



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXPONENTE DE CRECIMIENTO EN CAMINATAS
ALEATORIAS CON CICLOS BORRADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

JEREMAI REYES GARAY

TUTORA

DRA. ALMA SARAÍ HERNÁNDEZ TORRES



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Gracias a Dios y a mi familia por amarme.

“Luego volvieron a casa y prepararon especias aromáticas y perfumes. Entonces descansaron el sábado, conforme al mandamiento.”

Lucas 23:56

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares	1
1.1. Probabilidad	1
1.2. Procesos estocásticos	11
1.3. Notación asintótica	15
1.4. Definiciones básicas de teoría de gráficas	16
2. Caminatas aleatorias y circuitos eléctricos	18
2.1. Hacia las caminatas aleatorias	19
2.1.1. Caminatas aleatorias en una gráfica simple y conexa	19
2.1.2. Caminatas aleatorias en \mathbb{Z}^d	20
2.2. Teoría básica de circuitos eléctricos	23
2.2.1. Interpretación probabilística del voltaje	24
2.2.2. Funciones armónicas	26
2.2.3. Interpretación probabilística de la corriente eléctrica	28
2.2.4. Flujos	29
2.2.5. Resistencia efectiva	31
3. Recurrencia y transitoriedad	34
3.1. Recurrencia en los circuito eléctricos	34
3.2. Recurrencia y transitoriedad de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d	37
3.2.1. Recurrencia de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}	41

3.2.2.	Recurrencia de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2	41
3.2.3.	Transitoriedad de la caminata aleatoria simple en dimensiones mayores	43
3.3.	Principio de invarianza de Donsker	44
3.3.1.	Convergencia débil o en distribución	49
4.	Caminatas aleatorias con ciclos borrados en \mathbb{Z}^d	53
4.1.	¿Cómo borrar ciclos cronológicamente?	53
4.2.	Caminata aleatoria con ciclos borrados infinita en \mathbb{Z}^d	56
4.2.1.	Dimensión $d \geq 3$	56
4.2.2.	Dimensión $d = 2$	57
5.	El exponente de crecimiento	59
5.1.	El exponente para las caminatas aleatorias	59
5.2.	El exponente para las caminatas aleatorias con ciclos borrados	64
5.3.	Resultados	66
	Bibliografía	67

Introducción

Esta tesis consta de dos partes. La primera parte es una exposición autocontenida para demostrar recurrencia y transitoriedad, dependiendo de la dimensión, de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d . La herramienta principal es la conexión que tienen las caminatas aleatorias con los circuitos eléctricos. En la segunda mitad de la tesis, continuamos con el análisis a detalle de la caminata aleatoria simple para, luego, exponer resultados sobre el exponente de crecimiento de la caminata aleatoria con ciclos borrados.

En el Capítulo 1, empezaremos recordando definiciones y resultados esenciales de la teoría de probabilidad y la teoría de los procesos estocásticos. Incluiremos, además, definiciones básicas de la teoría de gráficas.

Para introducirnos en el tema de la tesis, imaginemos lo siguiente. Nos encontramos en un laberinto y comenzamos en un punto fijo, digamos, la entrada. A medida que pasa cada hora, nos movemos un paso en una dirección particular (norte, sur, este, oeste) elegida al azar con la misma probabilidad. A este proceso se le conoce como la caminata aleatoria simple. Si se regresa en un tiempo finito, con probabilidad 1, a la entrada del laberinto, entonces decimos que la caminata aleatoria simple es recurrente. En [1], se relata como George Polya formuló el problema de recurrencia:

“él y su prometida también habían salido a caminar por el bosque, y de repente nos cruzamos. Nos volvimos a cruzar a la mañana siguiente e incluso varias veces. No recuerdo cuántas veces, pero ciertamente con demasiada frecuencia y me sentí avergonzado: Me miró como si los estuviera espiando, lo cual les aseguro que no era el caso. Los encontraba por pura

casualidad, pero ¿cuál es la probabilidad que realmente haya sucedido por casualidad y no intencionalmente?”

En 1921, Polya resolvió este problema en \mathbb{Z}^d y presentó el teorema de recurrencia, luego llamado de Polya, en [2]. Peter Doyle en su tesis doctoral [3], mostró cómo relacionar los circuitos eléctricos y las caminatas aleatorias simples, para así dar una nueva demostración del teorema de Polya. El puente teórico que conecta a las caminatas aleatorias simples con los circuitos eléctricos son las funciones armónicas.

La analogía de un puente es apropiada, pues en esta tesis se cruza tal puente para encontrar resultados físicos aplicables a las caminatas aleatorias. De esta manera, enunciaremos y probaremos el teorema de Polya en términos de circuitos eléctricos

Continuamos en el Capítulo 2 estudiando las trayectorias de las caminatas aleatorias simples. Para analizarlas, tomamos un número cada vez mayor de pasos n , reajustando la escala espacial de la caminata por \sqrt{n} . Al hacer tender n hacia infinito, el principio de invarianza de Donsker [4] nos asegura la convergencia débil hacia un proceso llamado movimiento browniano.

Posteriormente, en el Capítulo 3, introducimos la caminata aleatoria con ciclos borrados en una gráfica finita. Esta caminata surge de una trayectoria finita de una caminata aleatoria simple, a la cual se le aplica un algoritmo cronológico de borrado de ciclos. Luego, se define este proceso en la trayectoria infinita de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d . Veremos que la construcción no es tan sencilla cuando la caminata aleatoria simple está definida en \mathbb{Z}^2 , pues ésta es recurrente.

En el Capítulo 4 seguimos con el análisis del comportamiento asintótico de la caminata aleatoria simple. A partir de la unicidad de las funciones armónicas, se demostrará que el exponente de crecimiento de la caminata aleatoria simple es dos. Concluimos este trabajo con la exposición de algunos resultados recientes sobre el exponente de crecimientos de la caminata aleatoria con ciclos borrados.

Las aportaciones principales de esta tesis son: una presentación, de todo lo mencionado anteriormente incluyendo algunos resultados de la caminata aleatoria con ciclos borrados, accesible a nivel licenciatura. Además, se realizan los cálculos detallados para obtener los resultados de la caminata aleatoria simple.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo establecemos las nociones preliminares necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Empezamos en la Sección 1.1, con los conceptos que nos llevarán a definir un espacio de probabilidad. Seguido, introducimos el concepto de variable aleatoria para, así, definir otro espacio de probabilidad sobre el cual desarrollaremos con mayor facilidad. Después, ahondamos en el concepto de esperanza, y dos desigualdades asociadas. Utilizamos como referencia los libros [5], [6] y [7] donde el lector puede ahondar en alguno de los temas presentados.

Extendemos, luego en la Sección 1.2, la noción de variable aleatoria e introducimos los procesos estocásticos. En particular, consideraremos las cadenas de Markov y deducimos resultados de esta clase de procesos. Para esta sección se consultaron los libros [8] y [9].

Luego, definimos la notación asintótica. Concluimos el capítulo con las definiciones básicas de teoría de gráficas. Para estas dos últimas secciones, nos basamos en los libros [10] y [11], respectivamente, que quedan de referencia al lector interesado.

1.1. Probabilidad

Un experimento es un ensayo que proporciona conocimiento, y se llaman eventos a los posibles resultados que se pueden observar del experimento. Un experimento es

aleatorio si conocemos todos los eventos posibles, pero sin poder predecir el resultado que ocurrirá.

Definición 1. El conjunto de todos los eventos posibles se denomina **espacio muestral**. Si la cardinalidad de los posibles resultados es contable, podemos enumerar estos resultados, como $\omega_1, \omega_2, \dots$, y nuestro espacio muestral es $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

Cuando Ω es un conjunto infinito, uno debe ser cuidadoso, pues de lo contrario uno puede llegar a contradicciones o paradojas, como la paradoja de Banach-Tarski (se recomienda al lector interesado revisar [12]). De ahí, viene la necesidad de la siguiente definición.

Definición 2. Una familia \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , es decir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, es una **sigma-álgebra de Ω** si cumple que:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Para $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, tenemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Si Ω es finito, es usual tomar \mathcal{F} como el conjunto potencia de Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$. Si el conjunto Ω es el de los números reales o el de las funciones continuas en $[0, 1]$ (denotado como $C[0, 1]$), entonces se suele tomar la sigma-álgebra de Borel de los reales o de $C[0, 1]$ ¹, denotada como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}(C[0, 1])$, respectivamente. Un subconjunto A de Ω se denomina evento y es un conjunto de resultados del experimento aleatorio.

Definición 3. Si \mathcal{F} es una sigma-álgebra del conjunto Ω , decimos que (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible.

La probabilidad clásica o frecuentista del evento A es la proporción de ocurrencia de A sobre todos los eventos posibles. Así, si en n experimentos A sucede k veces, entonces la probabilidad que el evento A suceda es $\frac{k}{n}$. Abstrayendo este concepto, tenemos la siguiente definición.

¹La sigma-álgebra de Borel de los reales es la generada por los intervalos abiertos de los reales $\mathbb{R} : (a - \delta, a + \delta) = \{x : |x - a| < \delta\}$. Análogamente, se define la sigma-álgebra de Borel de $C[0, 1]$.

Definición 4. Una **medida de probabilidad** P definida en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisface:

1. (Normalización). $P(\Omega) = 1$.
2. (Sigma-aditividad). Para cualquier colección contable de eventos A_1, A_2, \dots disjuntos dos a dos (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A $P(A)$ se denomina la **probabilidad del evento** A .

De la definición, se deducen varias propiedades. Una de ellas es que para $A \in \mathcal{F}$,

$$P((A)^c) = 1 - P(A)$$

En efecto, notemos que $\Omega = A \cup A^c$ y por aditividad,

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

De ahí, se sigue que $P(\emptyset) = 0$.

Definición 5. Sean Ω un conjunto no vacío, \mathcal{F} una sigma-álgebra de Ω y $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ una medida de probabilidad. La terna (Ω, \mathcal{F}, P) es llamada **espacio de probabilidad**.

En lo que resta del capítulo nos ubicaremos en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

La **ley de probabilidad total** enuncia que cualquier evento $A \in \mathcal{F}$, se puede calcular su probabilidad como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i),$$

donde $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ es una colección contable de eventos disjuntos a pares y tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Ésta ley se sigue del hecho de escribir a A como la unión de eventos

disjuntos a pares, esto es $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)$ y de la sigma-aditividad de la medida de probabilidad.

Para A y $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) \neq 0$, definimos la **probabilidad condicional** de A dado B como:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dos eventos A y $B \in \mathcal{F}$ son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

En el caso contrario, decimos que son **dependientes**.

Se dice que la colección contable de eventos $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ es independiente si para cualquier elección de índices: $i_1 < i_2 < \dots < i_n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_n}).$$

Para describir los eventos Ω del espacio muestral como eventos en \mathbb{R} , definimos una correspondencia a través de funciones denominadas variables aleatorias. De manera que uno pueda describir parte del resultado del experimento numéricamente.

Definición 6. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** X es una función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

De esta manera, podemos definir la ley de probabilidad

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)), \text{ para cada } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Así, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ define un nuevo espacio de probabilidad.

Definición 7. Llamaremos **función de distribución** de la variable aleatoria X a

la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Definición 8. Decimos que dos variables aleatorias X y Y son **idénticamente distribuidas** si $F_X = F_Y$.

Es natural definir la convergencia en distribución como la convergencia de las funciones de distribución asociadas.

Definición 9. Sean X y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente definidas en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Decimos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en distribución** a X , escrito como $X_n \xrightarrow{D} X$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R} \text{ donde } F_X \text{ es continua.}$$

Proposición 1 (Teorema del límite central). *Dada $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) \in (0, \infty)$. Para cada $n \geq 1$, sea $S(n) = X_1 + X_2, \dots, X_n$. La suma normalizada $\bar{S}(n)$ satisface que,*

$$\bar{S}(n) = \frac{S(n) - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{D} S \sim \mathcal{N}(0, 1), \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Igualmente, podemos definir **independencia entre variables aleatorias**.

Definición 10. Las variables aleatorias X y Y son independientes si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)) = P_X(A)P_Y(B).$$

Tanto Y y X toman valores en \mathbb{R} . Sin embargo, en general las variables aleatorias no necesariamente tienen que tomar valores en el mismo espacio.

Si una variable aleatoria toma un conjunto numerable de valores, hablamos de una **variable aleatoria discreta**.

Por ejemplo, W sigue una **distribución uniforme**, si toma valores en un conjunto finito N , con $P(W = x) = \frac{1}{\text{card}(N)}$, para todo $x \in N$.

O bien, la variable aleatoria X sigue una **distribución Rademacher** con parámetro $p \in [0, 1]$, $Y \sim \text{Rademacher}(p)$, si toma valores en $\{1, -1\}$ con $P(X = 1) = p$ y $P(X = -1) = 1 - p$. Una interpretación sencilla de la variable Rademacher es que modela el resultado que obtenemos al tirar una moneda donde, digamos, los resultados águila y sol los asociamos con 1 y -1, respectivamente.

Otro ejemplo es la variable aleatoria Y que sigue una **distribución binomial** con parámetros (n, p) . Esta variable aleatoria toma valores en un conjunto finito $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ con

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y} \quad \text{para todo } y \in N.$$

La variable aleatoria binomial modela el número de éxitos en n ensayos independientes, cada uno con probabilidad p de éxito.

El último ejemplo, que será de utilidad, es la variable aleatoria Z que sigue una **distribución geométrica** con parámetro $p \in [0, 1]$ tal que

$$P(Z = z) = (1 - p)^{z-1} p \quad \text{para } z \in \mathbb{N}.$$

La variable aleatoria geométrica modela el número de ensayos independientes necesarios para lograr el primer éxito, cada uno con probabilidad p de éxito.

Decimos que una **variable aleatoria X es continua**, si existe una función f_X integrable y positiva, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Llamada la función de densidad de la variable aleatoria X .

Por ejemplo, si Z sigue una **distribución normal** con parámetros (μ, σ^2) , $Z \sim$

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

La variable aleatoria Z que distribuye $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ satisface que

$$P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.68269. \quad (1.1)$$

Definición 11. Dada X una variable aleatoria, definimos la **esperanza** de X como:

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} x p_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

La esperanza está definida si, y sólo si, la serie (integral) es absolutamente convergente, es decir si

$$\begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| p_X(x) < \infty & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Intuitivamente, la esperanza corresponde al promedio ponderado de los valores que toma la variable aleatoria.

La esperanza es un operador lineal, es decir para X, Y variables aleatorias y para $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]. \quad (1.2)$$

Además, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias, al aplicar inducción en la Ecuación (1.2) sobre n , entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

Decimos que la esperanza cumple la propiedad de aditividad.

Proposición 2 (Desigualdad de Markov). *Sea X una variable aleatoria no negativa*

con $\mathbb{E}[X] < \infty$ y sea $t > 0$. Entonces

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Demostración. Sean $t > 0$ y la función $\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}$, conocida como la **función indicadora** del conjunto $\{X \geq t\}$, definida como:

$$\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geq t, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $\omega \in \Omega$. Además, X es una variable aleatoria no negativa, entonces para todo $\omega \in \Omega$ se tiene que $X(\omega) \geq 0$. Luego, si para $\omega \in \Omega$

$$0 \leq X(\omega) < t \quad \text{entonces} \quad 0 \leq \frac{X(\omega)}{t}.$$

Si, ahora, para $\omega \in \Omega$

$$0 < t \leq X(\omega) \quad \text{entonces} \quad 1 \leq \frac{X(\omega)}{t}.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}(\omega) \leq \frac{X(\omega)}{t}, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Por la monotonicidad y linealidad de la esperanza, tenemos que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Finalmente, notemos que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}] = P(X \geq t)$. De esta manera, queda demostrada la desigualdad. \square

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, es decir tal que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se cumple que $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, entonces $g(X)$ es también una variable aleatoria. En este caso, podemos calcular su esperanza, cuando la serie (integral) correspondiente es

absolutamente convergente, como:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) p_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Definición 12. Dada X una variable aleatoria, definimos la **función generadora de momentos** de X como

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{tX} p_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ donde la serie (integral) es absolutamente convergente.

Proposición 3 (Cota Chernoff-Cramer). *Sea X una variable aleatoria tal que $M_X(s) < \infty$ para $s \in (-s_0, s_0)$ para alguna $s_0 > 0$. Para cualquier $\beta > 0$ y $s \in (0, s_0)$, se cumple que*

$$P(X \geq \beta) \leq \exp[-s\beta + \Phi_X(s)], \quad (1.3)$$

donde $\Phi_X(s) = \log(M_X(s))$.

Demostración. Dado que $s \geq 0$, como la función exponencial es una función creciente, se cumple que

$$\{\omega : X(\omega) \geq \beta\} = \{\omega : e^{sX(\omega)} \geq e^{s\beta}\}.$$

Luego, e^{sX} es una variable aleatoria no negativa con esperanza $M_X(s)$. Mediante la desigualdad de Markov que

$$P(X \geq \beta) = P(e^{sX} \geq e^{s\beta}) \leq \frac{M_X(s)}{e^{s\beta}} = \exp[-s\beta + \Phi_X(s)].$$

Lo cual demuestra lo deseado. □

Definición 13. Dada X una variable aleatoria y $A \in \mathcal{F}$, definimos la **esperanza condicional** de X dado el evento A con $P(A) > 0$ como:

$$\mathbb{E}[X | A] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x | A) = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]}{P(A)}.$$

Se interpreta como el valor promedio de X una vez confirmado el evento A .

Proposición 4. Sean $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ eventos disjuntos a pares, los cuales forman una partición del espacio muestral; sean X una variable aleatoria y $A \in \mathcal{F}$ con $P(A) > 0$. La esperanza condicional de X dado el evento A es

$$\mathbb{E}[X | A] = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[X | A \cap B_k] P(B_k | A).$$

Demostración. Trabajemos con el lado derecho de la igualdad, para llegar al lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X | A \cap B_k] P(B_k | A) &= \sum_{k=1}^n \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x | A, B_k) P(B_k | A) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{x \in \mathbb{R}} x \frac{P(X = x, A, B_k)}{P(A, B_k)} \frac{P(A, B_k)}{P(A)} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \frac{P(X = x, A, (\bigcup_{k=1}^n B_k))}{P(A)} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x | A) = \mathbb{E}[X | A]. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por la definición de probabilidad condicional. La tercera igualdad se sigue por aditividad. La última igualdad se tiene de $\bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega$. \square

Para medir cuán dispersos están los valores que toma una variable aleatoria X con respecto a su esperanza, definimos la **varianza** de X , dada por:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

De manera natural, generalizamos la noción de variable aleatoria a la de vector aleatorio. Así, un **vector aleatorio** $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ es una función $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, donde las coordenadas Y_i son variables aleatorias. Observemos que nuestro vector aleatorio tiene un número de entradas finito; si pensamos en que tenemos ahora

vectores indexados por un conjunto de cardinalidad infinita, llegamos a la noción de proceso estocástico.

1.2. Procesos estocásticos

Definición 14. Un **proceso estocástico** $(X_t)_{t \in T}$ es una familia de variables aleatorias X_t definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Todas las variables toman valores en un conjunto S , denominado **espacio de estados**. Además, las variables aleatorias están indexadas por un conjunto de cardinalidad infinita T denominado **espacio parametral**. Notemos que:

1. Para $t \in T$ fija, $\omega \mapsto X_t(\omega)$, para cada $\omega \in \Omega$, define una variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .
2. Para $\omega \in \Omega$ fija, $t \mapsto X_t(\omega)$, para cada $t \in T$, define una función a valores reales, llamada **trayectoria del proceso**.

Cuando $T = \mathbb{Z}_+$, se dice que el proceso estocástico es a tiempo discreto. Por otra parte, cuando $T = \mathbb{R}$ o $T = [0, \infty)$, hablamos de proceso estocástico a tiempo continuo.

Definición 15. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en un espacio de estados S . Decimos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una **cadena de Markov** si cumple la **propiedad de Markov**, es decir, tal que

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, para todo estado j y para toda sucesión de estados $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n$ para las cuales la probabilidad condicional este bien definida, es decir, tal que,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) > 0.$$

La propiedad de Markov nos dice que para calcular la probabilidad de un estado

futuro X_{n+1} , el conocimiento del pasado (X_0, X_1, \dots, X_n) no da más información que la información del estado presente X_n .

Si, además, para todo $t \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$p_{ij} := P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

diremos que la cadena de Markov es **homogénea**. Llamaremos a p_{ij} la **probabilidad de transición del estado i al estado j** en un paso. De lo contrario, si las probabilidades de transición fueran funciones del tiempo, el proceso sería una cadena de Markov **no homogénea** en el tiempo.

Podemos ver el proceso como una evolución a lo largo del tiempo, interpretando al evento $\{X_n = i\}$ como que el proceso está en el estado i en el tiempo n .

Cualquier probabilidad asociada a la evolución de la cadena de Markov homogénea pueden calcularse usando las probabilidades anteriores. De esta manera, podemos escribir cada probabilidad de transición en una matriz conocida como **matriz de transición** $[p_{ij}]_{i,j \in S}$ de tamaño $|S| \times |S|$. Así, p_{ij}^n representa la probabilidad que la cadena, iniciada en el estado i , después de n pasos se encuentre en el estado j .

La distribución de la variable aleatoria X_0 se llama **distribución inicial** de la cadena de Markov, que denotamos como

$$P_0(i) = P(X_0 = i), \text{ para todo } i \in S.$$

Proposición 5 (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). *Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea. Para $i, j \in S$ y $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$P(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_n = k | X_0 = i) P(X_m = j | X_0 = k).$$

Demostración. Consideremos la descomposición del evento $\{X_{n+m} = j\}$ sobre los eventos disjuntos $\{X_n = k\}_{k \in S}$, los cuales forman una partición del espacio muestral Ω . Entonces, $\{X_{n+m} = j\} = \{X_{n+m} = j\} \cap \Omega = \{X_{n+m} = j\} \cap \{\bigcup_{k \in S} X_n = k\}$, Así,

por sigma-aditividad y la definición de probabilidad condicional tenemos que,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) &= P\left(X_{n+m} = j \cap \left(\bigcup_{k \in S} X_n = k\right) \mid X_0 = i\right) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i)P(X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} P(X_m = j \mid X_0 = k)P(X_n = k \mid X_0 = i).
\end{aligned}$$

Demostrando, así, la ecuación. □

La ecuación de Chapman-Kolmogorov indica que la probabilidad que la cadena se mueva de i a j en $m+n$ pasos es igual a la probabilidad que se mueva de i a cualquier $k \in S$ en n pasos, y luego se mueva de k a j en m pasos más.

Proposición 6 (Construcción de las cadenas de Markov). *Sean S un espacio de estados y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso estocástico con valores en S . La medida de probabilidad sobre S está determinada por la matriz de transición $[P]$ y la distribución inicial X_0 . Entonces se puede construir una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ para tener*

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P_0(i) p_n(i, j) = \sum_{i \in S} P_0(i) p_{ij}^n, \text{ para todo } i, j \in S.$$

Si el lector está interesado en la construcción, entonces una referencia es [13, p. 10].

Definición 16. Para estados i, j decimos que i es **accesible** a j si existe un tiempo t tal que $p_t(i, j) > 0$, y lo denotamos como $i \rightarrow j$. Si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, decimos que i y j están **comunicados**, y lo denotamos como $i \leftrightarrow j$.

Proposición 7. *La relación $i \leftrightarrow j$ es una relación de equivalencia sobre el espacio de estados S . Entonces, la relación $i \leftrightarrow j$ define una partición en clases de equivalencia, y a esas últimas las conocemos como clases de comunicación.*

Demostración. La reflexividad es evidente, pues para $n = 0$, $P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$. La simetría también se obtiene inmediatamente, pues si $i \leftrightarrow j$, entonces $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$ y, por lo tanto, $j \leftrightarrow i$. La transitividad se sigue de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, pues si $p_n(i, k) > 0$ y $p_m(k, j) > 0$, entonces

$$p_{n+m}(i, j) = \sum_{l \in S} p_n(i, l) p_m(l, j) \geq p_n(i, k) p_m(k, j) > 0.$$

Por lo tanto, la relación de comunicación es una relación de equivalencia. \square

Definición 17. Cuando todos los estados $i \in S$ se comunican entre sí decimos que la cadena de Markov es **irreducible**.

Además, decimos que la cadena de Markov es **reversible** con respecto a alguna función positiva $\pi : S \rightarrow (0, \infty)$, si cumple las ecuaciones de balance detallado:

$$\pi_u p_{u,v} = \pi_v p_{v,u} \quad \text{para todo } u, v \in S.$$

Definición 18. Una medida de probabilidad π , es decir una función $\pi : S \rightarrow [0, 1]$ y tal que $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, es una **distribución estacionaria** respecto a una cadena de Markov con matriz de transición $[p_{ij}]_{i,j \in S}$, se cumple la ecuación de balance general:

$$\sum_{i \in S} \pi_i p(i, j) = \pi_j \quad \text{para todo } j \in S.$$

Definición 19. Una medida de probabilidad π es una **distribución reversible** respecto a una cadena de Markov con matriz de transición $[p_{ij}]_{i,j \in S}$, se cumple que

$$\pi_i p(i, j) = \pi_j p(j, i) \quad \text{para todo } j \in S.$$

Proposición 8. *Si π es una distribución reversible, entonces π es una distribución*

estacionaria.

Demostración. Por reversibilidad, para cualquier $j \in S$ tenemos que

$$\sum_{i \in S} \pi_i p(i, j) = \sum_{i \in S} \pi_j p(j, i) = \pi_j \sum_{i \in S} p(j, i) = \pi_j.$$

La tercera igualdad se sigue de $\sum_{i \in S} p(j, i) = 1$, cumpliendo así la ecuación de balance general. \square

Proposición 9. *Para toda cadena de Markov irreducible y finita existe una única distribución estacionaria.*

Si el lector está interesado en esta demostración se recomienda revisar [9, p. 72].

1.3. Notación asintótica

La motivación detrás de la notación asintótica es comparar los comportamientos de funciones con los de un conjunto de funciones de referencia, a medida que toman valores cada vez más grandes tendiendo a infinito. Una notación matemática que permite comparar dos funciones es la notación O-grande.

Sean $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funciones. Se dice que la función $f = \mathcal{O}(g)$, si existe una constante $c > 0$ y un número natural n_0 tal que $f(t) \leq cg(t)$, para todo $t \geq n_0$. Por ejemplo, si $f = \mathcal{O}(\ln(n))$ entonces el tiempo de crecimiento de f es logarítmico en proporción a n .

Por ejemplo, consideremos $f(t) = t^3 + \ln(t)$. Podemos demostrar que $f(t) = \mathcal{O}(t^3)$ eligiendo $c = 2$ y $n_0 = 1$. Esto se debe a que para todos los valores de t mayores que 1, se satisface la desigualdad

$$t^3 + \ln(t) \leq 2t^3.$$

Decimos que f se aproxima a g , que se denota por $f \sim g$, si $f = g + \mathcal{O}(g)$.

Un ejemplo que se utilizará en este trabajo es el de la función factorial. La función factorial se define como $n! = 1 * 2 * \dots * (n - 1) * n$ para cada $n \geq 1$. Generalmente es

difícil de calcular para valores grandes de n . Sin embargo, la **fórmula de Stirling** aproxima la función factorial como

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \quad (1.4)$$

1.4. Definiciones básicas de teoría de gráficas

Una **gráfica** G es un par ordenado $G = (G(V), G(A))$ al cual por simplificación, escribiremos $G = (V, A)$. Consiste de un conjunto V de **vértices** y un conjunto A , disjunto de V , a las que llamamos **aristas**. Asociada a este par, tenemos una **función de incidencia** $\psi(G)$, que asocia a cada arista de G un par de vértices (no necesariamente distintos) de G . Si e es una arista y u y v son vértices tales que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, que denotaremos simplemente como $\{u, v\}$, entonces se dice que e une u y v , y los vértices u y v se denominan extremos.

Una arista con extremos iguales se denomina **bucle**. Ver Figura 1.1. Se dice que dos o más aristas con el mismo par de extremos son **aristas múltiples**. Dos vértices que inciden en una arista común son **adyacentes** y escribimos $x \sim y$.

Una gráfica es **finita** si tanto la cardinalidad del conjunto de vértices como del conjunto de aristas de G son finitos. Ver Figura 1.1. De lo contrario, si la cardinalidad del conjunto de vértices es a lo más infinito numerable entonces la llamamos **gráfica infinita**.

Una gráfica es **conexa** si, para cada partición de su conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos X e Y , hay una arista con un extremo en un vértice de X y un extremo en un vértice de Y ; de lo contrario, la gráfica es **inconexa**. Ver Figura 1.1. En otras palabras, una gráfica se desconecta si su conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos no vacíos X e Y de modo que ninguna arista tenga un extremo en X y un extremo en Y .

El grado de un vértice v en una gráfica G , denotado por $\deg(v)$, es el número de aristas de G incidente con v , contando cada bucle como dos aristas. Una gráfica G es **localmente finita** si todo vértice v de G tiene $\deg(v) < \infty$.

Una gráfica es **simple** si no tiene bucles ni aristas múltiples.

Un **camino** C en una gráfica simple es definido por una sucesión finita no nula de aristas que denotamos como $C = [v_0, v_1, \dots, v_k]$, donde v_j indica el j -ésimo vértice en C y k se llama la longitud de C . Si además $k > 0$, $v_0 = v_k$ y $v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_{k-1}$, entonces C se llama **ciclo**, ver Figura 1.1. Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

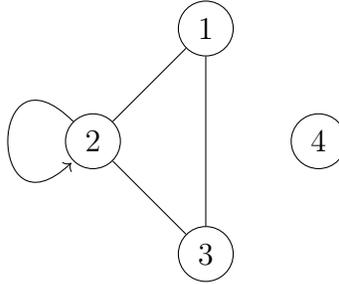


Figura 1.1: Gráfica disconexa y finita con un bucle en el vértice 2. El camino $[1, 2, 3, 1]$ define un ciclo.

Supongamos que la gráfica $G = (V, A)$ tiene un encaje en \mathbb{R}^d . Es decir, existe una función $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$. Para un camino $C = [v_0, \dots, v_k]$ una trayectoria $\gamma : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}^d$ está definida por $\gamma(n) = \phi(v_n)$ para $n = 1, 2, \dots, k$ y una interpolación lineal en $\gamma|_{[k, k+1]}$ para $n \in \{0, \dots, k-1\}$.

Capítulo 2

Caminatas aleatorias y circuitos eléctricos

La teoría de la probabilidad está estrechamente vinculada a la física. En particular, en este capítulo presentaremos relaciones entre el estudio de los circuitos eléctricos y el de las caminatas aleatorias.

En una primera parte, nos centraremos en definir a las caminatas aleatorias. Luego, en entender los conceptos de circuitos eléctricos, para luego vincular cantidades físicas como el voltaje y la corriente eléctrica con conceptos de probabilidad.

La relación con circuitos eléctricos nos permite simplificar cálculos. Por ejemplo, con la ayuda de las leyes de resistencia, simplificar el circuito eléctrico a una arista “imaginaria”. Esta arista “imaginaria” es equivalente a las resistencias (conductancias) en el circuito eléctrico original, manteniendo las mismas funciones de voltaje y corriente en los vértices. A esta arista imaginaria la llamamos resistencia efectiva.

Nuestro objetivo es probar recurrencia de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d . Para esto, primeramente, daremos una interpretación de la recurrencia en términos de la resistencia efectiva.

Luego, calculamos la resistencia efectiva de una subgráfica (para el caso de dimensión mayor o igual a 2) o de todo (para el caso de dimensión igual a 1) el circuito eléctrico en \mathbb{Z}^d , para así resolver el problema de recurrencia.

En esta sección tomamos de referencia [14] y [15], por lo que el lector interesado

en estos temas puede consultarlos.

2.1. Hacia las caminatas aleatorias

Una caminata aleatoria simple modela el desplazamiento en un gráfica de un caminante. En cada unidad de tiempo, el caminante se mueve uniformemente al azar, a uno de los vértices adyacentes en la gráfica.

Las caminatas aleatorias constituyen un ejemplo relativamente simple, y sin embargo muy importante, de las cadenas de Markov.

2.1.1. Caminatas aleatorias en una gráfica simple y conexa

Consideremos que estamos en un laberinto y comenzamos la exploración del laberinto por la entrada E . Supongamos que el camino que tomamos, para avanzar a un punto del laberinto, lo elegimos uniformemente al azar sobre sus vértices adyacentes. En la Figura 2.1, se representa el laberinto.

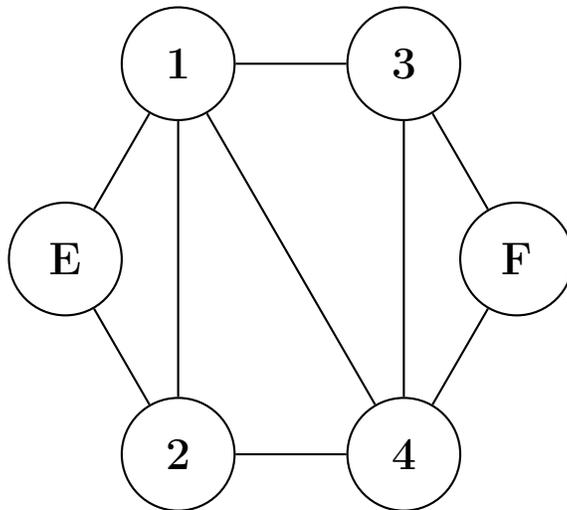


Figura 2.1: laberinto sobre el cual tenemos una caminata aleatoria simple.

Tenemos, en el laberinto, que el conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, E, F\}$ y el conjunto de aristas A está señalado en la Figura 2.1.

Definición 20. Definimos la **caminata aleatoria simple** $(S_n)_{n \geq 0}$ en una gráfica simple, localmente finita y conexa $G = (V, A)$ como un proceso estocástico con espacio de estados V de G , y cuyas probabilidades de transición se definen como:

$$p_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } y \sim x. \\ 0 & \text{si } y \not\sim x. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si $x \in V$ y $S(0) = x$, entonces la medida de probabilidad de la caminata aleatoria simple es $P_x(\cdot)$. Notemos que por la Proposición 6 la caminata aleatoria simple en G es una cadena de Markov.

En particular, podemos definir la caminata aleatoria simple en la gráfica \mathbb{Z}^d .

2.1.2. Caminatas aleatorias en \mathbb{Z}^d

Definición 21. Sea $(X_k)_{k \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas sobre un espacio de probabilidad, que siguen una distribución uniforme con parámetro $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es el i -ésimo vector canónico. La caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ en \mathbb{Z}^d , se define como:

$$S(0) = 0 \text{ y } S(n)^1 = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Por tanto, sus probabilidades de transición quedan determinadas para $x, y \in \mathbb{Z}^d$ como:

$$p_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } \|y - x\| = 1. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denotamos por $\|\cdot\|$ a la distancia euclídeana en \mathbb{Z}^d .

Proposición 10. *La caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ en \mathbb{Z}^d es irreducible.*

¹En adelante, a veces denotaremos a S_n como $S(n)$.

Demostración. Sean $i, s_1, \dots, s_n, j \in \mathbb{Z}^d$. Por la conexidad de \mathbb{Z}^d , existe un camino $C = [i, s_1, \dots, s_n, j]$, de ahí que

$$P(S(0) = i, S(1) = s_1, \dots, S(n) = s_n, S_{n+1} = j) = \left(\frac{1}{2n}\right)^{n+1}.$$

Así, $p_{n+1}(i, j) > 0$ y entonces $i \rightarrow j$. Por simetría, $p_{n+1}(j, i) > 0$, por lo tanto $j \rightarrow i$. Por ende, $i \leftrightarrow j$. \square

Regresemos, por un momento, a la caminata aleatoria simple definida en el laberinto, introducido en la Sección 2.1.1. Nuestro objetivo es llegar a la salida del laberinto, que se encuentra en el vértice F , antes que el azar nos lleve de regreso a la entrada E . Si miramos la probabilidad de este evento, veremos que es una función que satisface la propiedad del promedio, que introduciremos en la Sección 2.2.2. Antes de probar la propiedad del promedio en la Proposición 11, introduciremos la siguiente variable aleatoria.

Definición 22. Sean $(S_n)_{n \geq 0}$ una caminata aleatoria simple en G y A un subconjunto no vacío de vértices en G . Definimos el **primer tiempo de visita** a A como:

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : S_n \in A\}.$$

Además, definimos

$$\tau_A^+ = \inf\{n \geq 1 : S_n \in A\}.$$

Si $A = \{i\}$, escribiremos a $\tau_{\{i\}}$ como τ_i .

Si τ_F es la variable aleatoria que modela la primera vez que llegamos al final del laberinto F , entonces el evento que nos interesa es $\{\tau_F < \tau_E\}$.

Sea $h(x)$ la probabilidad que se alcance el estado F antes que E , empezando en el estado x , es decir,

$$h(x) = P(\tau_F < \tau_E \mid S(0) = x). \quad (2.2)$$

Proposición 11. *La función $h(x)$ satisface que $h(E) = 0, h(F) = 1$, conocidos como valores de frontera de la función h , y para $x \neq E, F$*

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y).$$

A esta última igualdad se le conoce como la propiedad del promedio.

Demostración. De la definición del primer tiempo de visita, se tiene que al evaluar E y F en la Ecuación (2.2)

$$h(F) = P(\tau_F < \tau_E \mid S(0) = F) = P(0 = \tau_F < \tau_E \mid S(0) = F) = 1$$

y,

$$h(E) = P(\tau_F < \tau_E \mid S(0) = E) = P(\tau_F < \tau_E = 0 \mid S(0) = E) = 0.$$

Ahora, consideremos la descomposición del evento $\{S_0 = x\}$ sobre los eventos disjuntos a pares $\{S_1 = y\}_{y \sim x}$, es decir

$$\{S(0) = x\} = \bigcup_{y \sim x} \{S(0) = x, S(1) = y\}.$$

Así, por aditividad y la definición de probabilidad condicional tenemos que:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= P(\tau_F < \tau_E \mid S(0) = x) \\
 &= \frac{P(\tau_F < \tau_E, S(0) = x)}{P(S(0) = x)} \\
 &= \frac{P\left(\tau_F < \tau_E, \bigcup_{y \sim x} \{S(0) = x, S(1) = y\}\right)}{P(S(0) = x)} \\
 &= \sum_{y \sim x} \frac{P(\tau_F < \tau_E, S_1 = y, S_0 = x)}{P(S_0 = x)} \\
 &= \sum_{y \sim x} \frac{P(\tau_F < \tau_E \mid S_1 = y, S_0 = x) P(S_1 = y, S_0 = x)}{P(S_0 = x)} \\
 &= \sum_{y \sim x} P(\tau_F < \tau_E \mid S_1 = y) P(S_1 = y \mid S_0 = x).
 \end{aligned}$$

La cuarta y quinta igualdad se siguen de la definición de probabilidad condicional. La sexta igualdad se sigue de la propiedad de Markov. Por lo tanto,

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y) \quad (2.3)$$

para $x \neq E, F$. □

2.2. Teoría básica de circuitos eléctricos

No podemos modelar gráficos como circuitos eléctricos sin comprender primero los circuitos en sí mismos. Recordamos varios hechos relevantes sobre los circuitos eléctricos, enfatizando que se trata de leyes físicas.

La unicidad de las funciones armónicas nos permite dar interpretaciones probabilísticas a los conceptos de circuitos eléctricos. Por ejemplo, como veremos en la Sección 2.2.1, el voltaje unitario es igual a la probabilidad de que la trayectoria de la caminata aleatoria simple llegue a un vértice antes de llegar a otro, no necesariamente comenzando en alguno de los vértices de la frontera.

Además en la Sección 2.2.3, demostramos que la corriente eléctrica es un indicador del número promedio de veces que el caminante pasa a lo largo de una arista del circuito eléctrico. Con esto, realmente vemos la profundidad del vínculo que conecta los circuitos eléctricos y las caminatas aleatorias.

Definimos el circuito eléctrico como una gráfica simple y conexa $G = (V, A)$ donde tenemos una pila de k voltios, sin embargo al elegir 1 voltio (llamado voltaje unitario) obtenemos la igualdad en la Ecuación (2.2). De esta manera, tenemos una pila de 1 voltio de F a E ; estos vértices son llamados extremos del circuito. (Ver Figura 2.2). En general, a cada arista $\{x, y\}$ de G le asignamos una función de peso llamada resistencia $r_{x,y}$. Dado que las aristas son no direccionadas, se satisface que $r_{x,y} = r_{y,x}$. La conductancia $c_{x,y}$ se define como $c_{x,y} = \frac{1}{r_{x,y}}$. Para facilitar los cálculos, a cada arista le asignamos una resistencia de 1Ω .

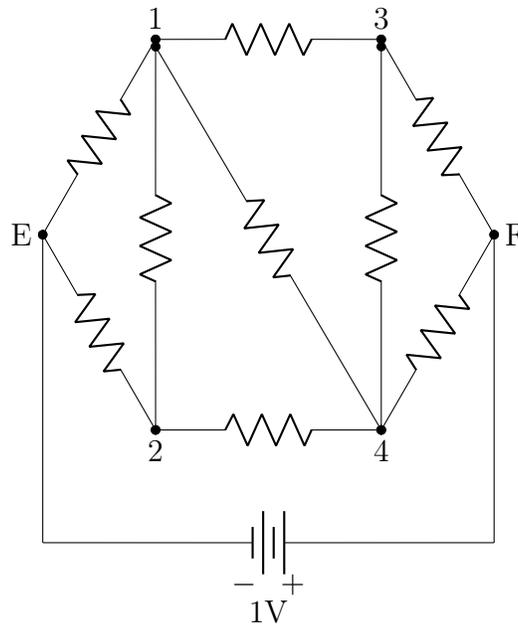


Figura 2.2: Circuito eléctrico asociado a la Figura 2.1.

2.2.1. Interpretación probabilística del voltaje

Para cada $x \in V$, $v(x)$ denota el voltaje del vértice en el circuito. Fijamos los voltajes $v(F) = 1$ y $v(E) = 0$ y en los vértices $x \in V \setminus \{E, F\}$, se establecen los

voltajes $v(x)$.

La corriente eléctrica es una función antisimétrica, pues físicamente, al medir la corriente se toma en cuenta el sentido. Es decir, la corriente eléctrica es dirigida, así: $i_{x,y} = -i_{y,x}$. Además, la **ley de Ohm** enuncia como relacionar la corriente eléctrica, el voltaje y la resistencia. Dado que hemos tomado $r_{x,y} = 1\Omega$, el valor de la corriente eléctrica se simplifica a:

$$i_{x,y} = \frac{v(y) - v(x)}{r_{x,y}} = v(y) - v(x) \quad \text{donde } y \sim x. \quad (2.4)$$

La **ley de Kirchhoff de nodos** enuncia que el total de corriente eléctrica que fluye hacia cualquier estado distinto de E y F es 0. Es decir, para $x \neq E, F$, se cumple que

$$\sum_{y \sim x} i_{x,y} = 0 \quad (2.5)$$

De ambas leyes tenemos,

$$\sum_{y \sim x} v(x) - v(y) = 0.$$

Así, para $x \neq E, F$,

$$\deg(x)v(x) = \sum_{y \sim x} v(y) \quad (2.6)$$

y como G es una gráfica conexa y finita, se cumple que $1 \leq \deg(x) < \infty$. Entonces, de la Ecuación (2.6) se sigue que

$$v(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} v(y). \quad (2.7)$$

De las Ecuaciones (2.3) y (2.7), concluimos que v y h definen misma función. La relación que existe entre ambas funciones se da por las propiedades de las funciones armónicas, las cuales introduciremos a continuación.

2.2.2. Funciones armónicas

Definición 23. Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa y sea $\partial V \subset V$. Una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es **armónica** en $V \setminus \partial V$ si para $x \in (V \setminus \partial V)$ se satisface que

$$f(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y).$$

Notemos que si el conjunto de vértices de G corresponde a un subconjunto finito B de \mathbb{Z}^d y $\partial B \subset B$, entonces f es armónica en $B \setminus \partial B$ si para $x \in (B \setminus \partial B)$ se satisface la propiedad del promedio:

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} f(y),$$

pues $\deg(x) = 2d$.

Definición 24. Sea $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el **operador de Laplace** como

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} (f(y) - f(x)) \quad \text{para } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Notemos que si $\Delta f(x) = 0$ para $x \in (B \setminus \partial B)$, entonces f es armónica en $B \setminus \partial B$.

Proposición 12 (Principio del máximo). *Sean $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa y $\partial V \subset V$ y sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es una función armónica en $V \setminus \partial V$, entonces f toma su valor máximo M y su valor mínimo m en el conjunto ∂V .*

Demostración. Como G es finita, entonces el valor máximo existe. Sean M el máximo de f . Si $f(x) = M$ y $x \in \partial V$, entonces queda demostrado. Si $f(x) = M$ y $x \in (V \setminus \partial V)$,

$$f(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y) = M \quad \text{entonces} \quad f(y) \leq f(x) \quad \text{para } y \sim x.$$

Además, si para algún $z \sim x$

$$f(z) < M \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y) = f(x) < M$$

que es una contradicción. De ahí que, $M = f(x) = f(y)$, para todo $y \sim x$. Si aún $z \in (V \setminus \partial V)$, por el argumento anterior, y dado que V es una gráfica conexa, tenemos que para todo $u \sim z$, $f(u) = M$; continuando de esta manera, eventualmente al ser G una gráfica finita concluimos que $f(v) = M$ donde $v \in \partial V$. La prueba es análoga para el valor mínimo m . \square

Proposición 13 (Principio de unicidad). *Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa. Si f y g son funciones armónicas en $V \setminus \partial V$, tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial V$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V$.*

Demostración. Sea $h = f - g$. Si $x \in (V \setminus \partial V)$, entonces por la propiedad del promedio

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y) - \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} g(y) \\ &= \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} (f(y) - g(y)) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y). \end{aligned}$$

y, por tanto, es armónica. Además, $h(x) = 0$ para x en ∂V y, por el principio del máximo, se sigue que los valores máximo y mínimo de h son 0. En consecuencia, $h(x) = 0$ para todo x en V y, por ende, $f(x) = g(x)$ para todo x en V . \square

El **principio de unicidad** afirma que en una gráfica finita y conexa no puede haber dos funciones armónicas diferentes que tengan los mismos valores de frontera. Tenemos que tanto la función h introducida en la Definición 22 como la función v introducida en la Sección 2.2.1 son funciones armónicas en $V \setminus \partial V$ con los mismos valores de frontera, $h(E) = v(E) = 0$ y $h(F) = v(F) = 1$. Así pues, tenemos que la función $h(x)$ definida como la probabilidad que se alcance el estado F antes que E , empezando en el estado x y la función $v(x)$ definida como el voltaje en x son la misma función para todo x en V .

2.2.3. Interpretación probabilística de la corriente eléctrica

En la Proposición 10 demostramos que la caminata aleatoria simple es irreducible. La Proposición 9 nos da una consecuencia de la irreducibilidad de cualquier cadena de Markov. Esto nos motiva a probar la siguiente proposición.

Proposición 14. *Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa y sea $(S_n)_{n \geq 0}$ la caminata aleatoria simple definida en G . La medida de probabilidad $\pi_x = \frac{\deg(x)}{\sum_{x \in V} \deg(x)}$ para todo $x \in V$ es una distribución reversible, y por tanto estacionaria para $(S_n)_{n \geq 0}$.*

Demostración. Recordemos que las resistencias están definidas sobre aristas no direccionadas, así que basta definir una conductancia para cada arista, haciendo la conductancia simétrica. Por lo que se cumple la ecuación de balance detallado

$$\deg(x)p_{x,y} = \deg(x)\frac{1}{\deg(x)} = 1 = \deg(y)\frac{1}{\deg(y)} = \deg(y)p_{y,x}, \quad (2.8)$$

para $x \sim y$ y las probabilidades de transición $p_{x,y}$ definidas en (2.1). Como $|V| < \infty$, dividimos el primer y el último lado de la Ecuación (2.8) entre $\sum_{x \in V} \deg(x)$, tenemos que $\pi_x p_{x,y} = \pi_y p_{y,x}$, concluyendo así que π_x es reversible. \square

Para determinar la corriente eléctrica $i_{F,E}$ a lo largo de la arista $\{F, E\}$, notemos que la corriente eléctrica comienza en F y avanza hasta llegar a E . Es decir, la corriente eléctrica puede regresar a F antes de llegar a E ; y si $x, y \neq E, F$, entonces la corriente eléctrica puede pasar una o varias veces a lo largo de la arista de $\{x, y\}$, y en la dirección opuesta $\{y, x\}$.

Sea $m(x)$ el número esperado de visitas de la caminata aleatoria simple al estado x antes de llegar a E . Por definición $m(E) = 0$. Se tiene que para $x \neq E$

$$m(x) = \frac{1}{\deg(y)} \sum_{x \sim y} m(y),$$

dado que x viene de algún vertice adyacente y . De la reversibilidad de la caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$, tenemos que:

$$m(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} \frac{p_{y,x}}{p_{x,y}} m(y) \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{m(x)}{\deg(x)} = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} \frac{m(y)}{\deg(y)},$$

por lo que la función $k(x) = \frac{m(x)}{\deg(x)}$ es armónica para $x \neq E, F$ y las condiciones de frontera son $k(F) = \frac{m(F)}{\deg(F)}$ y $k(E) = 0$. Por la Proposición 13, $v(x) = k(x)$ para todo $x \in V$.

Recordemos que la corriente eléctrica, introducida en la Ecuación (2.4), que fluye de x a y es,

$$i_{x,y} = v(x) - v(y) = \frac{m(x)}{\deg(x)} - \frac{m(y)}{\deg(y)} = m(x) p_{x,y} - m(y) p_{y,x}.$$

Ahora, $m(x) p_{x,y}$ y $m(y) p_{y,x}$ es el valor esperado de veces que nuestro caminante irá de x a y y de y a x , respectivamente. De esta manera, la interpretación probabilística de la corriente eléctrica $i_{x,y}$ es la esperanza del número neto de veces que el caminante pasa a lo largo de la arista $\{x, y\}$.

2.2.4. Flujos

Definición 25. Sea $G = (V, A)$ una gráfica conexa y finita, vista como circuito eléctrico. Definimos el **flujo** $j : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ de F a E a través de las asignaciones $j_{x,y}$, tales que:

1. (Antisimetría) $j_{x,y} = -j_{y,x}$.
2. $j_x = \sum_{y \sim x} j_{x,y} = 0$ para $x \neq E, F$.
3. $j_{x,y} = 0$, si la resistencia $r_{x,y} = \infty$.

Se sigue también que para cualquier flujo j , $j_F = -j_E$, pues

$$j_F + j_E = \sum_x j_x = \sum_x \sum_{y \sim x} j_{x,y} = 0.$$

Denotamos a $|j_F| = |-j_E|$ como el tamaño del flujo. Decimos que el flujo es unitario si $|j_F| = |-j_E| = 1$. En particular, la corriente eléctrica es un flujo, pues la corriente eléctrica es una función antisimétrica que satisface la Ecuación (2.5), y si $y \not\sim x$, entonces $i_{x,y} = 0$; satisfaciendo, así, las tres condiciones de la Definición 25. A la corriente eléctrica se le conoce como **flujo de corriente**. Si, además, la corriente eléctrica satisface que $|i_F| = 1$ entonces se conoce como **flujo de corriente unitario**.

Proposición 15 (Conservación de la energía). *Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa (vista como circuito eléctrico), y sean f cualquier función definida en G y j cualquier flujo de F a E . Entonces,*

$$(f_F - f_E) j_F = \frac{1}{2} \sum_{x,y} (f_x - f_y) j_{x,y}. \quad (2.9)$$

Demostración. Comenzamos desarrollando el lado derecho de la Ecuación (2.9). Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} (f_x - f_y) j_{x,y} &= \sum_x (f_x \sum_y j_{x,y}) - \sum_y (f_y \sum_x j_{x,y}) \\ &= f_F \sum_y j_{F,y} + f_E \sum_y j_{E,y} - f_F \sum_x j_{x,F} - f_E \sum_x j_{x,E} \\ &= f_F j_F + f_E j_E - f_F (-j_F) - f_E (-j_E) = 2(f_F - f_E) j_F. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por las condiciones 1 y 2 de la Definición 25 y la tercera igualdad se debe a que $j_F = -j_E$. \square

Las resistencias, como su nombre lo dice, se oponen al flujo de corriente eléctrica, por lo tanto, se requiere energía eléctrica para impulsar la corriente eléctrica a través de la resistencia. Esta energía eléctrica se disipa y la energía disipada total por el flujo j a través del circuito eléctrico, se define como

$$E(j) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} j_{x,y}^2 r_{x,y}.$$

Tomando $v(F) = 1$ y $v(E) = 0$ voltajes y corriente eléctrica i_F , tales que cumplen la ley de Kirchhoff y Ohm, introducidas en las Ecuaciones (2.5) y (2.4), concluimos que:

$$E(i) = [v(F) - v(E)]i_F = i_F.$$

Como resultado, se obtiene que el total de energía disipada por el paso de la corriente eléctrica i de F a E es igual a la energía disipada en una sola arista que conecta F y E llevando los mismos voltajes y la corriente eléctrica total. La conductancia C_{eff} de tal arista satisface la ley de Ohm, es decir,

$$C_{\text{eff}}(v_F - v_E) = C_{\text{eff}} = i_F = \sum_{x \sim F} i_{F,x}.$$

2.2.5. Resistencia efectiva

Definición 26. La **conductancia efectiva** C_{eff} del circuito eléctrico de F a E cumple la ley de Ohm con $v(F) = 1$ y $v(E) = 0$, y se define como

$$C_{\text{eff}} = \frac{i_F}{v_F - v_E} = i_F = \sum_{x \sim F} i_{F,x}.$$

La cantidad recíproca R_{eff} es la **resistencia efectiva**,

$$R_{\text{eff}} = \frac{v_F - v_E}{i_F} = \frac{1}{i_F} = \frac{1}{\sum_{x \sim F} i_{F,x}} = \frac{1}{C_{\text{eff}}}$$

Grosso modo, la resistencia (conductancia) efectiva es la resistencia (conductancia) total del circuito eléctrico de F a E (ver Figura 2.3).

Al calcular las resistencias efectivas, usaremos dos hechos importantes sobre circuitos eléctricos. Primero, si dos resistencias con valores r_1 y r_2 están conectadas en serie, pueden ser reemplazados por una sola resistencia r con valor

$$r = r_1 + r_2 \quad (\text{Ver Figura 2.4}).$$

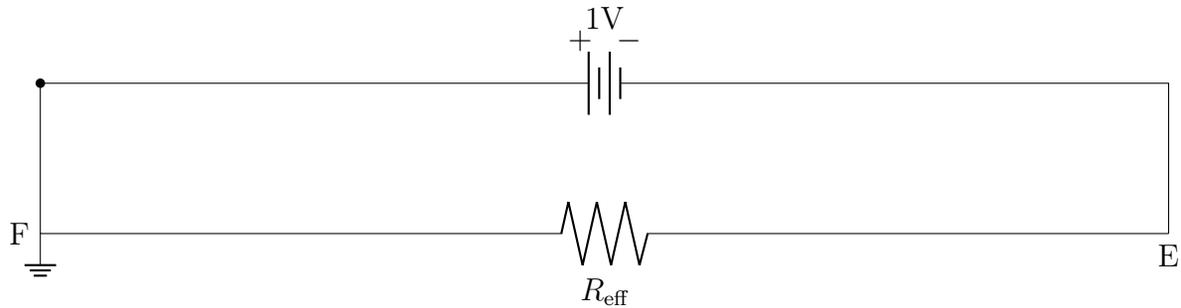


Figura 2.3: Interpretación física de la resistencia efectiva para el circuito de la Figura 2.2.

Segundo, si dos resistencias con valores r_1 y r_2 están conectadas en paralelo también pueden ser reemplazados por una sola resistencia r , de tal forma que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \quad (\text{Ver Figura 2.5}).$$

Así, usando las leyes de resistencias en serie y en paralelo, algunos circuitos eléctricos se pueden reducir, sucesivamente, a una sola resistencia.

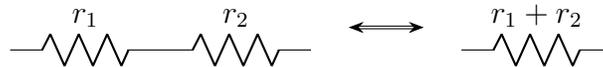


Figura 2.4: Suma de resistencias con valores r_1 y r_2 en un circuito en serie.

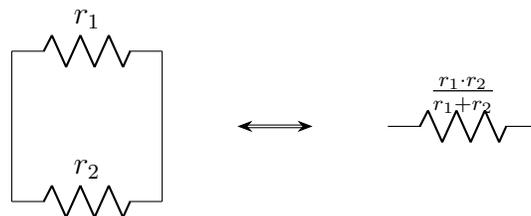


Figura 2.5: Suma de resistencias con valores r_1 y r_2 en un circuito en paralelo.

Proposición 16 (Principio de Thomson). *Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa, vista como circuito eléctrico. El flujo de corriente unitario i en G determinado por la ley de Kirchhoff, minimiza la energía disipada para todos los flujos unitarios j de F a E .*

Demostración. Sea j cualquier flujo unitario y g un flujo definido como $g = j - i$, y por tanto $|g_F| = |j_F| - |i_F| = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} 2E(j) &= \sum_{x,y} j_{x,y}^2 r_{x,y} = \sum_{x,y} (i_{x,y} + f_{x,y})^2 r_{x,y} \\ &= \sum_{x,y} i_{x,y}^2 r_{x,y} + 2 \sum_{x,y} (v(x) - v(y)) r_{x,y} g_{x,y} + \sum_{x,y} g_{x,y}^2 r_{x,y}. \end{aligned}$$

Del resultado de conservación de la energía, si $f = v$ y $j = g$, entonces

$$4(v_E - v_F) g_F = 0,$$

pues g es un flujo nulo. En consecuencia, se sigue que $E(i) \leq E(j)$. \square

Proposición 17 (Ley de monotonicidad). *Sea $G = (V, A)$ una gráfica finita y conexa. Si la resistencia de un circuito eléctrico aumenta (disminuye), entonces la resistencia efectiva R_{eff} aumenta (disminuye). En particular,*

1. *remover aristas aumenta la resistencia efectiva; y*
2. *unir vértices reduce la resistencia efectiva.*

Demostración. Sean i y j los flujos de corriente unitarios de F a E con resistencias $r_{x,y}$ y $\bar{r}_{x,y}$, respectivamente, tales que $\bar{r}_{x,y} \geq r_{x,y}$, para cualesquiera $x, y \in V$. Se sigue que,

$$\bar{R}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} j_{x,y}^2 \bar{r}_{x,y} \geq \frac{1}{2} \sum_{x,y} j_{x,y}^2 r_{x,y} \geq \frac{1}{2} \sum_{x,y} i_{x,y}^2 r_{x,y} = R_{\text{eff}}.$$

La primera desigualdad se da por hipótesis y la segunda desigualdad por el Principio de Thomson.

Físicamente, para el primer caso, establecer una resistencia infinita en una arista equivale a remover la arista. Para el segundo caso, establecer una resistencia 0 en una resistencia equivale a unir los extremos de una arista, es decir sustituir ambos extremos por uno solo que equivale a una conductancia infinita. \square

Capítulo 3

Recurrencia y transitoriedad

El concepto más importante en el análisis de circuitos eléctricos, para nuestros propósitos, es la idea de una resistencia efectiva. Una colección de resistencias entre los puntos E y F puede reemplazarse con una sola resistencia entre E y F que represente las propiedades eléctricas de la colección reemplazada. Es decir, que el reemplazo de resistencias no cambie ni la corriente eléctrica a través de E y F ni el voltaje entre E y F .

Al introducir la resistencia efectiva de un circuito eléctrico, desarrollamos la teoría matemática necesaria para estudiar la transitoriedad y recurrencia de caminatas aleatorias.

3.1. Recurrencia en los circuito eléctricos

Sea $G_\infty = (V, A)$ una gráfica infinita, conexa, simple y localmente finita que representa un circuito eléctrico donde tenemos una pila de 1 voltio entre 0 e ∞ . Asimismo, tenemos una función de peso, que corresponde a una resistencia igual a 1Ω para cada arista $\{x, y\}$.

Sean $x, y \in V$ y sea $d(x, y)$ la distancia entre dos vértices igual a la longitud del camino más corto entre ellos, es decir

$$d(x, y) = \inf\{k \geq 0 : [x = v_0, v_1, \dots, v_k = y]\}.$$

Fijamos un vértice $0 \in V$, llamado el origen de G_∞ . Definimos

$$V_n = \{x \in V : d(0, x) \leq n\}$$

y sean A_n las aristas que conectan los vertices de $G_n(V)$. De esta manera, $G_n = (V_n, A_n)$ es una gráfica finita y conexa.

Sea $\partial V_n = \{x \in V : d(0, x) = n\}$ los vértices de la frontera de G_n . Así, consideramos que G_n representa a un circuito eléctrico donde tenemos una pila de 1 voltio de 0 hasta ∂V_n .

Por ejemplo, si $G_\infty = \mathbb{Z}^2$, ver Figura 3.2, entonces, G_3 simboliza un circuito eléctrico donde tenemos una pila de 1 voltio conectada de 0 (representado por el vértice de color café) hasta la frontera de ∂V_3 (representada por los vértices de color azul). Observemos que, además de los vértices de color café y azul, los vértices de color anaranjado y rosa, así como las aristas que conectan a estos vértices, definen a G_3 .

Sea $R_{\text{eff}}(n)$ la resistencia efectiva de este circuito eléctrico G_n . Observemos que G_n es una subgráfica de G_∞ , así para toda arista cuyos extremos no pertenezcan a V_n asignamos un valor cero de resistencia. Por la ley de monotonicidad, $R_{\text{eff}}(n)$ es creciente. De propiedades elementales de cálculo, sabemos que el límite para sucesiones crecientes está definido. Por ende,

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n)$$

existe, o bien $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n) = \infty$. Naturalmente, la resistencia efectiva en G_∞ se define por $R_{\text{eff}} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n)$.

Sea $(S_n)_{n \geq 0}$ la caminata aleatoria simple en una gráfica infinita conexa $G = (V, A)$ y recordemos que $\tau_i^+ = \inf\{n \geq 1 : S(n) = i\}$ es el tiempo de paro, introducido en la Definición 22.

Definición 27. Decimos que un estado $i \in V$ es **recurrente** si $P_i(\tau_i^+ < \infty) = 1$.

Definición 28. Un estado $i \in V$ es **transitorio** si $P_i(\tau_i^+ < \infty) < 1$.

Proposición 18. *La probabilidad de regreso a 0 de la caminata aleatoria simple en G_∞ , es:*

$$P_0(\tau_0^+ < \infty) = 1 - \frac{1}{\deg(0)R_{\text{eff}}}.$$

Demostración. Recordemos la interpretación probabilística del voltaje unitario $v(x)$ en x : el voltaje unitario en x corresponde a la probabilidad que una caminata aleatoria simple alcance el estado F antes que E , empezando en x . Es decir, tenemos que $v(x) = P_x(\tau_F < \tau_E) = h(x)$.

Extendiendo naturalmente la función h para G_n tenemos para todo $x \in V_n$,

$$h_n(x) = P_x(\tau_{\partial V_n} < \tau_0)$$

y satisface que $h_n(0) = 0$ y $h_n(y) = 1$ para todo $y \in \partial V_n$. Por ejemplo, véase la Figura 3.2 si $G_\infty = \mathbb{Z}^2$. Entonces, G_n simboliza un circuito eléctrico donde tenemos una pila de 1 voltio conectada de 0, representado por el vértice de color anaranjado, hasta la frontera ∂V_n , representada por el conjunto de vértices de color rojo si G_1 .

De esta manera, por la unicidad de las funciones armónicas, vemos a h_n como el voltaje sobre G_n vista la gráfica como un circuito eléctrico de 0 a ∂V_n . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_0(\tau_0^+ < \tau_{\partial V_n}) &= 1 - \sum_{x \sim 0} p_{0,x} h_n(x) \\ &= 1 - \sum_{x \sim 0} \frac{1}{\deg(0)} [h_n(x) - h_n(0)] \end{aligned}$$

Luego, al aplicar la ley de Ohm obtenemos

$$P_0(\tau_0^+ < \tau_{\partial V_n}) = 1 - \frac{|i|}{\deg(0)}, \quad (3.1)$$

donde denotamos por i al flujo de solución de las leyes de Kirchhoff asociado con el voltaje. Tenemos así que $|i|$ es el tamaño del flujo. Por definición, $\frac{1}{R_{\text{eff}}(n)} = |i|$. Por la continuidad de la medida de probabilidad,

$$P_0(\tau_0^+ < \tau_{\partial V_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0(\tau_0^+ < \infty),$$

concluyendo, así, la demostración. \square

Proposición 19 (Caracterización de recurrencia para circuitos eléctricos). *La caminata aleatoria simple en G_∞ es:*

1. *recurrente si y sólo si $R_{\text{eff}} = \infty$;*
2. *transitoria si y sólo si $R_{\text{eff}} < \infty$.*

Demostración. De la Proposición 18, se sigue que si $R_{\text{eff}} = \infty$ entonces

$$P_0(\tau_0^+ < \infty) = 1 - \frac{1}{\deg(0)R_{\text{eff}}} = 1.$$

Ahora, si la caminata aleatoria simple en G_∞ es recurrente, entonces $P_0(\tau_0^+ < \infty) = 1$. Por lo tanto, $R_{\text{eff}} = \infty$ y análogamente para el caso transitorio. \square

3.2. Recurrencia y transitoriedad de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d

Veamos que si la caminata aleatoria simple es transitoria, entonces la caminata aleatoria simple visita a todo $x \in \mathbb{Z}^d$, con probabilidad uno, un número finito de veces.

Denotemos a N_i la variable aleatoria que cuenta el número de veces que la caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ visita al estado i , es decir

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S(n)=i\}}.$$

Proposición 20 (Caracterización de transitoriedad). *Sea $(S_n)_{n \geq 0}$ la caminata aleatoria simple transitoria. Entonces, la transitoriedad de $(S_n)_{n \geq 0}$ es equivalente a que $P_i(N_i < \infty) = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}^d$.*

Demostración. Como $(S_n)_{n \geq 0}$ es transitoria, por definición $P_i(\tau_i^+ < \infty) < 1$. Tenemos además que N_i por definición cumple que:

$$P_i(N_i = 0) = P_i(\tau_i^+ = \infty).$$

Además, tenemos la siguiente equivalencia de eventos

$$\{\tau_i^+ < \infty\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\tau_i^+ = j\}.$$

Luego, para todo $m \geq 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P_i(N_i \geq m) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(N_i \geq m, S(j) = i, S(j-1) \neq i, \dots, S(1) \neq i, S(0) = i)}{P(S(0) = i)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(N_i \geq m-1 \mid S(0) = i) P_i(\tau_i^+ = j) \\ &= P_i(N_i \geq m-1) \sum_{j=1}^{\infty} P_i(\tau_i^+ = j) \\ &= P_i(N_i \geq m-1) P_i(\tau_i^+ < \infty). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue de

$$\frac{P(S(j) = i, S(j-1) \neq i, \dots, S(1) \neq i, S(0) = i)}{P(S(0) = i)} = P_i(\tau_i^+ = j).$$

En el penúltimo renglón aplicamos la propiedad de Markov para deducir que, si sabemos que hasta m sólo hubo un retorno, desde aquél instante debe haber por lo menos $m-1$ retornos. Recursivamente hasta que se llega a $P_i(N_i \geq 0) = 1$, tenemos que:

$$P_i(N_i \geq m) = P_i(\tau_i^+ < \infty)^{m-1}.$$

Es decir, la variable aleatoria N_i sigue una distribución $\text{Geom}(P_i(\tau_i^+ = \infty))$, por lo que la esperanza de N_i se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[N_i] &= \sum_{t=0}^{\infty} t P_i(N_i = t) = \sum_{t=0}^{\infty} t P_i(\tau_i^+ < \infty)^{t-1} [1 - P_i(\tau_i^+ < \infty)] \\ &= \frac{1}{1 - P_i(\tau_i^+ < \infty)} < \infty.\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Markov

$$tP_i(N_i \geq t) \leq \mathbb{E}_i[N_i] < \infty.$$

Si el lado izquierdo sigue siendo finito cuando $t \rightarrow \infty$, entonces debemos tener

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(N_i \geq t) = P_i(N_i = \infty) = 0.$$

En consecuencia, $P_i(N_i < \infty) = 1$. Así, con probabilidad uno, la caminata aleatoria transitoria visita una última vez el estado i , es decir $P_i(\tau_i^+ < \infty) = 1$.

Luego, observemos que para todo $i \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}^d} \{\tau_i^+ < \infty\}\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}^d} \{\tau_i^+ < \infty\}\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} \{\tau_i^+ < \infty\}^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} (1 - P(\tau_i^+ < \infty)) = 1.\end{aligned}$$

Como resultado, la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d tiene un número finito de visitas con probabilidad 1. \square

Proposición 21 (Caracterización de recurrencia y transitoriedad). *Para un estado $i \in V$,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) = \infty$ si y sólo si i es recurrente.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) < \infty$ si y sólo si i es transitorio.

Si el lector está interesado en esta demostración se recomienda revisar [8, pp. 51-52].

Proposición 22. *La recurrencia es una propiedad de las clases de comunicación (introducido en la Proposición 7), es decir,*

1. *Si $j \leftrightarrow i$ y j es recurrente, entonces i es recurrente.*

2. *Si $j \leftrightarrow i$ y j es transitorio, entonces i es transitorio.*

Demostración. Procedamos con una demostración por casos.

Caso 1. Si $j \leftrightarrow i$, existen $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $p_k(i, j) > 0$ y $p_m(j, i) > 0$. Por la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se sigue que

$$p_{k+l+m}(j, j) \geq p_k(i, j)p_l(j, j)p_m(j, i) \geq 0 \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Luego por la Proposición 21,

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{k+l+m}(j, j) \geq p_k(i, j) \left(\sum_{l=0}^{\infty} p_l(j, j) \right) p_m(j, i) = \infty$$

pues j es recurrente. Así, i es recurrente.

Caso 2. Supongamos que i no es transitorio, es decir es recurrente. Además, por hipótesis $i \leftrightarrow j$. Por el punto anterior, j es recurrente, lo cual es una contradicción, a la hipótesis faltante. Por tanto, i es transitorio. \square

Como la recurrencia es una propiedad de las clases de comunicación, además la caminata aleatoria simple es irreducible, basta con estudiar la recurrencia en un cierto estado. Entonces, analizaremos la recurrencia (transitoriedad) del origen. Nuestro objetivo es establecer una condición en G_{∞} que sea equivalente a la recurrencia de $(S_n)_{n \geq 0}$.

3.2.1. Recurrencia de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}

Teorema 29. *La caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} es recurrente.*

Demostración. La caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} vista como circuito eléctrico se representa en la Figura 3.1. Por lo que, basta con aplicar la ley de suma de resistencias en serie a la gráfica \mathbb{Z} :

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n i = \infty.$$

Por la Proposición 19, la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} es recurrente en el origen, y por la Proposición 22 se sigue que la caminata aleatoria simple es recurrente en \mathbb{Z} .

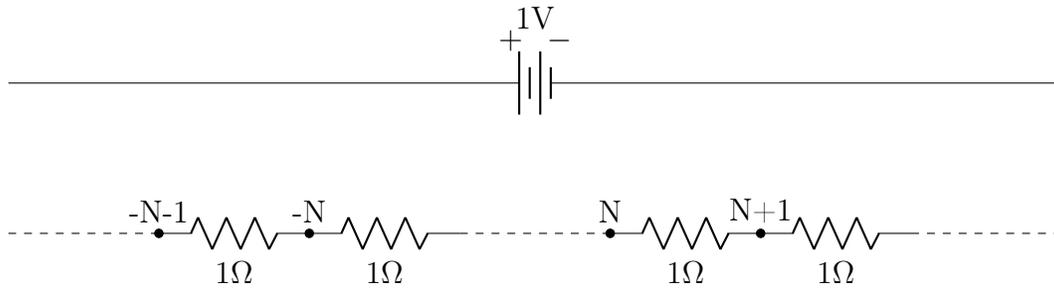


Figura 3.1: Caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} representada como circuito eléctrico.

□

3.2.2. Recurrencia de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2

Teorema 30. *La caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2 es recurrente.*

Demostración. La idea para probar recurrencia es reducir la resistencia efectiva de \mathbb{Z}^2 , mediante una aplicación de la Proposición 17. En efecto, la transformación que realizaremos consiste en unir algunos vértices, de manera tal que la resistencia efectiva siga siendo infinita, obteniendo así una cota inferior a la resistencia efectiva de \mathbb{Z}^2 . Basta elegir cuáles vértices unir.

Unamos todos los vértices que se encuentran a la misma distancia a 0. Esto nos da un gráfico lineal con múltiples aristas entre los puntos. Luego, contemos las aristas que conectan n a $n + 1$, ver Figura 3.2. Hay 4 vértices con 3 aristas que conectan n a

$n + 1$, a saber los vértices tales que $x = 0$ o $y = 0$; y los $4(n - 1)$ vértices que conectan n a $n + 1$ con 2 aristas. Entonces tenemos un total de $4 * 3 + 4(n - 1) * 2 = 4(2n + 1)$ aristas que conectan n con $n + 1$, por lo que la resistencia equivalente entre n a $n + 1$ es igual a $\frac{1}{2(4n+1)}$, ver Figura 3.3. Así, tenemos que

$$R_{\text{eff}}(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4i + 1},$$

dando como resultado $R_{\text{eff}} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n) = \infty$.

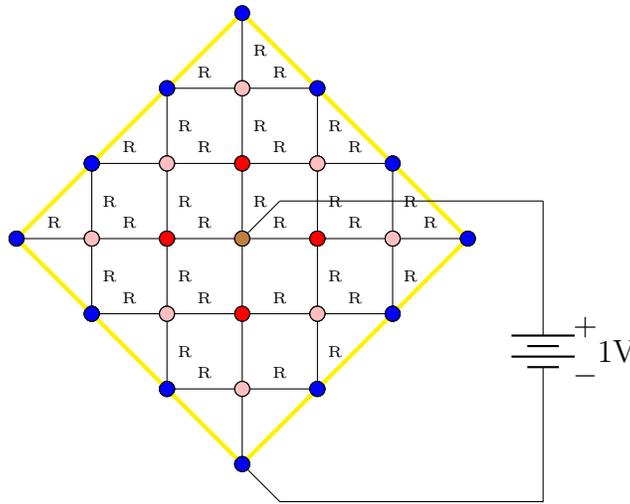


Figura 3.2: Caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2 representada como circuito eléctrico.

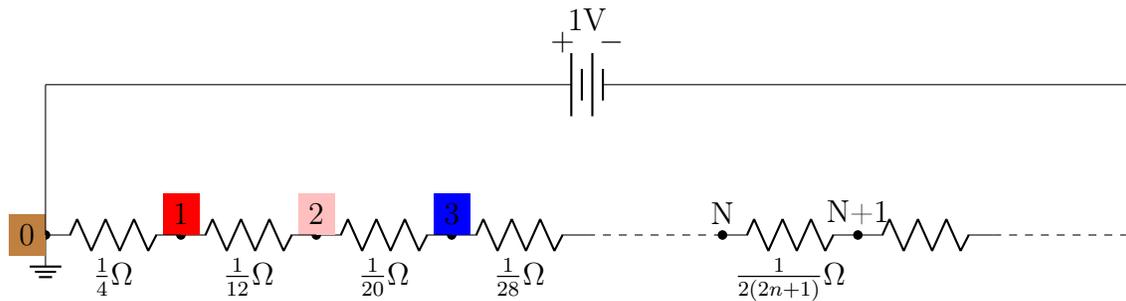


Figura 3.3: Caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} reducida, luego de las sumas en paralelo.

Por la Proposición 19, la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2 es recurrente en el origen. De la Proposición 22, se sigue que la caminata aleatoria simple es recurrente en \mathbb{Z}^2 . □

3.2.3. Transitoriedad de la caminata aleatoria simple en dimensiones mayores

Teorema 31. *La caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d para $d \geq 3$ es transitoria.*

Demostración. La idea para probar transitoriedad es utilizar la Proposición 17 y aumentar la resistencia efectiva de \mathbb{Z}^3 , removiendo algunas aristas. El objetivo es probar que la resistencia efectiva es finita, obteniendo así una cota superior a la resistencia efectiva de \mathbb{Z}^3 . Es decir, encajemos una subgráfica NT_3 en \mathbb{Z}^3 de manera que,

$$R_{\text{eff}} \leq R_{\text{eff}}^{(NT_3)} < \infty, \text{ donde } R_{\text{eff}}^{(NT_3)} \text{ es la resistencia efectiva de } NT_3.$$

Empecemos por ejemplificar el encaje de la subgráfica NT_2 en \mathbb{Z}^2 , pues es más fácil bosquejar que en \mathbb{Z}^3 . En \mathbb{Z}^2 , definimos una familia de rectas mediante la ecuación $\mathcal{R} = \{x, y \in \mathbb{N} : x + y = 2^n - 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $R_n \in \mathcal{R}$: Tomamos $(x, y) \in R_n$, y a partir de este vértice, dibujamos un camino en la dirección x y otro camino en la dirección y hasta la siguiente recta R_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$. Para aristas que no estén en los caminos, removámoslas, aumentando la resistencia al infinito entre vértices unidos por aquellas aristas. Ilustremos el encaje de la subgráfica construida en la Figura 3.4.

En tres dimensiones, consideremos la familia de rectas

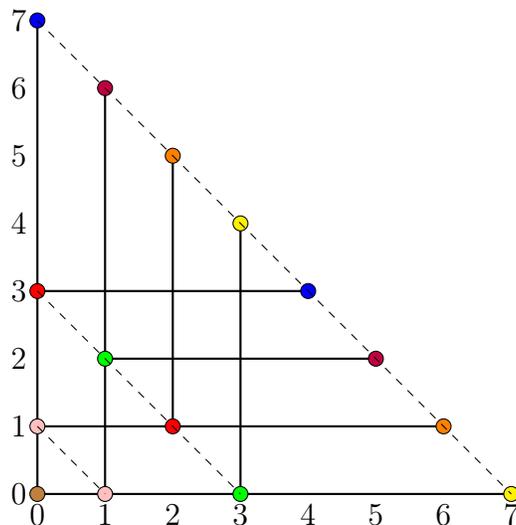
$$\mathcal{R} = \{x, y, z \in \mathbb{N} : x + y + z = 2^n - 1\}.$$

Entonces ocurre lo mismo, excepto que cada $(x, y, z) \in R_n$ se ramifica, ahora, en tres direcciones, en lugar de dos. La resistencia efectiva de NT_3 es:

$$R_{\text{eff}}^{(NT_3)} = \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{9}(2) + \frac{1}{27}(4) + \dots = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 1.$$

En consecuencia,

$$R_{\text{eff}} \leq R_{\text{eff}}^{(NT_3)} = 1 < \infty.$$

Figura 3.4: Encaje del árbol NT_2 en \mathbb{Z}^2 .

Por la Proposición 19, la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^3 es transitoria en el origen. En consecuencia, por la Proposición 22, la caminata aleatoria simple es transitoria en \mathbb{Z}^3 .

El principio de monotonía de Raleygh [14, p. 35] nos indica que si una subgráfica G de G' es transitoria, entonces G' también es transitoria. Como \mathbb{Z}^3 es una subgráfica de \mathbb{Z}^d para $d \geq 3$. Se sigue que la caminata aleatoria simple es transitoria en \mathbb{Z}^d para $d \geq 3$.

□

3.3. Principio de invarianza de Donsker

El estudio de los teoremas límite comienza en 1733 con la demostración (y publicación en 1738) del primer teorema del límite central de Abraham de Moivre [16]. Este resultado es para sumas renormalizadas de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{2}$. Más de 70 años después, Pierre-Simon Laplace estableció la primera versión del teorema central del límite para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en 1809 [17].

En el contexto de las caminatas aleatorias simples, el teorema central del límite permite describir la distribución de las desviaciones entre la media empírica y el valor

esperado de los desplazamientos.

Analizaremos el comportamiento de la caminata aleatoria simple, para luego explicar el escalamiento, y la motivación detrás de la convergencia débil. Esta convergencia débil es respecto al espacio de funciones continuas con la norma del supremo. Tenemos entonces una sucesión de procesos estocásticos a tiempo discreto, a saber caminatas aleatorias simples, las cuales convergen a un proceso estocástico a tiempo continuo llamado movimiento browniano.

Si se desea ahondar en alguno de los temas presentados, se recomienda al lector revisar [18] y [19], donde nos basamos para escribir esta sección.

En la Sección 2.1.2, introducimos la definición de caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d . Si consideramos una trayectoria de la caminata aleatoria simple, ¿qué podemos decir sobre su geometría típica? Por ejemplo, ¿a qué distancia del punto de partida nos encontramos después de haber dado n pasos? Si seguimos en una dirección fija, terminaremos a distancia n de origen después de dar n pasos; pero si elegimos el camino uniformemente al azar, la probabilidad que la caminata aleatoria simple vaya en la misma dirección será muy pequeña. De hecho, es posible mostrar, basándose en la noción de varianza, que la distancia típica después de n pasos es del orden de \sqrt{n} . A continuación lo verificamos en la Proposición 24.

Recordemos la Definición 2.1.2 de la caminata aleatoria simple. Sea $(X_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , que siguen una distribución uniforme con parámetro $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ donde e_i es el i -ésimo vector canónico. La caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d se define como $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Proposición 23. *Para la caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ en \mathbb{Z}^d , el valor esperado de la posición desde el origen, luego de n pasos, es*

$$\mathbb{E}[S(n)] = 0.$$

Demostración. Calculemos la esperanza de X_i :

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{j=1}^d e_j * P(X_i^{(j)} = e_j) + \sum_{j=1}^d (-e_j) * P(X_i^{(j)} = -e_j) = \frac{1}{2d} - \frac{1}{2d} = 0.$$

Así que, por cada paso X_i nos encontramos en promedio en el vértice cero. Luego, por la linealidad de la esperanza tenemos que

$$\mathbb{E}[S(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 0.$$

Por lo que la posición esperada, luego de n pasos, es el origen. \square

Pero, ¿cuál es la distancia esperada recorrida desde el origen luego de n pasos? A continuación, desarrollaremos este cálculo para la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} . Haciendo operaciones similares a las de la Proposición 23 se tiene el resultado análogo para \mathbb{Z}^d .

Proposición 24. *Para la caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ en \mathbb{Z} , el valor esperado del cuadrado de la distancia absoluta desde el origen, después de n pasos, es*

$$\mathbb{E}[S(n)^2] = n.$$

Demostración. Antes de calcular el segundo momento de $S(n)$, calculemos la varianza de X_i ,

$$\text{Var}(X_i) = \frac{(1 - \mathbb{E}[X_i])^2}{2} + \frac{(-1 - \mathbb{E}[X_i])^2}{2} = 1.$$

Como $\mathbb{E}[S(n)] = 0$, la distancia promedio al cuadrado es $\text{Var}(S(n)) = \mathbb{E}[S(n)^2]$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(n)^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (X_i)^2\right] = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var}(X_i) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] = \sum_{1 \leq i \leq n} 1 + 0 = n. \end{aligned}$$

La tercera igualdad se sigue del hecho que $(X_i)_{i \geq 0}$ son variables aleatorias independientes. \square

Al poder desplazarnos hacia adelante o hacia atrás, ocurre que la “velocidad” de una caminata aleatoria simple es más lenta que del orden n . Así, en la caminata aleatoria simple ocurre que nos alejamos en orden \sqrt{n} después de n pasos.

Si para cada unidad de tiempo t damos pasos de longitud σ , entonces tenemos que $\mathbb{E}[S(t)^2] = \sigma t$. Es decir, tenemos que al duplicar el tamaño del paso, nos alejamos el doble. Sin embargo, si duplicamos el número de pasos, no nos alejamos el doble, sino por un factor de $\sqrt{2}$. De esta manera, el rescalamiento del tiempo y del tamaño de cada paso es diferente: a saber, si disminuimos el tamaño de los pasos por $\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$, entonces debemos aumentar el número de pasos por 100 veces. Eligiendo así el tamaño de escala, al tomar el límite conjeturamos obtener un objeto no trivial. Más adelante, para enunciar el principio de invarianza de Donsker, usamos el tamaño de escala deducido.

Proposición 25. *Para la caminata aleatoria simple $(S_n)_{n \geq 0}$ en \mathbb{Z} , el valor esperado de la distancia absoluta desde el origen, después de n pasos, es*

$$\mathbb{E}[|S(n)|] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Calculemos $P(S(n) = m)$, la probabilidad que la caminata aleatoria simple se encuentre en la posición m luego de n pasos.

Notemos que si estamos, por ejemplo, en $S(20) = 10$, entonces la caminata aleatoria simple avanzó $15 = \frac{20+10}{2}$ pasos a la derecha y $5 = \frac{20-10}{2}$ a la izquierda. En general si estamos en $S(n) = m$ caminamos $\frac{n+m}{2}$ pasos a la derecha y $\frac{n-m}{2}$ a la izquierda.

La variable aleatoria que modela este fenómeno es una variable aleatoria con distribución Binom($n, 1/2$), pues podemos ver cada paso a la derecha como un éxito con probabilidad $\frac{1}{2}$. Así, la probabilidad de $\frac{n+m}{2}$ éxitos (pasos a la derecha), luego de n pasos, es igual a:

$$P(S(n) = m) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!}.$$

Después de un número par (impar) de pasos, solo podemos estar a una distancia

par (impar) del origen. Sin pérdida de generalidad, supongamos que n es par, es decir $n = 2i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[|S(n)|] &= \sum_{k \in \{-m, -m+2, \dots, m\}} |k| P(S(n) = k) \\
 &= \frac{n!}{2^n} \sum_{k \in \{-2i, -2i+2, \dots, 2i\}} \frac{|k|}{\left(\frac{2i+k}{2}\right)! \left(\frac{2i-k}{2}\right)!} \\
 &= \frac{n!}{2^n} \sum_{k \in \{-i, -i+1, \dots, i\}} \frac{2|k|}{\left(\frac{2i+2k}{2}\right)! \left(\frac{2i-2k}{2}\right)!} \\
 &= \frac{n!}{2^n} \left[\sum_{k \in \{-i, -i+1, \dots, -1\}} \frac{2|k|}{(i+k)!(i-k)!} \right] + \frac{n!}{2^n} \left[\sum_{k \in \{1, 2, \dots, i\}} \frac{2|k|}{(i+k)!(i-k)!} \right] \\
 &= \frac{n!}{2^n} \left[2 \sum_{k=1}^i \frac{2k}{(i+k)!(i-k)!} \right] = \frac{n!}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^i \frac{k}{(i+k)!(i-k)!}.
 \end{aligned}$$

Luego de numerosos cálculos, tenemos que

$$\sum_{k=1}^i \frac{k}{(i+k)!(i-k)!} = \frac{1}{2\Gamma(i)\Gamma(1+i)}, \quad (3.2)$$

donde $\Gamma(n)$ es la función Gamma definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Por el teorema de multiplicación de Gauss [20, pp. 66-67], tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n^2} \sqrt{\pi}.$$

Usando esta propiedad y sustituyendo $i = \frac{n}{2}$ en la Ecuación (3.2) y simplificando,

$$\mathbb{E}[|S(n)|] = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (3.3)$$

Ahora, usemos la expansión asintótica de la función Gamma [20] para obtener

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \dots \right).$$

Sustituyendo esto en la Ecuación (3.3), obtenemos

$$\mathbb{E}[|S(n)|] = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{5}{128n^3} \dots \right).$$

Análogamente para cuando m es impar, tenemos que

$$\mathbb{E}[|S(n)|] = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{128n^3} \dots \right).$$

Por ende, para $n \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado

$$\mathbb{E}[|S(n)|] \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Como se quería demostrar. □

3.3.1. Convergencia débil o en distribución

Así como la ley límite del teorema del límite central es la ley normal, el proceso límite del principio de invarianza de Donsker es el proceso llamado movimiento browniano. Comencemos por definir dicho proceso.

Definición 32. Decimos que $(B_t)_{t \geq 0} = B : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es un **movimiento browniano** si

1. $B_0(\omega) = 0$, para todo $\omega \in \Omega$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}, t_0 < \dots < t_n, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes.
3. Para todo $s, t \geq 0, B_{s+t} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t)$.
4. Para $\omega \in \Omega$ fija, la función definida por $t \mapsto X_t(\omega)$ es una función continua en \mathbb{R}_+ .

El principio de invariancia permite describir el comportamiento asintótico de las trayectorias de caminatas aleatorias en el intervalo $[0, 1]$. De esta forma, termina por completar el teorema de límite central, ya que este último solo considera la ley de una posición al tiempo $t = 1$ de las caminatas aleatorias. Al igual que en el teorema del límite central, la convergencia que nos interesa es la convergencia débil de las leyes de probabilidad. Sin embargo, en este nuevo marco, las variables aleatorias ya no toman valores reales sino valores en un espacio funcional.

Entonces, consideremos una sucesión de variables aleatorias con valores en el espacio $C([0, 1])$ de funciones continuas en $[0, 1]$. Este espacio estará provisto de la topología inducida por la norma del supremo.

Definición 33. Definimos el espacio de funciones real valuadas continuas en $[0, 1]$ como

$$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua.}\}$$

Ahora dotaremos a este conjunto de funciones de la siguiente norma.

Definición 34. Sea $f \in C[0, 1]$. Definimos la norma del supremo para f como

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Notemos que $\|\cdot\|_\infty$ está bien definido en $C[0, 1]$. En efecto, como $[0, 1]$ es un intervalo cerrado y acotado, por el teorema de Weirstrass [21, Corolario. 4.18.], $f \in C[0, 1]$ alcanza máximo en $[0, 1]$.

Por lo tanto, $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ es el espacio de funciones continuas con la topología inducida por la norma del supremo. Así, dos funciones en $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ estarán cercanas solo si todas sus imágenes lo están.

Introducimos el concepto de continuidad para el espacio de funciones continuas $C[0, 1]$.

Definición 35. Sea $H : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que H es **continua** si para toda $f, g \in C[0, 1]$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|f - g\|_\infty < \delta$, entonces $|H(f) - H(g)| < \epsilon$.

Definición 36. Sea $H : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que H es **acotada** si para toda $f \in C[0, 1]$, $|H(f)| \leq M$ para alguna $M \in \mathbb{R}$.

Definición 37. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria, no necesariamente definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , tales que $X_n, X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$. Decimos que X_n **converge débilmente** a X si para toda función $H : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada,

$$\mathbb{E}[H(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[H(X)], \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Sorprendentemente, la siguiente proposición nos da la equivalencia entre convergencia débil y convergencia en distribución (previamente introducida en la Definición 9).

Proposición 26. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria no necesariamente definidas en un mismo espacio de probabilidad. Entonces, $X_n \xrightarrow{D} X$ si y sólo si X_n converge débilmente a X .

El lector puede hallar una demostración de la Proposición 26 en [19, pp. 347-348].

Para hacer de $(S_n)_{n \geq 0}$ una función definida en todo \mathbb{R}_+ utilizamos una interpolación lineal, y la definimos de la siguiente manera:

$$S_n^*(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

De esta manera, cada trayectoria de la caminata aleatoria simple $(S_n^*)_{n \geq 0}$ toma valores en $C[0, 1]$, es decir $(S_n)_{n \geq 0} = S : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$.

Teorema 38. [Principio de invarianza de Donsker] Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $\text{Var}(X_i) = 1$. Para $t \in [0, 1]$,

$$S_n^*(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{[nt]} X_i + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \right].$$

La caminata aleatoria simple escalada $(S_n^)_{n \geq 0}$ converge débilmente, en el espacio $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, a un movimiento browniano $(B_n)_{n \geq 0}$.*

La demostración del Teorema 38 usa conceptos de tensión para sucesiones de variables aleatorias que rebasan los propósitos de este escrito. El lector puede encontrar una demostración en [19, pp. 127-134].

Capítulo 4

Caminatas aleatorias con ciclos borrados en \mathbb{Z}^d

En este capítulo introducimos un proceso estocástico obtenido de la caminata aleatoria simple después de aplicarle un algoritmo de borrado de ciclos.

A fines de la década de 1980, G. Lawler, en su tesis doctoral [22], presentó una estrategia para construir caminatas que pasan por cada punto a lo más una vez, llamadas auto-evitantes (conocidas en inglés como self-avoiding walks). Así, surgió esta nueva caminata bautizada con el nombre de caminata aleatoria con ciclos borrados (en inglés loop-erased random walk). Resulta que este proceso posee propiedades interesantes.

Si se desea profundizar en alguno de los temas presentados en este capítulo, se recomienda al lector revisar las referencias [23], [24] y [25], de las cuales nos basamos.

4.1. ¿Cómo borrar ciclos cronológicamente?

Consideremos un camino C definido en una gráfica simple G y supongamos que C tiene al menos un ciclo. Por ejemplo, consideremos el camino C en el laberinto \mathbb{Z}^2 representado en la Figura 4.1. Explícitamente este camino está definido como:

$$C = [(-3, -3), (-3, -2), (-2, -2), (-2, -1), (-1, -1), (-1, -2), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (1, 1), (2, 1)].$$

Notemos que las coordenadas del camino C en negritas definen dos ciclos.

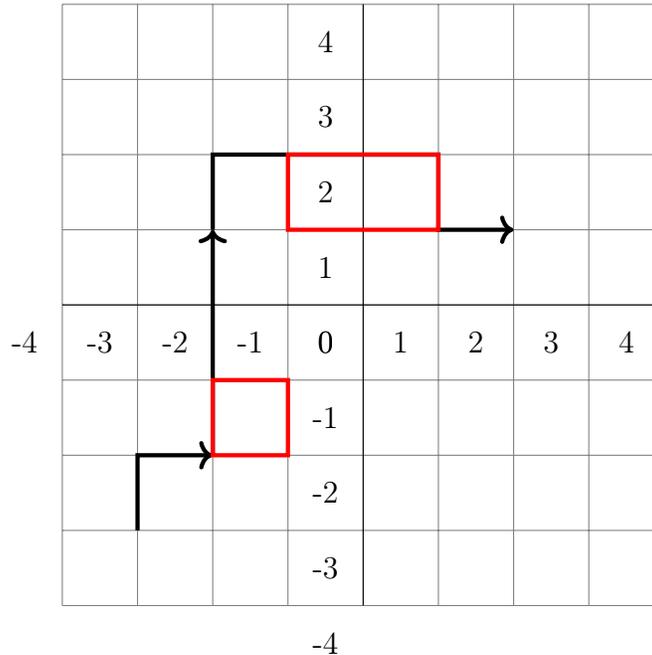


Figura 4.1: Camino C en el laberinto \mathbb{Z}^2 .

Si vemos la trayectoria del camino C como un proceso, entonces tenemos que al tiempo 0 nos encontramos en $(-3, -3)$, al tiempo 1 en $(-3, -2)$ y así sucesivamente hasta que en el tiempo 21 el camino se encuentra en $(2, 1)$. Notemos que en los tiempos 2 y 6 nos encontramos en la misma posición $(-2, -2)$ y por tanto se forma un ciclo que inicia y termina en dicho vértice. Esta situación vuelve a ocurrir en los tiempos 11 y 17, en donde encontramos un ciclo alrededor del vértice $(-1, -2)$. En la Figura 4.1 señalamos estos ciclos en rojo.

Ahora, ¿cómo definir un algoritmo que elimine ambos ciclos cronológicamente? Si excluimos del camino un vértice, que se encuentra más de dos veces en el camino, eliminamos los ciclos. Sin embargo, si excluimos uno de estos vértices, nuestro camino se vuelve desconexo, por tanto debemos excluir no solo un vértice. De esta manera, tomamos el último tiempo en que estamos en aquel vértice y excluimos el resto del ciclo.

Así, para los ciclos primero y segundo tomamos el último tiempo en el que nos encontramos en los vértices $(-2, 2)$ y $(-1, 2)$, respectivamente. Excluimos luego el

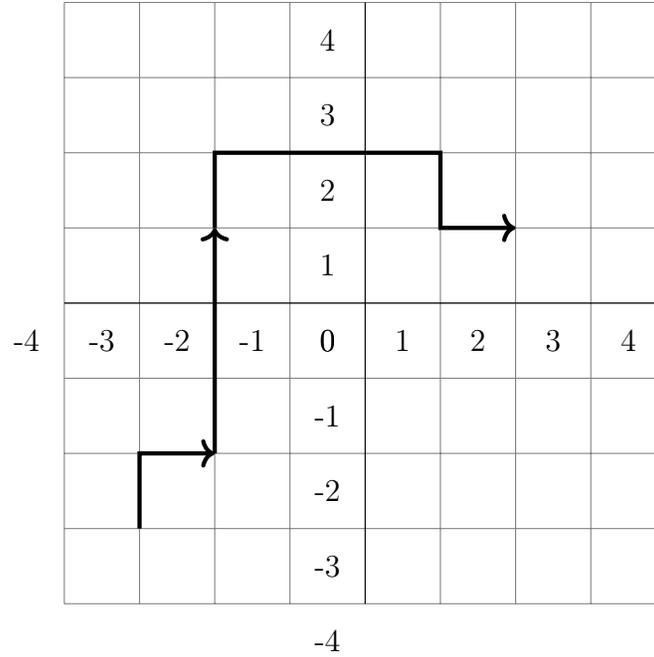


Figura 4.2: Camino C en el laberinto \mathbb{Z}^2 con ciclos borrados.

resto del ciclo. Así, nuestro camino sin ciclos está ahora definido como:

$$C = [(-3, -3), (-3, -2), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (1, 1)].$$

Si gráficamos este camino, tenemos como resultado la Figura 4.2, borrando, de esta forma, los ciclos.

Definición 39. Sea $(S(n))_{n \geq 0}$ la caminata aleatoria simple en una gráfica simple, localmente finita y conexa y consideremos un camino finito $C = [S(0), \dots, S(m)]$. Definimos el algoritmo de borrado de ciclos para $(S(n))_{n \geq 0}$ como sigue. Sean

$$t_0 = \sup\{j \geq 0 : S(j) = 0\}$$

y para $i \geq 1$,

$$t_i = \sup\{j \geq 0 : S(j) = S(t_{i-1} + 1)\}.$$

Sea $t_m = \inf\{j \geq 0 : t_j = m\}$ y definimos la **caminata aleatoria simple finita con**

ciclos borrados $\text{LE}(S[0, m])$ como:

$$\text{LE}(S[0, m]) = [S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_m)].$$

Recordemos que la caminata aleatoria simple es una cadena de Markov, sin embargo al aplicarle el algoritmo cronológico de borrado de ciclos, esta ya no cumple la propiedad de Markov.

Proposición 27. *La caminata aleatoria con ciclos borrados $\text{LE}(S[0, t_n])$ no cumple la propiedad de Markov.*

Demostración. Sea $(S_n)_n$ la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2 y $\gamma = \text{LE}(S[0, m])$. Tenemos que

$$P(\gamma(3) = (0, 0) \mid \gamma(0) = (0, 0), \gamma(1) = (1, 0), \gamma(2) = (2, 0)) = 0.$$

Sin embargo

$$P(\gamma(3) = (1, 0) \mid \gamma(2) = (2, 0)) > 0.$$

De ahí que, $\text{LE}(S[0, m])$ no cumpla la propiedad de Markov. \square

4.2. Caminata aleatoria con ciclos borrados infinita en \mathbb{Z}^d

En la sección anterior definimos el algoritmo de borradura de ciclos para un camino finito. Ahora introducimos el proceso definido sobre la trayectoria completa de una caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d .

4.2.1. Dimensión $d \geq 3$

En el Teorema 31 demostramos que la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d es transitoria cuando $d \geq 3$. Además, por la Proposición 20, sabemos que la transitoriedad de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d nos asegura que la caminata aleatoria simple

visita a todo vértice $i \in \mathbb{Z}^d$ una última vez con probabilidad 1. De ahí que simplemente podamos tomar una caminata aleatoria simple infinita y aplicarle el algoritmo de borrado de ciclos.

Definición 40. Sea $d \geq 3$ y sea $(S_n)_{n \geq 0}$ una caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d . Sean

$$t_0 = \sup\{j : S(j) = 0\}$$

y para $i \geq 1$,

$$t_i = \sup\{j > t_{i-1} : S(j) = S(t_{i-1} + 1)\}.$$

Definimos la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^d como

$$\text{LE}(S)(i) = S(t_i), \quad i \geq 0.$$

4.2.2. Dimensión $d = 2$

En la Sección 3.2.2 mostramos que la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^2 es recurrente, de ahí que no sea posible tomar una caminata aleatoria simple infinita y aplicarle el algoritmo de borrado de ciclos como en la sección anterior. Lo que hemos construido en la Definición 39 es la caminata aleatoria simple en una subgráfica finita de \mathbb{Z}^2 con ciclos borrados. Al considerar una sucesión de gráficas finitas, la idea es tomar el límite en distribución del proceso de la Definición 39.

Definamos, para cada distancia n del origen, el primer tiempo de visita de la caminata aleatoria simple (S_t) a dicha distancia como $\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : \|S_t\| = n\}$.

Luego, aplicamos el algoritmo de borrado de ciclos al camino finito $[S(0), \dots, S(\sigma_n)]$, y a esta caminata aleatoria con ciclos borrados la denotamos como γ_n , es decir

$$\gamma_n = \text{LE}[S(0), \dots, S(\sigma_n)].$$

Podemos fijarnos en un número $k \leq n$ de pasos de este camino, y denotamos el

camino reducido como $\gamma_{n,k}$, es decir

$$\gamma_{n,k} = [\gamma_n(0), \dots, \gamma_n(k)].$$

Denotamos a Γ_k como el conjunto de trayectorias de caminatas aleatorias con ciclos borrados, comenzando en 0, de tamaño k . Podemos asociar a cada elemento una medida de probabilidad, es decir

$$\mu_{n,k}(\eta) = P([\gamma_{n,k}(0), \dots, \gamma_{n,k}(k)] = \eta) \quad \eta \in \Gamma_k.$$

Veamos que es consistente la medida de probabilidad inducida a una trayectoria de k pasos, para cada $k \geq 1$ fijo, conforme aumenta el tamaño de la bola de radio n donde hemos definido a la caminata aleatoria simple, y a la cual le aplicamos el algoritmo de borrado de ciclos.

Proposición 28. *Si $n \geq k^2$ y $\gamma \in \Gamma_k$, entonces para todo $m \geq n$,*

$$\mu_{m,k}(\gamma) = \mu_{n,k}(\gamma) \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{n} \ln \frac{n}{k} \right) \right], \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si el lector está interesado en esta demostración se recomienda revisar [23, pp. 189-190].

Por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m,k}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,k}(\gamma).$$

Es decir, a partir que la distancia al origen es al menos k^2 , tomando la caminata aleatoria con ciclos borrados hasta una cierta distancia, el límite de este último proceso es indistinto a cualquier distancia, y luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m,k}(\eta) = \mu_k(\eta), \quad \text{para cada } \eta \in \Gamma_k.$$

Así se cumple que el límite de las medidas de probabilidad está bien definido.

Capítulo 5

El exponente de crecimiento

En la Sección 3.3 contestamos, entre otras cosas, a la pregunta ¿qué tan lejos esperamos alejarnos del origen después de n pasos en la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} ? Ahora nos interesamos por la pregunta converso, ¿cuántos pasos necesita la caminata aleatoria simple para alcanzar distancia n ?

Antes de responder a la pregunta, demostremos la cota de Chernoff-Cramer para la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} .

5.1. El exponente para las caminatas aleatorias

Sea $(X_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , que siguen una distribución Rademacher con parámetro p y $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} .

Proposición 29. *Sea $(S_n)_{n \geq 1}$ la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} . Entonces, se cumple que para todo $n \geq 1$ y $\beta > 0$ que*

$$P(S(n) \geq \beta) \leq e^{-\frac{\beta^2}{2n}}.$$

Demostración. La función generadora de momentos de X_1 está acotada,

$$M_{X_1}(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^{2i}}{(2i)!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(s^2/2)^i}{(i)!} = e^{s^2/2}.$$

La segunda y última igualdad son las series de Taylor para las funciones $\cosh(s)$ y $e^{s^2/2}$, respectivamente.

Tomando $s = \beta/n$ en la cota Chernoff-Cramer (introducida en la Proposición 1.3), tenemos

$$P(S(n) \geq \beta) \leq \exp[-s\beta + n\Phi_{X_1}(s)] \leq \exp[-s\beta + ns^2/2] = e^{-\beta^2/2n}.$$

Lo cual queda demostrado. \square

Definición 41. Sea el tiempo de primera visita a distancia n del origen

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : \|S_t\| = n\}.$$

Ahora, sea $M_n = |S[0, \sigma_n]|$ el número de pasos de la caminata aleatoria simple para alcanzar distancia n por primera vez. Definimos el **exponente de crecimiento** α como el exponente asociado a la longitud esperada que necesita la caminata aleatoria simple para llegar a distancia n del origen; α satisface

$$\mathbb{E}_0[M_n] \approx n^\alpha. \quad (5.1)$$

Decimos que el exponente de crecimiento existe y es igual a α si se establece la equivalencia asintótica en la Ecuación (5.1) formalmente. Así, para probar que α existe basta mostrar que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E(M_n)}{\log n}$$

existe.

Proposición 30. *El exponente de crecimiento de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} es dos.*

Demostración. La variable aleatoria que modela el primer tiempo de visita, para la caminata aleatoria simple, en llegar a distancia n es igual a

$$M_n = \inf\{j \geq 0 : \tau_j = n\} = \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}_{\{S(i) < n\}}$$

Sea $M'_n = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{S(i) < n\}}$. De esta manera, la variable aleatoria M_n es equivalente a

$$M_n = \mathbf{1}_{\{S(0) < n\}} + M'_n.$$

Denotemos con $e(x)$ al tiempo medio necesario para alcanzar distancia n , partiendo del vértice x , es decir

$$e(x) = \mathbb{E}_x[M_n]$$

Consideremos la descomposición del evento $\{S(0) = x\}$ en los eventos disjuntos a pares $\{S_1 = y\}_{|y-x|=1}$, es decir

$$\{S(0) = x\} = \bigcup_{|y-x|=1} \{S(0) = x, S(1) = y\}.$$

Por la Proposición 4, tenemos que $e(x)$ satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} e(x) &= \mathbb{E}_x[M_n] = \sum_{|y-x|=1} \mathbb{E}_x[M_n \mid S(1) = y] P_x(S(1) = y) \\ &= \sum_{|y-x|=1} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{S(0) < n\}} + M'_n \mid S(1) = y] P_x(S(1) = y) \\ &= 1 + \sum_{|y-x|=1} \mathbb{E}_x[M'_n \mid S(1) = y] P_x(S(1) = y). \end{aligned}$$

Observemos que M'_n depende solo de las variables aleatorias $S(1), S(2), \dots$, pero no de la variable aleatoria $S(0)$. En consecuencia, tenemos la igualdad

$$\mathbb{E}_x[M'_n \mid S(1) = y] = \mathbb{E}_y[M_n].$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}_x[M_n] = 1 + \sum_{|y-x|=1} \mathbb{E}_y[M_n] P_x(S(1) = y).$$

La cantidad $\mathbb{E}[M'_n \mid S(1) = y]$ corresponde al tiempo promedio necesario para llegar a n , sabiendo que partimos de y . Por ende, dado que $(S_n)_{n \geq 1}$ es una caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} ocurre que

$$\begin{aligned} e(x) &= 1 + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x+1}[M_n] + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x-1}[M_n] \\ &= 1 + \frac{e(x+1) + e(x-1)}{2}. \end{aligned}$$

Seguido de la definición del tiempo esperado de primera visita a la distancia n , se tiene que al evaluar en n en la ecuación anterior obtenemos una condición de frontera

$$e(n) = \mathbb{E}_{\sigma_n}[M_n] = 0.$$

Si el conjunto de vértices corresponde a un subconjunto finito B de \mathbb{Z} y $\partial B = \{n\}$. Luego, calculemos el operador de Laplace, introducido en la Definición 24, de la función $e(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta e(x) &= \frac{1}{2} \sum_{|y-x|=1} e(y) - e(x) \\ &= \frac{1}{2} \left[e(x+1) - \left(1 + \frac{e(x+1) + e(x-1)}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[e(x-1) - \left(1 + \frac{e(x+1) + e(x-1)}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e(x+1) - e(x-1)}{2} - 1 + \frac{e(x-1) - e(x+1)}{2} - 1 \right] = -1. \end{aligned}$$

Al analizar esta relación de recurrencia, tenemos que la única función que cumple la condición frontera y satisface $\Delta e(x) = -1$ es

$$e(x) = x(n-x), \quad \text{para } x \in (B \setminus \{n\}).$$

Para probar la unicidad de e , supongamos que existe \tilde{e} que cumple la condición frontera y que $\Delta e(x) = -1$ para $x \in (B \setminus \{n\})$.

Sea $g = e - \tilde{e}$. Entonces, para $x \in (B \setminus \{n\})$ el operador de Laplace para h es $\Delta h(x) = 0$. Por ende, h es una función armónica en $B \setminus \{n\}$.

Además, la condición de frontera es $g(n) = 0$. Dado que B es un conjunto finito, por el principio del máximo se sigue que los valores máximo y mínimo de g son 0. Por lo tanto, $g(x) = 0$ para todos $x \in B$. De esta manera, $e = \tilde{e}$ probando así la unicidad de e .

Supongamos que n es par, entonces $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por consecuencia,

$$e(m) = \frac{n^2}{4} = m^2.$$

Por lo tanto, el exponente de crecimiento de la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z} es dos. □

Este exponente nos da una estimación del orden de la distancia del origen después de n pasos, cuando n crece hacia infinito.

Es útil comparar el exponente de crecimiento para la caminata aleatoria con dos ejemplos.

Tomemos el segmento de recta R de $(0, 0)$ a $(0, n)$. El número de pasos que requiere R para alcanzar distancia n es n pasos. Por lo tanto, el exponente de crecimiento para el segmento de recta es 1.

Ahora, sea t_0 un tiempo fijo, por la Definición 32, el movimiento browniano sigue una distribución $\mathcal{N}(0, t_0)$, entonces por la Ecuación (1.1) el movimiento browniano al tiempo t_0 se encuentra con probabilidad de 0.68269 en $\sqrt{t_0}$. Realizando un trabajo sobre la distribución de $\mathcal{N}(0, t_0)$ se llega a la conclusión de que el exponente de crecimiento, definido análogamente, para el movimiento browniano es 2.

5.2. El exponente para las caminatas aleatorias con ciclos borrados

Es intuitivo conjeturar que la caminata aleatoria con ciclos borrados se aleja más rápidamente del origen que la caminata aleatoria simple, pues el borrado de ciclos evita pasar por un vértice más de una vez. De esta manera, se intuye que la caminata aleatoria con ciclos borrados tiende a extenderse más. Sin embargo, veremos que esta distinción depende de la dimensión de \mathbb{Z}^d .

Definición 42. Sea $(S_n)_{n \geq 0}$ la caminata aleatoria simple en \mathbb{Z}^d y recordemos el tiempo de primera visita a distancia n del origen, $\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : \|S_t\| = n\}$. Ahora, sea $M_n = |\text{LE}(S[0, \sigma_n])|$ la longitud de la caminata aleatoria con ciclos borrados al alcanzar distancia n del origen por primera vez. Recordemos que el **exponente de crecimiento** β_d es el exponente asociado a la longitud esperada que necesita la caminata aleatoria con ciclos borrados para llegar a distancia n del origen. Así, β_d existe si se satisface que

$$\beta_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{E}[M_n]}{\log n}.$$

En [26], Rick Kenyon mostró que el exponente de crecimiento para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^2 es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E(M_n)}{\log n} = \beta_2 = \frac{5}{4}. \quad (5.2)$$

El teorema nos afirma que la media de la longitud de la caminata aleatoria con ciclos borrados, para alcanzar distancia n en \mathbb{Z}^2 , se comporta asintóticamente como $n^{\frac{5}{4}}$, lo cual confirma la conjetura hecha al principio de ésta sección.

Más aún, en [27] Lawler probó un resultado que acota el exponente de crecimiento β_2 en \mathbb{Z}^2 , sin necesidad de introducir el límite sobre la distancia alcanzada: existen $c_1, c_2 > 0$, tales que

$$c_1 n^{\frac{5}{4}} \leq E(M_n) \leq c_2 n^{\frac{5}{4}}. \quad (5.3)$$

Así, para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^2 el número promedio de

puntos visitados cuando se llega a distancia n del origen, por primera vez, es $n^{\frac{5}{4}}$.

En [28], Daisuke Shiraishi mostró la existencia del exponente de crecimiento para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E(M_n)}{\log n} = \beta_3. \quad (5.4)$$

En [29], Lawler estimó el comportamiento asintótico del exponente de crecimiento β en \mathbb{Z}^3 , probando que $\beta_3 \in [1, \frac{5}{3}]$.

Antes de pasar al exponente de crecimiento β_4 en \mathbb{Z}^4 , definimos a $K_n = |\text{LE}(S(n))|$ como el número de pasos no borrados luego de aplicarle el algoritmo de borrado de ciclos a una caminata aleatoria simple de n pasos.

Nuevamente, en [29] Lawler estima el comportamiento asintótico de β_4 en \mathbb{Z}^4 probando que, para algún $c \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E(K_n)}{c n (\log n)^{-1/3}} = 1. \quad (5.5)$$

A $(\log n)^{-1/3}$ se le conoce como el ajuste logarítmico.

De esta manera, después de n pasos de la caminata aleatoria simple, obtenemos $\frac{n}{(\log n)^{1/3}}$ pasos de la caminata aleatoria con ciclos borrados. Así, en \mathbb{Z}^4 la caminata aleatoria simple disminuye, significativamente, el número de pasos que pertenecen a un ciclo.

Notemos que K_n mide el número de pasos respecto a la caminata aleatoria original, luego de haber recorrido n pasos, mientras que M_n mide, con probabilidad 1, la longitud de la caminata aleatoria con ciclos borrados, luego de haber alcanzado distancia n por primera vez.

Para el exponente de crecimiento β_d en \mathbb{Z}^d cuando $d \geq 5$, en [29], Lawler acota este exponente de crecimiento β , de manera que existen $c_3, c_4 > 0$ tales que

$$c_3 n^2 \leq E(M_n) \leq c_4 n^2. \quad (5.6)$$

Es decir, a partir de la dimensión 5, la cantidad de ciclos formados en la caminata

aleatoria simple es insignificante.

5.3. Resultados

Reflexionemos en los resultados presentados. Recordemos que, en la Proposición 30, demostramos que el exponente de crecimiento para la caminata aleatoria simple es dos. El último resultado mencionado de Lawler, Ecuación (5.6), nos menciona que el exponente de crecimiento para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^d , cuando $d \geq 5$ también es dos. Por lo tanto, la caminata aleatoria con ciclos borrados se comporta en este aspecto, esencialmente, como la caminata aleatoria simple.

En [23, pp. 209-210], Lawler demuestra que la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^d cuando $d \geq 5$ converge débilmente en el espacio $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, como la caminata aleatoria simple (Teorema 38), al movimiento browniano.

En las Proposiciones 5.3 y 5.4 se mencionan los exponentes de crecimiento para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^2 y \mathbb{Z}^3 , respectivamente. Estos exponentes son distintos a 2, y los límites de escala no son el movimiento browniano, el lector puede encontrar este último resultado en [30] y [31], respectivamente para los casos dos y tres.

El caso del exponente de crecimiento para la caminata aleatoria con ciclos borrados en \mathbb{Z}^4 es especial, porque en esta dimensión la caminata aleatoria con ciclos borrados pasa de un comportamiento no gaussiano (dimensiones 2 y 3) a un comportamiento gaussiano (para dimensiones mayores o iguales a 5).

Bibliografía

- [1] Karlsson G. Malmquist S. Dalenius T. *Two incidents. Scientists at Work: Festschrift in Honour of Herman Wold*. Almquist Wiksells, 1970.
- [2] Polya G. Uber eine aufgabe betreffend die irrfahrt im strassennetz. *Math. Ann.*, 84:140–160, 1921.
- [3] Doyle P. *Application of Rayleigh's short-cut method to Polya's recurrence problem*. PhD thesis, Dartmouth College, 1982.
- [4] Donsker M. *The Invariance Principle for Wiener Functionals*. PhD thesis, University of Minnesota, 1949.
- [5] Rincón L. *Curso intermedio de probabilidad*. Facultad de Ciencias, 2007.
- [6] Ross S. *A First Course in Probability*. Pearson, 9 edition, 2012.
- [7] Durrett R. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 9 edition, 2010.
- [8] Rincón L. *Introducción a los procesos estocásticos*. Facultad de Ciencias, 2012.
- [9] Durrett R. *Essentials of Stochastic Processes*. Springer, 2 edition, 2012.
- [10] Knuth D.E. *The art of computer programming*, volume 1. Addison-Wesley, 3 edition, 1976.
- [11] Bondy J.A. Murty U.S.R. *Graph theory with applications*. North-Holland, 1976.

- [12] Morales Guerrero L.E. De grandes y pequeñas cosas o la paradoja de Banach y Tarski. *Ciencias* 71, pages 46–54, 2003.
- [13] Roch S. *Modern Discrete Probability*. 2023.
- [14] Lyons R. Peres Y. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2016.
- [15] Doyle P. Snell G. *Random Walks and Electric Networks*. Carus Monographs. Mathematical Association of America, 1984.
- [16] Moivre A. The Doctrine of Chances: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. 1738.
- [17] Laplace P. Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités. *Mémoires de la Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, pages 353–415, 1809.
- [18] Williams D. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [19] Morters P. Peres Y. *Brownian motion*. Cambridge University Press, 2010.
- [20] Rivaud J.J. La Función Gama. *Miscelánea Matemática*, pages 61–84, 2004.
- [21] M. Clapp. *Análisis Matemático*. Papirhos, Instituto de Matemáticas UNAM, 2015.
- [22] Lawler G. Loop-erased self-avoiding random walk in two and three dimensions. *Journal of Statistical Physics*, pages 91–108, 1988.
- [23] Lawler G. *Intersections of Random Walks*. Probability and its applications. Springer, 1991.
- [24] Lawler G.F. Limic V. *Random Walk: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2010.

- [25] Lawler G. *Random Walk and the Heat Equation*. University of Chicago, 2010.
URL <https://www.math.uchicago.edu/~lawler/reu.pdf>.
- [26] Kenyon R. The asymptotic determinant of the discrete Laplacian. *Acta Math*, page 239–286, 2000.
- [27] Lawler G. The probability that planar loop-erased random walk uses a given edge. *Electron. Commun. Probab.*, 2014.
- [28] Shiraishi D. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. *Ann. Probab.*, page 687–774, 2018.
- [29] Lawler G. Loop-erased random walk. In *Perplexing problems in probability*. *Progr. Probab.*, 1999.
- [30] Schramm O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel Journal of Math*, page 221–288, 2000.
- [31] Kozma G. The scaling limit of loop-erased random walk in three dimensions. *Acta Math*, page 29–152, 2007.