UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN
CAMPO DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICAS

COMPARATIVA ENTRE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN ALGUNOS TEMAS DE TRIGONOMETRÍA DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:
ANA LAURA MARTÍNEZ ANAYA

TUTOR: MAESTRA ADRIANA DÁVILA SANTOS
FES ACATLÁN

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
MTRA. GUADALUPE IVETH VARGAS RODRÍGUEZ. FES CUAUTITLÁN
DR. VÍCTOR MANUEL ULLOA ARELLANO. FES ACATLÁN
MTRA. ADRIANA DÁVILA SANTOS. FES ACATLÁN
DRA. TERESA IVONNE CONTRERAS TROYA. FES ACATLÁN
MTRA. TANIA AZUCENA CHICALOTE JIMÉNEZ. FAC. CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, MAYO 2024

1. Índice de contenido

2. Índice de figuras

3. Índice de tablas

4. Introducción.

La enseñanza de las matemáticas es, hoy en día, un tema preocupante en todos los niveles educativos. Con el uso de las nuevas tecnologías los jóvenes prefieren resolver operaciones básicas con la calculadora de su celular y crecen con la constante de buscar resolver los problemas y ejercicios matemáticos utilizando los medios digitales. Con esto, tenemos alumnos de educación media superior y superior que carecen de pericia para poder calcular un porcentaje, una suma de fracciones, o incluso, temas algebraicos básicos como el despeje de una variable o una ecuación de segundo grado.

De acuerdo con el Secretario General de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) Ángel Gurría "…con los elevados niveles de desempleo juvenil existentes, las crecientes desigualdades y la acuciante necesidad de impulsar el crecimiento en muchos países, resulta ahora más urgente que nunca que los jóvenes adquieran las competencias que les serán necesarias para tener éxito" (OIT, 2012) como la competitividad y la innovación.

El nivel medio superior es un buen momento para mejorar el nivel de los alumnos que llegan a la universidad, además, al ser la etapa en la cual deciden qué carrera estudiarán, es adecuado reforzar en ellos el aprendizaje de las matemáticas de modo que puedan tomar una decisión más afín a sus gustos y habilidades.

En el presente proyecto se implementó una secuencia didáctica basada en el aprendizaje significativo para matemáticas en un grupo de alumnos de nivel medio superior. Con esta secuencia basada en el aprendizaje significativo, los alumnos aprenden resolviendo cuadernillos de trabajo sin necesidad de que alguien les esté enseñando; de esta manera, logran reforzar positivamente su autoestima y emocionalmente se sienten más motivados al experimentar la satisfacción de aprender por ellos mismos.

El proyecto, está enfocado en alumnos del tercer semestre de bachillerato, periodo en el cual se refuerzan muchos conceptos de álgebra y empiezan a aprender los conceptos de trigonometría, misma que es pilar para materias subsecuentes tales como geometría analítica y cálculo diferencial. El proyecto se limitó a un grupo de 30 alumnos de bachillerato quienes recibieron un problemario a inicio de semestre para trabajarlo de manera individual en casa y así poder emplear las sesiones de clase para reforzar lo aprendido y resolver de manera colaborativa problemas de aplicación.

El propósito del trabajo es comparar el aprendizaje que logran los alumnos siguiendo una enseñanza basada en el aprendizaje significativo contra el que adquieren por enseñanza tradicional.

5. Marco Teórico

Los países asiáticos como Japón, Singapur y Corea del Sur, entre otros, han obtenido los puntajes más altos en las pruebas de PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos), exámenes mundiales aplicados cada tres años por la OCDE, donde se evalúan las habilidades de los estudiantes de 15 años en lectura, matemáticas y ciencias. La constante en la educación de estos países, es la alta exigencia académica, la flexibilidad de horarios y la autonomía que sus estudiantes tienen a la hora de aprender. (INEE, 2015).

La teoría del aprendizaje significativo desarrollada por Ausubel, Novak Y Hanesian establece que, para lograr aprender es necesario relacionar la nueva información que se está adquiriendo con la información que ya se tiene aprendida. De esta forma, con la nueva información se construyen redes de conceptos que facilitan la construcción del aprendizaje. (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

En los países asiáticos antes mencionados, la forma de trabajo en el aula de clase se basa justamente en el aprendizaje significativo y la construcción de enlaces cognitivos desde lo más sencillo hasta lo más complicado de manera gradual. (Ávila, 2010).

De acuerdo con Fagginger, Hickendorff y Van Putten (2016) “no basta con dar ejemplos, sino que se requiere que el escolar explore las características del problema y el docente observe este desempeño”, en este sentido, los ejercicios del proyecto están basados en el aprendizaje significativo ubica al docente más como un facilitador/observador que como el rol protagónico de la clase. Además, de acuerdo con la teoría del aprendizaje de Piaget “el fin de la educación debe ser el desarrollo de la autonomía, tanto en el terreno moral como en el intelectual. Esto significa desarrollar la capacidad de pensar críticamente por sí mismo”, es decir, no basta con lograr que el alumno mejore sus calificaciones sino realmente crear en él una autonomía en el aprendizaje.

Desde que se puso en marcha la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) en el ciclo 2009-2010, inició la implementación del modelo educativo por competencias que cambia el modelo tradicional de transmisión de conocimientos del profesor a un modelo basado en situaciones reales donde el alumno construye su propio conocimiento guiado por el profesor. Este modelo de competencias, centra su enfoque de aprendizaje en el alumno y su entorno, además contempla situaciones donde el alumno aplique de manera certera el conocimiento adquirido, es decir, que no sólo memorice o repita la información, sino que sea capaz de analizarla y aplicarla para solucionar sus problemas y los de su comunidad. (Lozano, 2015). La enseñanza de matemáticas ha sido siempre un tema acuciante para nuestro país ya que no se ha logrado fomentar un aprendizaje de calidad desde la educación básica obstaculizando así los resultados obtenidos en la educación media superior.

6. Justificación del tema.

De acuerdo con los resultados de las evaluaciones PISA en Matemáticas, en 2018, México tuvo una media de 409 puntos, cifra que lo coloca en el Nivel 1 de la tabla. El nivel 1 es el nivel más bajo y contempla ejercicios donde se brinda toda la información necesaria y las preguntas son definidas muy claramente así mismo, los problemas son de solución muy sencilla. En el ranking global, México se encuentra por debajo de otros países latinoamericanos y muy lejos de los países de primer mundo. (INEE, 2015).

Además, la situación es preocupante en el sentido de que en comparación a la década pasada (2009), México cayó 10 puntos en esta misma prueba. La figura 1 muestra los resultados de las evaluaciones en México de 2003 hasta 2018.

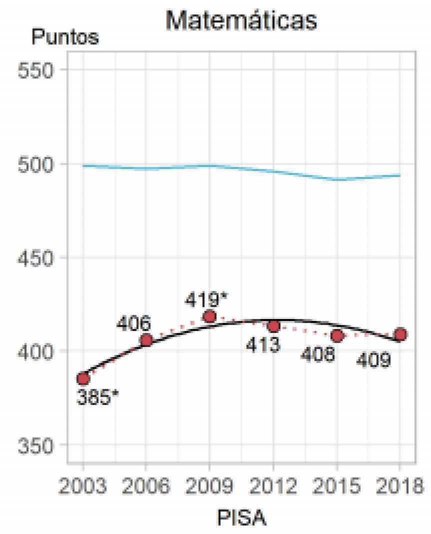


Figura 1. Resultados de pruebas PISA en México

Es necesario mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que es una asignatura ya bastante estigmatizada por los alumnos quienes, al no lograr entender los temas de clase refuerzan de manera negativa su percepción por esta ciencia. De acuerdo con la OCDE, en México los jóvenes no pueden analizar, resolver e interpretar problemas matemáticos de cualquier tipo sino que sólo unos cuantos son capaces de resolver problemas de tipo mecánicos y de sustitución con todos los datos dados y las fórmulas proporcionadas (OCDE, 2013).

De acuerdo con Ángel Gurría, durante la presentación del estudio en Washington D.C en el 2012; “la competencia matemática es un sólido factor de predicción de resultados positivos para los jóvenes adultos. Influye en su capacidad para participar en la educación postsecundaria y en sus expectativas de ingresos futuros.”

Además, en un estudio realizado en 2016, se determinó que la reprobación en Matemáticas es una de las causas que influyen en el abandono escolar de este nivel educativo (Osuna; Díaz; Gárate; Contreras; Murillo, 2016).

De acuerdo con Brooks (1999), el maestro debe “estimular y aceptar la autonomía y la iniciativa de los estudiantes y buscar que los alumnos elaboren sus respuestas iniciales…” Así, nosotros como maestros, debemos buscar estrategias para lograr que los alumnos sean más intuitivos y no solamente aprendan a resolver problemas mecánicamente, sino que además sean capaces de generar su propio conocimiento y puedan entender e interpretar de distintas maneras los conceptos matemáticos.

Debido a los datos anteriores y a la situación de pandemia vivida en 2020, donde los estudiantes se enfrentaron a la imposibilidad de tener a alguien que les explique de manera presencial los temas, surgió la idea de este proyecto.

Para este proyecto, se desarrolló un problemario de trabajo con ejercicios que aumentaron gradualmente de dificultad. El problemario incluyó también diversos ejemplos didácticos y explicaciones para los alumnos.

Este problemario está basado en las técnicas del aprendizaje significativo y la diferenciación progresiva para quitar al alumno la barrera auto aprendida de que “no nació para las matemáticas”, pensamiento que muchos alumnos traen desde la educación básica y que obstaculiza el aprendizaje.

Es importante trabajar en el problemario de manera continua y a lo largo de varias sesiones de clase para lograr de esta manera la significancia del aprendizaje. El constructivismo propone que cada alumno tiene una construcción propia de su aprendizaje como resultado de su interacción con el medio y de su experiencia previa. Lo cual fundamenta la base para el problemario del proyecto, ya que cada alumno lo resolvió de manera individual y revisó los ejemplos tanto como lo necesitó.

Esta forma de enseñanza basada en el aprendizaje significativo es una opción que permitió a los alumnos ser autodidactas y responsables en su aprendizaje. Además, este método desarrolla independencia en los alumnos quienes se sienten cómodos al trabajar de manera independiente y a su propio ritmo.

El principal fin de estudiar geometría es conectar al estudiante con el mundo en que se mueve pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas resultan muy útiles en el desarrollo de la vida cotidiana (Barrantes, et al., 2014). Además, "la geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, incluso tal vez es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad". (García, López, 2008). Dentro de las figuras geométricas, el triángulo es la figura base ya que cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Estas razones, sobre la importancia de la geometría, no solamente como tema sino por las habilidades visuales, de construcción, de dibujo, de razonamiento lógico y de aplicación, entre otras (Mazzitelli, 2020) que desarrolla en los alumnos, son el motivo por el que se decidió abordar el tema de los triángulos en el problemario. Además, es un tema que tiene relevancia para materias subsecuentes como la geometría analítica e incluso el cálculo diferencial e integral y sólo les servirá a quienes decidan estudiar una ingeniería, sino que ayudará a todos los alumnos con el desarrollo de diversas habilidades.

7. Preguntas de investigación.

¿Es posible implementar un método de enseñanza basado en el aprendizaje significativo para mejorar el nivel de aprendizaje de matemáticas de los alumnos del nivel medio superior?

¿Puede cambiar la perspectiva de los alumnos hacia el estudio de las matemáticas?

8. Hipótesis

- Los alumnos que hayan seguido la enseñanza del aprendizaje significativo tendrán una mejor calificación en la evaluación que se llevará a cabo al término de los temas propuestos en comparación de los alumnos que siguieron la enseñanza tradicional.
- Los alumnos que hayan trabajado en el problemario con el aprendizaje significativo se sentirán más satisfechos y seguros con su aprendizaje.

9. Objetivo general.

- Comparar el resultado que obtienen los alumnos de un grupo que sigue enseñanza tradicional con uno que sigue el método del aprendizaje significativo.

6.1 Objetivos específicos

- Diseñar un problemario basado en el aprendizaje significativo para el grupo experimental.
- Aplicar las estrategias de enseñanza del aprendizaje significativo con el grupo experimental (recirculación, elaboración, organización y recuperación).
- Evaluar mediante un examen escrito el desempeño del grupo experimental y del grupo control.

10. Metodología

Se diseñó el problemario con ejemplos, explicaciones y ejercicios que aumentan en grado de dificultad sobre el tema de triángulos con los siguientes subtemas correspondientes al tercer semestre de bachillerato:

*Funciones trigonométricas

*Teorema de Pitágoras

*Ley de senos y cosenos

El trabajo de investigación estuvo estructurado en dos grupos: el grupo control con alumnos que siguieron el método tradicional de enseñanza y el grupo experimental que siguió el método del aprendizaje significativo con el problemario. Ambos grupos estuvieron conformados por 30 estudiantes, hombres y mujeres de 15 a 17 años de nivel medio superior. Con el grupo de control se trabajó en clase con una explicación en el pizarrón y después con ejercicios que se resolvieron en sus cuadernos; mientras trabajaron en los ejercicios, se resolvieron las dudas que los alumnos manifestaron de manera grupal. Al finalizar cada uno de los temas, se dejó una serie de ejercicios de tarea a los alumnos con ejercicios correspondientes al tema.

El grupo experimental recibió el problemario y se dio la instrucción de que debían revisar diariamente en casa uno de los temas y resolver el primer ejercicio correspondiente a ese tema. Al día siguiente, en el salón de clases, los alumnos trabajaron individualmente en el ejercicio 2 del mismo tema; durante la clase, los alumnos preguntaron las dudas que encontraban al hacer los ejercicios y éstas se resolvieron de manera conjunta entre el docente y el alumno. El ejercicio 3 correspondiente al mismo tema se asignó de tarea para ese mismo día junto con la revisión del siguiente tema.

Al finalizar los temas, ambos grupos presentaron la misma evaluación, de esta forma, se realizó la comparativa entre los resultados de ambos grupos de alumnos. Al terminar los temas, se aplicó un cuestionario de introspección al grupo control para conocer su sentir respecto a su propio aprendizaje. La experimentación del proyecto se llevó a cabo durante el semestre académico.

11. Aprendizaje

11.1 Aprendizaje tradicional

La enseñanza tradicional en el aula de clase se caracteriza por una exposición continua por parte del instructor; el alumno tiene un rol bastante pasivo en el proceso, ya que toma nota y hace algunas preguntas respecto a la explicación del docente, pero, no formula sus propias ideas, sino que escucha las del maestro y trata de repetirlas en la solución de problemas.

De acuerdo con Benítez (2014) en la enseñanza tradicional el experto, que es el profesor, transmite los conocimientos a los estudiantes; este tipo de enseñanza es unidireccional e inflexible. Además, deja poca o nula cabida a la participación del alumno en cuanto a debatir, inferir o deducir alguna idea puesto que el docente es quien, de manera magistral, imparte la clase.

Es importante mencionar que la enseñanza tradicional es la que ha perdurado desde tiempos históricos ya que los usos y costumbres, cultura y tradiciones empezaron a transmitirse de esta manera desde tiempos ancestrales; además, la enseñanza tradicional está basada, en gran parte en la memorización y repetición de conceptos. Las bases de la enseñanza tradicional fueron planteadas por Comenius, quien establece que “El maestro es la base y la condición del éxito en la educación. Sus funciones son organizar el conocimiento y aislar y elaborar la materia aprendida" (Galván, Siado, 2021). Esta enseñanza fue con la que muchos de nosotros aprendimos, por ejemplo, ¿quién no repitió las tablas de multiplicar hasta memorizarlas? O ¿quién no tuvo un maestro de geografía que le hizo memorizar las capitales de los estados de la República Mexicana? Y bajo estos métodos, logramos aprender y entender las cosas que ahora somos capaces de resolver, por lo tanto, aunque en varios sentidos, es inflexible, autoritaria y repetitiva, la enseñanza tradicional ha sido efectiva a lo largo de las generaciones y nos ha dejado a nosotros, a nuestros padres y generaciones anteriores conocimientos sólidos, orden y disciplina.

En la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con Moreano (2008) en el método de enseñanza tradicional, los docentes no proponen a sus estudiantes preguntas que promueven la problematización, la reflexión y la discusión, sino por el contrario se nota una preocupación por lograr que los estudiantes sigan los procedimientos enseñados"; esto puede tener la ventaja de que el alumno conciba la resolución de los problemas de manera sistemática y ordenada aunque, a su vez, deja poca oportunidad para deducciones o razonamientos propios del alumno.

11.2 Aprendizaje significativo

En 1968 David Ausubel, dijo que el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, es por esto que se debe conocer exactamente dónde está en cuanto a su conocimiento previo para de esta forma comenzar los temas en este punto.

La teoría del aprendizaje significativo plantea que el aprendizaje no debe consistir en dar al alumno información aislada ya que, de esta forma, el alumno solo estaría memorizando datos y no realmente aprendiendo. Por el contrario, el aprendizaje significativo consiste en brindar la información con base en las estructuras cognitivas previas del alumno, es decir, en los conocimientos que ya tiene. De esta manera, la nueva información hace sentido con lo que ya se sabe y se logra un vínculo de unión entre ambos; y es entonces, cuando el aprendizaje del alumno se vuelve significativo; “la significatividad sólo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con los que ya posee el sujeto” (Macedo y Nieda,1997).

Al involucrar un proceso cognitivo de reconocimiento, este tipo de aprendizaje se almacena en la memoria a largo plazo y queda como una nueva base de conocimiento que servirá para seguir aprendiendo significativamente. De esta forma, el alumno recordará la nueva información de manera permanente y la utilizará como base para poder construir nuevo conocimiento. Esta teoría coincide con el constructivismo ya que precisamente, el aprendizaje se construye y cimenta en la red de conocimientos que ya se tienen y forma vínculos sólidos al procesar la información nueva y conectarla con la que ya conoce (Díaz, 2003).

El papel del docente cobra relevancia en esta teoría al momento de que es él quien proporciona al alumno la nueva información, por esto, es necesario conocer el nivel de conocimientos en que se encuentra el estudiante para poder plantear las estrategias de enseñanza que utilizará para proporcionarle la nueva información. De acuerdo con Ausubel (1983), los docentes deben buscar y emplear estrategias didácticas de enseñanza que permitan potenciar las capacidades cognoscitivas de sus alumnos. Además, el docente juega un importante papel en la motivación y la disposición del alumno para aprender, siendo ambos fundamentales para lograr el aprendizaje significativo. A través de estrategias de enseñanza, el docente puede fomentar la curiosidad del alumno para que éste se encuentre receptivo y abierto a recibir la nueva información.

Para que un alumno aprenda significativamente, se requiere algún material de apoyo con contenido potencialmente significativo, las estructuras cognoscitivas previas del alumno y la disposición del mismo para aprender (Delgado, Arrieta y Camacho, 2012).

En la teoría sobre psicología del aprendizaje verbal significativo (1963), Ausubel define los siguientes tipos de aprendizaje significativo:

- **Subordinado**: se da cuando la nueva información se conecta de manera subordinada con otra ya existente, es decir, se acopla con un conocimiento previo sin modificarlo. Este aprendizaje se da cuando ya se tiene una idea generalizada de algún concepto aprendido y cada nuevo ejemplo que se aprende, se une a esta idea sin modificarla, solo extendiéndola.
- **Supraordinado**: en este caso, la información previa es específica mientras que la nueva es más general que esa ya existente, entonces la absorbe y forma una nueva estructura cognitiva, integrando a ambas.
- **Combinatorio**: se da cuando no hay relación subordinada ni supraordinada.

Ausubel menciona que la mejor forma para lograr el aprendizaje significativo es a través de la diferenciación progresiva; ésta consiste en que la enseñanza inicie con conceptos muy generales y avanza de manera gradual para profundizar en conceptos muy particulares y específicos.

Para que el material que el alumno recibe sea potencialmente significativo, éste debe

- ser lógico, estructurado y secuenciado con los conocimientos previos del alumno.
- apegarse a la diferenciación progresiva, es decir, ir de los conocimientos más inclusivos a los más diferenciados.
- estimular un enfoque activo, crítico, reflexivo y analítico por parte del alumno y alentarlo a reformular las ideas presentadas, en términos de su propio vocabulario, de sus propias experiencias y su estructura de ideas.
- incluir ilustraciones, diversos ejemplos y ejercicios de subordinación.

Finalmente, la predisposición del alumno para aprender es el último punto que Ausubel define como clave para lograr un aprendizaje significativo.

De acuerdo con su teoría sobre la psicología del aprendizaje, el que un alumno carezca de esta predisposición natural por el aprendizaje se debe a que haya aprendido por experiencia que las deducciones y respuestas que obtiene por sus propias conclusiones son consideradas erróneas, puesto que no fueron obtenidas siguiendo literalmente el método enseñado por el profesor; otra razón, es que un alumno se sienta completamente incapaz de aprender algo significativamente debido a los fracasos que ha tenido, es decir, que no confíe para nada en sus propias habilidades y por lo tanto, en ambos casos, los alumnos optan por aprender por repetición.

Por esto, para el desarrollo del proyecto el alumno recibió un cuadernillo de ejercicios potencialmente significativo. Esto quiere decir que el material debe tener significado lógico, es decir, relacionarse sustancialmente con la estructura cognitiva del alumno y debe tener los conceptos en el orden adecuado, de modo que se logre una fusión del nuevo conocimiento con el ya existente (Rodríguez, 2011).

Los principios de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud ayudan a entender cómo se produce el aprendizaje significativo y han demostrado que lo que resulta significativo y perdurable es el esquema de asimilación que se logra a nivel cognitivo; por lo tanto, la significatividad del aprendizaje es un proceso progresivo que requiere tiempo para consolidarse. (Caballero,2003).

12. Diseño y elaboración del problemario bajo el enfoque significativo

El constructivismo establece que la función central del docente consiste en orientar y guiar la actividad mental constructiva de sus alumnos, a quienes proporcionará una ayuda pedagógica ajustada a su competencia. De acuerdo con Díaz Barriga (2003), el aprendizaje significativo se da en tres fases. En la fase inicial, el aprendiz recibe y asimila la información por piezas, comparando y usando analogías; en esta fase se proponen varias estrategias de repaso como la repetición y asociación. En la fase intermedia, se forman estructuras con las piezas de información que se tienen; para guiar al alumno en esta fase se utilizan estrategias de organización como esquemas y diagramas; además es importante la retroalimentación por parte del docente durante esta etapa. La fase terminal se da de manera menos consciente por la acumulación de información que se ha adquirido; durante esta fase se proponen estrategias de análisis, deducción y razonamiento.

Además, Díaz plantea cuatro estrategias del aprendizaje significativo; de acuerdo con él, cada alumno utiliza estas estrategias como le acomoden de manera que el aprendizaje de cada alumno se da de manera diferente en cada uno de ellos. Estas técnicas son:

- Recirculación; es el repaso acompañado de técnicas que consisten en repetir una y otra vez.
- Elaboración: consiste en la integración de la información nueva que se aprende con los conocimientos previos que ya se tienen.
- Organización: reorganizar de manera constructiva la información.
- Recuperación: son las formas que el alumno utiliza para recordar la información.

El problemario está diseñado para poner en práctica estas estrategias, desde la recirculación con los primeros ejemplos hasta la recuperación al integrar algunas técnicas mnemotécnicas para recordar la información. Para lograr que el alumno pase por las tres fases del aprendizaje significativo se recomienda que los contenidos se presenten con una secuencia lógica, de manera organizada, interrelacionada y jerarquizada. La secuencia de organización de los temas debe seguir una diferenciación progresiva que lleve al alumno de un conocimiento muy general a la posibilidad de aplicar lo aprendido en contextos diferentes y situaciones particulares.

Los programas y hojas de trabajo se diseñan para ayudar a los alumnos a pensar por sí mismos y a desarrollar su capacidad para resolver ejercicios intentando hallar las respuestas de forma autónoma, por esto, se incluyen ejemplos que les sirvan de guía y el maestro interviene sólo cuando es necesario. El método busca sacar el máximo potencial del alumno al permitirle deducir por sí mismo los resultados, así como los procedimientos para encontrarlos y lograr así su comprensión y no su memorización.

El problemario está estructurado de forma gradual, es decir, empieza con temas sencillos de identificación y fácil visualización y aumenta la dificultad poco a poco. La fácil realización de los ejercicios iniciales permitirá al alumno ganar confianza para cuando tenga que resolver los ejercicios de mayor dificultad. Las hojas de estudio muestran ejemplos que permiten a los alumnos deducir el procedimiento correcto para solucionarlos y aplicar este mismo procedimiento a otros ejercicios parecidos hasta que se logre consolidar el conocimiento. Si un alumno tiene alguna duda, el docente no responde inmediatamente la pregunta, sino que orienta al alumno a visualizar y detectar los puntos fundamentales de las preguntas para que él mismo reflexione en el proceso de solución.

El papel fundamental del docente es el de orientar al alumno, por lo tanto, debe observarlo para ver cómo afronta los ejercicios y si se encuentra motivado o no; de acuerdo a esta observación, el docente ayuda al alumno dándole pistas que le permitan resolver el ejercicio por sí mismo. Es importante el reconocimiento y la valoración que el docente hace al alumno para de esta forma lograr que se sienta aún más motivado. Una vez finalizados los ejercicios, éstos deben ser revisados por el docente que debe marcar los errores y regresar las hojas al alumno para que él mismo la analice y la corrija. De esta forma el alumno pierde el miedo al error y a ser evaluado y se acostumbra a aprender de sus errores.

El problemario está estructurado de acuerdo con las fases del aprendizaje significativo (inicial, intermedia y terminal) propuestas por Díaz (2003).

- Para la fase inicial se proponen ejercicios de reconocimiento y asociación a esquemas básicos. Con estos ejercicios se pretende que el alumno asocie y cree estructuras mentales que le permitan identificar de manera simple los lados de los triángulos.
- Posteriormente, para la fase intermedia del aprendizaje significativo, se proponen ejercicios donde el alumno encuentre similitudes y de esta forma aplique en otros contextos el conocimiento que va adquiriendo.
- Para finalizar y afianzar el aprendizaje, viene la fase terminal donde se busca que el alumno resuelva con autonomía y sea él mismo quien identifique las situaciones en las que puede aplicar el conocimiento.

La tabla 1 muestra una descripción de las fases del aprendizaje significativo.

Fase inicial	Fase intermedia	Fase terminal
Partes de información aislados conceptualmente	Se empiezan a encontrar relaciones y similitudes.	Los conocimientos se integran
Utiliza esquemas preexistentes	Configuración de esquemas y mapas cognitivos	Se puede actuar con autonomía
Memorización	Aun no es un aprendizaje autónomo	Aparición progresica de interrelaciones de alto nivel.
Procesamiento global de la información	Se va apicando el conocimieno en otros contextos	Conocimiento aplicable a situaciones específicas
La información obtenida es directamente vonculada con el contexto dado	Organización de la información	Dominio del conocimiento
Estrategias mnemotécnicas		
Comparaciones y analogías		

Tabla 1. Fases del aprendizaje significativo

Fuente: Adaptado de “Estrategias docentes para un aprendizaje significativo”. Díaz, B. (2003). Ed. Mc Graw Hill

13. Problemario

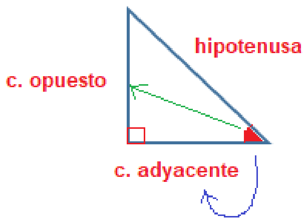
1. Identificación de los lados de un triángulo rectángulo

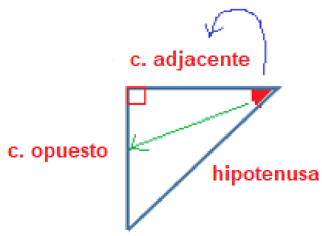
Cateto opuesto= se encuentra frente al ángulo de referencia (marcado en rojo).

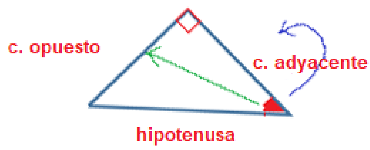
Cateto adyacente=se encuentra al lado del ángulo de referencia (marcado en rojo).

Hipotenusa= se encuentra entre ambos catetos

Ejemplos:



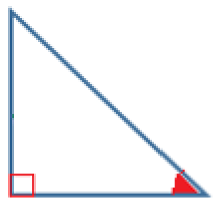




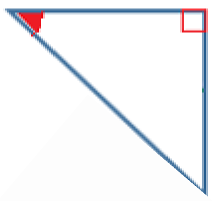
Ejercicio:

Identificar los lados de los siguientes triángulos rectángulos.

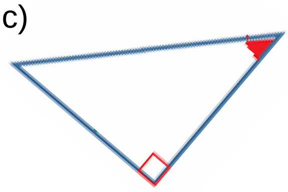
a)



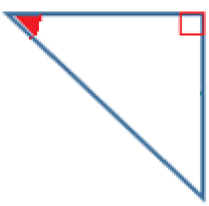
b)



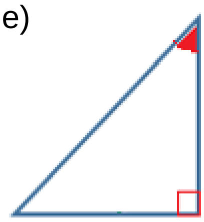
c)



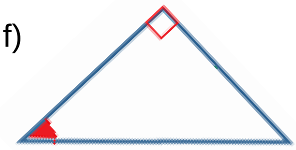
d)



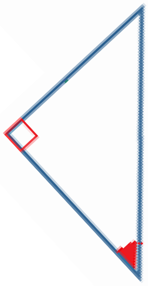
e)



f)



g)



2. Definición de las funciones trigonométricas en un triángulo

$$sen(x) = \frac{c.opuesto}{hipotenusa} \qquad cos\,cos\,(x) = \frac{c.adyacente}{hipotenusa}$$

$$tan\,tan\,(x) = \frac{c.opuesto}{c.adyacente} \qquad cosec\,(x) = \frac{hipotenusa}{c.opuesto}$$

$$sec\,(x) = \frac{hipotenusa}{c.\ adyacente} \qquad cotan(x) = \frac{c.\ adyacente}{c.opuesto}$$

¡Mnemotecnia! ¿Crees que será difícil recordarlas? Intenta esto: recuerda este orden: Seno, Tangente, Secante

Reescríbelas cada una con el prefijo “Co” para formar las otras 3.

$$Seno$$

$$Coseno$$

$$Tangente$$

$$Cotangente$$

$$Secante$$

$$Cosecante$$

Ahora, escribe las sílabas CO-CA dos veces en el numerador de cada función seguidas por la expresión HIP dos veces, así:

$$Seno = \frac{CO}{}$$

$$Coseno = \frac{CA}{}$$

$$Tangente = \frac{CO}{}$$

$$Cotangente = \frac{CA}{}$$

$$Secante = \frac{HIP}{}$$

$$Cosecante = \frac{HIP}{}$$

Repite nuevamente lo mismo, pero ahora de abajo hacia arriba en el denominador, así:

$$Seno = \frac{CO}{HIP}$$

$$Coseno = \frac{CA}{HIP}$$

$$Tangente = \frac{CO}{CA}$$

$$Cotangente = \frac{CA}{CO}$$

$$Secante = \frac{HIP}{CA}$$

$$Cosecante = \frac{HIP}{CO}$$

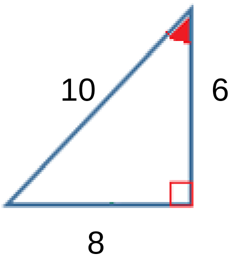
¡Listo! CO significa "Cateto Opuesto", CA es "Cateto Adyacente" y HIP es "Hipotenusa".

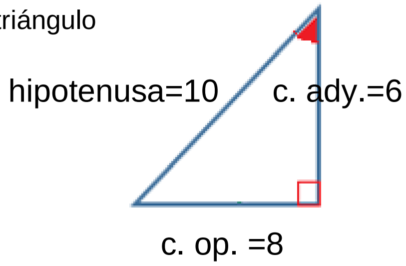
Ahora solo debes recordar la frase "Coca – Coca Hip hip" y tendrás las fórmulas. Sencillo, ¿no?

Ejemplo 1:

Definir las seis funciones trigonométricas

Primero, identifica los lados del triángulo





Luego, usar los datos en cada función

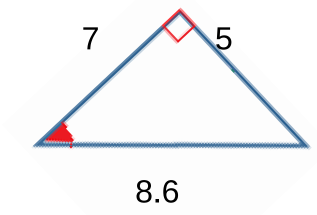
$$sen(x) = \frac{c. opuesto}{hipotenusa} = \frac{8}{10} = 0.8 \qquad cos\, cos\, (x) = \frac{c. adyacente}{hipotenusa} = \frac{6}{10} = 0.6$$

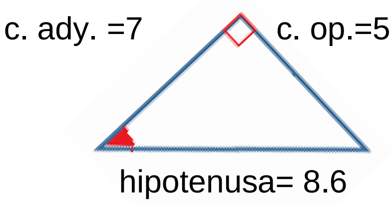
$$tan\, tan\, (x) = \frac{c. opuesto}{c. adyacente} = \frac{8}{6} = 1.33 \qquad cosec\, (x) = \frac{hipotenusa}{c. opuesto} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$sec\, (x) = \frac{hipotenusa}{c.\ adyacente} = \frac{10}{6} = 1.66 \qquad cotan(x) = \frac{c.\ adyacente}{c. opuesto} = \frac{6}{8} = 0.75$$

Ejemplo 2:

Primero, identificar los lados del triángulo





Luego, usar los datos en cada función

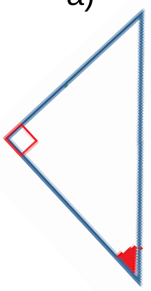
$$sen(x) = \frac{c. opuesto}{hipotenusa} = \frac{5}{8.6} = 0.93 \qquad cos\, cos\, (x) = \frac{c. adyacente}{hipotenusa} = \frac{7}{8.6} = 0.81$$

$$tan\,tan\,(x) = \frac{c.opuesto}{c.adyacente} = \frac{5}{7} = 0.71 \qquad cosec\,(x) = \frac{hipotenusa}{c.opuesto} = \frac{8.6}{5} = 1.72$$

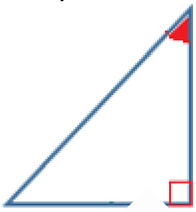
$$sec\,(x) = \frac{hipotenusa}{c.\ adyacente} = \frac{8.6}{7} = 1.22 \qquad cotan(x) = \frac{c.\ adyacente}{c.opuesto} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Ejercicios:

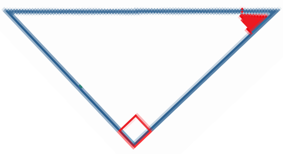
a)



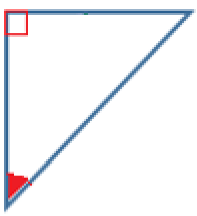
b)



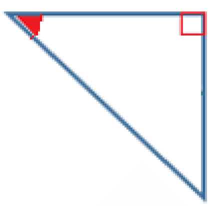
c)



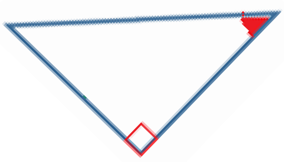
d)



e)



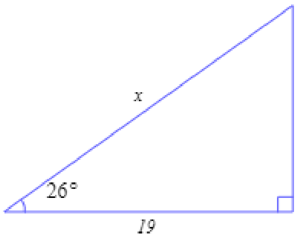
f)



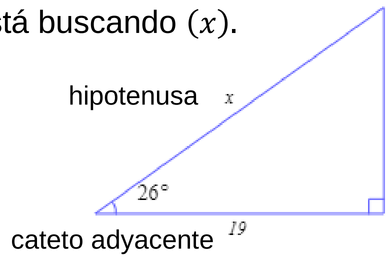
Aplicación de las funciones trigonométricas

Ejemplo 1:

Determinar el lado faltante en cada uno de los triángulos rectángulos en base al ángulo de referencia.



Como ya sabes hacerlo, identifica el lado que se tiene y la incógnita que se está buscando (x).



En base a estos dos lados que identificaste, selecciona qué función trigonométrica se utilizará: $sen(x) = \frac{c.opuesto}{hipotenusa}$; $\cos\cos(x) = \frac{c.adyacente}{hipotenusa}$; $\tan\tan(x) = \frac{c.opuesto}{c.adyacente}$

Para este ejercicio, se tiene la hipotenusa y el cateto adyacente, entonces, se selecciona la fórmula del coseno.

$$\cos\cos(x) = \frac{c.\,adyacente}{hipotenusa}$$

Se sustituyen los datos en la fórmula. **El ángulo va como argumento de la función trigonométrica.

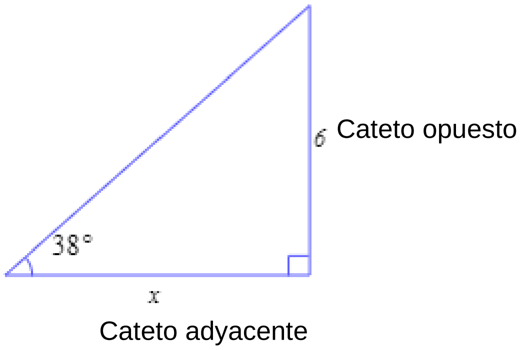
$$\cos\cos(26) = \frac{19}{x}$$

Se despeja la incógnita de acuerdo a las reglas algebraicas.

$$x = \frac{19}{\cos\cos(26)} \rightarrow x = 21.14$$

Ejemplo 2:

Identificación de los lados:



Selección de la fórmula a utilizar:

$$tan\, tan\,(x) = \frac{c.opuesto}{c.adyacente}$$

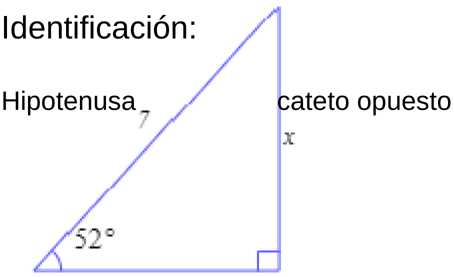
Sustitución de datos y despeje de la incógnita.

$$tan\, tan\,(38) = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6}{tan\, tan\,(38)} = 7.68$$

***Recordar que: El ángulo de referencia es el argumento de la función trigonométrica.

Ejemplo 3:

Identificación:



Fórmula:

$$sen(x) = \frac{c.opuesto}{hipotenusa}$$

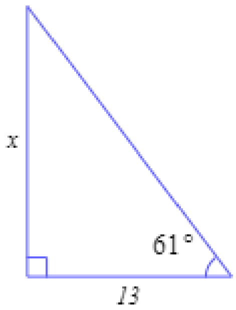
Sustitución y despeje:

$$sen(52) = \frac{x}{7} \rightarrow x = 7sen(52) = 5.52$$

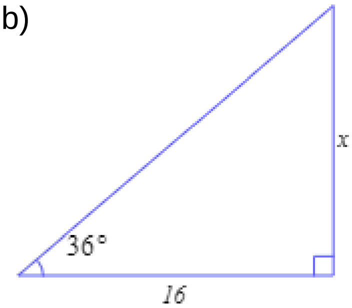
Ejercicio:

Calcular el lado faltante en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

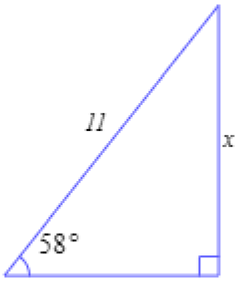
a)



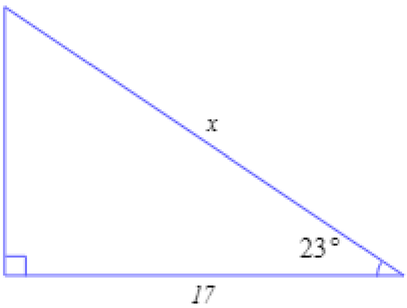
b)



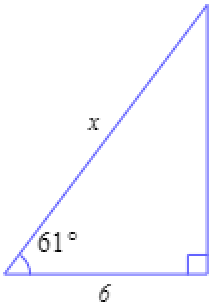
c)



d)



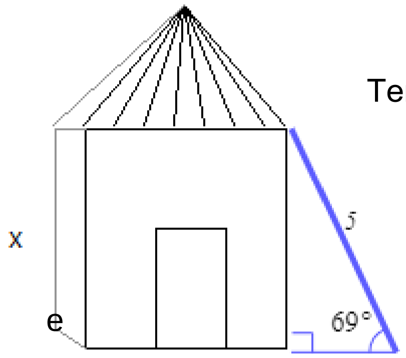
e)



Aplicación de las funciones trigonométricas en problemas.

Ejemplo 1:

Una escalera de 5m está apoyada sobre una pared vertical. El ángulo entre la escalera y el piso es de 69°. ¿Qué tan alta está la escalera sobre el piso?



Tenemos un esquema donde se forma…

¡Un triángulo rectángulo!

empieza identificando el lado que

conocemos y la incógnita que necesitamos

Hipotenusa = 5m

Cateto opuesto = x

Función trigonométrica:

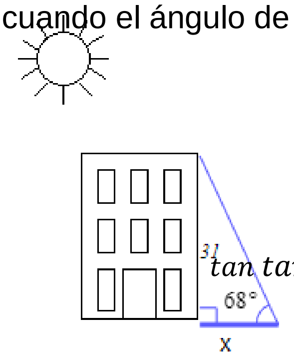
$$sen(x) = \frac{c.opuesto}{hipotenusa}$$

Sustitución de datos y despeje de la incógnita:

$$sen(69) = \frac{x}{5} \rightarrow x = 5sen(69) = 4.67$$

Ejemplo 2:

Determinar la longitud que proyecta la sombra de un edificio de 31m de altura cuando el ángulo de elevación es de 68°.



Cateto opuesto = 31

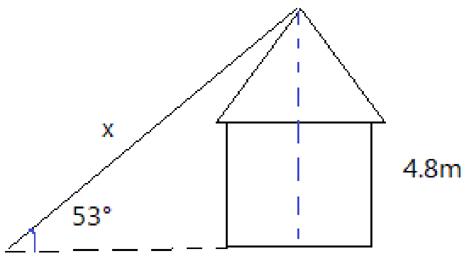
Cateto adyacente = x

$$tan\, tan\,(x) = \frac{c.opuesto}{c.adyacente} \rightarrow tan\, tan\,(68) = \frac{31}{x}$$

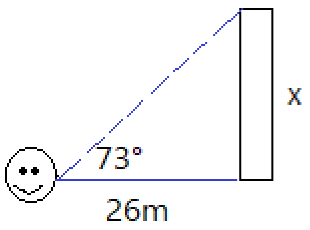
$$x = \frac{31}{tan(68)} = 12.52$$

Ejercicio:

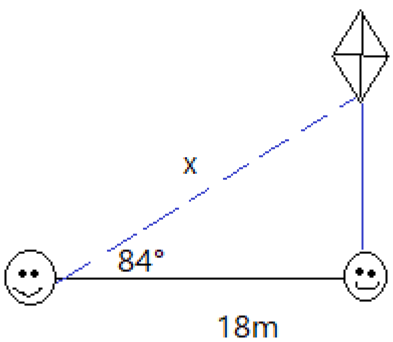
a) Debido a un derrumbe, un poste de luz cayó sobre el techo de una casa de 4.8m de altura. El poste quedó formando un ángulo de 53° con el piso. Determinar el largo total del poste si la punta del poste coincide con la orilla del techo de la casa.



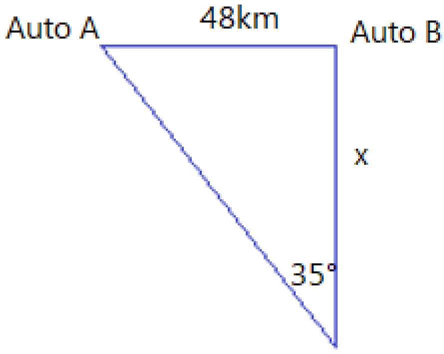
b) Una persona se encuentra parada a 26m de una torre de vigilancia. El ángulo de elevación entre la persona y la torre es de 73°. Calcula la altura de la torre.



c) Dos personas se encuentran situadas a una distancia de 18m. Una de ellas está volando un papalote justo sobre su cabeza. Calcular la distancia entre el papalote y la otra persona si hay un ángulo de 84° entre la persona y el papalote.



d) Dos carros arrancan al mismo tiempo, uno hacia el norte (auto B) y el otro (auto A) con un ángulo de 35° respecto al auto B. Si se sabe que la distancia horizontal entre ellos es de 48km, determinar la distancia que ha recorrido el automóvil A.



14. Cuestionario de Introspección.

Uno de los aspectos a considerar en la comparativa entre ambos métodos es la seguridad que el alumno siente respecto a lo que aprendió del tema. Un alumno que esté confiado de sus conocimientos, será más propenso a aprender y dominar los temas siguientes y aun cuando tenga errores, sabrá que puede corregirlos y entender el tema; es por esto que, con este breve cuestionario de autoevaluación, se conocerá el sentir de los alumnos que trabajaron en el problemario. Específicamente se medirá el nivel de seguridad que sienten respecto a su aprendizaje y si se sienten capaces de resolver cualquier problema de los temas en cuestión.

El cuestionario es el siguiente:

Responde las siguientes preguntas acerca de tu aprendizaje.

1. ¿Cómo consideras que fue tu aprendizaje del teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas?

   Bueno Regular Malo

2. ¿Cómo consideras que fue tu aprendizaje de la ley de senos y cosenos?

   Bueno Regular Malo

3. ¿Qué tan seguro te sientes al resolver problemas que involucren calcular los lados de un triángulo?

   Muy seguro Medio seguro Poco seguro

4. ¿Qué tan seguro te sientes al resolver problemas que involucren calcular los ángulos de un triángulo?

   Muy seguro Medio seguro Poco seguro

5. ¿Te consideras capaz de resolver (obtener los lados y ángulos) de cualquier triángulo que requieras?

   Sí No

6. ¿Qué tan satisfecho te sientes con tu desempeño durante la realización del problemario?

   Muy satisfecho Medio satisfecho Poco satisfecho

15. Análisis de resultados

Se realizó un análisis estadístico con los resultados que obtuvieron los alumnos de ambos grupos al presentar el examen de los 3 temas considerados; estos temas fueron las funciones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y las leyes de seno y coseno. En el anexo, se muestran algunos de los exámenes presentados por los alumnos.

Los resultados de los análisis se presentan a continuación:

Grupo Control	
Media	75.46666667
Mediana	78
Desviación estándar	18.69304376
Varianza de la muestra	349.4298851
Curtosis	-0.718887912
Rango	67
Mínimo	33
Máximo	100
Suma	2264
Cuenta	30

Tabla 2. Estadística descriptiva del resultado del examen general del grupo control.

Grupo Experimental	
Media	82.96666667
Mediana	85.5
Desviación estándar	11.33345166
Varianza de la muestra	128.4471264
Curtosis	3.53872016
Rango	45
Mínimo	48
Máximo	93
Suma	2489
Cuenta	30

Tabla 3. Estadística descriptiva del resultado del examen general del grupo experimental.

De acuerdo con el análisis, el grupo experimental obtuvo una media de 82.97 de calificación en el examen general lo que representa alrededor de 7 puntos arriba de la media del grupo control que obtuvo 75.47.

En ambos grupos, la mediana es superior a la media, lo que nos indica que ambas distribuciones presentan un sesgo negativo, es decir, están sesgadas a la derecha. Esto se observa en el gráfico de barras de cada distribución donde es apreciable que el grupo experimental presenta un mayor sesgo que el grupo control. Para la realización de dicho gráfico, se trabajaron los resultados de cada grupo como datos agrupados. El grupo control tuvo 7 intervalos de clase mientras que el experimental solo 5 puesto que su rango fue menor. A continuación, se muestran las tablas de datos y los gráficos de barras de cada grupo.

Grupo control			
Límite inferior	**Límite superior**	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta**
33	42	37.5	1
43	52	47.5	4
53	62	57.5	3
63	72	67.5	4
73	82	77.5	6
83	92	87.5	5
93	102	97.5	7

Tabla 4. Datos agrupados del resultado del examen general del grupo control.

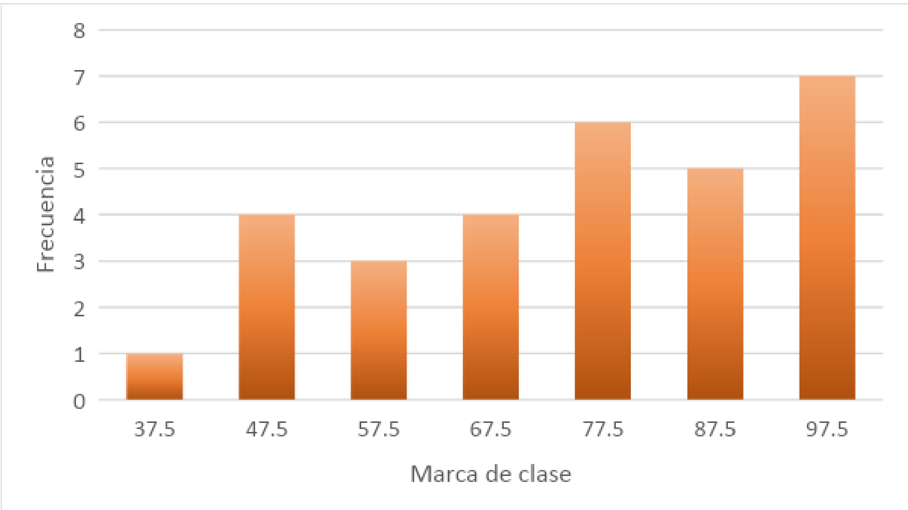


Figura 2. Gráfico de barras del resultado del examen general del grupo control.

Grupo experimental			
Límite inferior	**Límite superior**	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta**
48	57	52.5	2
58	67	62.5	0
68	77	72.5	4
78	87	82.5	13
88	97	92.5	11

Tabla 5. Datos agrupados del resultado del examen general del grupo experimental.

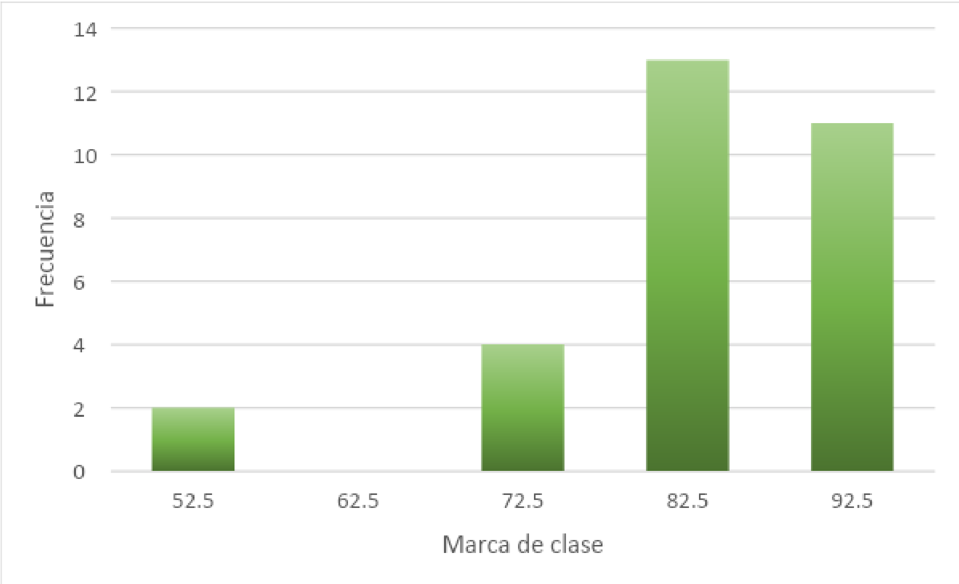


Figura 3. Gráfico de barras del resultado del examen general del grupo control.

Se observa el sesgo negativo en ambas gráficas, sin embargo, es notable que el grupo experimental presenta uno mayor; esto se refleja también en los resultados de la estadística descriptiva donde se muestra que el grupo experimental tuvo una curtosis mucho mayor que la del grupo control.

En el análisis estadístico se observa también, que el grupo control tiene una mayor desviación estándar así como un mayor rango; esto significa que los datos se encuentran más dispersos, es decir, más alejados de la media, mientras que en el grupo experimental se encuentran más próximos a ella. Esto quiere decir que las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo control son más variables y las del grupo experimental están más cercanas entre sí, concentradas cerca de la media de 82.97.

Se observa también que el grupo control presenta valores más extremos, esto es, la calificación mínima del grupo control es menor que la del grupo experimental y la máxima también es mayor que la de dicho grupo.

Para poder visualizar si existían valores atípicos, se realizó la gráfica de caja para cada grupo y se encontró que el grupo control no presenta ningún valor atípico mientras que el grupo experimental tiene dos: 48 y 51. Debido a estos valores, se tomará la mediana como la medida de tendencia central para el grupo experimental.

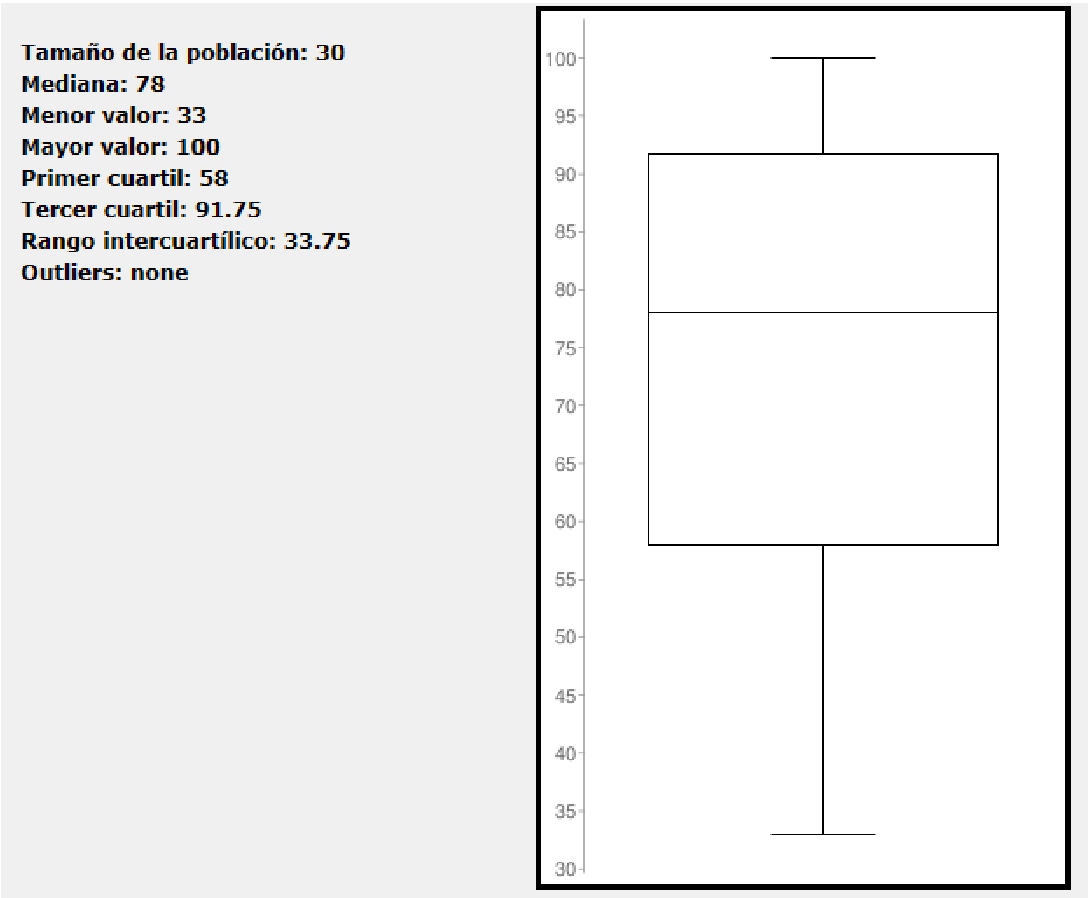


Figura 4. Gráfica de caja del resultado del examen general del grupo control.

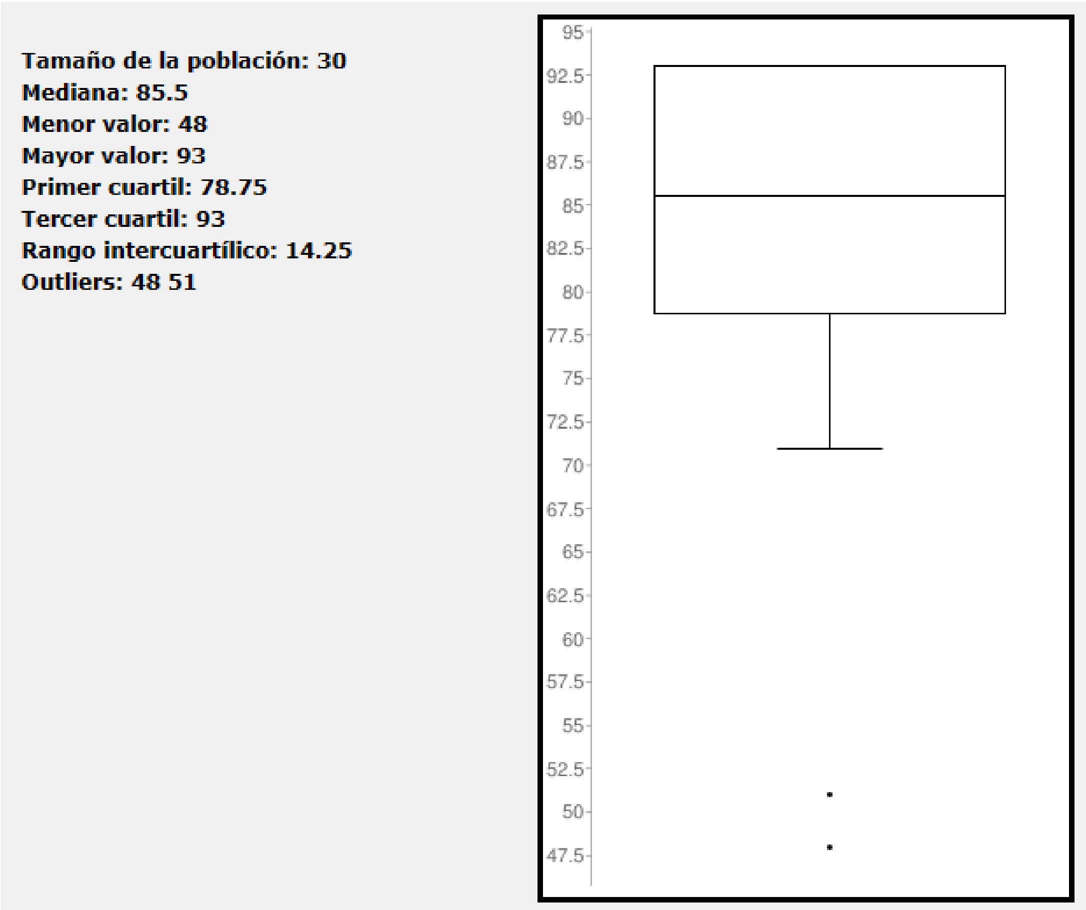


Figura 5. Gráfica de caja del resultado del examen general del grupo experimental.

En la figura 5, se observan en la parte inferior los dos valores atípicos del grupo experimental que son los que provocan el sesgo tan marcado en la distribución.

Con los datos obtenidos en cada grupo, se realizó una prueba de hipótesis de t para la diferencia de medias de 2 muestras independientes con la que se busca determinar, con un nivel de significancia de 0.05, si la media del resultado del grupo experimental es mayor que la media del resultado del grupo control.

Para la prueba se establecieron las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula: la media del grupo 1 es igual que la media del grupo 2.

$$H_0 \rightarrow \underline{x}_1 = \underline{x}_2$$

Hipótesis alterna: la media del grupo 1 es mayor que la media del grupo 2.

$$H_A \rightarrow \underline{x}_1 > \underline{x}_2$$

Siendo el grupo 1 el grupo experimental y el grupo 2 el grupo control.

De acuerdo con las hipótesis planteadas, la prueba es de una cola y la región de rechazo de la hipótesis nula se encuentra en la cola superior de la distribución. El valor crítico de la distribución t para el área de rechazo con 58 grados de libertad es de 1.6772; por lo tanto, la regla de decisión es:

Rechazar H_0 si $t_{estad} > 1.6772$; en caso contrario, no rechazar H_0.

La prueba de t se llevó a cabo en Excel y se obtuvo lo siguiente:

	Grupo 1	*Grupo 2*
Media	82.9666667	75.4666667
Varianza	128.447126	349.429885
Observaciones	30	30
Varianza agrupada	238.9385057	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	58	
Estadístico t	1.879160267	
P(T<=t) una cola	0.032625054	
Valor crítico de t (una cola)	1.671552762	

Tabla 6. Prueba de t de la diferencia de las medias de los grupos experimental y control.

Dado que el valor del estadístico t_{estad} es 1.8792, entonces $t_{estad} > 1.6772$, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Existe evidencia estadística para decir que la media del resultado del grupo experimental es mayor que la del grupo control.

La tabla 6 muestra también el valor de p, siendo $p = 0.0326$. Al ser menor que el nivel de significancia, entonces se reitera que se rechaza la hipótesis nula.

El intervalo de confianza para la diferencia de las medias de los resultados de ambos grupos queda de la siguiente manera:

$$-0.526 \leq \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \leq 15.53$$

Por lo tanto, se tiene un 95% de confianza de que la diferencia entre la media del grupo experimental y el grupo control está entre -0.526 y 15.53.

Los resultados del cuestionario de introspección para conocer el sentir del grupo experimental acerca del método de enseñanza, fueron los siguientes:

¿Cómo consideras que fue tu aprendizaje del teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas?		
Bueno	Regular	Malo
26	4	0
¿Cómo consideras que fue tu aprendizaje de las leyes de senos y cosenos?		
Bueno	Regular	Malo
21	5	4
¿Qué tan seguro te sientes al resolver problemas que involucren calcular los lados de un triángulo?		
Muy seguro	Medio seguro	Poco seguro
22	7	1
¿Qué tan seguro te sientes al resolver problemas que involucren calcular los ángulos de un triángulo?		
Muy seguro	Medio seguro	Poco seguro
19	8	3
¿Te consideras capaz de resolver (obtener los lados y ángulos) de cualquier triángulo que requieras?		
Sí		No
27		3
¿Qué tan satisfecho te sientes con tu desempeño durante la realización del problemario?		
Muy satisfecho	Medio satisfecho	Poco satisfecho
26	3	1

Tabla 7. Cuestionario de introspección.

Las porcentajes de las respuestas obtenidas se representan por medio de gráficos circulares.

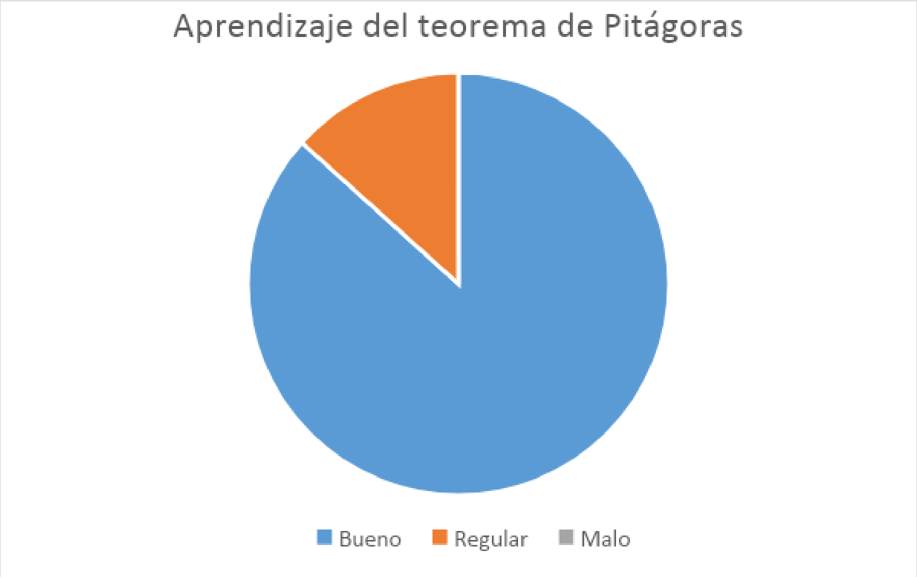


Figura 6. Gráfico circular del aprendizaje del teorema de Pitágoras.

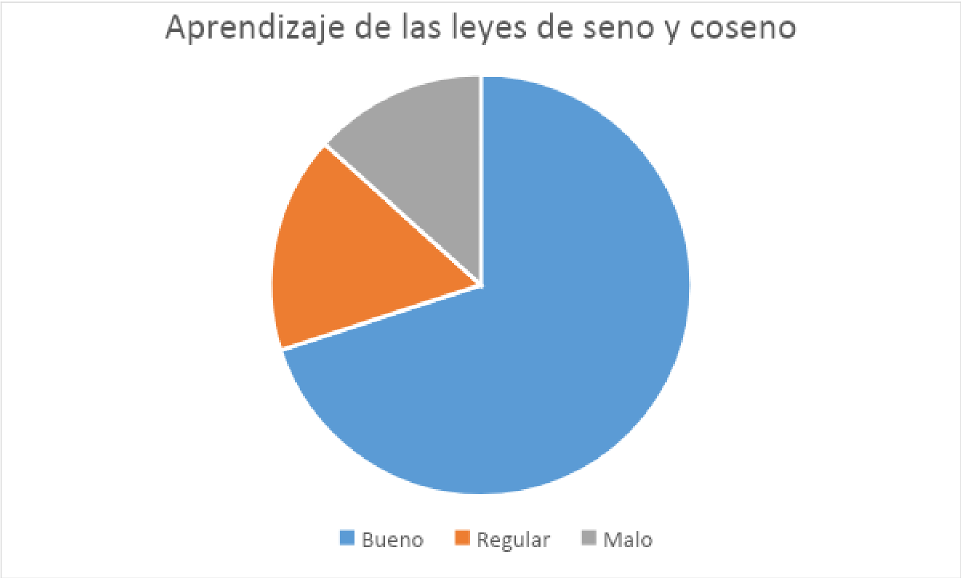


Figura 7. Gráfico circular del aprendizaje de las leyes de seno y coseno.

En la Figura 7 y Figura 8 se observa que un mayor número de alumnos consideran que su aprendizaje del teorema de Pitágoras fue bueno en comparación con el de las leyes de seno y coseno.

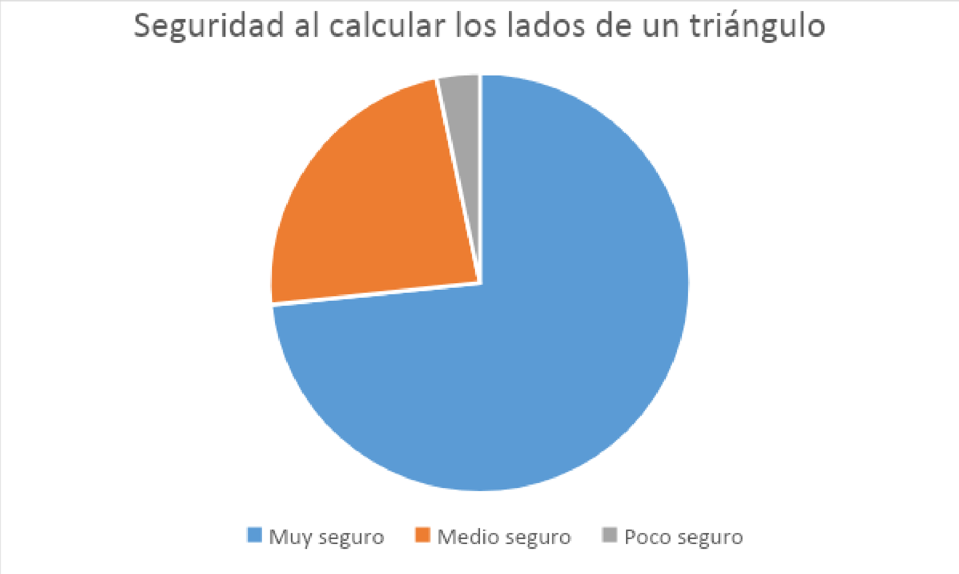


Figura 8. Gráfico circular de la seguridad al calcular los lados de un triángulo.

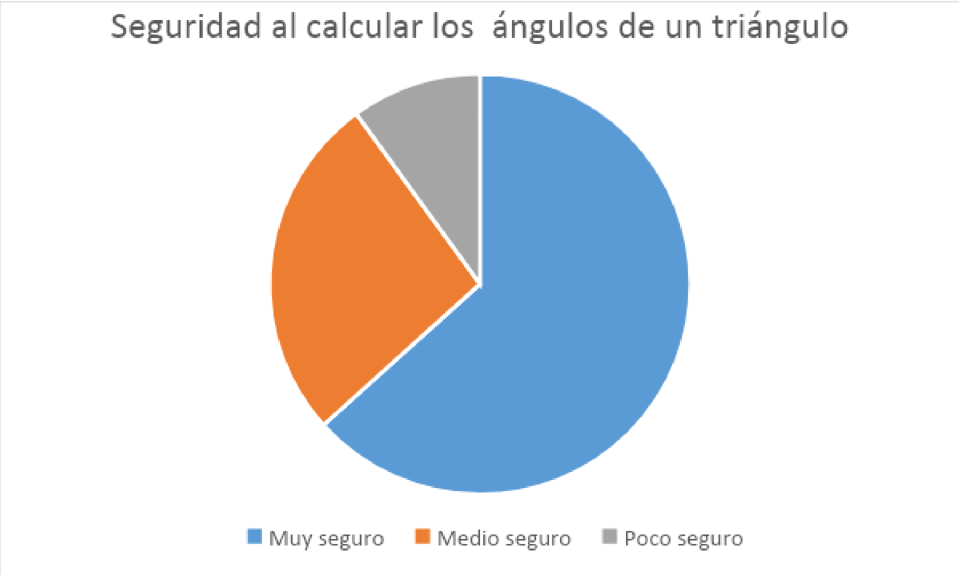


Figura 9. Gráfico circular de la seguridad al calcular los ángulos de un triángulo.

En las Figuras 8 y Figura 9, se observa que los alumnos se sienten más seguros en calcular los lados de un triángulo que en calcular sus ángulos. Esta percepción de los alumnos respecto a que se sienten más seguros calculando los lados en lugar de los ángulos de un triángulo puede estar influenciada por la dificultad que para ellos representó el despejar el ángulo de las funciones trigonométricas para el caso de los triángulos rectángulos y lo mismo para las leyes de seno y coseno, es decir, para el alumno fue más retador el utilizar las funciones trigonométricas inversas para poder calcular los ángulos; sobre todo, alternar entre radianes y grados ya que en los ejercicios, los resultados se pedían en ambas unidades indistintamente.

Figura 10. Gráfico circular de la capacidad para resolver un triángulo.

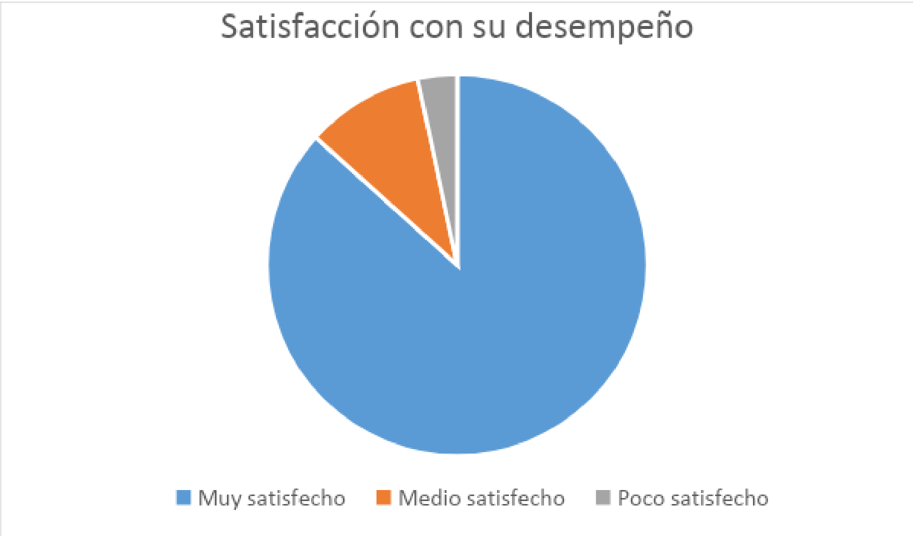


Figura 11. Gráfico circular de la satisfacción con su desempeño en el problemario.

Finalmente, en la Figura 11, se muestra que 26 de los 30 alumnos se sienten muy satisfechos con su desempeño en el problemario mientras que 1 se siente poco satisfecho.

Se comparó el grado de aprendizaje que los alumnos sintieron respecto al teorema de Pitágoras y a las leyes de seno y coseno; la Figura 12 muestra que 26 alumnos consideran bueno su aprendizaje del teorema de Pitágoras y solamente 21 de las leyes de seno y coseno; y mientras que no hubo ninguno que considere malo su aprendizaje del teorema de Pitágoras, sí hubo 4 que lo hacen con las leyes de seno y coseno. Esta diferencia en el sentir del aprendizaje de los alumnos puede ser debido a que los alumnos manifestaron ya haber visto el teorema de Pitágoras en la secundaria mientras que las leyes de seno y coseno resultaron un tema nuevo para ellos. Así, el tema del teorema de Pitágoras resulto un repaso para ellos lo que permitió reforzar lo que ya sabían.

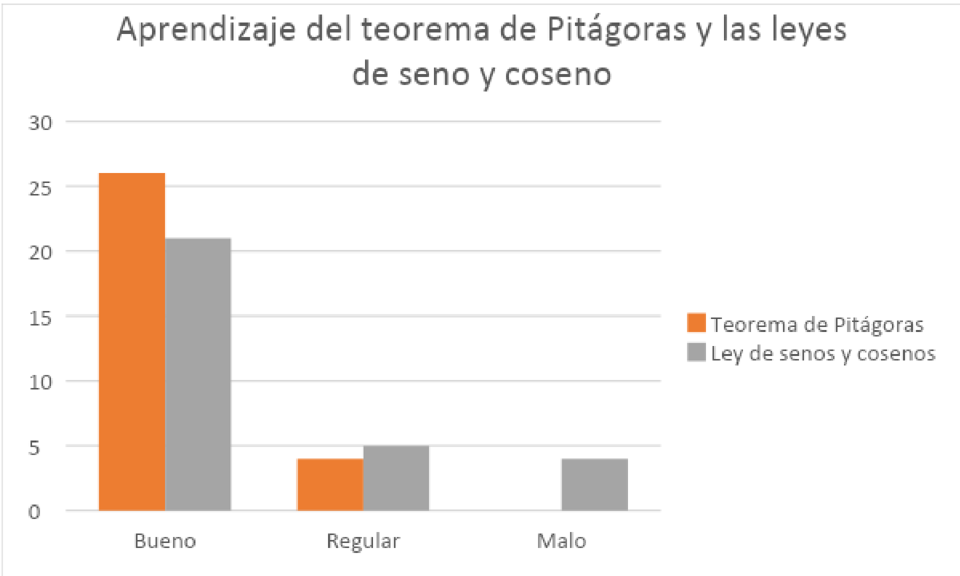


Figura 12. Gráfico de barras del aprendizaje del teorema de Pitágoras y las leyes de seno y coseno.

Para hacer un análisis más a fondo de estos datos y poder establecer si hay relación entre la satisfacción del alumno con su desempeño y la capacidad que siente para resolver los triángulos se realizó la siguiente tabla de contingencia.

Cuenta de Capacidad para resolver triángulos	**Satisfacción con su propio desempeño**			
Capacidad para resolver triángulos	**Medio satisfecho**	**Muy satisfecho**	**Poco satisfecho**	**Total general**
No **%**	1 3.33%	1 3.33%	1 3.33%	3 10%
Sí **%**	2 6.66%	25 83.33%	 0%	27 90%
Total general **%**	3 10%	26 86.66%	1 3.33%	30 100%

Tabla 8. Tabla de contingencia de la capacidad para resolver triángulos y la propia satisfacción del alumno con su desempeño.

Los resultados obtenidos muestran que el 90% de alumnos consideran tener la capacidad para resolver cualquier triángulo y de ellos, el 83.33% se sienten muy satisfechos con su desempeño. Por el contrario, del 10% que no se siente capaz de resolver un triángulo, el 3.33% se siente poco satisfecho con su desempeño.

Con estas dos preguntas mostradas en la tabla de contingencia, se llevó a cabo una prueba de independencia de chi cuadrada para determinar si existe relación entre la capacidad del alumno para resolver triángulos y su satisfacción con su propio desempeño; para dicha prueba se utilizó un nivel de significancia de 0.05. Las hipótesis planteadas fueron:

Hipótesis nula:

$H_0 \rightarrow$ No existe relación entre la capacidad del alumno para resolver triángulos y su satisfacción con su propio desempeño.

Hipótesis alterna:

$H_A \rightarrow$ Sí existe relación entre la capacidad del alumno para resolver triángulos y su satisfacción con su propio desempeño.

Las tablas de contingencia con las frecuencias esperadas (f_e) y las frecuencias observadas(f_o) se muestran a continuación en las Tablas 9 y 10 respectivamente:

Cuenta de Capacidad para resolver triángulos	**Satisfacción con su propio desempeño**			
Capacidad para resolver triángulos	**Medio satisfecho**	**Muy satisfecho**	**Poco satisfecho**	**Total general**
No	1	1	1	3
Sí	2	25		27
Total general	3	26	1	30

Tabla 9. Frecuencias esperadas.

Cuenta de Capacidad para resolver triángulos	**Satisfacción con su propio desempeño**			
Capacidad para resolver triángulos	**Medio satisfecho**	**Muy satisfecho**	**Poco satisfecho**	**Total general**
No	0.3	2.6	0.1	3
Sí	2.7	23.4	0	27
Total general	3	26	1	30

Tabla 10. Frecuencias observadas.

Se calculó el estadístico de prueba y se obtuvo lo siguiente:

$$x^2{}_{estad} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n}(f_o - f_e)^2}{f_e} = 11.008$$

El valor crítico de chi cuadrada ($x^2{}_{\alpha}$), considerando el nivel de significancia de 0.05 y 2 grados de libertad es de 4.03. Los grados de libertad se determinaron multiplicando el número de renglones menos 1 por el número de columnas menos 1.

Para esta prueba, la hipótesis nula será rechazada si el valor calculado del estadístico de prueba ($x^2{}_{estad}$) es mayor que el valor crítico $x^2{}_{\alpha}$ de la cola superior de la distribución chi cuadrada con 2 grados de libertad. La regla de decisión para este caso es:

Rechazar H_0 si $x^2{}_{estad} > 4.03$; de lo contrario, no rechazar H_0.

Dado que $x^2{}_{estad} = 11.008$, se toma la decisión de rechazar la hipótesis nula y, por lo tanto, se determina que existe evidencia de una fuerte relación entre la capacidad del alumno de resolver un triángulo y su satisfacción con su propio desempeño.

Para el análisis se utilizó como variable independiente la capacidad para resolver un triángulo y como dependiente la satisfacción con su desempeño en el problemario; el resultado de dependencia obtenido en la prueba de chi cuadrada manifiesta que el alumno siente una mayor satisfacción personal cuando se siente capaz de resolver los problemas por sí mismo.

16. Conclusiones

Al comparar los resultados de los exámenes de trigonometría de los grupos control y experimental, se obtuvo una media superior en el grupo experimental; este resultado permite concluir que el trabajar con el problemario diariamente sí representó un impacto positivo en el aprendizaje de los alumnos. Mientras que los alumnos del grupo control siguieron una metodología de enseñanza tradicional con clases guiadas por el docente y realizaron ejercicios en clase en sus cuadernos de la manera tradicional, el grupo experimental recibió el problemario basado en el aprendizaje significativo progresivo con el cual, cada alumno pudo avanzar en casa a su propio ritmo para asentar su propio conocimiento. Este trabajo autodidacta permitió al alumno sentirse dueño de su propio aprendizaje ya que, durante las sesiones en el salón de clase, los alumnos preguntaban sus dudas con el afán de poder avanzar en casa con el problemario. Incluso, vale la pena mencionar que un grupo de 4 alumnos realizaron, por iniciativa propia, competencias de quién lograba un mayor avance diario de los ejercicios;

considero que este fue un gran motivante para ellos que fomentó una competencia sana en ese grupo de alumnos.

Además, al realizar la práctica diaria y corregirla en el salón, los alumnos lograron identificar sus fallas y esto se reflejó en un mejor desempeño en el examen. Los alumnos del grupo control que siguieron la enseñanza tradicional, se quedaron solamente con los ejemplos y ejercicios propuestos por el docente, de esta forma, obtuvieron un promedio favorable en el examen pero no tan alto como el del grupo experimental. Es importante mencionar que el aprendizaje significativo es un proceso de participación activa donde el estudiante relaciona el conocimiento que ya tiene con el nuevo, y esta participación implica que el alumno mismo se "auto-explique" siguiendo los ejemplos del problemario y adquiera el conocimiento. Así, como dijo Cicerón, "si quieres aprender, enseña" (106-43 a.C.) y es con esta premisa, con la que considero que se explica el que se haya logrado un mejor resultado en el grupo experimental donde los alumnos se enseñaron a sí mismos y en ese momento lograron formar y afianzar mejor las estructuras cognitivas para su propio aprendizaje.

Respecto a la seguridad que los alumnos del grupo experimental manifestaron en el cuestionario de introspección, se observó que, en su mayoría, sienten una gran seguridad al momento de resolver cualquier triángulo que se les presente. Después de haber presentado el examen, algunos alumnos comentaron que no lo habían sentido como examen sino que habían tenido la sensación de que era un ejercicio más del problemario; este es un aspecto remarcable ya que al generar seguridad y confianza en el alumno, se logra disminuir el estrés que usualmente provocan los exámenes y que puede ocasionar errores al resolver los ejercicios.

En cuanto a la satisfacción con su propio desempeño, más del 85% de estudiantes se manifestó muy satisfecho, esto se debe también a que el alumno fue consciente de que su trabajo diario le permitió entender los temas y aprender siguiendo los ejemplos por sí mismo; un punto importante del aprendizaje significativo es, justamente, el refuerzo positivo que se genera al aumentar la autoestima del alumno cuando él mismo se da cuenta de que entiende los ejercicios y que los temas aumentan en grado de dificultad de manera tan paulatina que le es posible ir conectando lo que ya sabe con la nueva información.

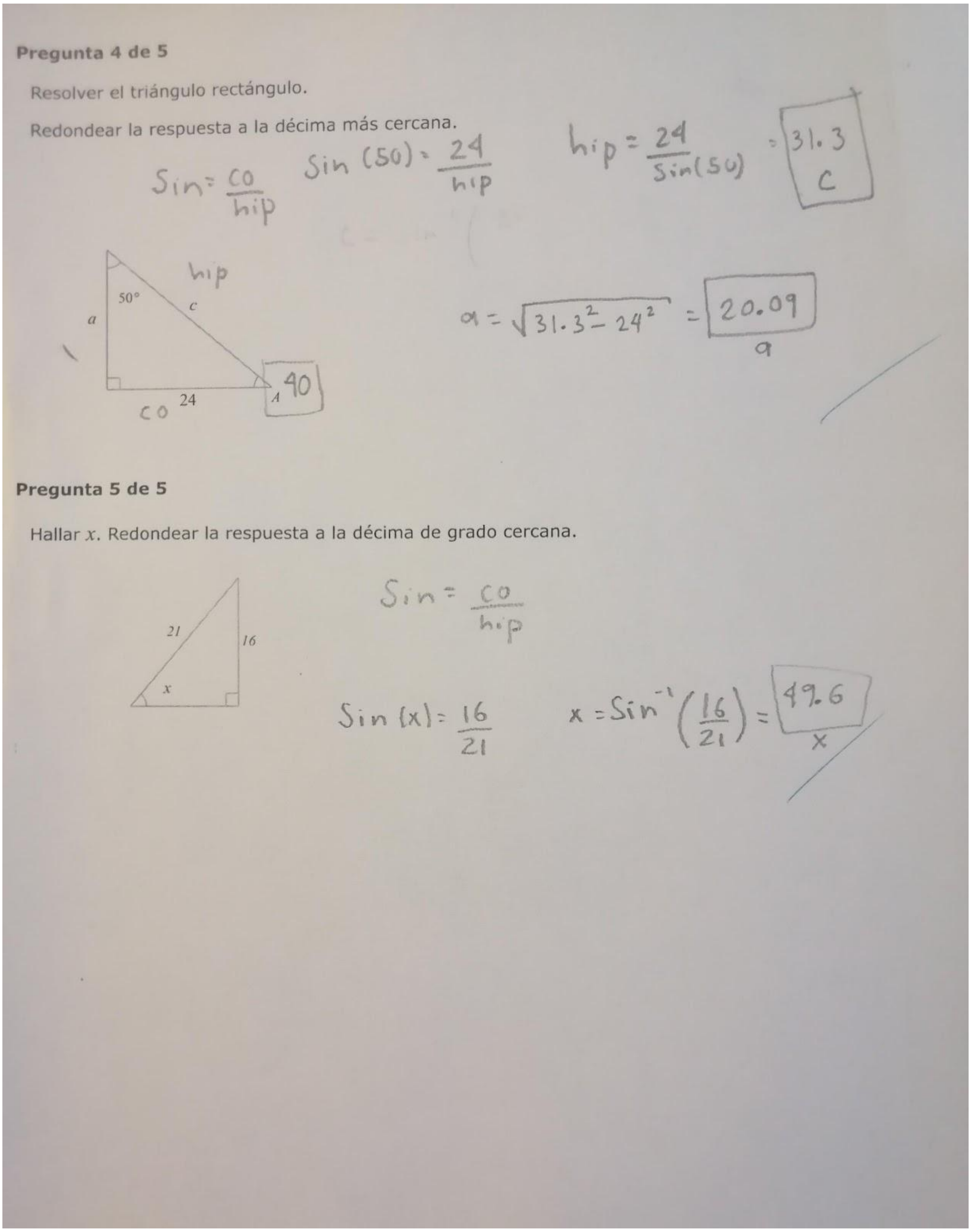
Al finalizar el periodo de experimentación, el grupo experimental se mostró motivado por los resultados obtenidos. Es importante mencionar que el cuestionario de introspección se aplicó antes que el examen de conocimientos para que los resultados no se vieran influenciados, y que las opiniones de los alumnos estuvieran basadas solamente en su percepción con el trabajo del problemario y la dinámica de clase, en la que el docente solamente guiaba y daba pistas cuando lo creía necesario, dejando que ellos mismos descubrieran la solución.

El reconocimiento y la valoración del docente hacia el alumno jugaron un papel importante para aumentar la motivación de los alumnos quienes gracias a las correcciones que recibían por parte de sus demás compañeros y del docente fueron perdiendo el miedo al error. Esta pérdida del miedo lleva de la mano que el alumno no le tema al examen, sino que lo vea como una oportunidad para demostrar y aplicar lo que ha aprendido.

Adicionalmente, en el salón del grupo experimental se generó un ambiente muy participativo en el sentido de que entre los mismos alumnos compararon sus respuestas y se corrigieron unos a otros; salvo un par de alumnos que se mostraron poco participativos, los demás mostraron apertura y motivación por el método. Por el contrario, en el grupo de la enseñanza tradicional, la participación de los alumnos era más individualista, aun al hacer algunos trabajos en equipo, los alumnos no se mostraban tan motivados por aprender y por ayudarse entre ellos como en el grupo experimental.

17. Anexo

A continuación, se muestran algunos de los exámenes presentados por los alumnos.



Pregunta 4 de 5

Resolver el triángulo rectángulo.

Redondear la respuesta a la décima más cercana.

$\text{Sin} = \frac{co}{hip}$ $\quad \text{Sin}(50) = \frac{24}{hip}$ $\quad hip = \frac{24}{\text{Sin}(50)} = \boxed{31.3}$ c

$\boxed{90}$

$a = \sqrt{31.3^2 - 24^2} = \boxed{20.09}$ a

Pregunta 5 de 5

Hallar x. Redondear la respuesta a la décima de grado cercana.

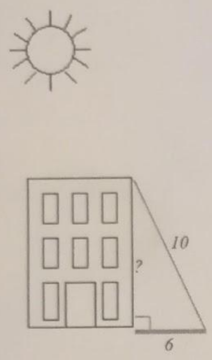
$\text{Sin} = \frac{co}{hip}$

$\text{Sin}(x) = \frac{16}{21}$ $\quad x = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{16}{21}\right) = \boxed{49.6}$ x

Número de preguntas: **5** Nombre del instructor: **Martínez Anaya**

Pregunta 1 de 5

La longitud de la sombra de un edificio es 6 m. La distancia desde la cima del edificio a la punta de la sombra es 10 m. Hallar la altura del edificio. De ser necesario, redondear la respuesta a la décima más cercana.



cateto = 6
hipotenusa = 10
cateto = x

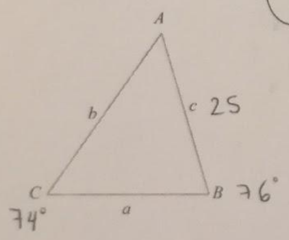
$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

Pregunta 2 de 5

Consideremos el triángulo ABC como el que se muestra adelante. Supongamos que $B=76°$, $C=74°$, y $c=25$. (La figura no está trazada a escala.) Resolver el triángulo.

Redondear sus respuestas a la décima más cercana.

$180 - 74 - 76 = 30$



ley de senos

$$\frac{a}{Sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{Sen(c)}$$

$$\frac{b}{sen(76)} = \frac{25}{sen(74)}$$

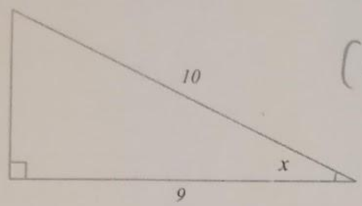
$$b = \frac{25\,Sen(76)}{Sen(74)} = 25.23$$

$$\frac{b}{sen(76)} = \frac{a}{sen(A)}$$

$$a = \frac{25.27\,Sen(30)}{sen(76)} = 13.02$$

Pregunta 5 de 5

Hallar x. Redondear la respuesta a la décima de grado cercana.



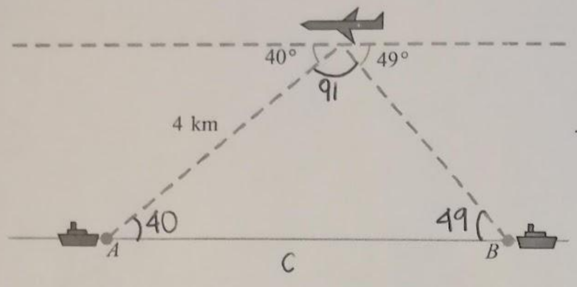
$$\cos x = \frac{c.a}{hip}$$

$$\cos x = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$x = \cos^{-1}(0.9) = 25.84$$

Pregunta 3 de 5

Un piloto vuela sobre el océano. Ella determina que los ángulos de depresión hacia dos barcos son $49°$ y $40°$ como se muestra en la figura a continuación. Si el avión está a 4 kilómetros desde el barco ubicado en el punto A, ¿a qué distancia están los barcos? Redondear la respuesta a la décima más cercana de un kilómetro.



$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\operatorname{Sen}(A)}$$

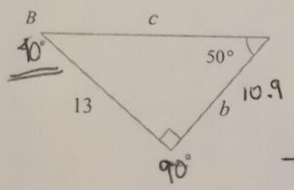
$$\frac{c}{\sin(91)} = \frac{4}{\sin(49)}$$

$$c = \frac{4\sin(91)}{\sin(49)} = \underline{5.29\text{km}}$$

Pregunta 4 de 5

Resolver el triángulo rectángulo.

Redondear la respuesta a la décima más cercana.



$$\sin(40) = \frac{10.9}{c}$$

No

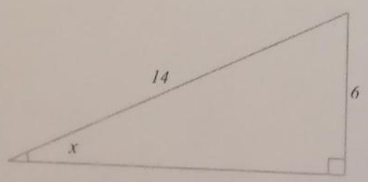
$$\cancel{c = \frac{\sin(40)}{10.9}}$$

$$c = \frac{10.9}{\sin(40)} = 16.95 \approx \underline{17.0}$$

$$\tan(40) = \frac{b}{13} \quad b = 13\tan(40) = \underline{10.9}$$

Pregunta 5 de 5

Hallar x. Redondear la respuesta a la décima de grado cercana.



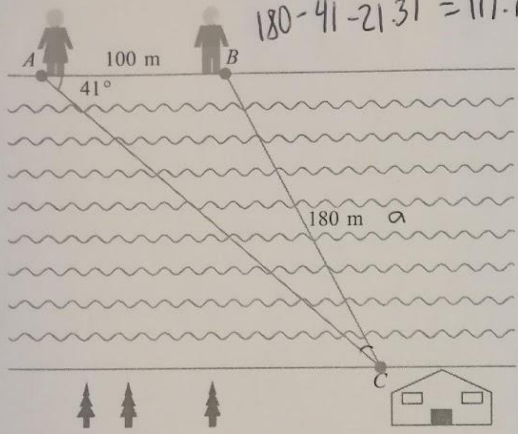
$$x = \sin^{-1}\left(\frac{6}{14}\right) = \underline{25.37}$$

Pregunta 3 de 5

Maite y Pedro están parados en la orilla de un río separados por una distancia de 100 metros en los puntos A y B respectivamente (ver la figura siguiente). Pedro está a 180 metros desde una casa ubicada a través del río en el punto de C. Vamos a suponer que el ángulo A mide $41°$. ¿Cuál es la medida del ángulo B ? Redondear la respuesta a la décima más cercana de un grado.

$180-41-21.37=117.62$

$\boxed{117.6}$



$$\frac{180}{\text{Sen}(41)}=\frac{100}{\text{Sen}\,C}$$

$C=21.37$

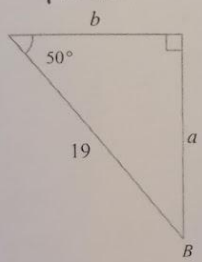
Pregunta 4 de 5

Resolver el triángulo rectángulo.

Redondear la respuesta a la décima más cercana.

$\cos(50)=\frac{b}{19}$ $\quad b=19\cos(50)=12.21$

12.2



$\sqrt{19^2-12.2^2}=14.6$

$180-50-90=40$

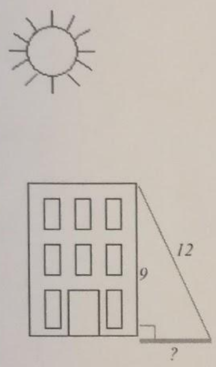
$b=12.2$
$a=14.6$
$B=40$

Pág. 2 / 4

Pregunta 1 de 5

Un edificio que mide 9 m proyecta una sombra. La distancia desde la cima del edificio a la punta de la sombra es 12 m. Hallar la longitud de la sombra. De ser necesario, redondear la respuesta a la décima más cercana.

$\sqrt{12^2-9^2} = 7.9$

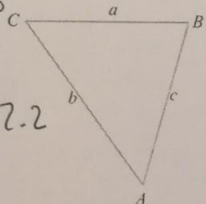


Pregunta 2 de 5

Consideremos el triágulo ABC como el que se muestra adelante. Supongamos que $A=98°$, $C=26°$, y $a=25$. (La figura no está trazada a escala.) Resolver el triángulo.

Redondear sus respuestas a la décima más cercana.

26 25



192.2

98

$\leftarrow 180-98-26=56$

$\frac{98}{sen(25)} = \frac{c}{sen(26)}$ $c=101.7$ X

$\frac{98}{sen(25)} = \frac{b}{sen(56)}$ $b=192.2$ X

Nombre del estudiante: Alan Estrada Hernandez

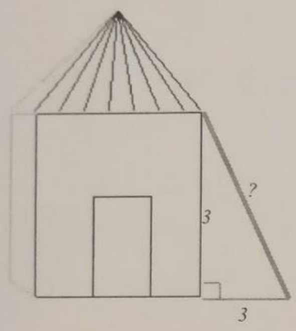
Número de preguntas: **5**

Clase: **Maths III 630**

Nombre del instructor: **Martínez Anaya**

Pregunta 1 de 5

Una escalera está inclinada contra el lado de una casa. La cima de la escalera está a 3 m del suelo. L parte inferior de la escalera está a 3 m del lado de la casa. Hallar la longitud de la escalera. De ser necesario, redondear la respuesta a la décima más cercana.



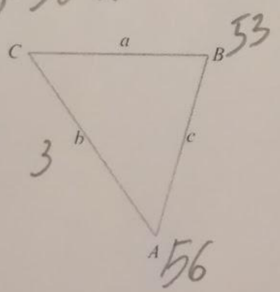
$$hip = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.2$$

Pregunta 2 de 5

Consideremos el triángulo ABC como el que se muestra adelante. Supongamos que $A=56°$, $B=53°$, $b=3$. (La figura no está trazada a escala.) Resolver el triángulo.

Redondear sus respuestas a la décima más cercana.

$180-56-53=71$



$$\frac{3}{Sen(53)} = \frac{a}{Sen(56)} \qquad a = 3.11$$

$$\frac{3}{Sen(53)} = \frac{c}{Sen(71)} \qquad c = 3.5$$

18. Referencias bibliográficas

- Aebli, H. (1991). *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo*. Madrid, España: Narcea
- Ausubel, D. P. Novak, J. D., Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Trías Ed., México
- Brooks, B. Grenon, H. (1999). *In search of understanding: The case for Constructivist classrooms.* Association for supervision & curriculum. USA.
- Benitez, J. L (2014). *Educación para la convivencia en contextos escolares: una propuesta de intervención contra los malos tratos entre iguales*. Apuntes de Psicología, 1, 23. 27-40.
- Caballero Sahelices. (2003). *La progresividad del aprendizaje significativo de conceptos.* [Ponencia]. IV Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo, Maragogi, Brasil.
- Correa, M. Molfino, V. Schaffel, V. (2018). Matemática educativa: una visión ilustrada de su evolución. *Scielo*, 30(2). Recuperado de: 1665-5826-ed-30-02-232.pdf (scielo.org.mx)
- Delgado, M., Arrieta, X., Camacho, H. (2012). Comparación de teorías relacionadas con la formación de conceptos científicos. *Multiciencias*, 12(4), 416-426 Recuperado de: Redalyc.Comparación de teorías relacionadas con la formación de conceptos científicos.
- INEE. (2015). *Desempeño de los estudiantes al final de la Educación media superior en PISA 2015.* Recuperado de: Desempeno-de-estudiantes.pdf (inee.edu.mx)
- Díaz, B. (2003). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. Ed. Mc Graw Hill
- Galván, A. , Siado, E. Enseñanza tradicional: Un modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Cienciamatria: Revista Interdisciplinaria de Humanidades, Educación, Ciencia y Tecnología*, 7(12). Recuperado de: Dialnet-EducacionTradicional-7915387.pdf
- García, S., López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa.* Instituto Nacional para la

Evaluación de la Educación (INEE). Recuperado de: Portada_LaEnsenazadelaGeometria (inee.edu.mx)

- Instituto Bicultural JeanPiaget.(2018). *Teoría del Aprendizaje de Jean Piaget.* Recuperado de: Teoría del Aprendizaje de Jean Piaget - Instituto Jean Piaget Moroleón, Guanajuato. MX (ijeanpiaget.edu.mx)
- Kamii, C. (1994). *La autonomía: el fin educativo de Piaget*. Reinventando la aritmética II (pp. 65-73). Madrid, España: Aprendizaje Visor
- Lozano, A.(2015). La RIEMS y la formación de los docentes de la Educación Media Superior en México: antecedentes y resultados iniciales. *Perfiles educativos.* 37. Recuperado de: La RIEMS y la formación de los docentes de la Educación Media Superior en México: antecedentes y resultados iniciales (scielo.org.mx)
- Martínez, G. Valle, M. García, J. (2019).Las matemáticas son para ser aplicadas: Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Revista Educación Matemática*, 31 (1).
- Mazzitelli, M. (2020). *Desarrollo de habilidades básicas a través del estudio de mosaicos.* Instituto Superior de Profesorado Técnico. Recuperado de: Mazzitelli2018Desarrollo.pdf (uniandes.edu.co)
- Moreano, G, et al. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*. Lima, Perú. Recuperado de: Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales (bvsalud.org)
- Nieda, J., & Macedo, B. (1997). *Un currículo científico para estudiantes de 11-14 años*. Madrid: UNESCO
- Osuna, C., Díaz, K., Gárate, A., Contreras, C., Murillo, O. (2016). *Variables asociadas al abandono escolar en Educación Media Superior. Resultados de la Encuesta a jóvenes que abandonaron la educación media superior en el ciclo escolar 2013,* El papel de sus padres y docentes, [Reporte de investigación]. Mexicali, BC: CETYS Universidad. Recuperado de: el logro del aprendizaje en matemáticas:

asignatura pendiente en la agenda de las políticas educativas en méxico, para la educación media superior (redalyc.org)

- Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2018-Resultados. Recuperado de: [Title] (oecd.org)
- Ramírez, M. Páez, D. Muñoz, D. (2019). *Aprendizaje autónomo, favorecedor de la experiencia adaptativa en alumnos y docentes: la división con números decimales.*
- Rodríguez, M. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. *Revista Electrònica d'Investigacio i Innovacio Educativa i Socioeducativa,* 3(1). Recuperado de: Microsoft Word - vol3_num1_maq.doc (educacion.gob.es)
- Rodríguez, R. (2017). *Matemáticas en países asiáticos. El caso de Singapur.* [Entrada de internet]. Recuperado de: Matemáticas en países asiáticos. El caso de Singapur – Educación Futura (educacionfutura.org)
- Rue, J.(2009). *El Aprendizaje Autónomo en Educación Superior*. Ed. Narcea. Madrid, España.
- (s/a).(2013). Los países asiáticos encabezan el último estudio PISA elaborado por la OCDE sobre el estado de la educación mundial. Recuperado de: OCDE: países asiáticos encabezan el último estudio PISA sobre el estado de la educación mundial – Organización Internacional de Policías (oipol.org)
- (OIT). (2012). *Resultados PISA 2012*. Organización Internacional del trabajo. Recuperado de: Resultados PISA 2012 - OCDE | OIT/Cinterfor (oitcinterfor.org)