UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA
INCORPORADA A LA U.N.A.M.
Escuela de Ciencias Químicas

APLICACIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL A ALGUNOS PROBLEMAS DE INGENIERIA QUIMICA

HECTOR LEAÑO A.

1969

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

INCORPORADA A LA U.N.A.M.

ESCUELA DE CIENCIAS QUIMICAS.

" aplicaciones de la programación lineal a algunos problemas de ingeniería química. "

HECTOR V. FCO. IBAÑO ACEVES

INGENIERIA QUIMICA

1969

JURADO QUE REVISO Y APROBO LA SIGUIENTE TESIS

PRESIDENTE: ING. MIGUEL A. VARGAS DIAZ

VOCAL: DR. ERNESTO DOMINGUEZ QUIROGA

SECRETARIO: ING. LUIS VERGARA ANDERSON

1er SUPLENTE: ING. JULIO LARA HIDALGO

2do SUPLENTE: ING. ALEJANDRO PURON DE LA B.

SITIO DE DESARROLLO DEL TEMA:

BIBLIOTECA DE LA U.I.A.
BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE QUIMICA U.N.A.M.
BIBLIOTECA DEL I.M.I.T.
BIBLIOTECA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

SUSTENTANTE: HECTOR LEAÑO ACEVES ______________________

ASESOR DEL TEMA: ING. LUIS VERGARA ANDERSON______________________

A TI, NATURALMENTE.

"YOU CAN NOT UNDERSTAND A THING UNLESS YOU GIVE IT A NUMBER..."

I N D I C E

INTRODUCCION

La finalidad de este trabajo, es presentar la aplicación de la Programación Lineal en la solución de problemas en el campo de la ingeniería química.

Así veremos como enunciados que aparentemente carecían de una relación clara con la Programación Lineal y cuya solución estaba condicionada a métodos de prueba-error son ahora acomodados dentro de la forma general del algoritmo propuesto por Dantzig con las consecuentes ventajas.

El contenido general de la tesis presenta dos partes, la primera contiene las bases teóricas del problema de la Programación lineal, así como la exposición del método Simplex y algunas de sus propiedades, no en una forma exaustiva aunque si lo suficientemente profunda para hacer uso de ella en la segunda parte. En esta segunda parte se pretende hacer resaltar el contraste entre los sencillos modelos matemáticos lineales por un lado, y el planteamiento en base a esos modelos de los complicados enunciados a algunos problemas específicos de ingeniería, por el otro. Esos problemas aunque específicos, han sido escogidos en tal forma que proporcionen un criterio en la aplicación de las técnicas de programación en una forma más general.

La solución de un problema se puede dividir en dos etapas: a) el planteamiento teórico del mismo, que constituye la parte más difícil, requiriéndose la habilidad del ingeniero para tomar en forma correcta los factores que intervienen en él.

b) la solución numérica, que en los problemas reales suele ser extremadamente laboriosa, sin embargo el método Simplex y algunas variaciones de él ya han sido codificados para la mayor parte de las calculadoras electrónicas de que se dispone actualmente, de manera que una vez establecidas la función objetivo y las restricciones de un problema, el resto se reduce a la aplicación de una rutina mecánica de naturaleza muy simple.

CAPITULO I

NATURALEZA DE LA PROGRAMACION LINEAL

En un momento cualquiera en un proceso, en un diseño o en la selección de alguna alternativa se dispone de unas cantidades dadas de varios factores de producción y de cierto número de tareas a las que aquéllos se pueden destinar, por lo general de muchas maneras distintas, con diversos resultados.

Recientemente se ha originado una nueva clase de problemas de OPTIMIZACION relacionados con las estructuras complejas de organizaciones propias de la sociedad moderna.

Los problemas de Programación Lineal se refieren al uso más eficiente o distribución óptima de recursos limitados, para alcanzar los objetivos deseados. Estos problemas se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen las condiciones básicas de cada problema. La selección de una solución particular como la mejor solución, dependerá en cierto grado del objetivo global implícito en el enunciado del problema.

La llave al problema de Programación lineal es la palabra ENCONTRAR, puesto que es claro que, mientras especificaciones son presentadas como restricciones máximas o mínimas, el producto final puede obtenerse en una gran variedad de caminos, y más importante aún, en una gran variedad de costos y utilidades.

La Programación Lineal busca resolver el problema prescribiendo un camino óptimo de preparación del producto final, de diseño de un proceso o de selección de alguna alternativa al mínimo costo o máxima utilidad.

Tal fué lo descubierto por George B. Dantzig en 1947 como una técnica para planificar las diversas actividades de las Fuerzas Aéreas de los Estados Unidos. La solución al problema de Programación Lineal dada hace apenas 22 años ha sido fuertemente desarrollada en los campos más diversos, contándose con un número impresionante de aplicaciones en la actualidad.

CAPITULO I-A

ELEMENTOS DE LA PROGRAMACION

El problema de la Programación Lineal es generado -- por un fenómeno económico o de organización, en donde intervienen un cierto número de variables que sólo tienen significado cuando son positivas o nulas. Estas variables están ligadas entre sí por relaciones lineales que forman sistemas de ecuaciones o desigualdades llamadas Restricciones del fenómeno. Existe además un objetivo llamado Función Objetiva, que guía la selección de la solución que debe usarse, que es una combinación lineal de las variables y que deberá optimizarse para esa solución. Es claro que esa solución deberá satisfacer además, todas las condiciones del problema.

En general, la combinación de las restricciones lineales con la función objetiva transforma un sistema indeterminado de ecuaciones lineales, (que describen el problema) con - muchas soluciones posibles, en un sistema resoluble por una solución que proporciona el valor óptimo y único para la función objetiva.

Sucede algunas veces que la función objetiva puede - hacerse arbitrariamente grande, (siempre teniendo puntos en común con la región de las soluciones posibles) resultando que - el problema no tiene una solución finita. Sin embargo, las razones del interés en utilizar las técnicas de Programación Lineal radican precisamente en la limitación de recursos y la imposibilidad de lograr ganancias arbitrariamente grandes.

También existen soluciones que no verifican que las variables sean no negativas o nulas, concluyendo que no existe una solución posible; esto es resultado de la no consistencia o incompatibilidad en el sistema de las restricciones, consecuentemente se carece de una solución posible o limitada. La - Técnica de cálculo destinada a resolver este tipo de problemas deberá revelar la existencia de una solución ilimitada o la ausencia de una solución posible.

El hecho de optimizar la función objetivo puede servir tanto para maximizarla como para minimizarla, bastándonos un cambio de signo, ya que en valor absoluto corresponden ambas soluciones.

CAPITULO I-B

ENUNCIADO GENERAL

El problema de la Programación Lineal consiste en encontrar un conjunto de valores x_i (i=1,2,..,n) de un espacio n dimensional, que optimicen a una función objetivo de la forma:

$$z=\sum_{j}^{n} c_j x_j \qquad (B-1)$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,2,..,n \quad (B-2)$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,2,..,m \quad (B-3)$$

donde las a_{ij}, b_i, c_j son constantes dadas, con las $b_i \geq 0$ y $m \leq n$.

Las variables de decisión x_j indican el nivel a que se aplican las diferentes actividades, los coeficientes de costo c_j proporcionan la efectividad de cada unidad de actividad j, donde z es la medida total de efectividad.

El insumo b_i es la cantidad disponible de recurso i, siendo además a_{ij} la cantidad de recurso i que se necesita por cada unidad de actividad j.

El enunciado del problema queda establecido de la siguiente manera: " Dada una unidad de valor para cada producto (c_j) y dado un límite superior para la disponibilidad de cada insumo (b_i) ¿cuántas unidades de cada producto (x_j) deben ser producidas con objeto de maximizar el valor del producto total (z)?

Las formas más comunes en las que este problema puede ser expresado además de la anterior son:

a) Optimizar $z=cX$ (B-4)

Sujeta $X \geq 0$ (B-5)

$AX=B$ (B-6)

Donde $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ vector fila

$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vector columna

$A=(a_{ij})$ matríz mxn

$B=(b_1,b2,...,b_m)$ vector columna

O= vector columna n dimensional nulo.

b) Optimizar $z=cX$ (B-7)

sujeta $x_1P_1+x_2P_2+\dots\dots+x_nP_n=P_o$ (B-8)

considerando los P_j para $j=1,2,\dots,n$ como vectores columna de un espacio m dimensional de la matriz A y siendo $P_o=B$

CONCEPTOS BASICOS

Es necesario establecer ciertas definiciones antes de continuar con el desarrollo del problema (1)

Conjuntos Convexos

Un conjunto de puntos X es un conjunto convexo sí y sólo si dados dos puntos cualesquiera X_1 y X_2 del conjunto, se tiene:

$$aX_1+(1-a)X_2 \in X \qquad \text{para toda } 0\leqslant a\leqslant 1 \tag{B-9}$$

donde E significa "contenido en" o "pertenece a".

De la definición anterior se implica que si los puntos X_1 y X_2 pertenecen a X entonces cualquier punto contenido en el segmento de la recta que une a X_1 y X_2 también pertenece a X, pudiendo por tanto, ser expresado como una combinación convexa de esos puntos.

Análogamente se demuestra que cualquier punto que puede ser expresado como una combinación convexa de 2 puntos en el conjunto X, estará en el segmento de la línea que une a los dos puntos.

Se llama combinación convexa de los puntos $X_1,X_2,\dots,X_n$ a un punto X tal que:

$$X=a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n \tag{B-10}$$

en donde $a_i\geqslant 0$

$\sum a_i=1$

Sólo los puntos extremos de un conjunto convexo no pueden ser expresados como una combinación convexa de otros dos puntos cualesquiera del conjunto.

(1) Para una información completa se puede consultar Bickhoff and S.A. Mac Lane, Survey of Modern Algebra, N.Y., Macmillan 1941. G. Hadley, Linear Programming, Addison-Wesley, 1961.

Se conoce por casco convexo de un conjunto (S) de puntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ al conjunto convexo generado por dichos puntos

Tomando en cuenta lo anterior, el problema general de la programación lineal puede ser descrito matemáticamente de la forma siguiente:

"Sea un conjunto convexo dado, definido por un conjunto lineal de restricciones, en un espacio Euclidiano n dimensional. De todos los puntos que pertenecen al conjunto convexo, deseamos determinar un subconjunto de puntos (que contendrá ya sea uno o varios puntos), para los cuales se optimice una función lineal objetiva"

BASE

Se denomina base en un espacio n dimensional (E_n) a un conjunto de n vectores linealmente independientes. Cualquier vector en E_n puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de la base dada, siendo esta representación única. Consecuentemente se pueden hallar n vectores linealmente independientes en un espacio euclidiano n dimensional, pero no (n+1).

Un conjunto de vectores $P_1, P_2, \ldots P_n$ de una matriz A forman un conjunto linealmente independiente, cuando:

$$a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n = 0$$

donde todas las a_i deberán ser iguales a cero.

Definiciones

El vector $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ que satisfaga las restricciones del problema, constituye una solución posible al mismo.

Una solución posible básica, es una solución posible con no más de m x_i positivas, es decir, con las (n-m) incógnitas secundarias nulas.

Solución posible básica degenerada, es aquélla en la que además de las incógnitas secundarias alguna incógnita básica vale cero.

Solución óptima es la solución posible básica no degenerada que optimiza la función objetiva.

CAPITULO I-C

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN PROGRAMACION LINEAL·

Para encontrar la solución posible óptima es necesario hallar un camino que defina los candidatos que deban ser investigados. Con ese fin se consideran los siguientes teoremas - que fueron demostrados como base al método de solución conocido como el método Simplex de Dantzig.

I) El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Ello significa que toda combinación convexa de dos soluciones posibles cualesquiera, también es una solución posible.

II) La función objetivo presenta su mínimo (o su máximo) en - un punto extremo del conjunto convexo K generado por el conjunto de soluciones posibles al problema. Si alcanza este mínimo - en más de un punto extremo, entonces toma el mismo valor para - toda la combinación convexa de estos puntos particulares.

Consecuentemente sólo las soluciones posibles en los puntos extremos deberán ser examinadas.

III) Si puede encontrarse que un conjunto de $k \leq m$ vectores -- $P_1, P_2, \ldots P_k$ es linealmente independiente y tal que:

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_kP_k=P_o$$

y todas las $x_i \geq 0$, entonces el punto $X_n(x_1,x_2,\ldots x_k,0,\ldots 0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles.

El teorema es muy importante, toda vez que muestra - que no puede haber más de $n!/_{m!(n-m)!}$ puntos extremos, puesto que hay un máximo de n vectores P_j de orden m y la expresión - anterior es el número de combinaciones posibles de n vectores tomados de m en m.

IV) Si $X(x_1,x_2,\ldots x_n)$ es un punto extremo de K entonces los -- vectores P_i asociados a las x_i positivas forman un conjunto linealmente independiente y consecuentemente cuando más m de -- las x_{ij} son positivas.

V) Podemos establecer en base a los teoremas anteriores uno de carácter más general:

$X(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es un punto extremo de K sí y sólamente sí las x_i positivas son coeficientes de vectores linealmente independiente P_j en:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_o$$

Matríz básica es la matriz cuadrada formada por un conjunto de vectores linealmente independientes. Nos referiremos a ella llamándola simplemente la base.

CAPITULO II

METODO SIMPLEX

El método Simplex selecciona un pequeño subconjunto de las $\binom{m}{n}$ soluciones posibles en forma tal que se converja rápidamente a la solución óptima del problema.

Básicamente el algoritmo consiste en obtener un punto extremo de K y determinar el valor de la función objetivo asociado a dicho punto. Si ese valor no es óptimo el método Simplex permite encontrar un punto extremo vecino en donde el valor de la función objetivo es mejor o igual al precedente. De esta manera en un número finito de pasos se llega a la solución óptima o se descubre que el problema no tiene solución, o si ésta es ilimitada.

El establecimiento del método Simplex requiere de las siguientes hipótesis:

1- Que el problema de Programación Lineal tiene solución,

2- Que cada solución posible básica es no degenerada,

3- Y que se conoce una solución básica.

Sea $X(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ la solución conocida y $P_1,P_2,\ldots,P_m$ el conjunto asociado de vectores linealmente independientes, entonces se tendrá:

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots\ldots+x_mP_m=P_o \qquad (1)$$

$$x_1c_1+x_2c_2+\ldots\ldots+x_mc_m=z_o=f(x) \qquad (2)$$

Dado que los vectores $P_i(i=1,2,..,m)$ constituyen una base en el espacio de soluciones posibles, vemos que los vectores $P_j(j=1,2,..,n)$ pueden expresarse como una combinación lineal de los vectores P_i, esto es:

$$\sum_i^m x_{ij}P_i=P_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (3)$$

$$\sum_i^m c_i x_{ij}=z_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (4)$$

VI) Teorema adicional: si se verifica que $z_j-c_j>0$ para cierta j, entonces puede obtenerse un conjunto de soluciones posibles tal que $z<z_o$ para cualquier elemento del conjunto.

En efecto, multiplicando a las expresiones (3) y (4) por un cierto número T y restándoles respectivamente a (1) y -- (2) se obtiene;

$$\sum_{i}^{m}(x_i-Tx_{ij})P_j+TP_j=P_o \qquad (5)$$

$$\sum_{i}^{m}c_i(x_i-Tx_{ij})+Tc_j=z_o-T(z_j-c_j) \qquad (6)$$

Puesto que las variables $x_i(i=1,2,..,m)$ son positivas, es claro que existe un valor de $T>0$ para el cual los coeficientes de los vectores que aparecen en (5) permanecen positivos. - Además como por hipótesis, para cierta j se tiene $z_j-c_j>0$ entonces:

$$z=z_o-T(z_j-c_j)<z_o \qquad (7)$$

Lo cual significa que puede obtenerse una solución posible cuyo valor correspondiente de la función objetivo es menor que el valor adquirido para la solución precedente, (en un problema de minimización).

Existen tres puntos fundamentales que se deben de -- preever en la resolución de un problema de Programación Lineal, y son los siguientes:

1- Saber cuándo la solución es indeterminada, así como reconocer rápidamente la solución óptima,

2- Determinar las soluciones básicas del sistema,

3- Establecer un criterio que nos indique cuál es el vector que sale de la base y cuál el que entra a ella.

1- Para resolver este primer punto se consideran tres posibilidades mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas:

(A) Si $z_j-c_j>0$ para cierta j
y $x_{ij}\leq 0$ para toda i

Entonces, de acuerdo con (5) para toda $T>0$ los coeficientes (x_i-Tx_{ij}) son positivos. Se obtiene así una nueva so lución posible constituída por (m+1) elementos, proporcionada por (5) y (6). De esta forma, tomando T lo suficientemente grande, el valor de la función objetivo en (7) puede hacerse arbitrariamente pequeño, lo cual significa que el problema de programación lineal tiene una solución ilimitada.

(B) Si $z_j - c_j > 0$ para cierta j
y $x_{ij} > 0$ para cierta i

Se constituye una nueva solución posible básica, haciendo $T_0 = \text{mín}_i \frac{x_i}{x_{ij}}$ con $x_{ij} > 0$.

Al sustituirse este valor T_0 en la ecuación (5) uno de los paréntesis se anula (sólo uno, pues se admite que no hay degeneración) y se obtiene una nueva solución que contiene (m-1) vectores de la base original y a P_j.

En estas condiciones se continúa con la aplicación del método en forma iterativa hasta caer en el caso (A) o en el (C).

(C) Si $z_j - c_j \leq 0$ para toda j

Entonces las ecuaciones (1) y (2) constituyen la solución posible mínima, es decir la óptima buscada, habiéndose llegado al fin del problema.

De nuevo es necesaria la hipótesis de que no existen soluciones posibles básicas degeneradas. Puesto que de tener al menos una de las m x_1 de la solución dada igual a cero y consecuentemente T_0 nula, el valor de la nueva solución posible, sería igual al de la solución precedente y esta situación podría continuar durante un cierto número de pasos sucesivos. Existen sin embargo, técnicas de degeneración que eliminan la periodicidad, haciendo posible continuar con la solución del problema.

2- Para la determinación de las soluciones básicas del sistema se sigue el siguiente criterio:

El cálculo se inicia con una solución posible básica y salvo que se tenga alguna idea de la base óptima, conviene iniciar el proceso con una base unitaria (1), la cual puede aparecer en el enunciado mismo del problema u obtenerse mediante la utilización de variables de holgura, o mediante la añadición de vectores artificiales.

Si se supone que el problema original consiste en minimizar a la función lineal:

$$z=\sum_{j}^{n} c_j x_j$$

se consideran tres casos:

(a)Base Artificial:

La función objetivo está sujeta a las restricciones lineales:

$$x_j \geqslant 0$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,2,..,m$$

Al introducir las variables artificiales $x_{n+i} \geqslant 0$ $(i=1,2,..,m)$ obtenemos el siguiente problema equivalente:

minimizar la función objetivo:

$$z=\sum_{j}^{n} c_j x_j + \sum_{i}^{m} M x_{n+i}$$

sujeta a las restricciones:

$$x_j \geqslant 0$$

$$x_{n+j} \geqslant 0$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i=1,2,..,m$$

En donde el número M asociado a las variables de holgura se supone de gran magnitud con el objeto que los vectores artificiales salgan rápidamente de la base. Para el problema equivalente la primera solución posible básica es:

(1) El conjunto de n vectores unitarios $e_1(1,0,..,0), e_2(0,1,0. ..,0)....,e_n(0,0,...,1)$ forman una base en E_n.

$$x_{n+i}=b_i \qquad i=1,2,..,m$$
$$x_j=0 \qquad j=1,2,..,n$$

con un valor correspondiente de la función objetivo:

$$z_0=M\sum_i^n b_i$$

(b) Base con Variables de Holgura:

Supongamos que las restricciones del problema original son:

$$x_j\geqslant 0$$
$$\sum_j^n a_{ij}x_j\leqslant b_i \qquad i=1,2,..,m$$

al introducir las variables de holgura $x_{n+i}\geqslant 0$ (que matemáticamente representan la cantidad de recurso b_i no utilizada), resulta el siguiente problema equivalente:
minimizar a función lineal:

$$z=\sum_j^n c_jx_j+\sum_i^n 0x_{n+i}$$

sujeta a las restricciones:

$$x_j\geqslant 0$$
$$x_{n+i}\geqslant 0$$
$$\sum_j^n a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i \qquad i=1,2,..,m$$

y la primera solución posible para el problema equivalente resulta:

$$x_{n+i}=b_i \qquad i=1,2,..,n$$
$$x_j=0 \qquad j=1,2,..,n$$

cuyo valor correspondiente de la z es cero,
(c) Base Mixta:

Si las restricciones del problema son:

$$x_j\geqslant 0$$
$$\sum_j^n a_{ij}x_j\geqslant b_i \qquad i=1,2,..,m$$

al considerar las variables de holgura $x_{n+i}\geqslant 0$ se obtiene:

$$\sum_j^n a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i \qquad i=1,2,..,m$$

De esta manera al introducir las variables artificiales:

$$x_{n+m+i} \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Se tiene el siguiente problema equivalente: minimizar a la función objetivo:

$$z=\sum_{j}^{n}c_j x_j+\sum_{i}^{m}0x_{n+i}+\sum_{i}^{m}Mx_{n+m+i}$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$\sum_{j}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}+x_{n+m+i}=b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Para el problema equivalente la primera solución posible es:

$$x_j=0 \qquad j=1,2,\ldots,n$$
$$x_{n+i}=0 \qquad i=1,2,\ldots,m$$
$$x_{n+m+i}=b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Con un valor correspondiente a la función objetivo:

$$z=M\sum_{i}^{m}b_i$$

Cabe observar que en general, si el problema original posee al menos una solución posible, entonces esta solución es también una solución posible para el problema original, asegurando que la aplicación del método simplex dará como resultado la solución óptima-

Si el rango de la matriz A de la ecuación:
$AX=B$

es m, la base inicial de la cual se ha hablado, deberá estar compuesta de m vectores unitarios. Se demuestra que si uno de estos m vectores que constituyen una solución posible básica lo sacamos de la base original e introducimos a uno de los (n-m) vectores restantes, el nuevo conjunto de vectores obtenidos de esta forma representa otra solución posible básica.

En base a esta propiedad el segundo punto se reduce entonces, a la obtención de una solución posible básica inicial, asegurando que las soluciones restantes también serán posibles básicas, pues el método simplex pasa de una solución a otra al extraer un vector de la base o introducir uno nuevo a élla.

3- Para determinar cuál es la variable entrante, es decir la variable asociada al vector que formará parte de la nueva base, se aplica el siguiente criterio:

Siendo el problema de minimización, y de entre las variables que tengan la diferencia $z_j - c_j \geqslant 0$ y al menos una $a_{ij} \geqslant 0$ de la columna P_j, se escoge aquélla asociada a la máxima diferencia $z_j - c_j$.

Es decir, si $\quad z_e - c_e = máx(z_j - c_j) \qquad j=1,2,\ldots,n$

entonces $\qquad x_e =$ variable entrante

Con este tipo de elección se pretende que la convergencia del procedimiento iterativo sea más rápida, pues de esta manera se obtiene el máximo incremento posible en el valor de la función objetivo; Si bien no se puede garantizar una disminución en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución óptima.

Cuando existe un empate en las variables entrantes no hay preferencia de elección.

La variable asociada al vector que deberá eliminarse de la base original x_s, será aquella x_i para la cual el cociente:

$$\frac{x_i}{x_{ie}} \quad \text{sea mínimo}$$

es decir,

$$\frac{x_s}{x_{se}} = \left(\frac{x_i}{x_{ie}}\right) mín \qquad \text{para toda } i$$

SISTEMATIZACION DEL CALCULO

La tabla inicial del método simplex, en la que se suponen los vectores unitarios $a_1, a_2, \ldots, a_m$ como la primera base y que aparecían en el sistema de ecuaciones en forma natural o bien fueron agregados hasta formar una base artificial, tiene la siguiente forma (ver tabla A), donde:

P representa la columna en la que aparecen los vectores P_i asociados a las variables básicas.

C es el vector de los coeficientes de costo de las variables básicas.

			c_j	c_1	c_2	c_3	c_j	c_s	c_e	...	c_n
i	P	C	P_o	P_1	P_2	P_3	...	P_s	P_e	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	0	...	0	x_{1e}	...	x_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	0	...	0	x_{2e}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
s	P_s	c_s	b_s	0	0	0	...	1	x_{se}	...	x_{sn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_m	c_m	x_m	0	0	0	1	0	x_{me}	...	x_{mn}
m+1			z_o	0	0	0	0	0	z_e-c_e	...	z_n-c_n

TABLA INICIAL DE COMPUTO DEL METODO SIMPLEX.

TABLA A

Siendo $z_o=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_mx_m$

$$z_j-c_j=(c_1x_{1j}+c_2x_{2j}+\dots+c_mx_{mj})-c_j \qquad j=1,2,..,n$$

Analizando esta tabla A se determina cuál de los tres casos del primer inciso se cumple. Si se llenan las condiciones del A o del C el problema se dá por terminado, si se cumple el caso B entonces se pasa de la tabla A a una segunda tabla B, aplicando el procedimiento de eliminación completa con las siguientes expresiones:

$$x^1_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\dfrac{x_{ej}}{x_{es}}x_{is} & \text{para } i\neq e \\ \dfrac{x_{ej}}{x_{es}} & \text{para } i=e \end{cases}$$

(El superíndice distingue los elementos de la tabla B)

$$x_i^1 = \begin{cases} x_i - \dfrac{x_e}{x_{es}} x_{is} & \text{para } i \neq e \\[2ex] \dfrac{x_e}{x_{es}} & \text{para } i = e \end{cases}$$

En lugar de usar las fórmulas anteriores explícitamente, se sigue un procedimiento sistemático más sencillo que proporciona los mismos resultados. Si llamamos x_{se} al elemento pivote de la tabla A:

1- Dividimos todos los elementos que se encuentran en el mismo renglón del elemento pivote entre el pivote a fin de tener el valor de $x_{se}=1$.

2- Restamos múltiplos o submúltiplos de éste nuevo renglón a renglones paralelos, de tal manera que se obtengan ceros en todos los elementos de la columna asociada al pivote. La tabla 5 una vez terminada la eliminación completa presenta la siguiente forma:

			c_j	c_1	c_2	c_3	...	[illegible]	...	[illegible]	...	c_n
i	P_i	c_i	P_0	P_1	P_2	P_3	...	[illegible]	...	[illegible]	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1'	1	0	0	...	[illegible]	...	0	...	x_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	0	...	[illegible]	...	0	...	x_{2n}'
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
e	P_e	c_e	b_e'	0	0	0	...	[illegible]	...	1	...	x_{en}'
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	...	x_{mn}'

SEGUNDA ITERACION EN [illegible]

TABLA [illegible]

El procedimiento es similar para las siguientes ite raciones hasta que las condiciones del análisis mencionado para la tabla A demuestren que se ha llegado a la solución óptima, o bien que el problema carece de solución.

DEGENERACION

Un problema de Programación Lineal es degenerado - - cuando una o más de sus variables básicas es nula, debido a la presencia de una $T_0=0$.

Al tenerse un caso de degeneración en un problema el valor de la función objetivo permanece sin cambio, es decir se presenta una secuencia de vectores básicos que se repiten pe-- riódicamente, sin incluir la base que proporciona la solución óptima. Se conocen pocos problemas periódicos y estos provienen de planeamientos más bien teóricos que prácticos, sin embargo hay técnicas que resuelven este tipo de complicaciones en caso de que se presenten.

La degeneración puede tener lugar en cualquier etapa del problema y puede eliminarse aplicando métodos de perturbación.

En la tabla del problema existe degeneración cuando se tiene un empate con $T_0=0$ en la selección del vector a ser - eliminado de la base, con más de una $x_i=0$. Es posible también tener un empate al calcular T_0 aún si la solución presente no es degenerada, en este caso $T_0>0$ y la nueva solución tendrá un valor mejorado para la función objetivo. Sin embargo, debido a ese empate en la solución anterior la nueva solución será degenerada.

Geométricamente el método de perturbación consiste en mover el vector P_0 fuera de la arista o hiperplano límite del cono convexo generado por los vectores de la base, de tal manera que cayendo éste fuera del límite y dentro del cono, - se elimine la perioricidad.

Esto se logra mediante la añadición de una combinación lineal positiva pequeña de los vectores de la base al --

vector P_o; Las restricciones del problema quedan modificadas de la siguiente manera:

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n=P_o+EP_1+E^2P_2+\ldots+E^nP_n=P_o(E) \qquad (8)$$

donde E es un número pequeño positivo, a fin de no dañar o destruir el problema original.

La solución para la ecuación (8) indicada en forma matricial, para el problema perturbado es:

$$X(E) = B^{-1}P_o(E) \qquad (9)$$

siendo B una base admisible.

El criterio que asegura la posiblidad de la nueva solución es la seleccion de:

$$T_o = \text{mín}_i \frac{x_i(E)}{x_{iK}} \qquad (10)$$

para $x_{iK}>0$ cuando el vector introducido es P_K.

Una vez obtenida una solución al problema se elimina E. En la práctica se rutiniza el procedimiento siendo incluso innecesario seleccionar una E, ya que se dispone de toda la información requerida en la tabla simplex del problema sin perturbación.

El procedimiento se resume de la siguiente forma: Si, para todas las x_i en la solución básica las relaciones x_i/x_{iK} para $x_{iK}>0$ proporcionan una única $T_o=\text{mín}_i(x_i/x_{iK})$, el vector P_s es el únicamente determinado para salir. Sin embargo, si existen empates para el mínimo, para cierto conjunto de índices, calculamos iniciando con j=1, las relaciones x_{ij}/x_{iK} para todas las filas i en este conjunto. El índice que corresponda a la relación algebraíca más pequeña será el del vector eliminado. Si aún persisten empates en el cómputo del mínimo se forman relaciones similares para el conjunto de índices empatados, para la columna j+1 repitiéndose el análisis, siendo en cualquier caso P_k el vector introducido.

PROBLEMA RESUELTO

A fin de tener un problema práctico la manera de atacar por medio de la programación lineal y de sistematizar el método de solución, es presentado a continuación un ejemplo resuelto de este tipo de problemas. Contiene fundamentalmente las características de un problema complejo, aunque se pueden presentar algunas otras complicaciones que no se mencionan aquí.

Sea minimizar la función objetivo:

$$z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

sujeta a las restricciones:

$$x_j \geq 0$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$
$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$

En este caso la base inicial ya está contenida en el mismo enunciado del problema, ya que los vectores P_1, P_4 y P_6 constituyen una matriz unitaria. De esta manera la primera solución posible se obtiene eligiendo como variables no nulas a x_1, x_4 y a x_6; resultando:

$$x_1 = 7$$
$$x_4 = 12$$
$$x_6 = 10$$
$$x_i = 0 \qquad i = 2,3,5$$

cuyo valor correspondiente de la función objetivo es:

$$z_0 = 0$$

En el renglón 5 de la tabla C se muestran los valores de $z_j - c_j$ así, por ejemplo:

$$z_2 - c_2 = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} c_i - c_2 = (3x0-2x0-4x0)-1 = -1$$

Observamos que $\text{máx}_j (z_j - c_j) = 3$ y consecuentemente el vector P_3 va a formar parte de la nueva base.

Para calcular el vector que sale de la base original calculamos:

$$T_0 = \text{mín}_i \left(\frac{x_i}{x_{i3}}\right) \qquad \text{para } x_{i3} > 0$$

			c_j	0	1	-3	0	2	0
i	c	P	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	0	P_1	7	1	3	-1	0	2	0
2	0	P_4	12	0	-2	$\boxed{4}$	1	0	0
3	0	P_6	10	0	-4	3	0	8	1
z_j-c_j			-	-	-1	3	-	-2	-

TABLA C

Según la relación anterior, se obtiene:

$$T_o = \min_i \left(\frac{x_2}{x_{23}}\right) = 12/4 \qquad \text{para } i=2$$

lo cual significa que P_4 sale de la base.

Una vez conocidos los vectores entrantes y salientes, se procede a transformar la tabla C, para lo cual se efectúan los pasos siguientes:

1- Dividimos los elementos de la fila 2 entre 4.
2- Restamos múltiplos apropiados de esta nueva fila a los restantes en forma tal de obtener ceros en las posiciones a_{13} y a_{33}.

De esa manera se forma la tabla D, en la cual se nota que:

$$\max_j (z_j - c_j) = 1/2 > 0$$

$$T_o = \min_i \left(\frac{x_i}{x_{12}}\right) = \frac{10}{5/2} \qquad \text{para } i=1$$

y consecuentemente los vectores entrante y saliente son respectivamente P_2 y P_1.

			c_j	0	1	-3	0	2	0
i	c	P	P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	0	P_1	10	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	0
2	-3	P_3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	0	P_6	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
z_j-c_j				-	1/2	-	-3/4	-2	-

TABLA D

De esta manera transformamos la tabla D en una segunda itera-- ción, resultando:

			c_j	0	1	-3	0	2	0
i	c	P	P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	1	P_2	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
2	-3	P_3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
3	0	P_6	11	1	0	0	-1/2	10	1
z_j-c_j				-1/5	-	-	-4/5	-12/5	-

TABLA E

Como en la tabla E se tiene $(z_j-c_j)\leq 0$ para toda j, ello significa que se ha llegado a la solución posible mínima, la cual está dada por:

$x_2=4$

$x_3=5$

$x_6=11$

$x_j=0$ para $j=1,4,5.$

con un valor de la función objetivo igual a:

$z= -11$

si para la solución mínima posible, cierta $(z_j-c_j)=0$ para un - vector P_j que no se encuentra en la base final, entonces este vector puede ser introducido en la base sin cambiar el valor - final de la función objetivo. La solución resultante será también una solución posible mínima, y por lo tanto se habrán determinado soluciones mínimas múltiples. Cualquier combinación convexa de estas soluciones mínimas será también una solución mínima.

La misma naturaleza del problema nos indicará bien la conveniencia de buscar nueva solución o el admitir la ya obtenida.

C A P I T U L O   III

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

Una de las primeras aplicaciones de la programación lineal es el problema del transporte, establecido originalmente por Hitchok y posteriormente discutido en detalle por Koopmans.

Un problema de transporte típico puede desglosarse de la siguiente manera:

a) Se tienen m origenes. El origen $i(i=1,2,..,m)$ posee una cantidad a_i, llamada disponobilidad, de un cierto producto homogéneo.

b) Se tienen n destinos, donde n y m no son necesariamente iguales. El destino j necesita ser provisto de una cierta cantidad b_j, llamada requerimiento del producto mencionado.

c) El costo de transportar una unidad desde el origen i hasta el destino j es c_{ij} y es conocido para todas las combinaciones (i,j).

El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que deben ser transportadas desde el origen i hasta el destino j, para toda i y para toda j, en forma tal de minimizar el costo total de transporte.

De esta manera la función objetivo que se quiere minimizar será:

$$z=\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

que estará sujeta a las siguientes restricciones.

1- Puesto que en un origen determinado no se puede disponer de una cantidad mayor que el producto transportado que la que ahí se encuentra, deberá tenerse

$$\sum_{j}^{n}x_{ij}\leqslant a_i \qquad i=1,2,..,m \qquad (2)$$

que nos proporcionan m restricciones, una para cada origen.

2- Por otra parte se debe abastecer a cada destino con la cantidad de producto deseada, esto es:

$$\sum_{i}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

lo cual representa n restricciones una para cada destino.

Finalmente se asume que los requerimientos pueden ser satisfechos, lo cual implica que:

$$\sum_{i}^{m} a_i \geqslant \sum_{j}^{n} b_j \qquad (4)$$

Esta suposición, como puede ser demostrado, no es restrictiva.

En resumen, el enunciado matemático del problema del transporte es: Encontrar los valores de las variables x_{ij} que minimicen a la función objetivo (1), sujeta a las restricciones (2) y (3), para:

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{para todas las } i \text{ y para todas las } j$$

Se cae así a un problema de programación lineal con (mn) variables y (m+n) restricciones.

Resulta claro que si se desea minimizar a z, se debe asegurar que todas las restricciones de los destinos sean igualdades; ya que no debe embarcarse mayor cantidad que la necesitada en los destinos.

Las restricciones que presentan desigualdad son tratadas, por tanto, con variables de holgura y con variables artificiales.

La representación matricial del problema del transporte incluye, en una sola ecuación, tanto las restricciones de origen como las de destino. Dicha ecuación es:

$$AX=b \qquad (5)$$

donde:

$X=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{2n},\ldots,x_{mn})$ vector columna

$b=(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)$ vector columna

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1_n & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1_n \\ I_n & I_n & I_n & . & . & . & 1_n \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right] \text{n renglones.} \\ \left[\begin{array}{l} \\ \end{array}\right. \text{n renglones} \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1_n \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0}}_{\text{m n columnas.}} \end{array}$$

siendo:

1_n= (1,1,..,1) vector renglón de n componentes

I_n= matriz identidad (nxn)

Analizando la expresión matricial anterior, se obje̲r̲va que cada variable aparece como sumando solo dos veces, formando partes de diferentes restricciones; una vez en las restricciones de origen y otra en las de destino.

Notando esta cualidad de las restricciones, se enco̲n̲tró la forma de poder vaciar los datos del problema en una tabla que a su vez facilita el desarrollo del método de solución.

La tabla en cuestión estará formada por m+1 renglones y n+1 columnas. Quedarán constituídas de esta manera (m+1) (n+1) "celdas".

A cada celda le corresponde una variable y el coeficiente de costo asociado a ella.

Las variables se colocarán siguiendo la convención matricial, relacionando a los renglones con el primer índice de las variables y a las columnas con el segundo. Los costos respectivos, se escribirán dentro de un pequeño cuadrado colocado en la esquina superior izquierda de cada celda.

Dicha tabla tiene la forma:

$i \backslash j$	D_1	D_2	...	D_j	...	D_n	
O_1	$\boxed{c_{11}}\ x_{11}$	$\boxed{c_{12}}\ x_{12}$	...	$\boxed{c_{1j}}\ x_{1j}$	...	$\boxed{c_{1n}}\ x_{1n}$	a_1
O_2	$\boxed{c_{21}}\ x_{21}$	$\boxed{c_{22}}\ x_{22}$	...	$\boxed{c_{2j}}\ x_{2j}$	...	$\boxed{c_{2n}}\ x_{2n}$	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
O_i	$\boxed{c_{i1}}\ x_{i1}$	$\boxed{c_{i2}}\ x_{i2}$	...	$\boxed{c_{ij}}\ x_{ij}$	...	$\boxed{c_{in}}\ x_{in}$	a_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
O_m	$\boxed{c_{m1}}\ x_{m1}$	$\boxed{c_{m2}}\ x_{m2}$	...	$\boxed{c_{mj}}\ x_{mj}$	...	$\boxed{c_{mn}}\ x_{mn}$	a_n
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$a_i = b_j$

TABLA REPRESENTATIVA DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Se observa en la tabla, que se agregó un renglón y una columna para colocar respectivamente las necesidades en los destinos y las existencias en los orígenes.

De esta forma, en cada uno de los renglones aparecen todos los elementos que integran una restricción de destino. Además esa colocación permite averiguar si un conjunto de valores x_{ij} constituyen una solución posible, con sólo comprobar que la suma de dichas variables en todos los renglones y columnas son iguales a las constantes a_i o b_j que les correspondan.

Es obvio que el problema del transporte queda incluído en el patrón general del problema de la programación lineal, por lo cual podemos resolverlo por el método simplex. Sin embargo, por la magnitud de los problemas reales el método resulta impráctico y se han encontrado formas para representar el problema y después resolverlo por un método especial.

Este algoritmo particular destinado a calcular el óptimo de un programa lineal de dicha naturaleza, fué originalmente propuesto por G. Dantzig con el nombre de "stepping stone method".

Dos propiedades importantes del problema del transporte, cuya demostración es tratada ampliamente por G. Hadley (1), son las siguientes:

1ª) Para que el problema del transporte tenga una solución posible, es condición necesaria y suficiente que se cumpla que la suma de las existencias en los orígenes sea igual a la suma de las necesidades en los destinos.

2ª) En el sistema de ecuaciones lineales, que constituyen las restricciones del problema (5), sólo (m+n-1) ecuaciones, de las (m+n) son independientes. Sabiendo que al sistema de restricciones tiene una condición redundante, antes de aplicar el método de solución se tendrá que eliminar una restricción. Sin embargo, se ha visto que es conveniente mantener las (m+n) restricciones y agregar (m+n) vectores artificales, sin olvidar que una solución óptima a un problema de transporte con m orígenes y n destinos nunca necesitará más que (m+n-1) de las x_{ij} diferentes a cero.

Para la presentación del método de la transportación nos valdremos de un ejemplo sencillo:

El gerente de una compañía de transportes sabe que a determinada hora del día los puntos B_1, B_2, B_3 y B_4 requieren de 3,3,4 y 5 autobuses de refuerzo respectivamente; Dichos autobuses deben partir de los sitios G_1, G_2, G_3 en donde se dispone de 2, 6 y 7 unidades respectivamente. El tiempo en minutos que toma el viaje de cada sitio G_i (i= 1,2,3) a cada destino B_j(j=1,2,3,4) se dá en la siguiente tabla:

	B_1	B_2	B_3	B_4
G_1	13	11	15	20
G_2	17	14	12	13
G_3	18	18	15	12

TABLA 1

(1) G.Hadley, Linear Programming, Methods and aplications, -- McGraw Hill, 1958.

De esta manera el gerente de la compañía se enfrenta al problema de distribuir los autobuses en forma tal, que el total de minutos-autobús requeridos para dichos vehículos en su viaje del origen al destino sea mínimo.

Si designamos con x_{ij} al número de autobuses enviados del sitio G_i al destino B_j y con c_{ij} al tiempo requerido para dicho viaje, se tendrá:

a) La función objetivo es igual al total de minutos-autobús requeridos, esto es:

$$z = \sum_j \sum_i c_{ij} x_{ij} \qquad (6)$$

b) Para que las necesidades de autobuses en los puntos B_j queden satisfechas deberá tenerse:

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \text{para } j=1,2,3,4 \qquad (7)$$

c) Como sólo se dispone de un determinado número de autobuses en cada sitio G_i, deberá verificarse que:

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad \text{para } i=1,2,3 \qquad (8)$$

De esta manera nuestro ejemplo consiste en obtener los valores no negativos de x_{ij} que minimizan a la función objetivo (6) sujeta a las restricciones (7) y (8).

Sin embargo sólo 6 de las 7 restricciones (7) y (8) son independientes, ya que además se tiene que el total de vehículos disponibles es igual al total de vehículos requeridos:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \qquad (9)$$

y consecuentemente el problema posee 12 variables y 6 ecuaciones independientes. Por lo que cualquier solución posible básica contendrá 6 variables nulas.

Para obtener la primera solución posible básica seguiremos una regla sencilla, llamada REGLA DE LA ESQUINA NOROESTE que se aplica en la siguiente forma:

Se considera la tabla de asignaciones en la que en el extremo superior de las columnas se indican los requerimien tos y en el extremo izquierdo de los renglones las disponibilidades. Esta table es la #2, donde en la intersección de la primera fila y la primera columna se coloca el más pequeño de los números que representan respectivamente la disponibilidad y el requerimiento; A continuación, se completa la primera columna - (la primera fila) hasta saturar el requerimiento (la disponibilidad), enseguida se satura el requerimiento en la columna 2 y la disponibilidad en la segunda fila y finalmente se procede -- igual con la tercera columna. Esto nos conduce a los siguientes valores:

Requerimientos

	3	3	4	5	
2	2				a_1
6	1	3	2		a_2
7			2	5	a_3
	b_1	b_2	b_3	b_4	

Disponibilidades

Tabla 2

De esta manera se ha obtenido la primera solución posible básica, representada en la tabla de asignaciones y cuyo - valor de la función objetivo es:

z= 2x13+1x17+3x14+2x12+2x15+5x12= 199 min-autobús.

Ahora partiendo de esta solución se busca otra que, - conservando al menos 6 variables no nulas, conduzca a un valor menor de la función objetivo.

Para este fin supongamos que, según se muestra en la tabla 3, asignamos una unidad a la celda (1,2); consecuentemente se deberá restar una unidad al casillero (1,1), agregar una a la celda (2,1) y finalmente restar una unidad al casillero -- (2,2). El intercambio así realizado ocasiona que el tiempo total cambie en una cantidad d_{12} que se puede calcular por medio de los tiempos de la tabla 1, obteniéndose;

d_{12}= 11-13+17-14= 1

Procediendo de la misma forma se calculan los cam---

bios de tiempo ocasionados al asignar sucesivamente una unidad a los casilleros vacíos de la tabla 2 de asignaciones. De esta manera resulta:

$d_{13}= 7$ $\qquad$ $d_{31}= -2$

$d_{14}= 15$ $\qquad$ $d_{32}= 1$

$d_{24}= 4$

Ahora bien, para que la función objetivo disminuya necesitamos que la d sea negativa y consecuentemente el intercambio de unidades asociado a $d_{31}=-2$ ocasiona que el tiempo total disminuya.

2 -1	+1		
1 +1	3 -1	2	
		2	5

Tabla 3 (d_{12})

La tabla de asignaciones resultante del intercambio que produjo una disminución en el tiempo total, es pues, la asociada a d_{31} y queda de la siguiente manera:

2			
	3	3	
1		1	5

Tabla 4 (d_{31})

cuyo valor de la función objetivo es;

$z=197$ min-autobús

Repitiendo los cálculos precedentes para iteraciones sucesivas, se llega a la solución óptima cuando se tiene que -

todas las d son positivas, ya que ningún cambio podrá disminuir el tiempo total.

Finalmente es conveniente hacer las siguientes observaciones:

a) Cuando el total de disponibilidades es menor que el total de los requerimientos, se utiliza un artificio con la finalidad de poder hacer el transporte a mínimo costo (o tiempo). Ello consiste en suponer un origen ficticio con una disponibilidad de $(\sum_j b_j - \sum_i a_i)$ unidades con un costo nulo de transporte desde ese origen hasta cualquier destino.

b) Si por el contrario se tiene que las disponibilidades son mayores que los requerimientos, entonces se supone un destino ficticio que requiere el exceso de unidades disponibles, siendo el costo de transporte desde cualquier origen a este destino, nulo.

La exposición anterior del método de la transportación ha sido en su forma más simple, sin embargo existen diversos artificios de cálculo que lo simplifican y aceleran y aún más, este método ya ha sido programado para la mayor parte de las computadoras de que se dispone actualmente.

Las aplicaciones que se mencionarán a continuación pueden ser planteadas, algunas, indistintamente como un modelo de transporte o como modelos clásicos de programación simplex, conviniendo algunas veces, hacerlo en una forma y otras ocasiones en la otra. Em ambos casos, los resultados serán los mismos pero la forma de llegar a llos será más ó menos laboriosa.

Se buscará en los subsiguientes capítulos, presentar el criterio en la aplicación de estas técnicas como una utilísima herramienta matemática en la investigación de operaciones donde permiten tomar decisiones racionales, aún en aquellos casos en que el sentido común es incapáz de abarcar todas las posibilidades, de por sí complejas, que puede involucrar un determinado problema.

SEGUNDA PARTE: A P L I C A C I O N E S

CAPITULO I PROBLEMAS DE DISEÑO.

Este tipo de problemas son muy frecuentes en el campo de la Ingeniería Química, con empresas de productos múltiples en las que estos compiten entre sí no sólo en el uso de los medios de producción limitados, sino que además se encuentran en una situación de relación productiva complementaria.

La complejidad, entonces, estriba en la presencia de restricciones íntimamente relacionadas. Los numerosos procesos empleados en la fabricación de una gran variedad de productos, diferentes en materias primas, tipo, peso, construcción, tamaño y acabado, son sujetos siempre, a una serie de restricciones en capacidad.

Cuando en el estudio de un patrón de producción es efectuado un cambio, limitaciones de capacidad de máquinas obligan a alterar en ciertos aspectos algunos otros artículos.

Esta propagación o interacción de efectos realizan cambios en el patrón de producción difíciles de seguir con simple lógica o con exámenes del tipo prueba-error. Afortunadamente una gran variedad de problemas de diseño pueden ser resueltos matemáticamente mediante la Programación Lineal, que proporciona una sistemática y completa solución.

El primer paso al atacar un problema deberá consistir, siempre que sea posible, en la simplificación del mismo en una forma válida. Se restringe el estudio al producto principal que gobierna el modelo total de producción.

Igualmente se deberá tener un criterio simplificado respecto a las variaciones de inventario de producto terminado de acuerdo a los pronósticos de ventas y a las fluctuaciones de mercado. Finalmente, todos aquéllos pasos del proceso, para los cuales un exceso de capacidad es disponible son considerados no restrictivos o críticos, pudiendo ser omitidos.

DESCRIPCION MATEMATICA

El problema matemáticamente, puede ser descrito con el siguiente enunciado:

"Habiéndose prescrito las limitaciones de maquinaria y las restricciones de ventas, qué cantidad, de qué productos deberán ser producidos en qué- máquinas, a fin de que sea maximizada la utilidad de la operación total- de la fábrica. Además, se desea conocer que tan sensible es esa solución a las variaciones en costo, (consecuentemente en utilidad) de los artículos más lucrativos, y a las variaciones en las metas de producción (por- lo tanto a los objetivos de ventas)."

Para propósitos ilustrativos, se escogió una versión simplificada, pero lo suficientemente completa para el análisis requerido, de un problema real, (1). Los datos agrupados son presentados en la Tabla I

DISCUCION DEL PROBLEMA:

Los puntos principales que deberá mostrar una tabla de datos - para un problema de diseño son:

1- El tipo de máquinas requerido para los diferentes productos de las sucesivas operaciones de producción.

2- El timpo requerido de procesamiento de cada producto en cada máquina, (Hrs/unidad de control) para el producto terminado.

3- Para cada máquina el total de horas disponibles.

4- Los pronósticos de ventas para cada artículo.

5- La contribución de cada producto, es decir, la diferencia entre el — precio de venta y el costo total variable.

Cada incógnita representa la cantidad de un determinado producto, fabricado en un determinado conjunto de máquinas.

(1) Enrick Lloyd, Managment Operations Research, Holt Renehart Winston.

Cuando un mismo producto puede ser fabricado en varias trayectorias pero con iguales características finales, desde el punto de vista de la programación cada una de esas combinaciones posibles en el uso de la maquinaria, se trata como una variable distinta con su propia columna en la tabla. Es como si se tratáse de diferentes productos, ya que cada alternativa emplea su propio juego de máquinas.

A cada columna se le llama "vector producto", pudiendo cada artículo consistir en varios de esos vectores.

Las inegualdades lineales se establecen para representar las dos limitaciones principales:

1- Las debidas a restricciones del tiempo total disponible de producción de cada máquina,

2- Y las provocadas por los volúmenes máximos o mínimos de producción de los grupos de productos. (Basados en los pronosticos de ventas).

La función a ser maximizada corresponde a la suma de los factores que integran la utilidad bruta (antes de la deducción de los costos fijos).

La formulación completa del problema simplificado es un programa lineal de cinco restricciones técnicas más tres limitaciones de volúmen de producción con diez y nueve variables. El empleo de una computadora reduce las tres semanas de cálculo de escritorio que se requieren para un problema de esta naturaleza, a unos cuarenta minutos, (p.e. en una IBM 650).

ESTUDIO DE LA SOLUCION

Los resultados obtenidos para las condiciones ideales no pueden ser implantados en cada detalle en la productión real, sin embargo, son suficientemente válidos para constituir una guia excelente para la toma de decisiones.

De una solución de Programación Lineal pueden ser recogidas indicaciones tales como:

1- La cantidad específica esperada a ser producida de cada producto,-

dentro del rango estipulado de volúmen de producción para cada uno de ellos.

2- La localización más conveniente de la maquinaria, elegida entre las alternativas disponibles.

3- La máxima utilidad alcanzable, dentro de las limitaciones impuestas.

4- La determinación de "cuellos de botella" potenciales o de excesos de capacidad no utilizados de maquinaria. Esto es de gran utilidad en los estudios de expansión selectiva de equipo.

5- La utilidad relativa y absoluta de cada artículo dentro del sistema de fabricación de multiproductos. Lo cual es una valiosa información para la selectividad de futuros esfuerzos en ventas.

Puede suceder que un artículo, considerado como el más lucrativo cuando es tomado por separado, aparezca en un programa óptimo en una cantidad muy pequeña, o que incluso sea excluido completamente. Esto proviene del hecho de que la cantidad a ser fabricada de cada producto para logar el máximo ingreso total puede no maximizarse individualmente; Es claro, si se observa conjuntamente la fabricación de todos los productos, la cual debe satisfacer simultáneamente los pronósticos de ventas y las limitaciones de maquinaria, a la vez de proporcionar la máxima utilidad.

En adición a la solución óptima en sí misma, dos conceptos extremádamente útiles pueden ser aprovechados de una solución de programación lineal:

1- Suponiendo que a partir de la solución teórica óptima se desea emplear uno de los productos excluidos, debido a consideraciones tales como política de producción, servicio al cliente o conveniencia de fabricación, con el propósito de asegurar la satisfacción de todas las restricciones, algunos otros productos deberán ser ajustados con la consecuente alteración de su contribución total bruto.

Es una importante propiedad de la Programación Lineal el suministrar el efecto resultante de esos ajustes en el ingreso total bruto. Esto proveé al ingeniero de una útil guía para adaptar el modelo teórico óptimo de producción a una situación más real de la manera más ventajosa.

2- Una situación similar se crea, si se desea estudiar el efecto de modificar o relajar una de las limitaciones impuestas. De nuevo, es posible sumarizar por medio de la programación el efecto total resultante.- Si la limitación a modificar representa una restricción de ventas se dispone, por tanto, de una inmediata evaluación de un cambio en la política de mercadeo o producción. Si representa una limitación de maquinaria, se dispondrá de una evaluación comparativa para la expansión de equipo.

La examinación detallada de la Tabla II que muestra la solución óptima al problema ilustrativo mencionado, nos muestra en particular lo siguiente:

1- Los equipos D y E son utilizados a capacidad y representan un cuello de botella.

2- El equipo A, similar al B, es totalmente utilizado, mientras que el B es usado al 87% de capacidad.

3- El 44% del equipo C en disponibilidad, permanece completamente ocioso.

4- Para el grupo 1, esto es, productos 7,8 y 9 sólo el volumen mínimo requerido debe ser producido, mientras que para el grupo 2 que comprende los productos 4,5 y 6 el mínimo requerido es sobrepasado ampliamente.

5- El producto 1, que brinda la mayor contribución debe ser producido en una cantidad relativamente moderada.

6- El producto 2, que análogamente proporciona de las mayores contribuciones tomándolo aisladamente, para el rendimiento total óptimo debe ser excluírsele del todo.

7- Ahorros substanciales pueden ser logrados, eliminando el requerimiento de un volumen mínimo de producción para el grupo 1.

8- Con el dato de los costos de maquinaria, la parte baja de la tabla,- indicará inmediatamente cual tipo de maquina que se encuentra saturada-maximiza los reembolsos de inversión en una expansión posterior.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

En el enunciado matemático del problema se preguntaba qué tan sensible sería la solución óptima a variaciones en las metas de ventas. Dentro del cuadro de trabajo de la programación lineal, es relativamente sencillo encontrar nuevas soluciones para esas variaciones en las — restricciones.

Para el problema ilustrativo fueron hechas las siguientes variaciones:

1- Después de tener la solución óptima para las condiciones ya menciona das, se modificó la utilidad del producto más lucrativo en un incremento del 10% y posteriormente en un decremento del mismo porcentaje. El - consecuentemente aumento y disminución respectivamente obtenidos para - cada caso, en la cantidad del ingreso total, representaron un mínimo — porcentaje respecto a los números anteriores. De lo cual se concluye — que el posible mejoramiento no depende, en este ejemplo particular, en- una manera crítica, de perturbaciones moderadas en los coeficientes de- utilidad probados.

2- La eliminación de los requerimientos mínimos de producción dieron — por resultado un ligero incremento en los ingresos.

3- Más significativa fué la eliminación de los requerimientos máximos - de producción, en el modelo de producción así como en los ingresos al— canzables. Los cambios obtenidos fueron muy pronunciados.

4- Finalmente la eliminación de las estipulaciones de producción, tanto máximas como mínimas, pero conservando las limitaciones de maquinaria,- proporcionaron la información más importante de este estudio. La nueva- programación mostró la cantidad de ingresos perdidos debidos al actual- modelo de ventas.

CONCLUSIONES

En resumen, es posible enumerar algunos valiosos puntos obtenidos a partir de los resultados del estudio de un problema de diseño, utilizando la Programación Lineal:

1- La solución de la programación suministra medidas cuantitativas para sistemas de alta complejidad con efectos muy relacionados.

2- Los pasos críticos, limitantes del proceso, así como los excesos de capacidad, son descubiertos y medidos cuantitativamente.

3- Son establecidas bases para incremento de utilidades y selección en las metas de ventas, consecuentemente en las metas de producción.

4- Además, el planteamiento de la programación lineal, es capaz de suministrar una guía en el establecimiento de planes de mercadeo, inversiones de capital, y en el aumento de la eficiencia en la utilización de la maquinaria.

PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES

1- Restricciones de Capacidad de máquinas:

Corresponden a las 5 máquinas disponibles. Donde x_j representa a cada uno de los nueve productos y está dada en unidades fabricadas por semana, para $j=1,2,\dots,9$

a) Para la máquina A:

$$15.8x_1+0x_2+17.6x_3+\dots+0x_9+S_1= 2900$$

b) Para la máquina B:

$$0x_1+20.2x_2+0x_3+\dots+17.9x_9+S_2= 900$$

c) Se procede de una manera similar para las máquinas C, D, E.
Las variables S_i $(i=1,2,\dots,5)$ de holgura, forman una base artificial.

2- Restricciones de capacidad de volumen de producción.

a) La limitación de volumen máximo alcanzable por semana:

$x_7+x_8+x_9+S_6=70$

b) Las limitaciones de producción mínima:

$x_4+x_5+x_6-S_7+U_a=7$

$x_7+x_8+x_9-S_8+U_b=15$

Para las variables de holgura usamos coeficientes negativos, debido al sentido de la restricción. U_a y U_b son las variables artificiales. (que sustituyen a S_7 y a S_8 en la base)

3- Función objetivo, a maximizar:

$Z_{max}=101x_1+78x_2+\dots+58x_9+0S_1+0S_2+\dots+0S_8-MU_a-MU_b$

T A B L A 1
AGRUPACION DE DATOS DEL PROBLEMA

Productos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Ingresos brutos ($/unid)	101	78	60	68	65	81	55	52	58	Capacidad Producc.
Requerimientos	Horas/Unidad de Producto Terminado									Hrs-Maqu./Sem
Máquina A	15.8	0	17.6	18.9	0	0	15.6	0	0	2900
Máquina B	0	20.2	0	0	21.6	21.6	0	17.9	17.9	900
Máquina C	0.3	0.3	0.36	0.36	0.36	0.45	0.31	0.31	0.34	120
Máquina D	0	0	820	839	830	950	705	705	725	125,000
Máquina E	550	550	0	0	0	0	0	0	0	20,000
Máximo Volum. vendible ($\frac{Unid}{Seman}$)							Grupo 1 70			
Mínimo Volum. necesitado ($\frac{Unids.}{Semana}$)				Grupo 2 7			Grupo 1 15			

T A B L A   I I

SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA

Productos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x_i unids. a prod.	36.4	0	0	90.2	0	41.7	15	0	0	Unids.
Penalización (a)		4.96	7.2		5.2			5.6	1.3	$/Un
RESTRICCIONES:										
Diferencia al límite Máximo (b)								55		Unds
Exceso sobre el límite Mínimo (c)					124.8			0		"
Bonificación por relajamiento (d)								2.76		$/Unids

CAPACIDAD HRS-MAQUINA: Disponibles, Usadas, Ociosas.

Máquinas	A	B	C	D	E
Capacidad Disponible	2,900	900	120	125000	20000
Cantidad Utilizada	2,513	900	67	125000	20000
Cantidad Ociosa	387	0	53	0	0
Bonificación por Relajamiento (e) ($\frac{\$}{Hr.}$)		0.15		0.08	0.18

Notas:

(a) Penalización, es la pérdida en la utilidad total, que ocurre al producir un estilo de producto que no entro en la solución óptima.

(b) El máximo vendible de 70, menos la cantidad encontrada de 15 es 55

(c) Para el Grupo 1 el exceso es cero, para el grupo 2, las cantidades encontradas de 90.2 y de 41.7 menos el límite mínimo de 7 son 124.8

(d), (e) Esta relajación en las respectivas restricciones, representa una bonificación o incremento en la utilidad total obtenida. En el primer caso no existe un requerimiento mínimo a producir y en el segundo, la capacidad de fabricación en Hrs-Máquina es incrementada.

NOTACION

De acuerdo al enunciado general de la Programación Lineal podemos, finalmente, establecer la notación de las variables que intervienen en un problema de diseño:

x_j representa las unidades fabricadas por semana del producto j en la solución.

a_{ij} tiene dos interpretaciones, de acuerdo al tipo de restricción en que se encuentre. En las ecuaciones de límite de capacidad de maquinaria es el número de Hrs. requeridas para procesar una unidad de producto j; En las restricciones de volumen de producción este coeficiente es la relación de fabricación entre los diversos productos.

c_j es el ingreso bruto unitario debido al producto j.

b_i al igual que el coeficiente a_{ij} tiene dos significados: el primero es la capacidad total disponible de la maquinaria o equipo i (dada en unidades consistentes al resto del problema: Hrs-Máquina/Semana), el segundo se refiere al volumen límite de producción.

z representa el ingreso bruto total, o sea será la función a maximizar.

S_i o sea las variables de holgura, que físicamente son la capacidad de maquinaria no usada o el volumen de producción no surtido respectivamente en el tipo de restricciones ya mencionado.

n y m representan el número de productos la primera, y el número de restricciones de capacidad y de volumen la segunda.- Dondo n mayor que m.

APLICACIONES, CAPITULO II

P R O B L E M A S   D E   M E Z C L A S

En muchas operaciones de procesos en Ingeniería Química - se nota que un producto dado o varios productos, pueden ser manufacturados mediante varias trayectorias.

Por ejemplo en la industria del Petróleo un número básico de mezclas son manufacturadas y una gran variedad de productos se - obtienen mediante la unión de aquéllas.

En la gasolina existen unas especificaciones finales ta-- les como el octano, la volatilidad, el contenido de azufre, etc. Algunas de éllas son máximas, mientras que otras son mínimas.

Cada mezcla básica tendrá estas propiedades en cantidades definidas y cada una tendrá, en general, diferente costo asociado a ella. El problema proviene de cuánto de cada mezcla deberá agregarse en la formación del producto final, tal que todas las especificaciones se encuentren. Dado que, mientras especificaciones son pre-- sentadas como restricciones máximas o mínimas, el producto final -- puede obtenerse en una gran variedad de caminos, todos de diferen-- tes costos y utilidades.

La programación Lineal busca resolver el problema prescribiendo un camino óptimo de preparación del producto final, en este- caso de mínimo costo y máxima utilidad. La solución proporciona el- programa de operación para la planta con el cálculo de la produc--- ción completa y la utilidad alcanzable (para cualquier tipo de ventas o producción requeridas), permitiendo a la vez evaluar la conveniencia de cualquier cambio en el mercado o en las condiciones de - operación.

La característica sobresaliente en los problemas de mez-- clas, es la estrecha relación que guardan los artículos producidos- respecto, no sólo a la materia prima usada, sino también a la cantidad producida de unos y otros. Es decir, que si son producidos de--

terminado número de barriles de un producto cualquiera bajo ciertas condiciones, se deben producir sin oportunidad de cambio o variación- otro número fijo de barriles de los otros productos finales. Donde cada uno-de los productos finales pueden ser vendidos a una cierta utilidad que-fluctúa en el mercado, o bien pueden ser dispuestos, con una utilidad -menor o con pérdida, a combustibles.

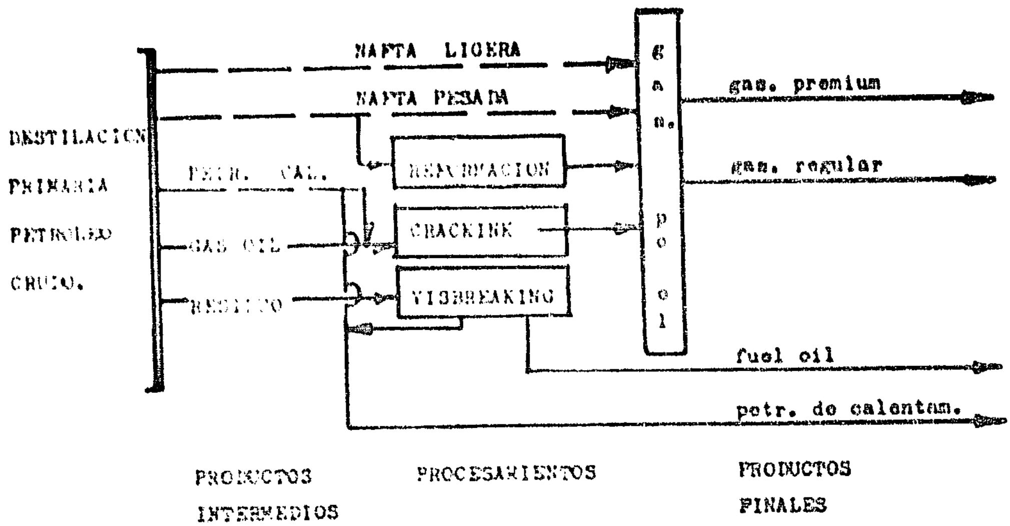
El caso escogido (1) para ejemplificar el planteamiento de un problema de mezclas, es la refinación de petróleo crudo para la fabricación de productos específicos. Un diagrama simplificado de las operaciones de refinación para productos de combustión es presentado en la figura 1.

El petróleo crudo es fraccionado mediante una destilación primaria en unos productos intermedios, que requieren un procesamiento extra. La nafta ligera requiere sólo tratamiento, (no mostrado en el diagrama) y es disponible como parte del "pool" de gasolina de mezclado para dar los grados regular y premium de gasolina. La nafta pesada puede-ser también tratada y mezclada o puede, totalmente o en parte, enviarse a reformación donde su porcentaje de octano es mejorado. El reformado -es entonces disponible para la mezcla. Una corriente de petróleo de calentamiento es tomada también de la destilación primaria, combinada posteriormente con corrientes de los mismo procedentes del cracking y del-visbreaking, y finalmente tratada para darle las características de producto final. La producción de petróleo de calentamiento puede ser regulada hasta cierto grado con la parte del cracking.

El gas oil produce después del cracking naftas pesadas y ligeras de alto porcentaje de octano, las cuales son tratadas y posteriormente mezcladas. El residuo de destilación es enviado al visbreaking --produciendo nafta visbreaker y fuel oil residual.

(1) Gifford H. Symonds; Ind. Eng. Chem., 48,3, 394-401, (1956).

Los productos finales del petróleo crudo refinado son, por -- tanto, gasolina regular y premium, petróleo de calentamiento y fuel oil.



Operaciones típicas de refinación para productos combustibles.

F I G U R A 1.

PLANTEAMIENTO FUNCION OBJETIVO Y RESTRICCIONES

El objetivo del problema es la maximización de la utilidad alcanzable. La utilidad está compuesta de los siguientes factores:

Utilidad= Venta de productos- Costo del petróleo crudo- costos directos- gastos de operación.

Dado que el fuel oil es el producto de menor precio, vendible abajo del costo del petróleo crudo, se simplifica la ecuación anterior tomándolo como base. Sus requerimientos no son definidos, y se asume que los componentes no incluidos en los otros productos, pueden serlo en el fuel oil. La ecuación rearreglada toma la siguiente forma:

Utilidad= Ventas prods. precio arriba fuel oil- costos directos- costo petr. crudo arriba precio fuel oil- gastos de operación (menos consumo de combustible).

Las limitaciones del proceso son determinadas por los requerimientos de los productos y por la capacidad del proceso; Abreviadamente se tiene:

Capacidad mínima $\leq$ Proporción de crudo $\leq$ Capacidad máxima
Gasolina grado regular $\leq$ requerimiento máximo
Gasolina grado premium $\leq$ requerimiento máximo
Petróleo de calentamiento = requer. máximo

La proporción del crudo es limitada por un mínimo producible sin quiebra y un máximo debido al límite de capacidad de maquinaria. Las restricciones de las gasolinas están dadas por la demanda máxima.

La producción de petróleo de calentamiento es el máximo requerimiento, si la disponibilidad y utilidad son suficientes. En adición, la producción de los dos tipos de gasolinas depende del mezclado de sus componentes, hecho de tal manera para encontrar ciertas especificaciones en calidad. Algunas veces puede ser más productivo descartar parte de algunos componentes al fuel oil. Las especificaciones de calidad presentan la siguiente forma:

a) Especificaciones mínimas que deben cumplirse:

$$\sum\Big((\text{Calidad de mezclado de c/componente})\ (\text{Cantidad de c/componente usada en la mezcla})\Big) \geq (\text{especificación})\ (\text{Cantidad mezclada}).$$

b) Especificaciones con límite máximo:

$$\sum\Big((\text{Cal. mezcl. comp})\ (\text{Cant. comp. mezcl})\Big) \leq (\text{especif})(\text{cant.Mezcl.})$$

Simplificando las expresiones anteriores a una forma más clara, se indican de la siguiente manera:

$$\sum\Big((\text{Especif mín} - \text{Cal. comp mezcl})\ (\text{Cant comp mezcl})\Big) \leq 0$$
$$\sum\Big((\text{Cal. comp mezcl} - \text{Especif máx})\ (\text{Cant comp mezcl})\Big) \leq 0$$

NOTACION

El método general de la programación lineal puede ser expresado como sigue:

$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$ para todas las i

con $x_j \geqslant 0$ para todas las j

siendo $i = 1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$; con $n > m$
y la función objetivo:

$z = \sum_j c_j x_j$ (a maximizar o minimizar)

En este problema cada uno de los elementos anteriores adquieren una significación especial:

x_j es el número de unidades del producto j en la solución para obtener la mezcla óptima. La unidad escogida es indistinta, con tal que todo el sistema sea congruente.

En este problema estará dada en barriles.

a_{ij} es la fracción de una unidad del producto j que cumple con la especificación i. Puede ser dada en % o en tanto por uno.

b_i representa la fracción total de la mezcla óptima requerida por la condición i. De acuerdo a la a_{ij} se tendra en % o en tanto por uno de la mezcla total.

z es la utilidad total resultante. Consecuentemente será el objeto a maximizar y se dará en unidades de valor $.

c_j debido a la forma que se dió para la función objetivo en los elementos positivos de la misma, es el ingreso unitario asociado a cada j, mientras que para los elementos que se restan en ella, representará el costo de obtención de ese elemento. Las unidades en ambos casos son $/unidad producida.

n es el número de productos intermedios x_j.

m es el número de especificaciones de la mezcla óptima, donde n es mayor que m.

Información Técnica

La información técnica requerida para las ecuaciones de las restricciones del problema deberá consistir:

a) Especificaciones de calidad del producto terminado. Para los dos grados de gasolina se necesitan conocer los datos de presión máxima de vapor, volatilidad mínima y máxima en porcentaje para una temperatura dada, octanaje mínimo y aquéllas características que se deseen controlar.

b) Los porcentajes y características de los componentes principales de la gasolina resultantes de la destilación primaria del crudo. Según el diagrama de la figura 1 estos componentes son: nafta ligera y pesada, nafta cracked ligera y pesada, nafta visbreaker y nafta pesada reformada. Para cada uno de los elementos anteriores se debe conocer su porcentaje respecto al crudo procesado, sus características de volatilidad y presión de vapor, así como su octanaje a la mezcla en la gasolina regular y premium.

Con el material anterior es posible definir las restricciones las cuales básicamente deberán cubrir:

1- Las disponibilidades en los balances de material,

2- Requerimientos y capacidades,

3- Los balances cualitativos de las especificaciones.

BALANCES DE MATERIAL

a) Disponibilidad de nafta ligera; (NL)

NL al fuel oil+ NL a la gasol regular+ NL a la gasol premium = %NL (cantidad crudo)

En forma algebraica:

$$S_1 + X_{20} + X_{21} = \%_{nl} X_{19} \qquad (1)$$

Donde:

X_{20} y X_{21} representan los barriles/día mezclados de las indicadas -

disposiciones de NL.

X_{19} representa los Barr/día de crudo procesados.

S_1 representa la cantidad de NL no usada en el mezclado de la gaso lina y es, de hecho, una variable de holgura.

b) Disponibilidad de Nafta pesada; (NP)

NP al fuel oil+ NP a la gasol regular+ NP a la gasol premium+ NP a reformarse para la regular+ NP a reform para premium = %NP (cantidad de crudo)

Algebraicamente la ecuación se representa:

$$S_2 + X_{22} + X_{23} + mX_{24} + nX_{25} = \%_{np} X_{19} \qquad (2)$$

Las variables indican:

S_2, X_{22} y X_{23} los barr/día de las disposiciones respectivas de NP.

X_{24} y X_{25} los barr/día dispuestos a reformarse.

X_{19} como antes, es los barr/día del crudo procesado.

Los coeficientes m y n representan los barr/día de NP a reformarse-por barr/día de reformado.

c) De una manera similar, se escriben las ecuaciones de las disponibilidades para las naftas cracked (ligera y pesada), y para la nafta-visbreaker.

REQUERIMIENTOS

Los únicos requerimientos de productos que afectan al problema presente, son los que se refieren a los dos grados de gasolina:

d) Para gasolina regular:

$$\text{Requerim máx} = S_6 + X_{20} + X_{22} + X_{24} + X_{26} + X_{28} + X_{30} \qquad (3)$$

e) Para gasolina premium:

$$\text{Requerim máx} = S_7 + X21 + X_{23} + X_{25} + X_{27} + X_{29} + X_{31} \qquad (4)$$

Donde:

S_6 y S_7 representan los barr/día de gasolina regular y premium respectivamente que no fueron surtidos.

Las otras variables representan los barr/día de los componentes que son actualmente mezclados. X_{26} y X_{27} son las correspondientes a la-NL cracked para gasolina regular y premium respectivamente. De una manera similar X_{28} y X_{29} corresponden a las NP cracked para los dos grados de gasolina.

Finalmente X_{30} y X_{31} son los barr/día mezclados para los dos grados de gasolina de la nafta visbreaker.

ESPECIFICACIONES

Volatilidad: Es necesario incluir ecuaciones de especificaciones de calidad. Estas generalmente en volatilidad, se refieren a un porcentaje -mínimo y máximo permisible a una determinada temperatura. En el ejemplo ilustrativo que presenta Symonds menciona un 30%/200°F y un 70%/300°F -como límites mínimos para la gasolina regular y 42.5%/200°F y 86%/300°F para la premium. Existe todavía una quinta restricción de volatilidad,-por una especificación máxima de volatilidad para la gasolina premium, que es de 53% a 200°F.

Cada una de estas especificaciones forman una ecuación, con las variables mencionadas en las ecs. (3) y (4) del tipo:

A) para especificación de volatilidad mínima:

$$\sum\Big((\text{especif mín})-(\text{calidad de mezclado de cada componente})\ x(\text{ cantidad de cada componente mezclada})\Big)\leq 0$$

B) para especificación de volatilidad máxima:

$$\sum\Big((\text{especif máx}- \text{cal mezcl comp})\ X\ (\text{cant comp mezcl})\Big)\geq 0$$

En las ecuaciones formadas, de la manera indicada, las variables de holgura S_j ($j = 8,9,10,11,12$) representan la diferencia de la especificación dada y la encontrada, multiplicada por los barr/día mezclados. Así por ejemplo, si $S_8 = 60{,}000$ y la cantidad actualmente mezclada son ---- 30,000 barr/ día entonces la holgura es de 2%/200°F arriba del límite - de 30% a esa temperatura para la gasolina regular. Estas variables de - holgura permiten que las especificaciones limitantes sean aproximadas - económicamente, pero no necesariamente encontradas exactamente.

Análogamente se procede para determinar las ecuaciones del octanaje, la presión de vapor y las demás especificaciones que se desean controlar. La interpretación de las variables de holgura es similar que en el caso de la volatilidad.

Finalmente las restricciones de capacidad, que en este problema se refieren al procesado del crudo y a la alimentación en la operación de reformado. Los balances de material son:

$$X_{19}-X_{16}+U_a = \text{límite mínimo} \qquad (5)$$

$$X19+ X_{17} = \text{Límite máximo} \qquad (6)$$

$$X_{18}+ mX_{24}+nX_{25} = \text{límite máximo reformado} \qquad (7)$$

Donde las ec. (5) y (6) se refieren a la capacidad mínima y máxima de procesado del crudo y la (7) al porcentaje máximo de alimentación a reformado.

X_{17} y X_{18} representan la capacidad no usada del crudo y del reformado respectivamente.

U_a es una variable artificial, debido al coeficiente negativo de la variable de holgura X_{16}.

El problema ilustrativo total presenta 18 ecuaciones que constituyen el conjunto de las restricciones. Estas 18 ecuaciones involucran 31 variables, por lo que un número infinito de soluciones al problema pueden ser posibles. Se espera que la programación lineal seleccione la mejor solución de acuerdo al objetivo.

Puede ser observado que todas las variables del problema carecen de sentido si se les supone con un valor negativo. Es imposible procesar una cantidad negativa de crudo o mezclar componentes negativos. El método de solución cuida esta condición de no negatividad.

DESARROLLO DE LA FUNCION OBJETIVO

De acuerdo a la forma general propuesta al principio del problema, se establece el balance de pérdidas o ganancias para el desarrollo de la función objetivo; Los elementos que la constituyen son:

a) Venta de productos con precio arriba del fuel oil. En el caso de las gasolinas restamos al límite máximo la variable de holgura correspondiente, obteniendo lo que realmente se produjo, lo cual si se multiplica por el precio de venta nos dá los ingresos brutos. Para el otro producto con precio superior al fuel oil, que es el petróleo de calentamiento, basta con multiplicar el límite máximo de producción por su precio unitario de venta, ya que como se especificó al principio su producción sería exactamente esa cantidad.

b) Costo de la operación del crudo, incluyendo costos directos y costo del petróleo crudo arriba del precio del fuel oil. Este renglón que es negativo en la función objetivo, se obtiene multiplicando X_{19} — por un costo unitario global de los costos directos.

c) Costo de la operación de reformado, que también es restado en la — función objetivo, que no incluye el costo del combustible, se forma multiplicando $(X_{24}+ X_{25})$ por un costo unitario de reformación dado.

Finalmente podemos escribir la función objetivo en una — ecuación de la forma:

$Z =$ (Lím máx$-S_6$)x (precio gasol regular) + (Lím máx $-S_7$)x (precio - gasol premium) -

X_{19} (costo directo de operación del crudo) -

$(X_{24}+X_{25})$ (costo operación reformado menos combustible)

En la expresión anterior los coeficientes de las variables son los valores C_j de la función objetivo, dos de los cuales son para las variables de holgura S_6 y S_7.

REPRESENTACION MATRICIAL

Como se indicó en el capítulo segundo, la representación matricial del problema será una matriz de 32 columnas, 31 de las cuales representadas por los vectores P_j se refieren a los coeficientes - de las respectivas variables X_j. La columna P_o forma los valores básicos b_i.

Cada una de las hileras es una ecuación con las variables sobreentendidas pero no escritas en el lugar. La función objetivo es - mostrada abajo de las 18 restricciones, aunque Z no es restringida por la no negatividad, puede ser considerada de estar también en la base. Por último, los valores C_j son mostrados en la parte superior de la tabla para servir de referencia y usarlos en el cálculo de Z en cualquier solución básica posible.

La solución final es encontrada cuando las condiciones — mencionadas en el mismo capítulo 2 de teoría, se llenan para la solución óptima.

ESTUDIO DE LA SOLUCION

La interpretación de los números de la solución final es lo más importante en un problema, no sólo porque aquéllos nos proporcionan una solución económicamente óptima, sino que además nos permiten conocer los efectos en la utilidad por el reemplazo de una variable de la base.

En la función óptima deberán ser cero o positivos todos los coeficientes de las variables, (en un problema de maximización) lo cual significa que la utilidad no puede ser incrementada por un cambio de base. De hecho, el efecto del cambio de una de las variables es precisamente indicado por la hilera de la función objetivo en la tabla de la solución óptima. Esos coeficientes muestran la penalización en la que puede incurrirse cambiando la solución óptima en la dirección indicada; Es decir, que cualquier cambio resultará en un decremento de la solución óptima.

Sin embargo, algunos de esos coeficientes $(\Delta Z / \Delta X_j)$ pueden ser interpretados también, como el beneficio que podría ocurrir mediante la relajación de las restricciones del problema. Por ejemplo, incrementando los requerimientos de los productos, para los cuales la solución óptima era el máximo, se incrementa la utilidad por el respectivo producto en el valor $(\Delta Z / \Delta X_j)$ que no es otra cosa que el incremento de la utilidad por unidad de volumen (en este caso $/barr de prod j). Y de la misma forma se puede proceder para todas aquellas restricciones que están saturadas en la solución óptima, para las cuales podemos tener el beneficio unitario de relajación en la misma tabla que nos proporciona la solución óptima.

En el problema específico que se trató, todos los requerimientos fueron saturados, incluso algo de NP fué mandada al fuel oil con pérdida. Además, las especificaciones de calidad fueron llenadas, algunas de ellas, por cierto, con cierto exceso de tal manera de maximizar la función utilidad. Esto que aparentemente representa una menor utilidad o incluso pérdida en el uso de los componentes de los productos finales, es debido a la interrelación de las restricciones que hacen que no sea económico ni utilizar todo el componente en productos de precio superior a su costo o de encontrar, sin exceso, las especificaciones de calidad.

APLICACIONES, CAPITULO III

ASIGNACION DE MAQUINARIA COMO MODELO DE TRANSPORTE

El problema de asignación de maquinaria se presenta en una compañía con varios productos, los cuales pueden fabricarse indistintamente en varios equipos. Un mismo equipo puede procesar uno o varios productos. Sin embargo, cada posibilidad presenta diferentes costos de operación. El problema entonces, consiste en asignar el trabajo requerido en las diferentes máquinas para minimizar el costo de producción para una demanda de los productos, conocida.

La formulación del modelo matemático de asignación, como un problema de transporte y posteriormente su solución por el método de la transportación es más clara y rápida que con el método simplex.

Esquemáticamente el enunciado clásico de un problema de asignación de maquinaria, tiene la siguiente forma:

siendo m el número de máquinas

n el número de productos

t_{ij} el tiempo requerido para procesar una unidad del producto j en la máquina i

x_{ij} el número de unidades j producidas en la máquina i en un tiempo t

t_i el tiempo disponible total de la máquina i

b_j el número de unidades j a producir y finalmente

c_{ij} el costo de procesamiento de una unidad del producto J en la máquina i,

la función objetivo a minimizar será:

$$z=\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

sujeta a las restricciones:

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{para todas las } i \text{ y todas las } j$$

$$\sum_j t_{ij} x_{ij} \leqslant t_i \qquad i=1,2,..,m \qquad (2)$$

$$\sum_i x_{ij}=b_j \qquad j=1,2,..,n \qquad (3)$$

donde la ecuación (2) representa las restricciones de tiempo y la (3) - las de volumen de producción.

A continuación, es presentado un caso muy interesante que aparentemente no tiene una clara relación con el modelo esquematizado, sin embargo el análisis del mismo nos es extremadamente provechoso para adquirir un criterio en la aplicación de un modelo de transporte. El ejemplo es citado por E. Lloyd (1) y consiste en lo siguiente:

Cierto tipo de bombas dosificadoras son usadas en la extracción de un filamento sintético a través de unos agujeros muy finos de - una matriz de extracción. El peso por unidad de longitud o "dernier" — del producto final depende de la cantidad extruída en un período de — tiempo dato.

Las bombas deben funcionar con un alto grado de precisión y - uniformidad, sin embargo ocurren fallas relativamente frecuentes. Cuando una bomba falla el costo de reemplazarla es de $62.5

Una multiplicidad en las máquinas de extrucción y las bombas es implicada. Mediante ciertos cambios en las revoluciones de la bomba y haciendo otros ajustes, una máquina puede producir diferentes productos.

Tres diferentes tipos de bombas S_i (i=1,2,3) son usadas, las - cuales tienen distintos grados de estrucción. Los períodos de reemplazo varían para cada producto P_j (j=1,2,..,10), puesto que cada uno requiere diferente intensidad de bombeo. A un bombeo más rápido, fallas en - el equipo ocurren más frecuentemente.

Se desea minimizar el costo total de reemplazo por medio de - la asignación más conveniente de las bombas para los diferentes productos. Se dispone de las predicciones de los requerimientos de productos en términos de Semanas-Máquina y del número de Sem-Máqu disponibles para los diferentes tipos bombas, los cuales son mostrados en la tabla 1. Además una estimación de la frecuencia de reemplazo en las bombas por - fallas.

(1) E. Lloyd N.; Managemenet Operations Research; Holt-Renehart-Winston.

es mostrada en la tabla 2. Esta frecuencia está dada por R_{ij}, donde i se refiere al tipo de bomba y j al producto extruído.
Finalmente las unidades para R son fallas/Sem-Máqu.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	Q	disponibilidad de bombas (t_i)
S_1												338
S_2												97
S_3												194
Requer. bombas (b_j)	153	33	24	14	98	63	3	36	50	110	45	629

REQUERIMIENTOS Y DISPONIBILIDADES

Tabla 1

Puesto que las disponibilidades exceden a los requerimientos, un producto imaginario (destino ficticio) ha sido añadido en una décima primera columna, de la tabla 1.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
S_1	3.4	0.6	2.9	0.7	11	1.7	0.9	1.5	1.1	4.8
S_2	2	1	2.1	3.7	5.8	0.2	0.9	0.8	0.7	3
S_3	0.7	2.1	0.7	0.6	6.4	0.8	0.9	1	0.6	4.3

FRECUENCIA DE REEMPLAZO R_{ij}

Tabla 2

DESARROLLO DE LA FUNCION OBJETIVO

Siendo: R_{ij} la frecuencia de reemplazo para cada i y para cada j, x_{ij} la asignación para cada producto de las bombas, y Z el costo total de reemplazo, la función será:

$$Z = c\sum_j \sum_i (x_{ij} R_{ij}) \qquad (4)$$

donde c representa el costo unitario de reemplazo ($62.5)

DESARROLLO DE LAS RESTRICCIONES

Puesto que los recursos, representados por la disponibilidad de bombas y los requerimientos representados por las necesidades de bombas para una cierta demanda de los productos, estan en unidades consistentes, es posible plantear directamente las ecuaciones de las restricciones con los datos disponibles:

a) Restricciones de capacidad de maquinaria:

$$\sum_j x_{ij} = t_i \qquad \text{para } i=1,2,3 \qquad (5)$$

donde x_{ij} está dada directamente en una máquina, haciendo innecesario el factor t_{ij} que aparecía en el modelo general de la ecuación (2).

t_i es el total de disponibilidad de la bomba i, siendo igual a la suma de los x_{ij} desde que se agregó un producto ficticio Q, que hace las veces de una variable de holgura; por lo que j=1,2,...,11 para Q igual a P_{11}.

b) Restricciones de volumen de producción:

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \text{para } j=1,2,\ldots,11 \qquad (6)$$

Siguiendo la regla de la esquina noroeste se llega a la solución óptima del problema, tras establecer una primera solución posible básica y calcular a partir de ella otras soluciones en sucesivas iteraciones.

Se ha considerado conveniente presentar la solución óptima a que se llegó, debido a las importantes conclusiones que se derivan del establecimiento de las soluciones teóricas obtenidas a una situación real. La tabla 3 presenta la solución óptima:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	Q	t_i
S_1		33				63	3	36	50	108	45	338
S_2					95					2		97
S_3	153		24	14	3							194
b_j	153	33	24	14	98	63	3	36	50	110	45	623

TABLA 3.

ESTUDIO DE LA SOLUCION

La solución encontrada lógicamente no es adaptable en su totalidad a las condiciones reales de la planta, debido principalmente a la falta de una total flexibilidad en la asignación de las bombas, Además, no todas las máquinas de extrucción son capaces de procesar cada uno de los diez productos.

En adición, el costo de cambio frecuente de bombas de una máquina a otra, puede exceder a cualquier ahorro que se pudiese lograr respecto a la disminución de reemplazos. Es también poco práctico el parar una máquina en operación para hacer un cambio de productos y en un momento dado el volumen de producción de cada estilo puede no ser como el pronosticado, consecuentemente al variar los requerimientos de la demanda, cambios en los productos deberán ser hechos.

Por estas razones, más que una solución rígida, se obtiene de la programación lineal un criterio que guía la selección en la asignación a realizarse; así por ejemplo basándonos en la tabla 3 se pueden extraer las siguientes reglas:

a) Usar el tipo de bombas S_2 en el producto P_5. Si un exceso de estas bombas es disponible, usarlo en el P_{10}. Si por el contrario, hubiese un defecto en la disponibilidad, usar el tipo S_1 para encontrar la demanda de P_5.

b) Usar la bomba tipo S_3 en los productos P_1, P_2, P_3 y P_4. Si los requerimientos no pudiesen ser llenados, entonces usar el tipo S_1. Cuando un exceso de S_3 sea disponible, usarlo para los productos de más alta j.

c) Completar cualquier requerimiento adicional con S_1.

Para la solución encontrada, la función z se obtiene mediante la aplicación de la ecuación (4) para las variables básicas, siendo su valor:

$$z = 7,348.0$$

que representa alrededor del 40% del valor de la función básica para la primera solución posible.

APLICACIONES, CAPITULO IV

PROBLEMAS DE PROGRAMACION DE LA PRODUCCION Y CONTROL DE INVENTARIOS.

El objetivo en este tipo de programas, es determinar el programa de producción mensual de un producto o de varios, para un ciclo de producción determinado, digamos de un año.

Debido a las variaciones más o menos periódicas de la demanda esperada de ese producto , basada en las gráficas de predicciones de ventas para ese ciclo de producción, es necesario contar con un inventario de producto terminado que neutralice las diferencias entre producción y demanda en un período determinado.

A fin de llenar los requerimientos mensuales pronosticados se dispone de muchas alternativas: producir la cantidad deseada cada mes o producir parte y completar con la sobreproducción de meses anteriores.

Acarrear un inventario durante cierto tiempo causa gastos adicionales que disminuyen las utilidades, ya que hay que manejar, controlar y asegurar el producto en almacén, teniendo además un capital amortizado. Si bien por otro lado, nos proporciona un patrón de producción estable.

Por otra parte si no se cuenta con ese inventario, se deberá estar variando la cuota de producción por período, apegándose estrictamente a la demanda. Estas variaciones a plazo corto del nivel de producción, son costosas, ya que hay que modificar la fueza de trabajo (personal) disminuyéndola en períodos flojos (despidos) y aumentándola en períodos de gran demanda (contratación y entrenamiento), debiéndo en muchos casos que trabajar horas extras y teniendo que utilizar al máximo la capacidad instalada con detrimento de la calidad y rendimiento del producto.

Esos dos extremos: programa fluctuante sin inventarios, o patrón de producción estable utilizando inventarios, contienen objetivos contrarios inherentes al problema.

El objetivo de un programa de producción es el minimizar la suma de los costos debidos a las fluctuaciones de producción y a la existencia de inventarios, en relación a los costos relativos asignados a los objetivos en contraposición.

MODELO MATEMATICO

La notación es:

x_t es el nivel de producción durante el período t

s_t es el inventario existente al final del período t

r_t es la demanda durante el período t

y_t es el aumento en el nivel de producción en el período t

w_t es la disminución en el nivel de producción en el período t.

c_1 es el costo unitario de aumento en el nivel de producción .

c_2 es el costo unitario de disminución en el nivel de producción.

c_3 es el costo unitario de acarreo de inventarios por período.

<u>Desarrollo</u> de las <u>Restricciones</u>:

Para un sólo producto, siguiendo la notación anterior, el modelo presenta la forma:

para t=1 $\quad x_1+s_o \geqslant r_1 \quad$ (1)

para t=2 $\quad x_2+s_1 \geqslant r_2 \quad$ (2)

para t $\quad x_t+s_{t-1} \geqslant r_t \quad$ (3)

con el fin de eliminar las desigualdades se agrega como variable de holgura a s_t:

$$x_t+s_{t-1}-s_t= r_t \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

ecuación que representa la restricción de volumen de producción, a fin de satisfacer la demanda para cada período. Habiendo n períodos.

Para definir las variaciones de producción se han introducido dos nuevas variables, una para los aumentos de producción de un período de tiempo al siguiente y otra para las disminuciones correspondientes:

$$y_t = x_t - x_{t-1} \qquad \text{si} \quad x_t > x_{t-1} \qquad (5)$$

$$y_t = 0 \qquad \text{si} \quad x_t \leq x_{t-1}$$

$$w_t = x_{t-1} - x_t \qquad \text{si} \quad x_t \leq x_{t-1}$$

$$w_t = 0 \qquad \text{si} \quad x_t > x_{t-1}$$

Para cualquier esquema de producción $x_1, x_2, \ldots, x_t \ldots, x_n$ las variables y_t y w_t gozan de las siguientes propiedades:

a) están definidas en forma única

b) son variables no negativas

c) verifican que:

$$x_t - x_{t-1} = y_t - w_t \quad \text{para toda } t \qquad (6)$$

esta ecuación representa la restricción para obtener un factor uniforme de producción a la vez de minimizar las fluctuaciones en el programa y se representa más comunmente de la forma:

$$x_t - x_{t-1} - y_t + w_t = 0 \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (7)$$

Las ecuaciones (4) y (7) representan las restricciones del programa juntamente con las de no negatividad:

$$x_t \geq 0 \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (8)$$

ademas de $r_t, s_t, y_t, w_y \geq 0$ para toda t

Finalmente, se suele tener un inventario inicial (s_0) antes de iniciar el ciclo de producción, como también terminar con un inventario para el siguiente ciclo (s_n). Estas restricciones están incluidas en la ecuación (4).

<u>Desarrollo de la función Objetivo:</u>

Por otra parte, el costo de las variaciones de producción (incrementos y disminuciones de período a período), así como el costo de llevar un inventario se dan en la siguiente ecuación:

$$Z= c_1\sum_t y_y+ c_2\sum_t w_t+ c_3\sum_t s_t \quad (9)$$

que es la función objetivo que se deberá optimizar, minimizándola

El sistema total, es un conjunto de tres veces n restriccio - nes dadas por las ecuaciones (4), (7) y (8) y una función objetivo (9); con cuatro veces n variables.

Conociendo los costos unitarios de variación y almacenamiento es posible resolver el sistema por el método simplex. Es claro que para unas c_1 y c_2 pequeñas el programa óptimo será de altas fluctuaciones con inventarios mínimos, mientras que para un costo c_3 bajo el programa tendrá pocas fluctuaciones, pero con excedentes en almacenamiento.

DISCUSION DE UN PROBLEMA (1)

En una planta, la demanda anual durante el año se estima en - la siguiente forma:

1^{or} Trimestre= 10000 unidades del producto A
2^{o} Trimestre= 20000 unidades del producto A
3^{o} Trimestre= 25000 unidades del producto A
4^{o} Trimestre= 15000 unidades del producto A

Se cuenta con 3000 unidades en el almacén al principiar el — año y se desea contar con un inventario de 2500 unidades al final del - año. La producción durante el último trimestre del presente año es de - 12000 unidades.

Si el costo de aumento de la producción es c_1=\$20 por unidad, el costo de la disminución de la producción c_2=\$ 5 por unidad y el costo de almacenamiento c_3= \$10 por unidad, ¿queé cantidad deberá producir se cada trimestre para minimizar costos?.

Los datos han sido extraídos de gráficas de pronósticos de — ventas y de correlaciones estadísticas. Los costos de variación inclu-- yen los cargos fijos y variables que un cambio de producción trae consi go.

(1) J.J. Trujillo, Elementos de Ingeniería Industrial, Univ. Autón. de- Guadalajara, 1965.

Modelo matemático:

A) Restricciones del tipo $x_t + s_{t-1} + s_t = r_t$ para todas las t:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + 3000 - s_1 = 10000 & t=1 \\
x_2 + s_1 - s_2 = 20000 & t=2 \\
x_3 + s_2 - s_3 = 25000 & t=3 \\
x_4 + s_3 - 2500 = 15000 & t=4
\end{array}
$$

B) Restricciones del tipo $x_t - x_{t-1} - y_t + w_t = 0$ para todas las t:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 - 12000 - y_1 + w_1 = 0 & t=1 \\
x_2 - x_1 - y_2 + w_2 = 0 & t=2 \\
x_3 - x_2 - y_3 + w_3 = 0 & t=3 \\
x_4 - x_3 - y_4 + w_4 = 0 & t=4
\end{array}
$$

C) Función Objetivo:

$$
Z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 20y + 20y_2 + 20y_3 + 20y_4 + 10s_1 + 10s_2 + 10s_3 + 5w_1 + 5w_2 + 5w_3 + 5w_4 = \text{mínimo.}
$$

Modelo Simplex:

A fin de formar la base para la primera solución posible, se agregan cuatro variables artificiales a las restricciones tipo A, con la notación U_t (t=1,2,3,4). El resto de las variables básicas lo constituyen las w_t (t=1,2,3,4) de las restricciones tipo B, completando las 8 necesarias, igual al número de las restricciones totales.

$$
\begin{array}{l}
x_1 - s_1 + U_1 = 7000 \\
+x_2 + s_1 - s_2 + U_2 = 20000 \\
+x_3 + s_2 - s_3 + U_3 = 25000 \\
+x4 + s_3 + U_4 = 17500 \\
x_1 - y_1 + w_1 = 12000 \\
-x_1 + x_2 - y_2 + w_2 = 0 \\
-x_2 + x_3 - y_3 + w3 = 0 \\
-x_3 + x_4 - y_4 + w_4 = 0
\end{array}
$$

Finalmente la función objetivo:

$$
Z = 0\sum_t x_t + 20y_1 20y_2 20y_3 + 20y_4 + 10s_1 + 10s_2 + 10s_3 + MU_1 + MU_2 + MU_3 + MU_4 + 5w_1 + 5w_2 + 5w_3 + 5w_4 = \text{Mínimo}
$$

donde los coeficientes M son números grandes, para facilitar la salida inmediata de la base a las variables artificiales U_t.

La representación matricial del problema, como se indicó en la tabla A del capítulo II de teoría, consiste en poner únicamente los coe ficiente de las variables ordenados de acuerdo a sus subíndices.

CONSIDERACIONES A LA SOLUCION.

(A.-) La solución del sistema anterior de 8 restricciones, con 16 variables requirió de 11 iteraciones; llegándose a los siguientes resultados:

$x_1 = 12000$; $x_2 = 20000$; $x_3 = 20000$; $x_4 = 17500$; (producción)
$y_2 = 8000$ (incremento)
$s_1 = 5000$; $s_2 = 5000$ (inventario)
$w_4 = 2500$ (disminución)

con todas las demás variables iguales a cero. La solución óptima será entonces:

1^{er} Trimestre producir 12000 unidades de A
2^{o} Trimestre producir 20000 unidades de A
3^{o} Trimestre producir 20000 unidades de A
4^{o} Trimestre producir 17500 unidades de A

con un costo mínimo de:

Aumento de producción de 1^{o} a 2^{o} trimestre= 8000 x 20= 160 000
Acarreo de inventarios en el 1^{er} trimestre= 5000 x 10= 50 000
Acarreo de inventarios en el 2^{o} trimestre= 5000 x 10= 50 000
Disminución producción 3^{o} a 4^{o} trimestre = 2500 x 5= 12500

Z TOTAL = 272 500 $

(B.-) Si se hubiera programado una producción constante durante todo el año, para lograr una fluctuación mínima, se tendría:

1^{er} Trimestre= 10 000 unidades de demanda
2^{o} Trimestre= 20 000
3^{o} Trimestre= 25 000
4^{o} Trimeste= 15 000
+ Inventario s_4= 2 500 inventario final
- Inventario s_0= 3 000 inventario inicial

Total requerido= 69 500

Producción trimestral= 69500/4= 17 375 unidades

Lo anterior se hubiera requerido producir trimestralmente para el programa de producción constante, en el cual no habría gastos de incremento o de disminución de producción, pero se tendrían gastos de acarreo de inventarios:

Inventario s_0 = 3 000
+Producción x_1 = 17 375
TOTAL = 20 375
−Demanda r_1 = 10 000
Costo Invent. = 10 375 x 10 = 103 750 = $(s_1)(c_3)$
+Producción x_2 = 17 375
TOTAL = 27 750
−Demanda r_2 = 20 000
Costo Invent. = 7 750 x 10 = 77 500 = $(s_2)(c_3)$
+Producción x_3 = 17 375
TOTAL = 25 125
− Demanda r_3 = 25 000
Costo Invent. = 125 x 10 = 1 250 = $(s_3)(c_3)$
+Producción x_4 = 17 375   182 500
TOTAL = 17 500
−Demanda r_4 = 15 000
Invent. final = 2 500 (s_4)
Aumento producción 1er Trim. = 107 500 = 5 375 x 20
Σ TOTAL = 290 000

(C.−) Si por otra parte la producción fuera apegada a la demanda para evitar el llevar inventarios, se deberían producir:

1er Trimestre = 7 000 unidades
2° Trimestre = 20 000
3° Trimestre = 25 000
4° Trimestre = 17 500

con un costo de:

Diminución producción de trim. anterior a 1° =
5 000 x 5 = 25 000
Incremento prod. 1° a 2° trimestre = 13000 x 20 = 260 000
Incremento prod. 2° a 3° trimestre = 5 000 x 20 = 100 000
Diminución prod 3° a 4° trimestre = 7 500 x 5 = 37 500
Σ TOTAL = 422 500 $

De aquí, que la solución intermedia que proporciona la programación lineal sea la más económica.

Cabe hacer las siguientes observaciones:

a) si bien en este ejemplo se ha tomado como período un trimestre, dicha unidad queda totalmente a juicio del analista de acuerdo con las condiciones particulares de cada caso.

b) Como es frecuente que las condiciones de mercado cambien bruscamente, podría pensarse que la utilidad que reporta emplear estas técnicas es relativa. Sin embargo, puede asegurarse que dicha afirmación es falsa, ya que con el auxilio de las modernas computadoras electrónicas es posible obtener información absolutamente oportuna independientemente de la unidad de tiempo que se considere y de las modificaciones que deban realizarse en el modelo matemático originalmente establecido.

c) Un problema real contiene una gran cantidad de variables y restricciones, por lo que es importante con el fin de resolver el problema con la mínima cantidad de cálculos, averiguar si es posible usar algún artificio de cálculo con el objeto de simplificar la solución.

Con ese propósito, para problemas de mayor complejidad, es conveniente utilizar el modelo del transporte.

EL PROBLEMA DE PROGRAMACION DE PRODUCCION COMO UN MODELO DE T R A N S P O R T E

Esta variación del problema se debe a Bowman que lo desarrolló como un modelo de transporte y lo resolvió con el algoritmo correspondiente.

Desarrollo de las Restricciones:

En base a la misma notación usada al principio del capítulo (hoja 26) las restricciones son las siguientes:

a) Como todas las ventas estimadas deberán satisfacerse, se tiene que la suma del inventario inicial más la producción acumulada deberá ser siempre mayor o igual que las ventas acumuladas, esto significa que:

$$s_0 + \sum_{j=1}^{t} x_j \geq \sum_{j=1}^{t} r_j \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (10)$$

b) Si además se especifica una capacidad máxima de almacenamiento, esta no deberá ser excedida por el inventario:

$$s_o + \sum_{j=1}^{t} x_j - \sum_{j=1}^{t} r_j \leqslant A \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (11)$$

donde la ecuación (10) se refiere a la restricción asociada a la demanda (b_j), y la ecuación (11) a la asociada a la disponibilidad de recursos.

c) El último juego de restricciones se refiere a la no negatividad de las x_t:

$$x_t \geqslant 0 \qquad t=1,2,\ldots,n \qquad (12)$$

Según la ecuación introducida de las fluctuaciones,

$$x_{t-1} - x_t = w_t - y_t \qquad (12)$$

se deberán expresar las restricciones en función de los términos w_t y Y_t

Para ello basta observar que:

$$-x_{t-1} + x_t = Y_t - w_t \qquad (12 \text{ bis})$$

además:

$$x_t = x_o + \sum_{j=1}^{t} (x_j - x_{j-1}) \qquad (13)$$

y consecuentemente:

$$x_t = x_o + \sum_{j=1}^{t} (Y_t - w_t) \qquad (14)$$

Esta última expresión se usa para poner las restricciones — (10), (11) y (12) en términos de Y_t y w_y.

Desarrollo de la función objetivo:

De esta manera el problema será encontrar los valores no negativos de y_t y w_t que minimicen a la función objetivo:

$$Z = \sum_t (c_1 y_t + c_2 w_t + c_3 s_t) \qquad (15)$$

sujeta a las tres veces t restricciones de las ecuaciones ya mencionadas.

Una vez obtenido el conjunto de valores y_t y w_t que minimiza a z, bastará utilizar la expresión (14) para obtener las x_t correspondientes.

APLICACIONES, CAPITULO V.

PROBLEMAS DE SELECCION DE PROCESOS

Se considera una industria de productos químicos, cuya producción involucra una sucesión de operaciones en diferentes equipos o sea, varios procesos con asignaciones de maquinaria conocidos. A la vez, se tienen las posibles ganancias que pueden obtenerse de la venta de los productos terminados.

El problema que se desea resolver consiste en determinar las cantidades que deben elaborarse de cada producto a fin de obtener las máximas ganancias, además se desea determinar cuál proceso o combinación de procesos debe utilizarse en la elaboración de cada producto.

Desde luego la solución de este problema proporciona una gran cantidad de información complementaria tal como:
la cantidad de cada producto que será procesado parcialmente por cada máquina, el programa de trabajo de cada máquina, qué productos o fracción de productos será producido por cada uno de los posibles procesos, etc.

El ejemplo que se considerará con cierto detalle es debido a Fenech y Acrivos (1) y es descrito como sigue:

En una planta química cuatro materias primas son disponibles, A, B, C y D, a la vez que cinco procesos para fabricar cuatro productos, E,F,G y H. Las materias primas se tienen en una cantidad limitada, los costos de procesos son fijos, pero varían de proceso a proceso y los precios de venta de los productos se asumen fijos para un determinado período de tiempo.

La información técnica requerida para el problema se resume en las siguientes tablas:

a) Tabla 1, donde se muestra la disponibilidad máxima de cada una de las materias primas, en (Kgs/día), así como sus costos respectivos en ($/Kg).

(1) E.J.Fenech y A. Acrivos, Chem. Eng. Sci., (1956), 93-98

B) Tabla 2, que presenta los datos de los procesos: cantidad de materias primas usada en cada proceso, número de unidades de productos fabricadas, y finalmente el precio unitario de venta de los respectivos productos finales.

C) Tabla 3, donde se muestra el tipo de reacción que ocurre y el costo de la misma, dado en ($/Kg-de-materia prima usada como referencia).

Materias Primas	Disponibilidad Máxima, (Kg/día)	Costo Unitario, ($/Kg)
A	400	1.50
B	300	2.00
C	100	4.50
D	250	2.50

TABLA 1

Los datos de los procesos son los siguientes:

Proceso	Kgs usados de Materias Primas				Kgs de Producto	Precio de Venta, ($/Kg)
	A	B	C	D		
1	2	1	0	0	3(E)	3.00
2	2	1	0	0	3(F)	2.33
3	3	1	0	2	6(G)	4.00
4	2	7	3	3	15(H)	5.00
5	2	7	3	3	15(H)	5.00

TABLA 2

Procesos 4 y 5 difieren sólamente en el costo del proceso. El proceso 4 tiene una capacidad máxima de 75 Kgs.de H por día. Si una cantidad mayor de H quiere ser producida, ésta deberá serlo en el proceso 5.

Los procesos son: TABLA 3

	Proceso	Costo de reacción ($/Kg)
1	A + B = E	1.50(A)
2	A + B = F	0.50(A)
3	A + B = E	1.50(A)
	E + A + D = G	1.00(G)
4	A + B = F	0.50(A)
	F + B + C + D = H	2.00(H)
5	A + B = F	0.50(A)
	F + B + C + D = H	2.20(H)
	(exceso de capacidad de H)	

PLANTEAMIENTO DE LAS RESTRICCIONES

X_j es la cantidad de la variable j producida por semana, para j= E, F, G, H, H'; la variable j se refiere a un producto dado elaborado según un determinado proceso de producción. Como es posible utilizar algunos procesos distintos para elaborar un sólo producto, también será posible que existan algunas x_j distintas que se refieran al mismo producto.

a_{ij} sea la cantidad de materia prima i (i=A,B,C,D) requerida por unidad de producto j.(tabla 2)

b_i será la disponibilidad máxima de la materia prima i. (T.1)

c_j representa la utilidad neta unitaria debida al producto j y se obtiene restándole al precio de venta del producto, el costo de las materias primas utilizadas y el costo de la reacción. Todo esto referido a una unidad del producto final en cuestión.

z designará a la utilidad total por día, que deberá ser maximizada para los datos proporcionados.

A) **Las restricciones por limitación de disponibilidad de materias primas:**

$$(2/3)X_E + (2/3)\ X_F + (1/2)\ X_G + (2/15)\ X_H + (2/15)\ X_{H'} \leq 400 \qquad (1)$$

$$(1/3)X_E + (1/3)\ X_F + (1/6)\ X_G + (7/15)\ X_H + (7/15)\ X_{H'} \leq 300 \qquad (2)$$

$$(1/5)\ X_H + (1/5)\ X_{H'} \leq 100 \qquad (3)$$

$$(1/3)\ X_G + (1/5)\ X_H + (1/5)\ X_{H'} \leq 250 \qquad (4)$$

B)

$$X_E \leq 75 \qquad (5)$$

donde la ecuación (5) se refiere a la limitación de la capacidad del proceso 4. Con las $X_j \geq 0$

Las restricciones, por tanto, tienen la forma general:

$$\sum_j a_{ij} X_j \leq b_i \qquad i = A, B, C, D \qquad (6)$$

DESARROLLO DE LA FUNCION OBJETIVO

El problema que se desea resolver consiste en obtener los valores X_j que satisfagan las restricciones anteriores y que maximicen la función objetivo:

$$z = \sum_j c_j X_j \qquad (7)$$

que para los datos proporcionados toma la forma:

$$z = (1/3)X_E + (1/3)X_F + (1/3)X_G + (2/5)X_H + (1/5)X_{H'} \qquad (8)$$

Sin embargo, si definimos a x_j como la utilidad neta del proceso j por día, las ecuaciones toman otro aspecto, que puede ser más significativo en otros casos:

para x_j = utilidad neta proceso j/día (9)

entonces
$$x_1 = (1/3)X_E$$
$$x_2 = (1/3)X_F$$
$$x_3 = (1/3)X_G$$
$$x_4 = (2/5)X_H$$
$$x_5 = (1/5)X_{H'}$$

quedando la función objetivo:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad (10)$$

con las restricciones del proceso:

$$2x_1 + 2x_2 + (3/2)x_3 + (1/3)x_4 + (2/3)x_5 \leqslant 400 \qquad (11)$$

$$x_1 + x_2 + (1/2)x_3 + (7/6)x_4 + (7/3)x_5 \leqslant 300 \qquad (12)$$

$$(1/2)x_4 + x_5 \leqslant 100 \qquad (13)$$

$$x_3 + (1/2)x_4 + x_5 \leqslant 250 \qquad (14)$$

$$x_4 \leqslant 30 \qquad (15)$$

con $$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,3,4,5 \qquad (16)$$

Cada una de las restricciones dadas necesitará la añadición de una variable de holgura, que a la vez que elimina la desigualdad, proporciona la base para una primera solución posible en el proceso iterativo simplex.

A estas variables de holgura se les suele asignar un coeficiente c_j igual a cero, a fin de hacerlas salir rápidamente de la base. Sin embargo, existen algunas circunstancias, de acuerdo a la naturaleza del problema, en las que conviene que alguna variable de holgura aparezca en la solución final. Entonces el coeficiente c_j toma un valor diferente de cero, un número grande positivo en el caso de maximización, para asegurar su permanencia en la base.

Si por el contrario, lo que se pretende es provocar su salida de la base lo más pronto posible, debido a su significado físico en un problema determinado, también el coeficiente c_j tomará un valor diferente de cero, un número grande negativo en una función a maximizar, para que de acuerdo al criterio asumido para la variable saliente sea la primera en abandonar la base.

SINTESIS CRITICA

Es importante determinar cuáles son los casos en los que la programación lineal puede ser empleada en el planteamiento y solución de un problema determinado. Esto nos conduce a definir los alcances y las limitaciones de este modelo matemático, mismos que están basados en la naturaleza del problema:

A) Proporcionalidad: esta limitación se refiere a la condición de que — tanto la función objetivo como las restricciones deberán expresarse como ecuaciones lineales, por lo menos en el rango estudiado.

Si al desarrollar el problema se determina que ciertas relaciones no son proporcionales o lineales, nos encontramos ante tres alternativas:

1- Aproximar las expresiones motivo de la dificultad, sustituyéndolas por funciones lineales apropiadas.

2- Redefinir el problema, para encontrar el formato de programación lineal.

3- Usar otras técnicas para resolver el problema.

La selección de las dos primeras alternativas se hará evitando - una transformación drástica o no válida del problema, ya que de lo contrario esto tendería a diluir cualquier solución en su interpretación.

B) Agregabilidad: indica que la medida total de efectividad resultante - de ejecución simultánea de todas las actividades, es igual a la suma de las efectividades de cada una de las actividades efectuadas por separado.

C) Divisibilidad: El método simplex no proporciona resultados enteros necesariamente. Los resultados se pueden redondear con el peligro de que - la solución así obtenida quede fuera del área de las soluciones posibles. Debido a la gran utilización de estas técnicas en el campo de la investigación de operaciones, el más importante y notable problema de cómputo - ha sido el encontrar una solución óptima expresada en números enteros para un programa lineal. Esto es fundamentalmente debido a los problemas - surgidos del campo del análisis combinatorio y de aspectos tales como la programación de producciones, todo lo cual ha sido formulado a través de modelos de programación lineal.

Un tratamiento eficaz para lograr esa solución óptima en números enteros, lo constituyen los algoritmos propuestos por Gomory (1).

D) Determinísticos: en el método lineal a_{ij}, b_i, c_j eran constantes conocidas. Pero en realidad no suelen ser ni lo uno ni lo otro, toda vez que la principal tarea en el desarrollo de modelos reales es la recopilación de valores numéricos precisos y fidedignos para los coeficientes.

Así pues es importante estudiar el comportamiento de las soluciones de un problema de programación lineal cuando sus coeficientes varían. Este tipo de investigación es la función de la programación lineal paramétrica. Por otro lado, cuando para conocer esos coeficientes se hacen pronósticos para determinado período de tiempo, es común que esas estimaciones cambien antes de finalizar dicho período, por lo que es necesario investigar los cambios que experimenta la solución óptima en función de los datos del problema. Tal es la finalidad de los estudios de análisis de sensibilidad.

Bibliografía muy completa acerca de diversos métodos y campos de aplicación tanto del análisis de sensibilidad como de la programación lineal paramétrica son sugeridos por Saúl I. Gass(2).

E) Iterativismo: cuando ya ha sido formulado un problema de programación lineal, determinados sus coeficientes y todo listo para efectuar la solución numérica del mismo, la cuestión más importante que se presenta es tratar de establecer los artificios de cómputo necesarios para disminuir el número de iteraciones en el proceso de cálculo.

Esos artificios están basados en evitar ciertas peculiaridades del método simplex y están diseñados para reducir el número total de iteraciones requeridas para alcanzar la solución óptima.

(1),(2) Gass, Programación Lineal, CECSA 1968.

El método simplex está divido en dos fases distintas de cómputo. La fase I se refiere a la determinación de una primera solución posible básica, mientras que la fase II se inicia con la primera solución y se refiere a la obtención de una solución posible mínima. La experiencia en los cálculos ha demostrado que se requieren aproximadamente m iteraciones (donde m es el número de ecuaciones) para resolver el problema, si dichos cálculos se inician con una base explícita de m vectores unitarios; Se requieren aproximadamente 2m iteraciones, si se usa una base artificial completa.

Así pues, parece ventajoso iniciar la fase I con el menor número posible de vectores artificiales y además con aquélla solución que siendo posible, está cerca de la "solución esperada". La mayoría de los sistemas desarrollados para acelerar los cómputos, están diseñados para neutralizar los puntos anteriores y para variar el sistema inicial simplex de cómputo, con objeto de obtener una "buena" primera solución posible, (1).

Las aplicaciones prácticas que se han realizado, dentro de la ingeniería química corresponden fundamentalmente a los modelos expuestos en las aplicaciones mencionadas en capítulos anteriores:

1- Problemas de diseño

2- Problemas de asignación de maquinaria

3- Problemas de mezclas

4- Problemas de seleccion de procesos

5- Problemas de programación de producción y control de inventarios

Una vez establecido, que un determinado problema tiene la posibilidad de ser resuelto por técnicas de programación lineal, queda por decidir si efectivamente conviene hacerlo. Es decir, si el ahorro esperado o la utilidad alcanzable justifican el costo de plantear y resolver el problema con estas técnicas.

(1) Vadja S., The theory of games and linear programming, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1956.

Al establecer un problema son varios los elementos de gran cuidado e importancia que se deben de tomar en cuenta:

1- Definir claramente el objetivo deseado, así como determinar las condiciones que realmente sean limitantes, evitando olvidar los "cuellos de botella" y demás pasos que en ese momento estén rigiendo el proceso.

2- Verificar la información técnica requerida y hacer los ajustes necesarios para tener una información confiable pero a la vez simplificada. Es decir, para aquéllos coeficientes en que es importante el tiempo, escoger un período lo suficientemente corto como para que no varíen, pero lo suficientemente amplio a fin de justificar el costo de la solución del problema.

3- Convertir todas las unidades de los elementos que intervienen en las ecuaciones en un sistema consistente, a fin de poderlos manejar sin peligro. Por lo que respecta a los costos, se debe mantener una clara separación entre los costos fijos y los variables, para no utilizar un mismo coeficiente para diferentes niveles de producción, lo cual significa diferente costo fijo asignado.

Finalmente un breve comentario de la aplicación de una solución óptima a un problema real. La utilidad de esta herramienta matemática no es precisamente el proporcionar una solución numérica rígida, sino el permitir establecer una política más amplia para la toma de decisiones. Puesto que es claro que un modelo planteado para condiciones ideales, sufre de alteraciones al presentarse las complicaciones y dificultades imprevisibles normales en cualquier actividad realizable.

B I B L I O G R A F I A .

1.- A. Acrivos, Chem Eng, 63.8,(1956) 211 - 214

2.- N. Amundson, Mathematical Methods in Chemical Engineering, Matrices and their aplication, Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall Inc,1966.

3.- A. H. Boas, Chem. Eng. April 7, (1963), 85-89.

4.- A. H. Boas, Chem. Eng, Dec. 23, (1962), 147-150.

5.- A. Charnes, W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of linear programming, Wiley 1961.

6.- Dantzing, G.B., Linear Programming and Extensions, Princenton University Press, Princenton, N.J. 1963.

7.- R. Dorfman, Samuelson y Solow, Programación Lineal y Análisis Económico, Ed. Aguilar 1962.

8.- Fenech y A. Acrivos, Chem. Eng. Sci., 58 (1956, 93-98

9.- Gass Saul, Programación Lineal, CECSA 1968.

10.- G. Hadley, Linear Programming, Addison-Wesley, 1961

11.- A. Kaufmann, Métoded y modelos de la Investigación de operaciones - CECSA 1962

12.- Lee ans Gray, Chem. Eng; Aug, 16, (1967), 131-135

13.- E. Lloyd Norbert, Managment Operations Research, K. Holt-Renehart-Winston Inc., 1965

14.- Murphy, Chem. Eng; Jan, 2, (1968), 114-118

15.- G. H. Symonds, Industrial and Eng Chem, 48-3 (1956, 394-401

16.- H. T. Schwan, Chem Eng, 63-8 (1956) 211-214

17.- J. J. Trujillo, Elementos de Ingeniería Industrial, Universidad de Guadalajara, 1965.

18.- S. Vadja, R., The Teory of the games and Linear Programming, Wiley, N. Y., 1956

19.- Vázquez Moreno, Tesis, Planteo de un programa lineal para elaboración de combustóleos en la Refinería Madero, 1964.

20.- W. F. Walker, bulletin TIMS/ORSA JOINT meeting, ST. Francisco, 1968.