UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DOCTORADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE ECONOMÍA

CONTRIBUCIONES AL PROBLEMA DE EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO WALRASIANO EN UN MODELO CON BIENES NO DIVISIBLES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN ECONOMÍA

PRESENTA:
ADÁN SALAS GUTIÉRREZ

TUTOR

DR. CARLOS MARTÍN PUCHET ANYUL
FACULTAD DE ECONOMÍA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. ELVIO ACCINELLI GAMBA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

DR. JORGE ALONSO BUSTAMANTE TORRES
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2024

Agradecimientos

A los miembros del jurado, los doctores Martín Puchet, Elvio Accinelli, David Cantalá, Jordi Massó y Jorge Bustamante por todas las observaciones, correcciones y comentarios realizados a este documento.

En particular, agradezco al profesor Jordi Massó Carreras por sus valiosos comentarios en relación a este trabajo mientras realicé una estancia de investigación en la Universidad Autónoma de Barcelona y por los recursos que me fueron otorgados del proyecto PID2020-116771GB-I00 PK618018.

Al profesor Carlos Hervés-Beloso, por todas sus enseñanzas y el tiempo que me dedicó durante mi estancia en la Universidad de Vigo. Agradezco además al Research Group in Economic Analysis, Accounting and Finance (RGEAF) por el apoyo recibido.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca recibida durante mis estudios de doctorado.

Índice general

Índice de figuras

Notación

Símbolo

$\mathbb{N}$	conjunto de todos los números naturales
$\mathbb{R}$	conjunto de todos los números reales
$\mathbb{R}_+$	conjunto de todos los números reales no negativos
$\in$	pertenece a
$\subset$	es subconjunto de
$>$	mayor que
$\geq$	mayor o igual que
$\succcurlyeq$	al menos tan preferido como
$\succ$	estrictamente preferido a
$\sim$	indiferente a
x_i	cesta de consumo del agente i
x_{ij}	cantidad del bien j que posee el agente i
X_i	conjunto de consumo del agente i
X	conjunto de asignaciones factibles

x_i^M cesta de consumo del agente i bajo la pre-asignación M

$P(X)$ conjunto potencia de X

$x \wedge y$ ínfimo de x y y

$x \vee y$ supremo de x y y

D_i conjunto de indiferencia del agente i

C_i conjunto de asignaciones individualmente racionales del agente i

$H(C_i)$ envolvente convexa de C_i

$\bigcap_{i=1}^n H(C_i)$ intersección de n envolventes convexas

$C(X)$ conjunto de contrato

Δ operador de diferencia

$\nabla_{\mathbb{N}}$ operador de diferencias crecientes

$x^{(k)}$ asignación generada por la $k-$ésima iteración

Δ_n símplex $n-$dimensional

$x(\lambda)$ asignación asociada con un elemento $\lambda \in \Delta_n$

Introducción

El problema general de asignación de bienes indivisibles entre agentes es a la vez un problema interesante y difícil de resolver. El interés por modelar economías con bienes indivisibles ha proporcionado un desarrollo muy importante en las aplicaciones. Algunas de las más notorias son: la asignación de viviendas, de estudiantes a escuelas, teoría de subastas, etc. Sin embargo, el problema de asignación de múltiples bienes indivisibles es muy difícil de tratar y buena parte de la literatura se limita a demandas unitarias de cada bien, ver por ejemplo Echenique, Goel y Lee (2022).

La existencia de soluciones tales como el núcleo, el equilibrio competitivo o un cuasi-equilibrio en general, no está garantizada cuando los bienes son indivisibles. Los trabajos de Shapley y Scarf (1974) y Quinzii (1984), entre otros, exhiben ejemplos sobre las dificultades que se presentan cuando se intercambia más de una unidad del bien en cuestión.

Clasificando los modelos en dos tipos de acuerdo a Florig y Rivera (2017), una parte de los modelos analiza el caso en el que cada uno de los agentes tiene sólo un bien para intercambiar, ver por ejemplo el trabajo de Shapley y Scarf (1974) , la extensión al caso en el que existen diferentes tipos de bienes pero cada agente posee sólo una unidad de estos bienes se encuentra en el artículo de Konishi, Quint, y Wako (2001), la generalización del problema de intercambio bilateral muchos a uno y muchos a muchos fue investigado por Martínez, Massó, Neme, y Oviedo (2004) y Echenique y Oviedo (2004), en los trabajos de Inoue (2008) e Inoue (2014) se demuestra la existencia del núcleo débil para el caso de dos bienes, Florig y Rivera (2017) analizan una economía en la que los bienes son indivisibles a nivel individual pero divisibles cuando se estudia el problema en conjunto, es decir, asumiendo un continuo de agentes, en este trabajo, la existencia de la solución depende del número de bienes en la economía.

El otro tipo de modelos analiza la existencia de la solución suponiendo la existencia de un bien perfectamente divisible que juega el papel del dinero. Los trabajos pioneros en este enfoque son los de Henry (1970), Mas-Colell (1977), Quinzii (1984), Svensson (1984) y van der Laan, Talman, y Yang (2002). Existe una familia de modelos en los cuales el problema se plantea como uno de asignación bilateral (compradores y vendedores) con múltiples bienes mediante el enfoque de la programación lineal se analiza en el trabajo de Jaume, Massó y Neme (2012).

En este trabajo se investiga la existencia de un cuasi-equilibrio competitivo en una economía de intercambio con bienes indivisibles. La demostración de la existencia se basa en una versión discreta del método de Negishi. Las herramientas principales para la prueba son la aplicación del teorema de Doignon-Bell-Scarf para garantizar la existencia del conjunto de contrato, la teoría de retículos y algunos teoremas de Topkis para relacionar el conjunto de contrato con la frontera de Pareto, una versión generalizada del teorema de Karush-Kuhn-Tucker para asociar las asignaciones óptimas a un vector de precios y el teorema de punto fijo de Tarski para demostrar la existencia de un punto fijo de de una función en términos de las funciones de exceso de utilidad de los agentes.

Los métodos para el análisis de estos problemas son variados. El primer resultado se basa en una aplicación de un teorema de geometría combinatoria y la teoría de retículos. El segundo resultado es una versión discreta del método de descenso más rápido, esto con el fin de orientar la búsqueda en una dirección factible y óptima de acuerdo al trabajo de Luenberger y Ye (1984). El tercer resultado aplica algunos teoremas de Topkis (1978) y el teorema de punto fijo de Tarski (1955). A continuación se describen brevemente los resultados principales de este trabajo:

1. La demostración de la existencia del conjunto de contrato. Se presenta una demostración combinatoria de la existencia del conjunto de contrato cuando los agentes intercambian más de una unidad de los bienes que poseen y de esta manera se extienden algunos de los resultados existentes sobre los modelos de intercambio multilateral, para el caso de dos agentes el conjunto de contrato coincide con el núcleo.

2. La propuesta de un algoritmo para encontrar asignaciones en la frontera de Pareto. Se desarrolla un método de búsqueda de soluciones óptimas el cual es una versión discreta del modelo de descenso más rápido, esto con el fin de orientar la búsqueda en una dirección factible y óptima la cual, como se verá, coincide con una asignación en el conjunto de contrato.

3. La demostración de la existencia de un cuasi-equilibrio. La caracterización de los cuasi-equilibrios competitivos para una economía de intercambio con bienes indivisibles se realiza mediante el enfoque de Negishi y aplicando el teorema de punto fijo de Tarski.

El tercer resultado merece algunas observaciones adicionales. La mayoría de los modelos de equilibrio general competitivo se centran en el análisis de las funciones de exceso de demanda. Existen distintas pruebas de existencia de equilibrio siguiendo este enfoque cuando los bienes son perfectamente divisibles, algunas de ellas son las dadas por Arrow y Debreu (1954), McKenzie (1959) y Nikaido (1956). Sin embargo, es posible caracterizar los equilibrios utilizando como elemento de la demostración una función específica de bienestar social. La idea de aplicar resultados relativos a una función de bienestar a la demostración de existencia de equilibrio se debe a Negishi (1960).

El enfoque de Negishi consiste, a grandes rasgos, en demostrar que la asignación de un equilibrio competitivo maximiza una función de bienestar social definida como una combinación lineal de las funciones de utilidad de los agentes en donde los coeficientes de la función de bienestar se definen como la proporción inversa de las utilidades del ingreso de cada uno de ellos. Un estudio detallado sobre este método para bienes perfectamente divisibles puede consultarse en los trabajos de Negishi (1960), Accinelli (1996), Accinelli, Brida, Plata y Puchet (2008) y Velupillai (2015).

El enfoque que seguimos en este trabajo es distinto de los anteriores principalmente en tres aspectos: en primer lugar; los métodos de prueba que utilizamos para demostrar la existencia del conjunto de contrato se basan en resultados combinatorios y técnicas de optimización discreta, definiendo previamente una estructura algebraica para el espacio de bienes. En segundo lugar; implementamos un algoritmo iterativo para encontrar de manera explícita un elemento de la frontera de Pareto. Este enfoque extiende algunos resultados al asumir que los agentes poseen más de un bien indivisible para intercambiar. Por último, abordamos el problema de existencia de un cuasi-equilibrio competitivo mediante la función conjunta de bienestar, similar al enfoque de Negishi (1960) para bienes indivisibles.

La motivación para adoptar el método de Negishi es que la existencia de bienes indivisibles impide definir funciones continuas tanto de utilidad como de demanda y, en consecuencia, no permite utilizar las herramientas estándar de optimización. Esto lleva a introducir conceptos como el de retículo, función supermodular, diferencias crecientes, entre otros. Al mismo tiempo, la discontinuidad de las funciones de demanda impide demostrar la existencia de un equilibrio mediante los teoremas de Brouwer o Kakutani, los cuales exigen continuidad de las funciones. Sin embargo, a diferencia de los modelos que analizan el problema de existencia mediante las funciones de demanda, el enfoque de Negishi permite caracterizar todos los elementos del conjunto de contrato como soluciones de un problema de maximización de una función de bienestar adecuadamente definida. Para esto construiremos el análogo de una superficie de indiferencia, superficie de contrato, conjunto de posibilidades de utilidad, frontera de Pareto, etc.

Encaminándonos ahora hacia los aspectos demostrativos de la tesis, consideramos una economía de intercambio con n agentes y m tipos de bienes distintos. Cada uno de los agentes tiene preferencias sobre los bienes y desean intercambiar parte de sus dotaciones iniciales de tal forma que intentan obtener una mejor cesta de bienes. Demostramos que las asignaciones de cuasi-equilibrio pueden ser representadas como soluciones de un sistema de ecuaciones y tal solución está asociada a un punto fijo de una función adecuadamente definida.

Demostraremos primero que existen asignaciones en el conjunto de contrato mediante algunos resultados sobre teoría de retículos y combinatoria. Posteriormente, implementaremos un algoritmo que permite encontrar una asignación x en el conjunto de contrato utilizando algunos teoremas de Topkis sobre optimización. La existencia de elementos en el conjunto de contrato implica, de acuerdo al enfoque de Negishi, que existe una solución al problema de maximización de una función de bienestar, aunque esta solución no necesariamente es un equilibrio o cuasi-equilibrio competitivo pues es posible que no se satisfagan las restricciones presupuestarias de todos los agentes.

Para garantizar la existencia de un cuasi-equilibrio definiremos un tipo de funciones h a las que llamaremos funciones de exceso de utilidad, este concepto fue introducido por Negishi (1960) y posteriormente por Accinelli (1996), las funciones de exceso de utilidad surgen de las condiciones de óptimo del problema de maximización de una función de bienestar y que redefiniremos en términos de los precios. Definidas así, estas funciones representarán la restricción presupuestaria de los agentes. Posteriormente definiremos una nueva función g en términos de las funciones de exceso de utilidad de los agentes de tal forma que una asignación x tal que $g(x) = 0$ implique la condición de que todas las restricciones presupuestarias de los agentes se satisfacen. Demostrar que existe x tal que $g(x) = 0$ requerirá de un teorema de punto fijo definido sobre el retículo formado por el espacio de bienes, veremos entonces que el teorema de punto fijo de Tarski es el adecuado para esta finalidad.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: hay un capítulo 1 de revisión de los modelos relevantes para el planteamiento del problema de la existencia de una solución en un modelo de intercambio general entre m agentes con n bienes que se hace en lo que ahora está como problema de la indivisibilidad. En el Capítulo 2 establecemos los supuestos del modelo, definimos los conceptos necesarios para nuestros propósitos en una economía de intercambio, así como los conceptos y resultados principales sobre retículos, definimos también las características principales sobre las preferencias de los agentes en el espacio de bienes. En el Capítulo 3 definimos formalmente el concepto de conjunto de contrato de una economía y demostramos la existencia de una asignación en tal conjunto. En el Capítulo 4 desarrollamos un algoritmo para encontrar una asignación en el conjunto de contrato y relacionamos la existencia de estas asignaciones con la existencia de asignaciones en la frontera de Pareto. En el Capítulo 5 demostramos la existencia de un cuasi-equilibrio competitivo introduciendo el método de Negishi como un problema de optimización de una función de bienestar social, las soluciones de este problema quedan caracterizadas como las condiciones de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), las cuales hacen posible obtener los precios como variables duales de las asignaciones óptimas. Posteriormente construiremos una función g con el fin caracterizar los equilibrios en términos de las funciones de exceso de utilidad. Enunciaremos el teorema de punto fijo de Tarski y demostraremos que g cumple los supuestos del teorema, es decir, g es no decreciente y está definida sobre un retículo, lo cual implica que tiene un punto fijo. Demostraremos entonces que el punto fijo es un cuasi-equilibrio competitivo. El Capítulo 6 contiene algunas conclusiones, comentarios finales y futuras lineas de investigación. El anexo A incluye las pruebas de algunas de las proposiciones que han sido omitidas con el fin de evitar pérdida de continuidad de los argumentos y el anexo B contiene las referencias.

Capítulo 1

El problema de la indivisibilidad

Shapley y Scarf (1974) demostraron que en una situación en la que existen n agentes, cada uno tiene un bien indivisible y desea sólo una unidad de un bien, el núcleo es no vacío, pero señalaron que este concepto de solución puede no existir cuando se intenta extender a los casos en el que los individuos desean más de un bien. Describimos a continuación el problema.

1.1. Mercados con más de dos tipos de bienes indivisibles

Supongamos que tres agentes A, B y C poseen un conjunto de nueve viviendas de la siguiente manera: el agente A posee las viviendas $1, 1', 1''$, el agente B posee las viviendas $2, 2', 2''$ y el agente C posee las viviendas $3, 3', 3''$. La configuración espacial de las nueve viviendas es la que se muestra en la Figura 1.1. Cada agente desea adquirir tres casas en hilera, incluyendo una de su conjunto original. Además, cada uno prefiere la hilera larga que satisface esta condición en vez de la corta. Las posibles configuraciones son tales que dos agentes pueden ponerse de acuerdo (formar una coalición) de tal forma que el intercambio entre ellos resulte beneficioso.

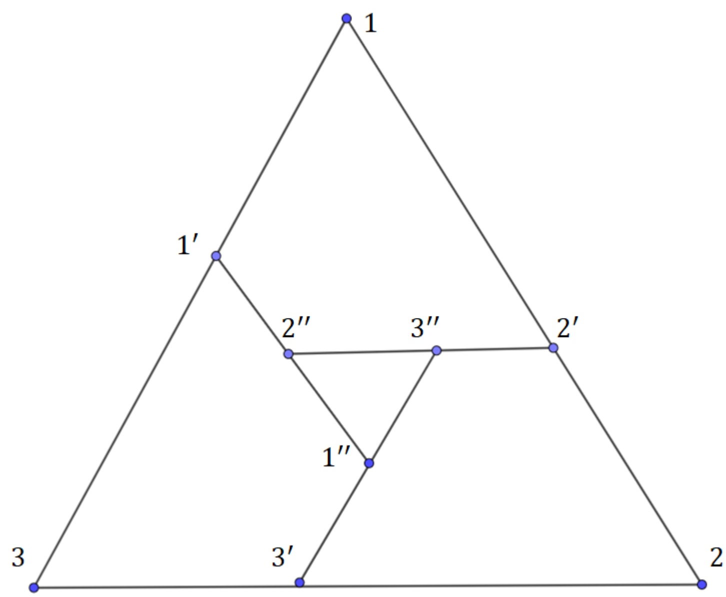

Figura 1.1: Configuración espacial de nueve viviendas

Por ejemplo, si el agente A y el agente B intercambian las casas $1'$ y $1''$ por 2 y $2'$, el agente A obtiene la hilera más larga y B la más corta.

Asignando valores numéricos a las posiciones de las hileras, 2 a la larga, 1 a la corta y 0 si no se forma una hilera, podemos observar que no existe una coalición de tres personas que mejore sus asignaciones de manera simultánea, es decir, no existe una asignación con la propiedad de pertenecer al núcleo.

1.2. Mercados con una mercancía como dinero

El modelo de Svensson (1984) estudia una economía con n agentes, cada uno de ellos tiene a lo sumo un bien indivisible y una cantidad determinada de una mercancía perfectamente divisible que juega el papel del dinero. Para incorporar m diferentes bienes seguiremos el enfoque de Shapley y Shubik (1971, 1977) y Shubik (1984). Demostraremos que, en general, el concepto de solución que surge al introducir un bien perfectamente divisible no coincide con la solución de equilibrio competitivo.

Una de las razones por las cuales no es posible alcanzar una solución de equilibrio competitivo se debe al comportamiento estratégico de los agentes al momento de ofrecer dinero a cambio de una unidad más del bien divisible, veremos que la complicación está asociada a la indivisibilidad misma del bien intercambiado.

Consideremos una situación en la que hay n agentes y $m + 1$ bienes, denotaremos con $i = 1, 2, \ldots, n$ al agente $i-$ésimo, x^j (con $j = 1, \ldots, m$) la mercancía $j-$ésima, la cual se encuentra en cantidades enteras y positivas. La mercancía x^{m+1} tiene la propiedad de perfecta divisibilidad, esto es, $x^{m+1} \in \mathbb{R}_+$. Cada uno de los i agentes tiene cantidades iniciales positivas de cada bien antes de realizar el intercambio, que representaremos por:

$$w_i = (w_i^1, w_i^2, \ldots, w_i^m, w_i^{m+1}).$$ [1]

Las preferencias del agente i estarán representadas por funciones de utilidad $u_i : \mathbb{N}^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$u_i(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m, x_i^{m+1}).$$

[1] Es posible, sin embargo, que para algún i y algún j, w_i^j puede ser igual a 0.

La cantidad disponible del bien j para cada $j = 1, \ldots, m$ es entonces

$$w^j = \sum_{i=1}^{n} w_i^j.$$

El procedimiento de intercambio consiste en que los agentes presenten las cantidades de los m bienes que pretenden intercambiar, posteriormente los precios de cada uno de los bienes se formarán en el mercado y estarán determinados por su oferta y su demanda.

Los agentes comprarán o intentarán comprar unidades de los m bienes gastando parte de su dotación inicial del $m+1-$ésimo bien.

Supongamos que para cada uno de los m bienes existe un lugar en donde se realizan los procesos de intercambio (un mercado), en este modelo, existen m de estos lugares cuyas cantidades disponibles serán como máximo $(w^1, w^2, \ldots, w^m)$. Una vez dispuestos los m bienes para el intercambio, cada uno de los agentes hace ofertas asignando la cantidad b_i^j del $m+1-$ésimo bien al bien j tal que $b_i^j \leq w_i^{m+1}$. La oferta total del agente i será entonces $b_i = (b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^m)$ con

$$\sum_{j=1}^{m} b_i^j \leq w_i^{m+1}$$

Así, para cada uno de los bienes j, su precio se define como

$$p_j = \frac{b^j}{w^j},$$

en donde $b^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$ y $w^j = w_1^j + \cdots + w_n^j$.

Debido a la naturaleza del modelo, los agentes deberían pagar el mismo precio p_j por la misma cantidad del bien x^j, con $x^j \leq w^j$. Sin embargo, el

precio pagado por uno de los agentes depende de los precios pagados por el resto de los agentes. En términos del concepto del núcleo, al introducir una mercancía como dinero, es posible formar coaliciones de agentes que impidan una solución de equilibrio competitivo.
Ejemplificaremos el funcionamiento del modelo anteriormente descrito para el caso de dos bienes y dos agentes mediante una construcción geométrica conocida como la caja de Edgeworth, en este caso, uno de los bienes representará el dinero, es decir, $m = 1$ y $m + 1 = 2$.

La construcción es la siguiente: las dotaciones del primer agente se miden hacia arriba y a la derecha, las del segundo agente, por el contrario, se miden hacia abajo y a la izquierda, el bien 1 denotará al bien de intercambio y el bien 2 al dinero, la Figura 1.2 representa esta situación.

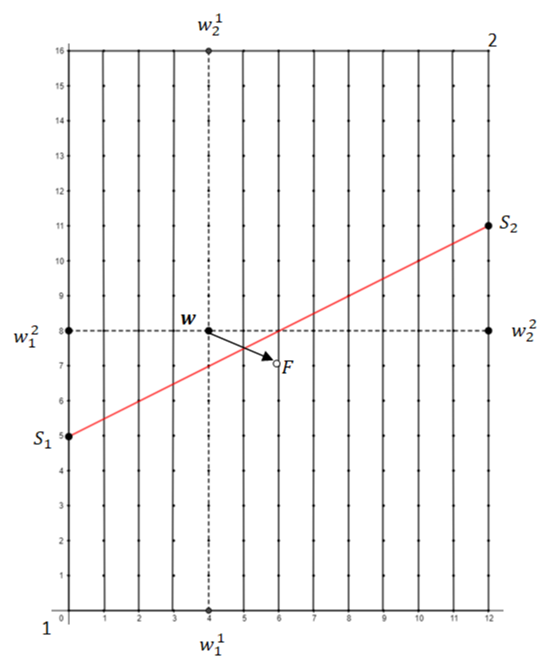

Figura 1.2: La caja de Edgeworth con un bien divisible y uno indivisible

El punto $w = (w_1, w_2)$ representa la asignación inicial de ambos bienes para cada agente. S_1 y S_2 son cantidades de dinero que los agentes eligen ofrecer a cambio del bien 1 (Observemos que los rangos posibles que pueden ofrecer son las cantidades delimitadas por los segmentos $\overline{w_1^2 0_1}$ y $\overline{w_2^2 0_2}$ para los agentes 1 y 2 respectivamente).

Consideremos el segmento de recta que une S_1 con S_2 al que denotaremos por $\overline{S_1 S_2}$, si $S_1 = w_1^2$ y $S_2 = w_2^2$ significa que la oferta en dinero que realiza cada agente por el bien 1 es cero, es decir, el intercambio no se llevará a cabo en esta situación, por lo tanto, podemos interpretar la pendiente de $\overline{S_1 S_2}$ como el precio del bien x^1. Notemos en primer lugar que $\overline{S_1 S_2}$ divide al segmento $\overline{w_1^2 w_2^2}$ y el "corte" será la cantidad del bien x_1 que cada agente adquiere al precio

$$p_1 = \frac{||w_1^2 S_1|| + ||w_2^2 S_2||}{||w_1^1 0_1|| + ||w_2^1 0_2||}.$$ [2]

Bajo los supuestos de este modelo los componentes de $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ sólo pueden tomar valores enteros. Una primera cuestión que surge entonces es, ¿qué ocurre cuando el segmento $\overline{S_1 S_2}$ no corta a $\overline{w_1^2 w_2^2}$ en un número entero? Para responder a esta pregunta es suficiente observar que si uno de los agentes mantiene fija la oferta de dinero por el bien, el otro agente tendrá que ofrecer una mayor cantidad de dinero si es que desea una unidad más de x_1, es decir, ofrecerá hasta que la intersección de $\overline{S_1 S_2}$ con $\overline{w_1^1 w_1^2}$ tomen valores enteros.

Notemos también que $\overline{S_1 S_2}$ divide a la recta $\overline{w_1^1 w_2^1|}$, este corte significa la asignación final de dinero, de esta forma, la asignación final será el punto F, el cual queda determinado por las coordenadas de corte del segmento $\overline{S_1 S_2}$ con los segmentos $\overline{w_1^2 w_2^2}$ y $\overline{w_1^1 w_2^1}$ respectivamente. Cabe mencionar que el pre-

[2]La doble barra significa la cantidad del bien 2 ofrecida por cada uno de los agentes, por ejemplo, si $w_1^2 = 5$ y $S_1 = 3$ entonces $||w_1^2 S_1|| = 2$

cio p_1 es la tangente del ángulo de la recta $\overline{S_1S_2}$. Así, el vector que va de w a F representa la transacción que ocurre y su pendiente en valor absoluto es p_1.

Lo anterior sólo nos ha permitido entender las reglas del intercambio, el siguiente paso consiste en introducir en nuestro análisis las preferencias de los consumidores, las cuales están caracterizadas como las curvas de indiferencia en la caja de Edgeworth. Para efecto de facilitar el análisis, dibujaremos las curvas continuas, pero teniendo presente que estas sólo pueden tomar valores enteros. Las curvas de indiferencia para las funciones de utilidad de los agentes 1 y 2 se muestran en la Figura 1.3.

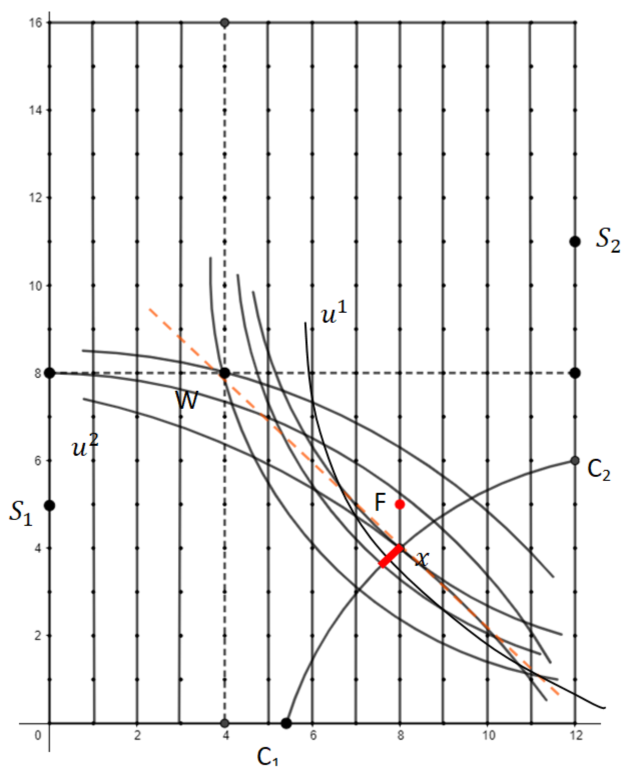

Figura 1.3: Cuando se incluye un bien como dinero la solución puede no pertenecer al núcleo.

Ahora bien, si fijamos la oferta de dinero de uno de los agentes y asignamos valores distintos a la oferta de dinero del otro agente (desde cero hasta agotar su asignación inicial) no es difícil ver que las posibles asignaciones del bien x^1 pueden ser representados por un conjunto de puntos cuya envolvente es cóncava en la caja de Edgeworth.

Como podemos ver en la Figura 1.3, dadas las dotaciones iniciales, la mejor elección que puede hacer el agente 1 es S_1, de manera análoga, la mejor elección para el agente 2 es S_2. Sin embargo, la asignación final F no coincide con el equilibrio competitivo x.

Más aun, la solución obtenida ni siquiera es una asignación del núcleo. Esto ocurre debido a que los agentes están participando en el intercambio con precios desiguales, es decir, asignan el precio a x_1 que cada uno cree conveniente.

Lo anterior significa que cualquier resultado que se encuentre contenido entre las curvas u^1 y u^2 será preferido por ambos agentes. De esta manera, es posible construir ejemplos utilizando una mercancía perfectamente divisible en la cual las soluciones no son equilibrios competitivos en general.

Capítulo 2

El modelo

2.1. Conceptos preliminares

Supondremos que cada bien sólo está disponible en cantidades enteras, es decir, si j es un tipo de bien, el símbolo x_j representará la cantidad del bien j con $x_j \in \mathbb{N}$. En esta economía el número de bienes diferentes es finito, esto es, existen m diferentes tipos de j bienes con $j = 1, \ldots, m$.

A cada bien, digamos el $j-$ésimo, asociamos un número real no negativo, su precio p_j. Si un bien tiene un precio igual a cero diremos que es un bien libre. Un sistema de precios es un vector $m-$dimensional $p = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0$ con $p \in \mathbb{R}^m_+$.

Supondremos que el número n de agentes es finito. Denotaremos por I al conjunto de agentes $\{1, \ldots, n\}$ y por i al agente $i-$ésimo. Los agentes pueden consumir diferentes tipos de bienes y múltiples unidades de cada bien.

Para cada agente i, una cesta de consumo es una especificación, para cada bien, de las cantidades de bienes. Por lo tanto, representaremos a una cesta de consumo como un vector $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$ tal que $x_i \in \mathbb{N}^m$ y el vector

$w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{im})$ representará sus dotaciones iniciales.[3]

La cantidad disponible w_j del bien j será la suma de las unidades del mismo tipo de bien que poseen los agentes, es decir:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}.$$

Dadas dos cestas de consumo x_i y y_i supondremos que sólo una de las siguientes condiciones se satisface:

1. x_i es preferida a y_i
2. x_i es indiferente a y_i
3. y_i es preferida a x_i

Supondremos también que si x_i, y_i y z_i son tres cestas tal que si x_i es preferida a y_i y y_i es preferida a z_i, entonces x_i es preferida a z_i.

La relación binaria "al menos tan deseado como" define un preorden completo de preferencias del agente i y lo denotaremos por $\succcurlyeq_i$. No es difícil verificar que la relación $\succcurlyeq_i$ es reflexiva y transitiva.[4]

Si ocurre que $x_i \succcurlyeq_i y_i$ y $y_i \succcurlyeq_i x_i$ escribiremos $y_i \sim_i x_i$ y diremos que x_i es indiferente a y_i. Si $x_i \succcurlyeq_i y_i$ y no $y_i \succcurlyeq_i x_i$ escribiremos $x_i \succ_i y_i$ y diremos que x_i es estrictamente preferido a y_i. La relación $\sim_i$ es reflexiva, transitiva y simétrica.

[3] A partir de aquí se cambia la notación de x_i^j a x_{ij}.

[4] Una relación binaria R es un preorden si xRx para todo x en X y xRy e yRz implica xRz. Si xRy e yRx implica $x = y$, la relación R se denomina un orden. Cuando xRy o yRx para todo x, y en X el preorden se denomina completo.

2.2. Economía de intercambio

Definición 2.2.1 (Economía de intercambio) *Una economía de intercambio E es un par $(\mathbb{N}^m, (w_i, \succcurlyeq_i)_{i\in I})$ tal que:*
$I = 1, \ldots, n$ es el conjunto de agentes.
$\succcurlyeq_i$ es un preorden completo y transitivo, el cual determina las preferencias para cada $i \in I$.
$\mathbb{N}^m$ es el conjunto de cestas de consumo
$w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{im})$ representa las dotaciones iniciales del agente i tal que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w.$$

El vector w es el $m-$vector que representa los bienes disponibles en la economía.

Definición 2.2.2 (Asignación) *Una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^m)^n$ es un conjunto de n cestas de consumo que indica las cantidades de los m bienes que posee cada uno de los agentes. Una asignación factible es una asignación tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$$

Denotaremos por X al conjunto de todas las asignaciones factibles y X_i al conjunto de consumo del agente i. Es decir

$$X = \left\{ x \in (\mathbb{N}^m)^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \right\}.$$

Definición 2.2.3 (Pre-asignación) *Una pre-asignación $M \in (\mathbb{N}^m)^n$ es un vector de cestas de consumo $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para cada $i = 1, \ldots, n, x_i \leq w$.*

Denotaremos por x_i^M a la cesta del agente i que pertenece a la pre-asignación M.

El conjunto de pre-asignaciones está formado por todas las posibles combinaciones de cestas tales que $x_i \leq w$, pero a diferencia de una asignación x, la pre-asignación M no necesariamente satisface

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$$

Denotaremos por $P(X) = 2^X$ al conjunto de pre-asignaciones. Observemos que una asignación siempre es una pre-asignación, pero una pre-asignación no necesariamente es una asignación.[5]

Definición 2.2.4 *Sean x y y dos asignaciones, decimos que x es preferida a y y lo denotaremos por $x \succcurlyeq y$, si $x_i \succcurlyeq y_i$ para todo i con $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$.*

En adelante, escribiremos COPO para referirnos a un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.2.5 (Supremo y maximal) *Sea $(X, \leq)$ un COPO, un elemento $\bar{\bar{x}}$ de X se llama **maximal**, si no existe x tal que $x > \bar{\bar{x}}$. Un elemento $\bar{x}$ se denomina **supremo** o cota superior mínima, si para todo $x \in X$, $\bar{x} \geq x$. De manera similar se definen el ínfimo y el minimal.*

Dos elementos x y y se dicen comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$. De lo contrario se dirán incomparables.

[5] $P(X)$ denota el conjunto potencia de X, esto es, el conjunto formado por todos los subconjuntos de X.

Ejemplo 2.2.1 *Consideremos una economía E formada por dos agentes $i = 1, 2$ y dos tipos de bienes, cada uno de ellos disponibles en una unidad, esto es $w = (1, 1)$. Entonces, para cada i, $X_i = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ y puede representarse de manera geométrica de la siguiente manera:*

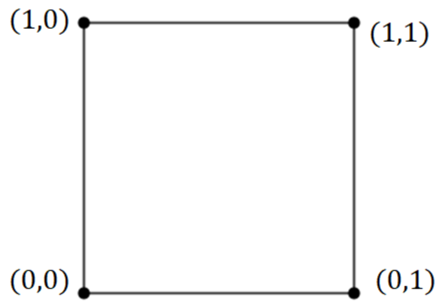

Figura 2.1: El conjunto de consumo X_i.

Los conjuntos X y $P(X)$ pueden representarse mediante un diagrama de Hasse entendiendo que la asignación $x = ((a, b)(c, d))$ asocia el primer par ordenado al agente 1 y el segundo par ordenado al agente 2.[6]

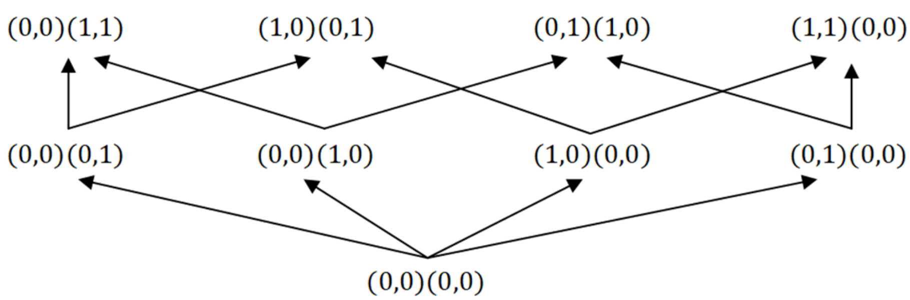

Figura 2.2: Diagrama de Hasse para las asignaciones factibles X.

Cada una de las asignaciones x satisface:

[6]Un diagrama de Hasse de un COPO X es un grafo orientado cuyos vértices son los elementos de X y los arcos sólo están presentes cuando $a < b$ y no existe c tal que $a < c < b$.

$$x = \sum_{i=1}^{2} x_i \leq x = \sum_{i=1}^{2} w_i = (1,1)$$

La cardinalidad de X, es decir, el número de elementos de X es $|X| = 4$, por lo tanto $P(X) = 2^4$. Las pre-asignaciones se representan en la Figura 2.3

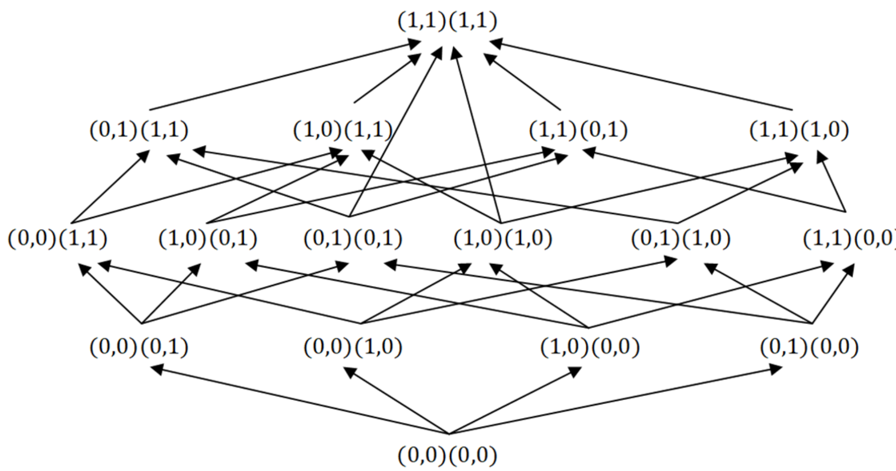

Figura 2.3: El conjunto de pre-asignaciones $P(X)$

En el ejemplo anterior, el conjunto X no tiene supremo pero contiene elementos maximales, en cambio, los conjuntos X_i y $P(X)$ contienen un supremo. Los tres conjuntos X_i, X y $P(X)$ contienen al ínfimo.

Los COPOS que contienen una cota superior mínima y una cota inferior máxima tienen cierta estructura algebraica asociada la cual se denomina retículo.

Definición 2.2.6 (Retículo) *Un COPO $(X, \leq)$ se denomina retículo, si para cualesquier elementos $x, y \in X$ existen el supremo y el ínfimo, los cuales denotaremos por $x \vee y$ y $x \wedge y$ respectivamente.*

Ejemplo 2.2.2 *Consideremos el conjunto* $X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

del Ejemplo 2.1.1. Entonces X es un retículo con supremo $(0,1) \vee (1,0) = (1,1)$ *e ínfimo* $(0,1) \wedge (1,0) = (0,0)$.

Si para cada par de elementos $x, y \in X$ existen $x \vee y$ y $x \wedge y$ diremos que el retículo es completo. El conjunto $X = (0,0)(0,1)(1,0)(1,1)$ es un ejemplo de retículo completo . Los símbolos $\vee$ y $\wedge$ representan operaciones binarias que satisfacen las siguientes propiedades:[7]

1. $x \vee x = x, x \wedge x = x$ (idempotencia)

2. $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (conmutatividad)

3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (asociatividad)

4. $x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$ (absorción).

No es difícil ver que en la economía E, el conjunto de consumo del agente i es un retículo completo con supremo w e ínfimo 0, en este caso, el supremo y el ínfimo coinciden con el máximo y el mínimo. Las Figuras 2.1 y 2.3 son representaciones de los retículos X_i y $P(X)$ respectivamente.

Definición 2.2.7 (Conjunto de indiferencia) *Sea X_i el conjunto de consumo del agente i. El conjunto de indiferencia D_i correspondiente a w_i es aquel que está formado por todas las cestas x_i que le reportan al agente i la misma satisfacción que w_i, es decir*

$$D_i = \{x_i \in X_i : x_i \sim_i w_i\}.$$

Este conjunto es no vacío pues al menos $w_i \in D_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Denotaremos por $|D_i|$ al cardinal del conjunto D_i y a sus elementos por $\mathrm{x}_{i|D_i|}$. La Figura 2.4 representa esta idea para el caso de dos bienes. El conjunto D_i es el concepto análogo al de curva de indiferencia del agente i. Los puntos en

[7] Un ejemplo de un retículo que no es completo viene dado por el intervalo abierto (a, b). Esto es así porque el supremo y el ínfimo existen pero no son elementos del conjunto.

color naranja representan las cestas $x_{i|D_i|} \in \mathbb{N}^2$ tales que $x_i \sim_i w_i$. En este caso $|D_1| = 7$.

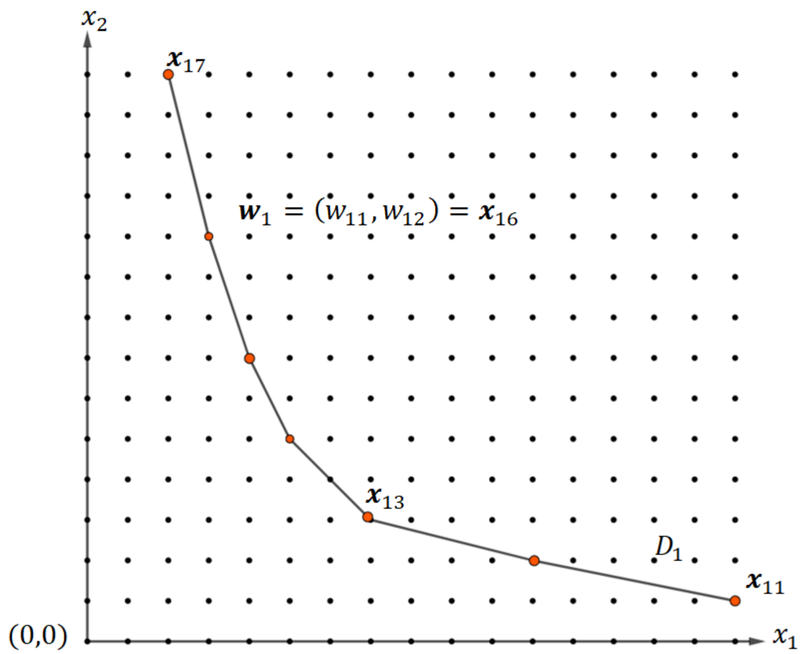

Figura 2.4: El conjunto D_1

La siguiente construcción está motivada por la idea de definir un conjunto de asignaciones preferidas a D_i, es decir, aquellas asignaciones que son al menos tan buenas como w_i. Continuando con el ejemplo de dos bienes podemos observar que cualquier asignación que se encuentre al lado derecho y/o hacia arriba de cada una de las pertenecientes a D_i será al menos tan preferida a cualquier otra que se encuentre en D_i.

Notemos también que, por hipótesis, los bienes además de ser indivisibles, son limitados, es decir, si existen $|x_1|$ unidades del bien 1 y $|x_2|$ unidades del bien 2, un consumidor podrá adquirir como máximo $|x_1| + |x_2|$ bienes.

Definición 2.2.8 (Individualidad racional) *Diremos que la asignación*

$x_i \in X_i$ es individualmente racional si:

$$x_i \succcurlyeq_i w_i.$$

Denotaremos al conjunto de todas las asignaciones individualmente racionales x_i como:

$$C_i = \{x_i \in X_i : x_i \succcurlyeq_i w_i\},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definición 2.2.9 (Envolvente convexa) *Sea $C_i = \{x_i \in X_i : x_i \succcurlyeq_i w_i\}$ para cada $i \in I$. Se define la envolvente convexa de C_i como la intersección de todos los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^m$ que contienen a C_i y la denotaremos por $H_i(C_i)$.*

Es importante notar que $H_i(C_i) \subset R^m$ es el mínimo conjunto convexo que contiene al conjunto C_i. Entonces, no es difícil ver que se satisface el siguiente orden de contención $D_i \subseteq C_i \subseteq H_i(C_i)$. En la Figura 2.5, la región sombreada representa la envolvente convexa $H_i(C_i)$ de C_i. Las asignaciones w_1, x_1 y y_1 satisfacen la relación:

$$w_1 \sim_1 x_1 \preccurlyeq_1 y_1.$$

Definición 2.2.10 (Restricción lineal) *Diremos que un conjunto de k cestas de consumo $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ forman una restricción lineal $c_i^h(k) = a_1 x_{i1} + \cdots + a_k x_{ik} = b$ para w_i si*

1. *$x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ son linealmente independientes,*

2. *$x_{i1} \sim \ldots \sim x_{ik} \sim w_i$ y,*

3. *$dim\langle x_{i1}, ..., x_{ik}\rangle \leq n - 1$*

en donde h representa el número de restricciones que delimita a C_i.

Los conjuntos convexos $c_i^h(k) \in \mathbb{R}^2$ (semiplanos en este caso) delimitan el contorno formado por el conjunto de puntos D_i.

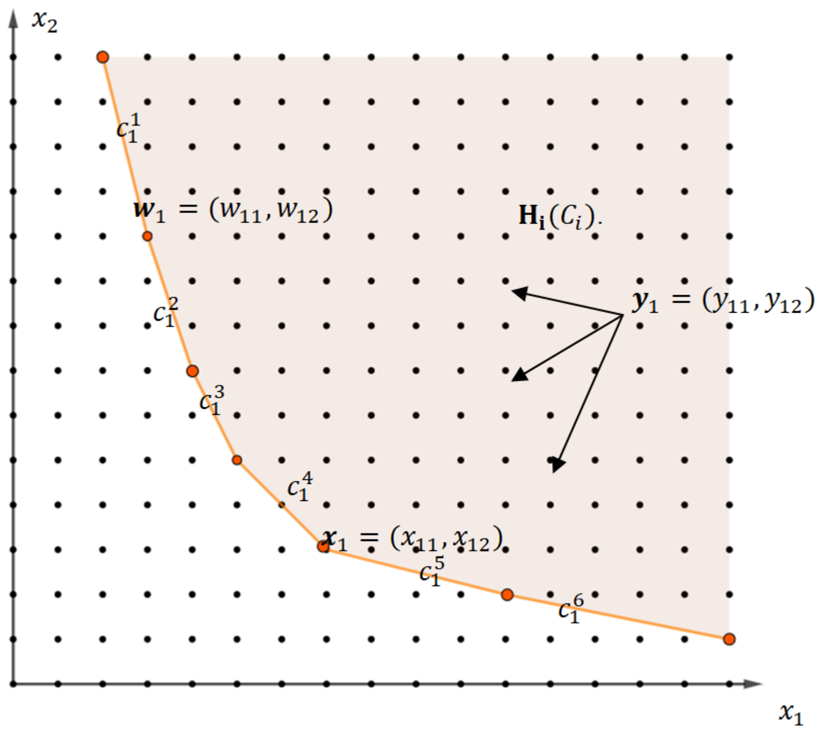

Figura 2.5: Los conjuntos D_1, C_1 y las restricciones $c_i^h(K) \in \mathbb{R}^2$.

Para una economía formada por dos agentes y dos bienes podemos representar esta situación en una versión de la caja de Edgeworth para el caso discreto. Si $|x_1|$ y $|x_2|$ son las cantidades disponibles de los bienes 1 y 2 que existen en la economía, la longitud de la base de la caja será $|x_1|$ y la altura $|x_2|$.

Las cestas al menos tan preferidas como las dotaciones iniciales del primer agente se miden hacia arriba y a la derecha. Las del segundo agente, por el contrario, se miden hacia abajo y a la izquierda. Por lo tanto, en la caja se encuentran representadas todas las asignaciones posibles de los dos bienes entre los dos agentes, la Figura 2.6 representa esta construcción.

Bajo los supuestos sobre la estructura de las preferencias de los agentes, el agente 1 elegirá una cesta que se encuentre más hacia arriba y a la derecha. Dicha elección por supuesto se encuentra restringida por el conjunto D_2 del agente 2 y viceversa.

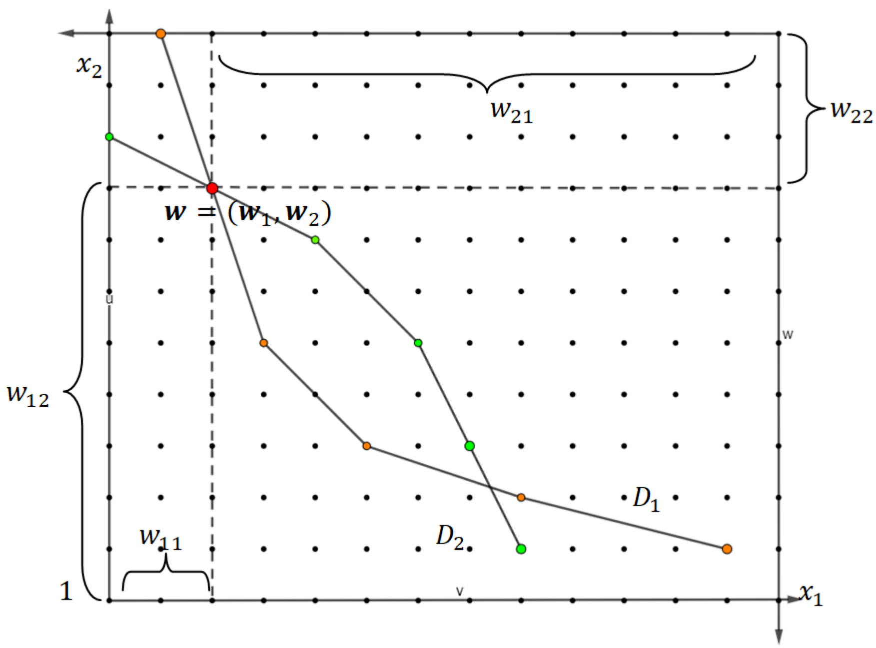

Figura 2.6: Las dotaciones iniciales w y los conjuntos D_i en una caja de Edgeworth.

Capítulo 3

El conjunto de contrato y la frontera de Pareto

En esta parte se investiga la existencia del conjunto de contrato $C(X)$ de la economía E. Se demuestra que, bajo ciertas condiciones, $C(X)$ es no vacío. Se describe además un procedimiento para encontrar un elemento del mismo. En la demostración se hace uso de un resultado de geometría combinatoria.

3.1. Conjunto de contrato

La importancia de encontrar asignaciones en C_i para todo i reside en que, si estas existen, es posible considerar conceptos de solución que beneficien mutuamente a los miembros de la economía E pues, de no existir tales asignaciones, los miembros de E no tendrán incentivos para participar en el intercambio y en consecuencia, el problema tratado tendrá poco interés.

Tiene sentido entonces preguntarse, en primer lugar: si la intersección de los $H_i(C_i)$ es no vacía, esto es, ¿cuándo ocurre que $\cap_{i=1}^n H_i(C_i) \neq \emptyset$?; en segundo lugar, si la intersección es no vacía, necesitamos investigar si $\cap_{i=1}^n H_i(C_i)$ contiene al menos un elemento $x_i \in \mathbb{N}^m$ para todo $i \in I$, o lo que es equivalente, necesitamos verificar que $\cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m \neq \emptyset$. No es difícil construir ejemplos en los que esto no ocurre. La Figura 3.1 ejemplifica una situación en la que $\cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m = \emptyset$. Estrictamente hablando, la

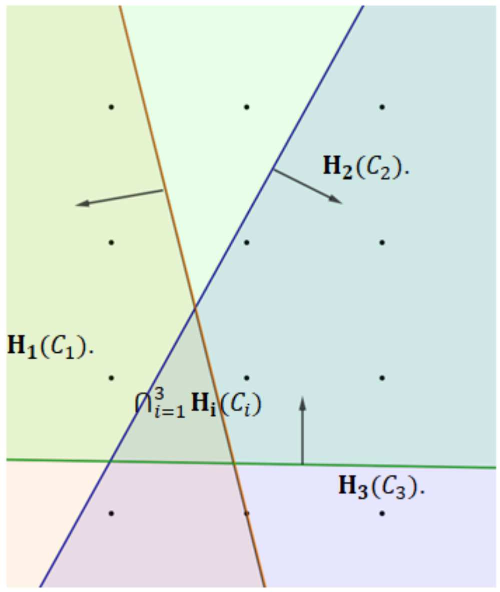

Figura 3.1: Las envolventes convexas $H_i(C_i)$ y su intersección $\cap_{i=1}^{3} H_i(C_i)$.

intersección $\cap_{i=1}^{3} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^2$ es no vacía en $\mathbb{R}^2$, pues, como se muestra en la Figura 3.1, la región delimitada por los tres semiplanos es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, sin embargo, no existen puntos $x \in \mathbb{N}^2$ que pertenezcan también a $\cap_{i=1}^{3} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^2$.

Demostraremos que, bajo ciertas condiciones, el conjunto $\cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m$ de la economía que estamos analizando es no vacío.

La prueba de existencia de una solución al problema de intercambio exigirá construcciones previas y definiciones sobre las x_i que son al menos tan buenas como la correspondiente a w_i para cada agente i.

Definición 3.1.1 (Optimalidad de Pareto) *Una asignación x se dice es:*

1. *Una mejora en el sentido de Pareto, si existe otra asignación* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *tal que* $y_i \succcurlyeq_i x_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$ *y* $y_i \succ_i x_i$ *para al menos un agente* i*.*

2. *Débilmente óptima en el sentido de Pareto, si no existe una asignación* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *tal que se cumpla* $y_i \succ_i x_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$*; y*

3. *Es óptima en el sentido de Pareto, si no existe otra asignación* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *tal que* $y_i \succcurlyeq_i x_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$ *y* $y_i \succ_i x_i$ *para al menos un agente* i*.*

Centraremos nuestra atención en el conjunto de contrato, el cual es un concepto con propiedades interesantes y deseables como concepto de solución.

Definición 3.1.2 (Conjunto de contrato) *El conjunto de contrato* $C(X)$ *de la economía* E *es el conjunto formado por las asignaciones* x *individualmente racionales y eficientes en el sentido de Pareto.*

Proposición 3.1.1 *Cada asignación* $x \in C(X)$ *es individualmente racional, factible y débilmente óptima en el sentido de Pareto.*

Demostración.[8] Demostraremos la proposición por contradicción. Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una asignación en $C(X)$. La factibilidad de la asignación se sigue del razonamiento de que si $x \in C(X)$ no fuera factible, entonces podría encontrarse una asignación y factible tal que $y_i \succcurlyeq_i x_i$ para todo i, lo cual induce una mejora y, por lo tanto, contradice la definición.

Para demostrar que x es individualmente racional observemos que si no fuera el caso, es decir, que existiera algún agente h tal que $w_h \succ_h x_h$, existiría un agente h que puede mejorar la asignación, lo cual no puede ocurrir por definición. Por lo tanto, $x_i \succcurlyeq_i w_i$ debe ser válido para cada i.

[8]Para demostrar la proposición $P \Rightarrow Q$ por contradicción, se considera $\rceil Q \Rightarrow \rceil P$

Por otro lado, para verificar que la asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es débilmente óptima de Pareto supongamos, por el contrario, que existe otra asignación $(y_1, \ldots, y_n)$ que satisface $y_i \succ_i x_i$ para cada i. Esto significa que el conjunto de n agentes puede mejorar la asignación, lo cual es imposible. De esta manera, la asignación x es débilmente óptima de Pareto. ■[9]

3.2. Un lema combinatorio

Supondremos, en primer lugar, que es posible construir la envolvente convexa $H_i(C_i)$ para cada i, este supuesto en realidad no es tan restrictivo pues en general, para cualquier conjunto finito de puntos X, es posible construir la envolvente convexa de X. Una vez definidas las $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ envolventes, demostraremos que la intersección de todas ellas es no vacía. Para la prueba, haremos uso de un resultado debido a Bell y Scarf cuya exposición simplificada se puede consultar en la monografía de Schrijver (1998), el resultado establece las condiciones bajo las cuales, la intersección de envolventes convexas definidas sobre el retículo $\mathbb{N}^m$ es no vacía.

Lema 3.2.1 (Doignon-Bell-Scarf) *Dada una colección $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^m$, si existen 2^h de esos elementos $(h \geq n)$ que contienen un punto de intersección en el retículo $\mathbb{N}^m$, entonces todos los conjuntos $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ tienen al menos un punto en común con coordenadas en $\mathbb{N}^m$.*

Demostración. Ver Apéndice A.

La siguiente figura ilustra geométricamente el lema anterior para el caso en el que $n = m = 2$.

[9] En adelante, el símbolo ■ denotará el final de un procedimiento o una demostración.

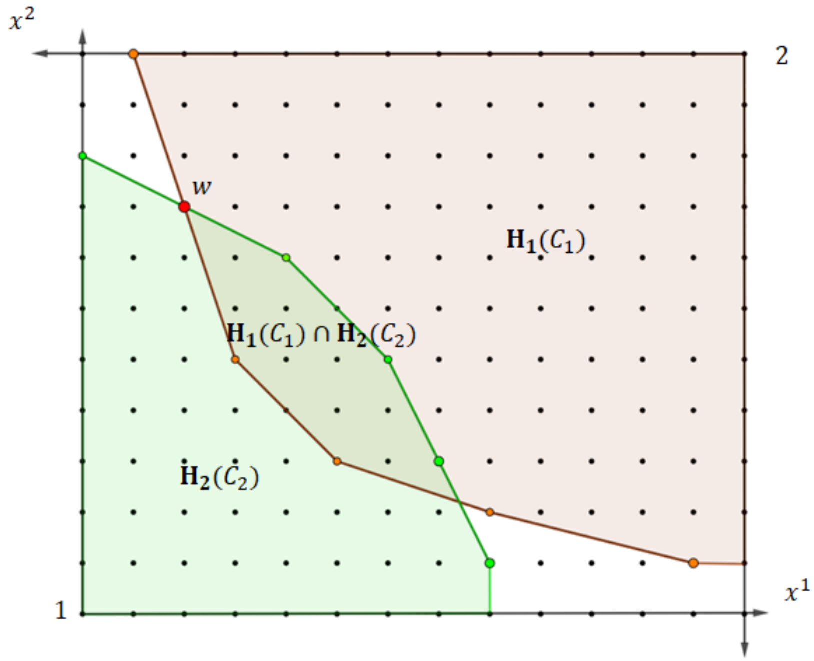

Figura 3.2: Los conjuntos $H_1(C_1), H_2(C_2)$ y $H_1(C_1) \cap H_2(C_2)$ en la caja de Edgeworth.

Demostraremos a continuación que, bajo ciertas condiciones, el conjunto de contrato es no vacío.

Proposición 3.2.1 *Sea E una economía de intercambio y sean $H_i(C_i)$ las envolventes convexas de los C_i para cada $i \in I$. Si existen al menos h restricciones lineales que contienen un punto del retículo en común con $h \geq n$, entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m \neq \emptyset.$$

Más aun, existe $x \in \cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m$ tal que $x \in C(X)$.

Demostración. Puesto que el conjunto $H_i(C_i)$ de cada uno de los agentes es convexo, la intersección es no vacía, esto es $\cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \neq \emptyset$. Ahora bien, esta intersección tiene al menos el punto correspondiente a las dotaciones iniciales, es decir $w \in \cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m$, pues, por hipótesis existen al menos h restricciones lineales con $h \geq n$, entonces, por el lema 3.2.1

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m \neq \emptyset.$$

Por otro lado, el número de puntos que se encuentran en la intersección depende de las dotaciones iniciales ya que sí w está en $C(X)$, $\cap_{i=1}^{n} H_i(C_i) \cap \mathbb{N}^m$ sólo contiene a este punto. Supongamos entonces que w no está en $C(X)$; demostraremos entonces que existe algún $x \in \mathbb{N}^m$ en la intersección de los $H_i(C_i)$ que es individualmente racional y débilmente óptima en el sentido de Pareto, es decir, que $x \in C(X)$.

a) Existe $x \in H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$ que es débilmente óptima en el sentido de Pareto. Supongamos, por el contrario, que no existe $x \in H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$ que sea débilmente óptima en el sentido de Pareto. Esto significa que existe una sucesión de asignaciones $w, y, z, \ldots r$ tales que $r \succ_i \ldots \succ_i z_i \succ_i y_i \succ_i w_i$. Sin embargo, como el conjunto $H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$ es finito, existe x tal que $x_i \succ_i r_i \succ_i \ldots \succ_i w_i$ para todo i, y para cualquier sucesión en $H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$. Es decir, x es una asignación que no puede ser mejorada. Por lo tanto, x es débilmente óptima en el sentido de Pareto.

b) $x \in H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$ es individualmente racional. Si la asignación x no es individualmente racional, existe algún agente i que se encuentra en una mejor situación con sus dotaciones iniciales, es decir, en x, el agente i prefiere una cesta de consumo peor a sus dotaciones iniciales. Pero esto significa que x no se encuentra en $H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Así, x es individualmente racional y débilmente óptima en el sentido de Pareto, es decir $x \in C(X)$. ■

3.3. Preferencias y funciones de utilidad

La hipótesis de que cada agente $i = 1, \ldots, n$ es capaz de ordenar de manera completa y transitivamente las cestas de consumo x_i por medio de la relación $\succcurlyeq_i$ puede ser representada por una función de utilidad $u_i : X \to \mathbb{R}$, la cual asignará valores superiores a cestas de consumo más deseables. Es decir, $x_i \succcurlyeq_i y_i$ si y sólo si,

$$u_i(x_i) \geq u_i(y_i).$$

La existencia de una función creciente que representa a la relación $\succcurlyeq_i$ puede verse en el apéndice al capítulo 2 de Hildebrand y Kirman (1982). No exigiremos en modo alguno que u_i sea continua. Sin embargo, será deseable que la función u_i satisfaga alguna propiedad análoga a la cuasi-concavidad (es decir, que los conjuntos de contorno superior sean convexos) en X, tal propiedad recibe el nombre de supermodularidad. Recordemos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cóncava en $\mathbb{R}^n$ si, para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

En particular, si $\lambda = 1/2$ obtenemos la convexidad de punto medio definida por Murota (2003)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq f(x) + f(y)$$

Si $\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor$ es el mínimo entero de $\frac{x+y}{2}$ y $\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil$ el máximo entero, entonces podemos definir la concavidad discreta de punto medio como

$$f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) \geq f(x) + f(y) \tag{3.1}$$

Ahora bien, sea $\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor = x \wedge y$ y $\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil = x \vee y$ como en la Figura 3.3. Sustituyendo en (3.1) se tiene

$$f(x \wedge y) + f(x \vee y) \geq f(x) + f(y) \tag{3.2}$$

Las funciones que satisfacen (3.2) reciben el nombre de funciones supermodulares.

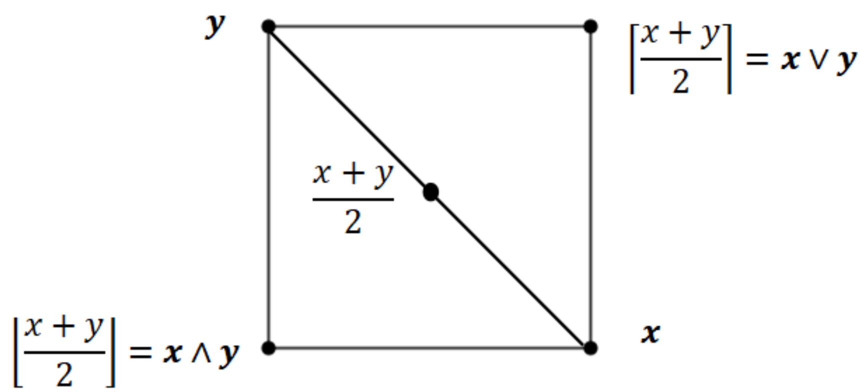

Figura 3.3: El supremo $x \vee y$ y el ínfimo $x \wedge y$

Murota (2003) demuestra que si f satisface la convexidad discreta de punto medio entonces f es submodular. El procedimiento que hemos seguido para motivar la propiedad de supermodularidad es similar al que sigue Murota para el caso de submodularidad.

Definición 3.3.1 (Función supermodular) *Sea X un retículo. Supongamos que $u : X \to \mathbb{R}$ es una función real definida sobre X. Si*

$$u(x) + u(y) \leq u(x \wedge y) + u(x \vee y)$$

para todo $x, y \in X$, decimos que u es supermodular en X. Si $-u$ es supermodular, u es submodular. Si u es submodular y supermodular se dice que es una valuación. Si se cumple que

$$u(x) + u(y) < u(x \wedge y) + u(x \vee y)$$

diremos que u es estrictamente supermodular.

En adelante, supondremos que las preferencias de los agentes pueden ser representadas por funciones supermodulares u_i para cada $i = 1, \ldots, n$.

Introducimos a continuación las operaciones que representan el análogo discreto (de diferencias) de las operaciones de derivación para funciones continuas.

Recordemos que la definición de derivada de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto x está basada en el hecho de reducir a límites una expresión como

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x_j},$$

cuando la diferencia Δx_j tiende a cero y Δ es el operador de diferencia.

Sin embargo, cuando trabajamos con funciones definidas sobre retículos podemos construir una definición análoga a la derivada. Un estudio detallado se encuentra en los textos de Samarski y Nikolaev (1982) y Kaplan (1960).

Sea $u_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función supermodular y sea $x_{ij} \in \mathbb{N}$. Para encontrar una expresión análoga al concepto de derivada definimos el cociente:

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{ij}} = \frac{u_i(x_{ij}) - u_i(x_{ij} - 1)}{x_{ij} - (x_{ij} - 1)}$$

Si h representa la diferencia entre x_{ij} y $x_{ij} - 1$ podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{ij}} = \frac{u_i(x_{ij} + h) - u_i(x_{ij})}{h}$$

Puesto que nos encontramos trabajando en el retículo $\mathbb{N}^m$, siempre ocurre que

$$h = x_{ij} - (x_{ij} - 1) = 1.$$

Entonces

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{ij}} = u_i(x_{ij}) - u_i(x_{ij} - 1).$$

Para el caso general, tenemos la siguiente definición:

Definición 3.3.2 (Operador de diferencia) *Sea $u_i : X \to \mathbb{R}$ una función supermodular sobre el retículo X, la diferencia parcial $j-$ésima sobre X en el punto $(x_{i1}, \ldots, x_{im})$ se define como:*

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{ij}} = \frac{u_i(x_{i1}, ..., x_{ij} + h, ..., x_{im}) - u_i(x_{i1}, ..., x_{im})}{h}.$$

Un concepto análogo para el cálculo de una derivada mixta o cruzada se puede deducir utilizando la expresión anterior, es decir, calculamos primero $(\Delta u_i)/(\Delta x_{ij})$ y luego $\Delta/(\Delta x_{ik})((\Delta u_i)/(\Delta x_{ij}))$ para $j, k = 1, \ldots, m$. La fórmula resultante para el caso $\mathbb{N}^2$ es la siguiente:

$$\frac{\Delta}{\Delta x_{i1}}\left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{i2}}\right) =$$

$$\frac{u_i(x_{i1} + 1, x_{i2} + 1) - u_i(x_{i1} + 1, x_{i2} - 1) - u_i(x_{i1} - 1, x_{i2} + 1) + u_i(x_{i1} - 1, x_{i2} - 1)}{4}.$$

Definición 3.3.3 (Diferencias crecientes (isótonas)) *Sea X' un retículo y $\mathbb{N}$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que la función $u_i : X' \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ exhibe diferencias crecientes (isótonas) en sus argumentos (x_i, t) si $u_i(x_i, t'') - u_i(x_i, t')$ es creciente para todo $t'' \geq t'$ con $t'', t' \in \mathbb{N}$. Para cada una de las entradas de $x_i \in X$ definimos el vector de diferencias crecientes (isótonas) para cada $j = 1, \ldots, m$ por*

$$\nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i) = \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x_{i1}}, ..., \frac{\Delta u_i}{\Delta x_{im}}\right).$$

Ejemplo 3.3.1 *Un ejemplo de una función supermodular es la función* $u_i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha} x_{i2}^{\beta}$ *con* $\alpha + \beta = 1$. *La gráfica para esta función en el subconjunto* $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}^2$ *se muestra en la Figura 3.4*

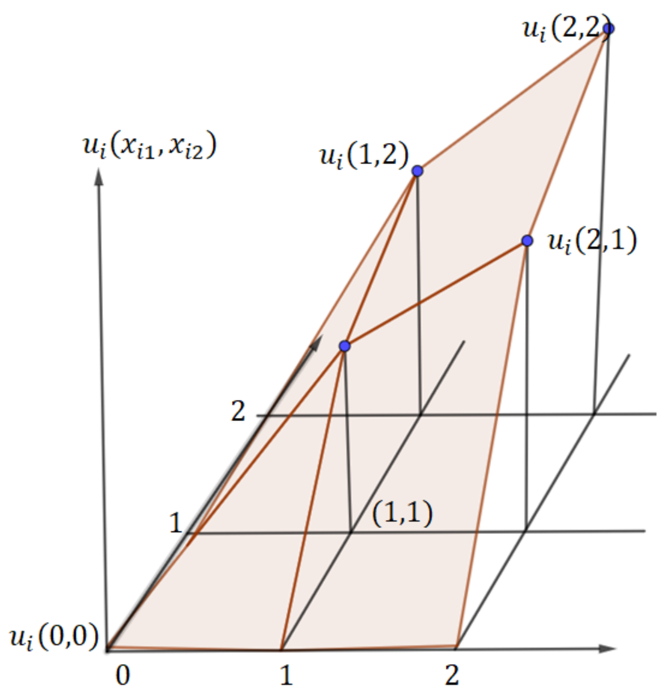

Figura 3.4: Gráfica de $u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha} x_{i2}^{\beta}$

Las funciones cóncavas son trivialmente supermodulares. Sin embargo, el inverso no es cierto, es decir, si una función es supermodular no se sigue que sea cóncava. En nuestro análisis, al estar definidas las funciones en el retículo X, la función u_i no es continua para todo $i = 1, ..., n$.

Definida la propiedad de supermodularidad para una función con dominio sobre un retículo, podemos preguntarnos, ¿cómo es una función que no es supermodular? Respondemos a esta pregunta mediante un sencillo ejemplo dado por Topkis (1998).

Ejemplo 3.3.2 *Sea* $v_i : X \to \mathbb{R}$ *una función con dominio en el retículo* $X = \{0,1,2\} \times \{0,1\}$*, definida de la siguiente forma:*

$$v_i(x_i) = \begin{cases} 1 & si \quad x_{i1} \in \{0,2\}, x_{i2} \in \{0,1\} \\ \\ 0 & si \quad x_{i1} = 1, x_{i2} = 0 \\ \\ \delta & si \quad x_{i1} = 1, x_{i2} = 1, \delta < 1 \end{cases}$$

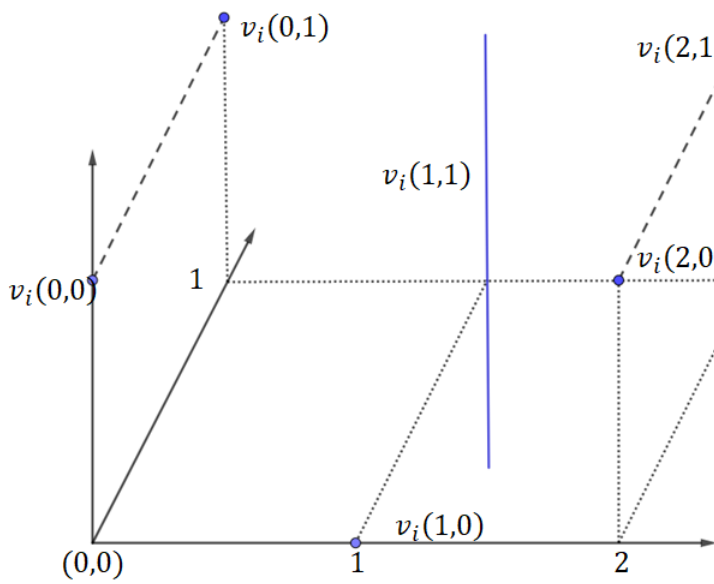

Figura 3.5: Gráfica de la función v_i

Afirmamos que $v_i(x_i)$ *no es supermodular. En efecto, observemos primero que, para cualquier* $\delta < 1$, $v_i(2,1) - v_i(2,0) = 0 = v_i(0,1) - v_i(0,0)$ *y, por otro lado* $v_i(1,1) - v_i(1,0) = \delta$*, entonces:*

1. *Si* $\delta > 0$

$$v_i(2,1) - v_i(2,0) = 0 < \delta = v_i(1,1) - v_i(1,0).$$

2. *Si* $\delta < 0$

$$v_i(1,1) - v_i(1,0) = \delta < 0 = v_i(0,1) - v_i(0,0).$$

Así, para cualquier $\delta \neq 0$ *la función* v_i *no es supermodular.*

El siguiente resultado establece que la suma de funciones supermodulares es supermodular así como que la multiplicación de una supermodular por un escalar también lo es.

Lema 3.3.1 *Sea* X *un retículo,* u_i *funciones definidas en* X *con* $i = 1, \ldots, n$ *y* $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$. *Entonces:*

1. *Si* u_i *es supermodular sobre* X *y* $\lambda_i > 0$, *entonces* $\lambda_i u_i$ *es supermodular*

2. *Si* u_i *y* u_j *son supermodulares en* X, *entonces* $u_i + u_j$ *es supermodular.*

Demostración. 1. Sean $x, y \in X$ dos asignaciones y u_i una función supermodular. Puesto que X es un retículo, para cada x, y existen $u_i(x \wedge y)$ y $u_i(x \vee y)$. Ahora bien, como $\lambda_i > 0$ se tiene:

$$\lambda_i u_i(x) + \lambda_i u_i(y) = \lambda_i[(u)_i(x) + u_i(y)] \leq \lambda_i[u_i(x \wedge y) + u_i(x \vee y)]$$

$$= \lambda_i u_i(x \wedge y) + \lambda_i u_i(x \vee y),$$

de esta última sucesión de igualdades y desigualdades se sigue que

$$\lambda_i u_i(x) + \lambda_i u_i(y) \leq \lambda_i u_i(x \wedge y) + \lambda_i u_i(x \vee y).$$

Es decir, $\lambda_i u_i$ es supermodular.

2. Puesto que u_i y u_j son supermodulares, entonces

$$u_i(x) + u_i(y) \leq u_i(x \wedge y) + u_i(x \vee y)$$

y

$$u_j(x) + u_j(y) \leq u_j(x \wedge y) + u_j(x \vee y).$$

Ahora bien,

$$[u_i(x) + u_j(x)] + [u_i(y) + u_j(y)] = u_i(x) + u_i(y) + u_j(x) + u_j(y) \leq$$

$$u_i(x \vee y) + u_i(x \wedge y) + u_j(x) + u_j(y) \leq u_i(x \vee y) + u_i(x \wedge y) + u_j(x \vee y) + u_j(x \wedge y) =$$

$$[u_i(x \vee y) + u_j(x \vee y)] + [u_i(x \wedge y) + u_j(x \wedge y)].$$

Esto es,

$$[u_i(x) + u_j(x)] + [u_i(y) + u_j(y)] \leq [u_i(x \vee y) + u_j(x \vee y)] + [u_i(x \wedge y) + u_j(x \wedge y)].$$

Luego,$u_i + u_j$ es supermodular. ■

Aunque las funciones supermodulares definidas en el retículo X pierden la propiedad de ser continuas y, por lo tanto, diferenciables; existen propiedades y resultados análogos entre ambos tipos de funciones que se siguen manteniendo. Un ejemplo de ello es que ciertas familias de funciones que surgen en el análisis económico preservan la supermodularidad cuando el dominio es un retículo, el siguiente resultado demuestra este hecho.

Proposición 3.3.1 *Sea $u_i : X \to \mathbb{R}$ una función definida en el retículo X, con $u_i(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \alpha_j \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$ y $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$. Entonces $u_i(x)$ es supermodular.*

Demostración. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in X$ con $x_j \geq y_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$, entonces:

$$u_i(x \vee y) + u_i(x \wedge y) - u_i(x) - u_i(y) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} + y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m} -$$

$$-x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} - y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m} = 0.$$

Supongamos ahora que $x_j \geq y_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$ y $x_k \leq y_k$ para algún k, entonces:

$$u_i(x \vee y) + u_i(x \wedge y) - u_i(x) - u_i(y) = x_1^{\alpha_1} \cdots y_k^{\alpha_k} \cdots x_m^{\alpha_m} + y_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} \cdots y_m^{\alpha_m} -$$

$$-x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} - y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m} = y_k^{\alpha_k}(x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}) - x_k^{\alpha_k}(y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m}) +$$

$$+x_k^{\alpha_k}(x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}) - y_k^{\alpha_k}(y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m}) =$$

$$(y_k^{\alpha_k} - x_k^{\alpha_k})(x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} - y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m}) \geq 0.$$

Es decir, $u_i(x \vee y) + u_i(x \wedge y) - u_i(x) - u_i(x) \geq 0$. ■

El conjunto de contrato ha sido establecido como un concepto de solución en términos de las preferencias de los agentes. Para analizar con más detalle este concepto introducimos dos definiciones: el conjunto de posibilidades de utilidad y la frontera de Pareto.

El conjunto de posibilidades de utilidad U representa el conjunto de vectores cuyas entradas son los valores de las funciones de utilidad de cada uno de los agentes que son factibles e individualmente racionales. La frontera de Pareto es un subconjunto de U con la característica de que cada u_i tiene asociado el valor de la función de utilidad de cada agente que se encuentra en la frontera de este conjunto, demostraremos que los elementos de la frontera de Pareto corresponden al conjunto de vectores que son las imágenes de las asignaciones en el conjunto de contrato.

Definición 3.3.4 (Conjunto de posibilidades de utilidad) *Sea* $u_i : X \to$

$\mathbb{R}$ *la función de utilidad del agente i. Se define el conjunto de posibilidades de utilidad como el conjunto de asignaciones factibles de los niveles de utilidad para la economía E, y lo denotaremos por:*

$$U = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : x \in X, u_i \leq u_i(x_i), i \in I\}.$$

De acuerdo a la definición de la optimalidad de Pareto, los valores de utilidad de una asignación óptima deben pertenecer a la frontera del conjunto de posibilidades de utilidad. En caso contrario, podríamos obtener una asignación que mejore la situación de al menos uno de los agentes sin empeorar la de los demás. Tenemos así, la siguiente definición.

Definición 3.3.5 (Frontera de Pareto) *Se define la frontera de Pareto (UP) como*

$$UP = \{(u_1, \ldots, u_n) \in U : (\nexists u' \in U)(\forall i)u'_i \geq u_i \;\; y \;\; (\exists i)u'_i \geq u_i\}.$$

Una exposición detallada puede encontrarse en el texto de Mas-Colell, Whinston y Green (1995) y Antelo (2000).

Proposición 3.3.2 *Sea $x \in C(X)$ una asignación en el conjunto de contrato. Entonces $u(x) = (u_1, \ldots, u_n) \in UP$. Recíprocamente, si $u(x) \in UP$, x está en $C(X)$.*

Demostración. $\Leftarrow$ Supongamos que $u(x) \in UP$ pero x no es una asignación de $C(X)$. Si x no está en el conjunto de contrato existe una asignación x' tal que $x \prec x'$ y $u(x) < u(x')$, esto significa que $u(x)$ no está en la frontera de Pareto, lo cual contradice nuestra afirmación.

$\Rightarrow$ Sea $x \in C(X)$ y supongamos que $u(x)$ no pertenece a UP. Esto quiere decir que $x' \preccurlyeq x$ para toda asignación x', en particular, $y \preccurlyeq x$ con $u(y) \in UP$, pero esto significa que $u(y) \leq u(x)$, luego $u(x) \in UP$. ■

La Figura 3.6 representa geométricamente la definición anterior para el caso en el que $n = 2$.

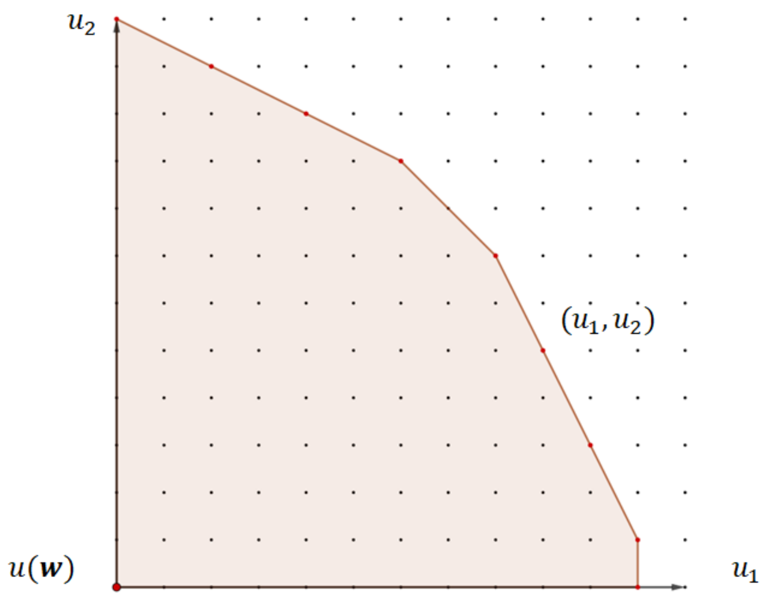

Figura 3.6: El conjunto de posibilidades de utilidad y la frontera de Pareto para $n = 2$.

La proposición anterior afirma que a cada asignación en el conjunto de contrato le corresponde un elemento $u(x)$ en la frontera de Pareto, la Figura 3.7 ilustra este argumento.

La región en color naranja representa la región en la que cada uno de los agentes estaría dispuesto a intercambiar parte de sus dotaciones iniciales. La región en color azul representa la frontera de posibilidades de utilidad. El vector $u(x) = (u_1, u_2)$ en la Figura 3.7 es la imagen de la asignación x del conjunto de contrato, es decir $u(x) \in UP$.

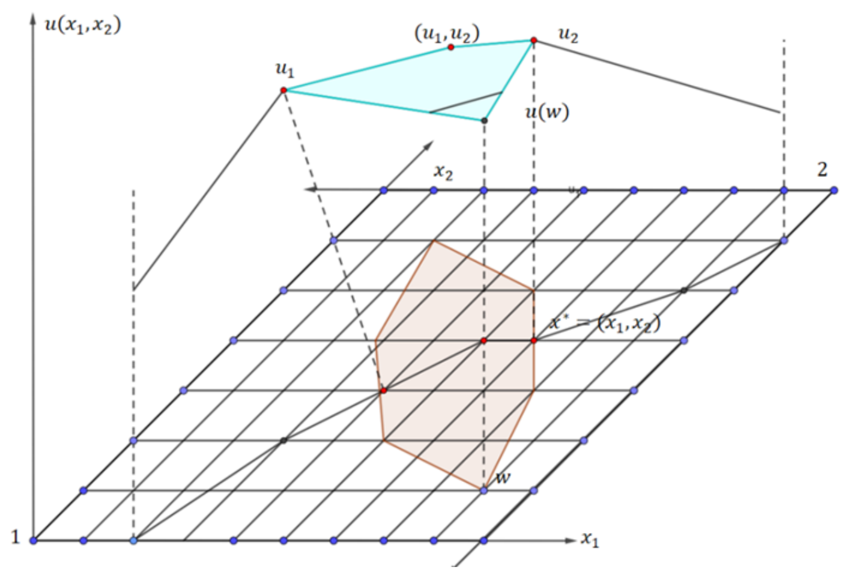

Figura 3.7: La caja de Edgeworth y los elementos de UP.

Capítulo 4

Un algoritmo para encontrar asignaciones en la frontera de Pareto

En el capítulo tres estudiamos las condiciones bajo las cuales existen elementos en el conjunto de contrato para la economía E, sin embargo, no hemos mencionado nada acerca de cómo encontrar elementos de este conjunto.

El algoritmo que implementaremos puede ser interpretado como una transformación de asignaciones a otras asignaciones en X. Es decir, dada una asignación $x \in X$, la salida del algoritmo aplicado en X es otra asignación de X. Siguiendo a Luenberger y Ye (1984), podemos operar de manera iterativa y aplicar el algoritmo repetidamente a los nuevos puntos. Entenderemos por iterativo, que el algoritmo genera una sucesión de asignaciones en donde cada una de ellas se calcula en función de las que le preceden, especificamos previamente una asignación de partida la cual estará determinada por las dotaciones iniciales $w = (w_1, \dots, w_n)$.

4.1. El algoritmo y la frontera de Pareto

Cada asignación $x^{(k+1)}$ generada por el algoritmo se define en términos de la $x^{(k)}$ que le precede de la siguiente manera:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e_{rs}^{(k)},$$

en donde

$$e_{rs}^{(k)} = (0, \ldots, (0, \ldots, a_i^r, \ldots, -b_i^s, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, -a_l^r, \ldots, b_l^s, \ldots, 0), \ldots, 0),$$

es decir, el vector $e_{rs}^{(k)} \in \mathbb{Z}^{(n\times m)}$ asigna a_i^r unidades adicionales del bien r y resta b_i^s unidades del bien s al agente i, al mismo tiempo, resta a_i^r unidades del bien r y añade b_i^s unidades del bien s al agente l siempre que la asignación $x^{(k+1)}$ satisfaga

$$u(x^{(k+1)}) \geq u(x^{(k)})$$

Podemos interpretar a e_{rs} como un vector de dirección en donde a_i^r y b_i^s son las tasas de intercambio entre los bienes r y s. Es importante notar que cada una de las asignaciones generadas por e_{rs} es factible pues en cada iteración $a_i^r - b_i^s - a_l^r + b_l^s = 0$. Ahora bien, para restringir el análisis a las asignaciones individualmente racionales debemos imponer la condición;

$$u_i(w_i) \leq u_i(x_i)$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Lo anterior sugiere la siguiente definición:

Definición 4.1.1 (Dirección factible) . *Decimos que una dirección dada por el vector e_{rs} es factible si $x+e_{rs} \in X$ y $x+e_{rs}$ es individualmente racional para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Es posible que las asignaciones generadas por el vector de dirección sean factibles pero no individualmente racionales. Sin embargo, si restringimos las cantidades a_i^r cuando b_l^s de intercambio entre los agentes i y l como sigue:

$$1 \leq a_i^r \leq \text{máx}\{x_i^r \in X_i : x_i^r \sim w_l^r\} \tag{4.1}$$

$$1 \leq b_i^s \leq \text{mín}\{x_i^s \in X_i : x_i^s \sim w_l^s\}, \tag{4.2}$$

todas las asignaciones generadas por e_{rs} además de ser factibles serán individualmente racionales.

Proposición 4.1.1 *Si las direcciones generadas por el vector e_{rs} son factibles y satisfacen las condiciones (4.1) y (4.2), las asignaciones $x^{(k+1)}$ son individualmente racionales.*

Demostración. Por contradicción. Sean a_i^r y b_l^s con $1 \leq a_i^r \leq \text{máx}\{x_i^r \in X_i : x_i^r \sim w_l^r\}$ y $1 \leq b_i^s \leq \text{mín}\{x_i^s \in X_i : x_i^s \sim w_l^s\}$. Supongamos, por el contrario, que e_{rs} genera una asignación $x^{(k+1)}$ que no es individualmente racional. Esto significa que existe algún x_i tal que, para el bien r o s, $x_i^r \prec w_l^r$ para el agente l o $x_i^s \prec w_i^s$ para el agente i, lo cual no puede ocurrir ya que esto implica que

$$a_i^r > \text{máx}\{x_i^r \in X_i : x_i^r \sim w_l^r\},$$

o bien

$$b_i^s > \text{mín}\{x_i^s \in X_i : x_i^s \sim w_l^s\}.$$

Lo cual contradice el supuesto sobre a_i^r y b_l^s. ■

Sea $\Gamma : X \to \mathbb{R}^n$. Entonces, la asignación $x^{(k+1)}$ debe satisfacer la desigualdad:

$$\Gamma(x^{(k)}) \leq \Gamma(x^{(k+1)}).$$

En palabras, el algoritmo busca, a partir de la asignación inicial $x^{(0)} = w$, una dirección factible hasta llegar a una asignación de mayor crecimiento de

Γ.

Cada iteración puede interpretarse como una mejora en el sentido de Pareto, es decir, en la asignación $x^{(k+1)}$ al menos un agente i se encuentra en una mejor situación que en $x^{(k)}$ sin que algún otro agente, digamos j, se encuentre en otra peor. Entonces, el algoritmo termina cuando no es posible mejorar la situación de otro agente sin empeorar la de otro, es decir al encontrar una asignación x^* tal que

$$\Gamma(x^{(k)}) \leq \Gamma(x^*)$$

para cada iteración k. Pero lo anterior es precisamente la definición de optimalidad de Pareto. Además, dada la condición impuesta por las direcciones factibles (individualidad racional), la asignación final x^* generada por el algoritmo es un elemento de la frontera de Pareto.

4.2. Esquema del algoritmo

La idea básica del algoritmo es la de generar, al igual que la versión continua del método del descenso más rápido, una secuencia de aproximaciones a uno de los resultados localmente óptimos, de tal manera que, en cada una de las iteraciones, el valor de la función objetivo "mejore". Describimos a continuación los pasos del algoritmo:

Paso 1: Elegir $x^{(0)} = w$.

Paso 2: Determinar una dirección de búsqueda $e_{rs}^{(k)}$ por medio del cálculo de las diferencias crecientes.

Paso 3: Determinar la longitud máxima de crecimiento de la función objetivo Γ.

Paso 4: Obtener al nuevo vector $x^{(k+1)}$ como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e_{rs}^{(k)}.$$

Paso 5: Analizar si $x^{(k+1)}$ verifica las condiciones de optimalidad dentro de la región de factibilidad. Si es así, el algoritmo termina. En caso contrario, iniciar una nueva iteración repitiendo el proceso a partir del paso 2 con $k = k + 1$.

Ejemplo 4.2.1 *Consideremos una economía E formada por dos agentes y dos tipos de bienes, esto es,* $n = 2$ *y* $m = 2$*. Sean* $u_1(x_1) = \sqrt{x_{11}x_{12}}$ *y* $u_2(x_2) = \sqrt{x_{21}x_{22}}$ *con* $w_1 = (6, 2)$ *y* $w_2 = (4, 10)$*. La región individualmente racional estará determinada por el conjunto de asignaciones* x_i *tales que, para todo* $i = 1, 2$*,*

$$u_i(x_i) \geq u_i(w_i)$$

Para este ejemplo particular podemos construir el contorno de las asignaciones individualmente racionales definiendo determinando las cestas x_i *en las que se satisface* $u_i(x_i) = u_i(w_i)$*.*

En efecto, para el agente 1 se tiene que $u_1(w_1) = \sqrt{12}$*, entonces, las asignaciones* x_1^p *que forman el conjunto de indiferencia está formado por:* $(6, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 6)$ *y* $(1, 12)$*. De la misma manera podemos calcular las asignaciones* x_2^p*, que en este caso son:* $(4, 10), (5, 8), (8, 5)$ *y* $(10, 4)$*.*

La región de asignaciones individualmente racionales queda determinada por las soluciones del sistema de restricciones lineales (Figura 4.1):

$$1/2x_{11} + x_{12} \geq 5 \qquad (c_1^1)$$

$$x_{11} + x_{12} \geq 7 \qquad (c_1^2)$$

$$2x_{11} + x_{12} \geq 10 \qquad (c_1^3)$$

$$6x_{11} + x_{12} \geq 18 \qquad (c_1^4)$$

$$2x_{21} + x_{22} \geq 18 \qquad (c_2^1)$$

$$x_{21} + x_{22} \geq 13 \qquad (c_2^2)$$

$$1/2x_{21} + x_{22} \geq 9 \qquad (c_2^3)$$

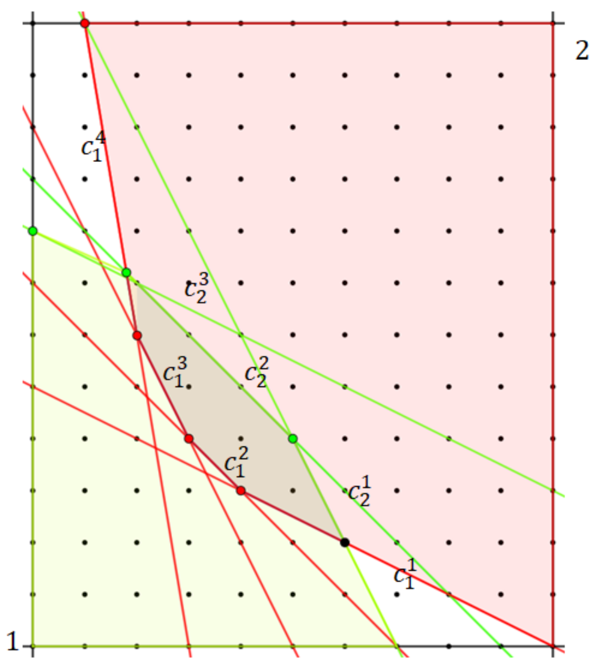

Figura 4.1: Los conjuntos de indiferencia c_i^p.

Ahora bien, el punto inicial de algoritmo es $x^{(0)} = w = (w_1, w_2) = ((6,2)(4,10))$, *entonces:*

$$\Gamma(w) = (u_1(w_1), u_2(w_2)) = (u_1(6,2), u_2(4,10)) = (\sqrt{12}, \sqrt{40})$$

En la primera iteración existen ocho vectores de dirección, de las cuales sólo $e_{rs} = ((-1,1)(1,-1))$ *satisface la condición de individualidad racional; entonces, la nueva asignación es* $x^{(}1)) = ((5,3)(5,9))$, *y se tiene la desigual-*

dad:

$$\Gamma(x^{(0)}) = (\sqrt{12}, \sqrt{40}) < (\sqrt{15}, \sqrt{45}) = \Gamma(x^{(1)})$$

Nuevamente, a partir de la asignación $x^{(1)}$ observamos que el vector $e_{rs} = ((-1,1)(1,-1))$ cumple con las condiciones requeridas y obtenemos la nueva asignación $x^{(2)} = ((4,4)(6,8))$, que satisface:

$$\Gamma(x^{(1)}) = (\sqrt{15}, \sqrt{45}) < (\sqrt{16}, \sqrt{48}) = \Gamma(x^{(2)})$$

Observemos que la iteración $x^{(1)}$ es una mejora en el sentido de Pareto, sin embargo $x^{(2)}$ es una asignación que no puede ser mejorada por algún agente sin que el otro empeore, luego, el algoritmo termina en $x^{(2)}$.

La relación entre el algoritmo y la frontera de Pareto se establece a continuación:

Proposición 4.2.1 *Sea $\Gamma : X \to \mathbb{R}^n$ una función con las características descritas anteriormente. Entonces $\Gamma(x)$ alcanza un valor máximo en U y*

$$\arg \max_{u(x)\in U} \Gamma \in UP$$

Demostración. Sea X el conjunto de asignaciones tales que, para cada $x \in X, u(x) \in U$. En particular, $u(w) \in U$. Ahora bien, designemos a $u(w)$ como el vértice de origen de un camino en el cual, los vértices adyacentes $u(x^{(1)}), \ldots, u(x^{(k)})$ satisfacen $u(w) \leq u(x^1), \ldots, u(w) \leq u(x^{(k)})$. Las asignaciones que no son individualmente racionales son descartadas.

Sin pérdida de generalidad supongamos que alguno de los vértices, digamos $u(x')$ satisface

$$u(x') = \max\{u(x^{(1)}), ..., u(x^{(k)})\}.$$

Ahora $u(x')$ será nuestro nuevo vértice de origen y los vértices adyacentes serán todos aquellos que $u(x') \leq u(y^1), ..., u(x') \leq u(y^j)$. Repitiendo este proceso y debido a que el conjunto de asignaciones $x \in X$ tales que $u(x) \in U$ es acotado, obtendremos una sucesión $u(x') \leq ... \leq u(x)$ tal que

$$\arg \max_{u(x) \in U} \Gamma \in UP$$

■

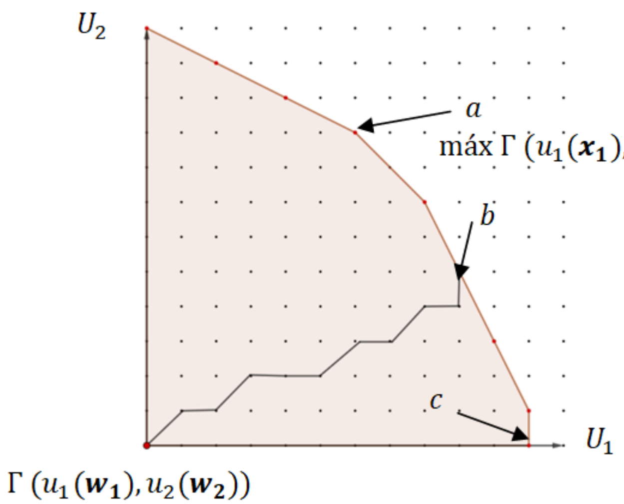

Figura 4.2: Los elementos de la trayectoria de $\Gamma(x)$.

Observación. La definición de $\Gamma(x)$ no impone condición alguna sobre la unicidad de la trayectoria. Es decir, las sucesión de los respectivos valores de $\Gamma(x)$ puede conducirnos a cualesquiera de los puntos a, b o c, todos ellos en la frontera de Pareto.

Capítulo 5

Existencia de un cuasi-equilibrio competitivo

La elección del enfoque de Negishi como método de prueba de existencia de un cuasi-equilibrio competitivo en lugar del enfoque tradicional (funciones de exceso de demanda) se debe a que la existencia de bienes indivisibles impide definir funciones continuas tanto de utilidad como de demanda y, en consecuencia, no es posible utilizar las herramientas estándar de optimización.

Esto lleva a introducir conceptos como el de retículo, función supermodular, diferencias crecientes, entre otros. Al mismo tiempo, la discontinuidad de las funciones de demanda impide demostrar la existencia de equilibrio mediante los teoremas de Brouwer o Kakutani, los cuales exigen continuidad de las funciones. Sin embargo, a diferencia de los modelos que analizan el problema de existencia mediante las funciones de demanda, el enfoque de Negishi permite caracterizar todos los elementos del conjunto de contrato como soluciones de un problema de maximización de una función de bienestar W.

5.1. El método de Negishi

Una vez encontrado el conjunto de óptimos de Pareto, el primer teorema del bienestar conduce a seleccionar entre ellos un equilibrio. Para encontrarlo, se define una función conjunta de bienestar como la suma ponderada de las funciones individuales de utilidad tiene como óptimo una colección de asignaciones que son óptimas en el sentido de Pareto. El método de Negishi permite: i) usar funciones de utilidad no continuas, ii) maximizar una función de bienestar conjunta y determinar los pesos duales de las utilidades que son minimizadoras y iii) obtener una asignación de equilibrio asociada con un vector de precios mediante la dualidad de precios a asignaciones.

La relación que existe entre un elemento del conjunto de contrato y una solución al problema de maximización del bienestar social, se plantea como un problema de maximización de una función definida como la suma de las utilidades individuales sujeta a la disponibilidad de los bienes en la economía. Esta relación nos permitirá a su vez caracterizar a los cuasi-equilibrios competitivos como soluciones al problema de maximización del bienestar social.

Caracterizamos a continuación una clase de soluciones más débil que los equilibrios competitivos, los denominados cuasi-equilibrios. Este tipo de solución no exige necesariamente que los agentes agoten toda su restricción presupuestaria cuando se encuentran maximizando su función de utilidad, más adelante se define con precisión este concepto. La caracterización de los cuasi-equilibrios competitivos para una economía de intercambio con bienes indivisibles se realiza mediante el enfoque de Negishi y aplicando el teorema de punto fijo de Tarski.

Para establecer la relación entre los elementos del conjunto de contrato y las soluciones al problema de maximización de bienestar social asociaremos a cada elemento de UP un vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Para esto, exigiremos algunas condiciones a los vectores $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$:

Definición 5.1.1 ($n-$simplex) *Se define el $n-$simplex como el conjunto de vectores Δ_n tal que*

$$\Delta_n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Para cada $x \in X$ tal que $u(x) \in UP$, es posible asociar un vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ del $n-$simplex, el cual denotaremos por $\lambda(x)$, de tal forma que $\lambda(x)$ sea proporcional a $u(x) \in UP$. Representaremos al vector de UP asociado con $\lambda(x)$ como $u(\lambda(x)) = (u_1(\lambda(x_1)), \ldots, u_n(\lambda(x_n)))$.

Esta construcción en apariencia artificial tiene un significado económico importante: los elementos $\lambda \in \Delta_n$ representan los valores de los parámetros de la utilidad y la asignación determinada $\lambda(x)$ distribuye la utilidad de acuerdo a los valores de los λ_i, es decir, existe $\lambda \in \Delta_n$ tal que $\lambda(x)$ es una asignación del conjunto de contrato y $u(\lambda(x)) \in UP$.

Consideremos el caso de dos bienes y dos agentes. Si fijamos la utilidad del agente 1 tal que $u_1(x_1) = u_1(w_1)$ entonces el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Delta_2$ asociado es $(0, 1)$ y $u(x(0, 1)) = (u_1(x_1(0, 1)), u_2(x_2(0, 1))) = (u_1(w_1), u_2(x_2))$. La siguiente figura ilustra este razonamiento.

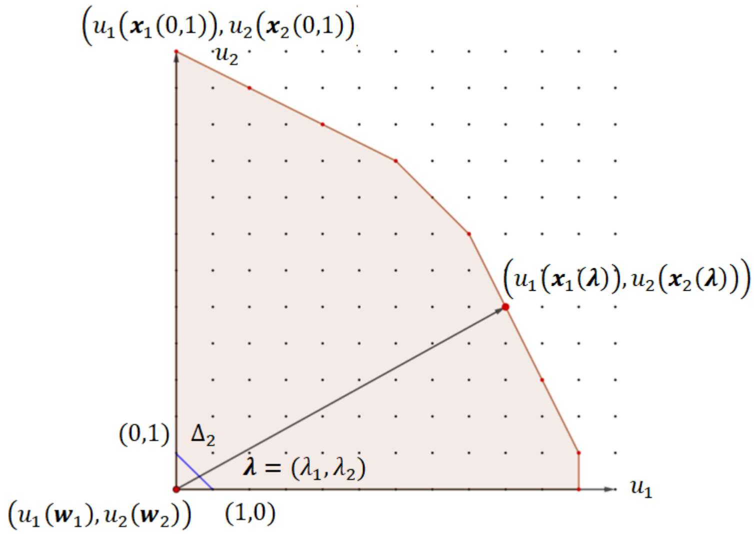

Figura 5.1: La relación entre los puntos del simplex Δ_2 y los elementos de UP.

Definición 5.1.2 (Cuasi-equilibrio competitivo) *Sea x una asignación y p un vector de precios. El par (x, p) constituye un cuasi-equilibrio si x es factible, $p \in \mathbb{R}^m_+$ y, para todo $i = 1, ..., n$, $p \cdot x'_i \geq p \cdot x_i$ siempre que $x'_i \succcurlyeq_i x_i$.*

La definición de cuasi-equilibrio es idéntica a la definición de equilibrio, excepto en la condición de maximización de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria. En la definición de cuasiequilibrio, las desigualdades $x'_i \succ_i x_i$ y $p \cdot x'_i > p \cdot x_i$ son reemplazadas por $x'_i \succcurlyeq_i x_i$ y $p \cdot x'_i \geq p \cdot x_i$ respectivamente, ver por ejemplo el trabajo de Mas-Colell (1985).

5.2. El problema de maximización de la función de bienestar social

Para demostrar la existencia de un cuasi-equilibrio demostraremos primero que la asignación x de cuasi-equilibrio es un punto que maximiza una función de bienestar social definida como una combinación lineal de las funciones de utilidad de los agentes.

La siguiente definición es una construcción auxiliar que será de utilidad para determinar las condiciones que debe satisfacer una asignación del del conjunto de contrato de tal forma que ésta sea, a su vez, una asignación de cuasi-equilibrio.

Definición 5.2.1 (Función de bienestar social) *Sean $u_i(x_i)$ funciones supermodulares que representan la utilidad de los agentes $i = 1, \ldots, n$. Se define la función de bienestar social (FBS) $W : X^n \times \Delta_n \to \mathbb{R}$ como:*

$$W(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i).$$

En donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pertenece al simplex $n-$dimensional Δ_n.

Llamaremos a x un punto máximo de bienestar si es un maximizador de W sujeta a la restricción de bienes disponibles w, formalmente:

Definición 5.2.2 (Punto máximo de bienestar) *Dado $\lambda \in \Delta_n$, decimos que la asignación x es un punto máximo de bienestar si resuelve el problema de maximización:*

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Llamaremos a este problema, el problema de maximización de la función de bienestar (PMFB).

5.2.1. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

El problema de optimización que acabamos de plantear es un problema de maximización de la función de bienestar W sujeta al conjunto de bienes disponibles, el planteamiento para funciones continuas puede encontrarse en el trabajo de Negishi (1960), Varian (1992) y Accinelli (1996). Cada solución del problema corresponde a un óptimo de Pareto ya que dicha asignación maximiza la utilidad de los agentes al mismo tiempo que el conjunto de restricciones garantizan la factibilidad de la solución.

El problema en términos del lagrangiano es una versión del teorema de Karush-Kuhn-Tucker cuando las funciones son derivables, sin embargo, dado que las funciones de utilidad u_i no poseen esta propiedad, enunciamos una versión más general dada por Berge y Ghouila-Houri (1965) sobre las condiciones necesarias y suficientes para la solución del problema en las que no es necesaria la derivabilidad de las funciones, para la prueba, seguiremos el procedimiento de Madden (1987) .

Lema 5.2.1 (Karush-Kuhn-Tucker para funciones supermodulares) *Sean $u_1, \ldots, u_n, g_1, \ldots, g_m$ (con $g_j(x) = \sum_{i=1}^n w_{ij} - \sum_{i=1}^n x_{ij}$) funciones supermodulares en el retículo X. Si existe por lo menos un punto x que verifique las restricciones $g_j(x) \neq 0$ para toda $j = 1, \ldots, m$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un punto x que maximiza $W(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x_i)$ y verifica $g_j(x) \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$*

2. *Si $p = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0, x \in X$ y $\phi(x, p) = W(x, \lambda) + p \cdot g(x)$. Entonces existen (x^*, p^*) tales que*

$$\phi(x, p^*) \leq \phi(x^*, p^*) \leq \phi(x^*, p)$$

Siempre que $g_j(x) \geq 0$ y $p_j g_j(x) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

3. *Si además, las funciones $u_i, g_1, \ldots, g_m$ exhiben diferencias crecientes, las afirmaciones anteriores son equivalentes a:*

$$\nabla_{\mathbb{N}}\phi(x^*, p^*) = 0$$

Siempre que $g_j(x) \geq 0$ y $p_j g_j(x) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Probaremos que $\phi(x, p)$ tiene un punto de silla y por lo tanto, que la función $W(x)$ tiene un máximo, esto es, existe x que resuelve el problema de maximización de W sujeto a las restricciones $g_j(x)$. Si esto es así, entonces $u(x) \in UP$. En este caso la función objetivo es W, el conjunto de restricciones son de la forma $g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq 0$ y el lagrangiano $\phi(x, p)$ asociado a este problema es:

$$\phi(x, p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} w_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right] \tag{5.1}$$

en donde los p_j son los multiplicadores de Lagrange.

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Si (x^*, p^*) es un punto de silla de $\phi(x, p)$ se tiene, por definición:

$$\phi(x, p^*) \leq \phi(x^*, p^*).$$

Luego, x^* es un máximo de $\phi(x, p)$.
Por la definición de lagrangiano, la desigualdad $\phi(x^*, p^*) \leq \phi(x^*, p)$ significa que, para $p \geq 0$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^*) + p^* \cdot g(x^*) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^*) + p \cdot g(x^*),$$

o bien, para cada $j = 1, \ldots, m$

$$\sum_{j=1}^{m} (p_j - p_j^*) g_j(x^*) \geq 0. \tag{5.2}$$

Si $g_j(x^*)$ fuera negativo, es decir $g_j(x^*) < 0$, podríamos elegir un p_j tal que $(p_j - p_j^*) g_j(x^*) < 0$, pero esto contradice (5.2). Por lo tanto, $g_j(x^*) \geq 0$.

Supongamos ahora que $p_j = 0$, entonces, de (5.2) se tiene

$$\sum_{j=1}^{m} (0 - p_j^*) g_j(x^*) \geq 0.$$

o de forma equivalente

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^* g_j(x^*) \leq 0. \tag{5.3}$$

Por otro lado, como $p^* \geq 0$ y $g_j(x) \geq 0$, se cumple que

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^* g_j(x^*) \geq 0. \tag{5.4}$$

Las expresiones (5.3) y (5.4) implican

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^* g_j(x^*) = 0. \tag{5.5}$$

Puesto que en todas las componentes $p_j^* g_j(x^*), g_j(x) \geq 0, p_j \geq 0$ y por (5.5), se sigue que $p_j^* g_j(x^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

1)$\Rightarrow$ 2) Demostraremos que (x^*, p^*) es un punto de silla. Como x^* es un máximo esto significa, por un lado, que para todo $x \in X$ se cumple:

$$\phi(x, p^*) \leq \phi(x^*, p^*) \tag{5.6}$$

o bien
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) + p^* \cdot g(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^*) + p^* \cdot g(x^*).$$
Ahora bien, como $p^* \cdot g(x^*) = 0$, se tiene
$$\phi(x^*, p^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^*).$$

Además $g_j(x^*) \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$, por lo que $p_j g_j(x^*) \geq 0$ para toda $p_j \geq 0$. Entonces
$$\phi(x^*, p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^*) + p \cdot g(x^*) = \phi(x^*, p^*) + p \cdot g(x^*) \geq \phi(x^*, p^*). \quad (5.7)$$

De (5.6) y (5.7) se tienen las siguientes desigualdades:
$$\phi(x, p^*) \leq \phi(x^*, p^*)$$
y
$$\phi(x^*, p^*) \leq \phi(x^*, p)$$
o bien,
$$\phi(x, p^*) \leq \phi(x^*, p^*) \leq \phi(x^*, p).$$

1) y 2) $\Rightarrow$ 3 Por hipótesis, $u_1, \ldots, u_n$ son supermodulares, luego, por el lema (3.3.1), las funciones$\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n$ también lo son, es decir
$$W(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i)$$
y $\phi(x, p)$ son supermodulares. En donde $x \geq 0$ son las variables maximizadoras y $p \geq 0$ las variables minimizadoras, esto último es así porque podemos

reescribir $\phi(x,p)$ de la siguiente manera

$$\phi(x,p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} w_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i) - \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \right].$$

Esto implica que $\phi(x,p)$ exhibe diferencias crecientes en x. Por lo tanto, como x es un máximo tenemos:

$$\nabla_{\mathbb{N}} \phi(x^*, p^*) = 0.$$

■

La siguiente proposición es la versión discreta del teorema 2 de Negishi (1960).

Proposición 5.2.1 *Sean $u_1, \ldots, u_n$ funciones supermodulares. Entonces, un punto máximo de bienestar de W es un punto de silla de*

$$\phi(x,p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} w_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right].$$

Demostración. Observemos que si $x_i = 0$, entonces $g_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \geq 0$ y se cumple la condición requerida por el lema (5.2.1), es decir, $\phi(x,p)$ tiene un punto de silla y a su vez, existe un punto máximo de bienestar para W.

■

Analizamos a continuación las condiciones de un máximo x en términos de hiperplanos de soporte. La existencia de un hiperplano de soporte no es trivial cuando las funciones no tienen la propiedad de supermodularidad, de hecho, es posible construir funciones cuyas extensiones cóncavas y convexas que no cumplan esta condición. Sin embargo, si la función f es submodular y g es supermodular se tiene el siguiente resultado:

Lema 5.2.2 (Teorema de separación discreta de A. Frank) . *Sean f :*

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones submodulares y supermodulares respectivamente con* $f(0) = g(0) = 0$. *Si*

$$f(x) \geq g(x)$$

para todo x. *Entonces existe* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *tal que, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq x^* \geq g(x)$$

Más aún, si f *y* g *toman valores enteros, el vector* x^* *puede elegirse para que tome valores enteros.*

Demostración. Ver Murota (2003).

Definiremos la ecuación del hiperplano que pasa por un punto x y es ortogonal al vector $p \in \mathbb{R}^m$ en x como

$$p \cdot (x - w) = 0.$$

Por otro lado, si x es un punto que pertenece al dominio de la función W, el hiperplano

$$\nabla_{\mathbb{N}} u(x) \cdot (x - w) = 0.$$

debe separar al conjunto de valores de W en el punto x, es decir, los valores de W se encuentran en en lado del hiperplano, aquí el vector normal a W en el punto x es $\nabla_{\mathbb{N}} u(x)$. Las siguientes figuras describen las ideas anteriores

Cuando el agente i se encuentra maximizando su función de utilidad, la asignación x debe encontrarse en un punto tal que el conjunto de indiferencia es soportado por el hiperplano

$$p \cdot (x - w) = 0.$$

En x, los vectores normales $\nabla_{\mathbb{N}} u(x)$ y p deben apuntar en la misma dirección,

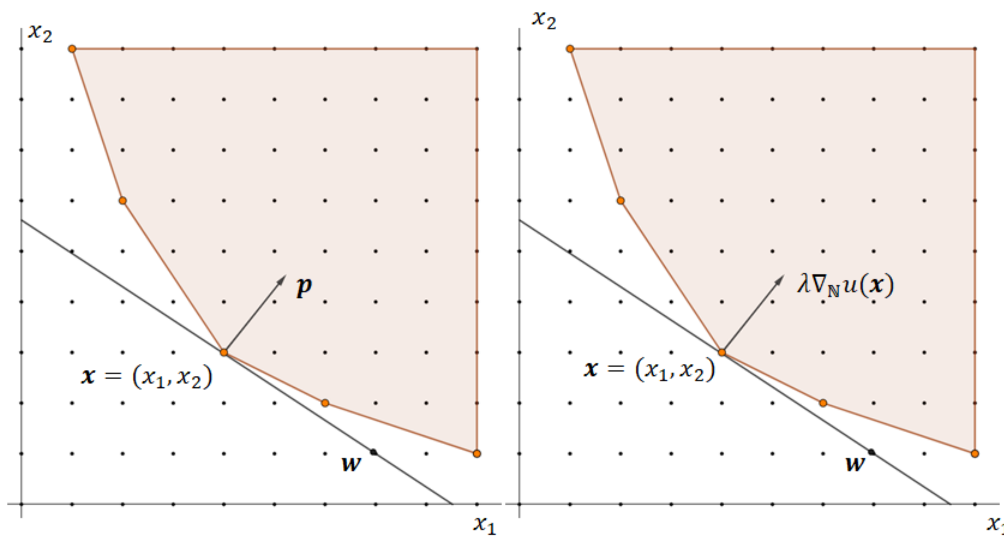

Figura 5.2: Vectores de soporte $\nabla_{\mathbb{N}}u(x)$ y p.

es decir, debe de cumplirse que

$$\lambda\nabla_{\mathbb{N}}u(x) = p,$$

para algún $\lambda > 0$. Es importante notar que es posible deducir las condiciones de primer orden del (PMBS) sin la necesidad de exigir derivabilidad ni continuidad a la función W.

5.2.2. La función de exceso de utilidad

Probaremos ahora que existe un elemento $\lambda \in \Delta_n$ asociado a un punto máximo de bienestar el cual satisface las condiciones de cuaisi-equilibrio mediante la definición de las funciones de exceso de utilidad.

Definición 5.2.3 (Ponderadores de soporte) *Diremos que el conjunto U es soportado por el vector de ponderadores $\lambda \in \Delta_n$ en el punto $\bar{u} \in U$*

si $\bar{u}(x)$ es una solución del problema

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

La definición anterior relaciona el concepto de vector de soporte, asignación en el conjunto de contrato y solución del problema de maximización de W de la siguiente manera: el punto x que maximiza a W es una asignación en el conjunto de contrato que satisface $u(x) \in UP$ y, como vimos, tal x tiene asociado un vector $\lambda \in \Delta_n$. La siguiente figura ilustra el argumento anterior.

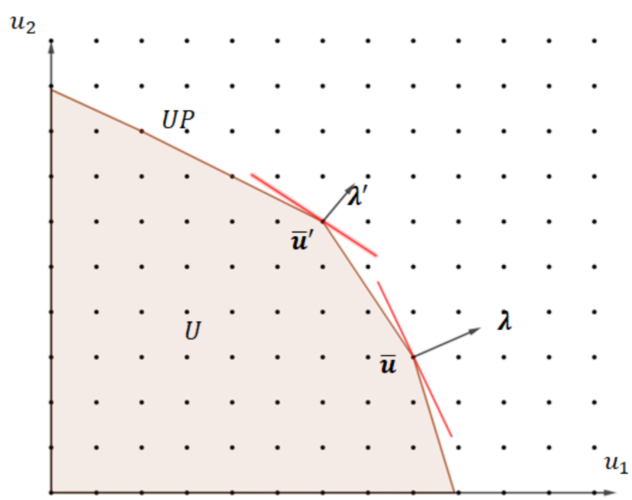

Figura 5.3: Los vectores de soporte λ y λ'.

Consideremos el caso en el que $u_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función supermodular con un único maximizador x_i^*. Entonces, existe un conjunto de hiperplanos Q (rectas en este caso) de soporte en $u_i(x_i^*)$ como se muestra en la siguiente figura:

En el caso general, se tiene la siguiente definición:

Definición 5.2.4 (Subgradiente) *Sea $u_i : X \to \mathbb{R}$ una función supermodular. Decimos que el vector $q \in \mathbb{R}^m$ es un subgradiente de u_i en el punto x_i*

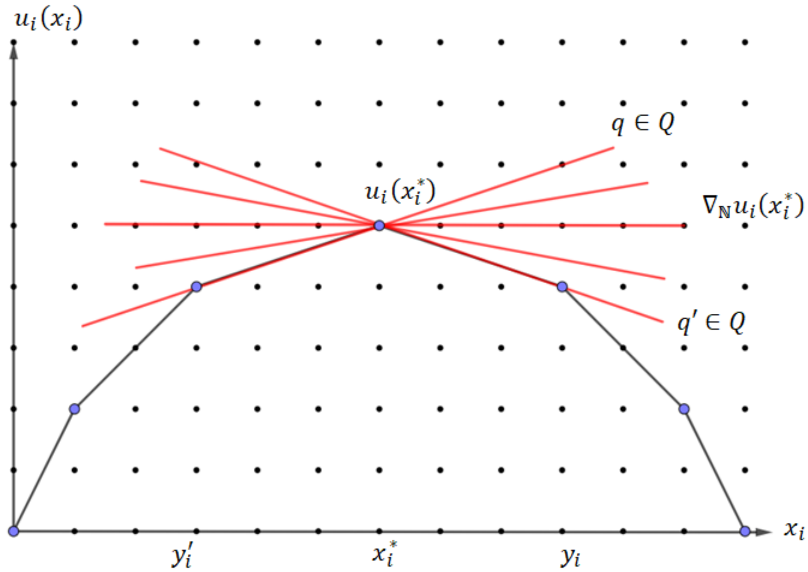

Figura 5.4: Hiperplanos de soporte q para la función u_i.

si

$$u_i(y_i) - u_i(x_i) \leq q(y_i - x_i)$$

para todo $y_i \in X$. *Una función es diferenciable en* x_i *si existe un único subgradiente en* x_i.

Observemos que el vector $\nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*)$ de la Figura 5.4 es un elemento del conjunto de todos los subgradientes de la función u_i, es decir $\nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*) \in Q$.

Tenemos entonces dos tipos de vector de soporte; el soporte de precios $p \in \mathbb{R}^m_+$ para una asignación $x_i \in X$ y el soporte de ponderadores $\lambda \in \Delta_n$ del conjunto de posibilidades de utilidad U. La conexión entre ambos tipos de soporte es proporcionado por la siguiente definición:

Definición 5.2.5 (Vectores de soporte) *Los vectores* $p \in \mathbb{R}^m_+$ *y* $\lambda \in \Delta_n$ *soportan la asignación factible* x *si:*

$$p \cdot (y_i - x_i) \geq \lambda_i [u_i(y_i) - u_i(x_i)] \tag{5.8}$$

para todo $i = 1, ..., n$ y $y_i \in X$.

Si $\lambda_i > 0$, entonces la desigualdad (5.8) puede reescribirse como

$$\frac{p}{\lambda_i} \cdot (y_i - x_i) \geq [u_i(y_i) - u_i(x_i)] \tag{5.9}$$

Esto es, (5.9) coincide con la definición de subgradiente. Un resultado importante que se obtiene al caracterizar las soluciones de cuasiequilibrio en términos de vectores de soporte es que nos permite asociar a λ y p con las condiciones de KKT. En este caso, el vector p juega el papel de los multiplicadores de Lagrange, es decir, para cada $i = 1, ..., n$

$$\lambda_i \nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*) = p.$$

La relación entre una asignación de cuasi-equilibrio x^*, las condiciones de KKT, el vector de precios de soporte $p \in \mathbb{R}_+^m$ y el vector de soporte $\lambda \in \Delta_n$ de U se enuncia a continuación.

Proposición 5.2.2 *Sean $u_i : X \to \mathbb{R}$ funciones supermodulares con $i = 1, ..., n$ se tiene que:*

1. *Si (x^*, p) es un cuasi-equilibrio, entonces, para algún $\lambda \in \Delta_n$ las condiciones de KKT se satisfacen.*
2. *Si las condiciones de KKT se satisfacen con respecto a λ y p, entonces (x^*, p) es un cuasi-equilibrio, x^* es una asignación soportada por p y $u(x^*)$ es soportada por λ.*

Demostración. 1. Por la definición de cuasi-equilibrio, la asignación x^* y el vector de precios p resuelven el problema $\max u_i(x_i)$ s.a. $p \cdot x_i \leq p \cdot w_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces, se tiene que:

$$\nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*) = \gamma_i p$$

para algún $\gamma_i > 0$. Haciendo $\lambda_i = 1/\gamma_i$ obtenemos

$$\lambda_i \nabla u_i(x_i^*) = p. \tag{5.10}$$

Esto es, si

$$(x^*, p)$$

es un cuasi-equilibrio, existen $\lambda_i > 0$ tales que las condiciones de KKT se satisfacen.

2. Puesto que las condiciones de KKT se satisfacen para algunos λ y p, se tiene que se cumple (5.10). Multiplicando ambos miembros de la igualdad por x_i^* obtenemos

$$\lambda_i \nabla u_i(x_i^*) \cdot x_i^* = p \cdot x_i^*. \tag{5.11}$$

Demostraremos que si existe otra asignación y tal que $y_i \succcurlyeq x_i^*$ debe ocurrir que $p \cdot y_i \geq p \cdot x_i^*$. En efecto, multiplicando $y_i \succcurlyeq x_i^*$ por (5.10) e igualando con (5.11)

$$p \cdot y_i \geq \lambda_i \nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*) \cdot x_i^* = p \cdot x_i^*$$

En consecuencia,

$$p \cdot y_i \geq p \cdot x_i^*.$$

Ahora bien, el cumplimiento de las condiciones de KKT implica que x^* es una solución al problema de maximización del lema (5.2.1). Además, como u_i es supermodular para cada $i = 1, ..., n$ se tiene la siguiente relación de orden:

$$p \cdot (y_i - x_i^*) = \lambda_i \nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*)[y_i - x_i^*] \geq \lambda_i [u_i(y_i) - u_i(x_i^*)].$$

La igualdad se sigue al multiplicar por $(y_i - x_i^*)$ las condiciones de primer orden, por otro lado, la desigualdad se sigue de la definición de subgradiente de una función supermodular, por lo tanto:

$$p \cdot (y_i - x_i^*) \geq \lambda_i[u_i(y_i) - u_i(x_i^*)].$$

Es decir, (λ, p) son vectores de soporte. ■

Una manera de establecer la conexión entre el conjunto de contrato y un cuasi-equilibrio es a través del primer teorema fundamental del bienestar, este nos dice que las asignaciones de cuasi-equilibrio son aquellas x, que además de satisfacer $u(x) \in UP$, cumplen una condición adicional: existe un vector de precios $p > 0$ tal que, para cada uno de los agentes $i = 1, ..., n$, el valor de la asignación x_i a los precios p, no excede el valor de sus dotaciones iniciales, es decir, $x_i \cdot p \leq w_i \cdot p$, o bien

$$p \cdot (x_i - w_i) \leq 0.$$

Entonces, podemos construir una función $h(x)$ tal que para cada x con $u(x) \in UP$

$$h(x) = [p \cdot (x_1 - w_1), \ldots, p \cdot (x_n - w_n)] = 0.$$

Por lo tanto, una asignación x^* será una asignación de cuasi-equilibrio si, además de satisfacer $u(x^*) \in UP$, satisface también $h(x^*) = 0$. De esta manera, podemos asociar un cuasi-equilibrio competitivo con los ceros de un sistema de ecuaciones generado por la función $h(x)$. Haciendo $\delta_i = 1/\lambda_i$, la condición de cuasi-equilibrio que necesitamos puede escribirse:

$$\lambda_i \nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i^*)(x_i^* - w_i) = p \cdot (x_i^* - w_i) \leq 0.$$

Tenemos así, la siguiente definición:

Definición 5.2.6 (Función de exceso de utilidad) *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *una solución al PMFB. Se define la función de exceso de utilidad del agente* *i como*

$$e(x_i) = \nabla_{\mathbb{N}} u_i(x_i)(x_i - w_i).$$

La interpretación de la función de exceso de utilidad en términos de los precios es que, para cada $i \in I$, existe un vector de precios p que soporta la asignación x^* en el sentido de que, si el agente i prefiere x_i a x_i^* entonces $p \cdot x_i >_i p \cdot x_i^*$, o bien, $e(x_i) > e(x_i^*)$. La Figura 5.5 ilustra este punto.

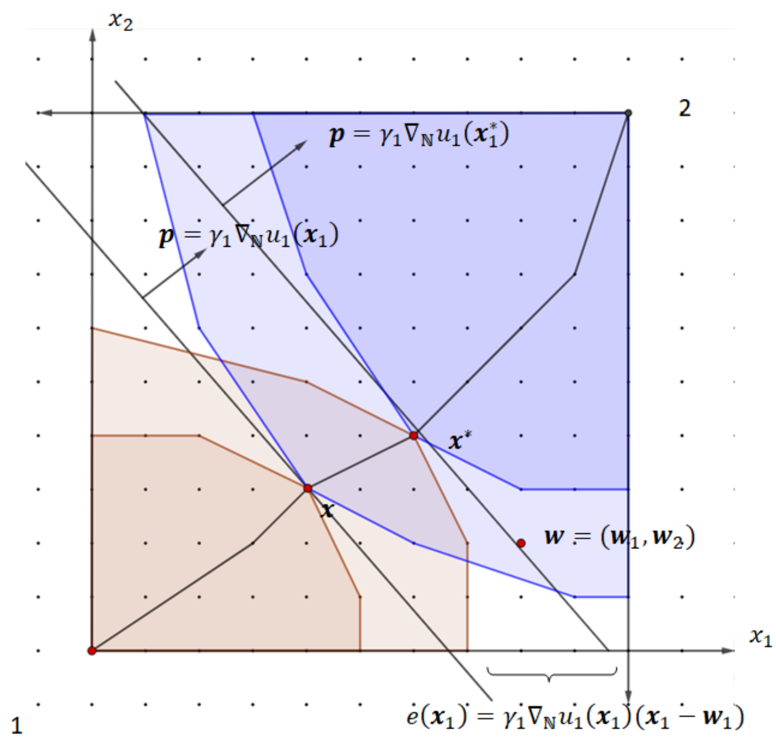

Figura 5.5: La función de exceso de utilidad y el vector de precios.

5.3. Puntos fijos sobre retículos

La teoría de punto fijo ha demostrado desde sus inicios que las soluciones a ciertos problemas importantes podían estudiarse definiendo un conjunto X

y una función f que va de X en X, de tal manera que las soluciones correspondieran a los puntos fijos de la función f, es decir, a los puntos $x \in X$ tal que $f(x) = x$, más detalles históricos pueden encontrarse en el texto de James (1999). Una aplicación interesante de la teoría de punto fijo es la prueba de existencia de un equilibrio competitivo, ver, por ejemplo, el trabajo de Arrow y Debreu (1954) y Negishi (1960).

Dos importantes teoremas de punto fijo y sus versiones discretas se enuncian a continuación siguiendo a Granas y Dugundji (2003). Con excepción del teorema de punto fijo de Tarski, omitimos las demostraciones de estos teoremas pues requieren definiciones y resultados que nos alejarían de nuestro objetivo, sin embargo, estas se pueden consultar en los trabajos de Granas y Dugundji (2003), Scarf (1983) y Zhou (1994):

Teorema 5.3.1 (Teorema de punto fijo de Brouwer) *Sea X un conjunto compacto y convexo y $f : X \to X$ una función continua. Entonces existe $x \in X$ tal que $x = f(x)$.*

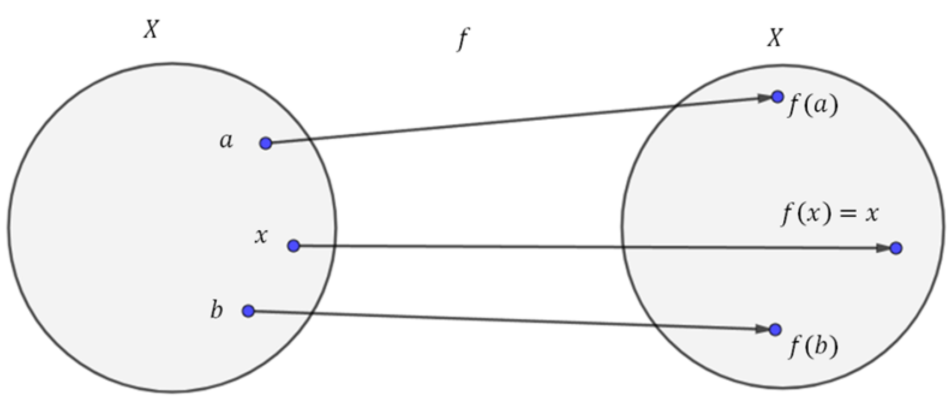

Figura 5.6: Teorema de punto fijo de Brouwer.

El teorema de punto fijo de Kakutani es una generalización del de Brouwer cuando f es una correspondencia, es decir, en el caso en el que $f : X \to P(X)$.

Teorema 5.3.2 (Teorema de punto fijo de Kakutani) *Sea X un conjunto compacto y convexo y $f : X \to P(X)$ una correspondencia convexa y superiormente semicontinua tal que para todo $x \in X$, $f(x) \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.*

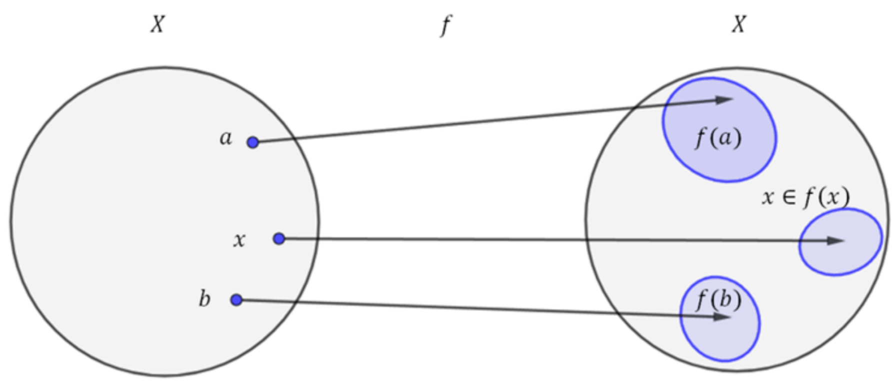

Figura 5.7: Teorema de punto fijo de Kakutani.

Las versiones discretas, esto es, los teoremas de punto fijo análogos en el caso en el que X es un retículo son los teoremas de punto fijo de Tarski y de Zhou

Teorema 5.3.3 (Teorema de punto fijo de Tarski) *Sea $(X, \geq)$ un retículo completo, $f(x)$ una función no decreciente de X en X y ψ el conjunto de puntos fijos de $f(x)$. Entonces, ψ es no vacío y ψ es un retículo completo.*

Teorema 5.3.4 (Teorema de punto fijo de Zhou) *Sea $(X, \geq)$ un retículo completo, $f(x)$ una correspondencia creciente de X en X, y ψ el conjunto de puntos fijos de $f(x)$. Si $f(x)$ es un subretículo cerrado no vacio de X para cada $x \in X$, entonces ψ es un retículo completo no vacío.*

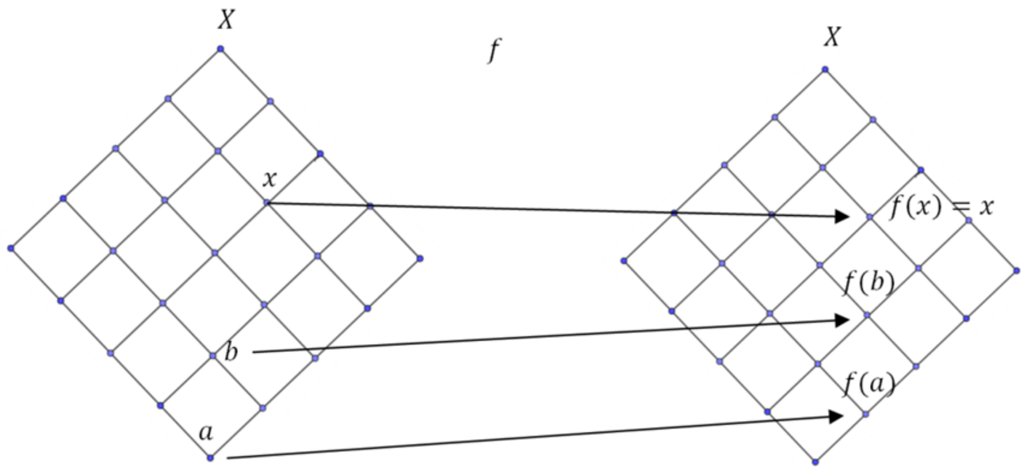

Figura 5.8: Teorema de punto fijo de Tarski.

5.4. Las condiciones de cuasi-equilibrio

La idea de la construcción que a continuación se presenta es como sigue: El conjunto de asignaciones que maximizan la función de bienestar son asignaciones en el conjunto de contrato y maximizan las funciones de utilidad de cada agente. Para que x sea una asignación de cuasi-equilibrio es necesario, por definición, que se satisfaga el sistema

$$p \cdot (x_i - w_i) = 0,$$

para todo $i = 1, ..., n$. Podemos, sin embargo, reformular este sistema como una función $h : X^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(x) = [p \cdot (x_1 - w_1), \ldots, p \cdot (x_i - w_i), \ldots, p \cdot (x_n - w_n)] = 0.$$

Entonces, x es una asignación de cuasi-equilibrio si $h(x) = 0$. Esta función puede reescribirse como una ecuación de punto fijo como sigue:

$$h_1(x) = p \cdot (x_1 - w_1) = \epsilon_1$$

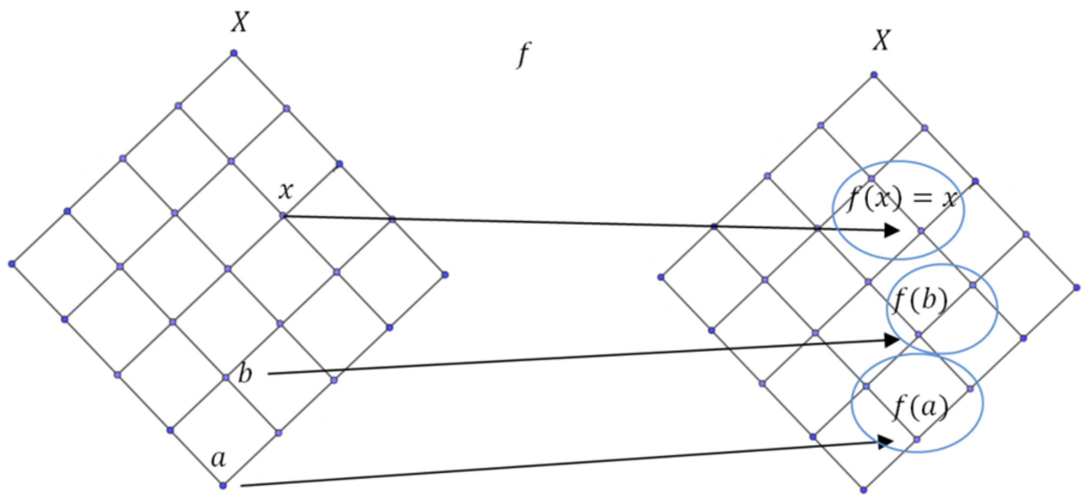

Figura 5.9: Teorema de punto fijo de Zhou.

$$\vdots$$

$$h_n(x) = p \cdot (x_n - w_n) = \epsilon_n$$

Donde los $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son números reales, es decir $h_i : X \to \mathbb{R}$. La interpretación de h_i es que para una asignación arbitraria, el valor de la asignación puede exceder (si $\epsilon_i > 0$), no exceder (si $\epsilon_i < 0$) o ser igual (si $\epsilon_i = 0$) al valor de las dotaciones iniciales, en otras palabras, puede o no satisfacer la restricción presupuestaria del agente $i-$ésimo. Entonces, cuando x es una asignación de cuasi-equilibrio, la función $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x))$ satisface:

$$h(x) = 0. \tag{5.12}$$

Sea ahora

$$g(x) = x - h(x).$$

Siguiendo el trabajo de Dold (1984) la ecuación (5.12) es equivalente a la ecuación de punto fijo $g(x) = x$ (En adelante, llamaremos a (5.12) sistema de ecuaciones de equilibrio). De esta manera, $g(x)$ tiene un punto fijo si $h(x) = 0$, lo que significa que todas las restricciones presupuestarias se satisfacen de manera simultánea y, por lo tanto,x es una asignación de cuasi-equilibrio.

Para demostrar que $g(x)$ tiene un punto fijo necesitamos verificar que se satisfacen las condiciones del teorema de Tarski, es decir, $g : P(X) \to P(X)$ es no decreciente.

5.4.1. Construcción de la función $g(x)$

Definición 5.4.1 *Sean M y N dos pre-asignaciones en $P(X)$, decimos que $M \succcurlyeq N$ si:*

1. $u_i(x_i^M) > u_i(x_i^N)$ *o* $u_i(x_i^M) = u_i(x_i^N)$ *para todo* $i = 1, ..., n$
2. $p \cdot x_i^N < p \cdot x_i^M$
3. $p \cdot (w_i - x_i^N) < p' \cdot (w_i - x_i^M)$, *para algunos* $p, p' \in \mathbb{R}_+^m$

El conjunto de pre-asignaciones $P(X)$ y la relación de orden $\succcurlyeq$ forman un retículo si las operaciones $M \wedge N$ y $M \vee N$ están definidas, lo cual hacemos a continuación:

Definición 5.4.2 *Sean M, N en $P(X)$ y sea $\succcurlyeq$ la relación de orden de la definición (5.4.1). Se definen $\alpha = M \vee N$ y $\beta = M \wedge N$ como:*

i) $\alpha_i = x_i^M$ *si* $u(x_i^M) > u(x_i^N), \alpha_i = u(x_i^N)$ *en otro caso*

ii) $\beta_i = x_i^M$ *si* $u(x_i^M) < u(x_i^N), \beta_i = u(x_i^N)$ *en otro caso*

Las operaciones $M \wedge N$ y $M \vee N$ están bien definidas, luego $(P(X), \succcurlyeq)$ es un retículo.

Definición 5.4.3 *Sea M una pre-asignación en $P(X)$. Se define la función $g : P(X) \to P(X)$ como:*

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 + \text{máx}\{0, (|h_1(x_1)|, ..., 0)\} \\ \vdots \\ x_n + \text{máx}\{0, (0, ..., |h_n(x_n)|)\} \end{pmatrix}$$

en donde $|h_i(x_i)| = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \epsilon_i \leq k\}$ satisface:

a) $h_i(x_i) = 0$ *si* $p \cdot x_i = p \cdot w_i$

b) $h_i(x_i) < 0$ *si* $p \cdot x_i < p \cdot w_i$.

En notación abreviada

$$g(M) = M - |h(M)|$$

con $|h(M)| = (|h_1(M)|, \dots, |h_i(M)|, \dots, |h_n(M)|)$.

5.5. El teorema de existencia

Proposición 5.5.1 *Sea $(P(X), \succcurlyeq)$ un retículo y $g : P(X) \to P(X)$ una función definida como*

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 + \text{máx}\{0, (|h_1(x_1)|, ..., 0)\} \\ \vdots \\ x_n + \text{máx}\{0, (0, ..., |h_n(x_n)|)\} \end{pmatrix}.$$

Entonces, existe $x \in P(X)$ tal que $g(x) = x$. Más aún, x es una asignación de cuasi-equilibrio.

Demostración. Para la demostración de la primera parte utilizaremos el teorema de punto fijo de Tarski.
Puesto que $(P(X), \succcurlyeq)$ es un retículo y $g : P(X) \to P(X)$, será suficiente

demostrar que g es no decreciente, es decir, si M y N son dos pre-asignaciones en $P(X)$ tal que $M \succcurlyeq N$, debemos demostrar que

$$g(M) \geq g(N).$$

Por la definición (5.4.1), si $M \succcurlyeq N$ entonces:

$u(x_i^M) > u(x_i^N)$ o $u(x_i^M) = u(x_i^N)$ para todo $i = 1, ..., n$, es decir, cada uno de los agentes prefiere x_i^M a x_i^N o es indiferente entre x_i^M y x_i^N , por lo tanto:

$$x_1^M \succcurlyeq x_1^N$$
$$\vdots$$
$$x_n^M \succcurlyeq x_n^N$$

Para analizar el comportamiento de $h_i(x_i^N)$ y $h_i(x_i^M)$ consideremos los siguientes casos:

1.$h_i(x_i^N) < 0$ y $h_i(x_i^M) < 0$.

Entonces

$$\text{máx}\{0, (0, ..., |h_i(x_i^N)|, \ldots, 0)\} = 0$$

y

$$\text{máx}\{0, (0, ..., |h_i(x_i^M)|, \ldots, 0)\} = 0,$$

o bien:

$$h_i(x_i^N) = h_i(x_i^M) = 0.$$

2. $h_i(x_i^N) < 0$ y $h_i(x_i^M) > 0$.

Reordenando las desigualdades tenemos:

$$h_i(x_i^N) < 0 < h_i(x_i^M)$$

$$h_i(x_i^N) < h_i(x_i^M).$$

3. $h_i(x_i^N) > 0$ y $h_i(x_i^M) > 0$.

En este caso, se tiene que $p \cdot x_i^N < p \cdot x_i^M$ y, por lo tanto

$$h_i(x_i^N) \leq h_i(x_i^M).$$

En cada caso observamos que siempre se cumple que $h_i(x_i^N) \leq h_i(x_i^M)$. Así, si $M \succcurlyeq N$, para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$x_i^M + \max\{0, (0, \ldots, |h_i(x_i^M)|, ..., 0)\} \geq x_i^N + \max\{0, (0, \ldots, |h_i(x_i^N)|, ..., 0)\}.$$

Entonces:

$$g(M) = \begin{pmatrix} x_1^M + \max\{0, (|h_1(x_1^M)|, ..., 0)\} \\ \vdots \\ x_n^M + \max\{0, (0, ..., |h_n(x_n^M)|)\} \end{pmatrix} \geq$$

$$\begin{pmatrix} x_1^N + \max\{0, (|h_1(x_1^N)|, ..., 0)\} \\ \vdots \\ x_n^N + \max\{0, (0, ..., |h_n(x_n^N)|)\} \end{pmatrix} = g(N)$$

Por lo tanto, $g : P(X) \to P(X)$ es no decreciente.

Demostraremos a continuación que x es una asignación de cuasi-equilibrio.

La pre-asignación x tal que $h(x) = 0$, es una asignación factible. Para demostrarlo, supongamos que no lo es. Si x no es factible significa que el total de bienes no fueron asignados, esto quiere decir que $h_i(x_i) \leq 0$ con $i = 1, ..., n$ y $h_j(x_j) < 0$ para algún j con $j \neq i$. Pero esto contradice el hecho de que x es un punto fijo. Luego,x es una asignación factible.

La pre-asignación x es una asignación de cuasi-equilibrio. Supongamos lo contrario. Esto significa que existe al menos un agente, digamos j tal que $p \cdot x_j > p \cdot w_j$. Pero nuevamente, esto significa que $h_j(x_j) < 0$. Lo cual contradice la hipótesis de que x es un punto fijo de $h(x)$.

■

Ejemplo 5.5.1 *Consideremos nuevamente el ejemplo (4.2.1). Sean* $u_1(x_1) = \sqrt{x_{11}x_{12}}$ *y* $u_2(x_2) = \sqrt{x_{21}x_{22}}$ *con* $w_1 = (6, 2)$ *y* $w_2 = (4, 10)$. *Para las pre-asignaciones* $x^M = \{(3, 4), (5, 8)\}, x^N = \{(5, 4), (6, 8)\}$, *y los precios de soporte* $p = (1/2, 1/2)$ *se tiene*

$$g(M) = \begin{pmatrix} (3,4) + \text{máx}\{0, (|h_1(3,4)|, 0)\} \\ (5,8) + \text{máx}\{0, (0, |h_2(5,8)|)\} \end{pmatrix} = ((2,4), (5,7))$$

y

$$g(N) = \begin{pmatrix} (5,4) + \text{máx}\{0, (|h_1(5,4)|, 0)\} \\ (6,8) + \text{máx}\{0, (0, |h_2(6,8)|)\} \end{pmatrix} = ((6,4), (6,8))$$

Observemos que $g(x)$ es no decreciente pero tanto M como N no son puntos fijos.

El punto fijo $x^* = \{(4, 4), (6, 8)\}$ satisface:

$$g(x^*) = \begin{pmatrix} (4,4) + \text{máx}\{0, (|h_1(4,4)|, 0)\} \\ (6,8) + \text{máx}\{0, (0, |h_2(6,8)|)\} \end{pmatrix} = ((4,4), (6,8)).$$

Esto significa que

$$h_1(x_1^*) = 0$$

y

$$h_2(x_2^*) = 0$$

Luego, x^* *es una asignación de cuasi-equilibrio.*

Capítulo 6

Comentarios finales

En este trabajo analizamos la existencia de un cuasi-equilibrio competitivo en una economía de intercambio de un conjunto finito de bienes indivisibles, los cuales se asignan a n agentes. Las asignaciones individualmente racionales y la construcción de su envolvente convexa fueron determinantes para la demostración de la existencia del conjunto de contrato $C(X)$.

La prueba de la existencia del núcleo proporcionada por Shapley (1972) y requiere de una generalización del teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz el cual es un resultado sobre la intersección de conjuntos convexos y proporciona condiciones para garantizar cuándo esta intersección es no vacía. Por lo tanto, queda abierta la cuestión sobre la existencia de un resultado análogo aplicando el teorema de Doignon-Bell-Scarf para el caso de bienes indivisibles.

La propiedad de supermodularidad de las funciones de utilidad de los agentes proporcionó una caracterización de las asignaciones en el conjunto de contrato como vectores de utilidad en la frontera de Pareto. Si bien la caracterización de $C(X)$ como la intersección de conjuntos convexos que contienen puntos de retículo representó un primer paso para un objetivo más general, el de la demostración de la existencia de un cuasi-equilibrio competitivo, la prueba puede considerarse como una condición suficiente para la existencia de una solución al problema general de asignación.

El enfoque de Negishi permitió aplicar los métodos de optimización discreta para la prueba existencia de un cuasi-equilibrio y de esta forma permitir aplicar el teorema de punto fijo de Tarski.

Finalmente, hemos supuesto que todos los agentes tienen preferencias que pueden ser representadas por funciones de utilidad que tienen la propiedad de ser supermodulares. Relajar este último supuesto abriría un nuevo conjunto de preguntas sobre la existencia de una solución.

Anexo A

Demostración del lema 3.2.1 La demostración sigue el trabajo de Schrijver (1998) y Bell (1977) . Sean $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ y $C = H_1(C_1) \cap \ldots \cap H_n(C_n)$. Demostraremos que la región C contiene al menos un punto $x \in \mathbb{N}^m$.

Supongamos que cada uno de los $H_i(C_i)$ está formada por restricciones lineales y consideremos cada una de las restricciones $H_i(C_i)$. Si $H_i(C_i)$ no excluye ningún punto de retículo de $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ que no esté excluido por otras restricciones, puede descartarse. De lo contrario, podemos trasladar lo más lejos posible sin incluir un punto del retículo en el interior de $H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$, llamemos a esta restricción C_i'. Necesariamente, algún punto $x \in \mathbb{N}^m$ se encuentra en C_i' pero no en $C_1', C_2', \ldots, C_{i-1}', C_{i+1}', \ldots, C_n'$. Después de examinar todas las restricciones de esta manera, suponga que tenemos 2^{h+c} puntos del retículo con $c \in \mathbb{N}$ y consideremos su envolvente convexa.

Por construcción, toda la envolvente convexa, excepto solo los puntos 2^{n+c} puntos del retículo, se encuentran en el interior de C' (el nuevo C). También por construcción, C' no contiene ningún punto de retículo en su interior. Pero si $c \geq 1$, entonces al menos dos de los puntos del retículo deben diferir en un número par en cada coordenada, ya que solo hay 2^h posibles coordenadas. Su punto medio, nuevamente un punto del retículo, está necesariamente en el interior de C', lo cual es una contradicción. Por lo tanto $c \leq 0$.

En otras palabras, hemos demostrado que si se tienen $2^{n+c}, c > 0$, restricciones lineales que delimitan una región $C = H_1(C_1), \ldots, H_n(C_n)$ que no contiene punto del retículo $\mathbb{N}^m$, entonces al menos c de las restricciones pueden descartarse de tal manera que la nueva región factible (que contiene C) todavía no tiene puntos de retículo.

■

Demostración del teorema de punto fijo de Tarski. La prueba es en escencia la misma que la dada por Vives (2001) y Vohra (2005). Sea $X' = \{x \in X : f(x) \geq x\}$. Ahora bien, este conjunto es no vacío. Para demostrarlo supongamos que $X' = \emptyset$. Entonces, para todo $x \in X$ se tiene que $f(x) < x$. Sea $\bar{x}$ el menor elemento de X, tal elemento existe pues X es un retículo. Entonces $f(\bar{x}) < \bar{x}$, lo cual es una contradicción.

Consideremos ahora el conjunto $\{x \in X : x \geq z, \forall z \in X'\}$. No es difícil ver que forma un retículo y por lo tanto tiene un elemento mínimo al que denotaremos por $\text{ínf}\{x \in X : x \geq z, \forall z \in X'\}$.

Sea $x^* = \text{ínf}\{x \in X : x \geq z, \forall z \in X'\}$. Demostraremos que $x^* \in X'$. Sea $y^* = f(x^*)$. como f es no decreciente se tiene

$$x^* \leq \text{ínf}\{x \in X : x \geq f(z), \forall z \in X'\} \leq \text{ínf}\{x \in X : x \geq f(x^*)\} \leq y^*$$

$\text{ínf}\{x \in X : x \geq f(x^*)\}$ es el mínimo elemento del reticulo formado por $\{x \in X : x \geq f(x^*)\}$.

Nuevamente, como f es no decreciente se tiene

$$x \leq f(x) \leq f(x^*) \leq y^*$$

y

$$f(x^*) \leq f(y^*) = z.$$

Como $y^* \geq x^*$ se sigue que $z^* \geq y^*$, y como $f(y^*) = z^* \geq y^*$ se sigue que $y^* \in X'$. Pero $y^* \geq x^*$ y x^* es el máximo elemento de X'. Por lo tanto $f(x^*) = y^* = x^*$, esto es, f tiene un punto fijo.

$\blacksquare$

Referencias

Accinelli, E. (1996). Some remarks about uniqueness of equilibrium for infinite dimensional economies. *Estudios Económicos*, *11*(1), 3–32.

Accinelli, E., Brida, J. G., Plata, L., y Puchet, M. (2008). Bienestar social, óptimos de pareto y equilibrios walrasianos. *El trimestre económico*, *75*, 125–133.

Antelo, M. (2000). *Tópicos de microeconomía teórica*. Tórculo ediciones.

Arrow, K. J., y Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *22*(3), 265–290.

Bell, D. E. (1977). A theorem concerning the integer lattice. *Studies in Applied Mathematics*, *56*(2), 187–188.

Berge, C., y Ghouila-Houri, A. (1965). *Programas, juegos y sistemas de transporte*. Compañía Editorial Continental S. A.

Dold, A. (1984). *Teoría de punto fijo vol. 1.* Monografías del Instituto de Matemáticas - UNAM.

Echenique, F., Goel, S., y Lee, S. (2022). Stable allocations in discrete economies. Descargado de https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.04706

Echenique, F., y Oviedo, J. (2004). Core many-to-one matchings by fixed-point methods. *Journal of Economic Theory*, *115*(2), 358–376.

Florig, M., y Rivera, J. (2017). Existence of a competitive equilibrium when all goods are indivisible. *Journal of Mathematical Economics*, *72*, 145–153.

Granas, A., y Dugundji, J. (2003). *Fixed point theory.* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

Henry, C. (1970). Indivisibilites dans une economie d'echanges. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *38*(3), 542–558.

Hildenbrand, W., y Kirman, A. (1982). *Introducción al análisis del equilibrio.* Antoni Bosch editor.

Inoue, T. (2008). Indivisible commodities and the nonemptiness of the weak core. *Journal of Mathematical Economics*, *44*(2), 96–111.

Inoue, T. (2014). Indivisible commodities and an equivalence theorem on the strong core. *Journal of Mathematical Economics*, *54*, 22–35.

James, I. M. (1999). *History of topology.* Elsevier.

Jaume, D., Massó, J., y Neme, A. (2012). The multiple-partners assignment game with heterogeneous sales and multi-unit demands: competitive equilibria. *Mathematical Methods of operations research*, *76*, 161–187.

Kaplan, W. (1960). *Cálculo avanzado.* Compañía Editorial Continental, S. A.

Konishi, H., Quint, T., y Wako, J. (2001). On the Shapley–Scarf economy: the case of multiple types of indivisible goods. *Journal of mathematical economics*, *35*(1), 1–15.

Luenberger, D. G., y Ye, Y. (1984). *Linear and nonlinear programming.* Reading, MA: Addison-wesley.

Madden, P. (1987). Concavidad y optimización en microeconomía. *Alianza Editorial*.

Martínez, R., Massó, J., Neme, A., y Oviedo, J. (2004). An algorithm to compute the full set of many-to-many stable matchings. *Mathematical Social Sciences*, *47*(2), 187–210.

Mas-Colell, A. (1977). Indivisible commodities and general equilibrium theory. *Journal of Economic Theory*, *16*(2), 443–456.

Mas-Colell, A. (1985). *The theory of general economic equilibrium: A differentiable approach*. (Econometric Society Monographs). Cambridge University Press.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford University Press.

McKenzie, L. W. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, *27*(1), 54–71.

Murota, K. (2003). *Discrete convex analysis*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications.

Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*, *12*, 92–97.

Nikaido, H. (1956). On the classical multilateral exchange problem. *Metroeconomica*, *8*, 135–145.

Quinzii, M. (1984). Core and competitive equilibria with indivisibilities. *International Journal of Game Theory*, *13*, 41–60.

Samarski, A. A., y Nikolaev, E. S. (1982). *Métodos de solución de las ecuaciones reticulares*. Mir.

Scarf, H. E. (1983). Fixed-point theorems and economic analysis: mathematical theorems can be used to predict the probable effects of changes in economic policy. *American Scientist*, *71*(3), 289–296.

Schrijver, A. (1998). *Theory of linear and integer programming.* John Wiley & Sons.

Shapley, L. S. (1972). *On balanced games without side payments.* RAND Corporation.

Shapley, L. S., y Scarf, H. E. (1974). On cores and indivisibility. *Journal of Mathematical Economics*, *1*(1), 23-37.

Shapley, L. S., y Shubik, M. (1971). The assignment game I: The core. *International Journal of game theory*, *1*(1), 111–130.

Shapley, L. S., y Shubik, M. (1977). Trade using one commodity as a means of payment. *Journal of political economy*, *85*(5), 937–968.

Shubik, M. (1984). *A game theoretic approach to political economy.* MIT Press.

Svensson, L.-G. (1984). Competitive equilibria with indivisible goods. *Zeitschrift für Nationalökonomie/Journal of Economics*, *44*(4), 373–386.

Tarski, A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, *5*, 285–309.

Topkis, D. M. (1978). Minimizing a submodular function on a lattice. *Operations research*, *26*(2), 305–321.

Topkis, D. M. (1998). *Supermodularity and complementarity.* Princeton University Press.

van der Laan, G., Talman, D., y Yang, Z. (2002). Existence and welfare properties of equilibrium in an exchange economy with multiple divisible and indivisible commodities and linear production technologies. *Journal of Economic Theory*, *103*(2), 411–428.

Varian, H. (1992). *Microeconomic analysis.* Norton & Company.

Velupillai, K. V. (2015). Negishi's theorem and method: Computable and constructive considerations. *Computational Economics*, *45*(2), 183–193.

Vives, X. (2001). *Precios y oligopolio: ideas clásicas y herramientas modernas*. Antoni Bosch Editor.

Vohra, R. V. (2005). *Advanced mathematical economics*. Routledge.

Zhou, L. (1994). The set of nash equilibria of a supermodular game is a complete lattice. *Games and Economic Behavior*, *7*(2), 295–300.