{ac}/\omega_c \rightarrow \infty$, lo cual corresponde a dos osciladores armónicos idénticos no acoplados y niveles de energía degenerados por pares (Véase Fig. 2.6).

La aproximación adiabática ha demostrado ser útil en la descripción de sistemas en la física del Estado Sólido. Especialmente en los sistemas conocidos como *pares de Cooper* acoplados a osciladores mecánicos nanométricos [63], donde se alcanza el límite de degeneración atómico.

Es notable que esta aproximación conserva la simetría de paridad mencionada anteriormente (ecuación (2.13)), en parte debido a que el estado fundamental no queda excluido de los bloques de 2×2 (ecuación (2.41)), como sucede en el modelo de Jaynes-Cummings. Las energías (2.43) y estados (2.44) serán cruciales para la derivación de la GRWA.

2.4. Aproximación de onda rotante generalizada (GRWA)

La aproximación cuasi-resonante *generalizada* o “GRWA” es una variante del JCM que busca mejorar la precisión del espectro energético y la descripción de los estados del sistema. La principal diferencia entre ambas aproximaciones radica en el proceso de descarte de los términos de interacción del hamiltoniano. Mientras que la RWA descarta solo los términos anti-resonantes y conserva los resonantes, la GRWA aplica previamente una transformación unitaria al hamiltoniano y luego descarta los términos

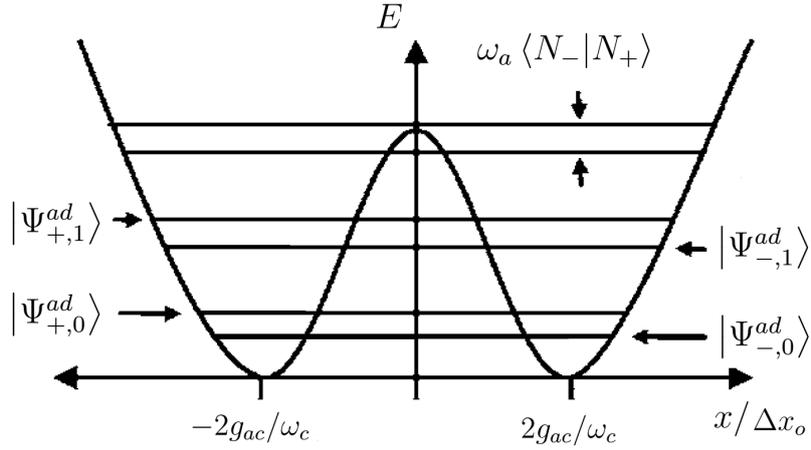


Figura 2.6: Representación gráfica de la base adiabática para el QRM. Figura adaptada de la referencia [1].

que involucran dos o más excitaciones [35]. Esta transformación y eliminación selectiva de términos resulta en una mejora en la precisión del espectro energético. Esta mejora puede ser verificada al comparar los resultados obtenidos con la solución numérica exacta (Fig. 2.7). Además de la mejora en el espectro energético, la GRWA también permite una mejor descripción de los estados del sistema. Detalles adicionales serán discutidos más adelante en la sección 2.6.

Una de las principales ventajas de esta aproximación es que permite describir las cantidades físicas relevantes del sistema de manera comparable al modelo Jaynes-Cummings, manteniendo la simplicidad matemática característica del mismo. Sin embargo, esta aproximación permite acoplamientos átomo-fotón arbitrariamente grandes y es más flexible con respecto a la condición de cuasi-resonancia. Como veremos más adelante, la GRWA funciona mejor para “detunings” negativos porque se derivó utilizando los estados (2.44).

El primer paso en la derivación de la GRWA implica escribir el hamiltoniano cuántico de Rabi (véase ecuación (2.11)) en la base adiabática $|\Psi_{\pm,N}^{ad}\rangle$ (ecuación (2.44)), en lugar de la eigenbase $|\pm z, N\rangle$ del hamiltoniano desacoplado. En esta representación, se

obtiene la siguiente expresión para el elemento de matriz del hamiltoniano

$$\langle \psi_{s',M}^{ad} | \hat{H}_R | \psi_{s,N}^{ad} \rangle = E_{s,N}^{ad} \delta_{MN} \delta_{s's} + \frac{\omega_a}{2} \langle M_- | N_+ \rangle (1 - \delta_{MN}) f_{m-n}(s, s'), \quad (2.45)$$

en donde $f_{m-n}(s, s') = s' + s(-1)^{M-N}$. Esta expresión se puede representar de forma matricial como

$$\hat{H}_R = \begin{pmatrix} E_{-,0}^{ad} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\Omega_{0,1} & -\frac{1}{2}\Omega_{0,2} & \cdots \\ 0 & E_{+,0}^{ad} & \frac{1}{2}\Omega_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_{0,1} & E_{-,1}^{ad} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2}\Omega_{0,1} & 0 & 0 & E_{+,1}^{ad} & \frac{1}{2}\Omega_{1,2} & \cdots \\ -\frac{1}{2}\Omega_{0,2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_{1,2} & E_{-,2}^{ad} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

En la expresión anterior, $\Omega_{M,N}$ representa la frecuencia atómica renormalizada por los traslapes, definida como $\Omega_{M,N} = \omega_a \langle M_- | N_+ \rangle$ (ecuación (2.39)). Cabe destacar que el ordenamiento de los renglones y columnas en la matriz H_R sigue la secuencia $|\Psi_{-,0}^{ad}\rangle$, $|\Psi_{+,0}^{ad}\rangle$, $|\Psi_{-,1}^{ad}\rangle$, $|\Psi_{+,1}^{ad}\rangle$, y así sucesivamente.

En el siguiente paso, se aplica un enfoque similar al de la RWA en el QRM. Durante este proceso, se descartan los elementos más remotos de la matriz, es decir, los términos que no conservan la energía o “anti-resonantes”, y que involucran dos o más excitaciones (términos color rojo en la matriz anterior). Al realizar este procedimiento, se simplifica el análisis y se puede enfocar en los estados relevantes del sistema, es decir, que tienen una contribución significativa a las transiciones y la dinámica.

Una vez descartados estos términos, la matriz del hamiltoniano se reduce a una forma diagonal por bloques de dimensión 2×2

$$\hat{H}_N^{grwa} = \begin{pmatrix} E_{+,N}^{ad} & \frac{1}{2}\Omega_{N,N+1} \\ \frac{1}{2}\Omega_{N,N+1} & E_{-,N+1}^{ad} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

el ordenamiento del bloque sigue la secuencia $|\Psi_{-,N}^{ad}\rangle, |\Psi_{+,N}^{ad}\rangle$, con $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Cada bloque constituye un subespacio invariante con un hamiltoniano que puede resolverse de forma independiente, caracterizado por la cantidad siguiente conservada

$$\hat{N}_R^{grwa} = \hat{D}_s^\dagger \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right) \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{N=0}^{\infty} |+, N\rangle \langle +, N| \right] \hat{D}_s \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right), \quad (2.48)$$

en donde $\hat{D}_s(\nu \hat{\sigma}_i) = e^{\nu \hat{\sigma}_i (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$ es el operador de desplazamiento dependiente de espín, con el estado adiabático definido como $D_s^\dagger(g_{ac} \sigma_x / \omega_c) |+, N\rangle$ (véase sección 2.3)

La diagonalización del sistema nos proporciona el siguiente espectro de energías

$$\begin{aligned} E_G^{grwa} &= E_{-,0}^{ad} = -\frac{g_{ac}^2}{\omega_c} - \frac{\Omega_{0,0}}{2}, \\ E_{\pm,N}^{grwa} &= \omega_c \left(N + \frac{1}{2} \right) - \frac{g_{ac}^2}{\omega_c} + \left(\frac{\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1}}{4} \right) \pm \frac{1}{2} T_N, \end{aligned} \quad (2.49)$$

en donde $T_N = \sqrt{\Delta_N^2 + \Omega_{N,N+1}^2}$ y $\Delta_N = \omega_a (\langle N_- | N_+ \rangle + \langle N+1_- | N+1_+ \rangle) / 2 - \omega_c$.

Los eigenestados correspondientes se definen de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\psi_G^{grwa}\rangle &= |\psi_{-,0}^{ad}\rangle \\ |\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle &= f_{\pm} \left(\frac{\alpha_N}{2} \right) |\psi_{+,N}^{ad}\rangle \pm f_{\mp} \left(\frac{\alpha_N}{2} \right) |\psi_{-,N+1}^{ad}\rangle, \end{aligned} \quad (2.50)$$

en donde $\tan(\alpha_N) = -\frac{\Omega_{N,N+1}}{\Delta_N}$. Es necesario recordar que hemos adoptado la notación $f_+ \rightarrow \sin$ y $f_- \rightarrow \cos$.

Para entender el efecto de los términos que fueron descartados por la GRWA, examinemos el hamiltoniano H_R en la representación de interacción. Para ello, primero consideremos el operador unitario de desplazamiento dependiente de espín ($\hat{D}_s(\frac{g_1}{\omega_c} \hat{\sigma}_x)$) y la siguiente transformación $\hat{D}_s^\dagger(\frac{g_1}{\omega_c} \hat{\sigma}_x) \hat{H}_R \hat{D}_s(\frac{g_1}{\omega_c} \hat{\sigma}_x)$ al hamiltoniano cuántico de Rabi (2.11).

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{Rabi} &= \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z \exp\left[-\frac{2g_1}{\omega_c} \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger - \hat{a})\right] \\
&= \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \tilde{H}_x + \tilde{H}_y,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

aquí,

$$\hat{H}_x = \frac{1}{2} \omega_a \sigma_x \left[2 \left(\frac{g_1}{\omega_c} \right)^2 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{g_1}{\omega_c} \right)^4 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 + \dots \right], \tag{2.52}$$

$$\hat{H}_y = \frac{i}{2} \omega_a \sigma_y \left[2 \left(\frac{g_1}{\omega_c} \right) (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{g_1}{\omega_c} \right)^3 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^3 + \dots \right], \tag{2.53}$$

estas contribuciones corresponden a las potencias pares e impares resultado de descomponer en series la exponencial en (2.51) y juegan el papel de términos de interacción en esta representación, la GRWA al igual que la RWA consiste en despreciar todos los términos que involucren dos o más excitaciones en la base desacoplada ($|\pm x, N\rangle$), de este modo la aproximación solo conserva términos de la forma $\hat{\sigma}_+ \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k$ o $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k$ donde $k = 0, 1, 2, \dots$.

El operador unitario de desplazamiento dependiente de espín ($\hat{D}_s(\nu \hat{\sigma}_i) = e^{\nu \hat{\sigma}_i (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$) conecta la base adiabática con la base desacoplada como sigue: $|\psi_{\pm, N}^{ad}\rangle = \hat{D}_s\left(\frac{g_1}{\omega_c} \sigma_z\right) |\pm x, N\rangle$.

Las únicas transiciones que son consideradas bajo esta aproximación son las que conectan los estados $|\psi_{+, N}^{ad}\rangle \leftrightarrow |\psi_{-, N+1}^{ad}\rangle$ y $|\psi_{-, N+1}^{ad}\rangle \leftrightarrow |\psi_{+, N}^{ad}\rangle$, que corresponden a las diagonales secundarias de la matriz (azules).

Podemos observar muchas similitudes entre esta aproximación y el JCM, de ahí que se considere una generalización del mismo, notamos cómo nuevas cantidades generalizan a las anteriores en el espectro energético y eigenestados, por ejemplo, la cantidad $\Omega_{N, N+1}$ ahora juega el rol de frecuencia de Rabi (Ω_N) y Δ_N pasa a ser lo que antes era la diferencia entre frecuencias del sistema (δ). Otra similitud que comparten ambas aproximaciones es que descartan los términos que no conservan energía y en ambas el estado base queda aislado lo que rompe la simetría de paridad (2.13) que posee el QRM.

2.5. Espectros de energía en las aproximaciones RWA, adiabática y GRWA

En esta sección, se realizará una comparación de las energías obtenidas a través de diferentes aproximaciones analíticas para el modelo cuántico de Rabi con la evaluación numérica del espectro. Se analizarán y compararán las energías calculadas utilizando la aproximación adiabática, la GRWA y el modelo de Jaynes-Cummings. Esta comparación permitirá evaluar la validez de cada una de estas aproximaciones en diversos regímenes y condiciones.

En la Figura 2.7, se presentan los resultados de esta comparación. Se han considerado varios niveles energéticos en función del acoplamiento átomo-cavidad y diferentes valores de las frecuencias del átomo y los fotones.

En particular, en la Figura 2.7(a), que corresponde al caso resonante ($\omega_a = \omega_c$), se puede observar que para valores pequeños de g_{ac} , las energías calculadas mediante la RWA y la GRWA coinciden y se ajustan bien a los resultados numéricos. Sin embargo, se aprecian algunas diferencias en la aproximación adiabática. Además, se destaca que después del primer cruce, la RWA se aleja considerablemente de la solución numérica, mientras que tanto la GRWA como la aproximación adiabática describen de manera precisa el sistema.

La Figura 2.7(b) corresponde al caso de “detuning” negativo ($\omega_c = 3\omega_a$), aquí podemos notar como en este régimen tanto la GRWA como la aproximación adiabática describen el espectro energético con gran precisión y como la RWA se desvía significativamente conforme se incrementa el acoplamiento.

La Figura 2.7(c) muestra el caso de “detuning” positivo ($\omega_a = 3\omega_c$). En este escenario, se pueden hacer las siguientes observaciones.

En primer lugar, se destaca que la RWA muestra una mayor robustez en comparación con las otras aproximaciones analíticas consideradas. A medida que aumenta el acoplamiento átomo-cavidad, la RWA sigue describiendo adecuadamente el espectro

energético del sistema.

En contraste, se puede observar que la aproximación adiabática falla rápidamente en este caso. A medida que el acoplamiento se incrementa, las energías calculadas mediante esta aproximación difieren significativamente de los resultados numéricos.

Por otro lado, la GRWA se comporta de manera aceptable en este escenario. Aunque no es tan precisa como la RWA, sigue proporcionando una descripción razonable del espectro energético para valores de acoplamiento átomo-fotón relativamente pequeños.

Todas estas observaciones permiten concluir que la GRWA es una aproximación robusta y adecuada para describir el comportamiento del QRM en una amplia gama de parámetros. En el caso resonante, tiene una precisión comparable con la RWA para describir el sistema en el régimen de acoplamiento débil y además, posee la capacidad de la aproximación adiabática, permitiendo incluso abordar el régimen de acoplamiento ultrafuerte (USC) y obtener resultados más allá de este límite incluso fuera de resonancia. Sin embargo, se observa que presenta limitaciones significativas cuando el “detuning” entre el átomo y los fotones es positivo.

2.6. Entrelazamiento en el modelo cuántico de Rabi y sus aproximaciones

En esta sección, nos enfocamos en el estudio de las propiedades de entrelazamiento de los estados del QRM y de las aproximaciones que hemos analizado previamente. Si bien es cierto que el criterio del número de Schmidt es ampliamente utilizado para detectar la no-separabilidad de los estados de sistemas bipartitos, en este caso optaremos por emplear la razón de participación como medida cuantitativa del entrelazamiento.

La razón de participación, definida como $\xi = 1/\text{Tr}(\hat{\rho}_r^2)$, es utilizada para cuantificar el entrelazamiento de los estados en un sistema bipartito. En este contexto, $\hat{\rho}_r$ representa una matriz de densidad reducida obtenida mediante una traza parcial en cualquiera de los subsistemas. Una de las ventajas de esta medida en comparación con

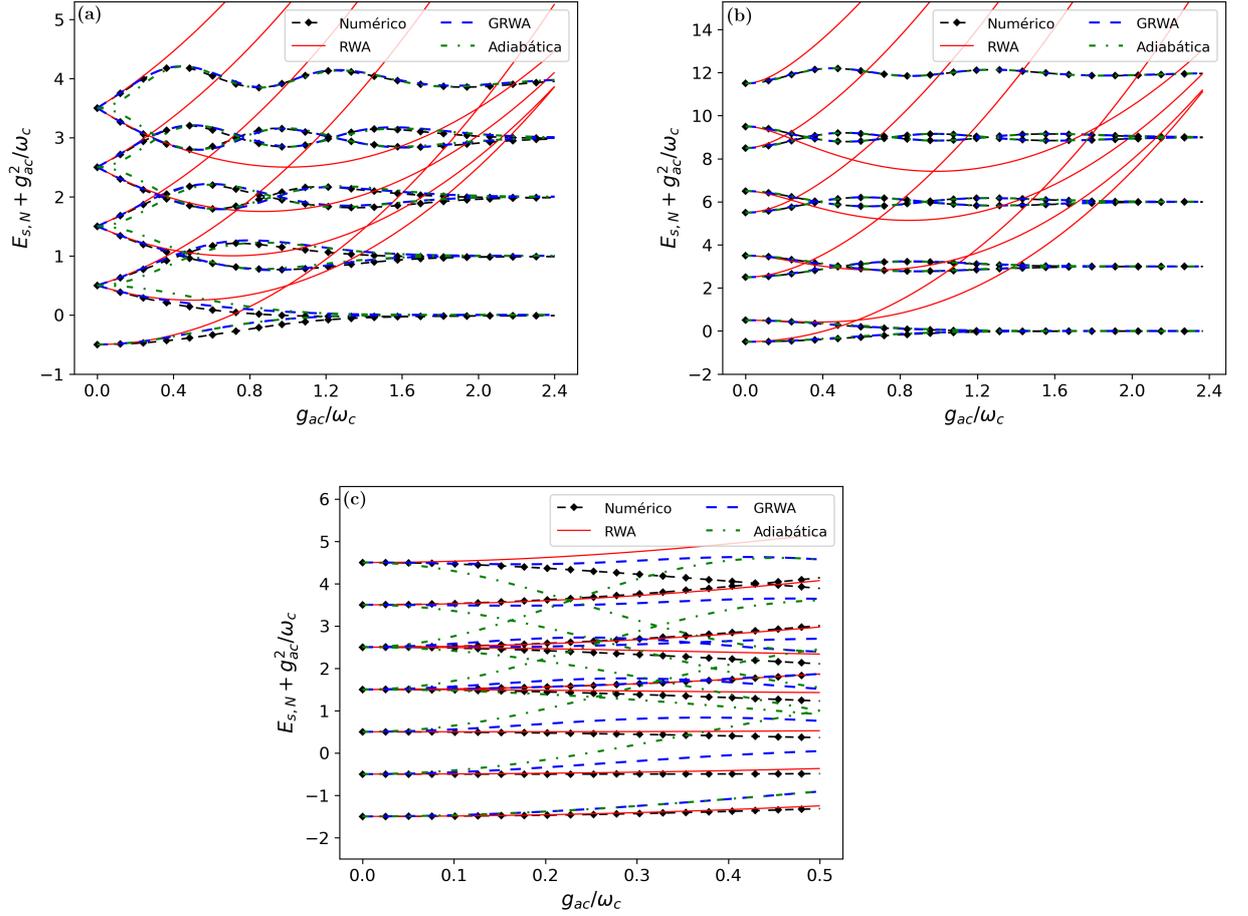


Figura 2.7: Comparación entre la solución numérica (líneas discontinuas con puntos color negro), la aproximación de la RWA (líneas sólidas rojas) y la aproximación de la GRWA (líneas discontinuas azules) en los siguientes casos: (a) Resonancia ($\delta = 0$), (b) Desintonización negativa ($\omega_a < \omega_c$) y (c) Desintonización positiva ($\omega_a > \omega_c$).

el número de Schmidt es su capacidad para proporcionar información sobre el grado de entrelazamiento en un rango continuo de valores, permitiéndonos no solo determinar si un estado está entrelazado, sino también evaluar su nivel de entrelazamiento de manera precisa.

Comenzaremos nuestro análisis considerando los eigenestados del JCM (2.33), la matriz de densidad asociada se escribe como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\pm, N}^{JC} = & f_{\pm}^2(\theta_N/2) | +z, N \rangle \langle +z, N | + f_{\mp}^2(\theta_N/2) | -z, N + 1 \rangle \langle -z, N + 1 | \\ & \pm f_{\pm}(\theta_N/2) f_{\mp}(\theta_N/2) (| +z, N \rangle \langle -z, N + 1 | + | -z, N + 1 \rangle \langle +z, N |). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Con el objetivo de calcular la razón de participación, tomaremos la traza parcial de (2.54) respecto al subsistema fotónico, lo que nos lleva a la siguiente expresión

$$\hat{\rho}_{\pm, N}^{JC} = f_{\pm}^2(\theta_N/2) | +z \rangle \langle +z | + f_{\mp}^2(\theta_N/2) | -z \rangle \langle -z |. \quad (2.55)$$

Esta ecuación representa la matriz reducida correspondiente al JCM, donde el término $f_{+}(\theta_N/2)$ ($f_{-}(\theta_N/2)$) es $\sin \theta_N/2$ ($\cos \theta_N/2$). A partir de esta matriz reducida, podemos continuar con el cálculo tomando la traza de su cuadrado

$$Tr[(\hat{\rho}_{\pm, N}^{JC})^2] = f_{\pm}^4(\theta_N/2) + f_{\mp}^4(\theta_N/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta_N), \quad (2.56)$$

Para obtener la razón de participación, simplemente debemos tomar el inverso de la expresión anterior. De esta manera, la razón de participación para los estados propios del JCM está dada por

$$\xi_N^{rwa} = \frac{2}{1 + \cos^2 \theta_N}, \quad (2.57)$$

recordemos que el ángulo θ_N está definido como $\tan \theta_N = -\Omega_N/\delta$.

Es importante destacar que la expresión anterior no incluye al estado base ($|\psi_G^{JC}\rangle$). No obstante, es conocido que el estado base del JCM es un estado separable, lo cual implica que no hay entrelazamiento presente en él. En consecuencia, su razón de par-

ticipación correspondiente es igual a 1.

Continuando con el análisis, consideramos la matriz densidad asociada a los estados propios obtenidos con la aproximación adiabática (2.44)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\pm,N}^{ad} = & \frac{1}{2} [| +x, N_+ \rangle \langle +x, N_+ | + | -x, N_- \rangle \langle -x, N_- | \\ & \pm (| +x, N_+ \rangle \langle -x, N_- | + | -x, N_- \rangle \langle +x, N_+ |)]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Luego, al tomar la traza parcial respecto al subsistema fotónico, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\pm,N}^{ad} = & \frac{1}{2} [| +x \rangle \langle +x | + | -x \rangle \langle -x | \\ & \pm (\langle N_- | N_+ \rangle | +x \rangle \langle -x | + \langle N_+ | N_- \rangle | -x \rangle \langle +x |)]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Procediendo de manera similar al caso anterior, podemos calcular la razón de participación asociada a los estados propios adiabáticos

$$\xi_{\pm,N}^{ad} = \frac{2}{1 + \langle N_- | N_+ \rangle^2}, \quad (2.60)$$

Finalmente, consideremos la matriz densidad asociada a los estados propios obtenidos con la GRWA (2.50). Esta matriz se escribe como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\pm,N}^{grwa} = & f_{\pm}^2(\alpha_N/2) | \psi_{+,N}^{ad} \rangle \langle \psi_{+,N}^{ad} | + f_{\mp}^2(\alpha_N/2) | \psi_{-,N+1}^{ad} \rangle \langle \psi_{-,N+1}^{ad} | \\ & \pm f_{\pm}(\alpha_N/2) f_{\mp}(\alpha_N/2) (| \psi_{+,N}^{ad} \rangle \langle \psi_{-,N+1}^{ad} | + | \psi_{-,N+1}^{ad} \rangle \langle \psi_{+,N}^{ad} |). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Encontrar la matriz reducida en este caso involucra un proceso un poco más complicado que los dos casos anteriores, sin embargo, encontramos que esta tiene la siguiente forma

$$\hat{\rho}_{\pm,N}^{grwa} = \frac{1}{2} [| +x \rangle \langle +x | + | -x \rangle \langle -x | + \lambda_{\pm,N} (| -x \rangle \langle +x | + | +x \rangle \langle -x |)], \quad (2.62)$$

en donde

$$\lambda_{\pm,N} = f_{\pm}^2(\alpha_N/2) \langle N_- | N_+ \rangle - f_{\mp}^2(\alpha_N/2) \langle N + 1_- | N + 1_+ \rangle \pm 2f_{\pm}(\alpha_N/2)f_{\mp}(\alpha_N/2) \langle N_- | N + 1_+ \rangle. \quad (2.63)$$

Con esto, la razón de participación es

$$\xi_{\pm,N}^{grwa} = \frac{2}{1 + \lambda_{\pm,N}^2}. \quad (2.64)$$

La Figura 2.8 muestra una comparación entre las razones de participación obtenidas para cada aproximación: (2.57), (2.60), (2.64), y los resultados numéricos, para un estado particular. La razón de participación de los estados correspondientes al JCM predice un entrelazamiento máximo para cualquier valor de acoplamiento, bajo condiciones de resonancia $\omega_c = \omega_a$ (Figura 2.8(a)).

En contraste, los estados adiabáticos muestran un comportamiento que tiende a la separabilidad a medida que se reduce el acoplamiento, lo cual no logra describir adecuadamente la situación predicha por la solución numérica. Sin embargo, es importante destacar que para acoplamientos grandes, los estados adiabáticos capturan el entrelazamiento esperado.

Por otro lado, los estados GRWA exhiben un comportamiento oscilatorio que sigue de cerca la solución numérica, destacando su capacidad para capturar la tendencia del entrelazamiento en un rango más amplio de acoplamientos.

En el caso fuera de resonancia, en donde el “detuning” es negativo $\omega_c = 3\omega_a$ (Figura 2.8(b)), se observa que la razón de participación correspondiente a los estados del JCM, ξ_N^{rwa} , aumenta de manera monótona, lo que indica un incremento gradual del entrelazamiento a medida que aumenta el acoplamiento. Sin embargo, se nota que los estados del JCM no se ajustan adecuadamente a la solución numérica. Por otro lado, la razón de participación de los estados adiabáticos, $\xi_{\pm,N}^{ad}$ y los estados GRWA, $\xi_{\pm,N}^{grwa}$, exhiben un comportamiento no monótono que se ajusta estrechamente al resultado numérico. Estas observaciones demuestran la capacidad de ambas aproximaciones para capturar

el comportamiento del entrelazamiento en este régimen. Además, las oscilaciones presentes en ambas aproximaciones se originan debido a la superposición de los estados fotónicos desplazados (2.39).

Por último, en la Figura 2.8(c), se muestra el caso fuera de resonancia que corresponde a un “detuning” positivo $\omega_c = 3\omega_a$. Aquí se observa que el JCM supera ampliamente a las otras dos aproximaciones, de manera similar a lo que ocurre en el espectro energético en este régimen.

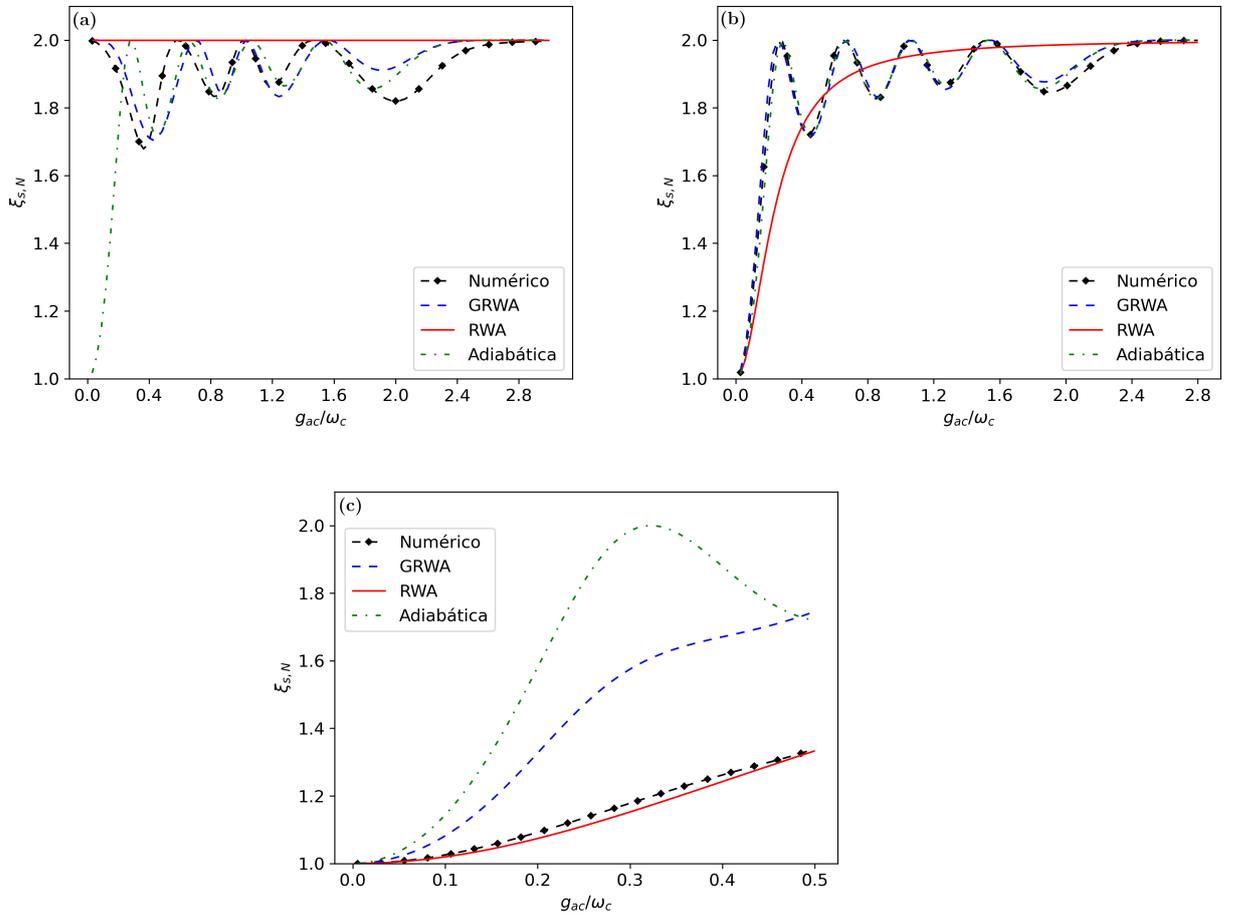


Figura 2.8: Razón de participación como función del acoplamiento átomo-cavidad g_{ac} para el estado de Jaynes-Cummings $|\psi_{+,3}^{JC}\rangle$, el estado GRWA $|\psi_{+,3}^{grwa}\rangle$, el estado adiabático $|\psi_{-,4}^{grwa}\rangle$, y el resultado exacto correspondiente (numérico). Por consistencia solo en la figura (c) se debió considerar el estado $|\psi_{+,3}^{ad}\rangle$ en lugar del estado ya mencionado. (a) Caso resonante $\omega_a = \omega_c$, (b) Caso no resonante $\omega_c = 3\omega_a$ en donde el “detuning” es negativo y (c) caso de “detuning” positivo $\omega_a = 3\omega_c$.

Capítulo 3

Modelo cuántico de Rabi con interacción optomecánica

3.1. Hamiltoniano optomecánico

En los últimos años, la optomecánica de cavidades ha experimentado un notorio aumento en el interés científico, impulsado por diversas motivaciones. Por un lado, destaca la posibilidad de realizar detecciones ópticas sumamente sensibles de fuerzas pequeñas, desplazamientos, masas y aceleraciones. Por otro lado, la optomecánica cuántica de cavidades ofrece la posibilidad de manipular y detectar el movimiento mecánico en el régimen cuántico mediante el uso de luz, abriendo la puerta a la generación de estados no clásicos tanto en la luz como en el movimiento mecánico. Estas herramientas proporcionan la base para aplicaciones en el procesamiento cuántico de información, donde los dispositivos optomecánicos podrían actuar como interfaces coherentes entre la luz y la materia, permitiendo la conversión de información almacenada en qubits de estado sólido en qubits fotónicos.

Considerando un modo fotónico de frecuencia (ω_c) en una cavidad óptica con un espejo capaz de vibrar debido a la presión de radiación, y también un solo modo mecánico de esta vibración con frecuencia (ω_m), se puede describir el sistema mediante

un hamiltoniano que involucra dos osciladores armónicos cuánticos.

$$\hat{H}_{opt} = \omega_c(x) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (3.1)$$

En esta expresión, \hat{a} y \hat{a}^\dagger (\hat{b} y \hat{b}^\dagger) son los operadores fotónicos (fonónicos) de aniquilación y creación. Es importante destacar que el operador asociado con la amplitud de la vibración mecánicas está definido como $x = x_0(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$, donde x_0 representa la amplitud de la fluctuación de punto cero, o bien la dispersión del vacío.

La interacción entre estos modos da lugar al acoplamiento optomecánico, que se manifiesta a través de cambios en la frecuencia de resonancia de la cavidad (ω_c) debido al desplazamiento mecánico (x) del espejo. Al expandir esta frecuencia en una serie, obtenemos la siguiente ecuación

$$\omega_c(x) = \omega_c + x \frac{\partial \omega_c(x)}{\partial x} + \dots \quad (3.2)$$

Para los propósitos de este trabajo y la mayoría de los experimentos realizados hasta la fecha, es suficiente conservar únicamente hasta el término lineal. Además, resulta conveniente definir la cantidad asociada a este acoplamiento como $G = -\frac{\partial \omega_c(x)}{\partial x}$.

De esta manera, podemos expresar el hamiltoniano como sigue

$$\hat{H}_{om} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}) \quad (3.3)$$

con $g_{om} = Gx_0$, la ecuación (3.3) constituye el Modelo Optomecánico Estándar.

3.2. Hamiltoniano cuántico de Rabi con interacción optomecánica

Consideremos un sistema híbrido cuántico compuesto por un modo fotónico confinado en una cavidad óptica, un átomo de dos niveles y un oscilador mecánico, como se muestra en la figura 3.1. Las interacciones entre estos subsistemas se describen me-

diante una interacción dipolar eléctrica entre el átomo y el campo cuantizado, así como una interacción optomecánica entre el oscilador mecánico y los fotones en la cavidad. El hamiltoniano que representa al sistema se puede expresar de la siguiente manera

$$\hat{H}_{hyb} = \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g_{ac} \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (3.4)$$

Los primeros tres términos corresponden al modelo cuántico de Rabi[4, 5, 38] \hat{H}_R , donde un átomo de dos niveles (separados por una energía ω_a) está acoplado (parámetro g_{ac}) a un campo electromagnético cuantizado de una cavidad óptica (frecuencia ω_c). El cuarto y quinto término describen el modelo optomecánico estándar, el cual asume que uno de los espejos de la cavidad oscila armónicamente (frecuencia ω_m) debido a la presión de radiación causada por el intercambio de momento de los fotones que rebotan en él [64] (acoplamiento g_{om}). Los operadores bosónicos \hat{a}, \hat{a}^\dagger (\hat{b}, \hat{b}^\dagger) son los operadores de aniquilación y creación para fotones (fonones), y $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli para espín-1/2; por simplicidad hemos tomado $\hbar = 1$.

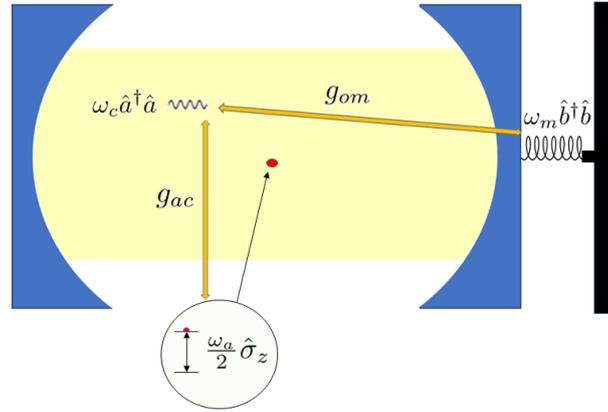


Figura 3.1: Sistema híbrido que combina la interacción átomo-fotón con la interacción optomecánica. Un sistema de dos niveles (el “átomo”) se encuentra dentro de una cavidad óptica (fotones), uno de cuyos espejos oscila armónicamente (fonones).

3.3. Diagonalización mediante dos aproximaciones de onda rotante sucesivas

En esta sección, se aborda la versión del sistema híbrido presentada por Restrepo et al. [2], que emplea el modelo de Jaynes-Cummings en lugar del modelo cuántico de Rabi para describir la interacción átomo-fotón. Recordemos que el hamiltoniano de Jaynes-Cummings omite los términos anti-resonantes y está dado por la ecuación (2.25). Este modelo es válido para acoplamientos débiles, $g_{ac}/\omega_c \ll 1$, y cerca de la resonancia $\omega_c \approx \omega_a$ [65].

3.3.1. Hamiltoniano RWA-RWA

El hamiltoniano híbrido considerado por Restrepo et al. puede ser expresado de la siguiente manera

$$\hat{H}_{hyb}^{rwa} = \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g_{ac} (\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a}) + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (3.5)$$

Es importante notar que en esta última expresión, se ha aplicado previamente la aproximación cuasi-resonante o “RWA” al hamiltoniano híbrido original (3.4). Por ende, al emplear el hamiltoniano (3.5), es necesario reconocer la limitación inherente a la descripción de la parte cQED del sistema, es decir, un acoplamiento cuasi-resonante débil entre el dipolo atómico y el campo en la cavidad. Sin embargo, una ventaja de esta aproximación es la conservación del número de excitaciones átomo-fotón $\hat{N}_{JC} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-$ (véase ecuación (2.29)).

Como veremos a continuación, esta constante de movimiento (\hat{N}_{JC}) del hamiltoniano \hat{H}_{hyb}^{rwa} nos permitirá descomponer el espacio de Hilbert en un conjunto de subespacios invariantes caracterizados por el número de excitaciones átomo-fotón.

Con el objetivo de diagonalizar el hamiltoniano (3.5), se seguirá el método utilizado por Restrepo et al., pero en lugar de restringirse estrictamente al caso resonante

($\omega_a = \omega_c$), se presentará un resultado más general que también abarca el caso de cuasi-resonancia ($\omega_a \approx \omega_c$).

A continuación, procederemos a expresar el hamiltoniano en la base propia del modelo Jaynes-Cummings. Resulta evidente que los primeros tres términos de (3.5) se pueden expresar mediante su representación espectral de la siguiente forma

$$\hat{H}_R^{JC} = E_G^{JC} \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \left[E_{+,N}^{JC} \hat{P}_{+,N} + E_{-,N}^{JC} \hat{P}_{-,N} \right]. \quad (3.6)$$

Esta formulación implica la incorporación de la energía del estado fundamental E_G^{JC} y los dobletes $E_{\pm,N}^{JC}$, junto con los operadores de proyección $\hat{P}_G = |\psi_G^{JC}\rangle \langle \psi_G^{JC}|$ y $\hat{P}_{\pm,N} = |\psi_{\pm,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{\pm,N}^{JC}|$. Estas magnitudes se expresan en términos de los estados y energías derivados del modelo de Jaynes-Cummings $|\psi_G^{JC}\rangle, |\psi_{\pm,N}^{JC}\rangle, N = 0, 1, 2, \dots$

En este punto, es conviene definir las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(N)}$ que actúan sobre el espacio de Hilbert de dos dimensiones formado por el doblete $|\psi_{\pm,N}^{JC}\rangle$.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^{(N)} &= |\psi_{+,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{-,N}^{JC}| + |\psi_{-,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{+,N}^{JC}|, \\ \hat{\sigma}_y^{(N)} &= i(|\psi_{+,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{-,N}^{JC}| - |\psi_{-,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{+,N}^{JC}|), \\ \hat{\sigma}_z^{(N)} &= |\psi_{+,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{+,N}^{JC}| - |\psi_{-,N}^{JC}\rangle \langle \psi_{-,N}^{JC}|, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y la identidad $\hat{I}^{(N)} = \hat{P}_{+,N} + \hat{P}_{-,N} = \hat{\sigma}_i^{(N)} \hat{\sigma}_i^{(N)}$, donde $i = x, y, z$.

Así, podemos expresar el hamiltoniano de Jaynes-Cummings de forma explícita de la siguiente manera

$$\hat{H}_R^{JC} = -\frac{\omega_a}{2} \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \left[\omega_c (N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} \right]. \quad (3.8)$$

Recordemos que $R_N = \sqrt{\Omega_N^2 + \delta^2}$ es la frecuencia de Rabi generalizada (2.32), $\Omega_N = 2g_{ac}\sqrt{N+1}$ es la frecuencia de Rabi para N fotones (2.27) y $\delta = \omega_a - \omega_c$.

En relación a la parte optomecánica de (3.5), observamos que el término de interacción $-g_{om} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ es proporcional al operador de número de fotones $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

El cambio a la base propia del Jaynes-Cummings de este término implica el cálculo de los siguientes elementos de matriz

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_{\pm,N} = N + \frac{1}{2}(1 \pm \cos \theta_N) \hat{P}_{\pm,N}, \quad (3.9)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_{\mp,N} = -\frac{1}{2} \sin \theta_N |\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{\mp,N}^{grwa}|. \quad (3.10)$$

en donde $\tan \theta_N = -\Omega_N/\delta$ (véase ecuación (2.33)).

Los elementos de matriz restantes que involucran proyectores con número de fotones diferentes son nulos. En consecuencia, es posible expresar este operador en términos de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(N)}$ siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en el término Jaynes-Cummings (3.8), como se ilustra a continuación

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \sum_{N=0}^{\infty} \left[(N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{1}{2} \cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} - \frac{1}{2} \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)} \right]. \quad (3.11)$$

Es importante destacar que al llevar a cabo este cambio de base, solo se ven afectados los subespacios correspondientes al átomo y los fotones. En otras palabras, el cambio de base no tiene ningún impacto directo en el subespacio fonónico.

Como resultado de esta transformación podemos escribir el cuarto y quinto término del hamiltoniano (3.5) de la siguiente manera

$$\hat{H}_{om} = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \sum_{N=0}^{\infty} \left[(N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{1}{2} \cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} - \frac{1}{2} \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)} \right] (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (3.12)$$

El siguiente paso en la derivación consiste en sustituir los términos correspondientes a la parte Jaynes-Cummings (ecuación (3.8)) y a los optomecánicos (3.12) en el hamiltoniano (3.5), de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{hyb}^{rwa} = & \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{\omega_a}{2} \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \left[\omega_c (N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} \right. \\ & \left. - g_{om} \left((N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{1}{2} \cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} - \frac{1}{2} \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)} \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La estructura de (3.13) es $\hat{H}_{hyb}^{rwa} = \hat{H}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \hat{H}_N$, en donde

$$\hat{H}_G = (\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{\omega_a}{2}) \hat{P}_G, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_N = & \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{I}^{(N)} + \omega_c (N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ & - g_{om} ((N + 1/2) \hat{I}^{(N)} + \frac{1}{2} \cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} - \frac{1}{2} \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

En esta forma, es evidente cómo el espacio de Hilbert se puede descomponer en una suma directa de subespacios invariantes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_G \oplus \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}$. El subespacio \mathcal{H}_G se caracteriza por tener $N_{JC} = 0$ excitaciones átomo-fotón (polaritones), mientras que $\mathcal{H}^{(N)}$ posee $N_{JC} = N + 1$ con $N = 0, 1, 2, \dots$. Recordemos que el hamiltoniano (3.13) simplemente corresponde a (3.5) expresado en términos de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(N)}$ generadas a partir del doblete de estados propios del JCM.

Los términos fonónicos asociados al estado base de polaritón en \hat{H}_G (3.14) tienen la forma de un oscilador armónico cuántico, y su diagonalización resulta trivial. Por otro lado, los términos relacionados con los N subespacios de dimensión 2 en \hat{H}_N (3.15) presentan una estructura idéntica y pueden ser diagonalizados de manera conjunta, dado que están desacoplados.

Al examinar estos últimos términos, podemos notar que uno de los efectos de la transformación en el hamiltoniano híbrido es la aparición de un término que desplaza la posición del oscilador mecánico $\sim (N + 1/2)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$, junto con dos términos que describen un acoplamiento efectivo entre los polaritones y los fonones $\sim \hat{\sigma}_{x,z}^{(N)}(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ en cada subespacio N .

En esta etapa del análisis, realizaremos un paso importante al tomar la condición de cuasi-resonancia ($\omega_a \approx \omega_c$) en contraste con el enfoque de Restrepo et al.[2], quien consideró una resonancia exacta ($\omega_a = \omega_c$). Esta elección será fundamental para continuar con la diagonalización del hamiltoniano y conlleva la implicación de que $\theta_N \rightarrow \pi/2$, ya que $\tan \theta_N = -\Omega_N/\delta$. Es importante destacar que cuando $\delta \gg \Omega_N$, nos encontramos

en un caso de interacción dispersiva en el cual no hay hibridación entre las excitaciones átomo-fotón (polaritones) y los modos mecánicos.

Bajo la condición de cuasi-resonancia, el término \hat{H}_N se simplifica y adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{H}_N = & [\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om}(N + 1/2)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \omega_c(N + 1/2)] \hat{I}^{(N)} \\ & + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \frac{g_{om}}{2} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \hat{\sigma}_x^{(N)}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

El hamiltoniano anterior se reduce al obtenido en la referencia [2] haciendo la sustitución de la frecuencia de Rabi generalizada ($R_N = \sqrt{\Omega_N^2 + \delta^2}$) por la frecuencia de Rabi $\Omega_N = 2g_{ac}\sqrt{N + 1}$.

Para continuar con la diagonalización, introducimos los operadores desplazados de aniquilación y creación $\hat{b}_N = \hat{b} - \frac{g_{om}}{\omega_m}(N + 1/2)$ y $\hat{b}_N^\dagger = \hat{b}^\dagger - \frac{g_{om}}{\omega_m}(N + 1/2)$. En términos de estos operadores, el hamiltoniano anterior se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned}\hat{H}_N = & \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{T_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \frac{g_{om}}{2} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_x^{(N)} + \frac{g_{om}^2}{\omega_m} (N + \frac{1}{2}) \hat{\sigma}_x^{(N)} \\ & + \omega_c(N + 1/2) - \frac{g_{om}^2}{\omega_m} (N + \frac{1}{2})^2.\end{aligned}\quad (3.17)$$

El cuarto término de izquierda a derecha de \hat{H}_N (color morado) puede ser tratado de manera perturbativa y simplemente induce un desplazamiento Stark en las energías.

Con el propósito de mantener la simplicidad, este término será ignorado, lo que permitirá obtener expresiones analíticas del espectro de energía y estados. De esta manera, llegamos a un hamiltoniano para los N subespacios que se asemeja a un hamiltoniano de un oscilador armónico acoplado (QRM), con un término adicional que depende de N ($C_N = \omega_c(N + 1/2) - \frac{g_{om}^2}{\omega_m} (N + \frac{1}{2})^2$).

El hamiltoniano resultante para los N subespacios es

$$\hat{H}_N = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \frac{g_{om}}{2} \hat{\sigma}_x^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N).\quad (3.18)$$

Procederemos a reducir el hamiltoniano anterior aplicando nuevamente la RWA y despreciando los términos anti-resonantes ($\hat{\sigma}_-^{(N)}\hat{b}_N$ y $\hat{\sigma}_+^{(N)}\hat{b}_N^\dagger$) pero ahora en la interacción polaritón-fonón.

Finalmente, obtenemos un hamiltoniano que posee la misma forma que el hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings, caracterizado por la siguiente cantidad conservada: $\hat{N}_{\text{polarón}} = \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{\sigma}_-^{(N)}$.

$$\hat{H}_N^{JC} = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \frac{g_{om}}{2} (\hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N). \quad (3.19)$$

Es importante enfatizar que en general $[\hat{N}_{\text{polarón}}, \hat{H}_G] \neq 0$, en contraste con \hat{N}_{JC} que se conserva en cada uno de los subespacios del sistema durante todo el proceso de diagonalización. También debemos mencionar que en este proceso estuvieron involucradas dos RWA al sistema, la primera a nivel átomo-fotón $\hat{H}_R \rightarrow \hat{H}_{JC}$ en el hamiltoniano (3.5) y la otra fue realizada a \hat{H}_N en (3.18).

En la figura 3.2 se esquematiza la descomposición del espacio de Hilbert para cada valor de N en el hamiltoniano híbrido aproximado.

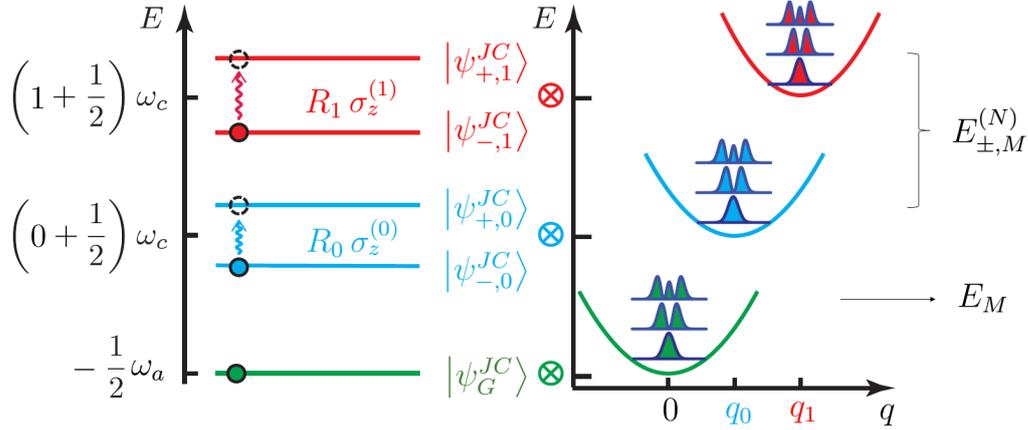


Figura 3.2: En esta figura, se representa el acoplamiento de los N subespacios de polaritón con los estados fonónicos. Cada subespacio fonónico se encuentra desplazado una cantidad $q_N = \frac{g_{om}}{\omega_m} (N + \frac{1}{2})$ [2].

3.3.2. Espectro energético y estados propios (enfoque RWA)

Primero consideramos el espectro asociado a la contribución \hat{H}_G (3.14), que involucra el término del estado fundamental polaritónico \hat{P}_G y un oscilador armónico cuántico. El valor propio de energía correspondiente se obtiene sumando E_g^{rwa} con el espectro de energía cuantizada de dicho oscilador, expresado de manera explícita como

$$E_M = \omega_m M - \frac{\omega_a}{2}, \quad M = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Los estados propios asociados a este espectro son

$$|\Psi_M\rangle = |-z, 0\rangle |M\rangle. \quad (3.21)$$

A continuación, consideramos las energías y eigenestados relacionados con el estado base aislado del hamiltoniano (3.19). Las energías se calculan de la siguiente manera

$$E_G^{(N)} = \omega_c(N + 1/2) - \frac{g_{om}^2}{\omega_m}(N + 1/2)^2 - \frac{R_N}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Recordemos nuevamente que R_N es la frecuencia de Rabi generalizada y se puede definir en términos de la frecuencia de Rabi $\Omega_N = 2g_{ac}\sqrt{N+1}$ y el “detuning” ($\delta = \omega_a - \omega_c$) como $R_N = \sqrt{\Omega_N^2 + \delta^2}$.

Los estados propios asociados a este espectro son

$$|\Psi_G^{(N)}\rangle = |\psi_{-,N}^{JC}\rangle D\left(\frac{g_{om}}{\omega_m}(N + \frac{1}{2})\right) |M=0\rangle = |\psi_{-,N}^{JC}\rangle |0^{a_N}\rangle. \quad (3.23)$$

Asimismo, las energías y los eigenestados relacionados con los bloques de 2×2 en el hamiltoniano (3.19) se expresan como

$$E_{\pm, M}^{(N)} = \omega_c(N + 1/2) - \frac{g_{om}^2}{\omega_m}(N + \frac{1}{2})^2 + (M + \frac{1}{2})\omega_m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(R_N - \omega_m)^2 + g_{om}^2(M + 1)}, \quad (3.24)$$

Los estados propios asociados a estas energías son

$$\begin{aligned} |\Psi_{+,M}^{(N)}\rangle &= \sin(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{+,N}^{JC}\rangle |M^{qN}\rangle + \cos(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{-,N}^{JC}\rangle |M+1^{qN}\rangle, \\ |\Psi_{-,M}^{(N)}\rangle &= \cos(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{+,N}^{JC}\rangle |M^{qN}\rangle - \sin(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{-,N}^{JC}\rangle |M+1^{qN}\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

en donde $\tan(\chi_M^{(N)}) = -\frac{g_{om}\sqrt{M+1}}{(\Omega_N - \omega_m)}$.

Las energías y los estados (3.20-3.25) constituyen el espectro energético del hamiltoniano híbrido aproximado cuando $\omega_a \approx \omega_c$, utilizando dos aproximaciones RWA.

Es necesario recordar que esta sección corresponde a lo estudiado en los artículos ([2, 28]).

3.4. Diagonalización mediante dos aproximaciones GRWA sucesivas

Uno de los principales logros de esta investigación es la derivación del espectro energético y los eigenestados del hamiltoniano híbrido más allá de las restricciones impuestas por la aproximación cuasi-resonante. Esto se logró mediante la implementación de la aproximación cuasi-resonante generalizada al hamiltoniano híbrido completo (3.4).

La GRWA fue desarrollada en el contexto de cQED para el modelo cuántico de Rabi y permite superar las condiciones del modelo de Jaynes-Cummings. Es decir, permite explorar un rango más amplio de valores de desintonía entre las frecuencias (*detunings*) y magnitudes mayores del acoplamiento átomo-cavidad [35].

Dentro del contexto del modelo híbrido (3.4), esta aproximación también permite una mejor descripción de los polaritones átomo-cavidad (estados atómicos revestidos por el campo fotónico), la frecuencia de Rabi generalizada, el espectro de energía y los estados propios, en comparación con su contraparte RWA.

Esta sección se fundamenta en mi propia contribución, publicada anteriormente

[66], la cual está basada en el método propuesto por Restrepo et al. para diagonalizar el sistema (consulte sección 3.3).

3.4.1. Hamiltoniano GRWA-GRWA

El primer paso en la implementación de la GRWA en el hamiltoniano híbrido implica utilizar un término átomo-cavidad obtenido mediante la GRWA en lugar de recurrir al modelo de Jaynes-Cummings utilizado en la sección anterior. Con esta consideración, el hamiltoniano híbrido (3.4) se expresa de la siguiente manera

$$\hat{H}_{hyb}^{grwa} = \hat{H}_R^{grwa} + \hat{H}_{om}. \quad (3.26)$$

Donde la parte optomecánica del hamiltoniano se define como $\hat{H}_{om} = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})$. Es importante señalar que simplemente hemos reemplazado $\hat{H}_R \rightarrow \hat{H}_R^{grwa}$ en el hamiltoniano del sistema completo (3.4).

A pesar de que el hamiltoniano \hat{H}_R^{grwa} presenta una forma explícita algo compleja, es posible expresarlo de una manera más accesible mediante su descomposición espectral, que se presenta a continuación

$$\hat{H}_R^{grwa} = E_G^{grwa} \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \left[E_{+,N}^{grwa} \hat{P}_{+,N} + E_{-,N}^{grwa} \hat{P}_{-,N} \right]. \quad (3.27)$$

En analogía al método basado en la RWA (consulte la Sección 3.3), en esta última expresión utilizamos los proyectores formados por la base propia de \hat{H}_R^{grwa} y sus respectivas energías, es decir, $\hat{P}_G = |\psi_G^{grwa}\rangle \langle \psi_G^{grwa}|$ y $\hat{P}_{\pm,N} = |\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{\pm,N}^{grwa}|$.

Por otro lado, para describir el término optomecánico \hat{H}_{om} del hamiltoniano (3.26) en términos de los mismos proyectores $\hat{P}_G, \hat{P}_{\pm,N}$, realizamos la siguiente transformación

$$\hat{H}_{om} = \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \left[\left(\hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} (\hat{P}_{+,N} + \hat{P}_{-,N}) \right) g_{om} \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\hat{P}_G + \sum_{N'=0}^{\infty} (\hat{P}_{+,N'} + \hat{P}_{-,N'}) \right) \right]. \quad (3.28)$$

Al analizar esta última expresión, se aprecia que, a diferencia del enfoque basado en la aproximación de la RWA, persisten términos que involucran proyectores correspondientes a dobletes de diferentes subespacios, como por ejemplo $\hat{P}_{+,0}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{P}_{+,2}$, $\hat{P}_{-,2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{P}_{+,4}$, entre otros. No obstante, dentro de los límites de validez de la GRWA, podemos desestimar estos términos, ya que tienden a ser notablemente más pequeños en comparación con aquellos que involucran transiciones dentro del mismo subespacio ($\hat{P}_{s',N}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{P}_{s,N}$).

De manera similar, los proyectores del estado base (\hat{P}_G) poseen transiciones de la forma $\hat{P}_G(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{P}_{\pm,1}$ pero también son pequeños y pueden ser descartados.

Al eliminar los términos de mezcla entre subespacios en la ecuación (3.28), simplificamos el problema y lo reducimos a calcular las siguientes cantidades.

$$\hat{P}_G \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_G = \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} \hat{P}_G, \quad (3.29)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_{\pm,N} = \left[N + \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} + f_{\mp}^2(\alpha_N/2) \mp \frac{\Omega_N}{2\omega_c} f_+(\alpha_N) \right] \hat{P}_{\pm,N}, \quad (3.30)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_{\mp,N} = - \left[\frac{1}{2} f_+(\alpha_N) + \frac{\Omega_N}{2\omega_c} f_-(\alpha_N) \right] |\psi_{\pm}^{grwa}\rangle \langle \psi_{\mp}^{grwa}|, \quad (3.31)$$

Es importante recordar que continuamos utilizando la notación $f_+ \rightarrow \sin$ y $f_- \rightarrow \cos$, y que el ángulo α_N se define mediante la expresión $\tan(\alpha_N) = \frac{\Omega_{N,N+1}}{\Delta_N}$ (consulte la Sección 2.4).

De esta manera, al sustituir los resultados (3.29-3.31) en el término de interacción optomecánica (3.28), este se reduce al factor definido por los siguientes corchetes

$$\begin{aligned} [(\dots)\hat{a}^\dagger\hat{a}(\dots)] &= \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \left[\left(N + \frac{1}{2} + \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right) \hat{I}^{(N)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\cos \alpha_N - \frac{\Omega_N}{\omega_c} \sin \alpha_N \right) \hat{\sigma}_z^{(N)} - \frac{1}{2} \left(\sin \alpha_N + \frac{\Omega_N}{\omega_c} \cos \alpha_N \right) \hat{\sigma}_x^{(N)} \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para escribir esta expresión, hemos empleado las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_{x,y,z}^{(N)}$, que se

basan en el doblete $|\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle$ y se definen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x^{(N)} &= |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa}| + |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa}| \\
\hat{\sigma}_y^{(N)} &= i(|\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa}| - |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa}|) \\
\hat{\sigma}_z^{(N)} &= |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa}| - |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa}|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Además, hemos introducido la identidad $\hat{I}^{(N)} = \hat{P}_{+,N} + \hat{P}_{-,N}$.

Del mismo modo, podemos expresar el hamiltoniano \hat{H}_R^{grwa} (3.27) en términos de las matrices de Pauli como

$$\hat{H}_R^{grwa} = \frac{1}{2} [E_{+,N}^{grwa} + E_{-,N}^{grwa}] \hat{I}^{(N)} + \frac{T_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)}. \tag{3.34}$$

Con las consideraciones anteriores en la parte optomecánica, el hamiltoniano híbrido (3.26) ahora se caracteriza por una cantidad conservada dada por

$$\hat{N}_R^{grwa} = \hat{D}_s^\dagger \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right) \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{N=0}^{\infty} |+,N\rangle \langle +,N| \right] \hat{D}_s \left(\frac{g_{ac}}{\omega_c} \hat{\sigma}_x \right), \tag{3.35}$$

en donde $\hat{D}_s(\nu \hat{\sigma}_i) = e^{\nu \hat{\sigma}_i (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$ es el operador de desplazamiento dependiente de espín y $D_s^\dagger(g_{ac} \sigma_x / \omega_c) |+,N\rangle$ es el estado adiabático $|\psi_{+,N}^{ad}\rangle$ (véase sección 2.3).

Es importante destacar que esta cantidad es precisamente la que se conserva al reducir \hat{H}_R a \hat{H}_R^{grwa} , es decir $[\hat{N}_R^{grwa}, \hat{H}_R^{grwa}] = 0$. Sin embargo, solo cuando omitimos los términos de mezcla en la parte optomecánica, es una invariante del hamiltoniano tripartito (\hat{H}_{hyb}^{grwa}).

Siguiendo una línea de razonamiento similar a la que empleamos en la sección anterior, donde aprovechamos la conservación de \hat{N}_{JC} para llevar a cabo la diagonalización del sistema; a continuación escribiremos el hamiltoniano híbrido como la suma directa de todos los subespacios que lo componen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_G \oplus \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}$.

En consecuencia,

$$\hat{H}_{hyb}^{grwa} = \hat{H}_G + \sum_{N=0}^{\infty} \hat{H}^{(N)}. \quad (3.36)$$

En esta descomposición, el primer término de izquierda a derecha en la ecuación (3.36) corresponde simplemente a un producto tensorial de un oscilador armónico desplazado con el proyector del estado fundamental polaritónico, como se expresa en la siguiente ecuación

$$\hat{H}_G = \left[E_G^{grwa} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - g_{om} \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] \hat{P}_G. \quad (3.37)$$

Mientras que el segundo término es un poco más complicado

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(N)} = & \left[\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + k_N - q_N (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] \hat{I}^{(N)} + \left[\frac{T_N}{2} + \frac{g_{om}}{2} \left(\frac{\Omega_N}{\omega_c} \sin \alpha_N - \cos \alpha_N \right) (b^\dagger + b) \right] \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ & + \frac{g_{om}}{2} \left(\sin \alpha_N + \frac{\Omega_N}{\omega_c} \cos \alpha_N \right) (b^\dagger + b) \hat{\sigma}_x^{(N)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para cada valor de N tenemos un hamiltoniano de tipo espín-bosón interactuante que puede ser tratado de forma independiente.

La constante aditiva k_N y el desplazamiento estático del oscilador mecánico q_N , para el subespacio N , están dados por

$$k_N = \omega_c \left(N + \frac{1}{2} - \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right) + \frac{1}{4} (\Omega_{N,N} - \Omega_{N+1,N+1}), \quad (3.39)$$

$$q_N = g_{om} \left(N + \frac{1}{2} + \frac{g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right) \quad (3.40)$$

en donde $\Omega_{N,M} = \omega_a \langle N_- | M_+ \rangle$ (vease ecuación (2.39)).

En este punto es importante señalar que cuando $g_{ac}/\omega_c \ll 1$, todas las cantidades en nuestro hamiltoniano aproximado se reducen a las reportadas en la referencia [2].

Al emplear el método basado en la RWA de la referencia anterior, también se obtiene un hamiltoniano de interacción espín-bosón similar al desarrollado en este estudio (ecuación (3.38)). En este caso, imponer la condición de cuasi-resonancia ($\omega_a \approx \omega_c$)

permite simplificar el ángulo α_N para cualquier valor de acoplamiento átomo-fotón (g_{ac}), lo que facilita su resolución.

Sin embargo, en el hamiltoniano obtenido con nuestro desarrollo, el ángulo involucrado depende de Δ_N y $\Omega_{N,N+1}$. Además se tiene un término extra de frecuencia de desplazamiento dependiente de la posición del oscilador $\propto (\hat{b}^\dagger + \hat{b})\hat{\sigma}_z^{(N)}$, lo que impide dicha simplificación.

Para abordar este desafío, procedemos a escribir el hamiltoniano (ecuación (3.38)) en términos de los operadores fonónicos de aniquilación y creación desplazados. Estos operadores se definen como $\hat{b}_N = \hat{D}(q_N/\omega_m)\hat{b}\hat{D}^\dagger(q_N/\omega_m) = \hat{b} - q_N/\omega_m$, lo que nos permite reescribir el hamiltoniano de la siguiente manera

$$\hat{H}^{(N)} = \left[\omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + k_N - \frac{q_N^2}{\omega_m} \right] \hat{I}^{(N)} + \left[T_N/2 + g_{shift}^{(N)}(\hat{b}_N^\dagger + b_N) + (2q_N/\omega_m)g_{shift}^{(N)} \right] \hat{\sigma}_z^{(N)} + \left[g_{eff}^{(N)}(\hat{b}^\dagger + b) + (2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)} \right] \hat{\sigma}_x^{(N)}. \quad (3.41)$$

Aquí, hemos definido los acoplamientos polaritón-fonón como $g_{shift}^{(N)} \equiv \frac{g_{om}}{2} \left(\frac{\Omega_N}{\omega_c} \sin \alpha_N - \cos \alpha_N \right)$ y $g_{eff}^{(N)} \equiv \frac{g_{om}}{2} \left(\sin \alpha_N + \frac{\Omega_N}{\omega_c} \cos \alpha_N \right)$.

Para brindar al lector una referencia visual, la matriz a continuación ilustra la disposición de los elementos matriciales generados por cada término de interacción del hamiltoniano (3.41).

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \bigcirc \quad & \hat{H}_0^{(N)} + \frac{2q_N}{\omega_m} g_{shift}^{(N)} \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ \blacksquare \quad \diamond \quad & g_{shift}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ \blacksquare \quad \square \quad & g_{eff}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_x^{(N)} \\ \blacksquare \quad \triangle \quad & \frac{2q_N}{\omega_m} g_{eff}^{(N)} \hat{\sigma}_x^{(N)} \end{aligned} \quad \hat{H}^{(N)} = \begin{bmatrix} \bigcirc & \triangle & \diamond & \square & & \dots \\ \triangle & \bigcirc & \square & \diamond & & \dots \\ \diamond & \square & \bigcirc & \triangle & \diamond & \square & \dots \\ \square & \diamond & \triangle & \bigcirc & \square & & \dots \\ & & \diamond & \square & \bigcirc & \triangle & \dots \\ & & & \square & \diamond & \triangle & \bigcirc & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

con renglones y columnas ordenadas según la lista $|\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \otimes |0^{(q_N)}\rangle$, $|\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \otimes |0^{(q_N)}\rangle$, $|\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \otimes |1^{(q_N)}\rangle$, $|\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \otimes |1^{(q_N)}\rangle$,

Es posible expresar el hamiltoniano (3.41) de una forma más conveniente mediante la definición de la cantidad $T'_N = T_N + \frac{4q_N}{\omega_m} g_{shift}^{(N)}$, con esto el hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(N)} = & \left[\omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + k_N - \frac{q_N^2}{\omega_m} \right] \hat{I}^{(N)} + \left[T'_N/2 + g_{shift}^{(N)} (b_N^\dagger + b_N) \right] \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ & + \left[g_{eff}^{(N)} (b^\dagger + b) + (2q_N/\omega_m) g_{eff}^{(N)} \right] \hat{\sigma}_x^{(N)}. \quad (3.43) \end{aligned}$$

Una distinción con respecto al método previamente empleado en la referencia [66] es que en este caso conservamos la contribución diagonal del término $\frac{2q_N}{\omega_m} g_{shift}^{(N)} \hat{\sigma}_z^{(N)}$, que tiene como efecto la renormalización de $T_N \rightarrow T'_N$.

En la Figura 3.3 se presenta la magnitud de los parámetros de acoplamiento $g_{shift}^{(N)}, g_{eff}^{(N)}$, y la frecuencia Rabi generalizada GRWA, T_N , para $N = 0, 4, 8$, en resonancia, $\omega_a = \omega_c$. Dentro del rango de valores de los acoplamientos considerados en este estudio y para números cuánticos N relativamente bajos, ambas magnitudes son aproximadamente un orden de magnitud menor que T_N cuando g_{om} es pequeño (ver Figura 3.3(a)). A medida que incrementamos la magnitud de g_{om} , observamos un ligero aumento en $g_{shift}^{(N)}$, que aún puede considerarse pequeño en comparación con T_N . Sin embargo, $g_{eff}^{(N)}$ se vuelve comparable a medida que aumenta el valor de N , especialmente en la región de acoplamiento ultrafuerte átomo-fotón (ver Figura 3.3(b)).

A continuación realizaremos un análisis más detallado de los acoplamientos polaritón-fonón, analizando la condición de pequeñez de los términos no diagonales desde una perspectiva de teoría de perturbaciones. Para ello, consideremos la siguiente desigualdad

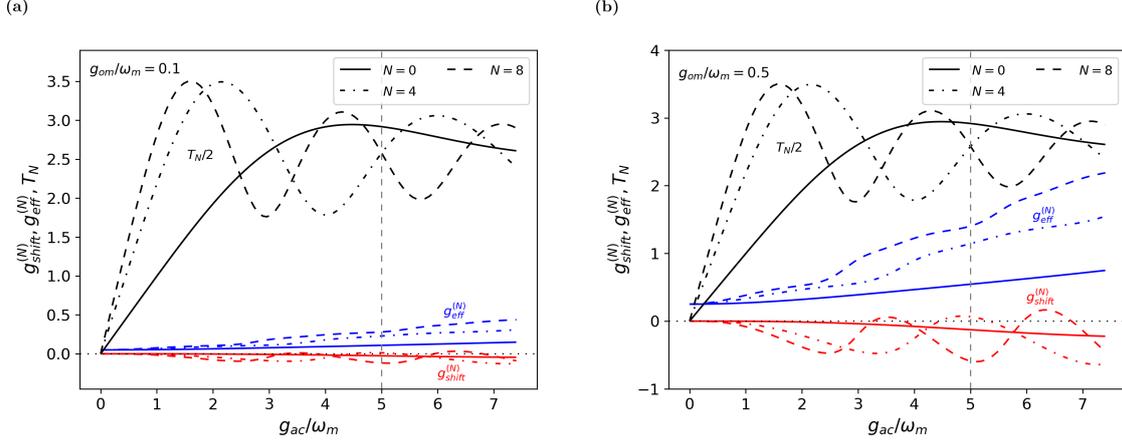


Figura 3.3: Acoplamientos efectivos polaritón-fonón y la frecuencia de Rabi GRWA T_N en función del acoplamiento átomo-fotón (g_{ac}) para dos valores de acoplamiento optomecánico: (a) $g_{om} = 0.1$ y (b) $g_{om} = 0.5$. Se muestran curvas para $N = 0$ (línea sólida), $N = 4$ (línea punteada y guionada) y $N = 8$ (línea discontinua), considerando resonancia $\omega_c = \omega_a$. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, marcada por $g_{ac} = \omega_c$.

$$\begin{aligned}
 |\langle \psi_{\pm, N}^{grwa}, M | g_{shift}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_z^{(N)} | \psi_{\pm, N}^{grwa}, M+1 \rangle| &\ll |\langle \psi_{\pm, N}^{grwa}, M | \hat{H}^{(N)}(g_{om} = 0) | \psi_{\pm, N}^{grwa}, M \rangle \\
 &- \langle \psi_{\pm, N}^{grwa}, M+1 | \hat{H}^{(N)}(g_{om} = 0) | \psi_{\pm, N}^{grwa}, M+1 \rangle|,
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

la cual se simplifica a $|g_{shift}^{(N)}| \sqrt{M+1} / \omega_m \ll 1$. En otras palabras, para que $g_{shift}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_z^{(N)}$ pueda considerarse como una perturbación pequeña, debe cumplirse la condición anterior.

La Figura 3.4 ilustra la relación entre los elementos fuera de la diagonal asociados al término $g_{shift}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_z^{(N)}$ y la separación de energía entre los niveles de $\hat{H}_0^{(N)} = \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + (T_N'/2) \hat{\sigma}_z^{(N)}$. En la Figura 3.4(a), se observa que, para el caso $N = 0$, el término de interacción puede considerarse como una perturbación pequeña si el acoplamiento optomecánico también es pequeño, aun para valores relativamente grandes de M . Esta tendencia persiste antes de ingresar a la región de acoplamiento átomo-fotón ultrafuerte, incluso cuando el acoplamiento optomecánico es significativo. Sin

embargo, más allá de esta región, los valores grandes de M hacen que este término sea comparable con la separación de energía del hamiltoniano no perturbado. La Figura 3.4(b) refleja la misma tendencia para $N = 4$. No obstante, notamos que cuando el acoplamiento optomecánico es significativo, la condición de pequeñez solo se cumple para acoplamientos átomo-fotón débiles o en regiones muy específicas más allá del acoplamiento ultrafuerte.

Un análisis similar muestra que la condición de pequeñez del término $(2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)}\hat{\sigma}_x^{(N)}$ en el hamiltoniano (3.43) se simplifica a la siguiente desigualdad $|(2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)}| \ll |T'_N|$.

En la Figura 3.4(c), observamos que esta condición generalmente se cumple cuando el acoplamiento optomecánico es pequeño. Sin embargo, también notamos que a medida que g_{om}/ω_m crece, la desigualdad deja de cumplirse en regiones cada vez más cercanas al acoplamiento átomo-fotón débil conforme se incrementa N .

Por otro lado, el término $g_{eff}^{(N)}(\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N)\hat{\sigma}_x^{(N)}$ involucra la siguiente condición de pequeñez $g_{eff}^{(N)}\sqrt{M+1}/|\omega_m \mp T'_N| \ll |\omega_m \mp T'_N|$. La diferencia $(\omega_m - T'_N)$ en el lado derecho de esta desigualdad esta asociada a los términos resonantes $(\hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_-^{(N)}$ y $\hat{b} \hat{\sigma}_+^{(N)})$, mientras que la suma $(\omega_m + T'_N)$ se relaciona con los anti-resonantes $(\hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_+^{(N)}$ y $\hat{b} \hat{\sigma}_-^{(N)})$, donde $\hat{\sigma}_\pm^{(N)} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^{(N)} \pm i\hat{\sigma}_y^{(N)})$.

En la Figura 3.4(d), resulta evidente que, a diferencia de las contribuciones anteriores, para este término no se cumple la desigualdad a valores pequeños de acoplamiento átomo-fotón. Este término introduce una mezcla entre polaritones y modos mecánicos dentro de bloques de 2×2 , y se vuelve crucial para la estrategia de aproximación en todo el rango de acoplamiento.

Si bien en la Figura (3.4) solo se consideró el caso resonante ($\omega_a = \omega_c$), es importante destacar que esta tendencia se mantiene o, incluso se agrava aún más, en casos fuera de resonancia ($\omega_a \neq \omega_c$), lo que podría justificar la omisión de todos los términos no diagonales en casos extremos.

En conclusión, al considerar valores suficientemente pequeños para g_{om}/ω_m , y tra-

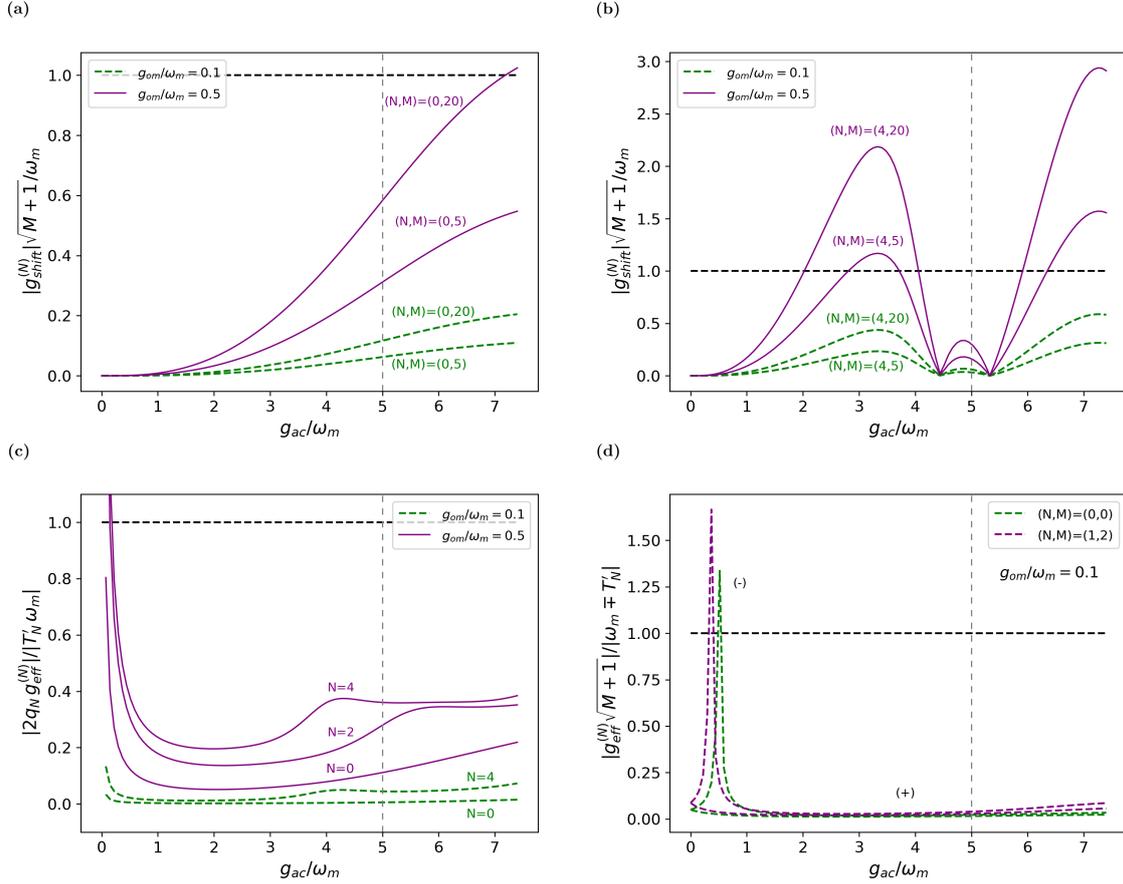


Figura 3.4: Cociente entre los elementos de matriz de los términos de interacción efectiva polaritón-fonón en $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om})$ y la separación de energía de los niveles de $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om} = 0)$ en función de g_{ac} . (a) Representa el cociente asociado al término $g_{shift}^{(N)}(\hat{b}^\dagger + \hat{b})\hat{\sigma}_z^{(N)}$ para distintos valores de M cuando $N = 0$, (b) corresponde al mismo caso pero con $N = 4$. (c) Muestra el cociente correspondiente al término $(2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)}\hat{\sigma}_x^{(N)}$ y, (d) presenta el cociente para el término $g_{eff}^{(N)}(\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N)\hat{\sigma}_x^{(N)}$ para dos números cuánticos bajos cuando $g_{om} = 0.1$. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, $g_{ac} = \omega_c$.

bajando dentro de los límites de la GRWA, podemos desestimar las contribuciones de $g_{shift}^{(N)}(\hat{b}^\dagger + \hat{b})\hat{\sigma}_z^{(N)}$ y $(2q_N/\omega_m)g_{eff}^{(N)}\hat{\sigma}_x^{(N)}$ al hamiltoniano total. Alternativamente, si optamos por valores grandes de g_{om}/ω_m , también podemos ignorarlos siempre que N sea pequeño; de no ser así, el acoplamiento átomo-cavidad deberá ser débil.

Esto simplifica la ecuación (3.45) y la asemeja a la forma del modelo cuántico de Rabi

$$\hat{H}^{(N)} = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{T'_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + g_{eff}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_x^{(N)}. \quad (3.45)$$

El primer término corresponde a la constante $C_N = k_N - q_N^2/\omega_m$.

Para obtener el espectro de energía y los estados propios de (3.45). En completa analogía con el procedimiento mostrado en la sección 2.4, realizaremos una GRWA adicional al hamiltoniano polaritón-fonón (tipo Rabi).

Para un valor dado de N , esto solo requiere los cambios $\omega_c \rightarrow \omega_m$, $\omega_a \rightarrow T'_N$ y $g_{ac} \rightarrow g_{eff}^{(N)}$, teniendo en cuenta que ahora los bosones involucrados son fonones y los dos niveles atómicos se refieren a estados de polaritón. En adelante, nos referiremos a esta aproximación adicional como un enfoque “GRWA-GRWA”, en contraste con el enfoque “RWA-RWA” en donde fue utilizada la RWA dos veces.

3.4.2. Espectro energético y estados propios (enfoque GRWA-GRWA)

A continuación, se presentan las energías y estados propios del hamiltoniano híbrido bajo el enfoque “GRWA-GRWA”.

El espectro energético asociado al término hamiltoniano \hat{H}_G (ecuación (3.37)) se compone de la suma de las energías de un oscilador armónico desplazado y el estado fundamental de H_R^{grwa} . Dicho espectro se expresa de la siguiente manera

$$E_M = \omega_m M - \frac{1}{\omega_m} \left(\frac{g_{om} g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right)^2 + E_G^{grwa}, \quad M = 0, 1, \dots \quad (3.46)$$

Los estados propios asociados a este espectro son

$$|\Psi_M\rangle = |\psi_G^{grwa}\rangle |M^{(q_G)}\rangle, \quad (3.47)$$

donde $|\psi_G^{grwa}\rangle$ es el estado fundamental del hamiltoniano de Rabi bajo la GRWA y, $|M^{(q_G)}\rangle = D(q_G/\omega_m)|M\rangle$ es un estado con un número de fonones desplazado por la cantidad $q_G = g_{om}g_{ac}^2/\omega_c^2$. Es importante destacar que el estado $|\psi_G^{grwa}\rangle$ coincide con el estado fundamental del hamiltoniano de Rabi bajo la aproximación adiabática (ver ecuación (2.44)), y contiene exactamente cero polaritones átomo-cavidad ($N_R^{grwa} = 0$).

La parte restante del espectro se obtiene después de aplicar una GRWA adicional al hamiltoniano polaritón-fonón $\hat{H}^{(N)}$ (ecuación (3.45)). Para cada valor de N , habrá un estado aislado y un conjunto de dobletes con estados vestidos polaritón-fonón, en analogía al conocido espectro de Jaynes-Cummings o el espectro de GRWA. El conjunto de “estados aislados” está dado por

$$|\Psi_G^{(N)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle |(M=0)_+^{(q_N)}\rangle - |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle |(M=0)_-^{(q_N)}\rangle], \quad (3.48)$$

en donde, $|\psi_{\pm,N}^{grwa(x)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \pm |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle]$ son los eigenkets de $\hat{\sigma}_x^{(N)} = |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa}| + |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa}|$, y

$$|M_{\pm}^{(q_N)}\rangle = \hat{D}(q_N/\omega_m) \hat{D}(\mp g_{eff}^{(N)}/\omega_m) |M\rangle. \quad (3.49)$$

La similitud entre $|\Psi_G^{(N)}\rangle$ y el estado fundamental adiabático $|\psi_{\pm,0}^{ad}\rangle$ se deriva de la similitud formal entre $\hat{H}^{(N)}$ (ecuación (3.45)) y \hat{H}_R .

Es importante destacar la naturaleza fonónica de los estados desplazados (3.49) en comparación con los estados fotónicos desplazados $|N_{\pm}\rangle$ (donde el desplazamiento está dado por g_{ac}/ω_c). El desplazamiento q_N de los estados fonónicos $|M\rangle$ resulta de la introducción de los operadores fonónicos desplazados \hat{b}_N , mientras que el corrimiento por $\pm g_{eff}^{(N)}/\omega_m$ es consecuencia del tratamiento adicional de GRWA al hamiltoniano tipo Rabi (3.45).

El estado aislado (3.48) contiene $N_R^{grwa} = N + 1$ polaritones átomo-cavidad y, en contraste con el obtenido mediante el enfoque “RWA-RWA” [2], no es separable.

Las energías correspondientes a los estados (3.48) son

$$E_G^{(N)} = C_N - \frac{(g_{eff}^{(N)})^2}{\omega_m} - \frac{T'_N}{2} \langle (M=0)_-^{(q_N)} | (M=0)_+^{(q_N)} \rangle. \quad (3.50)$$

Recordemos que $T'_N = T_N + \frac{4q_N}{\omega_m} g_{shift}^{(N)}$ y la constante asociada a cada valor de N es $C_N = k_N - q_N^2/\omega_m$.

Finalmente, el espectro de estados vestidos polaritón-fonón, que surge de la estructura de dobletes en $\hat{H}^{(N)}$ (3.45), está dado por

$$E_{\pm, M}^{(N)} = C_N + \omega_m \left(M + \frac{1}{2} \right) - \frac{(g_{eff}^{(N)})^2}{\omega_m} + \frac{1}{4} (\Omega_{M, M}^N + \Omega_{M+1, M+1}^N) \pm \frac{1}{2} [\Delta_{N, M}^2 + (\Omega_{M, M+1}^N)^2]^{1/2}. \quad (3.51)$$

Motivados por la aproximación GRWA del modelo cuántico de Rabi, expresamos estas energías en función de una frecuencia de Rabi polaritón-fonón y la desintonía “detuning” polaritón-fonón, definidos respectivamente como

$$\Omega_{M, M+1}^N = T'_N \langle M_-^{(q_N)} | M + 1_+^{(q_N)} \rangle \quad (3.52)$$

$$\Delta_M^N = \frac{T'_N}{2} (\langle M_-^{(q_N)} | M_+^{(q_N)} \rangle + \langle M + 1_-^{(q_N)} | M + 1_+^{(q_N)} \rangle) - \omega_m. \quad (3.53)$$

Los estados propios asociados a las energías (3.51) son de la siguiente manera

$$|\Psi_{+, M}^{(N)}\rangle = \sin(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{+, M}^{ad(N)}\rangle + \cos(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{-, M+1}^{ad(N)}\rangle, \quad (3.54)$$

$$|\Psi_{-, M}^{(N)}\rangle = \cos(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{+, M}^{ad(N)}\rangle - \sin(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{-, M+1}^{ad(N)}\rangle, \quad (3.55)$$

y están expresados en términos de la base adiabática híbrida

$$|\Psi_{\pm, M}^{ad(N)}\rangle = (|\psi_{+, N}^{grwa(x)}\rangle |M_+^{(q_N)}\rangle \pm |\psi_{-, N}^{grwa(x)}\rangle |M_-^{(q_N)}\rangle) / \sqrt{2}. \quad (3.56)$$

El ángulo $\phi_M^{(N)}$ se define como $\tan \phi_M^{(N)} = -\Omega_{M,M+1}^N / \Delta_{NM}$.

El conjunto de ecuaciones (3.46), (3.47), (3.48), (3.50), (3.51), (3.54), y (3.55) representan la solución del hamiltoniano híbrido (3.4) bajo el enfoque GRWA-GRWA.

3.5. Diagonalización mediante un enfoque mixto GRWA-RWA

En la sección anterior, implementamos la GRWA en el hamiltoniano híbrido. Este enfoque nos llevó a identificar una cantidad invariante del hamiltoniano completo que permitió descomponerlo en dos contribuciones distintas. La primera de estas contribuciones se asemejaba a un oscilador armónico desplazado, cuya diagonalización fue relativamente sencilla. La segunda contribución consistía en una suma de hamiltonianos de interacción desconectados tipo espín-bosón. Posteriormente, aplicamos aproximaciones adicionales que nos permitieron reducir esta última contribución a hamiltonianos de tipo Rabi. Gracias a esta simplificación, pudimos aplicar nuevamente la GRWA para obtener el espectro energético y los estados.

En esta sección, consideraremos todo este proceso, pero en el último paso, optaremos por aplicar la RWA en lugar de la GRWA al hamiltoniano (3.45).

Cabe destacar que en la Figura 2.7(c) de la sección 2.5, demostramos que una de las ventajas de la RWA sobre la GRWA en el contexto de cQED es su precisión en niveles bajos de energía, particularmente cuando la frecuencia del átomo es mayor que la del fotón, es decir, cuando $\omega_a / \omega_c > 3$. En este caso esperamos una condición análoga con las cantidades renormalizadas del hamiltoniano (3.45).

A continuación, emplearemos el enfoque de teoría de perturbaciones, tal como se ha realizado previamente, con el objetivo de establecer las condiciones bajo las cuales los términos de interacción pueden considerarse pequeños. Recordemos que la condición que debe satisfacerse es que los elementos matriciales fuera de la diagonal, es decir, los términos de interacción, deben ser considerablemente más pequeños en compara-

ción con la separación de energías de la parte del hamiltoniano que se considera no perturbada.

3.5.1. Hamiltoniano GRWA-RWA

Consideremos el operador escalar $\hat{\sigma}_{\pm}^{(N)} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^{(N)} \pm i\hat{\sigma}_y^{(N)})$. De esta forma, el hamiltoniano (3.45) puede expresarse de la siguiente manera

$$\hat{H}^{(N)} = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{T'_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + g_{eff}^{(N)} \left(\hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N + \hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N^\dagger + \hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N + \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N^\dagger \right). \quad (3.57)$$

Los primeros términos de interacción, que se encuentran a la izquierda y están representados en azul, son análogos a los términos resonantes del modelo de Jaynes-Cummings, mientras que los últimos términos, que se ubican a la derecha, corresponden a los términos anti-resonantes.

Bajo el enfoque de teoría de perturbaciones la condición que deben cumplir los términos resonantes se escribe de la siguiente manera

$$\frac{|\langle \psi_{+,N}^{grwa}, M | g_{eff}^{(N)} \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N | \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 \rangle|}{\left| \langle \psi_{+,N}^{grwa}, M | \hat{H}_0 | \psi_{+,N}^{grwa}, M \rangle - \langle \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 | \hat{H}_0 | \psi_{-,N+1}^{grwa}, M \rangle \right|} \ll 1, \quad (3.58)$$

$$\frac{|\langle \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 | g_{eff}^{(N)} \hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N^\dagger | \psi_{+,N}^{grwa}, M \rangle|}{\left| \langle \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 | \hat{H}_0 | \psi_{-,N+1}^{grwa}, M+1 \rangle - \langle \psi_{+,N}^{grwa}, M | \hat{H}_0 | \psi_{+,N}^{grwa}, M \rangle \right|} \ll 1, \quad (3.59)$$

ambas se simplifican a

$$\left| \frac{g_{eff}^{(N)} \sqrt{M+1}}{T'_N - \omega_m} \right| \ll 1. \quad (3.60)$$

Es importante destacar que en el contexto de cQED esta condición sugiere que cuan-

do el átomo y la cavidad óptica están en cuasi-resonancia, los términos resonantes son comparables a las energías del hamiltoniano sin interacción y deben ser considerados.

Para los términos anti-resonantes la condición que se debe cumplir es la siguiente

$$\frac{|\langle \psi_{-,N}^{grwa}, M | g_{eff}^{(N)} \hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N | \psi_{+,N}^{grwa}, M+1 \rangle|}{|\langle \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 | \hat{H}_0 | \psi_{-,N+1}^{grwa}, M+1 \rangle - \langle \psi_{+,N}^{grwa}, M | \hat{H}_0 | \psi_{+,N}^{grwa}, M \rangle|} \ll 1, \quad (3.61)$$

$$\frac{|\langle \psi_{+,N}^{grwa}, M+1 | g_{eff}^{(N)} \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N^\dagger | \psi_{-,N}^{grwa}, M \rangle|}{|\langle \psi_{-,N}^{grwa}, M+1 | \hat{H}_0 | \psi_{-,N+1}^{grwa}, M+1 \rangle - \langle \psi_{+,N}^{grwa}, M | \hat{H}_0 | \psi_{+,N}^{grwa}, M \rangle|} \ll 1, \quad (3.62)$$

la cual se simplifica a

$$\left| \frac{g_{eff}^{(N)} \sqrt{M+1}}{T'_N + \omega_m} \right| \ll 1 \quad (3.63)$$

En el contexto de cQED, esta condición implica que estos términos son pequeños siempre que consideremos números cuánticos bajos o acoplamientos átomo-fotón pequeños.

Es evidente que en nuestro caso, para el sistema híbrido, tenemos una condición más complicada que depende de múltiples cantidades.

La figura 3.5, al igual que la figura 3.4(d), muestra el comportamiento asociado al término de interacción $g_{eff}^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N) \hat{\sigma}_x^{(N)}$. En la figura 3.5(a), se destaca nuevamente cómo los términos resonantes adquieren importancia incluso para números cuánticos muy bajos ($N = 0, M = 0$) cuando el acoplamiento optomecánico es relativamente pequeño ($g_{om}/\omega_m = 0.1$). En contraste, la gráfica 3.5(b) muestra cómo, en estas mismas condiciones, los términos anti-resonantes cumplen la desigualdad (3.63) en todo el rango de valores de acoplamiento átomo-fotón, por lo que pueden despreciarse. No obstante, también notamos que cuando el acoplamiento optomecánico comienza a ser significativo, los términos anti-resonantes empiezan a jugar un papel en la dinámica del

sistema. La gráfica revela cómo ignorar los términos anti-resonantes nos puede llevar a una mala descripción del sistema, particularmente cuando estudiamos el acoplamiento débil átomo-fotón y consideramos estados con valores de M relativamente grandes. También notamos como para valores de M pequeños la contribución de los términos anti-resonantes no cumplen con la condición de pequeñez (3.63) cerca de la región de acoplamiento ultrafuerte.

Es importante tener en cuenta que, en el caso fuera de resonancia, el sistema tiende a desacoplar los polaritones de los fonones y estos términos solo adquieren relevancia cuando el acoplamiento optomecánico alcanza valores del orden de $g_{om} \sim \omega_m$ o superiores, es decir, fuera de los límites contemplados en este estudio.

Considerando los límites de los términos de interacción discutidos anteriormente y en analogía con el modelo de Jaynes-Cummings, es posible aplicar la RWA a la interacción efectiva entre polaritones y fonones. Esto nos permite desprestigiar los términos anti-resonantes, siempre y cuando consideremos los límites en los cuales estos últimos pueden ser ignorados. Con esto, el hamiltoniano anterior se reduce a

$$\hat{H}^{(N)} = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{T'_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + g_{eff}^{(N)} \left(\hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N + \hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N^\dagger \right). \quad (3.64)$$

Siguiendo este razonamiento y considerando que, para un valor dado de N , tenemos un hamiltoniano que es matemáticamente equivalente al modelo de Jaynes-Cummings, su diagonalización resulta trivial.

3.5.2. Espectro energético y estados propios (enfoque mixto GRWA-RWA)

En esta sección, abordaremos el espectro energético y los estados propios del hamiltoniano (3.64) utilizando el enfoque GRWA-RWA.

Como se discutió en la sección anterior, para un valor fijo de N , este hamiltoniano se asemeja al modelo de Jaynes-Cummings. En consecuencia, esperamos encontrar una

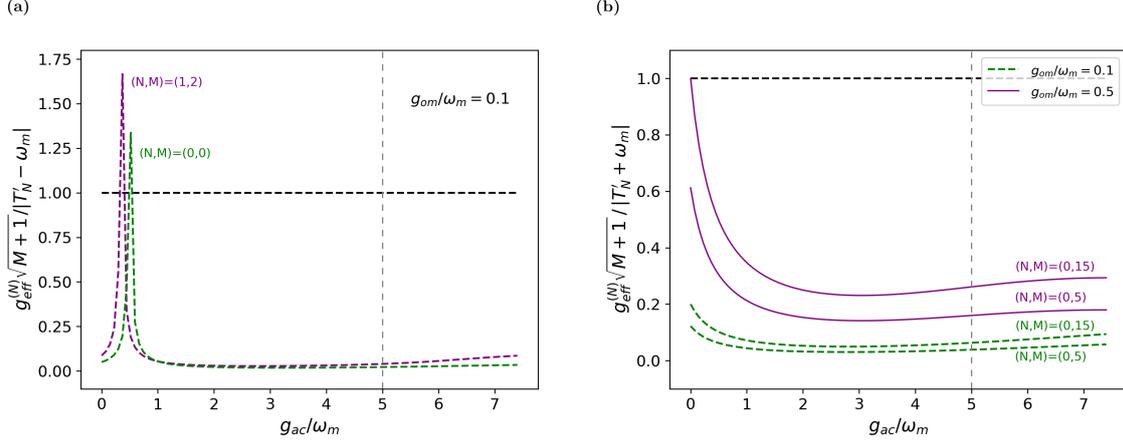


Figura 3.5: Cociente entre los elementos de matriz de los términos de interacción del hamiltoniano (3.57) y la separación de energía de los niveles $\hat{H}^{(N)}(g_{ac}, g_{om} = 0)$ en función de g_{ac} . (a) Ilustración de la desigualdad (3.60) asociada a los términos resonantes del hamiltoniano (3.57) para $g_{om}/\omega_m = 0.1$. (b) Representación de la desigualdad (3.63) correspondiente a los términos anti-resonantes. En este caso, las líneas verdes indican $g_{om}/\omega_m = 0.1$, y las moradas, $g_{om}/\omega_m = 0.5$. Se incluye una línea vertical discontinua que marca la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, definida por $g_{ac} = \omega_c$.

estructura de estados que incluye un estado aislado y un conjunto de dobletes que representan estados vestidos polaritón-fonón.

Para obtener las expresiones del espectro energético y los estados propios, es necesario seguir el procedimiento detallado en la sección 2.2, teniendo en cuenta las nuevas cantidades a las que el hamiltoniano hace referencia. Esto implica la sustitución de ω_m por ω_c , T'_N por ω_a , y $g_{eff}^{(N)}$ por g_{ac} .

La energía del estado aislado se calcula mediante la expresión

$$E_G^{(N)} = C_N - \frac{T'_N}{2}, \quad (3.65)$$

y su estado correspondiente se expresa como

$$|\psi_G^{(N)}\rangle = |\psi_{0,-}^{grwa}\rangle |M = 0\rangle. \quad (3.66)$$

Además, la energía de los dobletes se determina mediante la fórmula

$$E_{\pm, M}^{(N)} = C_N + \omega_m \left(M + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \left[(T'_N - \omega_m)^2 + (2g_{eff}^{(N)} \sqrt{M+1})^2 \right], \quad (3.67)$$

y los estados correspondientes se expresan como

$$|\Psi_{+, M}^{(N)}\rangle = \sin(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{+, N}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)}\rangle + \cos(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{-, N}^{grwa}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle, \quad (3.68)$$

$$|\Psi_{-, M}^{(N)}\rangle = \cos(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{+, N}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)}\rangle - \sin(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{-, N}^{grwa}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle, \quad (3.69)$$

en donde el ángulo $\theta_M^{(N)}$ se define mediante $\tan \theta_M^{(N)} = -(2g_{eff}^{(N)} \sqrt{M+1}) / (T'_N - \omega_m)$.

Las energías y estados (3.65-3.69) constituyen la solución al hamiltoniano híbrido bajo el enfoque GRWA-RWA.

Es importante destacar que la parte del espectro asociada a la contribución hamiltoniana \hat{H}_G , cuyos estados y energías están dados por las ecuaciones (3.46) y (3.47), coinciden con los del enfoque GRWA-GRWA, ya que no se ven afectada por esta aproximación.

3.6. Comparación con la solución numérica exacta

En esta sección, llevaremos a cabo una comparación entre las soluciones aproximadas del hamiltoniano híbrido bajo distintas condiciones, centrándonos especialmente en el espectro energético.

Nuestro objetivo es evaluar y contrastar los resultados obtenidos mediante los enfoques RWA-RWA, GRWA-RWA y GRWA-GRWA con la solución numérica del hamiltoniano híbrido completo. Esto se realiza con la finalidad de comprender las limitaciones y precisiones inherentes a cada aproximación en la descripción del sistema.

La Figura 3.6(a) muestra las energías E_M calculadas mediante la GRWA (3.46) para diversos valores del número cuántico M , en función del acoplamiento átomo-cavidad. También se incluyen los espectros correspondientes obtenidos mediante la RWA (3.20)

y los valores derivados de una evaluación numérica del espectro del hamiltoniano (3.4), en resonancia $\omega_c = \omega_a = 5, \omega_m$ con $g_{om} = 0.1\omega_m$.

En esta gráfica, se observa que para acoplamientos átomo-cavidad pequeños, las energías obtenidas por ambas aproximaciones coinciden y se ajustan bien a los resultados numéricos. Sin embargo, en valores intermedios de g_{ac}/ω_m , las curvas RWA tienden a alejarse considerablemente de la solución numérica, mientras que las correspondientes a la GRWA siguen de cerca los resultados exactos (numéricos), con una mejora en la precisión conforme pasamos la región de acoplamiento ultrafuerte ($g_{ac} = \omega_c$).

La Figura 3.6(b) presenta el mismo escenario, pero cuando las frecuencias del átomo y fotón están fuera de resonancia. Aquí, se observa un comportamiento de la solución GRWA con mayor precisión que en el caso resonante, incluso en valores intermedios de acoplamiento. También se aprecia como la RWA, una vez más, se desvía rápidamente de la solución numérica para acoplamientos mayores.

El éxito de la GRWA en esta parte del espectro se atribuye a la incorporación de la dependencia en los parámetros de acoplamiento g_{ac} y g_{om} , en marcado contraste con el enfoque RWA. La aparente curvatura que presenta este último se debe únicamente a la normalización utilizada (g_{ac}^2/ω_c) en las energías, con el propósito de presentar los resultados de manera más clara.

Es importante recordar que esta parte del espectro energético está asociada al término hamiltoniano \hat{H}_G , y es común para los métodos GRWA-RWA y GRWA-GRWA, ya que ambos solo se distinguen en el término hamiltoniano que llamamos \hat{H}_N .

La Figura 3.6(c) presenta la función $E_G^{(N)}(g_{ac})$ calculada mediante los distintos enfoques utilizando las ecuaciones (3.65), (3.50) y (3.22) para $N = 0, 1, \dots, 5$, en el caso de resonancia $\omega_a = \omega_c$. Inicialmente, se observa una concordancia entre los cálculos para acoplamientos pequeños ($g_{ac}/\omega_m < 1$); sin embargo, conforme aumenta (g_{ac}), solo los métodos basados en la GRWA logran describir con precisión las energías, incluso más allá del régimen de acoplamiento ultrafuerte (USC) ($g_{ac} \geq \omega_c$). Es evidente cómo la curva RWA-RWA se aleja de la solución numérica a medida que se incrementa g_{ac} ,

sin lograr reproducir el comportamiento presente en esta última. En el caso fuera de resonancia, mostrado en la Figura 3.6(d), observamos que la desviación de los resultados RWA-RWA comienza para valores aún más pequeños del acoplamiento, mientras que la precisión de los enfoques GRWA mejora ligeramente.

Los niveles de energía $E_{\pm, M}^{(N)}$ asociados a los dobletes polaritón-fonón, descritos por las ecuaciones (3.67), (3.51) y (3.24), se presentan en las figuras 3.6(e) y 3.6(f) para los casos de resonancia ($\omega_a = \omega_c$) y fuera de resonancia ($\omega_c > \omega_a$), respectivamente. En la figura 3.6(e), se observa que todas las soluciones aproximadas reproducen cualitativamente bien el cálculo exacto (numérico) para valores de acoplamiento en la proximidad del primer cruce evitado. A medida que el acoplamiento aumenta, la discrepancia de las curvas RWA-RWA se hace claramente visible, mientras que las curvas asociadas a los enfoques basados en la GRWA reproducen de manera cualitativa el cálculo exacto (numérico). En la figura 3.6(f), notamos una significativa mejora en la precisión de los enfoques basados en la GRWA. Estos reproducen casi perfectamente el espectro energético asociado a los estados con $S = +$; sin embargo, se observa que para los estados con $S = -$, el enfoque GRWA-GRWA aún se desvía ligeramente, mientras que el enfoque GRWA-RWA reproduce las energías casi perfectamente.

Al analizar la figura 3.4, se evidencia que cuando el acoplamiento optomecánico es relativamente pequeño en comparación con la frecuencia del oscilador mecánico ($g_{om}/\omega_m \leq 0.1$), los términos de interacción efectiva polaritón-fonón, previamente excluidos en el hamiltoniano (3.45), no contribuyen de manera significativa a las energías. Este fenómeno se mantiene incluso para acoplamientos átomo-fotón considerablemente grandes.

Dicha observación nos permite concluir que las discrepancias identificadas en la región intermedia de la gráfica 3.6(e) para los métodos basados en la GRWA se deben principalmente a la descripción de la parte cQED, es decir, a la aproximación del hamiltoniano cuántico de Rabi $\hat{H}_R \rightarrow \hat{H}_R^{grwa}$ y su impacto en el contexto del sistema híbrido. Confirmamos esta conclusión mediante una evaluación numérica del espectro

del hamiltoniano (3.26), comparándolo con soluciones analíticas basadas en la GRWA (resultados gráficos no se presentan aquí), los resultados numéricos mostraron una gran concordancia similar a la observada en la 3.6(e) cuando $g_{ac}/\omega_m < 1$.

Adicionalmente, hemos probado esta afirmación en el caso fuera de resonancia, obteniendo un resultado muy similar al de la figura 3.6(f). En contraste con el caso anterior, aquí podemos concluir que las discrepancias se atribuyen en gran medida al efecto de los términos de acoplamiento efectivo polaritón-fonón que fueron descartados.

En la sección 2.5 (ver Fig. 2.7 (c)) se mostró que la GRWA presenta dificultades cuando la frecuencia del átomo supera la de los fotones. En el contexto del sistema híbrido, resulta fundamental no solo tener en cuenta esta condición, sino también considerar la relación entre la frecuencia mecánica (ω_m) y la cantidad $T'_N(g_{ac})$. El aumento del acoplamiento átomo-fotón (g_{ac}) conlleva a que T'_N sobrepase a ω_m , generando una pérdida de precisión que se manifiesta de manera más pronunciada en el método GRWA-GRWA.

Las Figuras 3.7(a) y 3.7(b) muestran la superposición $|\langle \Psi_{\pm,2}^{(0)} | \Psi^{numerical} \rangle|^2$ entre los estados propios calculados mediante los métodos basados en la GRWA $|\Psi_{\pm,2}^{(0)}\rangle$ y su contraparte numérica, bajo condiciones de resonancia $\omega_a = \omega_c$ y fuera de resonancia $\omega_a < \omega_c$, respectivamente. Esto se compara con los resultados obtenidos bajo la aproximación RWA-RWA.

En la Figura 3.7(a), se observa que existe una pérdida de fidelidad en todos los estados aproximados en comparación con la solución exacta a medida que el acoplamiento átomo-fotón aumenta. También observamos que especialmente para los estados asociados a los métodos GRWA con $S = +$, esta pérdida se acentúa en las proximidades de la región de acoplamiento ultrafuerte. Este fenómeno coincide con el rango en el cual las energías calculadas comienzan a deteriorar su precisión respecto a la solución numérica. Por ende, la disminución en la fidelidad sugiere una correspondencia directa con la región en la que las aproximaciones empleadas para calcular las energías ya no logran capturar con exactitud el comportamiento del sistema.

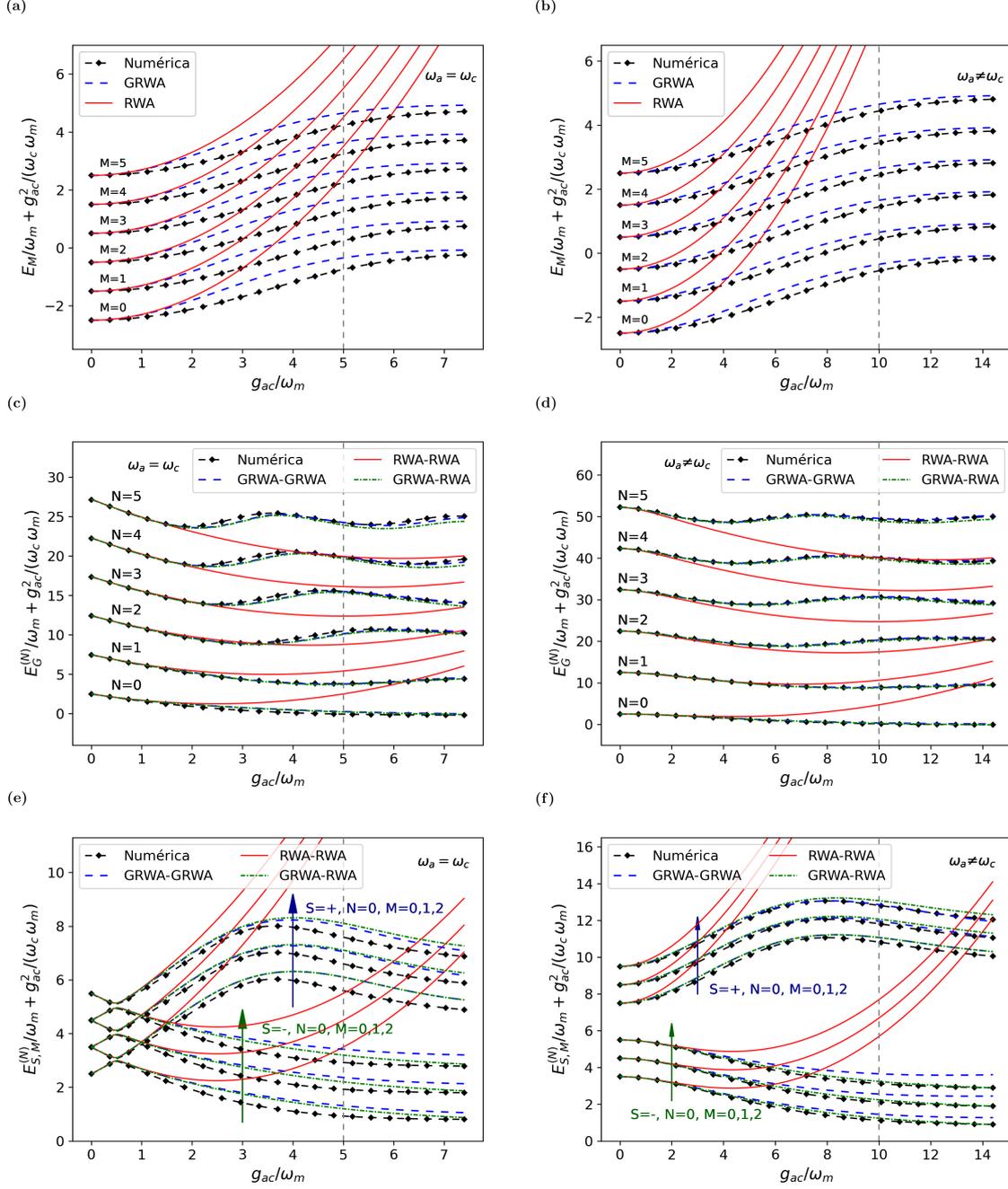


Figura 3.6: Comparación de los niveles de energía con respecto a g_{ac} del hamiltoniano híbrido en diferentes enfoques: RWA-RWA (línea roja sólida), GRWA-RWA (línea verde densamente punteada y guionada), GRWA-GRWA (línea azul discontinua), y la solución numérica exacta (línea negra discontinua con puntos). Los paneles (a) y (b) muestran la parte del espectro energético que contiene cero polaritones átomo-cavidad E_M (3.20,3.46) para $M = 0, 1, \dots, 5$ en el caso de resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. Los paneles (c) y (d) representan la parte del espectro energético con cero fonones desplazados $E_G^{(N)}$ para $N = 0, 1, \dots, 5$ en resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. Por último los paneles (e) y (f) corresponden a los dobletes $E_{\pm, M}^{(N)}$ de nuevo en resonancia y fuera de resonancia, respectivamente. En todos los casos hemos tomado $g_{om} = 0.1\omega_m$. Además, se incluye una línea vertical punteada que marca la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, definida por $g_{ac} = \omega_c$.

Es destacable que los estados basados en la aproximación GRWA mantienen una fidelidad superior al 80 %, incluso más allá de la región de acoplamiento ultrafuerte profundo (USC), con el enfoque GRWA-RWA destacándose ligeramente sobre los demás. En contraste, los estados calculados mediante el enfoque RWA-RWA muestran una rápida separación de sus contrapartes numéricas. Además, se destaca como en estos existe una mayor complejidad en la descripción de los estados asociados al número cuántico $S = +$ sobre los $S = -$.

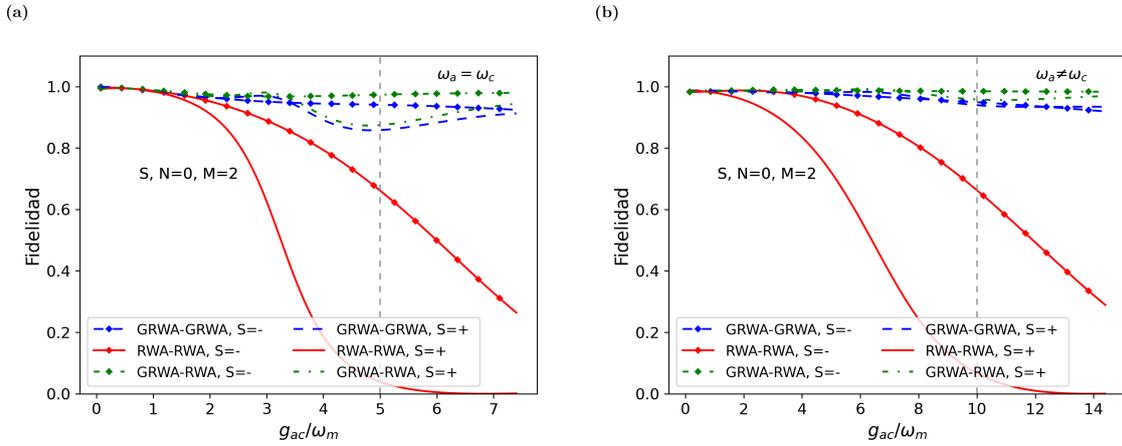


Figura 3.7: La fidelidad $|\langle \Psi_{\pm,2}^{(0)} | \Psi^{numerico} \rangle|^2$ de los estados en la figura 3.6 (e) y (f) se muestra en (a) y (b), respectivamente. La línea vertical discontinua indica la frontera entre los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y acoplamiento ultrafuerte profundo, $g_{ac} = \omega_c$.

Los resultados previos indican que la aproximación GRWA-RWA es la más adecuada para describir el espectro energético del hamiltoniano (3.4) en todo el rango de acoplamiento átomo-fotón g_{ac} cuando se consideran números cuánticos M bajos. Sin embargo, la GRWA-GRWA también presenta un rendimiento notable, especialmente en términos de fidelidad respecto a los eigenestados exactos. Como se discutirá a continuación, la GRWA-RWA es superada por la GRWA-GRWA cuando el acoplamiento optomecánico adquiere relevancia, el acoplamiento átomo-fotón es débil y se consideran números cuánticos M relativamente grandes.

En la figura 3.8, se presenta el comportamiento de las energías $E_{\pm,M}^{(N)}$ en función del acoplamiento optomecánico (g_{om}) para las distintas aproximaciones y la solución

exacta (numérica) cuando $\omega_a = \omega_c$ y $g_{ac}/\omega_m = 0.5$. En la figura 3.8 (a), se observa un comportamiento lineal de las energías en el rango $g_{om}/\omega_m < 0.5$ respecto al acoplamiento optomecánico, en donde los estados asociados a $S = +$ ($S = -$) se caracterizan por una pendiente positiva (negativa). Para $g_{om}/\omega_m > 0.5$, la solución exacta muestra un comportamiento distinto al de las soluciones aproximadas, tendiendo a una pendiente con signo contrario. Es interesante notar que, en la misma región, la aproximación GRWA-GRWA logra capturar de manera más precisa el comportamiento no lineal de las energías que las otras aproximaciones. En la figura 3.8 (b) se presenta el mismo caso resonante pero para estados más energéticos. Aquí es evidente cómo las soluciones RWA-RWA y GRWA-RWA siguen mostrando un comportamiento lineal en todo el rango de acoplamiento, mientras que la GRWA-GRWA sigue de cerca a la solución numérica logrando describir de manera más precisa el espectro energético y reproduciendo los cruces entre diferentes niveles de energía.

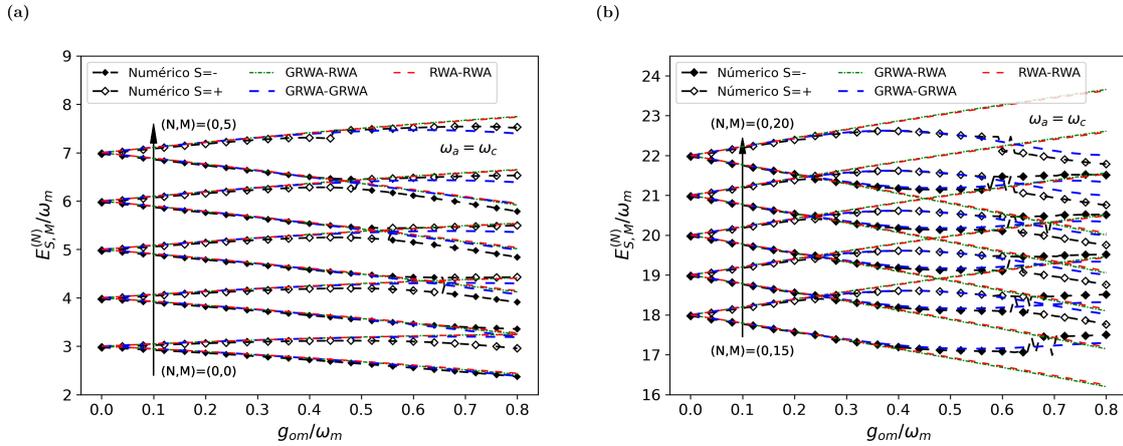


Figura 3.8: Niveles de energía $E_{\pm,M}^{(N)}$ versus el acoplamiento optomecánico g_{om} , en resonancia $\omega_c = \omega_a = 5\omega_m$, mediante las aproximaciones RWA (línea roja sólida) y GRWA (línea azul discontinua), y la solución exacta numérica (línea negra discontinua con puntos). (a) $g_{ac} = 0.5\omega_m$. (b) $g_{ac} = 0.5\omega_m$. En (a), las curvas con pendientes positivas (negativas) corresponden a $S = +$, ($S = -$)

Capítulo 4

Sistema optomecánico híbrido con acoplamiento átomo-fonón

En el marco de la Física del Estado Sólido, las interacciones entre el átomo, el fotón y el fonón de un sistema híbrido cuántico adquieren gran relevancia a escala nanométrica, especialmente cuando comparten una proximidad espacial, tal como ocurre en los sistemas reales.

En el capítulo anterior, exploramos el espectro energético del sistema híbrido, abordando dos interacciones fundamentales, la interacción dipolar eléctrica entre el átomo y el campo cuantizado, así como una interacción optomecánica entre el oscilador mecánico y los fotones en la cavidad. Sin embargo, surge una complejidad adicional que involucra al átomo y al fonón, exigiendo una descripción más general que abarque todas las posibles interacciones entre los subsistemas.

En este capítulo, analizamos la influencia de un tipo particular de acoplamiento en el hamiltoniano híbrido, caracterizado por su naturaleza dispersiva y que implica la interacción entre el oscilador mecánico y el átomo, presentando la forma $\sim \hat{\sigma}_z(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$. Su equivalente fotónico tiene lugar en la electrodinámica cuántica de cavidades y se conoce como "single atom index effect". La Figura 4.1 ilustra el sistema cuántico bajo consideración.

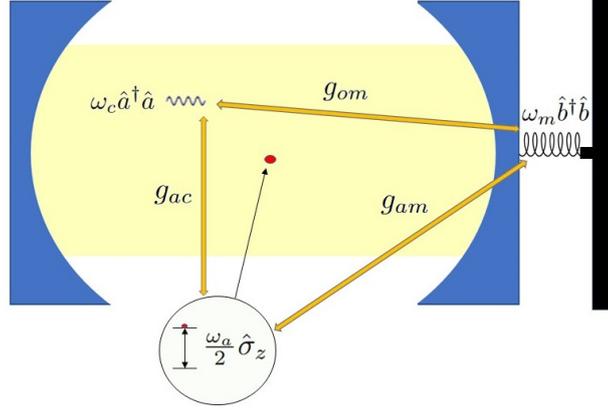


Figura 4.1: Sistema híbrido completamente acoplado. Interacción átomo-fotón g_{ac} , interacción optomecánica g_{om} e interacción dispersiva átomo-fonón g_{am} .

El hamiltoniano correspondiente a este sistema, se escribe de la siguiente manera

$$\hat{H}_{full} = \hat{H}_{hyb} + \hat{H}_{am}, \quad (4.1)$$

aquí, \hat{H}_{hyb} denota el hamiltoniano híbrido (3.4), previamente estudiado en el capítulo anterior, mientras que $\hat{H}_{am} = g_{om}\hat{\sigma}_z(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ representa el nuevo término de interacción considerado. De manera explícita, podemos representar el hamiltoniano (4.1) como

$$\hat{H}_{full} = \frac{\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + g_{ac}\hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} - g_{om}\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) - g_{am}\hat{\sigma}_z(\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (4.2)$$

Para considerar adecuadamente el impacto del término de interacción átomo-fonón en el espectro energético y los estados propios en cada uno de los distintos enfoques, resulta esencial tener en mente el desarrollo presentado en el capítulo anterior para cada caso específico. La incorporación de este término, representado por \hat{H}_{am} , introduce una dinámica adicional en el sistema híbrido, lo que abre la puerta a nuevos fenómenos y efectos cuánticos. En las secciones siguientes, exploraremos de las consecuencias derivadas de esta inclusión.

4.1. Diagonalización RWA con acoplamiento átomo-fonón

Consideremos el hamiltoniano (4.1), donde la parte cQED de \hat{H}_{hyb} que corresponde al modelo cuántico de Rabi ha sido tratada mediante la aproximación de onda rotante $\hat{H}_R \rightarrow \hat{H}_R^{JC}$.

$$\hat{H}_{full}^{rwa} = \hat{H}_{hyb}^{rwa} + \hat{H}_{am}, \quad (4.3)$$

Uno de los pasos iniciales en el proceso de diagonalización de \hat{H}_{hyb}^{rwa} , fue expresar el hamiltoniano en términos de los proyectores formados por los estados propios del modelo de Jaynes-Cummings, es decir, $\hat{P}_G = |\psi_G^{JC}\rangle \langle \psi_G^{JC}|$ y $\hat{P}_{\pm, N} = |\psi_{\pm, N}^{JC}\rangle \langle \psi_{\pm, N}^{JC}|$. La existencia de una cantidad conservada expresada por la ecuación (2.29), hizo evidente la utilidad de representarlo en función de las matrices de Pauli, tal como se definen en el conjunto de ecuaciones (3.7). Esto nos condujo a las ecuaciones (3.8) y (3.11), permitiendo así la formulación del hamiltoniano \hat{H}_{hyb}^{rwa} como un hamiltoniano interactuante del tipo espín-bosón, facilitando su posterior diagonalización.

Para comprender el efecto del término adicional \hat{H}_{am} , es necesario obtener su representación en términos de los mencionados proyectores. Con este propósito, debemos llevar a cabo el siguiente cálculo

$$\hat{H}_{am} = -(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \left[\left(\hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} (\hat{P}_{+, N} + \hat{P}_{-, N}) \right) (g_{am} \hat{\sigma}_z) \left(\hat{P}_G + \sum_{N'=0}^{\infty} (\hat{P}_{+, N'} + \hat{P}_{-, N'}) \right) \right]. \quad (4.4)$$

Considerando que para este término también se cumple $[\hat{H}_{am}, \hat{N}_{JC}] = 0$, es fácil demostrar que los términos que implican proyectores con $N \neq N'$ serán nulos. Por lo tanto, el cálculo anterior se reduce a evaluar las siguientes contribuciones

$$\hat{P}_G \hat{\sigma}_z \hat{P}_G = -\hat{P}_G, \quad (4.5)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{\sigma}_z \hat{P}_{\pm,N} = \mp \cos \theta_N \hat{P}_{\pm,N}, \quad (4.6)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{\sigma}_z \hat{P}_{\mp,N} = \sin \theta_N |\psi_{\pm}^{grwa}\rangle \langle \psi_{\mp}^{grwa}|. \quad (4.7)$$

Con las relaciones anteriores, es posible expresar $\hat{\sigma}_z$ en la nueva base que involucra las matrices de Pauli formadas por los dobletes $|\psi_{\pm,N}^{JC}\rangle$, específicamente

$$\hat{\sigma}_z = \hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} [-\cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} + \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)}]. \quad (4.8)$$

en donde el ángulo θ_N está definido por $\tan \theta_N = -\Omega_N/\delta$.

Al sustituir la ecuación (4.8) en $\hat{H}_{am} = -g_{am}\hat{\sigma}_z(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$, obtenemos

$$\hat{H}_{am} = -g_{am} \left(\hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} [-\cos \theta_N \hat{\sigma}_z^{(N)} + \sin \theta_N \hat{\sigma}_x^{(N)}] \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (4.9)$$

Debemos recordar que esta transformación opera únicamente en la parte átomo-fotón del hamiltoniano tripartito y no tiene efecto sobre el subespacio fonónico.

Siguiendo la referencia [2], asumimos que el sistema se encuentra cerca de resonancia $\omega_a \approx \omega_c$ y con esto el ángulo se reduce a $\theta_N = \frac{\pi}{2}$, lo que implica

$$\hat{H}_{am} = -g_{am} \left(\hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} g_{am} \hat{\sigma}_x^{(N)} \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (4.10)$$

Al integrar este término en el hamiltoniano total (ecuación (4.3)) y siguiendo el procedimiento descrito en la sección (3.3.1) del capítulo anterior, la contribución \hat{H}_G (ecuación (3.14)) experimenta la siguiente modificación

$$\hat{H}_G = \left(\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g_{am} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) - \frac{\omega_a}{2} \right) \hat{P}_G. \quad (4.11)$$

Paralelamente el término \hat{H}_N (ecuación (3.18)) se ve alterado de la siguiente manera

$$\hat{H}_N = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \left(\frac{g_{om}}{2} - g_{am} \right) \hat{\sigma}_x^{(N)} (\hat{b}_N^\dagger + \hat{b}_N). \quad (4.12)$$

Observe como el efecto sobre los términos \hat{H}_G y \hat{H}_N es la modificación del acoplamiento efectivo como $\frac{g_{om}}{2} \rightarrow \left(\frac{g_{om}}{2} - g_{am}\right)$. En este punto, es posible despreciar los términos anti-resonantes de la interacción efectiva polaritón-fonón mediante la implementación de la RWA y así reducir el hamiltoniano a

$$\hat{H}_N^{JC} = C_N + \omega_m \hat{b}_N^\dagger \hat{b}_N + \frac{R_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} + \left(\frac{g_{om}}{2} - g_{am}\right) (\hat{\sigma}_-^{(N)} \hat{b}_N^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(N)} \hat{b}_N). \quad (4.13)$$

En la siguiente sección se muestran los estados propios y el espectro energético de (4.11), así como los de (4.13) después de aplicar un procedimiento análogo al de la sección 2.2.

4.2. Espectro energético y estados RWA-RWA

Las energías modificadas correspondientes a \hat{H}_G (4.11) son

$$E_M = \omega_m \left(M - \frac{g_{am}^2}{\omega_m^2} \right) - \frac{\omega_a}{2}, \quad M = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

y los estados asociados

$$|\Psi_M\rangle = |-z, 0\rangle D\left(\frac{g_{am}}{\omega_m}\right) |M\rangle, \quad (4.15)$$

En relación con el espectro de \hat{H}_N (4.12), nuevamente tenemos dos contribuciones. La primera, que corresponde a $E_G^{(N)}$ con los estados asociados $|\Psi_G^{(N)}\rangle$, no experimenta cambios debido al término de interacción adicional. La segunda, que se refiere a los dobletes de estados vestidos polaritón-fonón, se modifica de la siguiente manera

$$E_{\pm, M}^{(N)} = \omega_c(N+1/2) - \frac{g_{om}^2}{\omega_m} \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 + \omega_m \left(M + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(R_N - \omega_m)^2 + 4 \left(\frac{g_{om}}{2} - g_{am}\right)^2 (M+1)}, \quad (4.16)$$

En la expresión anterior se observa un cambio respecto a la expresión original (3.24),

dentro de la raíz cuadrada se presenta una diferencia de frecuencias ("detuning") y un término análogo a la frecuencia de Rabi para \hat{H}_N . Este último, involucra el acoplamiento efectivo polaritón-fonón, y cabe destacar que ahora también depende del parámetro g_{am} .

Los estados propios asociados a estas energías son

$$\begin{aligned} |\Psi_{+,M}^{(N)}\rangle &= \sin(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{+,N}^{JC}\rangle |M^{qN}\rangle + \cos(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{-,N}^{JC}\rangle |M+1^{qN}\rangle, \\ |\Psi_{-,M}^{(N)}\rangle &= \cos(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{+,N}^{JC}\rangle |M^{qN}\rangle - \sin(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{-,N}^{JC}\rangle |M+1^{qN}\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como consecuencia de la modificación en la frecuencia de Rabi de asociada a \hat{H}_N también el ángulo $\chi_M^{(N)}$ experimenta modificaciones, y ahora se expresa como $\tan(\chi_M^{(N)}) = -\frac{(g_{om}-g_{am}/2)\sqrt{M+1}}{(R_N-\omega_m)}$.

4.3. Diagonalización GRWA con acoplamiento átomo-fonón

Es evidente que la inclusión del término \hat{H}_{am} en el hamiltoniano híbrido tiene consecuencias en el espectro energético y los estados del sistema, dependiendo del enfoque adoptado.

En la sección 4.1, exploramos el enfoque RWA y se demostró que una de las ventajas de estudiar el hamiltoniano híbrido con la parte cQED reducida al modelo de Jaynes-Cummings, es que nos permite representar el término $\hat{\sigma}_z$ de la interacción átomo-fonón de manera exacta en la base (2.33). Sin embargo, a pesar de esta representación exacta, nos vimos obligados a aplicar una segunda RWA, lo que condujo a una reducción significativa del efecto de esta interacción.

En esta sección, veremos que en el contexto GRWA, el operador $\hat{\sigma}_z$ presenta contribuciones que involucran transiciones entre subespacios con diferente número de polaritones, ya que $[\hat{H}_{am}, \hat{N}_R^{grwa}] \neq 0$, por lo tanto, resulta conveniente aproximarlos. No obstante, una de las ventajas es que contamos una descripción más general del modelo

cuántico de Rabi, y como veremos más adelante, todo el proceso también conducirá en una mejor descripción del efecto de la interacción átomo-fonón en la interacción efectiva.

Consideremos el hamiltoniano (3.26) con el término de interacción átomo-fonón

$$\hat{H}_{full}^{grwa} = \hat{H}_{hyb}^{grwa} + \hat{H}_{am}. \quad (4.18)$$

A través de una serie de consideraciones detalladas en la sección 3.4, pudimos llevar el hamiltoniano \hat{H}_{hyb}^{grwa} a la forma de (3.36), que incluye un término de oscilador desplazado y un conjunto de hamiltonianos tipo espín-bosón desacoplados. Nuevamente, para observar el efecto del término de interacción átomo-fonón, es necesario ponerlo en el mismo nivel de descripción que \hat{H}_{hyb}^{grwa} , para esto vamos a representar \hat{H}_{am} en la base GRWA mediante la siguiente transformación

$$\hat{H}_{am} = -(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \left[\left(\hat{P}_G + \sum_{N=0}^{\infty} (\hat{P}_{+,N} + \hat{P}_{-,N}) \right) (g_{am} \hat{\sigma}_z) \left(\hat{P}_G + \sum_{N'=0}^{\infty} (\hat{P}_{+,N'} + \hat{P}_{-,N'}) \right) \right]. \quad (4.19)$$

Una diferencia fundamental en esta transformación respecto a la utilizada en la sección anterior es que aquí los proyectores están formados por la base GRWA (2.50) y no por los estados propios del modelo de Jaynes-Cummings.

Es sencillo demostrar que los términos de la expresión (4.19) que tienen la forma $\hat{P}_{\pm,N} \hat{\sigma}_z \hat{P}_{\pm,N+r}$, son nulos cuando r es impar, y son proporcionales a $\langle N_- | N_+ + r \rangle$ cuando r es par. Teniendo en cuenta el rango de parámetros considerados en este estudio, en el contexto de la GRWA podemos ignorar todas aquellas contribuciones que son proporcionales a los traslapes fotónicos $\langle N | N + r \rangle$ en donde $r \geq 2$. Un procedimiento similar fue realizado en la sección 3.4 cuando reducimos el término de interacción optomecánica a la forma (3.32).

Una vez descartados los términos que mezclan proyectores de diferentes subespacios, la transformación se reduce a calcular las siguientes cantidades

$$\hat{P}_G \hat{\sigma}_z \hat{P}_G = -(\Omega_{0,0}/\omega_a) \hat{P}_G, \quad (4.20)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{\sigma}_z \hat{P}_{\pm,N} = \left[\frac{\Omega_{N,N}}{\omega_a} f_{\pm}^2(\alpha_N/2) - \frac{\Omega_{N+1,N+1}}{\omega_a} f_{\mp}^2(\alpha_N/2) \mp \frac{\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} f_{\pm}(\alpha_N) \right] \hat{P}_{\pm,N}, \quad (4.21)$$

$$\hat{P}_{\pm,N} \hat{\sigma}_z \hat{P}_{\mp,N} = \left[\frac{(\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1})}{2\omega_a} f_{\pm}(\alpha_N) + \frac{\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} f_{-}(\alpha_N) \right] |\psi_{\pm}^{grwa}\rangle \langle \psi_{\mp}^{grwa}|. \quad (4.22)$$

Esto nos lleva a representar $\hat{\sigma}_z$ en mediante las matrices de Pauli (3.33) formadas por la base GRWA

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z &= -\frac{\Omega_{0,0}}{\omega_a} \hat{P}_G + \left[\frac{\Omega_{N,N} - \Omega_{N+1,N+1}}{2\omega_a} \right] I^{(N)} \\ &+ \left[\frac{\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} f_{+}(\alpha_N) - \frac{\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1}}{2\omega_a} f_{-}(\alpha_N) \right] \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ &+ \left[\frac{\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1}}{2\omega_a} f_{+}(\alpha_N) + \frac{\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} f_{-}(\alpha_N) \right] \hat{\sigma}_x^{(N)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Al sustituir la expresión anterior en el término \hat{H}_{am} y añadirlo a la ecuación (4.18), se producen modificaciones en las contribuciones hamiltonianas, dando lugar a las siguientes expresiones

$$\hat{H}_G = \left[\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \left(\frac{g_{am} \Omega_{00}}{\omega_a} - \frac{g_{om} g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + E_G^{grwa} \right] \hat{P}_G. \quad (4.24)$$

Aquí se destaca la presencia de un término de desplazamiento que es opuesto al desplazamiento asociado con g_{om} que ya estaba presente. Además, cabe mencionar que, a diferencia del enfoque RWA, emerge la cantidad $\Omega_{0,0}$, la cual tiende a 1 cuando $g_{ac}/\omega_m \ll 1$. La contribución del hamiltoniano asociada con los hamiltonianos tipo espín-bosón es

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(N)} &= \left[\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + k_N - q'_N (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] \hat{I}^{(N)} + \frac{T_N}{2} \hat{\sigma}_z^{(N)} \\ &+ g'_{shift}{}^{(N)} (b^\dagger + b) \hat{\sigma}_z^{(N)} + g'_{eff}{}^{(N)} (b^\dagger + b) \hat{\sigma}_x^{(N)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aunque esta ecuación parece tener una forma similar a su antecesora (3.38), es importante destacar que el efecto de \hat{H}_{am} radica en la renormalización de los acoplamientos efectivos ($g'_{shift}^{(N)}$ y $g'_{eff}^{(N)}$) y el desplazamiento q'_N , modificación que se expresan de la siguiente manera

$$q'_N = q_N - \frac{1}{2} \frac{g_{am}}{\omega_a} (\Omega_{N,N} - \Omega_{N+1,N+1}), \quad (4.26)$$

$$g'_{shift}^{(N)} = \left(\frac{g_{om}\Omega_N}{2\omega_c} - \frac{g_{am}\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} \right) \sin \alpha_N - \left(\frac{g_{om}}{2} - \frac{g_{am}}{2\omega_a} (\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1}) \right) \cos \alpha_N, \quad (4.27)$$

$$g'_{eff}^{(N)} = \left(\frac{g_{om}}{2} - \frac{g_{am}}{2\omega_a} (\Omega_{N,N} + \Omega_{N+1,N+1}) \right) \sin \alpha_N + \left(\frac{g_{om}\Omega_N}{2\omega_c} - \frac{g_{am}\Omega_{N,N+1}}{\omega_a} \right) \cos \alpha_N, \quad (4.28)$$

Como se mencionó anteriormente, la contribución hamiltoniana \hat{H}_G (4.24) es común para los enfoques GRWA-RWA y GRWA-GRWA, ya que está exenta de una aproximación secundaria. Sin embargo, en el término $\hat{H}^{(N)}$, es necesario hacer una distinción y elegir si se empleará una RWA o GRWA para diagonalizar (4.25). En la siguiente sección, se presentan las energías y estados propios obtenidos mediante los enfoques GRWA-GRWA y GRWA-RWA.

4.4. Espectro energético y estados GRWA-GRWA

Las energías correspondientes \hat{H}_G considerando el termino de acoplamiento átomo-fonón se expresan de la siguiente manera

$$E_M = \omega_m M - \frac{1}{\omega_m} \left(\frac{g_{am}\Omega_{0,0}}{\omega_a} - \frac{g_{om}g_{ac}^2}{\omega_c^2} \right)^2 + E_G^{grwa}, \quad M = 0, 1, \dots \quad (4.29)$$

Los estados asociados a estas energías se describen mediante la expresión

$$|\Psi_M\rangle = |\psi_G^{grwa}\rangle |M^{(q'_G)}\rangle, \quad (4.30)$$

en donde hemos definido, $|M^{(q'_G)}\rangle = D\left(\frac{1}{\omega_m}\left(\frac{g_{am}\Omega_{0,0}}{\omega_a} - \frac{g_{om}g_{ac}^2}{\omega_c^2}\right)\right)|M\rangle$.

En el caso de $E_G^{(N)}$, la expresión se define como

$$E_G^{(N)} = C_N - \frac{(g'_{eff})^2}{\omega_m} - \frac{T'_N}{2} \langle (M=0)_-^{(q'_N)} | (M=0)_+^{(q'_N)} \rangle. \quad (4.31)$$

Los estados desplazados que constituyen el traslape fonónico se definen mediante la relación $|M_{\pm}^{(q'_N)}\rangle = \hat{D}(q'_N/\omega_m)\hat{D}(\mp g'_{eff}/\omega_m)|M\rangle$. Además, es importante considerar que ahora T'_N depende de g_{am} , es decir, $T'_N = T_N + 4q'_N g'_{shift}$.

Continuando, la expresión para el conjunto de estados asociados a las energías $E_G^{(N)}$ es la siguiente

$$|\Psi_G^{(N)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle |(M=0)_+^{(q'_N)}\rangle - |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle |(M=0)_-^{(q'_N)}\rangle], \quad (4.32)$$

en donde los estados $|\psi_{\pm,N}^{grwa(x)}\rangle$ cumplen la siguiente ecuación de eigenvalores $\hat{\sigma}_x^{(N)} |\psi_{\pm,N}^{grwa(x)}\rangle = \pm |\psi_{\pm,N}^{grwa(x)}\rangle$.

Respecto a las energías asociadas a los bloques de 2×2 de \hat{H}_N tenemos

$$E_{\pm,M}^{(N)} = C_N + \omega_m \left(M + \frac{1}{2} \right) - \frac{(g'_{eff})^2}{\omega_m} + \frac{1}{4} (\Omega'_{M,M} + \Omega'_{M+1,M+1}) \pm \frac{1}{2} [\Delta'^2_{N,M} + (\Omega'_{M,M+1})^2]^{1/2}, \quad (4.33)$$

en donde las cantidades (3.52) (3.53) han sido renormalizadas de la siguiente manera

$$\Omega'_{M,M'} = T'_N \langle M_-^{(q'_N)} | M'_+^{(q'_N)} \rangle \quad (4.34)$$

$$\Delta'^N_M = \frac{T'_N}{2} (\langle M_-^{(q'_N)} | M_+^{(q'_N)} \rangle + \langle M + 1_-^{(q'_N)} | M + 1_+^{(q'_N)} \rangle) - \omega_m, \quad (4.35)$$

no olvidemos que en la expresión anterior $T'_N(g_{am})$.

Los estados asociados a estas energías son

$$|\Psi_{+,M}^{(N)}\rangle = \sin(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{+,M}^{ad(N)}\rangle + \cos(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{-,M+1}^{ad(N)}\rangle, \quad (4.36)$$

$$|\Psi_{-,M}^{(N)}\rangle = \cos(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{+,M}^{ad(N)}\rangle - \sin(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{-,M+1}^{ad(N)}\rangle, \quad (4.37)$$

El ángulo $\phi_M^{(N)}$ ahora esta definido como $\tan \phi_M^{(N)} = -\Omega'_{M,M+1}/\Delta'_{NM}$.

4.5. Espectro energético y estados mixto GRWA-RWA

Las energías y estados resultado de aplicar una RWA al hamiltoniano (4.25) son las siguientes

$$E_G^{(N)} = C_N - \frac{T'_N}{2} \quad (4.38)$$

Aquí se destaca la dependencia de esta energía con el acoplamiento átomo-fonón g_{am} a través de T'_N .

Los estados correspondientes son

$$|\psi_G^{(N)}\rangle = |\psi_{0,-}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)} = 0\rangle. \quad (4.39)$$

Por ultimo tenemos las energías $E_{\pm,M}^{(N)}$ que se ven modificadas de la siguiente manera

$$E_{\pm,M}^{(N)} = C_N + \omega_m \left(M + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2} [(T'_N - \omega_m)^2 + (2g'_{eff} \sqrt{M+1})^2] \quad (4.40)$$

y los estados correspondientes

$$|\Psi_{+,M}^{(N)}\rangle = \sin(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)}\rangle + \cos(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle, \quad (4.41)$$

$$|\Psi_{-,M}^{(N)}\rangle = \cos(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)}\rangle - \sin(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle, \quad (4.42)$$

en donde $\tan \theta_M^{(N)} = -(2g'_{eff} \sqrt{M+1})/(T'_N - \omega_m)$.

4.6. Comparación de los espectros energéticos con la solución numérica exacta

En esta sección, se realiza una comparación del espectro energético en función del parámetro de acoplamiento g_{am}/ω_m utilizando distintos enfoques. Se eligieron valores

pequeños para los acoplamientos átomo-fotón g_{ac} y optomecánico g_{om} con el fin de revelar el efecto que tiene solo la interacción átomo-fonón en las energías.

En la Figura 4.2 (a), que corresponde a las ecuaciones (4.14) y (4.29), se observa que tanto el enfoque RWA como el GRWA coinciden en todo el rango de acoplamiento considerado. Esta concordancia se debe al hecho de que el efecto de desplazamiento en \hat{H}_G , introducido por el nuevo término de interacción, es similar en ambos enfoques. Aunque las expresiones son diferentes en general, la consideración de acoplamientos g_{ac} y g_{om} pequeños contribuye a que no difieran significativamente.

La Figura 4.2 (b), presenta las energías (3.20), (4.38) y (4.31). Aquí observamos un caso similar al anterior; sin embargo, se aprecia una muy ligera diferencia entre las energías para acoplamientos g_{am}/ω_m extremadamente grandes.

De las gráficas anteriores, se puede concluir que no hay diferencias significativamente grandes en estas contribuciones hamiltonianas, especialmente para valores moderados de g_{am} .

En la Figura 4.2 (c) y (d), se evidencia cómo los enfoques RWA-RWA y GRWA-RWA se comportan de manera similar con respecto al parámetro g_{am} , perdiendo precisión a medida que g_{am} se aproximan al segundo cruce de niveles. Además, es notable cómo el enfoque GRWA-GRWA describe con gran precisión las energías, siguiendo muy de cerca a la solución numérica y manteniendo una fidelidad respecto a la solución numérica por encima del 80 % en todo el rango de acoplamiento considerado. Sin embargo, se observa una pérdida de fidelidad cerca del cruce evitado en donde el acoplamiento efectivo tiende a cero.

La Figura 4.2 (e) corresponde al mismo caso que (c) pero con un acoplamiento optomecánico mayor. Aquí podemos observar un comportamiento similar destacando de nuevo el enfoque GRWA-GRWA, además, se aprecia cómo el anti-cruce se encuentra desplazado a la derecha en un valor de $g_{am}/\omega_m = 0.2$ respecto a la Figura (c) que se encuentra en $g_{am}/\omega_m = 0.05$. Esto se debe a que justo en esos valores, el acoplamiento g_{am} cancela a su contraparte optomecánica, anulando el acoplamiento efectivo

polaritón-fonón. Este último se aproxima a $\approx g_{om}/2 - g_{am}$ si los demás acoplamientos son pequeños.

Por último, otro aspecto destacable de la solución GRWA-GRWA se aprecia en la Figura 4.2 (f). Esta solución se muestra robusta incluso para estados con valores grandes del número cuántico M . La representación de las energías en este contexto demuestra la capacidad del enfoque GRWA-GRWA para describir de manera precisa y estable el comportamiento del sistema, incluso cuando se exploran regiones del espacio de parámetros con mayores excitaciones cuánticas.

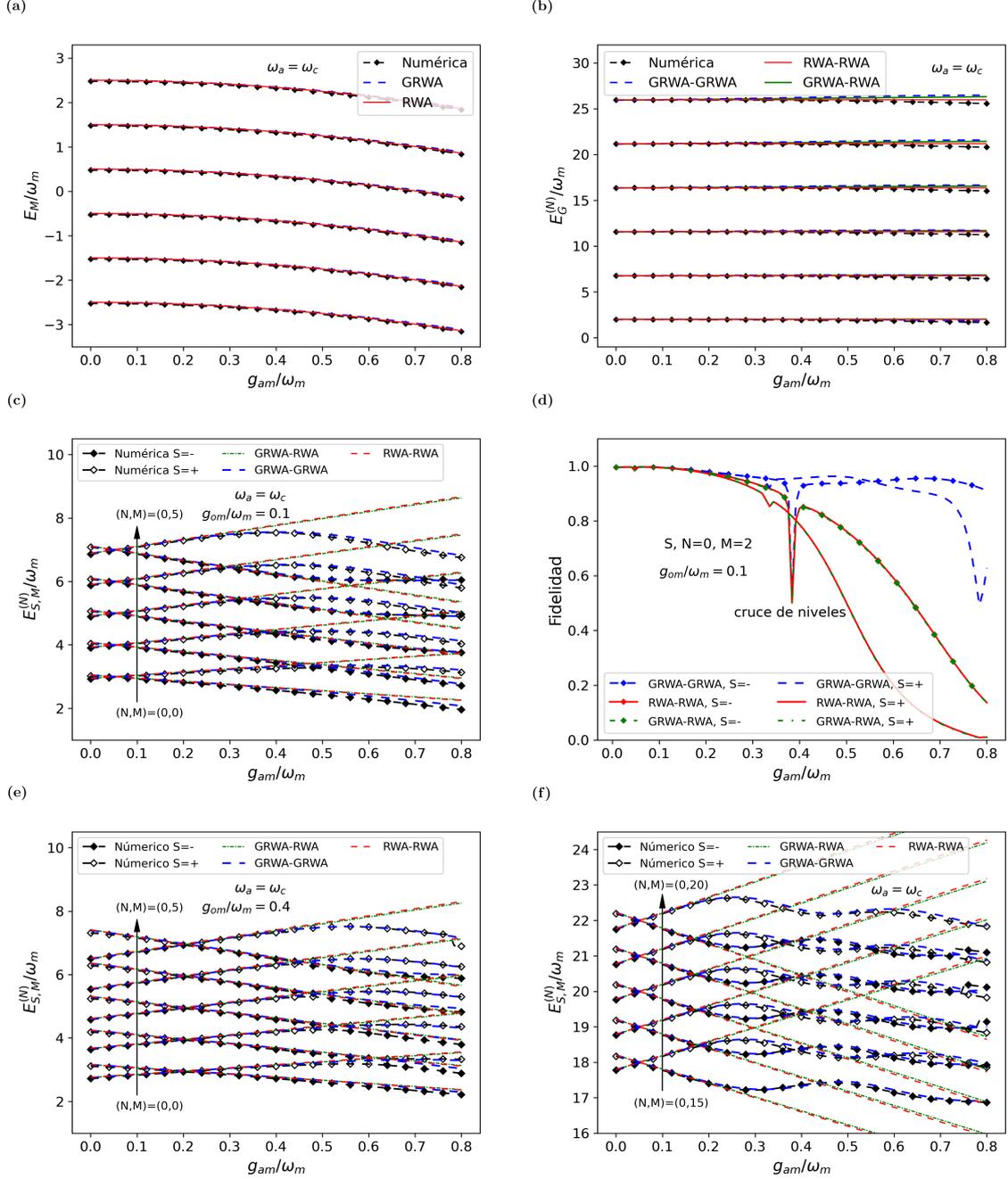


Figura 4.2: Comparación de los niveles de energía en función del acoplamiento g_{am} para el hamiltoniano híbrido (4.2) utilizando diferentes enfoques: RWA-RWA, GRWA-RWA, GRWA-GRWA, y la solución numérica exacta. El panel (a) ilustra la porción del espectro energético que comprende los cero polaritones átomo-cavidad E_M , ecuaciones (4.14) y (4.29) para $M = 0, 1, \dots, 5$, en el caso de resonancia. El panel (b) representa la contribución al espectro energético correspondiente a las ecuaciones (3.22), (4.38) y 4.31 para $N = 0, 1, \dots, 5$. El panel (c) muestra la parte del espectro que corresponde a los dobletes $E_{\pm, M}^{(N)}$, ecuaciones (4.16), (4.40) y (4.33). La fidelidad respecto a la solución numérica de los estados $|\Psi_{\pm, 2}^{(0)}\rangle$ se presenta en el panel (d). Por último en los paneles (e) y (f) encontramos el espectro para un acoplamiento g_{am} mayor y para estados más energéticos, respectivamente.

Capítulo 5

Entrelazamiento de los estados híbridos

En este capítulo investigamos las propiedades de entrelazamiento de los estados aproximados del sistema híbrido. La reducción del hamiltoniano híbrido (3.4) a un hamiltoniano efectivo espín-bosón (3.45), que describe un sistema de dos niveles polaritónicos interactuando con un campo fonónico desplazado, nos permite estudiar el entrelazamiento como el de un sistema bipartito.

El número de Schmidt es una herramienta fundamental para identificar la no separabilidad de los estados en sistemas bipartitos [67]. No obstante, en este estudio, hemos optado por emplear una medida conocida como “razón de participación”. Aunque esta magnitud ofrece la misma información que el número de Schmidt, se distingue por proporcionar un rango continuo de valores, permitiendo una descripción más detallada del grado de entrelazamiento [67, 68]. En términos prácticos, la razón de participación se calcula como $\xi = 1/\text{Tr}(\hat{\rho}_r^2)$, donde $\hat{\rho}_r$ es una matriz de densidad reducida obtenida mediante una traza parcial en cualquiera de los subsistemas.

Este criterio nos permitirá cuantificar el grado de entrelazamiento entre los polaritones átomo-cavidad y los fonones en los estados vestidos.

Cabe señalar que las propiedades de entrelazamiento tripartito de un modelo Jaynes-

Cummings con interacción optomecánica se estudiaron recientemente, aunque solo en el régimen de acoplamiento débil resonante [69].

5.1. Entrelazamiento bipartito polaritón-fonón

Consideremos los estados obtenidos mediante el enfoque GRWA-GRWA (ecuación (3.54) y (3.55)). La matriz de densidad asociada a estos es

$$\hat{\rho}_{\pm,M}^{(N)} = |\Psi_{\pm,M}^{(N)}\rangle \langle \Psi_{\pm,M}^{(N)}|, \quad (5.1)$$

y explícitamente

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\pm,M}^{(N)} = & f_{\pm}^2(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{+,M}^{ad(N)}\rangle \langle \Psi_{+,M}^{ad(N)}| + f_{\mp}^2(\phi_M^{(N)}/2) |\Psi_{-,M+1}^{ad(N)}\rangle \langle \Psi_{-,M+1}^{ad(N)}| \\ & \pm f_{+}(\phi_M^{(N)}/2) f_{-}(\phi_M^{(N)}/2) \left[|\Psi_{+,M}^{ad(N)}\rangle \langle \Psi_{-,M+1}^{ad(N)}| + |\Psi_{-,M+1}^{ad(N)}\rangle \langle \Psi_{+,M}^{ad(N)}| \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

En la expresión anterior, fue utilizada la base adiabática híbrida $|\Psi_{\pm,M}^{ad(N)}\rangle$ definida en la ecuación (3.56). Adicionalmente, el ángulo $\phi_M^{(N)}$ queda determinado por $\tan \phi_M^{(N)} = -\Omega_{M,M+1}^N / \Delta_{NM}$ (consulte la sección 3.2 para más detalles).

Ahora, tomaremos la traza parcial de la matriz densidad respecto del subsistema fotónico. Este proceso nos conduce a obtener la matriz de densidad reducida

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\pm,M}^{(N)} = & \frac{1}{2} \left[|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa(x)}| + |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa(x)}| \right. \\ & \left. + \Lambda_{\pm,M}^{(N)} (|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa(x)}| + |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa(x)}|) \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

en donde

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm,M}^{(N)} = & f_{\pm}^2(\phi_M^{(N)}/2) \langle M_-^{(qN)} | M_+^{(qN)} \rangle - f_{\mp}^2(\phi_M^{(N)}/2) \langle M + 1_-^{(qN)} | M + 1_+^{(qN)} \rangle \\ & \pm 2f_{\pm}(\phi_M^{(N)}/2) f_{\mp}(\phi_M^{(N)}/2) \langle M_-^{(qN)} | M + 1_+^{(qN)} \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al elevar al cuadrado la matriz densidad reducida tenemos

$$\begin{aligned}
(\tilde{\rho}_{\pm,M}^{(N)})^2 &= \frac{1}{4} \left[\left(1 + [\Lambda_{\pm,M}^{(N)}]^2 \right) \left(|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa(x)}| + |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa(x)}| \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\Lambda_{\pm,M}^{(N)} \left(|\psi_{+,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa(x)}| + |\psi_{-,N}^{grwa(x)}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa(x)}| \right) \right], \quad (5.5)
\end{aligned}$$

y al tomar la traza de este cuadrado

$$Tr[(\tilde{\rho}_{\pm,M}^{(N)})^2] = \frac{1}{2} \left(1 + [\Lambda_{\pm,M}^{(N)}]^2 \right). \quad (5.6)$$

Así, al invertir la expresión, la razón de participación asociada a los estados vestidos bajo el enfoque GRWA-GRWA queda dada por

$$\xi_{\pm,M}^{(N)} = \frac{2}{1 + [\Lambda_{\pm,M}^{(N)}]^2}. \quad (5.7)$$

Ahora consideremos los estados vestidos obtenidos mediante el enfoque mixto GRWA-RWA

$$|\Psi_{\pm,M}^{(N)}\rangle = f_{\pm}(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle |M^{(q_N)}\rangle \pm f_{\mp}(\theta_M^{(N)}/2) |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle. \quad (5.8)$$

Aquí, $\theta_M^{(N)}$ se determina a través de la ecuación $\tan \theta_M^{(N)} = -(2g_{eff}^{(N)}\sqrt{M+1})/(T'_N - \omega_m)$. Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, llegamos a la siguiente expresión para la matriz reducida

$$\tilde{\rho}_{\pm,M}^{(N)} = f_{\pm}^2(\theta_{N,M}/2) |\psi_{+,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{+,N}^{grwa}| + f_{\mp}^2(\theta_{N,M}/2) |\psi_{-,N}^{grwa}\rangle \langle \psi_{-,N}^{grwa}|. \quad (5.9)$$

La traza de esta matriz al cuadrado es entonces

$$Tr[(\tilde{\rho}_{\pm,M}^{(N)})^2] = f_{\pm}^4(\theta_{N,M}/2) + f_{\mp}^4(\theta_{N,M}/2) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_{N,M}). \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la razón de participación se expresa como

$$\xi_{N,M}^{mix} = \frac{2}{1 + \cos^2 \theta_{N,M}}, \quad (5.11)$$

Por ultimo, considerar los estados vestidos producto del enfoque RWA-RWA (ecuación (3.25))

$$|\Psi_{\pm,M}^{(N)}\rangle = f_{\pm}(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{+,N}^{JC}\rangle |M^{(q_N)}\rangle \pm f_{\mp}(\chi_M^{(N)}/2) |\phi_{-,N}^{JC}\rangle |M+1^{(q_N)}\rangle. \quad (5.12)$$

nos lleva a la siguiente razón de participación

$$\xi_{N,M}^{rwa} = \frac{2}{1 + \cos^2 \chi_M^{(N)}}, \quad (5.13)$$

La Figura 5.1 presenta los mapas de color $\xi(g_{ac}, g_{om})$ correspondientes al estado propio $|\Psi_{+,2}^{(2)}\rangle$ para las distintas aproximaciones exploradas en este estudio. Estos mapas se presentan en condiciones de resonancia entre todos los subsistemas, es decir, cuando la relación entre frecuencias es $\omega_a = \omega_c = \omega_m$.

La Figura 5.1(a) ilustra la razón de participación RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}(g_{ac}, g_{om})$. En este caso, se observa que para valores pequeños de g_{om}/ω_m , existe un conjunto muy estrecho de rangos de g_{ac}/ω_m en donde $\xi_{2,2}^{rwa} \approx 2$, indicando entrelazamiento máximo polaritón-fonón. A medida que el acoplamiento optomecánico aumenta, la estructura se amplía, revelando una región más extensa de valores (g_{ac}, g_{om}) con entrelazamiento máximo polaritón-fonón. Esta área adquiere una forma triangular, y la sección más estrecha de entrelazamiento máximo se encuentra para valores pequeños de g_{om}/ω_m . Esto se explica debido al único cero de $\cos^2 \chi_2^{(2)}$ que se encuentra en $\Omega_2/\omega_m = 1$, o equivalentemente, $g_{ac}/\omega_m = \sqrt{3}/6$.

Las figuras 5.1(b) y (c) muestran los mapas correspondientes a los enfoques GRWA-RWA y GRWA-GRWA, respectivamente. En estos casos, se observa una región similar a la descrita anteriormente, pero con una leve inclinación hacia la izquierda. Esta inclina-

ción es más pronunciada en el caso de GRWA-GRWA. Es evidente que, en contraste con el mapa RWA de la razón de participación, los mapas GRWA exhiben una estructura más compleja en general.

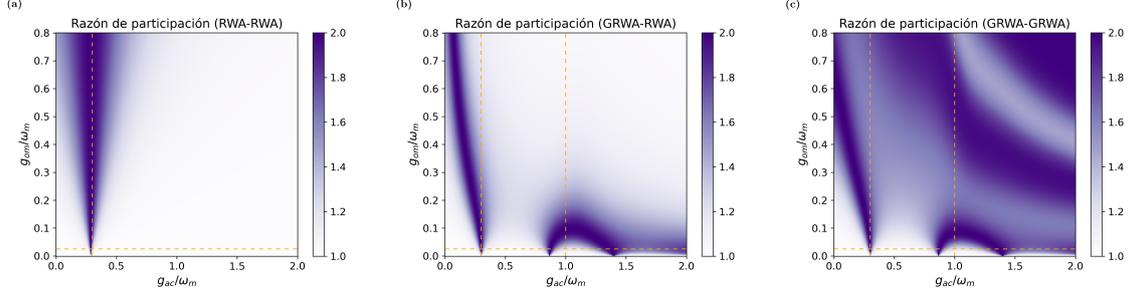


Figura 5.1: (a) Razón de participación $\xi_{N,M}^{rwa}$ del estado $|\Psi_{+,2}^{(2)}\rangle$ RWA-RWA en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} . (b) Razón de participación $\xi_{N,M}^{mix}(g_{ac}, g_{om})$ correspondiente a este estado calculado con el enfoque mixto. (c) Mapa de $\xi_M^{(N)}$ correspondiente al enfoque GRWA-GRWA, en todos los casos se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = \omega_m$. Las líneas anaranjadas verticales y horizontales en las figuras corresponden a los cortes presentados en la figura 5.2.

En la figura 5.2(a) mostramos un corte de los mapas con la línea $g_{om}/\omega_m = 0.025$.

Aquí observamos cómo para un valor pequeño de g_{om}/ω_m , todas las aproximaciones coinciden en el primer máximo ubicado en $g_{ac}/\omega_m = \sqrt{3}/6$. También observamos cómo las aproximaciones basadas en el enfoque GRWA poseen tres máximos de entrelazamiento en todo el rango de g_{ac}/ω_m , abarcando desde el régimen de acoplamiento débil hasta el régimen de acoplamiento ultrafuerte profundo, una característica que no está presente en la aproximación RWA.

En el enfoque GRWA-RWA este comportamiento se debe a que $\cos^2 \theta_2^{(2)} = [(T_2' - \omega_m)/(2\sqrt{3}g_{eff}^{(2)})]^2$ desarrolla una estructura con tres mínimos, resultado de una combinación de los polinomios de Laguerre $L_2^0(x), L_3^0(x), L_2^1(x)$ con $x = 2g_{ac}/\omega_c$. Estos polinomios a su vez involucran superposiciones fotónicas como $\langle 2_- | 2_+ \rangle, \langle 3_- | 3_+ \rangle$, y $\langle 2_- | 3_+ \rangle$.

En cuanto al enfoque GRWA-GRWA, también presenta estos mínimos; sin embargo, su comportamiento es un tanto más complejo. Este se puede comprender observando que cuando $g_{eff}^{(N)}/\omega_m \ll 1$ (o $g_{om}/\omega_m \ll 1$), las siguientes aproximaciones son válidas: $\langle M_-^{(qN)} | M + 1_+^{(qN)} \rangle \approx 0$ y $\langle M_-^{(qN)} - | M_-^{(qN)} + \rangle \approx \langle M + 1_-^{(qN)} - | M + 1_-^{(qN)} + \rangle \approx 1$. Por lo

tanto, en este caso, $\Lambda_{\pm, M}^{(N)} \approx \pm \cos \phi_M^{(N)}$, y la razón de participación se reduce a $\xi_{\pm, M}^{(N)} \approx 2/[1 + \cos^2 \phi^{(N)} M]$. Cabe destacar que para $g_{ac} < \omega_c$ se cumple $\cos \phi_M^{(N)} \approx \cos \theta_M^{(N)}$, de ahí la coincidencia en el corte mostrado en la figura 5.2(a). No obstante, a medida que $g_{eff}^{(2)}$ aumenta, las superposiciones fonónicas presentes en $\Lambda_{+, 2}^{(2)}$ comienzan a desviarse de valores triviales (0 o 1), dando lugar al mapa más estructurado observado en la Figura 5.1(c), donde $\xi_{+, 2}^{(2)}(g_{ac}, g_{om}) \approx 2$. La diferencia entre los dos enfoques basados en la GRWA radica precisamente en los traslapes fonónicos derivados de la segunda GRWA a \hat{H}_N (ecuación (3.45)). Mientras que en el enfoque GRWA-RWA debe cumplirse $T'_N/\omega_m = 1$ para obtener entrelazamiento máximo, en la GRWA-GRWA es necesario $\Delta_M^N = 0$ (ecuación (3.53)), o bien, $T'_N/\omega_m (\langle M_-^{(qN)} | M_+^{(qN)} \rangle + \langle M_+ + 1_-^{(qN)} | M_+ + 1_+^{(qN)} \rangle) = 1$.

En la figura 5.2(b) mostramos un corte de los mapas con la línea $g_{ac}/\omega_m = 0.3$. Para valores pequeños de g_{ac}/ω_m , el resultado RWA crece de manera monótona y se satura cerca de $\xi_{2, 2}^{rwa} \approx 2$, mostrando un comportamiento similar al observado en los estados del modelo de Jaynes-Cummings fuera de resonancia (Fig. 2.8(b)). En contraste, las aproximaciones basadas en los enfoques GRWA alcanzan un máximo rápidamente y luego comienzan a decrecer. Solo en el caso de la GRWA-GRWA observamos una ligera ondulación en el rango de acoplamiento optomecánicos relativamente grandes. Se puede demostrar que estas oscilaciones son análogas a las observadas en los estados vestidos átomo-fotón derivados de aplicar la GRWA al QRM (Fig. 2.8(b)). Por lo tanto, al considerar estados híbridos GRWA-GRWA con un número cuántico M mayor, observaremos oscilaciones más pronunciadas en el rango de acoplamiento considerado.

Finalmente, en la figura 5.2(c), mostramos un corte de los mapas con la línea $g_{ac}/\omega_m = 1.0$. Aquí observamos más detalladamente el comportamiento oscilatorio del enfoque GRWA-GRWA, el cual incluso produce un máximo secundario. Asimismo, notamos cómo el enfoque mixto GRWA-RWA presenta un único máximo en todo el rango de acoplamiento g_{om}/ω_m y luego muestra un comportamiento decreciente hasta alcanzar un valor estacionario que indicaría la ausencia de entrelazamiento polaritón-fonón. La carencia de oscilaciones en este último se debe a su falta de dependencia de

los traslapes fonónicos en la diferencia $T'_2 - \omega_m$ presente en la definición de $\cos \theta_2^{(2)}$, los cuales son responsables de este comportamiento oscilatorio.

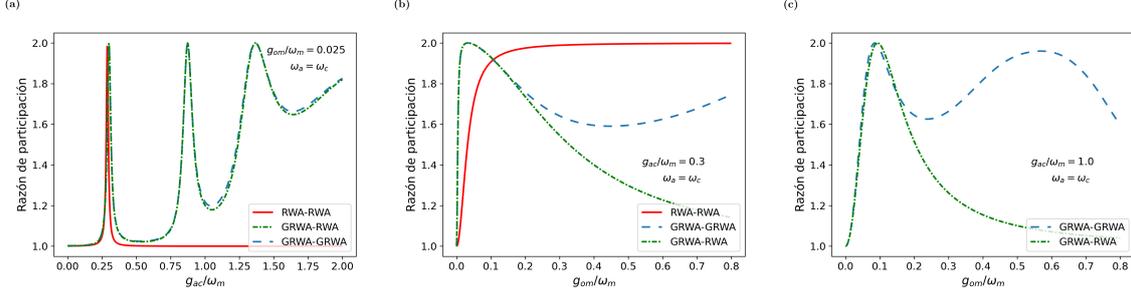


Figura 5.2: (a) Comparación de las razones de participación $\xi_{N,M}^{rwa}$, $\xi_{N,M}^{mix}$ y $\xi_M^{(N)}$ en función de g_{ac} para $g_{om}/\omega_m = 0.025$. Corte de las cantidades $\xi_{N,M}^{rwa}$, $\xi_{N,M}^{mix}$ y $\xi_M^{(N)}$ en función del acoplamiento optomecánico g_{om} para: (b) $g_{ac}/\omega_m = 0.3$ y (c) $g_{ac}/\omega_m = 1.0$.

En la figura 5.3, se presentan los mapas correspondientes a las diferentes aproximaciones, pero ahora asociados al estado $|\Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ con la siguiente relación de frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$. Cabe destacar que este estado, obtenido mediante los enfoques GRWA fue estudiado en el capítulo anterior y demostró poseer una fidelidad superior al 80 % en comparación con la solución numérica en todo el rango de acoplamiento g_{ac}/ω_m para $g_{om}/\omega_m < 0.1$. Además, se observó que el enfoque GRWA logra describir con gran precisión el espectro energético y los cruces de niveles, incluso para acoplamientos optomecánicos más grandes ($g_{om}/\omega_m > 0.1$).

En esta figura, notamos cómo para valores pequeños de g_{om}/ω_m , todos los mapas muestran una notable coincidencia. Además, destaca una vez más una estructura triangular de entrelazamiento máximo, ahora centrada en $g_{ac}/\omega_m = 1/2$. Esta estructura es muy similar en los mapas de la figura (a) y (b), correspondientes a los enfoques RWA-RWA y GRWA-RWA, respectivamente. Por otro lado, la figura (c) asociada al enfoque GRWA-GRWA, presenta nuevamente una ligera deformación hacia la izquierda. También notamos cómo en este caso solo la aproximación GRWA-GRWA (figura (c)) predice entrelazamiento máximo en valores de acoplamiento (g_{ac} y g_{om}) relativamente grandes.

La siguiente componente del espectro corresponde al estado aislado $|\Psi_G^{(N)}\rangle$. Una vez

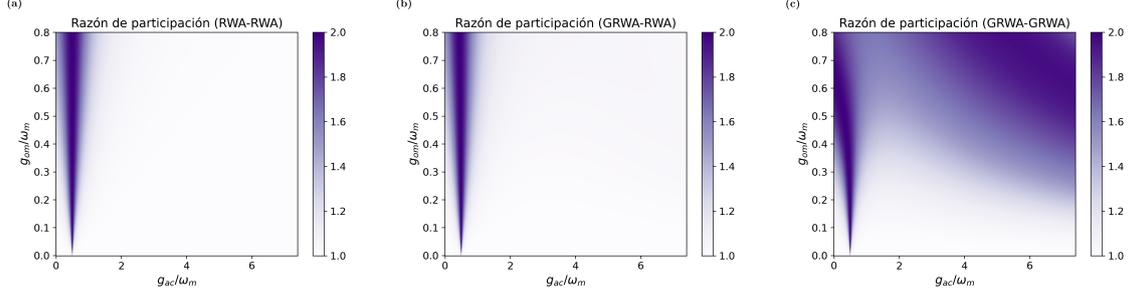


Figura 5.3: Razón de participación asociada al estado $|\Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N,M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$.

más, siguiendo un procedimiento similar al realizado anteriormente para determinar la razón de participación, obtenemos la siguiente expresión

$$\xi_G^{(N)} = \frac{2}{1 + [\langle (M=0)_-^{(qN)} | (M=0)_+^{(qN)} \rangle]^2}. \quad (5.14)$$

En contraste, con el enfoque GRWA-GRWA, es evidente que los estados correspondientes a esta parte del espectro, calculados con los enfoques GRWA-RWA y RWA-RWA, por su estructura, siempre serán separables. Por lo tanto, en estos casos no habrá entrelazamiento polaritón-fonón, y ambos darán como resultado una razón de participación $\xi_G^{(N)} = 1$.

De igual manera el último componente del espectro, el estado $|\Psi_M\rangle$ tiene una estructura separable y en todos los casos con cualquiera de las aproximaciones tampoco habrá entrelazamiento.

En la figura 5.4 se muestran los mapas de razón de participación asociados al estado $|\Psi_G^{(0)}\rangle$ para los casos de resonancia 5.4(a) y fuera de resonancia 5.4(b), respectivamente.

En la figura (a), podemos destacar cómo el enfoque GRWA-GRWA predice una región de entrelazamiento máximo, en contraste con el enfoque GRWA-RWA Y RWA-RWA, que resultan en una razón de participación nula. Este comportamiento sugiere que la aproximación GRWA-GRWA puede capturar aspectos de entrelazamiento en este estado que no son descritos por las otras aproximaciones.

En la figura (b) se muestra una región de máximo entrelazamiento ligeramente más redondeada. Resulta evidente que ambas estructuras de máximo entrelazamiento se encuentra más o menos en la misma región si tenemos en cuenta la cantidad g_{ac}/ω_c . De esta mapa podemos concluir que la relación entre las frecuencias del átomo y los fotones no tiene un gran impacto en el comportamiento de la razón de participación.

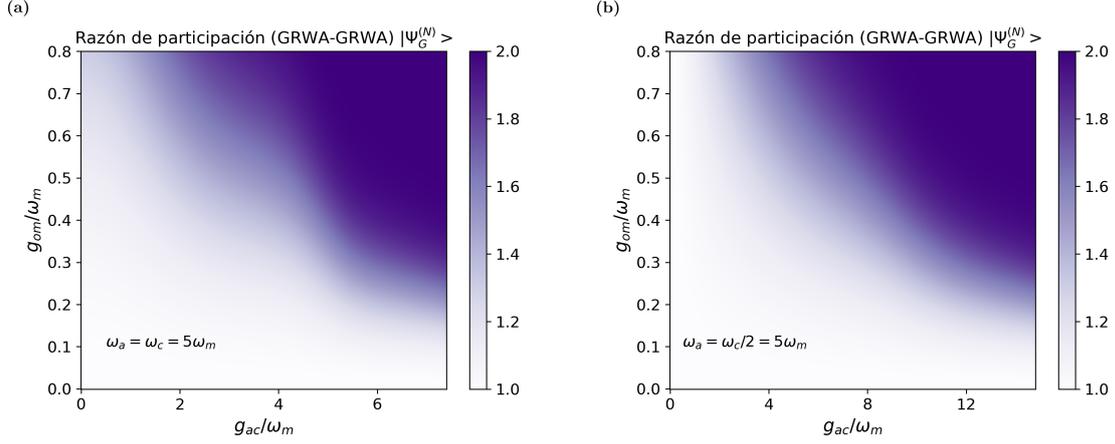


Figura 5.4: Razón de participación de la ecuación (5.14) en función del acoplamiento optomecánico g_{om} y átomo-fotón g_{ac} para el estado $|\Psi_G^{(0)}\rangle$. (a) caso con resonancia átomo-fotón ($\omega_a = \omega_c$), (b) caso fuera de resonancia. ($\omega_a = \omega_c/2$)

5.2. Entrelazamiento en presencia de acoplamiento átomo-fonón

A continuación, examinaremos el comportamiento de la razón de participación en términos de g_{om} y g_{am} , considerando los diversos enfoques desarrollados, y teniendo en cuenta el efecto del término de acoplamiento átomo-fonón (g_{am}) en el hamiltoniano total.

En esta sección, nos basaremos en las expresiones para el espectro energético que se derivaron en el capítulo 4. La única modificación necesaria será la sustitución de los ángulos obtenidos en las secciones 4.2, 4.4 y 4.5 en las expresiones $\xi_{\pm,M}^{(N)}$, $\xi_{\pm,N,M}^{mix}$ y $\xi_{\pm,N,M}^{rwa}$.

En la figura 5.5 (a), que corresponde al enfoque RWA-RWA, se observa una saturación completa en el valor máximo de entrelazamiento, $\xi_{\pm, N, M}^{rwa} = 2$. Este fenómeno puede rastrearse hasta la estructura triangular presente en la gráfica 5.3, específicamente en los valores que corresponden $g_{ac}/\omega_m = 0.5$. La explicación de este comportamiento se encuentra en el modelo de Jaynes-Cummings, donde, cuando las frecuencias del átomo y el fotón están en resonancia los estados vestidos tienden al máximo entrelazamiento (consulte la figura 2.8), independientemente del acoplamiento. En nuestro caso, la resonancia se produce entre R_N y ω_m en el hamiltoniano 4.12 cuando $g_{ac}/\omega_m = 0.5$.

Por otro lado, el enfoque GRWA-RWA (figura 5.5(b)) también presenta esta saturación, sin embargo notamos una región de entrelazamiento nulo cercana a la recta $g_{om} = 2g_{am}$. Esto sucede debido a que en estas condiciones el acoplamiento efectivo polaritón-fonón se aproxima a $g_{om}/2 - g_{am}$, por lo tanto, en esta recta su valor tiende a cero reduciendo el estado considerado a un estado separable.

En la figura 5.5(c), se aprecia un comportamiento similar en la misma recta. No obstante, también se observan regiones en donde el entrelazamiento disminuye del valor máximo, lo cual se deriva de los traslapes fonónicos en $\Delta'_M{}^N$ (ecuación (4.35)).

En la figura 5.5(d) se presenta un corte de los mapas para un valor fijo de $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Aquí, observamos como el fenómeno de desacoplamiento ocurre para un rango de valores muy estrecho en las aproximaciones basadas en la GRWA. También se aprecia una oscilación similar a la de la figura 5.3(b), característica de esta aproximación pero ahora en función de g_{am} .

A continuación se muestran los comportamientos de las razones de participación para los distintos enfoques pero para un valor fijo de $g_{ac}/\omega_m = 0.1$, fuera de la región de saturación discutida anteriormente.

Para $g_{am}/\omega_m = 0$, este valor de g_{ac} corresponde a estar justo a la izquierda de la región triangular de saturación mostrada en la figura 5.3.

En los mapas de las figuras 5.6 (a), (b) y (c) notamos que para valores grandes de g_{om}/ω_m con $g_{am}/\omega_m = 0$ empiezan a surgir los bordes de lo que sería la región

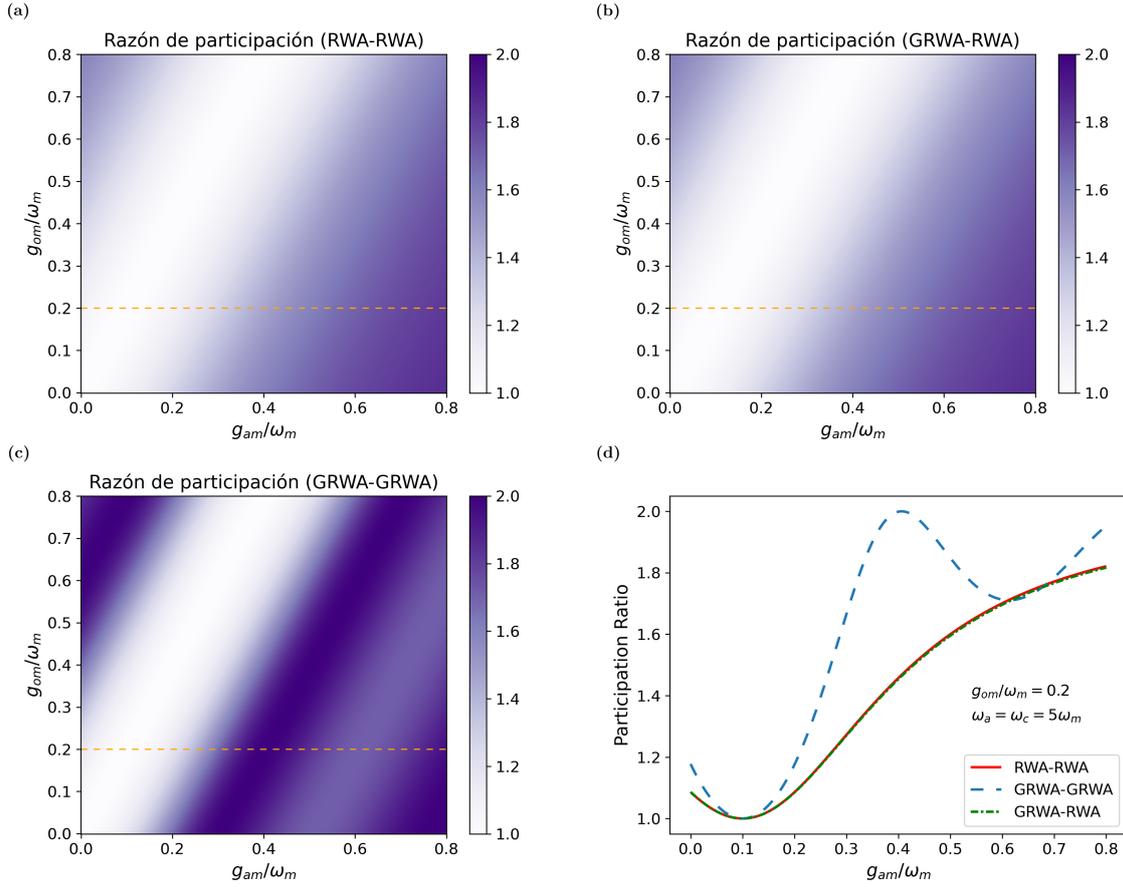


Figura 5.5: Razón de participación asociada al estado $|\Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fonón g_{am} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N,M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. (d) Corte de los mapas (a), (b) y (c) en función del acoplamiento átomo-fonón para $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$.

triangular de máximo entrelazamiento, como se muestra en las figuras 5.3. En el caso del enfoque GRWA-GRWA, esta estructura se encuentra ligeramente desplazada hacia acoplamientos más pequeños, lo que explica la saturación observada para valores por encima de $g_{om}/\omega_m = 0.5$. Además, en todos los mapas, se destaca una región donde el entrelazamiento alcanza un mínimo, y esta región está centrada nuevamente en la recta $g_{om} = 2g_{am}$, donde ocurre el fenómeno de cancelación del acoplamiento efectivo.

Otro aspecto a destacar es el comportamiento oscilatorio respecto a g_{am}/ω_m del entrelazamiento correspondiente al enfoque GRWA-GRWA. En la figura (d) se muestra un corte con la línea $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Aquí se observa un comportamiento que se asemeja a las oscilaciones características de estados GRWA fuera de resonancia en función del acoplamiento átomo-fotón (consulte la figura 2.8).

En resumen, los enfoques RWA-RWA y GRWA-RWA muestran muchas similitudes al describir el comportamiento de la razón de participación, con notables diferencias solo en acoplamientos átomo-fotón y optomecánico extremadamente grandes. Además, todos los enfoques predicen una región en la cual el sistema se desacopla debido a la cancelación del acoplamiento efectivo en \hat{H}_N . Por otro lado, el enfoque GRWA-GRWA exhibe oscilaciones respecto al parámetro de acoplamiento átomo-fonón, una característica que no está presente en las otras aproximaciones.

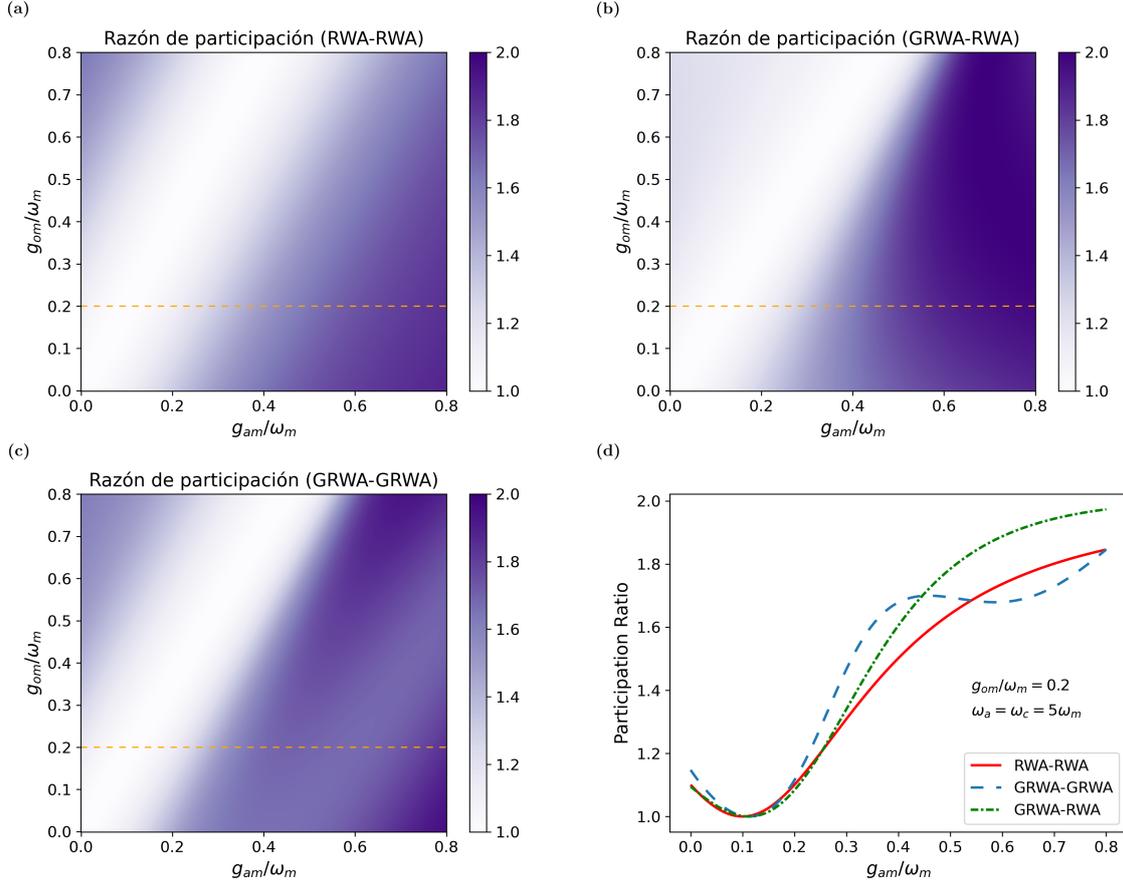


Figura 5.6: Razón de participación asociada al estado $|\Psi_{+,2}^{(0)}\rangle$ en función de los acoplamientos optomecánico g_{om} y átomo-fonón g_{am} para: (a) enfoque RWA-RWA $\xi_{N,M}^{rwa}$, (b) enfoque mixto $\xi_{N,M}^{mix}$ y (c) enfoque GRWA-GRWA $\xi_M^{(N)}$. (d) Corte de los mapas (a), (b) y (c) en función del acoplamiento átomo-fonón para $g_{om}/\omega_m = 0.2$. Se ha considerado la relación entre frecuencias $\omega_a = \omega_c = 5\omega_m$.

Capítulo 6

Dinámica cuántica en el sistema híbrido átomo-fotón-fonón

En este capítulo exploraremos diversas propiedades dinámicas del sistema híbrido átomo-fotón-fonón. En capítulos anteriores hemos demostrado que este sistema puede simplificarse a un hamiltoniano interactuante espín-bosón al estilo del modelo de Rabi. Esto plantea la pregunta sobre si se observarán en este sistema fenómenos dinámicos tales como rebotes de los paquetes de ondas en las cadenas de paridad [44, 61] o el famoso fenómeno de colapsos y resurgimientos (‘collapses and revivals’) [70, 71, 72].

En el contexto del modelo cuántico de Rabi, el fenómeno de colapso y resurgimiento describe la dinámica singular de la probabilidad de encontrar el sistema atómico en su estado base o excitado. Este fenómeno se caracteriza por un marcado descenso o colapso de la probabilidad, alcanzando un valor cercano al 50 %, en un intervalo de tiempo finito durante la evolución temporal del sistema. Posteriormente, emerge una fase de resurgimiento donde la probabilidad experimenta una recuperación significativa, manifestándose en oscilaciones periódicas que definen el comportamiento cuántico subyacente. El colapso se atribuye a la interferencia destructiva entre diversas componentes de frecuencia en el sistema, las cuales se desfazan con el tiempo, generando una transitoria pérdida de coherencia. No obstante, lo que hace interesante a este fenómeno

es su capacidad para revivir la probabilidad en tiempos posteriores. Este resurgimiento ocurre debido al reajuste de fase de las diversas frecuencias discretas, un proceso que no podría ocurrir en un sistema clásico donde las frecuencias tendrían un espectro continuo [31, 73]. Adicionalmente, el fenómeno de rebotes en las cadenas de paridad es otra manifestación interesante en la evolución temporal del sistema. Cuando el sistema inicia en un estado con una paridad definida, evoluciona como un paquete de ondas que se desplaza a través de estados con la misma paridad. Este paquete de ondas eventualmente regresa al estado inicial, exhibiendo así un comportamiento de rebote conservando la paridad del estado inicial [61].

En las primeras dos secciones nos enfocaremos en investigar los fenómenos descritos en el hamiltoniano híbrido, buscando demostrar que ambas características están presentes: el colapso y resurgimiento, así como los rebotes en las cadenas de paridad. En la última sección de este capítulo, motivados por los resultados presentados en [2], estudiaremos el sistema en presencia de pérdidas y su interacción con un baño térmico a temperatura finita mediante la ecuación maestra de la matriz densidad. Además, incorporaremos una fuente de bombeo coherente de fotones al sistema. Nuestro principal objetivo consistirá en destacar las discrepancias de las soluciones basadas en los enfoques RWA y GRWA con respecto a la solución numérica que incluye los términos anti-resonantes. Particularmente, investigaremos si la solución basada en el método GRWA tiene la capacidad de reproducir tanto el proceso de enfriamiento y amplificación del movimiento mecánico en el régimen de acoplamiento donde el modelo RWA-RWA se considera válido. Para lograr esto, inicialmente examinaremos un caso análogo al estudiado por Restrepo et al. [2], prestando especial atención al enfoque mixto. Para ello, primero determinaremos las frecuencias de resonancia a las cuales debemos ajustar la bomba para promover el proceso de enfriamiento o amplificación asistida de fonones y posteriormente resolveremos la dinámica del sistema abierto. Además, también exploraremos la estadística del sistema en el régimen estacionario ($t \rightarrow +\infty$) mediante las correlaciones de segundo orden y demostraremos las diferencias con los resultados

previamente obtenidos por Restrepo et al. Por último, mediante el empleo del enfoque completamente GRWA, siguiendo un procedimiento similar exploraremos un escenario más allá de los límites de la aproximación basada en la RWA. Nuestra intención es evidenciar como estas características particulares se modifican en el régimen de acoplamiento fuerte y mostrar que pueden ser descritas razonablemente utilizando el enfoque GRWA.

Para abordar estos casos, inicialmente utilizaremos la densidad conjunta de estados para determinar las frecuencias de resonancia. Esta cantidad cuantifica la probabilidad de las transiciones promovidas por la fuente externa $\hat{V}_p = F_p(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t})$ para cada valor de frecuencia, y en términos generales, se define de la siguiente manera

$$D(\omega_p) = \sum_{A,A'} |\langle \Psi_A | \hat{V}_p | \Psi_{A'} \rangle|^2 \delta[\hbar\omega_p - (E_A - E_{A'})], \quad (6.1)$$

donde E_A es la energía asociada al estado $|\psi_A\rangle$ y la suma se realiza sobre todas las transiciones permitidas entre estados separados por una energía $\hbar\omega_p$.

Después de identificar las transiciones inducidas por la fuente externa, procederemos a utilizar la ecuación de Lindblad. Esta ecuación constituye una extensión de la ecuación de Liouville-von Neumann, adaptada de manera específica para abordar sistemas cuánticos abiertos. A continuación, presentamos la formulación general de la ecuación de Lindblad [74]

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -i[H(t), \hat{\rho}(t)] + \sum_n \frac{\gamma_n}{2} [2\hat{A}_n \hat{\rho}(t) \hat{A}_n^\dagger - \hat{\rho}(t) \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n - \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n \hat{\rho}(t)], \quad (6.2)$$

en donde $H(t)$ es el hamiltoniano total del sistema, $\hat{\rho}(t)$ la matriz densidad al tiempo t , \hat{A}_n son los operadores a través de los cuales el entorno se acopla al sistema y γ_n las respectivas tasas de decaimiento. Esta formulación tiene en cuenta la interacción del sistema con su entorno, permitiendo la descripción de procesos de decaimiento, decoherencia y aleatorización de la fase. A pesar de que la dinámica resultante ya no es unitaria, la ecuación de Lindblad mantiene su propiedad de ser conservadora de la

traza y positiva definida, independientemente de la condición inicial.

Cabe mencionar que nos limitaremos a un régimen en el cual la fuente externa proporciona únicamente la cantidad de energía necesaria para inducir transiciones de estados con cero polaritones a estados con un polaritón. Además, en todos los escenarios considerados, fijaremos $\omega_a = \omega_c = 100\omega_m$ y $g_{ac}/\omega_m = 0.5$, lo que resulta en una resonancia $R_N = \omega_m$ o $T'_N = \omega_m$ que promoverá la creación o aniquilación de fonones. En cada caso especificaremos los valores de los acoplamientos g_{om} y g_{am} , que dados los parámetros anteriores no tienen un efecto significativo en el valor de T'_N .

6.1. Rebotes de fotones dentro de las cadenas de paridad

Consideremos el operador de paridad de la ecuación (2.12). Similar al hamiltoniano Cuántico de Rabi (2.11), el hamiltoniano híbrido (4.2) también exhibe invariancia bajo la transformación $\hat{P}\hat{H}_{full}\hat{P} = \hat{H}_{full}$. Esta propiedad está asociada a una simetría de paridad y podemos expresarla mediante la relación de conmutación

$$[\hat{P}, \hat{H}_{full}] = 0. \quad (6.3)$$

Este resultado implica que el espacio de Hilbert del hamiltoniano completo puede ser descompuesto en dos subespacios de distinta paridad. Como veremos a continuación, una de las consecuencias fundamentales de esta simetría es que los estados propios del sistema pertenecerán exclusivamente a uno de los subespacios de paridad y evolucionarán únicamente dentro de ese subconjunto.

En la Figura 6.1, se representa la evolución de la estadística de los fotones de un estado inicial a lo largo de un periodo de $2\pi/\omega_c$. Observamos cómo la probabilidad, concentrada en el estado $|+z, 0\rangle$, se dispersa inicialmente hacia estados con un mayor número de fotones en forma de un paquete de ondas. Este proceso de evolución ocurre

exclusivamente en la cadena de paridad $P = -1$ (consulte figura 2.2). A medida que el paquete alcanza un límite energético específico, experimenta un rebote y redistribuye su población hacia estados con un menor número de fotones, eventualmente regresando a un estado muy similar al inicial.

En el contexto del modelo cuántico de Rabi, se ha demostrado que al considerar combinaciones lineales o estados más complejos, surgen propagaciones en ambas direcciones e interferencias entre los paquetes de ondas [61]. Cabe destacar que el caso presentado anteriormente es uno de los ejemplos más simples y fue elegido solo para mostrar que este fenómeno también sucede para el hamiltoniano átomo-fotón-fonón.

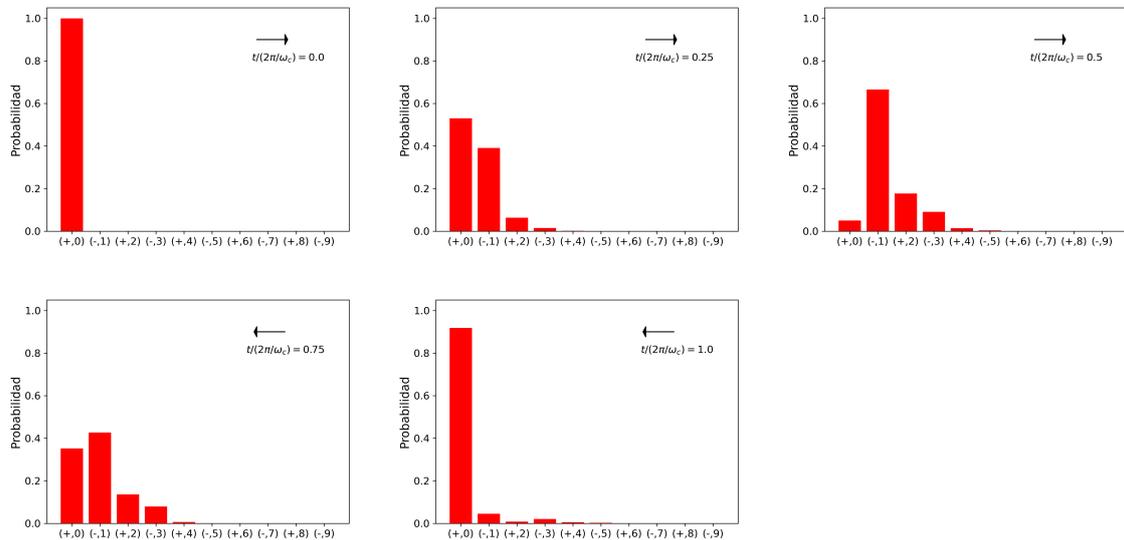


Figura 6.1: Dinámica de rebote de un paquete de ondas de fotones en una cadena de paridad. El estado inicial utilizado fue $|\psi_0\rangle = |+z, N = 0\rangle |M = 1\rangle$. Se empleó la relación de frecuencias $\omega_a = \omega_c = 100 \omega_m$, y los acoplamientos $g_{ac}/\omega_m = 0.5$ y $g_{om}/\omega_m = 0.1$.

6.2. Colapso y resurgimiento de las probabilidades de ocupación

El fenómeno de colapso y resurgimiento en un sistema cQED normalmente se observa en las poblaciones atómicas. Sin embargo, por la correspondencia de variables

debido a la forma reducida del hamiltoniano híbrido (4.25), centraremos el análisis en la probabilidad de ocupación del estado $|\psi_{-,0}^{grwa}\rangle$.

En el caso del modelo de Jaynes-Cummings se sabe que si el sistema se encuentra en un estado de la forma $|-z\rangle|\alpha\rangle$, donde $|-z\rangle$ es el estado propio de $\hat{\sigma}_z$ y $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle$ un estado coherente, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado base está dada por la formula [75, 31]:

$$P_g^{JC}(t) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \cos(\Omega_N t) \right). \quad (6.4)$$

En la Figura 6.2(a), se ha evaluado la fórmula (6.4) para el caso específico de $g_{ac}/\omega_c = 0.025$ y $|\alpha| = 3$. En esta representación, se aprecia cómo a medida que transcurre el tiempo, el sistema experimenta un colapso en la probabilidad, seguido por un resurgimiento. Este resurgimiento tiene una duración aproximada de $t_c = 2\pi|\alpha|/g_{ac}$ [31].

Centrándonos nuevamente en el sistema híbrido, consideramos el estado inicial $|\psi\rangle = |\psi_{-,0}^{grwa}\rangle|\alpha = 3\rangle$ y el hamiltoniano \hat{H}_{full} (4.2), en el cual el acoplamiento optomecánico se fija en $g_{om}/\omega_m = 0.05$ con $g_{am} = 0$. A pesar de que estamos utilizando el hamiltoniano completo, es importante notar que, para estos valores específicos, el acoplamiento efectivo en el hamiltoniano aproximado (3.45) es $g_{eff}^{(0)}/\omega_m \approx 0.025$. La Figura 6.2(b) ilustra la probabilidad de medir el estado $|\psi_{-,0}^{grwa}\rangle$. En esta gráfica observamos una notable similitud con los resultados de la fórmula (6.4), con algunas fluctuaciones en el periodo de colapso. Esto revela que el sistema híbrido presenta el fenómeno de colapso y resurgimiento respecto a la población de los estados GRWA $|\psi_{\pm,N}^{grwa}\rangle$ y puede tratarse de manera efectiva mediante la teoría del modelo de Jaynes-Cummings, siempre y cuando estemos en este régimen particular.

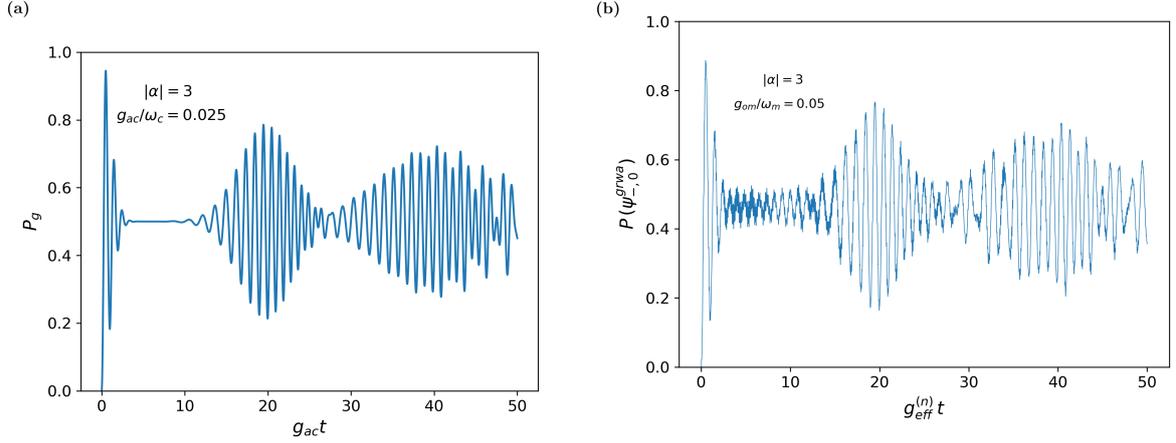


Figura 6.2: (a) Probabilidad de medir el estado fundamental atómico $| -z \rangle$ en función de $g_{ac} t$ para el estado inicial $| -z \rangle |\alpha = 3 \rangle$ en el modelo de Jaynes-Cummings. (b) Probabilidad de medir el estado $|\psi_{-0}^{grwa}\rangle$ en función de $g_{eff}^{(0)} t$ para el estado inicial $|\psi_{-0}^{grwa}\rangle |\alpha = 3 \rangle$ en el sistema híbrido.

6.3. Enfriamiento y amplificación asistida del oscilador mecánico

6.3.1. Enfoque Mixto en el régimen resonante de acoplamiento débil

Densidad conjunta de estados

El primer paso en el estudio del enfriamiento o amplificación del movimiento mecánico asistido implica el cálculo de la densidad espectral conjunta. Esta cantidad cuantifica la probabilidad de las transiciones promovidas por la fuente externa $\hat{V}_p = F_p(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t})$ y la sitúa en el valor de frecuencia igual a la diferencia de energías entre los estados. Aunque la definición formal engloba todas las transiciones posibles entre los estados propios del sistema, dada la naturaleza del régimen propuesto, en este estudio nos limitamos a considerar específicamente las combinaciones de estados propios del espectro que involucran cero polaritones junto con aquellos que contienen un polaritón.

Por lo anterior, la densidad espectral conjunta para los estados polaritónicos del

enfoque mixto se reduce a la siguiente expresión

$$D(\omega) = \sum_{S,M,M'} [|\langle \Psi_M | \hat{V}_p | \Psi_G^{(0)} \rangle|^2 \delta(\omega - (E_M - E_G^{(0)})) + |\langle \Psi_M | \hat{V}_p | \Psi_{S,M}^{(0)} \rangle|^2 \delta(\omega - (E_M - E_{S,M}^{(0)}))] \quad (6.5)$$

Las energías y estados utilizados corresponden a las ecuaciones (4.29), (4.30), (4.38), (4.39), (4.40) y (4.42).

En la figura 6.4 se presentan dos casos del cálculo de la densidad espectral conjunta, abarcando todos los enfoques para el sistema híbrido analizados en este estudio, incluyendo la solución numérica exacta. Con el objetivo de presentar los resultados de manera más clara, realizamos la convolución de la densidad espectral con una Lorentziana de ancho γ_c en todos los escenarios. Esta convolución asegura que cada valor puntual de la delta tenga ahora un ancho equivalente a la tasa a la cual el sistema pierde fotones.

La figura 6.4(a), asociada al caso $g_{om}/\omega_m = 0.001$, exhibe dos resonancias en las frecuencias $\omega_p = \omega_c \pm \omega_m/2$. Estas resonancias corresponden a transiciones de estados con cero polaritones $|\Psi_M\rangle$ hacia estados del doblete $|\Psi_{\pm,M}^{(0)}\rangle$ con un polaritón. En el caso del enfoque RWA-RWA, la frecuencia más baja se relaciona con el proceso de enfriamiento asistido del oscilador mecánico, mientras que la más alta corresponde al caso contrario. Ambos procesos se ilustran a continuación en la figura 6.3.

En la figura 6.3 observamos cómo los fotones de la fuente externa excitan el subespacio polaritónico átomo-fotón y promueven el estado base RWA con ($N_R^{rwa} = 0$) a un estado vestido que pertenece al doblete $N = 0$ ($N_R^{rwa} = 1$) sin afectar el número de fonones. Luego, la resonancia $R'_N = \omega_m$ y la interacción efectiva polaritón-fonón ($g_{om}/2$) inducen un proceso de absorción (emisión) de un fonón y la transición al estado contrario del doblete RWA. Posteriormente, debido a la fuga de electrones y fotones por la interacción con el entorno, este estado vuelve a decaer al estado base RWA pero ahora con un número menor (mayor) de fonones y el proceso se repite. Es evidente

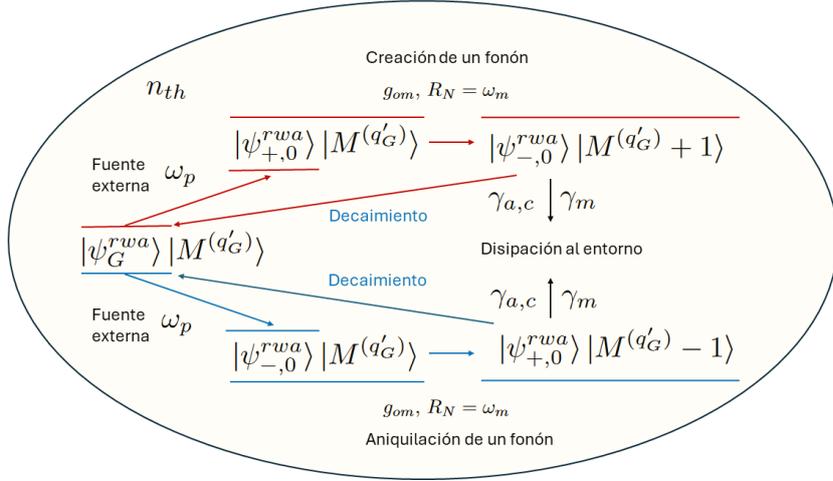


Figura 6.3: Proceso de enfriamiento (líneas inferiores color azul) y amplificación (líneas superiores color rojo) de las oscilaciones mecánicas. El sistema se encuentra interactuando con una fuente externa de fotones de frecuencia ω_p y en contacto un baño térmico con un número promedio de fonones n_{th} . La tasa de disipación de los electrones, fotones y fonones son γ_a , γ_c y γ_m , respectivamente.

que a medida que evoluciona el sistema, el estado perderá coherencia y formará un estado mezclado, sin embargo, el proceso descrito anteriormente es crucial para lograr el enfriamiento o amplificación asistida del oscilador mecánico.

Regresando a la densidad espectral, a medida que el acoplamiento optomecánico experimenta un aumento, se observa una modificación en las magnitudes de las resonancias en la densidad espectral. Diferentes resonancias que inicialmente estaban próximas ahora se separan, dando lugar a dos estructuras distintas centradas alrededor de $\omega_p = \omega_c \pm \omega_m/2$. Estas estructuras se concentran en dos valores específicos que corresponden a la diferencia energética entre los estados $|\psi_G^{grwa}\rangle$ y $|\psi_{\pm,0}^{grwa}\rangle$.

La gráfica 6.4(b) ejemplifica este fenómeno para $g_{om}/\omega_m = 0.1$. Resaltamos dos puntos, A y B, que corresponden a las transiciones de $|\Psi_2\rangle \rightarrow |\Psi^{(0)\mp, 1}\rangle$, respectivamente, así como los puntos C y D, los cuales están asociados a las transiciones $|\Psi_2\rangle \rightarrow |\Psi^{(0)\mp, 2}\rangle$. El espaciado entre cada par de puntos corresponde aproximadamente a $\sqrt{M+1}g_{om}$, que coincide precisamente con la diferencia energética entre los estados $|\Psi^{(0)\pm, M}\rangle$.

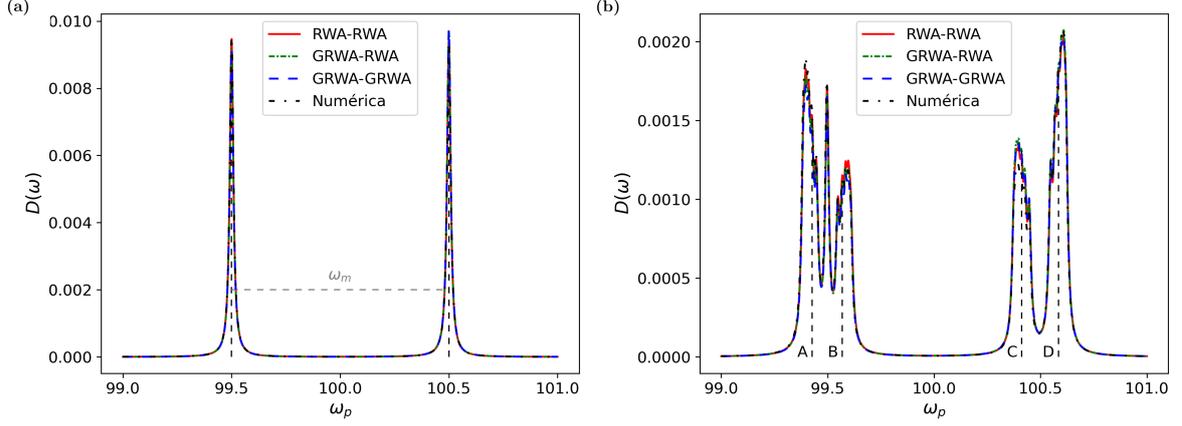


Figura 6.4: Densidad espectral para los distintos enfoques y la solución numérica exacta. El panel (a) corresponde a un acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$, mientras que el panel (b) considera un acoplamiento más fuerte de $g_{om}/\omega_m = 0.1$. En todos los casos se consideró $N = 0$ para los estados vestidos y las combinaciones que resultan de $M, M' = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Es posible seleccionar ópticamente estas resonancias y facilitar diversas transiciones con ayuda de la fuente externa, desencadenando así el ciclo descrito en la figura (6.3). No obstante, como veremos en la siguiente sección, el término de interacción en el hamiltoniano del enfoque GRWA-RWA y la solución numérica que incorpora los términos anti-resonantes, provocan que este proceso se desarrolle de una manera diferente. Esto se refleja en un desplazamiento de las resonancias asociadas con los procesos de enfriamiento y amplificación hacia otros valores.

Amplificación y enfriamiento asistido

En esta sección, se abordó el cálculo del estado estacionario del sistema en el límite temporal $t = \infty$, explorando distintas frecuencias para la fuente externa y considerando disipación y la interacción con un baño térmico con $n_{th} = 2$ fonones promedio.

La evolución temporal del sistema se modeló mediante la ecuación de Lindblad, expresada como

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H} + \hat{V}_p, \hat{\rho}] + \gamma_{ac}\mathcal{L}[\hat{a}]\hat{\rho} + \gamma_{ac}\mathcal{L}[\hat{\sigma}_-]\hat{\rho} + n_{th}\gamma_m\mathcal{L}[\hat{b}^\dagger]\hat{\rho} + (n_{th} + 1)\gamma_m\mathcal{L}[\hat{b}]\hat{\rho}. \quad (6.6)$$

Los parámetros γ_c, γ_a y γ_m representan las tasas de disipación asociadas con la pérdida de fotones, electrones y fonones, respectivamente. Además, n_{th} denota el número promedio de fonones en el baño térmico. El término de bombeo coherente $\hat{V}_p(t) = F_p(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t})$ modela la interacción del sistema con una fuente externa que suministra fotones de frecuencia ω_p con una intensidad de F_p . El hamiltoniano \hat{H} varía según el caso considerado. Específicamente, para el enfoque GRWA-RWA, empleamos una descomposición espectral para describir el hamiltoniano ya que no contábamos con una forma cerrada.

La solución de esta ecuación se obtuvo numéricamente utilizando como estado inicial el eigenestado $|\Psi_2\rangle$ correspondiente a cada enfoque. Para los casos con un acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$, se utilizó un factor de calidad de $Q = \omega_{a,c,m}/\gamma_{a,c,m} = 10^6$ y una potencia de bombeo de $Fp/\omega_m = 0.01$, mientras que en los casos con acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.1$, se consideró un factor de calidad de $Q = \omega_{a,c,m}/\gamma_{a,c,m} = 10^4$ y nuevamente una potencia de bombeo de $Fp/\omega_m = 0.01$. Además, para el enfoque RWA-RWA y el hamiltoniano completo se utilizó una base finita de tamaño $2 \times 12 \times 14$ para describir el sistema de dos niveles, fotones y fonones, respectivamente. Sin embargo, para la solución basada en el enfoque GRWA, solo fue posible emplear una base de $2 \times 10 \times 12$ debido a una mayor demanda computacional.

En la Figura 6.5(a), se presentan las resonancias asociadas con la ganancia o pérdida de fonones del oscilador mecánico respecto al valor promedio del baño térmico, considerando un acoplamiento optomecánico pequeño. Observamos que el enfoque RWA-RWA coincide con las resonancias encontradas en la densidad espectral de la figura 6.4(a), mientras que las del enfoque mixto están desplazadas hacia valores más pequeños y grandes en los casos de enfriamiento y amplificación, respectivamente. También se aprecia que la solución del hamiltoniano completo exhibe un comportamiento más complejo con resonancias secundarias alrededor de estos valores.

En la Figura 6.5(b), se investiga este fenómeno con un acoplamiento optomecánico

más pronunciado. Nuevamente, el enfoque RWA-RWA muestra una excelente concordancia con las resonancias observadas en la densidad espectral (figura 6.4(b)). Es evidente cómo, debido a la presencia de los términos anti-resonantes en el hamiltoniano completo, este proceso se amplifica y extiende a un rango mayor de frecuencias en comparación con la solución RWA-RWA. Incluso llega a aproximarse a cero fonones en la región de enfriamiento y alcanza hasta 12 fonones en la región de amplificación. La solución basada en la GRWA exhibe notables similitudes con la solución del hamiltoniano completo; sin embargo, se observa que presenta disminuciones fonónicas muy particulares cuando la frecuencia de la fuente externa se acerca a la de la cavidad ($\omega_p/\omega_c \approx 1$). Además, se evidencia una ganancia de fonones cercana a la región de enfriamiento.

En el caso de la solución numérica, es relevante señalar que el sistema puede evolucionar a lo largo de diversas cadenas de paridad y no se encuentra restringido a un subespacio específico de 2×2 . Esto implica que el sistema estará sujeto a otros procesos además del descrito en la Figura 6.3 que involucran un mayor número de fonones.

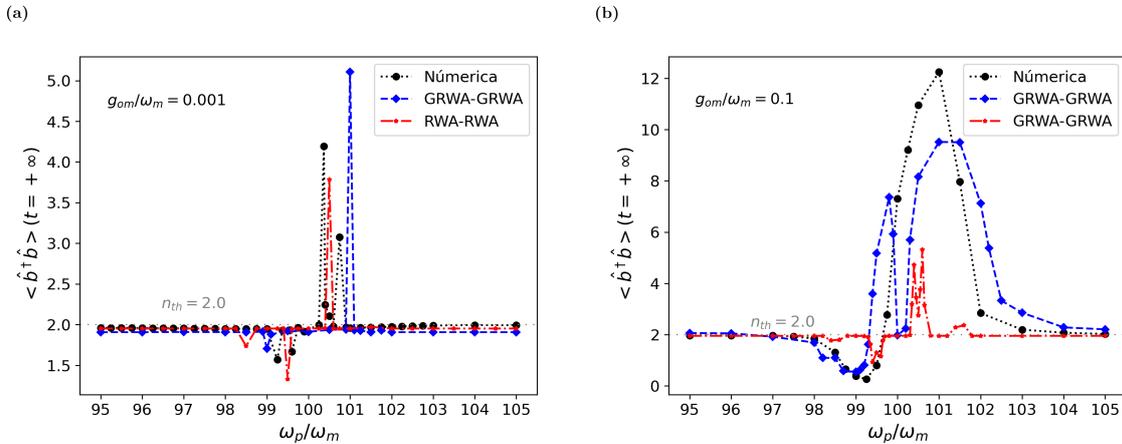


Figura 6.5: Población de fonones en el régimen estacionario ($t = \infty$) en función de las frecuencias de bombeo ω_p/ω_m para los distintos enfoques. El panel (a) corresponde al acoplamiento $g_{om}/\omega_m = 0.001$, mientras el caso (b) corresponde a $g_{om}/\omega_m = 0.1$.

Función de correlación de segundo orden del estado estacionario

La estadística de fonones, específicamente las autocorrelaciones de segundo orden definidas como $g^{2(0)} = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} \rangle / \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle^2$ para los casos previamente mencionados, se

muestra en la gráfica 6.6. En el panel (a), se aprecia que en la región de enfriamiento, el sistema muestra una tendencia a emitir fonones con un mayor agrupamiento (*bunching*), mientras que en la región de amplificación sucede lo contrario. En el panel (b), se observa un patrón similar; sin embargo, se destaca que en la región de amplificación, tanto la solución GRWA como la numérica comienzan a entrar en el régimen de anti-*bunching*. Además, la solución GRWA presenta un máximo en la zona de mayor pérdida de fonones, que corresponde al régimen fuerte de agrupamiento (*strong phonon bunching regime*) (figura 6.3 (b)).

Se ha verificado que la ausencia del sistema de dos niveles y la falta de acoplamiento entre el átomo y la cavidad ($g_{ac} = 0$) anulan el fenómeno de enfriamiento y amplificación, dando como resultado una estadística constante de fonones.

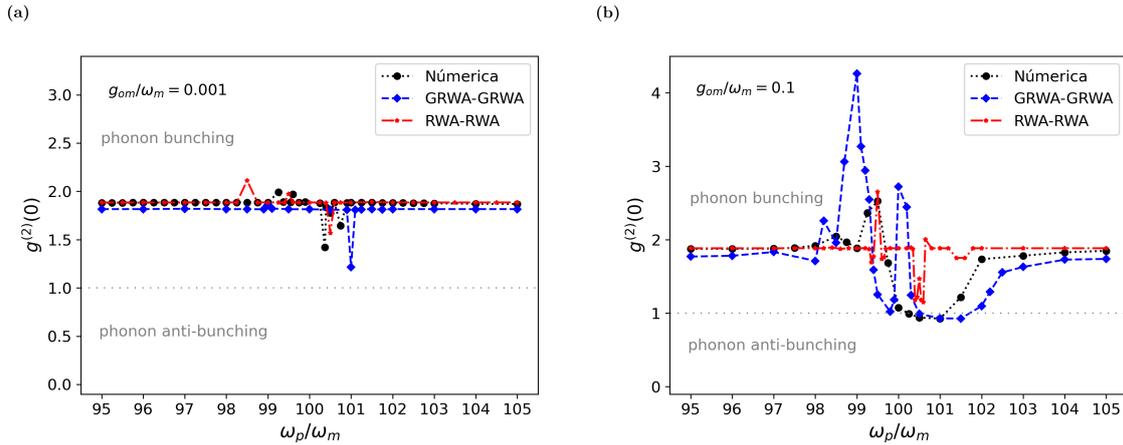


Figura 6.6: Función de autocorrelación de segundo orden estacionaria para diferentes frecuencias de la fuente externa. El panel (a) corresponde al caso $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y el panel (b) al caso $g_{om}/\omega_m = 0.1$.

6.3.2. Enfoque completamente GRWA en el régimen resonante de acoplamiento fuerte

A continuación, examinaremos un caso de acoplamiento fuerte que se extiende más allá de los límites de la aproximación RWA-RWA. En este análisis, emplearemos el enfoque completamente GRWA, que ha demostrado un buen comportamiento al describir el espectro energético en este régimen. Llevaremos a cabo una comparación con la

solución numérica, similar a lo realizado en la sección anterior. Para este caso, consideraremos un acoplamiento optomecánico $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y un acoplamiento átomo-fonón de $g_{am} = 0.4$.

Densidad conjunta de estados

En la figura 6.7(a), se aprecia que todas las transiciones inducidas por la fuente externa se sitúan nuevamente en los valores de $\omega_p = \omega_c \pm \omega_m/2$. En la figura (b), correspondiente a un acoplamiento 100 veces mayor, se observa cómo la densidad espectral asociada al enfoque GRWA presenta máximos similares a los de la solución del hamiltoniano completo. También notamos que los otros enfoques muestran numerosas resonancias en diferentes ubicaciones, y presentan similitudes entre sí. Sin embargo, es crucial señalar que la fidelidad de los estados propios de estas aproximaciones no es muy alta en comparación con la solución numérica, por lo que no serán considerados en las análisis posteriores.

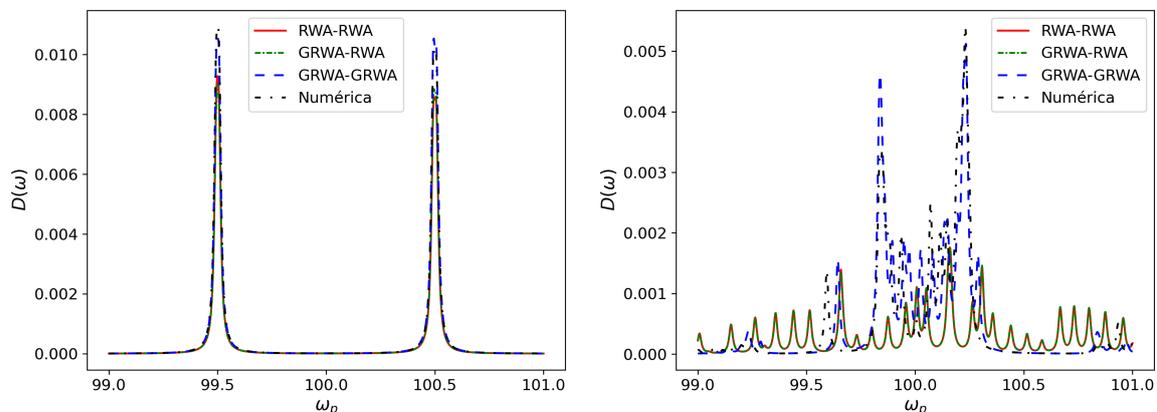


Figura 6.7: Densidad espectral para los distintos enfoques y la solución numérica exacta. El panel (a) corresponde a un acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y un acoplamiento átomo-fonón $g_{am}/\omega_m = 0.004$, mientras que el panel (b) considera un acoplamiento de $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{om}/\omega_m = 0.4$. En todos los casos se considero $N = 0$ para los estados vestidos y las combinaciones que resultan de $M, M' = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Amplificación y enfriamiento optomecánico asistido por el átomo

En la figura 6.8(a), correspondiente a un acoplamiento pequeño, se observa cómo la solución completa coincide con las resonancias en la densidad espectral, y nuevamente hay un desplazamiento de la solución GRWA sobre estas resonancias. A medida que aumentamos los acoplamientos, en la figura 6.8(b) notamos cómo la solución GRWA tiende a parecerse más a la solución numérica, exhibiendo un comportamiento muy razonable en comparación con la solución numérica exacta. Es importante recordar que esta curva fue calculada utilizando una base más reducida que en el otro caso. El cálculo de 2 puntos clave con una base ligeramente mayor confirma que las similitudes aumentan conforme se incrementa el tamaño de la base utilizada para describir el sistema.

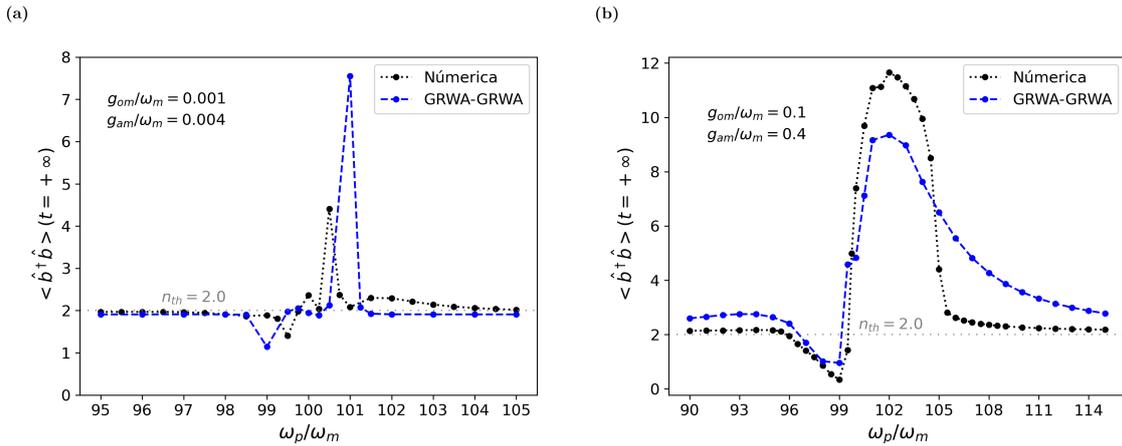


Figura 6.8: Población de fonones en el régimen estacionario ($t = \infty$) en función de las frecuencias de bombeo ω_p/ω_m para los distintos enfoques. El panel (a) corresponde al acoplamiento optomecánico de $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y un acoplamiento átomo-fonón $g_{am}/\omega_m = 0.004$, mientras el caso (b) corresponde a los acoplamientos $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{am}/\omega_m = 0.4$.

Función de correlación de segundo orden del estado estacionario

En los paneles (a) y (b) de la figura 6.9, se reitera el comportamiento previamente mencionado para la función de autocorrelación de segundo orden. Destaca nuevamente el rendimiento de la solución GRWA, especialmente en situaciones de acoplamientos

fuertes. Esta observación refuerza la robustez y eficacia de la aproximación GRWA en escenarios donde las interacciones son significativas.

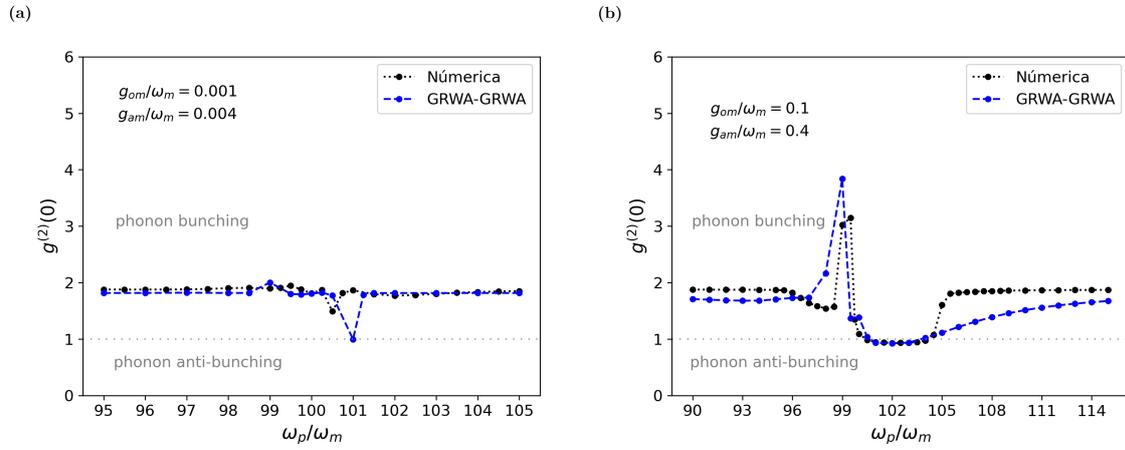


Figura 6.9: Función de autocorrelación de segundo orden estacionaria para diferentes frecuencias de la fuente externa. El panel (a) corresponde al caso de acoplamiento optomecánico $g_{om}/\omega_m = 0.001$ y átomo-fonón $g_{am}/\omega_m = 0.004$ y el panel (b) al caso $g_{om}/\omega_m = 0.1$ y $g_{am}/\omega_m = 0.4$.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo, se inició con una revisión del modelo Cuántico de Rabi y sus propiedades. A continuación, se presentan las principales conclusiones:

- Se exploraron varias aproximaciones al modelo cuántico de Rabi, incluyendo el conocido modelo de Jaynes-Cummings, la aproximación adiabática y la aproximación de onda rotante *Generalizada* (GRWA). Este análisis permitió identificar las fortalezas y limitaciones de cada enfoque, proporcionando así una evaluación más completa de su aplicabilidad en diversos contextos y condiciones.
- Se examinó el entrelazamiento de los estados propios mediante un cuantificador para sistemas bipartitos derivado del número de Schmidt. Se demostró que la GRWA reproduce fielmente el comportamiento de entrelazamiento, presentando mínimos y máximos en función del parámetro de acoplamiento átomo-fotón. Sin embargo, se observaron dificultades de la GRWA al describir el espectro energético y el entrelazamiento en situaciones de acoplamientos muy grandes, cuando la frecuencia atómica supera a la de la cavidad.

Por otra parte, al seguir la estrategia de la GRWA diseñada para el régimen de acoplamiento fuerte del modelo cuántico de Rabi, se logró aplicar esta aproximación a un sistema átomo-fotón-oscilador. Este modelo híbrido, introducido por Restrepo et

al. [2], tiene la interacción átomo-fotón dada por el modelo de Jaynes-Cummings, asumiendo un acoplamiento débil y cuasi-resonancia (RWA). A continuación, se presentan las conclusiones más destacadas derivadas de este estudio:

- La aplicación del método GRWA nos permitió descomponer el hamiltoniano híbrido completo en un conjunto infinito de bloques 2×2 , cada uno descrito por un modelo espín-bosón y caracterizado por una cantidad conservada. En este contexto, los estados vestidos átomo-fotón (polaritones) desempeñan el papel del átomo de dos niveles, mientras que la parte bosónica está representada por los modos mecánicos cuantizados. Este modelo efectivo de Rabi se trató, a su vez, con otra GRWA o RWA, dando lugar al desarrollo de dos enfoques: uno completamente GRWA (GRWA-GRWA) y otro mixto (GRWA-RWA).
- El enfoque completamente GRWA se destacó como la mejor de todas las aproximaciones, en la descripción precisa del espectro energético y de los estados propios en presencia de acoplamientos optomecánicos significativos desde el régimen de acoplamiento átomo-fotón débil hasta el régimen de acoplamiento fuerte. Sin embargo, se observaron ciertas limitaciones al enfrentar la transición hacia la región de acoplamiento ultrafuerte, particularmente en relación con los estados $S = -$.
- El enfoque mixto GRWA-RWA también mostró una excelente concordancia con la solución numérica exacta en un amplio rango de acoplamientos átomo-fotón, desde el régimen de acoplamiento débil hasta el régimen de acoplamiento ultrafuerte profundo, especialmente cuando el acoplamiento optomecánico no era demasiado grande. Sorprendentemente, incluso superó al enfoque GRWA-GRWA en esta región. Sin embargo, a diferencia de este último, en general presentó dificultades al describir estados muy energéticos.
- Ambos enfoques GRWA exhibieron problemas cuando la frecuencia del átomo superaba a la de los fotones en la cavidad. Sin embargo, demostraron un desem-

peño excelente en situaciones donde la frecuencia de los fotones superaba a la del átomo en la cavidad, especialmente el enfoque mixto describiendo los estados $S = -$. Esto resalta la notable capacidad del tratamiento GRWA para manejar estas condiciones.

- Al introducir un acoplamiento adicional átomo-fonón, el enfoque completamente GRWA destacó significativamente sobre los demás, especialmente en casos de acoplamiento átomo-fotón moderado y estados energéticos. En contraste, los demás enfoques solo exhibieron un buen rendimiento en situaciones de acoplamientos reducidos.

Es importante mencionar que, el uso de los estados adiabáticos implica la interferencia entre estados fotónicos desplazados en direcciones opuestas, y en el caso del enfoque completamente GRWA, también entre estados fonónicos desplazados. Como consecuencia, los acoplamientos efectivos, las frecuencias y las desintonías polaritón-fonón introducen oscilaciones en las energías, que siguen de cerca aquellas de la solución numérica. Estas oscilaciones están ausentes en el tratamiento RWA-RWA del modelo híbrido [2], lo que contribuyó al desempeño inferior de esta aproximación.

En términos de entrelazamiento polaritón-fonón, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Debido al carácter analítico de los enfoques desarrollados en este trabajo, se derivó una expresión cerrada para la razón de participación de los estados GRWA-RWA y GRWA-GRWA del hamiltoniano tripartito. Esta cantidad reveló una estructura con máximos y mínimos, a diferencia del comportamiento monótono de la solución RWA.
- El enfoque GRWA-GRWA mostró una característica única, la presencia de oscilaciones en el entrelazamiento polaritón-fonón con respecto a los acoplamientos. Además, este enfoque se distinguió al predecir entrelazamiento en regiones de acoplamiento donde otras soluciones no lo hicieron.

Respecto a la dinámica del sistema híbrido.

- Se evidenció que el hamiltoniano híbrido exhibe el fenómeno de rebotes en las cadenas de paridad, atribuible a su simetría de paridad inherente.
- Se demostró que el fenómeno de colapso y resurgimiento ocurre en el sistema híbrido, y su descripción puede realizarse eficazmente utilizando la teoría desarrollada para el modelo de Jaynes-Cummings, en el régimen de acoplamiento adecuado.

En cuanto al enfriamiento y amplificación asistida del oscilador mecánico:

- Se demostró que la inclusión de los términos anti-resonantes en el hamiltoniano completo introduce modificaciones significativas en las frecuencias predichas por el enfoque RWA-RWA. Estas alteraciones inciden en las condiciones en las que el número de fonones experimenta incrementos o disminuciones en relación con la temperatura del baño.
- El enfoque basado en la GRWA logró capturar en gran medida estos desplazamientos de las resonancias, ofreciendo una descripción adecuada del número de fonones para diversas frecuencias de bombeo. Sin embargo, se observaron algunas discrepancias importantes en comparación con la solución numérica.
- Se identificó que el sistema entra en el régimen de emisión coherente de fonones o fuertemente en bunches cuando se encuentra en la zona de enfriamiento o amplificación, respectivamente, revelando comportamientos de la estadística más allá de su dinámica normal.
- El enfoque GRWA-GRWA demostró ser eficaz para describir de manera adecuada el proceso de enfriamiento y amplificación en un régimen que va más allá de los límites de la aproximación RWA-RWA.

En conclusión, con el aumento constante de experimentos en diversas configuraciones que revelan nuevos fenómenos ópticos en los regímenes de acoplamiento ultrafuerte y ultrafuerte profundo de la interacción luz-materia, tal como se describe en el modelo cuántico de Rabi [33], y la creciente atención e investigación en el acoplamiento optomecánico, se abre la posibilidad de observar fenómenos y efectos novedosos en el régimen de acoplamiento fuerte de la interacción átomo-fotón-fonón.

Este trabajo establece una base sólida para explorar fenómenos como fases geométricas, correlaciones cuánticas, estadísticas de cuasipartículas y enfriamiento del movimiento mecánico asistido por polaritones, entre otras propiedades de la dinámica cuántica en el régimen de acoplamiento fuerte. La diversidad de comportamientos y propiedades observadas en este estudio ofrece oportunidades para investigaciones detalladas y experimentos futuros que contribuyan a una comprensión más profunda de la interacción átomo-fotón-fonón en el régimen de acoplamiento fuerte.

Bibliografía

- [1] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin, and K. C. Schwab, [Phys. Rev. B **72**, 195410 \(2005\)](#).
- [2] J. Restrepo, C. Ciuti, and I. Favero, [Phys. Rev. Lett. **112**, 013601 \(2014\)](#).
- [3] Q. Xie, H. Zhong, M. T. Batchelor, and C. Lee, [J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 113001 \(2017\)](#).
- [4] I. I. Rabi, [Phys. Rev. **49**, 324 \(1936\)](#).
- [5] I. I. Rabi, [Phys. Rev. **51**, 652 \(1937\)](#).
- [6] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, [Rev. Mod. Phys. **75**, 281 \(2003\)](#).
- [7] J. S. Pedernales, I. Lizuain, S. Felicetti, G. Romero, L. Lamata, and E. Solano, [Sci. Rep. **5** \(2015\)](#).
- [8] M.-L. Cai, Z.-D. Liu, W.-D. Zhao, Y.-K. Wu, Q.-X. Mei, Y. Jiang, L. He, X. Zhang, Z.-C. Zhou, and L.-M. Duan, [Nat. Commun. **12** \(2021\)](#).
- [9] D. Lv, S. An, Z. Liu, J.-N. Zhang, J. S. Pedernales, L. Lamata, E. Solano, and K. Kim, [Phys. Rev. X **8**, 021027 \(2018\)](#).
- [10] J. P. Reithmaier, G. Sęk, A. Löffler, C. Hofmann, S. Kuhn, S. Reitzenstein, L. V. Keldysh, V. D. Kulakovskii, T. L. Reinecke, and A. Forchel, [Nature **432**, 197 \(2004\)](#).

- [11] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, [Nat. Phys.](#) **6**, 772 (2010).
- [12] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, [Nature](#) **445**, 515 (2007).
- [13] M. A. Kmetcic and W. J. Meath, [Phys. Rev. A](#) **41**, 1556 (1990).
- [14] A. Brown, W. J. Meath, and P. Tran, [Phys. Rev. A](#) **65**, 063401 (2002).
- [15] V. V. Albert, [Phys. Rev. Lett.](#) **108**, 180401 (2012).
- [16] H. M. Moya-Cessa, [Sci. Rep.](#) **6** (2016).
- [17] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, [Quantum Computation and Quantum Information](#) (Cambridge University Press, 2012).
- [18] D. I. Schuster, A. Wallraff, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, [Phys. Rev. Lett.](#) **94**, 123602 (2005).
- [19] T. Lindström, C. H. Webster, J. E. Healey, M. S. Colclough, C. M. Muirhead, and A. Y. Tzalenchuk, [Supercond. Sci. Technol.](#) **20**, 814 (2007).
- [20] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, [Optics Express](#) **15**, 17172 (2007).
- [21] M. Aspelmeyer, P. Meystre, and K. Schwab, [Phys. Today](#) **65**, 29 (2012).
- [22] T. Corbitt and N. Mavalvala, [J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.](#) **6**, S675 (2004).
- [23] A. Abramovici, W. E. Althouse, R. W. P. Drever, Y. Gürsel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spero, K. S. Thorne, R. E. Vogt, R. Weiss, S. E. Whitcomb, and M. E. Zucker, [Science](#) **256**, 325 (1992).

- [24] W. Yu, W. C. Jiang, Q. Lin, and T. Lu, *Nature Communications* **7**, [10.1038/ncomms12311](https://doi.org/10.1038/ncomms12311) (2016).
- [25] B. D. Cuthbertson, M. E. Tobar, E. N. Ivanov, and D. G. Blair, *Review of Scientific Instruments* **67**, 2435 (1996).
- [26] C. Corder, B. Arnold, and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **114**, [10.1103/physrevlett.114.043002](https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.043002) (2015).
- [27] X. Ma, J. Viennot, S. Kotler, J. Teufel, and K. Lehnert, *Nat. Phys.* **17**, 1 (2021).
- [28] J. Restrepo, I. Favero, and C. Ciuti, *Phys. Rev. A* **95**, 023832 (2017).
- [29] F. W. Cummings, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**, 220202 (2013).
- [30] B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
- [31] M. Bina, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **203**, 163 (2012).
- [32] D. Braak, *Symmetry* **11**, 1259 (2019).
- [33] P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, and E. Solano, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 025005 (2019).
- [34] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 19 (2019).
- [35] E. K. Irish, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 173601 (2007).
- [36] V. V. Albert, G. D. Scholes, and P. Brumer, *Phys. Rev. A* **84**, 042110 (2011).
- [37] D. Braak, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 100401 (2011).
- [38] Q. Xie, H. Zhong, M. T. Batchelor, and C. Lee, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 113001 (2017).
- [39] R. J. Thompson, G. Rempe, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1132 (1992).

- [40] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [41] J. Braumüller, M. Marthaler, A. Schneider, A. Stehli, H. Rotzinger, M. Weides, and A. V. Ustinov, *Nature Communications* **8**, [10.1038/s41467-017-00894-w](https://doi.org/10.1038/s41467-017-00894-w) (2017).
- [42] V. E. Manucharyan, A. Baksic, and C. Ciuti, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50**, 294001 (2017).
- [43] S. Felicetti, D. Z. Rossatto, E. Rico, E. Solano, and P. Forn-Díaz, *Physical Review A* **97**, [10.1103/physreva.97.013851](https://doi.org/10.1103/physreva.97.013851) (2018).
- [44] A. Crespi, S. Longhi, and R. Osellame, *Physical Review Letters* **108**, [10.1103/physrevlett.108.163601](https://doi.org/10.1103/physrevlett.108.163601) (2012).
- [45] D. Lv, S. An, Z. Liu, J.-N. Zhang, J. S. Pedernales, L. Lamata, E. Solano, and K. Kim, *Physical Review X* **8**, [10.1103/physrevx.8.021027](https://doi.org/10.1103/physrevx.8.021027) (2018).
- [46] L. Bishop, *Circuit Quantum Electrodynamics* (BiblioBazaar, 2011).
- [47] M. Tavis and F. W. Cummings, *Physical Review* **170**, 379 (1968).
- [48] M. Tavis and F. W. Cummings, *Physical Review* **188**, 692 (1969).
- [49] J. Seke, *Journal of the Optical Society of America B* **2**, 1687 (1985).
- [50] A. Kamli and S. Bougouffa, *Coherence and Quantum Optics VIII* (Springer US, 2003) pp. 341–342.
- [51] S. Cordero and J. Récamier, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **44**, 135502 (2011).
- [52] G. S. Agarwal and R. R. Puri, *Physical Review A* **39**, 2969 (1989).
- [53] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2004).

- [54] D. Z. Rossatto, C. J. Villas-Bôas, M. Sanz, and E. Solano, *Physical Review A* **96**, [10.1103/physreva.96.013849](https://doi.org/10.1103/physreva.96.013849) (2017).
- [55] H. Zhong, Q. Xie, M. T. Batchelor, and C. Lee, *J. Phys. A: Math.* **46**, 415302 (2013).
- [56] H. Mabuchi and A. C. Doherty, *Science* **298**, 1372 (2002).
- [57] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, *Physical Review Letters* **58**, 353 (1987).
- [58] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Physical Review Letters* **76**, 1800 (1996).
- [59] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Physical Review Letters* **79**, 1 (1997).
- [60] S. Ashhab and F. Nori, *Physical Review A* **81**, [10.1103/physreva.81.042311](https://doi.org/10.1103/physreva.81.042311) (2010).
- [61] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll, and E. Solano, *Physical Review Letters* **105**, [10.1103/physrevlett.105.263603](https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.263603) (2010).
- [62] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons* (Oxford University Press, 2006).
- [63] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, *Reviews of Modern Physics* **73**, 357 (2001).
- [64] V. Braginsky, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **53**, 1434 (1967).
- [65] E. Jaynes and F. Cummings, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89 (1963).
- [66] W. H. Montaña and J. A. Maytorena, *Annalen der Physik* **535**, 2300140 (2023), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.202300140> .
- [67] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information* (WORLD SCIENTIFIC, 2007).

- [68] L. Viola and W. G. Brown, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical](#) **40**, 8109–8125 (2007).
- [69] Q. Liao, Y. Ye, P. Jin, N. Zhou, and W. Nie, [Int. J. Theor. Phys.](#) **57**, 1319 (2018).
- [70] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, [Physical Review Letters](#) **44**, 1323–1326 (1980).
- [71] N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, [Physical Review A](#) **23**, 236–247 (1981).
- [72] S. He, Y. Zhao, and Q.-H. Chen, [Physical Review A](#) **90**, [10.1103/physreva.90.053848](#) (2014).
- [73] P. R. Berman and C. H. R. Ooi, [Physical Review A](#) **89**, [10.1103/physreva.89.033845](#) (2014).
- [74] D. Manzano, [AIP Advances](#) **10**, [10.1063/1.5115323](#) (2020).
- [75] W. Vogel and D. Welsch, [Quantum Optics](#) (Wiley, 2006).