UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

CAMPO DEL CONOCIMIENTO: MATEMÁTICAS

“Diseño e implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola bajo la modalidad híbrida sincrónica en la educación media superior”

Trabajo en la modalidad de Tesis

Que para optar por el grado de:

Maestro en Docencia para la Educación Media Superior

Presenta:

Jorge Luis Barragán Monroy

Tutor principal:

Dra. Giselle Ochoa Hofmann (Facultad de Ciencias / Matemáticas)

Comité tutor:

Dra. María del Carmen González Videgaray (FES Acatlán / Educación, Matemáticas)

Ciudad Universitaria, CDMX, mayo del 2024.

Agradecimientos

"Servir es el arte supremo; Dios es el primer servidor. Dios sirve al hombre, pero no es sirviente de hombres" Ferri y Benigni (1997)

En primer lugar, me gustaría agradecer a nuestra máxima casa de estudios, la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por brindarme la oportunidad una vez más de formarme ahora como profesional de la docencia en el nivel maestría. Aunque no tenía el promedio de ingreso al posgrado, fui aceptado en el programa de MADEMS, y eso lo agradezco muchísimo porque es una oportunidad que me cambió la vida. Agradezco mucho a la UNAM mi formación académica desde la preparatoria hasta la maestría. Haber estudiado en la UNAM fue una de las mejores cosas que me pudo haber pasado en la vida. Le tengo mucho amor, respeto y agradecimiento a la UNAM.

A mi madre Aurora y a mi hermana Michelle, por su apoyo económico y de recursos cuando lo necesité, debido a que no contaba con dinero porque no tenía beca ni trabajo durante algunos meses del 2do semestre de la maestría. Desconozco el motivo de rechazo de la beca cuando la tramité a mediados del segundo semestre (ya tenía el promedio recuperado), pero mi familia fue de gran apoyo, ya que, de lo contrario, hubiera muerto de hambre durante ese tiempo o debido a las depresiones severas que me provocaba dicha situación. Su apoyo, compañía y ayuda me respaldaron mucho durante mis periodos depresivos. ¡Muchas gracias mamá!, ¡muchas gracias hermana!

A la Dra. Giselle Ochoa Hofmann, por brindarme todo su apoyo, guía, consejos, asesoría, e incluso clases de geometría dinámica para la construcción de mi secuencia didáctica. Fue mi profesora durante los últimos tres semestres, y en el cuarto semestre tuve la enorme fortuna y privilegio de ser el único alumno de su grupo en la materia de Práctica Docente III, lo que bendigo mucho porque nos permitió planear, plantear y avanzar en esta investigación a fondo en cada detalle. Dicho semestre fue el mejor que cursé en la maestría. Prácticamente mi formación como investigador dentro del aula se la debo a ella. La Dra. Ochoa es la única persona de MADEMS que me llevo en el corazón. Cada que escuche las siglas MADEMS, siempre vendrá a mi mente con mucho cariño la Dra. Giselle Ochoa Hofmann. ¡Mil gracias por todo doctora!

Adicionalmente, agradezco mucho a la Dra. María del Carmen González Videgaray y a la Dra. María del Pilar Alonso Reyes por la minuciosa revisión de este trabajo, así como sus valiosas contribuciones que lo enriquecieron y le dieron la hermosa presentación que quedó al final.

Agradezco a Dios por guiarme hacia este posgrado y permitirme cursarlo al mismo tiempo que la pandemia del coronavirus, ya que esto me permitió aprender todo lo que tenía que aprender en diferentes aspectos. No sólo fue una cuestión de profesionalización y de investigación docente, sino todo lo que aprendí en el camino y de las personas con las que interactué durante la maestría. Este plan de Dios resultó (como todos los suyos) más que perfecto, ya que me dotó de una formación integral académica, humana, emocional, y, de lo más importante, una enorme resiliencia y fe en el futuro. Muchas gracias Dios…

Resumen

La presente investigación se orienta al diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola, creada para contribuir al desarrollo de las habilidades de visualización, comunicación, de dibujo, lógica y de razonamiento, así como de aplicación y transferencia, (a lo que se identificará como habilidades de Hoffer), y que permita al alumno alcanzar el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele en el tema de parábola, bajo una modalidad de trabajo híbrida sincrónica.

Para esto, la investigación está dividida en 5 partes:

1) *Marco teórico*: Consta de tres capítulos orientados a presentar antecedentes de la investigación. En el capítulo "El valor de la geometría" se presentan las habilidades que desarrolla la geometría (habilidades de Hoffer) y sus niveles de comprensión (niveles de Van Hiele), así como su relación. En el capítulo "La enseñanza de la geometría analítica y la parábola" se muestra un panorama de las problemáticas encontradas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la geometría y la parábola por especialistas en el tema. En el capítulo "El modelo educativo y la modalidad de trabajo del centro de prácticas docentes" se presenta el concepto "híbrido sincrónico" como modalidad de trabajo del centro de prácticas docentes.

2) *Propuesta metodológica*: Consta de tres capítulos donde se presenta la forma de trabajo del profesor, su modelo de enseñanza, así como el diseño de las estrategias creadas en base a dicho modelo para afrontar el reto de trabajo bajo la modalidad híbrida sincrónica.

3) *Informe de la intervención*: Un capítulo donde se expone una bitácora con las observaciones que hace el profesor en cada clase, a partir de las cuales determina su proceder. Se realiza un comparativo entre las actividades planeadas y las realizadas durante la intervención frente al grupo, así como se presentan los videos de las sesiones.

4) *Resultados y valoración*: En este capítulo se expone la estrategia de evaluación creada por el profesor, así como sus resultados.

5) *Consideraciones finales*: Se presentan las conclusiones de la investigación. De manera adicional, se anexa la secuencia didáctica, el material didáctico creado por el profesor, las pruebas escritas aplicadas, así como las referencias consultadas.

Abstract

The present investigation is oriented towards the design of a didactic sequence for teaching of the parable, created to contribute to the development of visualization, communication, drawing, logic and reasoning skills, as well as application and transference, (which will be identified as Hoffer skills), also, they allow the student to reach level 4 of geometric understanding of Van Hiele in the topic of parable, under a synchronous hybrid work modality.

So, the investigation has 5 parts:

1) *Theoretical framework*: It consists of three chapters for showing the context of the investigation. In the chapter "The value of geometry", the skills that geometry develops (Hoffer skills), and their levels of understanding (Van Hiele levels) are presented, as well as their relationship. In the chapter "The teaching of analytical geometry and the parable" an overview of the problems encountered on the teaching of geometry and the parable by specialists in the subject is shown. The chapter "The educational model and the work modality of the teaching practice center" presents the concept of "synchronous hybrid" as a work modality of the teaching practices center.

2) *Methodological proposal*: It consists of three chapters where the teacher's way of working is presented, his teaching model, as well as the design of the strategies created based on said model to face the challenge of working under the synchronous hybrid modality.

3) *Report of the intervention*: A chapter where a log is exposed with the observations made by the teacher in each class, from which he determines his procedure. A comparison is made between the planned activities and those carried out during the intervention in front of the group, as well as the videos of the sessions.

4) *Results and evaluation*: This chapter presents the evaluation strategy created by the teacher, as well as its results.

5) *Final considerations*: The conclusions of the investigation are presented. Additionally, the didactic sequence, the didactic material created by the teacher, the written tests applied, as well as the consulted bibliography are presented.

Índice

Contenido

Introducción

"Una ecuación no significa nada para mí a menos que exprese un pensamiento de Dios" Pressman y Brown (2016)

La geometría es la rama de la matemática más valorada por los antiguos griegos, debido a las capacidades mentales que creían que aportaba su estudio, al arte que podía generar, al desarrollo de estrategias y tácticas en guerras, e incluso, hasta a un sentido de justicia y búsqueda de la verdad. Actualmente, se sabe que la geometría puede desarrollar las habilidades de visualización, de comunicación o verbal, de dibujo, de lógica y de razonamiento, así como de aplicación y transferencia (INEE, 2008), y que incluso existen niveles de comprensión geométrica (Alsina, 1997) relacionados íntimamente con dichas habilidades. El reto actual al que se enfrentan los profesores de dicha asignatura es su enseñanza.

Diversos investigadores han tratado de encontrar formas idóneas de enseñar la geometría, generando diversas estrategias para dar solución a los problemas educativos que la rodean, con la finalidad de fomentar dichas habilidades y potenciar el nivel de comprensión geométrica en cada uno de los temas abordados. Cada una de estas investigaciones muestra la experiencia adquirida en el campo de la enseñanza para abordar retos que se pueden presentar en diferentes contextos, dotando a los profesores de más herramientas.

Aunado a lo anterior, desde el año 2019 la pandemia debido a la enfermedad llamada COVID – 19, de acuerdo con el Gobierno de México (2021), cambió al mundo por completo, y la educación no fue la excepción. Muchas instituciones educativas optaron por continuar en labores a través de diversas modalidades que cambiaron a lo largo del periodo de la pandemia. Una de esas modalidades fue la híbrida, a partir de inicios del año 2022, de la cual se desprenden a su vez algunas otras sub - modalidades como la híbrida sincrónica, en donde no existe un patrón de asistencia de los estudiantes, es decir, el alumno puede tomar su clase en línea o asistir a la institución para dicho fin, lo que provoca que el profesor se enfrente al nuevo reto adicional de impartir cátedra en “dos modalidades” al mismo tiempo.

Así, lo que se pretende con esta investigación, es hacer una aportación más a la enseñanza de la geometría, en particular de la parábola, a través del diseño de una secuencia didáctica que contribuya al desarrollo de las habilidades de Hoffer y conduzca a los estudiantes a potenciar la comprensión geométrica de la parábola, dentro del contexto de trabajo que implica la modalidad híbrida sincrónica.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. El valor educativo de la geometría

"Las imágenes más bellas y armoniosas tienen un fuerte ingrediente geométrico" Mazzitelli (2016)

Dentro de todas las ramas de la matemática, la geometría se distingue por la característica de contener patrones y elementos visuales que se pueden expresar numéricamente, e incluso, a través de modelos algebraicos. Es la rama que ayudó a los antiguos agrimensores de Egipto y Mesopotamia a la solución de sus problemas prácticos, como la medición de terrenos, volúmenes, fijación de impuestos, entre otros. La rama en la que los más ilustres geómetras griegos estuvieron muy interesados, al grado de implementar su aprendizaje obligatorio para las personas que querían ser gobernantes en la antigua Grecia; inspiró la belleza dentro de su cultura y dio origen al libro científico más influyente de todos los tiempos, "Los elementos de Euclides".

La importancia de la geometría radica en el hecho de que "de la vista nace el amor". A donde quiera que se mire, hay geometría. Basta con voltear a nuestro entorno para observar una cantidad indeterminada de polígonos y poliedros que forman los objetos que existen, en conjunto con simetrías, ángulos, rectas y curvas. La circunferencia que forma el sol, los fractales que forman las nubes y los rayos, el enorme elipsoide que representa la Tierra, las parábolas en las antenas de cable, el arco de los puentes, los poliedros que forman edificios, entre muchos otros. Se observan objetos compuestos de varias figuras geométricas, por ejemplo, en una bicicleta se pueden encontrar al menos tres circunferencias, algunos engranes, cilindros y rectas; los panales de las abejas compuestos por hexágonos, e incluso en el propio cuerpo humano existen dos músculos con nombre geométrico, los trapecios, llamados así por su forma trapezoidal, y los oblicuos, llamados así debido a que sus fibras caen hacia la región pélvica en ángulo oblicuo.

Así, la geometría se puede ver, escribir, describir, dibujar, imaginar y tocar; esto es, se experimenta con el espacio a través de los sentidos. La geometría es la matemática del entorno, de la vida, del universo.

Se puede pensar que la geometría es una rama intuitiva y puramente visual de la matemática, que se puede comprender de forma "automática" en el transitar diario de la vida, y que, por ello, no es necesario estudiar en un ámbito escolar. Sin embargo, desde la época de los griegos, la geometría ha tenido una importancia suprema, sobre todo en cuestiones educativas. A partir del pitagórico Arquitas de Tarento, quien vivió a finales del siglo V y principios del siglo VI a.C., y quien fuera maestro de geometría de Platón, se estableció la geometría dentro del quadrivium pitagórico (aritmética, geometría, música y astronomía) como núcleo de una educación liberal (González, 2001). Platón se refiere a las cuatro ciencias del cuadrivium en *La República* como estudios imprescindibles en la formación del filósofo, del gobernante y como elementos esenciales para la educación de los jóvenes. Sobre la geometría afirma:

> "La parte más elevada de esta ciencia nos conduce a una contemplación más factible de la idea del bien (…) La geometría nos obliga a contemplar la esencia (…) Es una ciencia del conocimiento del ser, no de lo que está sujeto al cambio o desaparición. (…) Conducirá al alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba" (González, 2001, p. 81).

Es decir, la geometría era una ciencia que conducía al alma hacia el bien a través del conocimiento de la esencia de las personas y objetos, la esencia del espacio. Arquitas afirmaba que las disciplinas del quadrivium "parecían hermanas", y que quienes las cultivaban podían convencer con más fuerza que ningún otro saber humano, pues utilizaban argumentos casi imposibles de combatir (Millán, 2004). Un beneficio más de la geometría: la construcción de argumentos sólidos estructurados de manera lógica. "Los griegos hacen geometría *por el mero honor del espíritu humano* (…) y la utilidad es sólo un valor añadido" (González, 2001, p. 21).

En un conocido pasaje de *La República*, los protagonistas, Glaucón y Sócrates, se refieren a la conveniencia de la geometría en la educación, en vista de la acción y sobre todo en vista del conocimiento:

> "[Glaucón] En cuanto se extiende sobre los asuntos de guerra, es evidente que conviene. Porque en lo que concierne a acampamientos, ocupación de zonas, concentraciones y despliegues de tropas, y cuantas formas asuman los ejércitos en las batallas mismas y en las marchas, es muy diferente que el guardián mismo sea geómetra y que no lo sea.
>
> [Sócrates] De esas cosas, sin embargo, es poco de geometría y de cálculos lo que basta. Avanzado mucho más lejos que eso, debemos examinar si tiende a hacer divisar más fácilmente la idea del bien. Y a eso tiende, decimos, todo aquello que fuerza al alma a girar hacia el lugar en el cual se halla lo más dichoso de lo que es, que debe ver a toda costa.
>
> [Glaucón] Hablas correctamente.
>
> [Sócrates] En ese caso, si la geometría obliga contemplar la esencia, conviene; si en cambio obliga a contemplar el devenir, no conviene.
>
> [Glaucón] De acuerdo en que afirmemos eso.
>
> [Sócrates] En eso hay algo que no nos discutirán cuántos sean siquiera un poco expertos en geometría, a saber, que esta ciencia es todo lo contrario de los que dicen en sus palabras los que tratan de ella (…) Hablan de un modo ridículo, aunque forzoso, como si estuvieran obrando o como si todos sus discursos apuntaran a la acción: hablan de cuadrar, aplicar, añadir, y demás

> palabras de esa índole, cuando en realidad todo este estudio es cultivado apuntando al conocimiento.
>
> [Glaucón] Completamente de acuerdo.
>
> [Sócrates] Se la cultiva apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece.
>
> [Glaucón] Eso es fácil de convenir, pues la geometría es el conocimiento de lo que siempre es.
>
> [Sócrates] Se trata entonces, noble amigo, de algo que atrae el alma hacia la verdad y que produce que el pensamiento del filósofo dirija hacia arriba lo que en el presente dirige indebidamente hacia abajo.
>
> [Glaucón] Es capaz de eso al máximo.
>
> [Sócrates] Pues si es tan capaz, has de prescribir al máximo a los hombres de tu bello Estado de que ningún modo descuiden la geometría (…)
>
> [Glaucón] ¿A qué te refieres?
>
> [Sócrates] Lo que tú has mencionado: lo concerniente a la guerra; pero también con respecto a todos los demás estudios, cómo comprenderlos mejor, ya que bien sabemos que hay una enorme diferencia entre quién ha estudiado geometría y quién no.
>
> [Glaucón] ¡Enorme, por Zeus!
>
> [Sócrates] ¿Implantamos entonces esto como un segundo estudio para nuestros jóvenes?
>
> [Glaucón] Implantémoslo.” (Millán, 2004, p. 40).

Platón, *República*, Libro VII (526d-e, 527a-c). Traducción de Conrado Eggers Lan, *Diálogos IV*, Gredos, 1986.

Aunado a las aplicaciones educativas de la geometría de los griegos, sucede que hay dos momentos en la comprensión de la geometría: el primero donde predomina la intuición y es de naturaleza visual, de carácter subjetivo; el segundo, donde se pasa a la reflexión, el uso de la lógica, de la verbalización con un carácter más objetivo y analítico. No hay comprensión geométrica si no se avanza al segundo momento (Mazzitelli, 2016). Por lo cual, es necesario estudiar geometría para lograr una comprensión real de la misma.

Para distinguir entre el primer y segundo momento, suponga que se tiene el siguiente gráfico. Se plantea la siguiente pregunta a un alumno de nivel medio básico o superior: ¿cuánto mide el ángulo que va del punto C al D y cuyo vértice es A?

Ángulos formados por rectas que se cortan

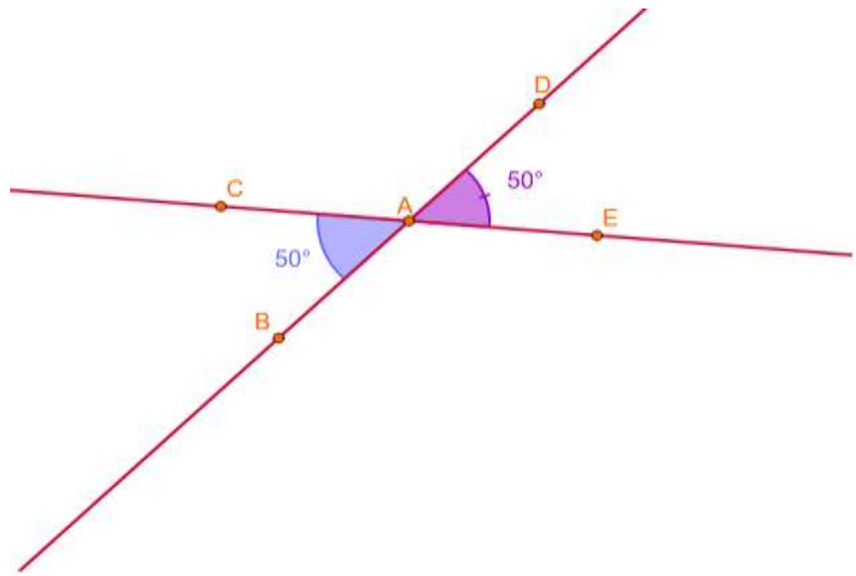


Figura 1.1 - Ángulos opuestos por el vértice.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Un alumno que se encuentra en el primer momento, en un nivel de razonamiento empírico, puede obtener la medida de dicho ángulo con el transportador y llegar a que mide 130°. Por otro lado, un alumno que se encuentra en el segundo momento, en un nivel de razonamiento deductivo, puede concluir que dicho ángulo mide 130° porque del punto B al D hay 180°, y para completar dicha cantidad el ángulo restante debe medir 130°, sin necesidad de usar el transportador. Otro razonamiento deductivo puede ser que en toda la circunferencia hay 360°, al restar los ángulos de 50° quedan 260°, y, por simetría, por ángulos opuestos por el vértice, o por simple "lógica visual", los ángulos restantes deben medir lo mismo, es decir 130° cada uno para completar los 260°.

Esto es, la geometría sí puede comprenderse de manera intuitiva, pero se limita a quedarse en el primer momento de tal comprensión, la comprensión visual. Para tener una comprensión real se debe avanzar al segundo momento, a un pensamiento lógico, reflexivo y deductivo, donde el alumno puede descartar su espacio y manejar imágenes mentalmente.

> "Las personas construyen de manera intuitiva algunas relaciones y conceptos geométricos, producto de su interacción con el espacio; la enseñanza de la Geometría debe permitir avanzar en el desarrollo del conocimiento de ese espacio, de tal manera que en un momento dado pueda prescindir de él y manejar mentalmente imágenes de figuras y relaciones geométricas, es decir, hacer uso de su capacidad de abstracción. El estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son el espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la validez de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente, sino que tendrán

> que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en Matemáticas, en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen." (INEE, 2008, p. 29).

El hecho de lograr prescindir de un espacio plano o tridimensional de referencia, es decir, manejar figuras y conceptos de manera mental, requiere del desarrollo de ciertas habilidades del pensamiento, como se menciona en la cita anterior. Al poder ver, escribir, describir, dibujar, imaginar la geometría como se mencionó, esta rama puede contribuir a desarrollar habilidades del pensamiento, como la argumentación, la deducción, entre otras, motivo por el cual se debe estudiar geometría a nivel escolar.

De acuerdo con Hoffer (citado por Bressan, en INEE, 2008), las habilidades básicas por desarrollar en la clase de geometría son:

1) *Visuales*: "La visualización es una actividad del razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades." (p. 48)
2) *De comunicación o verbal*: "La habilidad de comunicación se refiere a que el alumno sea capaz de interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría." (p. 52)
3) *De dibujo*: "Las habilidades de dibujo están relacionadas con las reproducciones o construcciones gráficas que los alumnos hacen de los objetos geométricos. La reproducción se refiere a la copia de un modelo dado, ya sea del mismo tamaño o a escala, cuya construcción puede realizarse con base en información que se da en forma verbal (oral o escrita) o gráfica." (p. 58)
4) *Lógica o de razonamiento*: "Al aprender Matemáticas, los alumnos desarrollan su razonamiento, es decir, aprenden a razonar. Esto es particularmente cierto para el caso de la Geometría, con cuyo estudio se pretende desarrollar habilidades de razonamiento como:

    - La abstracción de características o propiedades de las relaciones y de los conceptos geométricos.
    - Argumentar
    - Hacer conjeturas y tratar de justificarlas o demostrarlas.
    - Demostrar la falsedad de una conjetura al plantear un contraejemplo.
    - Seguir una serie de argumentos lógicos.
    - Identificar cuándo un razonamiento no es lógico.
    - Hacer deducciones lógicas." (p. 65)

5) *Habilidades de aplicación y transferencia* (*modelar*): "con las habilidades de aplicación y transferencia se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos, al resolver problemas dentro de la misma

> Geometría, sino también que modelen geométricamente situaciones del mundo físico o de otras disciplinas.” (p. 67)

La visualización es el primer contacto que se tiene con la geometría, pero no es posible aprender geometría sólo con la visualización, ya que la generalización de propiedades no puede darse únicamente con la percepción, además de que sería condenarlos a quedarse en el primer momento de la comprensión geométrica. Así, se necesita enfrentar al alumno en diferentes situaciones donde sus conocimientos adquieran sentido, por ejemplo, a través de diversas construcciones geométricas. Un ejemplo de visualización podría ser el encontrar el número de cuadrados que tiene un tablero de ajedrez; la respuesta inmediata serían 64, aunque esto es falso. Un alumno con habilidad visual podrá encontrar más cuadrados al formar cuadrados con cuadrados más pequeños. Incluso, el propio tablero de ajedrez es cuadrado, con lo que se sumaría otro cuadrado más al final de todos los cuadrados que pueda encontrar mentalmente a través de la visualización.

La geometría contribuye al desarrollo de habilidades de lenguaje, por ejemplo: al resolver un problema el alumno debe interpretar el problema para comenzar a resolverlo, discute con los compañeros la posible solución, presenta un resultado con el procedimiento seguido para obtenerlo, finalmente, justifica dicho procedimiento y su resultado. Dentro de estas habilidades está el proceso de designar por su nombre a los conceptos, objetos matemáticos los cuales aparecen en nuestra vida cotidiana: paralelas, perpendiculares, círculo, triángulo, rombo, cuadrado, cilindro, etc. La geometría ayuda a fomentar la habilidad de argumentar y comunicar de forma oral y escrita, la cual contribuye al desarrollo del pensamiento crítico.

Las actividades de trazo de figuras geométricas fomentan en el alumno su capacidad de análisis y visualización, al identificar los elementos, descubrir relaciones y propiedades que están dentro de la construcción geométrica. Es importante que el alumno justifique su proceso de construcción para continuar con el desarrollo de la habilidad para argumentar, para ello, se debe promover el uso continuo del juego de geometría: regla, escuadras, compás y transportador.

Algunos investigadores consideran que el aprendizaje de la geometría sólo se da si los alumnos son capaces de aplicar lo aprendido a problemas nuevos, a través del desarrollo de la habilidad de transferencia. Esto es, resolver problemas en otros contextos que no son completamente de carácter matemático. Con ello, la geometría cumple su papel formativo: ayudar al alumno a razonar en terrenos distintos a la matemática. Idea que concuerda con Platón y Sócrates.

A su vez, Hoffer (citado por Mazzitelli, 2016) estableció una relación entre el estado específico de cada habilidad mencionada con el nivel de comprensión geométrica. Dichos niveles de comprensión provienen de la teoría de un matrimonio holandés de apellido Van Hiele, dando origen a la Teoría de Van Hiele. Se propone un modelo que clasifica el grado de representación del espacio a través de cinco niveles de comprensión. Dichos niveles son escalonados, es decir, van de lo simple a lo complejo.

Van Hiele (citado por Alsina, 1997) propone cinco niveles de comprensión en Geometría:

- “Nivel 0: los individuos perciben las figuras como un todo global. No reconocen las partes y componentes de las figuras. No explicitan las propiedades determinantes de las figuras (…) Pueden producir una copia de cada figura particular o reconocerla.
- Nivel 1: los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras (…), pero no explicitan relaciones entre distintas familias de figuras; por ejemplo, un rombo o un rectángulo no se perciben explícitamente como un paralelogramo. Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente.
- Nivel 2: los individuos determinan las figuras por sus propiedades: “cada cuadrado es un rectángulo”, pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes.
- Nivel 3: los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) No se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.
- Nivel 4: los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos. Pueden apreciar la consistencia, la independencia, y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la Geometría. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como sugieren los últimos estudios sobre el tema.” (p. 38).

Una de las aportaciones de la teoría de Van Hiele es el reconocimiento de los obstáculos que enfrentan los alumnos al aprender geometría, ya que, si no cuentan con los conocimientos previos, no serán capaces de progresar en una nueva situación, y se producirá su fracaso escolar (Alsina, 1997). Cabe resaltar que, el paso de un nivel a otro no depende de la edad, sino de situaciones que inviten al alumno a estimular dicho avance. Un profesor, por ejemplo, puede contribuir con dicha invitación, ya que puede provocar el paso de un nivel a otro a través de situaciones de aprendizaje diseñadas para ello. “Los alumnos irían adquiriendo este tipo de pensamiento gradualmente, según Van Hiele (…) no se debe al crecimiento o desarrollo natural, sino de la instrucción intencionada.” (Mazzitelli, 2016, p. 43).

El paso de un nivel a otro ocurre a través de una serie de fases de aprendizaje. Dichas fases también las propone Van Hiele (citado por Alsina, 1997), las cuales son las siguientes:

- “Fase 1: discernimiento. Se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo.
- Fase 2: orientación dirigida. El profesor propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar. La ejecución y la reflexión propuesta servirá de motor para propiciar el avance en los niveles de conocimiento.
- Fase 3: explicitación. Los estudiantes, una vez realizadas las experiencias, expresan sus resultados y comentarios. Durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas.
- Fase 4: orientación libre. Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparable.

- Fase 5: integración. Los objetos y las relaciones son unificadas e interiorizadas en su sistema mental de conocimientos.” (p. 40).

Una vez se ha pasado por la fase 5 un nuevo nivel de conocimiento es adquirido.

La relación que estableció Hoffer (citado por Bressan en INEE, 2008) entre las habilidades mencionadas y los niveles de comprensión de Van Hiele (citado por Alsina, 1997), se representa en la siguiente gráfica:

Tabla de habilidades y niveles de comprensión de la geometría

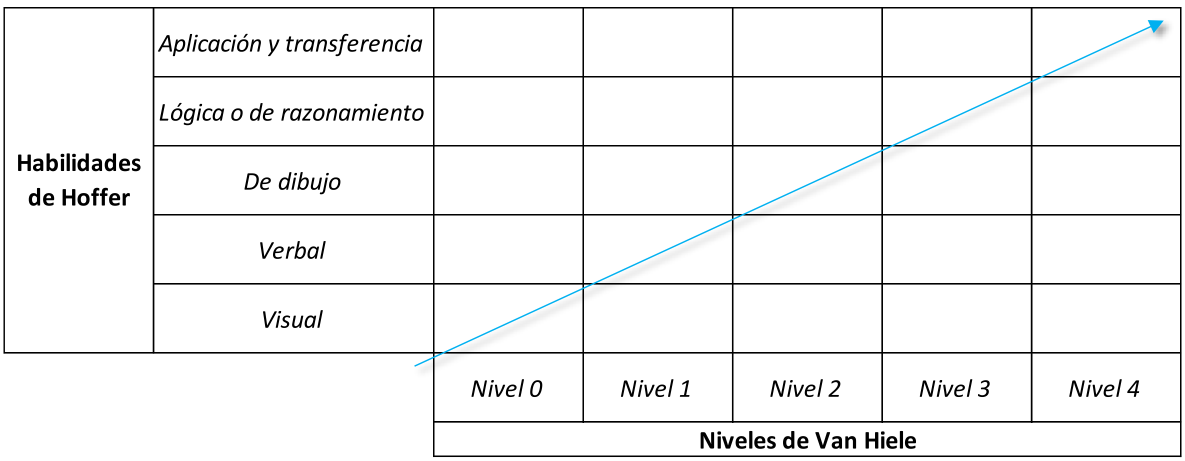


Figura 1.2 - Relación entre las habilidades y niveles de comprensión de la geometría. (Mazzitelli, 2016).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

El proceso de enseñanza – aprendizaje es bastante complejo y multivariante, ya que depende de aspectos tanto del mismo profesor como de sus alumnos. De cualquier modo, el profesor, quien es el profesional de la docencia, debe trabajar para generar situaciones de aprendizaje que faciliten la comprensión a los alumnos, para pasar de un nivel a otro en el aprendizaje de la geometría y contribuir con el desarrollo de las habilidades que aporta esta materia.

“(…) El razonamiento geométrico evoluciona desde niveles muy elementales de reconocimiento e identificación de las figuras geométricas hasta el desarrollo de razonamientos deductivos (…) Si un docente insiste en preocuparse porque sus alumnos sólo aprendan a identificar las figuras geométricas (…) está condenándolos a mantenerse en un nivel muy elemental del pensamiento geométrico.” (INEE, 2008, p. 71).

1.2. La enseñanza de la geometría analítica y la parábola

“Las leyes de la naturaleza, la geometría del cielo es el
pensamiento de Dios” Arce (2002)

Los seres humanos, desde la infancia, comienzan a crear todo tipo de representaciones de las cosas que los rodean, representaciones que ayudan a tener una idea del mundo construido mentalmente por cada individuo en su interior. Según Aray, Párraga, y Chun (2019): “el hemisferio derecho del cerebro resulta ser el más beneficiado ante la presencia de estímulos visuales, a diferencia del hemisferio izquierdo, que tiene la responsabilidad de desarrollar las capacidades verbales” (p.29). De esto, se puede inferir que una representación geométrica es identificada por el hemisferio derecho, ya que éstas corresponden a estímulos visuales. El cerebro trabaja ante estos estímulos y comienza a identificar propiedades, características que le permiten conocer profundamente dicho objeto. Así, se dice que hace un proceso de visualización (Aray et al., 2019). Con esta idea en mente, cuando se habla la enseñanza y aprendizaje de la geometría para desarrollar procesos de análisis, comprensión, construcción, descripción, argumentación, exploración, entre otros, es razonable concentrarse en facilitar esos procesos de visualización, que le permitan al alumno ver la geometría como una herramienta para comprender su mundo.

Sin embargo, hablar del proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría no es tan simple como se escribe, además de que hay muy poco análisis e investigación al respecto, como confirma Jones y Tzekaki (citado por Aroca, 2019): “hay muy poca investigación sobre los aspectos relacionados con la enseñanza de la Geometría Analítica, tanto en su didáctica como en la historia de la misma, en los distintos niveles de educación”. En este sentido, el objetivo de esta sección es exponer y analizar diversas problemáticas del proceso de enseñanza - aprendizaje de la geometría, en particular, de la parábola.

Uno de esos especialistas es Bishop (2005) , quien plantea que:

> “Existen ciertos obstáculos para aprender acerca del espacio en las aulas escolares, entre ellos, el énfasis en la aritmética y la poca conexión de las actividades curriculares de enseñanza con el mundo espacial fuera del aula (…) Desde el punto de vista cultural, debemos reconocer que, para muchos alumnos en el mundo, las ideas geométricas que se les está enseñando en la escuela son consecuencia de una forma de ver el mundo espacial, que es completamente distinta de la forma como se ve esa realidad en su "cultura familiar" (p. 21)”

La falta de conocimientos aritméticos es un problema que persiste hasta el nivel medio superior. Esto coloca a la aritmética como un obstáculo en cualquier clase de matemática (álgebra, trigonometría, cálculo, geometría, probabilidad y estadística), debido a que influye directamente en el tiempo del profesor para aplicar estrategias y/o actividades de aprendizaje que haya diseñado de manera específica para la clase, como bien menciona el autor. Se puede incluso sumar a esto que los problemas de “vacíos” aritméticos, van de la mano con “vacíos” algebraicos, lo que hace más grave el problema para el alumno al momento de aprender Geometría Analítica, y el problema de enseñar para el profesor.

Por otro lado, Almeida (2002), afirma que tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas, entre otros, tendrían que ser algunos de los objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica.

En este sentido, el autor resume los objetivos ideales que debería tener cualquier clase de matemática, no sólo de geometría: la visión histórica, que refiere al uso general de la historia de la matemática como recurso didáctico y, a su vez, de interdisciplinariedad; la aplicación de la geometría en la creación de modelos para resolver problemas en contextos familiares al alumno. Esto es, la modelación se refiere a la simplificación y restricción de lo complejo de una nueva situación, tal que se pueda detectar qué esquema se le puede aplicar y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación (Acevedo, 2013). La modelación representa el punto cumbre del conocimiento matemático adquirido, ya que, de esta forma, el alumno muestra la solidez de la técnica aprendida. Así, un estudiante que es capaz de visualizar un problema de geometría analítica, identificar el modelo adecuado, implementarlo y dar solución al problema a través de técnicas aritméticas, algebraicas y geométricas, demuestra su capacidad de transitar entre los diferentes sistemas de representación, así como de una mejor comprensión de los objetos matemáticos. Llegar a la correcta solución de un problema de este tipo, es la mejor demostración de su propio aprendizaje.

La Geometría Analítica permite que las cuestiones puramente geométricas puedan formularse algebraicamente, para alcanzar un objetivo geométrico a través del álgebra, y a la inversa, facilita la interpretación geométrica de enunciados algebraicos, lo que provoca una percepción más intuitiva de su significado y, a su vez, una apertura a la visión de nuevos problemas y soluciones (Acevedo, 2013).

La geometría muestra de una manera distinta y particular la realidad que rodea al alumno, y le da la oportunidad de desarrollar habilidades imaginativas y creativas a través del trabajo con las formas. Finalmente, el estudiante interactuará durante toda su vida con diversos objetos geométricos en un espacio físico, por ello, es importante el planteamiento de situaciones problema que impliquen para el alumno un trabajo no limitado al uso de una fórmula o un proceso algorítmico.

Estas ideas son compartidas también por Veloso (citado por Almeida, 2002), donde señala que la enseñanza de la geometría debe:

- Profundizar y sintetizar los aspectos geométricos en desarrollo, como la comprensión del espacio y de los respectivos modelos geométricos que son dados por las matemáticas; es decir, partir de problemas y situaciones relacionadas con el espacio, como la simetría, la forma y la dimensión.

- Integrar la historia de la geometría en su enseñanza, para permitir al alumnado tener la noción de la existencia de otras geometrías.
- Buscar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas como el arte y promover su aplicabilidad en contextos reales.

Partir de problemas relacionados con el espacio es necesario, debido a que esto obliga a la imaginación del alumno a obtener las cónicas (en el caso de la Geometría Analítica) como "rebanadas" de la superficie de donde parte el problema, e identificarlas más fácilmente en diferentes estructuras de su alrededor, dicho de otra manera, a fortalecer su capacidad espacial. Éste es uno de los retos más importantes dentro de la enseñanza de la geometría analítica: la espacialización, ya que, como también afirma Aray, et al. (2019): "la geometría modela el espacio que se percibe, es decir, la Geometría es la Matemática del espacio (…) de ahí la esencial importancia del estudio de la geometría y el desarrollo en el estudiante de sus habilidades y destrezas relacionados con esta disciplina" (p.23). Por otro lado, el uso de la historia es un recurso didáctico que permite al alumno tener la noción de la existencia de otras geometrías, sus aplicaciones y orígenes, así como el desarrollo de la multidisciplina.

Aunado a las problemáticas anteriores, también existen estudios con alumnos ya graduados, como el de Barrantes y Blanco (citado por Aray et al, 2019), quienes determinaron algunas de las concepciones que poseen un grupo de exalumnos sobre la enseñanza de la Geometría Analítica:

- Conciben la geometría escolar como una materia difícil, a la que se dedica poco tiempo.
- Señalan que la geometría es una materia muy teórica, abstracta y complicada de entender, para la que se necesita una mayor capacidad de razonamiento.
- Para el estudiantado la dificultad de la geometría radica, principalmente, en la memorización de fórmulas y saber cuándo aplicarlas.
- Indican que para aprender geometría es necesario la explicación de la profesora o profesor y la práctica, pues si se es capaz de resolver las prácticas se puede verificar si se comprendió el tema en estudio.
- Revelan que la metodología clásica para la enseñanza de la geometría se divide en dos: la parte teórica, caracterizada por definiciones, propiedades, entre otros, y la parte práctica, donde se entienden como sinónimos las palabras problema y ejercicio.
- Apuntan que los contenidos que más se estudian son los relacionados con la geometría plana; en la geometría espacial se profundiza menos.
- Manifiestan que la pizarra y el libro de texto son los recursos más utilizados para la enseñanza de la geometría.
- Destacan que el uso de materiales como figuras de madera u otros son poco frecuentes y cuando se utilizan se hacen construcciones o actividades sin ninguna utilidad posterior.
- Declaran que las actividades geométricas frecuentemente son extraídas del libro de texto y suelen estar relacionadas con el estudio de elementos de las figuras,

clasificación y sobre todo de medida; es decir, resolución de problemas "tradicionales".

- Indican que el examen es el elemento más importante de la evaluación.

Un exalumno de Geometría Analítica, que no se dedica a estudiar alguna licenciatura de la rama físico – matemáticas, concibe a ésta como difícil, pero lo que sí llama la atención es la percepción del poco tiempo dedicado a su estudio. Esta idea también es comentada por Gómez – Chacón (citado por Palma, Lluch y Ruiz, 2018), quien asegura que la geometría es una rama de las matemáticas que se relega a los últimos momentos de las actividades escolares y que acaba siempre como un conjunto de fórmulas que los alumnos deban de aprender. En esta investigación, se trabajó con el programa de la materia de Matemáticas V, que pertenece al Plan de Estudios de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP, 1996), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Dicho programa destina solamente 20 horas para abordar los contenidos de Geometría Analítica y los concentra en la Unidad V que llama "Tema optativo". Dicho programa menciona: "la quinta unidad es un espacio que otorga libertad al docente para elegir uno de los temas, que le permita compartir con los jóvenes su visión de las matemáticas y su motivación para estudiarlas, desde la perspectiva de su formación profesional. Será su decisión el momento del curso en que considera pertinente abordarlo" (ENP, 1996, p. 3). Es decir, el profesor tiene la libertad de decidir si enseña o no los contenidos referentes a la Geometría Analítica. El tiempo destinado en la unidad es apenas suficiente para el estudio de una sola cónica (circunferencia, parábola, elipse o hipérbola).

Los contenidos de la geometría espacial no son considerados en ningún programa de estudios de los bachilleratos mexicanos, de hecho, pertenece a los planes de estudio de algunas licenciaturas de nivel superior, aunque algunos contenidos temáticos de esta área pueden ser abordados en el nivel medio superior dado que contribuye a la espacialización, que es uno de los problemas de la enseñanza de la Geometría Analítica.

La resolución de problemas "tradicionales" extraídos del libro de texto es una de las prácticas más frecuentes en la enseñanza, este tipo de problemas se enfoca al algebra, pero no en la modelación, lo cual, no permite llegar al trasfondo del concepto geométrico. Estas ideas son compartidas por Abrate, Delgado y Pochulu (citado por Aray et al, 2019) quienes afirman: "los recursos utilizados para la enseñanza de la geometría son limitados y se circunscriben a los "tradicionales", pues en la mayoría de los casos el proceso de enseñanza está condicionado por los libros de texto, que impactan considerablemente en el qué y cómo enseñar" (p. 27). Los textos son fuentes de consulta, pero eso no significa que un texto contenga todas las estrategias didácticas que un profesor necesita para cualquier grupo de alumnos. El profesor debe tomar lo mejor de los textos, de las investigaciones y de los recursos con los que se encuentre para adaptarlos, moldearlos e implementarlos de la manera óptima con sus alumnos, de acuerdo con las necesidades que observe en cada grupo y sus objetivos. Eso es el trabajo de un profesional de la docencia. Para esto, el profesor debe asumirse como tal, y a este respecto Díaz – Barriga (2019) comenta: "El docente nunca acaba de construir propuestas didácticas (…) encontramos modelos curriculares que quieren encajonar el trabajo docente en una propuesta de trabajo, en vez de reconocer la parte profesional del docente para construirla” (minuto 17:54).

El recurso más común para la clase de geometría debería ser el juego de geometría, de ahí su nombre. El hecho de poder trazar las cónicas con regla y compás es una habilidad de dibujo básica que todo alumno de Geometría Analítica debe saber hacer, debido a que estas actividades contribuyen al desarrollo del pensamiento deductivo, ejercita el reconocimiento de patrones, demostraciones y fortalece las definiciones y conceptos de cada cónica. En la actualidad, el uso de las tecnologías ha dotado al alumno de mayores facilidades para estos fines, lo que priva al alumno del desarrollo de habilidades psicomotoras y de análisis.

El hecho de que el examen sea considerado como el elemento más importante de la evaluación formativa y sumativa, genera la problemática de la “programación” del alumno para aprobar, lo que conduce a memorizar las fórmulas y algoritmos. La evaluación debe ser enriquecida con otro tipo de actividades que reflejen una evolución en el aprendizaje del alumno. En el caso de la Geometría Analítica se abre un abanico de actividades que facilitan los procesos de evaluación del aprendizaje. Así, para tener una mejor perspectiva del aprendizaje del alumno, es necesario diseñar actividades que conformen una evaluación formativa integral del alumno, ya que es esta evaluación la que nos muestra la evolución del aprendizaje.

De acuerdo con Lehmann (1993), los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son:

I. “Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.
II. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.” (p. 32)

En este trabajo se abordará los problemas fundamentales de la Geometría Analítica a través del estudio de la parábola en situaciones contextualizadas.

El estudio de las secciones cónicas debe tener una enseñanza que favorezca el desarrollo geométrico y algebraico. Se debe tener cuidado en que el alumno no se centre en procesos de reproducción de condiciones algebraicas, debido a que se perdería el sentido del análisis y argumentación geométrica, lo que impide potencializar las habilidades matemáticas que la geometría en sí misma otorga.

López, Aldana y Alonso (2013) generaliza dicha problemática en torno a la parábola, al afirmar que: “(…) los estudiantes no reconocen la parábola a partir de sus componentes y por tanto no hay relación analítica de la ecuación con los elementos que la conforman, es decir, no logran integrar la razón que existe entre el vértice, la directriz y el foco, confunden la simetría con el eje focal y la orientación del objeto; tienen dificultad para utilizar los sistemas de representación que facilitan la interpretación de la parábola; porque no asocian la ecuación con la gráfica, ni establecen una relación tabular con su gráfica”(p. 75).

Estas ideas son compartidas por varios autores y expertos en la materia, quienes, apoyados en diferentes estrategias, enfoques y metodologías, han tratado de disminuir tales problemáticas. Tal es el caso de Sánchez (2019), quien realiza una investigación sobre la comprensión de la parábola y comenta:

> "(…) a los estudiantes se les dificulta reconocer la ecuación de la parábola, escribir la ecuación canónica, graficar una parábola a partir de su ecuación, resolver problemas de aplicación, describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación y su gráfica, realizar la conversión en cada uno de los registros: gráfico, analítico, algebraico y verbal, (…), se les dificulta trabajar en cada registro y pasar de un registro a otro" (p. 13).

La interacción entre cada uno de los sistemas de representación es lo que ayuda a la comprensión del objeto matemático en cuestión, es decir, la conversión entre las representaciones algebraica, gráfica y verbal, permite interiorizar en la esencia del objeto, en este caso de la parábola. Se debe diseñar situaciones que permitan trabajar entre los diferentes sistemas de representación, lo cual es un reto. Para ello, pueden servir los problemas contextualizados que impliquen la modelación, donde el alumno visualice la parábola en un problema real, represente la parábola en el plano cartesiano y elija el modelo algebraico a seguir para resolver la situación, lo que contribuye a transformar el pensamiento matemático en actividad matemática. Cantoral (citado por Nieves, 2020), define al pensamiento matemático como "la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos" (p.13). Duval (citado por Nieves, 2020) afirma que:

> "Las actividades matemáticas ocurren cuando se realizan transformaciones sobre los registros de representación. Estas representaciones externas como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, permiten a los estudiantes exteriorizar sus representaciones mentales y lograr que los objetos matemáticos se tornen accesibles. El éxito de la realización de este movimiento entre registros, es un indicador del logro del aprendizaje sobre objetos matemáticos en estudio" (p.24).

A partir de esto, se puede decir que los problemas de modelación representan la consolidación del aprendizaje del alumno, ya que, en ellos debe transitar sobre los diferentes sistemas de representación para dar solución a una problemática específica. Al resolverlos, transforma su pensamiento matemático en actividad matemática, lo cual, representa el aprendizaje del objeto (parábola).

De igual manera, Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) presentan una reflexión sobre el papel que desempeña el uso de los diversos registros de representación en el aprendizaje de la matemática, resaltando la importancia de utilizar más de un registro de representación. Exponen que este tipo de trabajo no es usual para los estudiantes, y es donde se originan las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas; señalan que los libros de texto contienen ejercicios de tipo algebraico y algunos de tipo numérico y geométrico, lo que provoca una visión parcial de la temática, es decir, no se relacionan los diferentes sistemas de representación. Recomiendan a los docentes trabajar en los diferentes tipos de registros y sus representaciones. En esta investigación, se diseñarán actividades que impliquen el transitar entre los diferentes sistemas de representación, para culminar en el modelado de situaciones reales a través de la parábola.

Por otro lado, el profesor De la Rosa (s.f), de la ENP # 9 “Pedro de alba”, UNAM, plantea una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola haciendo uso del software GeoGebra. En su trabajo planteó una secuencia de siete etapas para el desarrollo de las actividades. Inicia con la identificación del software y la definición geométrica de la parábola, la definición de sus elementos básicos y sus propiedades, así como la construcción de ésta utilizando un sistema de coordenadas. Concluye que el uso de algún procesador geométrico ayuda a la comprensión de muchos temas de Geometría Analítica; el uso del software ayuda bastante a alumnos que se les dificulta comprender ciertos conceptos, ya que logran visualizar mejor los mismos.

La revisión de estos trabajos de investigación permite tener un panorama de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la Geometría Analítica, y en particular, de la parábola. Con el aporte de estas investigaciones, se crearon diferentes estrategias de enseñanza del objeto matemático de la parábola, de tal forma que los estudiantes puedan trabajar en los distintos sistemas de representación (verbal, gráfico y algebraico) y en la conversión entre estos, resuelvan problemas contextualizados que implican un modelo parabólico, así como el uso del software como recurso didáctico, con la finalidad de permitir el estudio, reconocimiento, interpretación e interiorización de este objeto. Así mismo, dieron las pautas para la creación de los instrumentos de evaluación para la recolección de información que sirva para verificar una mejoría en las áreas de oportunidad mencionadas.

1.3. El modelo educativo y la modalidad de trabajo del centro de prácticas docentes

“Educación es la rehabilitación del mundo para el nuevo encuentro de la humanidad con la sonrisa” Berrum de Labra (1995)

Un modelo educativo representa el conjunto de normas que guían el proceso de enseñanza aprendizaje. Consta de diferentes enfoques y establecen un patrón en la elaboración de programas de estudio para orientar a los docentes en su enseñanza, de tal manera que se permita que la educación sea homogénea en el lugar donde se implementa: un colegio, un instituto, o incluso, un país. Tünnermann (2008), define:

> “El modelo educativo es la concreción, en términos pedagógicos, de los paradigmas educativos que una institución profesa y que sirve de referencia para todas las funciones que cumple (docencia, investigación, extensión, vinculación y servicios), a fin de hacer realidad su proyecto educativo. El modelo educativo debe estar sustentado en la historia, valores profesados, la visión, la misión, la filosofía, objetivos y finalidades de la institución.” (p. 15)

Así, un modelo educativo es un conjunto de opciones asumidas para formar un estudiante de un ciclo escolar determinado, al cual la institución se propone haberlo dotado a su egreso de un conjunto de elementos culturales considerados necesarios para su desarrollo personal y social (Bazán Levy, 2014).

En el caso del centro de prácticas docentes donde se llevó a cabo esta investigación, al que se hará mención como “El Colegio”, es una institución privada ubicada al poniente de la Ciudad de México, en la alcaldía Álvaro Obregón. Ofrece una alternativa para aquellas familias para las cuales el inglés es una prioridad. El colegio incluye las secciones desde preescolar hasta preparatoria.

El Colegio sigue los programas oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP) para la sección secundaria y de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), para la sección de Preparatoria, enriqueciéndolos con proyectos educativos propios multidisciplinarios, programas completos de inglés (incluso algunas materias se imparten en este idioma), entre otras actividades culturales vespertinas extracurriculares. Además, el Colegio cuenta con amplios espacios para desarrollar sus actividades deportivas como básquetbol, vóleibol, fútbol, danza y gimnasia, ofreciendo una educación integral para sus estudiantes.

Las labores son en el turno matutino con un horario de lunes a viernes de 7:00 a 14:40 hrs. Su modalidad de trabajo es escolarizada, aunque en las fechas donde se realizaron las prácticas docentes era hibrida sincrónica, punto que se detallará más adelante en esta sección. El número promedio de alumnos por cada grupo es de 20 a 25.

Los estudiantes pertenecen a los tres estratos sociales más altos, cuyos padres se desempeñan como gerentes, directores, destacados profesionistas y empresarios en el ramo industrial, comercial y de servicios, detalle que les permite tener acceso a diversos recursos tecnológicos.

El modelo educativo que sigue el Colegio es el modelo constructivista de Lev Seminovitch Vygotsky. “El constructivismo es una perspectiva psicológica y filosófica que sostiene que las personas forman o construyen gran parte de lo que aprenden y comprenden” (Bruning et al., 2004, citado por Schunk, 2012, p. 229). Dicha construcción tiene su base en la sociedad, ya que, es en las relaciones que construye un individuo donde se forjan sus conductas y sus pensamientos, que se relacionan directamente con sus aprendizajes. La teoría de Vygotsky es considerada como una “teoría socio-histórico-cultural del desarrollo de las funciones mentales superiores”, como la atención voluntaria, memoria lógica, pensamiento verbal y conceptual, emociones complejas, entre otras, las cuales no podrían surgir y constituirse en el proceso del desarrollo sin la contribución constructora de las interacciones sociales (Ivic, 1994).

Al constructivismo se le relaciona mucho con el concepto de “andamiaje”. Un andamio es un armazón metálico desmontable, constituido por planchas metálicas y tubos que se usa para trabajar en la construcción o reparación de un edificio. Al hacer una analogía, los andamios son esas contribuciones que hacen las relaciones sociales de los individuos, y las reparaciones o construcciones son los aprendizajes que adopta el individuo apoyado en esos andamios. Las personas aprenden de manera social y lo trasladan a lo individual, esto es, crean su propio aprendizaje a partir de sus relaciones sociales.

> Para Vygotsky, (…) la enseñanza sólo es eficaz cuando señala el camino del desarrollo (Tryphon & Vonéche, 2000, citado por Ledesma, 2014). Muestra un factor como la sabiduría popular que se inclina a los saberes que tenemos por nuestra experiencia social y cultural como comunidad con un aprendizaje situado. “El pensamiento y la palabra no están relacionados entre sí a través de un vínculo primario. Esa relación surge, cambia y crece en el trascurso del propio desarrollo del pensamiento y la palabra” (Vigotsky L., 2001, citado por Ledesma, 2014) produciéndose de esta manera continuidad para la enseñanza y aprendizaje, que definitivamente se encuentra en constante construcción. (Ledesma, 2014, p. 20)

Actualmente, muchas instituciones educativas hablan de poner al alumno en el centro, es decir, una enseñanza más enfocada en los alumnos. En vez de hablar de cómo se adquiere el conocimiento, se habla de cómo se construye, adoptando así este modelo constructivista de Vygotsky.

> Un supuesto fundamental del constructivismo es que las personas son aprendices activos y desarrollan el conocimiento por sí mismas (Geary, 1995, citado por Schunk, 2012) (…) Algunos creen que las estructuras mentales se vuelven un reflejo de la realidad, mientras que otros (…) consideran que la única realidad que existe es el mundo mental del

> individuo. Los constructivistas también difieren en el grado en que adjudican la construcción del conocimiento a las interacciones sociales con los profesores, compañeros, padres y otros (Bredo, 1997, citado por Schunk, 2012). Otro supuesto del constructivismo es que los profesores no deben enseñar en el sentido tradicional de dar instrucción a un grupo de estudiantes, sino que más bien deben estructurar situaciones en las que los estudiantes participen de manera activa con el contenido a través de la manipulación de los materiales y la interacción social. (Schunk, 2012, p. 231)

El constructivismo tiene muchas variantes y no hay ninguna que sea mejor que otra, o que posea una veracidad absoluta en cuanto de aprendizaje se refiere. Las construcciones de las que se habla suceden de lo social a lo individual, pero eso no significa que todas las personas construyan el mismo conocimiento sobre un tema, y, sobre todo, un conocimiento que se le pueda calificar como “correcto” o “significativo”. Evidentemente, es bastante provechoso que los alumnos trabajen de manera colaborativa en distintos temas, porque se aplica muy bien el constructivismo de esta manera, pero se debe tomar en cuenta el contexto de los alumnos, los objetivos de aprendizaje, el tiempo, entre muchas otras variables que sólo el profesor puede observar en la interacción con su grupo. Esto es lo más importante y es un concepto fundamental que todo profesor debe entender, por lo que se convierte en un profesional de la docencia.

“El mundo se puede construir mentalmente de muchas formas diferentes, de manera que ninguna teoría posee la verdad. Esto se aplica incluso al constructivismo: hay muchas variedades y ninguna versión debe ser considerada más correcta que otra” (Derry, 1996; Simpson, 2002, citado por Schunk, 2012, p. 230).

> El conocimiento no es impuesto desde el exterior de las personas, sino que se forma dentro de ellas. Las construcciones de una persona son verdaderas para ella, pero no necesariamente para los demás. Esto se debe a que las personas producen conocimientos con base en sus creencias y experiencias en las situaciones (Cobb y Bowers, 1999, citado por Schunk, 2012), las cuales difieren de una persona a otra. Así, todo el conocimiento es subjetivo y personal, y es producto de nuestras cogniciones (Simpson, 2002, citado por Schunk 2012). El aprendizaje está situado en contextos (Bredo, 2006, ciado por Schunk 2012, p. 231).

Las personas reaccionan y actúan ante diversos estímulos del ambiente y la sociedad con base a lo que han aprendido de los mismos, eso es indiscutible, pero un detalle más importante del constructivismo es que supone al alumno dispuesto a aprender y construir más conocimiento, lo que no necesariamente es así. Precisamente, debido a sus propias experiencias en sociedad y en diversos ambientes de desarrollo, un alumno puede no tener una buena disposición hacia la materia debido a malas concepciones que guarda de la misma.

En este sentido, el modelo constructivista aporta “el conjunto de opciones”, como las llama Bazán Levy (2014) que sigue el Colegio para dar a sus alumnos las herramientas necesarias para su desarrollo personal, cultural y profesional.

En resumen, el profesor que siga el modelo constructivista del colegio debe hacer un diagnóstico sobre los conocimientos previos de sus alumnos, para usar éstos como base sobre la cual puedan ellos construir más conocimiento, aspecto de suma importancia sobre todo en la clase de matemáticas. Se debe crear un ambiente propicio y de motivación para que los alumnos, en colaboración con sus pares y el profesor, se mantengan involucrados activamente en su propio aprendizaje, lejos de competir.

Desde que la Organización Mundial de la Salud declaró pandemia a la enfermedad llamada COVID-19, y posteriormente, la Secretaría de Educación Pública emitiera el acuerdo número 02/03/20, el 16 de marzo del 2020 a través del Diario Oficial de la Federación, en donde menciona:

> “(…) se suspenden las clases en las escuelas de educación preescolar, primaria, secundaria, normal y demás para la formación de maestros de educación básica del Sistema Educativo Nacional, así como aquellas de los tipos medio superior y superior dependientes de la Secretaría de Educación Pública”. (Diario Oficial de la Federación, [DOF], 2020).

Desde marzo del 2020, cada institución educativa se ha visto en la necesidad de ajustar su modelo educativo debido a las condiciones sanitarias originadas por la pandemia COVID - 19, esto es, en medida de lo posible, cumplir con los principios de su modelo educativo con todas las restricciones y situaciones que originan dichas condiciones sanitarias. Esta problemática llevó a las escuelas a cambiar su modalidad de trabajo y, en el Colegio en particular, fue difícil definir la modalidad de trabajo, ya que parecía una mezcla entre modalidad en línea y presencial. No había una regla fija de asistencia por parte de los estudiantes. Un alumno podía asistir cierto día de la semana a clases presenciales y al siguiente día tomar las clases desde casa, o bien, asistir una semana completa y la siguiente tomar las sesiones en línea, por ejemplo. Esto condujo a tener alumnos tanto presenciales como en línea todos los días, sin un patrón específico de asistencia en ninguna de las “dos” modalidades. Lo único que es fijo es el horario de la clase, donde el profesor debe estar de manera presencial en el colegio y, al mismo tiempo, conectado en video llamada para atender a los alumnos que decidan tomar la clase en línea.

En todas las instituciones de educación, desde el nivel básico hasta superior, se trabajó con lo que se le conoce como “Enseñanza Remota de Emergencia” (ERE), cuyo objetivo es, como menciona Hodges (citado por Berruecos, 2020): “proveer temporalmente de acceso a la instrucción y a las ayudas pedagógicas de manera a que su establecimiento sea rápido y que esté disponible de manera confiable durante la emergencia o crisis”. Cada institución adoptó y moldeó su propia definición de modalidad educativa sin un sustento teórico, y, por cuestiones de marketing principalmente, se asoció la ERE con las distintas modalidades de la Educación a Distancia (EAD): flexible, abierta, virtual, semi-presencial, mixta, auto dirigida, híbrida, en línea, sincrónica, asincrónica, entre muchas otras (Berruecos, 2020). Esto se tomó como normal, ya que, como afirma García Arieto (2020): “ni si quiera todos los estudiosos entienden el término a distancia de similar forma” (p.13).

La EAD implica la separación física entre docentes y estudiantes, por lo que hay una comunicación e interacción mediada entre ellos. Es muy tentador decir que tal mediación se lleva a cabo sólo a través de las tecnologías digitales que conocemos hoy en día (Berruecos, 2020) , además de una organización / institución, pero no es así.

> La educación a distancia es un sistema tecnológico de comunicación bidireccional (multidireccional), que puede ser masivo, basado en la acción sistemática y conjunta de recursos didácticos y el apoyo de una organización y tutoría, que, separados físicamente de los estudiantes, propician en éstos un aprendizaje independiente y cooperativo. (García Aretio, 2020, p. 23)

Para poner un orden que ayude a identificar la modalidad de trabajo del Colegio en ese momento, es preciso dividir la EAD en dos sub-modalidades: la EAD tradicional y la EAD digital, sin dejar de tener en cuenta que la EAD digital sigue siendo EAD, sólo que, regida por los recursos tecnológicos actuales, tal como se muestra en el siguiente esquema:

Educación a Distancia (EAD)

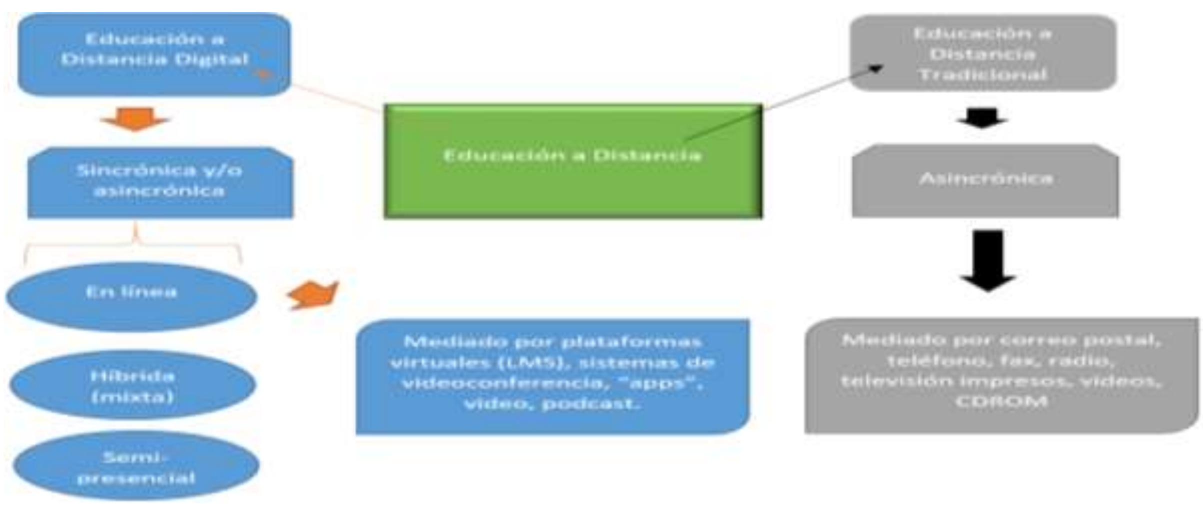


Figura 1.3 - Gráfico de Educación a Distancia (EAD).

Fuente: Elaboración propia en base a artículo de Berruecos (2020).

Se deben definir algunos términos que aparecen en estas divisiones para establecer las diferencias entre las modalidades adoptadas, y, en particular, la modalidad de trabajo del Colegio.

Los términos de sincrónico y asincrónico se refieren a cómo se lleva a cabo el aprendizaje. Tal como menciona Delgado (2020): “en el sincrónico, los alumnos tienen la oportunidad de aprender en interactuar en el momento (o “en vivo”) con su profesor y sus compañeros (…), es un tipo de aprendizaje grupal, ya que todos están aprendiendo al mismo tiempo”. En contraste, el aprendizaje asincrónico “puede suceder (…) estando desconectados a través de videos, material o recursos educativos previamente proporcionados por la profesora o el profesor (…); se aprende lo mismo pero cada alumno a su ritmo” (Delgado, 2020).

La ventaja del modelo asincrónico es que permite una mayor independencia del alumno al darle la oportunidad de organizar su tiempo con los materiales didácticos disponibles en todo momento. La desventaja sería que, si se llegara a presentar una duda sobre dichos materiales, ésta no podrá ser resuelta en ese momento, lo que convierte a su vez a esta desventaja en la principal ventaja del modelo sincrónico, ya que hay una interacción en tiempo real entre maestro y alumnos. Por otro lado, la principal desventaja de la modalidad sincrónica es que depende de la tecnología para que se lleve a cabo, como tener el equipo para conectarse, el acceso a internet estable, etcétera (Delgado, 2020).

La interacción entre las EAD

Figura 1.4 - Interacciones en EAD tradicional y digital.

Fuente: Tomado de Berruecos (2020)

Respecto a los modelos híbridos, Castillo (2021) afirma: “un modelo híbrido significa que combina una parte presencial con una parte a distancia (…), se combinan situaciones cara a cara con actividades en las que el participante puede entrar a un aula virtual y desarrollar en el momento que desee, no en un horario fijo”. Esto es, el profesor y los alumnos deciden en qué momento puede ser mejor realizar cierta actividad de manera presencial y qué actividad podría ser realizada a distancia, de acuerdo con las necesidades de aprendizaje. En un futuro, incluso podrían definirse asignaturas pertenecientes a un programa de estudios que pudieran cursarse de manera totalmente híbrida, por ejemplo, asignaturas que necesiten el uso de laboratorios.

Otra definición del modelo híbrido puede ser que, es aquel que se caracteriza por brindar flexibilidad al combinar estrategias, métodos y recursos de las modalidades presencial y en línea, es decir, permite combinar entornos (aula física y virtual), tiempos (sincronía y asincronía) y recursos (analógicos y digitales) para la adquisición de conocimientos y el desarrollo de competencias del estudiantado (Berruecos, 2020).

Parece ser que ambas definiciones concuerdan en la realización de actividades presenciales y en línea (sincronía y asincronía), organizadas de acuerdo con el contexto de la institución, clase, etcétera. Pero, como mencionan Kanuka y Conrad (citados por García Arieto, 2020), esta realidad complica aún más las delimitaciones conceptuales y lleva a los estudiosos e investigadores a grandes inconsistencias terminológicas. Aunque, independientemente de tales inconsistencias, los recursos tecnológicos con los que se cuenta actualmente han destruido las barreras del espacio y tiempo al permitir con un solo "clic", pasar de lo asincrónico a lo sincrónico o viceversa, dando lugar a que ninguna de las dos modalidades sea exclusiva de la EAD digital (Berruecos, 2020).

Así, es muy importante conocer el modelo educativo y la modalidad de trabajo de la institución, ya que esto permite a los profesores diseñar las estrategias de enseñanza adecuadas que den lugar a aprendizajes de calidad. Tal como lo dice Chuang (citado por Berruecos, 2020): "el aprendizaje a distancia necesita de una pedagogía de aprendizaje a distancia", punto a considerar debido a la forma de asistencia del alumnado del Colegio, es decir, el profesor debe diseñar las estrategias adecuadas para generar aprendizajes de calidad en los alumnos que tiene en ese momento de manera presencial y en línea, bajo un modelo constructivista.

Así, se concluye que la modalidad de trabajo adoptada por el Colegio cae dentro de lo híbrido, pero no dentro de lo asincrónico, de acuerdo con las definiciones mencionadas anteriormente. No se hace una combinación de actividades sincrónicas y asincrónicas (al menos no en la materia de matemáticas), sino que, la clase se imparte de una manera presencial y en línea al mismo tiempo y en un horario fijo para la clase, es decir, de manera sincrónica. Al tener esta característica de algunos alumnos en modalidad presencial y al mismo tiempo otros alumnos en línea, sin un patrón definido de asistencia presencial, se concluye que la modalidad de trabajo en la sección de bachillerato del Colegio es híbrida sincrónica, dentro un modelo educativo constructivista. De aquí en adelante, se hará referencia a esta modalidad de trabajo.

Una vez identificados el modelo educativo y la modalidad de trabajo, es labor del profesor diseñar las estrategias didácticas, un plan de trabajo adecuado que nos ayude a optimizar la tecnología para que los estudiantes obtengan ese aprendizaje de calidad que se busca. Se debe tratar de integrar todos los recursos, actividades, estrategias y metodologías apropiadas para lograr cada objetivo concreto de aprendizaje.

2. PROPUESTA METODOLÓGICA

2.1. Pregunta de investigación y objetivos

> "Uno que ya pasó por varias pruebas y no ha perdido la esperanza de escalar los cielos, eso es un maestro" UNAM, (1983)

Después de revisar en el capítulo anterior las habilidades que desarrolla el estudio de la geometría, los problemas en su enseñanza, los niveles de comprensión de la geometría aportados por el matrimonio holandés Van Hiele, así como al tomar en cuenta la modalidad de trabajo del centro de prácticas docentes, el docente debe crear un plan de acción, un plan bajo su modelo de enseñanza que le permita responder a las necesidades presentes de la mejor manera posible. Como cualquier otro profesional, el profesor es la persona que está capacitada para resolver problemas que se presentan en su profesión a través de saberes que posee, en este caso, problemas que surgen dentro de la docencia. Particularmente, la problemática de la enseñanza de la parábola bajo la modalidad híbrida sincrónica.

De este modo, surge la pregunta de investigación y objetivos:

¿Cómo diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del tema de parábola en el nivel medio superior que aporte a los alumnos el desarrollo de las habilidades de Hoffer, así como en el mejoramiento de su nivel de comprensión geométrico de Van Hiele, bajo la modalidad híbrida sincrónica?

<u>Objetivo general</u>:

Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del tema de parábola que desarrolle las habilidades de Hoffer y la comprensión geométrica de Van Hiele bajo la modalidad híbrida sincrónica.

<u>Objetivos particulares</u>:

1) Diseñar estrategias didácticas dentro de un plan de enseñanza de la parábola, en el nivel medio superior, que contribuyan al desarrollo de las habilidades de Hoffer.
2) Construir estrategias didácticas que contribuyan, de manera progresiva, a que el alumno pueda alcanzar el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele para el tema de parábola en el nivel medio superior.
3) Planear actividades que le permitan al alumno transitar entre los diferentes sistemas de representación (verbal, gráfico y algebraico) de la parábola, para contribuir al mejoramiento del aprendizaje de la geometría.
4) Diseñar un plan de evaluación formativo que arroje evidencia de la evolución del aprendizaje de los alumnos del tema de parábola, así como del desarrollo de las habilidades de Hoffer y de su nivel de comprensión geométrica.
5) Usar los diferentes recursos tecnológicos con los que se cuenta para responder a la necesidad de la enseñanza de la geometría bajo la modalidad híbrida sincrónica.

2.2. El modelo de enseñanza

“Quien enseña aprende al enseñar y quien aprende enseña al aprender”
Freire (2004)

Hablar sobre modelos de enseñanza es un tema bastante amplio, complejo y controvertido. Amplio debido a la cantidad de modelos existentes, complejo por las características de cada uno de ellos, y lo controvertido se adjunta a las opiniones de diversas índoles sobre los aspectos positivos y negativos de cada uno, además de la discusión sobre el mejor modelo de enseñanza. ¿Existe un mejor modelo de enseñanza?

Los modelos de enseñanza son enfoques específicos de la instrucción que están diseñados para ayudar a los estudiantes a adquirir un conocimiento, así como para desarrollar su habilidad para pensar críticamente; constan de una serie de pasos específicos que ayudan a los estudiantes a alcanzar sus objetivos, basados en la teoría del aprendizaje y la motivación (Eggen y Kauchak, 2009). Para hacer una analogía, se puede decir que el modelo de enseñanza es una especie de plano a seguir para realizar una construcción en ingeniería civil o arquitectura. Estos profesionales evalúan el terreno o lugar, analizan el proyecto y determinan el plano a seguir para llevarlo a cabo, plano que puede contener diversas estrategias para cada punto específico. Lo mismo sucede con los modelos de enseñanza: el profesor evalúa el grupo y sus objetivos de aprendizaje, opta por un modelo de enseñanza donde diseña las estrategias a seguir para alcanzar ciertos objetivos de aprendizaje. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que, un plano no sustituye ni dicta por completo las habilidades del ingeniero o arquitecto. De la misma forma, un modelo de enseñanza tampoco sustituye la capacidad de enseñar del profesor, ni dicta por completo su forma de proceder en el aula.

La labor del profesor, la enseñanza, es un proceso bastante complejo del cual existen numerosas definiciones, mismas que han sido la base de esos distintos modelos de enseñanza. Enseñar, según Titone (citado por León, 1998): “es el acto en virtud del cual, el docente pone de manifiesto los objetos de conocimiento del alumno para que éste los comprenda (…) Si bien la enseñanza se realiza en función del que aprende, el aprendizaje no es su correlato necesario, aunque éste sería su justificación plena” (p. 33). Como se menciona, el aprendizaje es la justificación plena de la enseñanza, sin embargo, los modelos de enseñanza se plantean al margen de los contextos existentes en el aula, en donde son docentes y alumnos los involucrados y conocedores de dichos contextos, que, a su vez, intervienen en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Es decir, el profesor debe adaptar su (s) modelo (s) de enseñanza de acuerdo con los objetivos de aprendizaje que busca con sus alumnos, al tomar en cuenta los contextos correspondientes a sus alumnos, la institución y su propio contexto.

En apoyo a esta idea, Mercado y Luna (2013) afirman: "La enseñanza se desarrolla en contextos sociales complejos y variables, difícilmente previstos por aquellos modelos que proponen una docencia ideal" (p. 22). Los docentes son los que deben construir su propio modelo de enseñanza de acuerdo con su personalidad, su visión y su profesionalismo, modelo que puede ser enriquecido con diversas estrategias de acuerdo con las características que observa de sus alumnos y con los objetivos de aprendizaje que se busca en cada grupo y materia en particular, donde su único límite sea la imaginación. Adoptar un único modelo de enseñanza y seguir su teoría al pie de la letra, puede no necesariamente conducir a los resultados de aprendizaje esperados, ya que, como se mencionó, se deben tomar en cuenta muchas variables que envuelven el contexto del profesor, los alumnos, e incluso, de la institución. Tal como menciona Freinet (citado por Díaz – Barriga 2014): "Leí a (…) Rousseau, más tarde a Pestalozzi y a Freire, (…) fui a los congresos sobre la escuela activa en Europa. Cuando volví a encontrarme solo en mi clase, me sentí desesperado; ninguna de las teorías leídas y estudiadas, podía trasladarse a mi escuela de aldea" (minuto 19:05).

Los modelos de enseñanza se pueden clasificar en técnicas autoritarias frente a técnicas democráticas, con enfoque de descubrimiento contra de exposición, en darle prioridad al docente y no al estudiante, los de enfoque directo contra los de enfoque indirecto de enseñanza (Eggen y Kauchak, 2009). Tales modelos son los siguientes:

a) Modelo de interacción de grupo
b) Modelo inductivo
c) Modelo de adquisición de conceptos
d) Modelo interrogativo
e) Modelo de aprendizaje basado en problemas
f) Modelo de instrucción directa
g) Modelo de exposición – discusión (Eggen y Kauchak, 2009)

León (1998) define el modelo de exposición – discusión como: "Se entiende como método o enseñanza expositiva la presentación oral de un tema lógicamente estructurado (…) La enseñanza expositiva puede clasificarse a partir de dos posiciones:

1) Exposición dogmática: desde esta postura el mensaje no puede ser contestado por lo que debe aceptarse sin discusiones. Además, existe la obligación de repetirlo cuando se verifica el aprendizaje.
2) Exposición abierta: aquí, el mensaje presentado por el profesor es sólo un recurso para dar inicio a la participación del grupo; ésta puede ser tan rica en posibilidades, tener como única limitante la imaginación del docente" (p. 49).

De acuerdo con la forma de enseñar del profesor, la modalidad de trabajo híbrida sincrónica, las características de los alumnos, así como el tema a trabajar (la parábola), los modelos de enseñanza que se toman como base para el diseño de las estrategias (véase el siguiente capítulo) en esta investigación, son el modelo inductivo y el de enseñanza expositiva abierta.

El modelo inductivo es una estrategia directa cuyo objetivo es ayudar a los alumnos a adquirir una comprensión completa y profunda de los temas. En este modelo, el profesor presenta definiciones y ejemplos que ilustran el tema para después guiar a los alumnos a formar su propia comprensión del mismo. Este modelo requiere de mucha habilidad del profesor para hacer preguntas que conlleven a la participación y guiar el pensamiento de sus alumnos (Eggen y Kauchak, 2009).

En primer lugar, en el modelo inductivo el tema es muy bien definido y especificado. Después, se pasa a los ejemplos cuidadosamente elegidos para conducir a los alumnos a la comprensión profunda del tema. Por último, guiar a los alumnos para pasar de los ejemplos a las características esenciales y conclusiones generales del tema a través de diversas estrategias. Las sesiones en donde se utiliza el modelo inductivo pueden tomar más tiempo que una sesión de una simple exposición, pero tiende a dar un mejor resultado en la retención y transferencia del tema (Mayer, citado por Eggen y Kauchak, 2009).

La guía del profesor en este modelo es un aspecto de suma importancia, ya que, sin ella, los alumnos pueden interpretar de manera errónea la información o no percatarse de detalles importantes en los ejemplos, además de caer en discusiones sin sentido y extraviarse del objetivo. El descubrimiento guiado, bajo la dirección de un profesor hábil, es mucho más eficaz que las lecciones en que los alumnos exploran por cuenta propia (Mayer, citado por Eggen y Kauchak, 2009).

Una sesión impartida con el modelo inductivo consta de cinco fases interrelacionadas. Dichas fases, así como sus funciones de aprendizaje se describen en la tabla 2.1:

Fases y funciones de aprendizaje del modelo inductivo

EL MODELO INDUCTIVO	
FASES DEL MODELO INDUCTIVO Y SUS FUNCIONES DE APRENDIZAJE	
Fase	*Funciones del aprendizaje*
Fase 1: Introducción	Establecer el enfoque de la sesión. Atraer la atención del alumno.
Fase 2: La fase abierta	Promueve la participación del estudiante a través de los ejemplos y asegura la respuesta correcta.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia un solo concepto, generalización o regla, a través de las preguntas abiertas facilitando la formación del conocimiento.
Fase 4: El cierre	La comprensión del alumno queda resumida y vinculada con la fase anterior.
Fase 5: La aplicación	Los alumnos aplican su comprensión a nuevos contextos. Vinculan el nuevo aprendizaje con el mundo real.

Tabla 2.1 - Descripción de las fases y funciones de aprendizaje del modelo inductivo de acuerdo con Eggen y Kauchak (2009).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

El modelo inductivo, a su vez, sirve para aumentar la motivación de los estudiantes, ya que, al ser un modelo con altos grados de participación, ésta se vuelve un factor importante que aumenta el interés de los alumnos en una actividad. A este respecto, Blumenfeld (citado por Eggen y Kauchak, 2009) menciona que cuanto mayor sea la participación del alumno, mayor será su interés en el tema. La participación también aumenta las percepciones de control y de autonomía, las cuales contribuyen a la motivación del alumno (Bruning, et. al., citado por Eggen y Kauchak, 2009).

Tanto el modelo inductivo como la enseñanza expositiva abierta generalmente son tomados como modelos "tradicionales", en donde viene implícita una idea errónea de conservadurismo. La misma definición de tradición aclara esta diferencia: "la continuación de ideas, instituciones y costumbres de la vida de los pueblos (…) Por tradición también se entiende el legado cultural que cada generación transmite a la siguiente y ésta debe conservar, mejorar y aumentar" (León, 1998, p. 32). En efecto, se habla de costumbres a conservar, pero también de un aumento y mejora de dichas costumbres, por lo cual, son cosas diferentes. El conservadurismo se muestra inamovible ante el cambio para mantener las costumbres caducas, mientras que el tradicionalismo coordina la conservación con el cambio (León, 1998).

No debe preocuparse el profesor cuando recurre a algún modelo o estrategia catalogada como tradicional, al contrario. Estos profesores entienden esta coordinación entre la conservación y el cambio, y se convierten en enlaces entre el pasado y el presente. A la vez, entienden la realidad como la síntesis del pasado y el presente, que incluye los proyectos del futuro. "La enseñanza expositiva ha constituido desde siempre el núcleo de todo sistema pedagógico y es muy probable que lo siga siendo porque se acepte o no, es el medio más eficaz de transmitir los grandes volúmenes de conocimiento necesarios en el proceso educativo" (León, 1998, p. 48).

Al final, independientemente del modelo de enseñanza que se elija, se debe tener presente que lo más importante es lo que sucede dentro del aula, el ambiente y la relación del profesor con sus alumnos. Enseñar, no solo implica la transmisión de conocimientos; enseñar también implica orientar, dirigir, animar, despertar el interés. Para ello, el profesor debe valerse de todo aquello que le permita y aconseje su imaginación y creatividad. "(…) Nada de lo que hagan otros me sirve; sólo me va a servir aquello que yo pueda construir en la relación pedagógica que tenga con los alumnos, de acuerdo a la formación que tengo, de acuerdo al manejo que tengo de la disciplina, de acuerdo a cómo percibo que con estos alumnos funcionan procesos de aprendizaje" (Díaz – Barriga, 2014, minuto 19:35).

En este sentido, Fullan y Hargreaves (citado por Mercado y Luna, 2013) afirman que los docentes:

> "Se ven sin cesar obligados a adoptar pequeñas e innumerables decisiones prácticas, cotidianas (…) La acción profesional incluye emitir juicios autorizados en situaciones de incertidumbre inevitable que son de gran importancia para los alumnos. Para esas decisiones son pocas, o no existen, las reglas de aplicación que se puedan enunciar claramente en un manual

y trasladar de manera sistemática de una situación a otra. Enfrentar a un alumno, o evitar el enfrentamiento. Dejar que el niño prosiga solo su actividad de descubrimiento o intervenir y dirigirlo. Tomar decisiones sobre disciplina, gobierno de la clase, imparcialidad, libertad del niño vs. necesidad de intervención y apoyo del docente. Lo que en buena parte define al profesionalismo del maestro es la aplicación de una habilidad, una experiencia y un saber acumulados en las circunstancias específicas y variables de la clase: su capacidad para tomar decisiones autorizadas e informadas en el medio rápidamente cambiante del aula" (Mercado y Luna, 2013, p. 28).

En conclusión, la respuesta a la pregunta: ¿existe un mejor modelo de enseñanza?, es que, evidentemente no. Un modelo de enseñanza se puede usar de base, de guía, pero el profesor debe ir más allá en su enseñanza, en el diseño de sus estrategias basadas en las necesidades de sus alumnos y en el contexto que observa en cada grupo. La docencia va mucho más allá de seguir las instrucciones de un modelo. Tal como mencionó José Vasconcelos el día del maestro de 1923: "El magisterio debe mirarse como una vocación religiosa y debe llevarse adelante (…) fiándolo todo en cada caso a la fe en una misión propia y en la causa del mejoramiento humano" (UNAM, 1983, p. 90). No importa el modelo de enseñanza que siga un profesor, sino el hecho de que su causa sea para el mejoramiento de sus alumnos y procurar su aprendizaje y felicidad a medida que le sea posible. "Enseñad el secreto de la felicidad, que según Tolstoi consiste en trabajar para la dicha de otros y no para la nuestra, es decir, para el ideal humano considerado como una anticipación y una senda del ideal divino.

Los profesores (…) mejor que ninguna otra clase de ciudadanos, están en condiciones de sentir y de propagar esta suprema enseñanza. Desde el momento en que dedican algo de lo más precioso de la vida, el tiempo, a ilustrar a sus semejantes, es porque hay en ellos cualidades de abnegación que se pueden transmitir a sus alumnos" (UNAM, 1983, p. 64)

En esta investigación se tomará como base el modelo inductivo y de exposición abierta. A lo largo de este trabajo se hará referencia a dichos modelos, aunque, como se ha mencionado, esto no significa que sean los mejores, sino que el profesor los empleará y enriquecerá en función de lo que observa en los alumnos.

2.3. El diseño de las estrategias didácticas

"Nunca tenemos la estrategia adecuada para trabajar; siempre tenemos una estrategia buena, no la perfecta" Díaz-Barriga (2014)

Un buen diseño de estrategias didácticas requiere, en primer lugar, que el profesor tenga muy presente su papel como profesional de la docencia, esto es, un profesional que diseña estrategias de acuerdo con las situaciones, el contexto, los objetivos y necesidades de aprendizaje que identifica de un grupo determinado de alumnos. "Todo docente necesita asumirse a sí mismo como un profesional, y un profesional no recibe recetas. Un profesional resuelve problemas con saberes que tiene" (Freire, citado por Díaz – Barriga, 2019, minuto 14:57).

En esta investigación, se pretende desarrollar habilidades geométricas, así como mejorar la comprensión geométrica a través de la resolución de problemas.

Las problemáticas dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría analítica y la parábola, las cuales fueron presentadas en el capítulo "La enseñanza de la geometría analítica y la parábola", donde algunos expertos en el tema identifican diversas áreas de oportunidad observadas en sus investigaciones, se pueden resumir en los siguientes grupos:

1) *Algebraicos*: Consiste en la memorización de las ecuaciones sin hacer procesos de análisis para su obtención, así como la dificultad de realizar procesos algebraicos.
2) *La visualización*: Dejar de lado la parte visual de los objetos geométricos por tratar la geometría desde la parte algebraica. La visualización constituye el soporte de la actividad cognitiva en geometría, porque es donde el estudiante evoluciona en su percepción de los objetos y en su potencial para la solución de problemas.
3) *Falta de relación entre elementos*: el alumno no logra reconocer los elementos de la parábola, por tanto, es muy difícil establecer una relación analítica de la ecuación con sus elementos. No se logra establecer una relación entre el vértice, la directriz y el foco.
4) *Transitar entre sistemas de representación*: Dificultad para reconocer la ecuación de la parábola dada su gráfica, graficar una parábola a partir de su ecuación, describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación canónica y su gráfica, así como realizar la conversión entre cada uno de los registros: gráfico, analítico algebraico y verbal
5) *Resolver problemas de aplicación (modelación)*: problemas en la enseñanza de la geometría en otros contextos. Aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas. Dificultad para lograr que los estudiantes asocien sus saberes a una situación real de aplicación.

Las investigaciones citadas dan un panorama de la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, sin embargo, lo más importante son las problemáticas del mismo proceso que el profesor observa con su propio grupo de alumnos, envueltos en sus propios contextos, porque no necesariamente serán las mismas.

Otro punto para considerar es que las estrategias se diseñaron para contribuir a medida de lo posible con el desarrollo de las habilidades geométricas de Hoffer (citado por Bressan, en INEE, 2008), las cuales son las habilidades visuales, de comunicación o verbal, de dibujo, lógica y de razonamiento, y las de aplicación y transferencia, para alcanzar de este modo el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele (citado por Alsina, 1997).

En la figura 2.1 se presenta el proyecto de trabajo diseñado por el profesor, en el que se intenta esquematizar el contexto tomado en cuenta para el diseño de sus estrategias didácticas, principalmente la modalidad de trabajo de la institución (híbrida sincrónica), las habilidades geométricas por desarrollar, los conocimientos previos de los alumnos, las áreas de oportunidad que se busca mejorar, así como los objetivos de aprendizaje del programa de estudios de la materia.

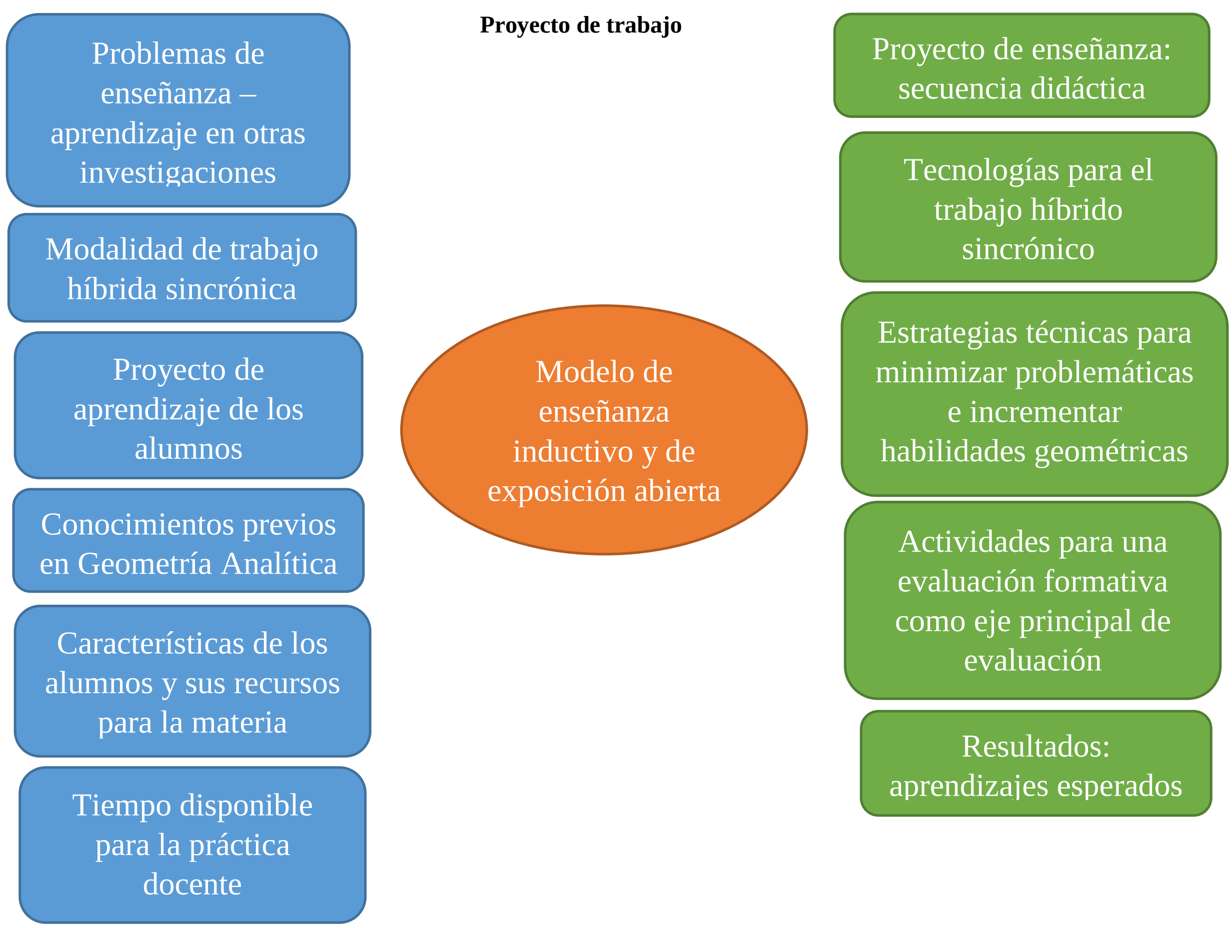


Figura 2.1 - Descripción esquemática de proyecto de trabajo para la impartición de cátedra del tema de parábola.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Se puede notar que, para la elaboración de este proyecto, se toma en cuenta la contribución al desarrollo de las habilidades geométricas de Hoffer, las problemáticas en el proceso de enseñanza – aprendizaje en otras investigaciones, y la modalidad de trabajo híbrida sincrónica de la institución.

Otro de los puntos del proyecto de trabajo son los conocimientos previos en Geometría Analítica, que representan la base sobre la cual se construye el conocimiento nuevo, además de que reflejan las áreas de oportunidad geométricas de los alumnos y que se convierten en objetivo para mejorar en la secuencia. Podría ser que las áreas de oportunidad sean de corte algebraico e, incluso, aritmético. Estos conocimientos previos serán medidos a través de una prueba llamada “pre-test”, cuyo diseño se describirá más adelante.

Respecto del tiempo disponible para realizar la implementación de las estrategias en la Práctica Docente, cabe mencionar que el grupo de alumnos con los que se implementó la estrategia no son alumnos “directos” del profesor. Se pidió permiso a su profesora titular para llevar a cabo la estrategia. Son alumnos que cursan el 5to año de preparatoria. El grupo está compuesto por 28 estudiantes, a los cuales se les identificará como Alumno 1, Alumno 2, …, Alumno 28. Para más detalles acerca de la descripción del centro de prácticas docentes “El Colegio” y del alumnado, el lector puede consultarlo en el capítulo “El modelo educativo y la modalidad de trabajo del centro de prácticas docentes”. La profesora titular del grupo otorgó dos semanas de sesiones frente al grupo para el desarrollo de la secuencia. De esta forma, se tienen 10 sesiones, ya que la materia se imparte 5 veces a la semana (véase anexo 1).

A continuación, se describen las estrategias implementadas en la secuencia didáctica.

2.3.1. Diseño de la prueba pre – test

Así, la primera sesión consiste en medir los conocimientos previos de los alumnos a través de la prueba pre-test. Los conocimientos previos necesarios para abordar el tema de parábola se resumen en la tabla 2.2:

Conocimientos previos de los alumnos

<table>
<tr><th colspan="3">Conocimientos previos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Corte</td><td>Temas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Aritmético</td><td rowspan="3">Algebraico</td><td>Suma y resta de términos semejantes</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de binomios al cuadrado</td></tr>
<tr><td>Completar cuadrados</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Geométrico</td><td>Identificación de rectas y circunferencias a través de su gráfica</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

		Relación adecuada entre la ecuación de una recta y circunferencia con su gráfica
		Identificación de los elementos de una circunferencia a través de su ecuación o gráfica
		Obtención de la ecuación de una circunferencia dados algunos de sus elementos
		Obtención de los elementos de una circunferencia dada su ecuación
		Uso de modelos de circunferencia para resolver problemáticas reales

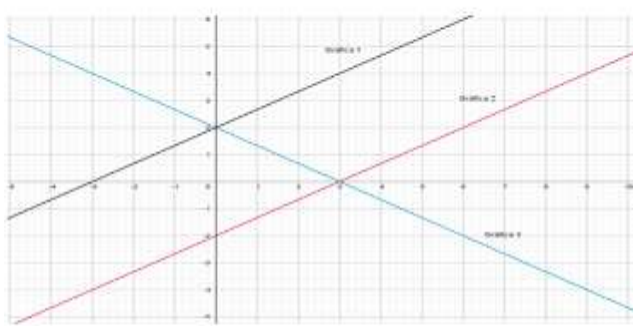
Tabla 2.2 - Temas que incluye la prueba pre-test para identificar los conocimientos previos de los alumnos.

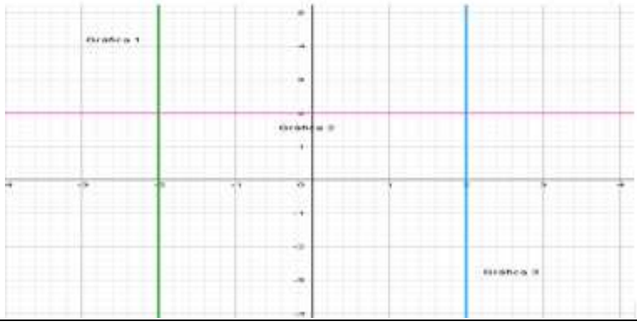
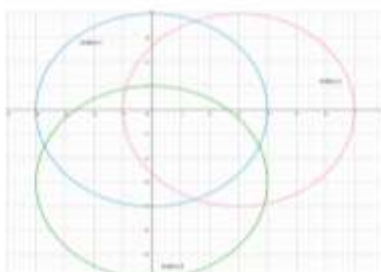
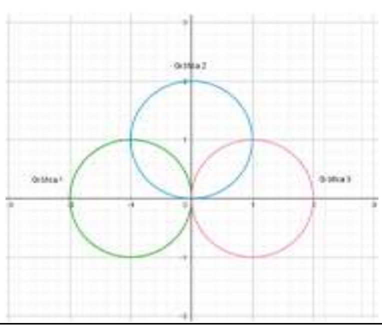
Fuente: Elaboración propia: JLBM

Para observar y medir tales conocimientos y habilidades previas de los alumnos, se diseñó la prueba pre-test, la cual consta de cinco reactivos, donde el segundo de ellos consta de cinco ejercicios. El diseño de estos reactivos tiene su idea en los objetivos particulares a los que se pretende llegar en esta investigación, la contribución al desarrollo de habilidades geométricas, los objetivos de aprendizaje, así como en las problemáticas de aprendizaje más comunes en la enseñanza de la Geometría Analítica en otras investigaciones. Para esto, cada reactivo cuenta con distractores diseñados con los errores más frecuentes de los alumnos al resolver un ejercicio o problema geométrico.

Para comenzar, en la tabla 2.3 se muestra la estructura y los objetivos de cada reactivo de la prueba pre-test:

Tabla descriptiva de los reactivos y sus objetivos del pre-test

Número de reactivo	Reactivo	Objetivo
1	1) Determine la ecuación general de la circunferencia con C(-1, 3) y radio r = 2 a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$	Detectar la falta de reconocimiento entre los elementos de la circunferencia, así como problemas de corte aritmético - algebraico en el proceder del alumno ante este tipo de ejercicios. Problemas con la habilidad de comunicación y lógica o de razonamiento.
2	2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.	Detectar la falta de relación entre una representación algebraica con una geométrica, problemas con la habilidad de visualización, comunicación y dibujo, la falta de relación entre los elementos de una recta o circunferencia con su ecuación, así como problemas de corte aritmético - algebraico en el proceder del alumno ante este tipo de ejercicios.
a	$2x - 3y = 6$ 	Mismo objetivo anterior

b	$x-2=0$ 	Mismo objetivo anterior
c	$y=-1$ 	Mismo objetivo anterior
d	$x^2+(y+3)^2=16$ 	Mismo objetivo anterior
e	$(x-1)^2+y^2=1$ 	Mismo objetivo anterior

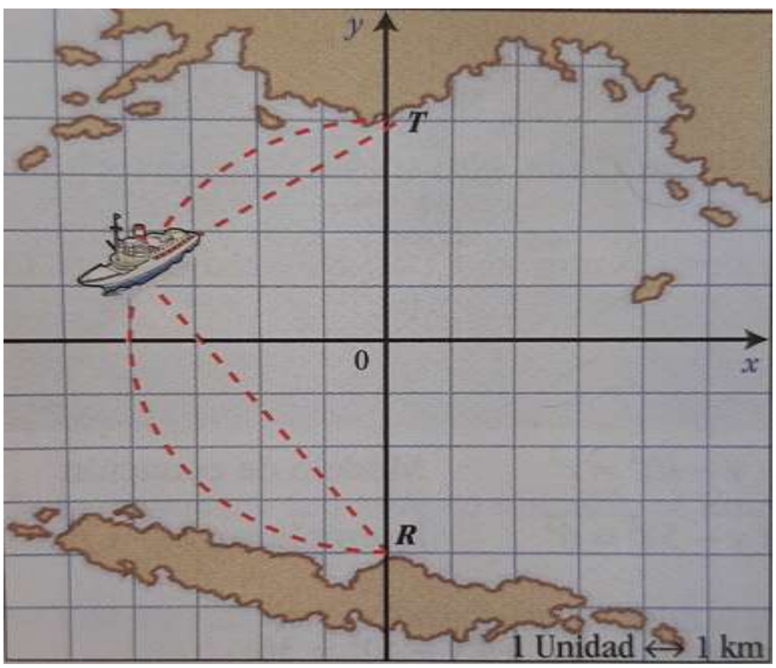
3	3) Identifica la gráfica que corresponde a la ecuación: $$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$	Detectar errores algebraicos al pasar de ecuaciones generales a canónicas en una cónica; errores de visualización geométrica (se dan opciones gráficas de respuesta), así como fallas al obtener los elementos de una cónica (circunferencia) a partir de su ecuación canónica. Problemas con habilidad lógica, de dibujo y comunicación.
4	4) A través de un sistema de navegación por radio, un barco turista se traslada de una isla a otra, conservando cuidadosamente sus distancias a dos faros situados en los puntos T y R (como se muestra en la figura) para no perder su ubicación. Encuentre la ecuación que describe su trayectoria entre las islas. 	Detectar la capacidad del alumno para modelar, crear o resolver problemas en contextos reales a través de herramientas geométricas (habilidad de aplicación y transferencia), así como problemas de corte aritmético - algebraico en el proceder del alumno ante este tipo de situaciones. Problemas de visualización, comunicación, dibujo y lógica o de razonamiento.
5	5) Con base a la pregunta anterior, ¿cuál es la longitud de dicha trayectoria seguida por el barco? a) 16π $unidades$ b) 8 unidades c) 4 unidades d) 8π $unidades$	Detectar problemas con la habilidad de visualización, comunicación, lógica, así como de aplicación y transferencia.

Tabla 2.3 - Pre-test: reactivos y sus objetivos.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Los reactivos, su respuesta correcta y los distractores se presentan a continuación. Los errores se encuentran señalados con rojo. Todos los reactivos y sus distractores son de creación original a excepción del reactivo 4 que fue tomado del texto de Ruíz (2019), sólo que se dividió en dos reactivos distintos, dando origen al reactivo 4 y 5 de esta prueba. Se detallan a continuación:

1) Determine la ecuación general de la circunferencia con *C* (-1, 3) y radio r = 2.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$

a) Correcta

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

b) Error en signo del primer binomio correspondiente a la ecuación canónica

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

c) Error en ambos binomios de la ecuación canónica

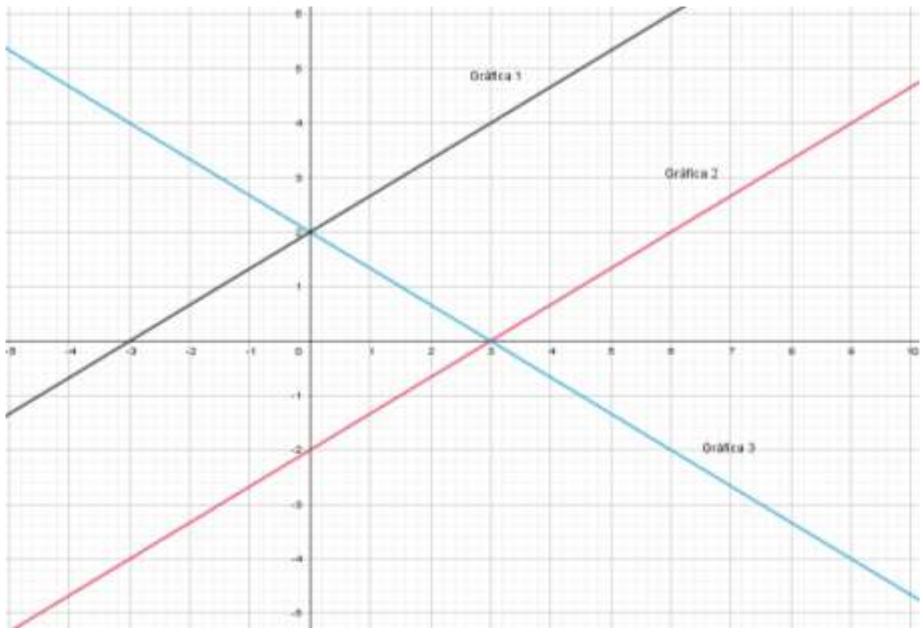
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

d) Error en considerar el radio sin elevar al cuadrado

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \mathbf{2}$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$$

2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

a) $2x - 3y = 6$

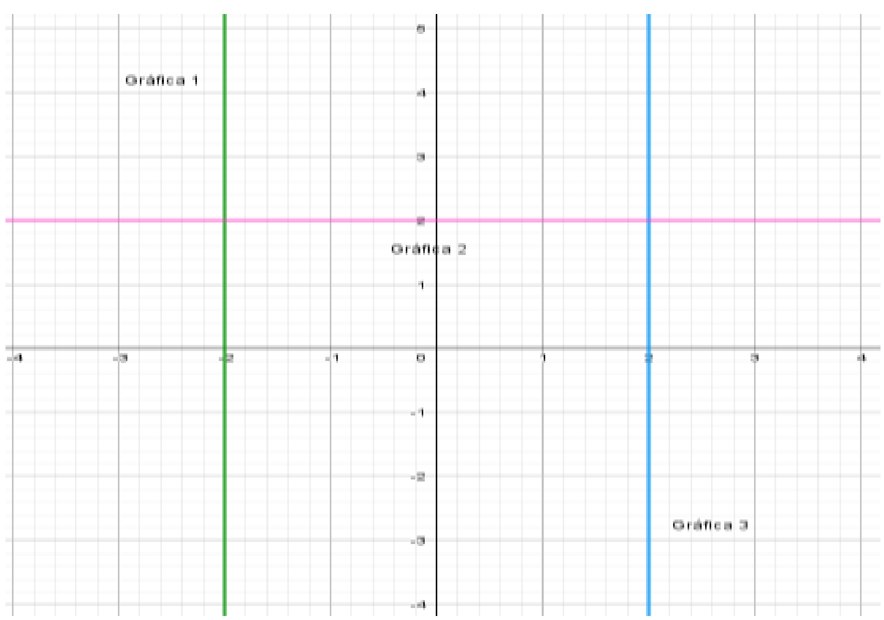


Gráfica 1.- Error en los signos de la abscisa y ordenada de la gráfica (error algebraico - geométrico)

Gráfica 2.- Correcta

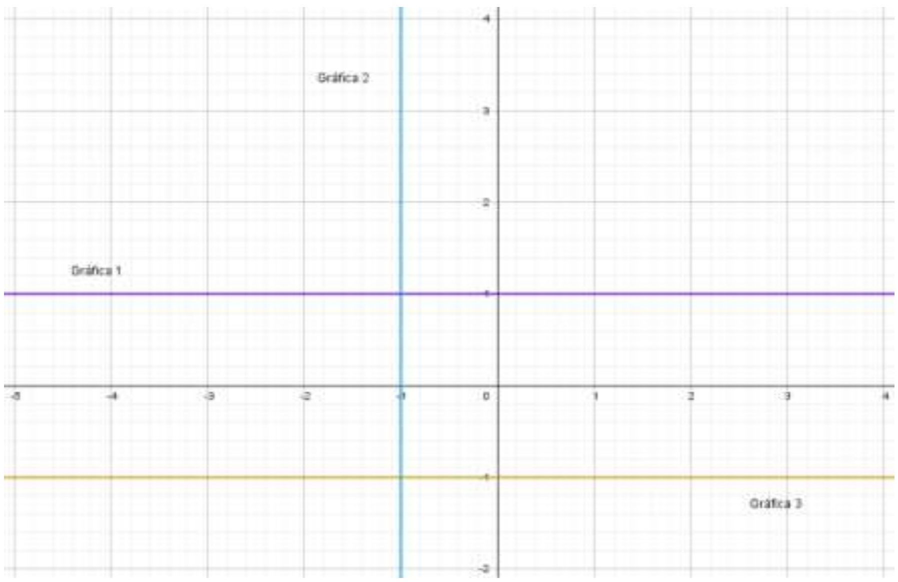
Gráfica 3.- Error en la ordenada de la gráfica (error algebraico - geométrico)

b) $x - 2 = 0$



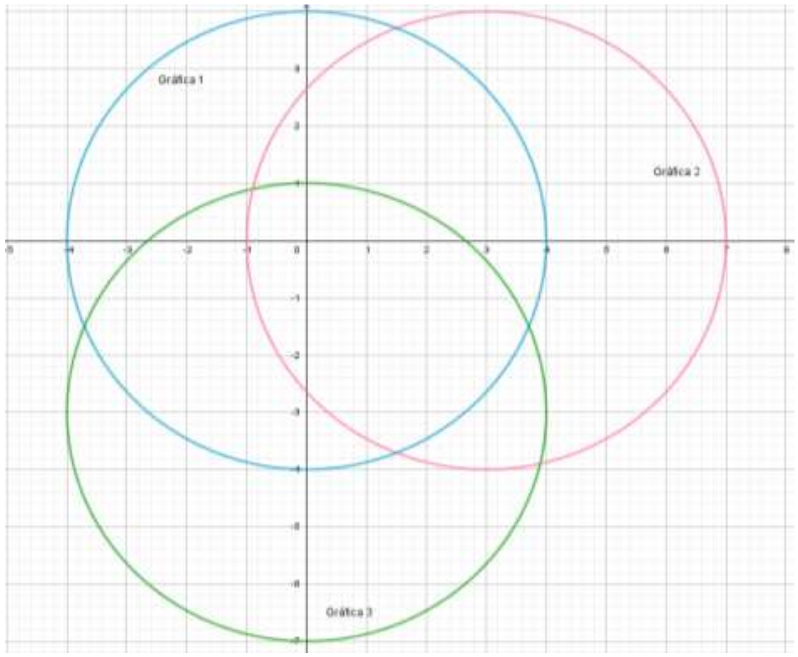
Gráfica 1.- Error en despeje de la variable (error algebraico)
Gráfica 2.- Error en concepto de recta horizontal y recta vertical (error geométrico)
Gráfica 3.- Correcta

c) $y = -1$



Gráfica 1.- Error en la ubicación de la recta correspondiente (error aritmético - geométrico)
Gráfica 2.- Error en concepto de recta horizontal y recta vertical (error geométrico)
Gráfica 3.- Correcta

d) $x^2 + (y+3)^2 = 16$

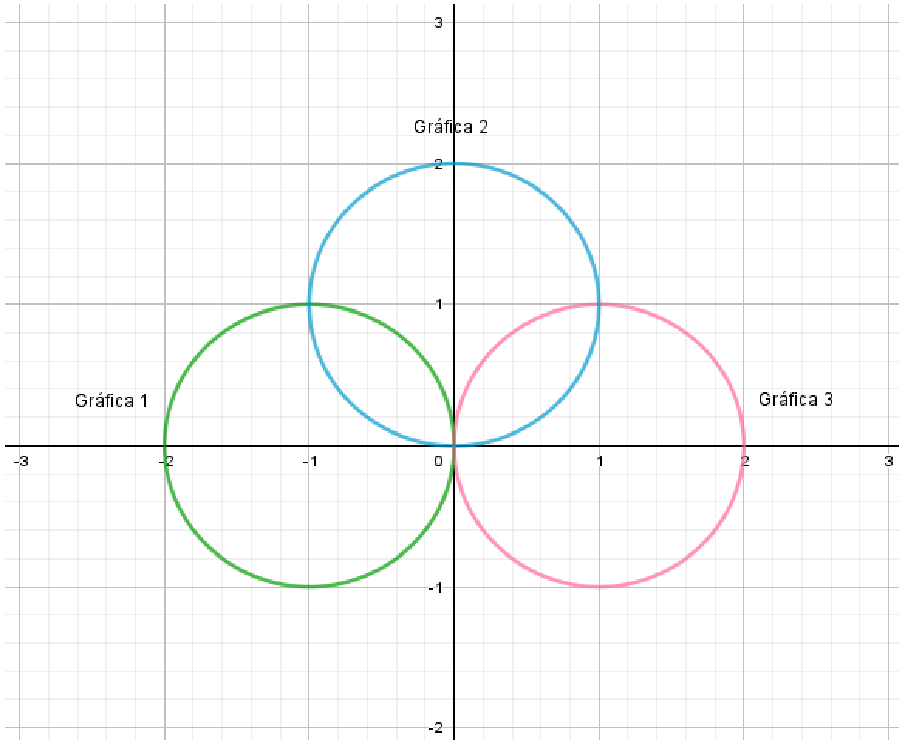


Gráfica 1.- Error; no identifica el centro de la circunferencia a partir de la ecuación canónica

Gráfica 2.- Error en invertir las coordenadas del centro de la circunferencia y con signo erróneo

Gráfica 3.- Correcta

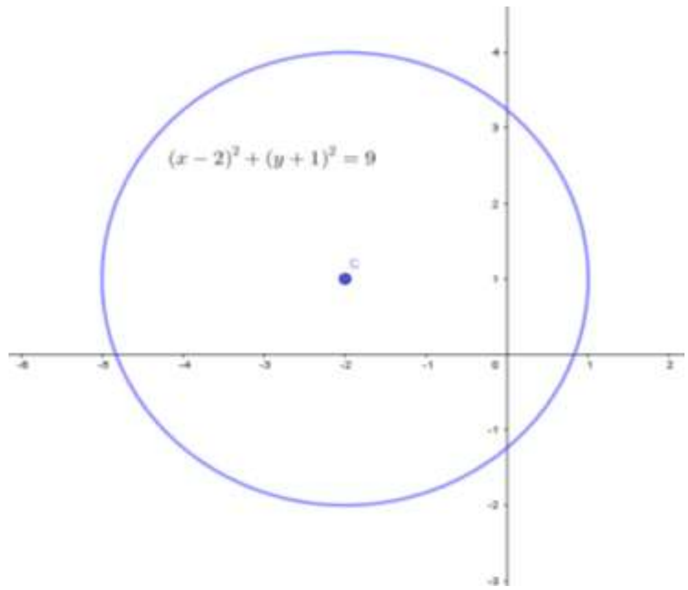
e) $(x-1)^2+y^2=1$



Gráfica 1.- Error en invertir las coordenadas del centro de la circunferencia y con signo erróneo
Gráfica 2.- Error en considerar erróneamente el centro de la circunferencia con ejes invertidos
Gráfica 3.- Correcta

3) Identifica la gráfica que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

a) Error al obtener las coordenadas del centro



$$x^2-4x+\left[\frac{1}{2}(4)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(4)\right]^2+y^2+2y+\left[\frac{1}{2}(2)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(2)\right]^2=4$$

$$x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=4$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=4+4+1$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

$$\rightarrow C\ (-2,1)\ y\ \ r=3$$

b) Error en la consideración del radio, sin sacarle raíz.

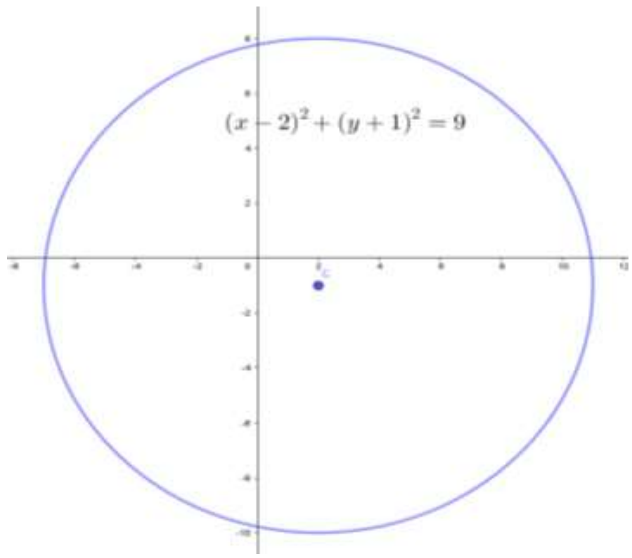
$$x^2-4x+\left[\frac{1}{2}(4)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(4)\right]^2+y^2+2y+\left[\frac{1}{2}(2)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(2)\right]^2=4$$

$$x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=4$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=4+4+1$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

$$\rightarrow C\ (2,-1)\ y\ \ r=9$$



c) Correcta

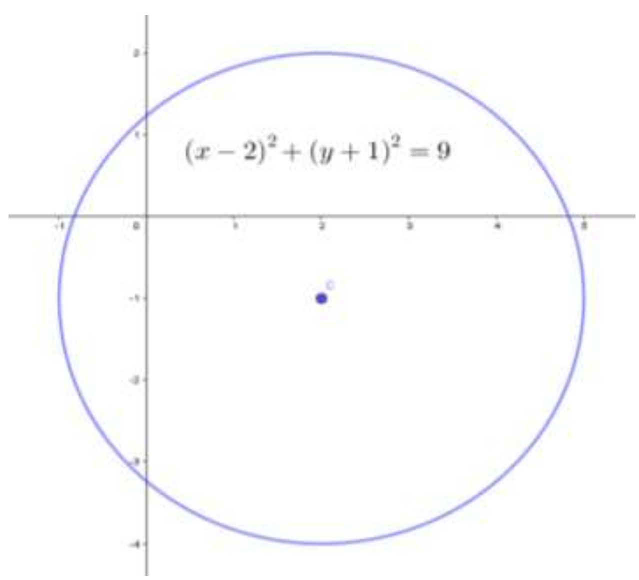
$$x^2 - 4x + \left[\frac{1}{2}(4)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(4)\right]^2 + y^2 + 2y + \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$\rightarrow C\ (2,-1)\ y\ \ r = 3$$



d) Errores al obtener el radio y el centro de la circunferencia

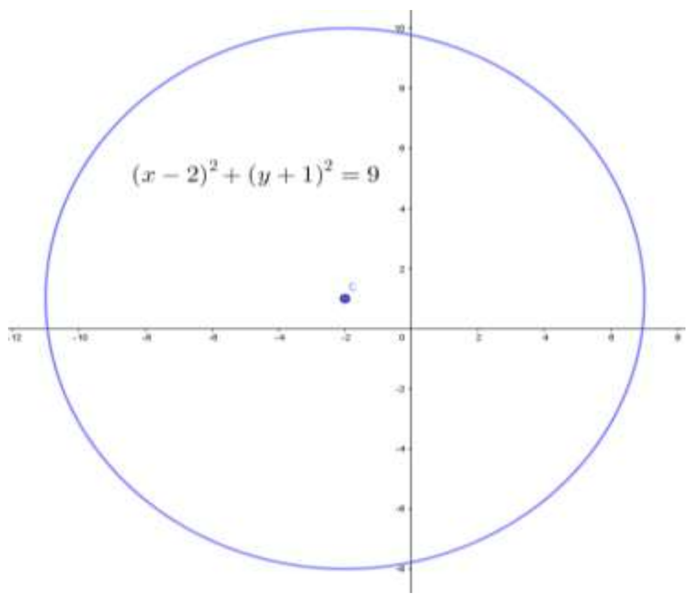
$$x^2 - 4x + \left[\frac{1}{2}(4)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(4)\right]^2 + y^2 + 2y + \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 4$$

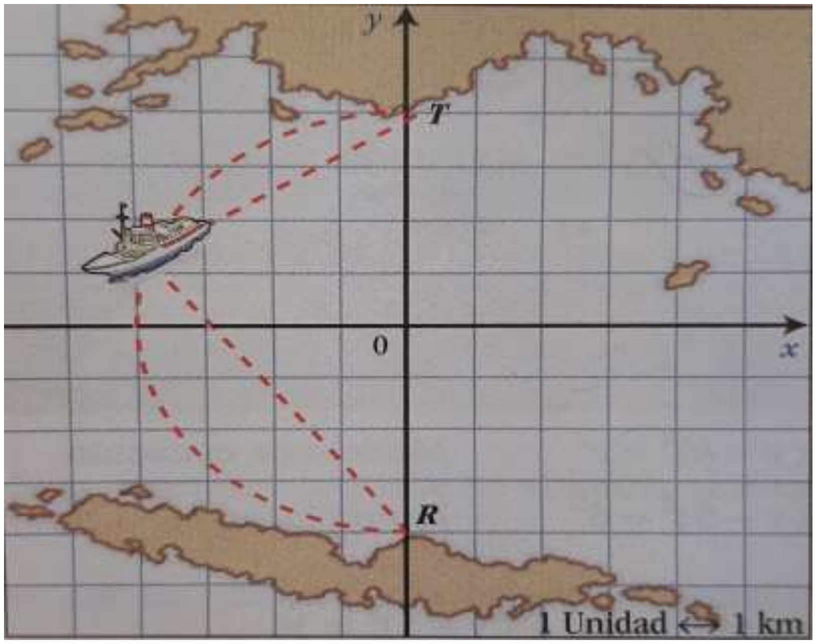
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$\rightarrow C\ (-2, 1)\ y\ \ r = 9$$



4) A través de un sistema de navegación por radio, un barco turista se traslada de una isla a otra, conservando cuidadosamente sus distancias a dos faros situados en los puntos T y R (como se muestra en la figura) para no perder su ubicación. Encuentre la ecuación que describe su trayectoria entre las islas.



a) Error de visualización e interpretación del problema; obtiene de forma equívoca la ecuación canónica (centro y radio).

La ecuación es $(x-4)^2+(y+1)^2=4$

b) Correcta

La ecuación es $x^2+y^2=16$

c) Obtiene de forma equívoca el centro de la circunferencia

La ecuación es $(x+4)^2+(y-1)^2=16$

d) Error en la definición de la ecuación al no considerar el radio al cuadrado

La ecuación es $x^2+y^2=4$

5) Con base a la pregunta anterior, ¿cuál es la longitud de dicha trayectoria seguida por el barco?

a) Error al considerar el perímetro completo de la circunferencia

$$P=2\pi d=2\pi(8)=16\pi$$

b) Error al considerar que la trayectoria seguida por el barco es lineal:

$$d(\overline{TR}) = 8\, unidades$$

c) Error al considerar que la trayectoria del barco es el radio de la circunferencia

$$\frac{d(\overline{TR})}{2} = 4\, unidades$$

d) Correcta

$$\frac{P}{2} = \frac{2\pi d}{2} = \frac{2\pi(8)}{2} = 8\pi$$

En el capítulo "Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación", se analizarán los resultados obtenidos de tal prueba. El lector puede dirigirse al anexo 3 para visualizar la prueba pre-test tal cual fue entregada a los alumnos.

2.3.2. Estrategia 1.- Definición y construcción de la parábola

La siguiente estrategia es definir el objeto matemático con el que se trabajará en las siguientes sesiones de la secuencia: la parábola. Para ello, la estrategia consiste en usar la Geometría Dinámica, la cual, de acuerdo con Costa (citado por García, 2011) se refiere a la Geometría que tiene la posibilidad de movimiento y tratamiento informático de objetos geométricos a través de un procesador geométrico. Miranda (citado por García, 2011) define un procesador geométrico como todo software que permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas (…) Sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar, …) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan. El procesador geométrico que se usará durante las sesiones para la implementación de esta estrategia es el software GeoGebra.

Con el uso de GeoGebra para presentar el lugar geométrico y sus elementos a través de un esquema movible, se pretende mejorar en la habilidad de visualización y la falta de relación entre los elementos de la cónica, así como también colabora con la impartición de la sesión, ya que tanto los alumnos que toman la clase en línea como los presenciales pueden ver las proyecciones del software de manera directa tanto desde su equipo de conexión, como desde el proyector reflejado en el pizarrón respectivamente. Este punto es esencial en todas las estrategias presentadas debido a la modalidad de trabajo híbrida sincrónica.

Para que el alumno refuerce la definición e identifique los elementos de la parábola, además del uso de la Geometría Dinámica, es importante que también aprenda a hacerlo de manera manual, con lo que desarrollará sus habilidades visuales y de dibujo. Para esto, la estrategia a seguir fue la de elaborar un video propio donde se explica el procedimiento para trazar correctamente una parábola usando sólo regla y compás. En la actualidad, hay una tendencia a usar las tecnologías para estas actividades, sin embargo, es importante que los alumnos también aprendan a realizar tales actividades de manera manual, ya que esto les ayuda a comprender qué es lo que hacen los softwares. Además, cualquier tipo de actividad se mejora con la práctica, se aprende y se perfecciona al hacerla. Para lograr esta práctica, es indispensable que el alumno trace la parábola con el uso del juego de Geometría, de hecho, de ahí viene su nombre. Al hacerlo de esta manera, aumentará su comprensión del objeto matemático en cuestión, puesto que lo realizará de manera manual. Para ver más detalles acerca del video y esta actividad, el lector puede dirigirse a la secuencia didáctica sesión 2 (anexo 1), y al punto 1 y 2 del material didáctico en el anexo 2.

En la sección anterior, se establecieron las fases del modelo inductivo:

Fases y funciones de aprendizaje del modelo inductivo

EL MODELO INDUCTIVO	
FASES DEL MODELO INDUCTIVO Y SUS FUNCIONES DE APRENDIZAJE	
Fase	*Funciones del aprendizaje*
Fase 1: Introducción	Establecer el enfoque de la sesión. Atraer la atención del alumno.
Fase 2: La fase abierta	Promueve la participación del estudiante a través de los ejemplos y asegura la respuesta correcta.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia un solo concepto, generalización o regla, a través de las preguntas abiertas facilitando la formación del conocimiento.
Fase 4: El cierre	La comprensión del alumno queda resumida y vinculada con la fase anterior.
Fase 5: La aplicación	Los alumnos aplican su comprensión a nuevos contextos. Vinculan el nuevo aprendizaje con el mundo real.

Tabla 2.4 - Descripción de las fases y funciones de aprendizaje del modelo inductivo de acuerdo con Eggen y Kauchak (2009).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Así, la descripción de esta estrategia en términos de las fases del modelo inductivo se detalla en la tabla 2.5:

El modelo inductivo en la primera estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 1	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se basa en la definición del objeto matemático de la parábola. Se usa la Geometría Dinámica para atraer la atención del alumno.

Fase 2: La fase abierta	Con la proyección del video de la construcción manual de la parábola, se muestra el ejemplo y se realizan algunas preguntas sobre los elementos de la parábola para que el alumno se auto cuestione.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia el concepto de parábola, su definición como lugar geométrico y el papel que juegan las distancias involucradas para su construcción.
Fase 4: El cierre	El alumno comprende el concepto de parábola así como su construcción.
Fase 5: La aplicación	El alumno aplica los conocimientos adquiridos en la construcción de otra parábola con regla y compás como actividad.

Tabla 2.5 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la primera estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Al finalizar esta estrategia, en la tabla 2.6 se muestra la evolución del alumno en su nivel de comprensión geométrico de Van Hiele, así como las habilidades de Hoffer trabajadas:

Evolución del nivel de comprensión geométrica para la estrategia 1

Al comenzar la estrategia 1		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
0	Los individuos perciben las figuras como un todo global. No reconocen las partes y componentes de las figuras. No explicitan las propiedades determinantes de las figuras (…) Pueden, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla.	Percibe la parábola como un todo global, como una "U". Desconoce sus propiedades, sin embargo, puede reconocerla y producir una copia de la misma.
Al finalizar la estrategia 1		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
1	Los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras (…) Las propiedades	Comprende la definición de la parábola a través de las distancias equivalentes entre los puntos y el foco, así como de los puntos a la directriz.

	de las figuras se establecen experimentalmente.	Interioriza en el concepto de manera experimental a través de la construcción de otra parábola.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición como lugar geométrico (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola de manera oral y gráfica (habilidad verbal). Reproduce la construcción gráfica de la parábola (habilidad de dibujo). Comprende que las distancias entre cada punto y el foco o la directriz es lo que forma la parábola, argumenta sus resultados y sigue una serie de pasos lógicos para la construcción de una parábola (habilidad lógica y de razonamiento).		

Tabla 2.6 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 1.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.3. Estrategia 2.- La parábola en el mundo

Una vez comprendido el objeto matemático en estudio (la parábola), la estrategia consiste en que el alumno identifique este objeto en su mundo. Para ello, se diseñó una presentación en PowerPoint: “El poder infinito de las parábolas”, donde el profesor expone diversos objetos que se valen de la propiedad de reflexión de la parábola para su funcionamiento. Evidentemente, es necesario que se defina dicha propiedad y que el alumno comprenda por qué la parábola goza de tal propiedad. Para esto, dentro de la presentación se muestra un video de un canal de YouTube llamado “Derivando”. El nombre del video es: “¿Por qué las ANTENAS PARABÓLICAS son parabólicas?”, donde el ponente Sáenz de Cabezón (2017) explica de una manera amena e interactiva dicha propiedad, además de que menciona algunos ejemplos. Posteriormente, el profesor expone diversos objetos que funcionan con esta propiedad, como los telescopios, los micrófonos parabólicos, los faros de un automóvil, entre otros. Tales ejemplos fueron extraídos de un video de YouTube llamado: ¿Para qué sirve una parábola en la vida real?, elaborado por la Universidad del Valle (2017).

Es importante mencionar la importancia de este tipo de actividades con videos cortos e interactivos, con cosas “movibles” y que dependen un tanto de la tecnología y de las redes sociales, ya que van de acuerdo con el tipo de alumnos y sus intereses que tienen en los tiempos actuales.

Dentro de la presentación se encuentra otro ejemplo que busca atraer al alumno hacia la historia de la matemática. En este caso, se hizo con la historia del científico griego Arquímedes de Siracusa, acerca de la creación de los espejos parabólicos que diseñó para la concentración de los rayos solares sobre galeras romanas, lo que provocó su incendio (Ruíz, 2016). Dentro de la presentación, se grabó un video de la caricatura llamada “Érase una vez los inventores”, episodio 2: “Arquímedes y los griegos”, del productor Barillé (1994) en donde se ilustra únicamente esta parte.

La historia es recurso didáctico que permite al alumno relacionar la matemática con otras disciplinas; comprender el origen y evolución del conocimiento matemático hasta nuestros días. A la vez, puede ser usada para atraer la atención del alumno dentro de las actividades de apertura o incluso de cierre.

El Plan de Estudios de la materia de Matemáticas V de la ENP también hace referencia al uso de la historia como recurso didáctico, al mencionar que:

> "El uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico es altamente recomendable, pues permite apreciar la matemática como un extraordinario producto del pensamiento humano, ofrece la oportunidad de que los jóvenes valoren el contexto en el cual se desarrollan los contenidos matemáticos abordados en el programa y las aportaciones de quienes los estudiaron". (p. 13)

Adicionalmente, para evitar que el alumno caiga en confusiones con ciertos objetos al identificarlos como parabólicos, cuando en realidad no lo son, se dejará como actividad observar un video adicional en YouTube llamado: "CATENARIA: La curva favorita de Gaudí que hace que no se caigan los puentes". Dicho video muestra la diferencia entre la catenaria y la parábola con diversos ejemplos.

Para la demostración de la propiedad de reflexión, se diseñó una actividad donde el alumno tiene que trabajar con regla y transportador para hacer una demostración geométrica de tal propiedad. Esta actividad se muestra en la figura 2.2:

Actividad de la propiedad de reflexión

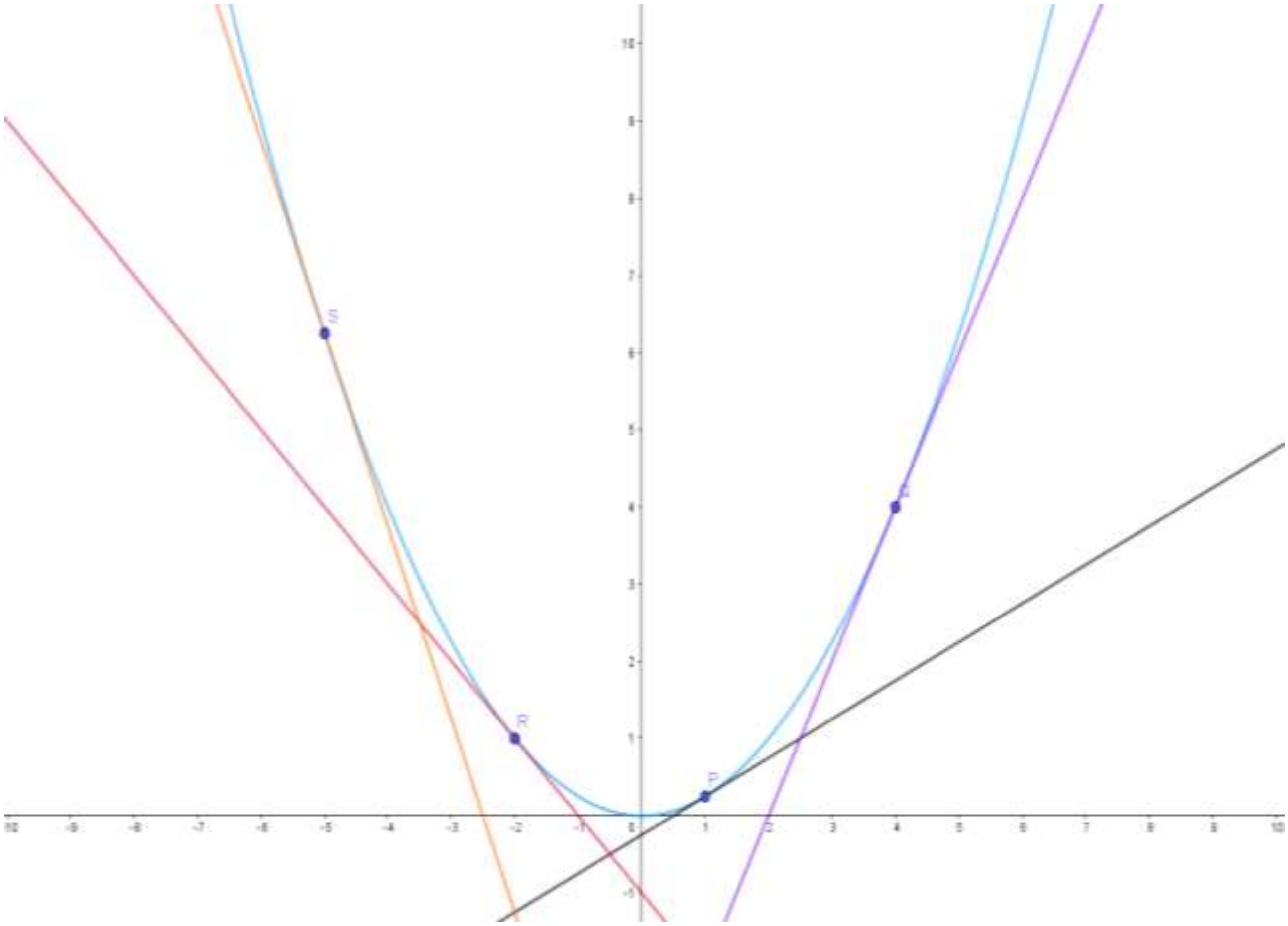


Figura 2.2 - Esquema para realizar la demostración de la propiedad de reflexión.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

En esta actividad, el alumno debe trazar un rayo que cae de manera vertical en cada uno de los puntos S, R, P y Q. Al chocar el rayo con el cuerpo de la parábola, será reflejado con cierto ángulo. Para conocer el ángulo de reflexión se apoya de las tangentes trazadas para cada rayo. La tangente y el rayo trazado forman un ángulo, y éste será con el que se refleja el rayo hacia un punto fijo desconocido (foco). Se puede apreciar esto en la figura 2.3:

Ejemplo de trazo de un rayo

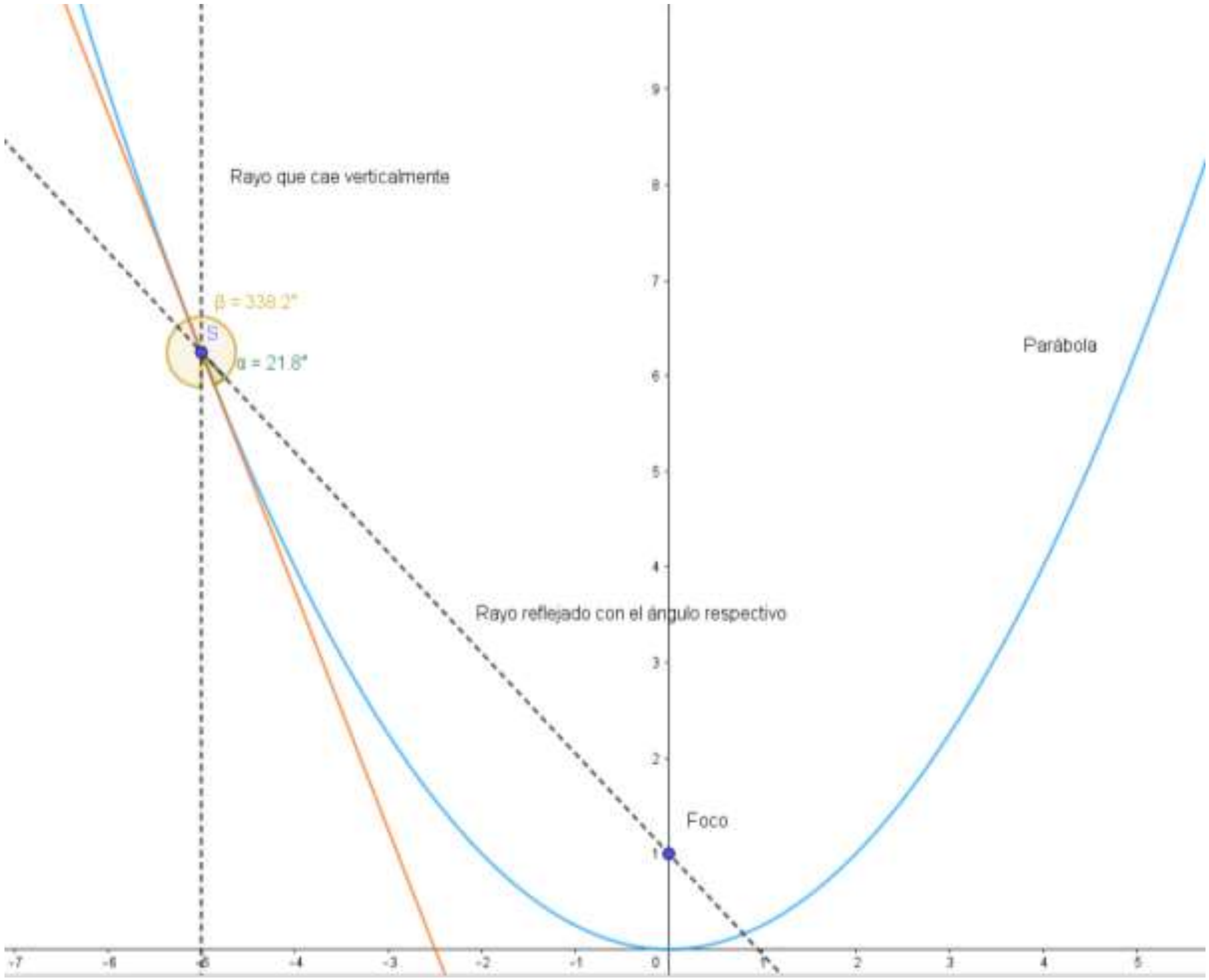


Figura 2.3 - Ejemplo de la actividad de la propiedad de reflexión.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

De esta forma, el alumno debe medir de manera aproximada el ángulo que forma el rayo con la tangente (21.8°en este caso), y con éste reflejar el rayo hacia el punto desconocido, que identificará al final de la actividad como el foco. Así, al trazar todos los rayos reflejados de la actividad, el alumno habrá logrado demostrar y comprender la propiedad de reflexión.

Al extender el trazo del rayo vertical y el reflejado, se puede observar que se forman ángulos opuestos por el vértice, por ello, valen lo mismo. Los ángulos opuestos por el vértice, según Postigio (1978) son: “los que los lados de uno son prolongaciones opuestas de los lados del otro” (p. 129). Esta definición es lo que le da sustento geométrico a la propiedad de reflexión.

Con esta estrategia, se pretende que el alumno identifique la parábola a su alrededor y que comprenda la razón de que diversos objetos sean parabólicos, con la idea de que, posteriormente, el alumno pueda resolver distintas problemáticas a través de modelos matemáticos parabólicos. La otra idea es generar interés en el alumno y mantenerlo durante la secuencia al observar a la parábola alrededor de su mundo. A este respecto, Mercado y

Luna (2013) afirman que lo que puede generar interés en un alumno es: “aquello que se relacione con su realidad, que represente un reto cognitivo al comprender algo nuevo; que se relacione con la vida, con su edad y que le permita, por tanto, crecer tanto cognitiva como afectivamente, al percibir que comprende mejor y con más autonomía el mundo circundante” (p. 25).

Estas actividades están descritas en la secuencia didáctica en la sesión 3. Para ver más detalles acerca de la actividad de la propiedad de reflexión y de los videos mencionados, el lector puede dirigirse al punto 4 del anexo 2.

A continuación, la tabla 2.7 describe dicha estrategia a través de las fases del modelo inductivo:

El modelo inductivo en la segunda estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 2	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se establece el enfoque de la sesión en la visualización de la parábola y la propiedad de reflexión en diversos objetos del mundo.
Fase 2: La fase abierta	El alumno contribuye con su participación en la visualización de objetos parabólicos y su utilidad.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia la propiedad de reflexión como base del funcionamiento de ciertos objetos parabólicos.
Fase 4: El cierre	El alumno comprende el funcionamiento de los objetos parabólicos en donde se involucra la propiedad de reflexión.
Fase 5: La aplicación	El alumno aplica los conocimientos adquiridos en la visualización de otros objetos parabólicos.

Tabla 2.7 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la segunda estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Al finalizar esta estrategia, el alumno mostrará la evolución detallada en la tabla 2.8 en su nivel de comprensión geométrico de Van Hiele y habrá trabajado las siguientes habilidades:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 2

Al comenzar la estrategia 2		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
1	Los individuos pueden analizar las partes y	Comprende la definición de la parábola a través de las

	propiedades particulares de las figuras (…) Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente.	distancias equivalentes entre los puntos y el foco, así como de los puntos a la directriz. Interioriza en el concepto de manera experimental a través de la construcción de otra parábola.
Al finalizar la estrategia 2		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
2	Los individuos determinan las figuras por sus propiedades (…) pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes.	Identifica la parábola en objetos que pertenecen a su entorno y que se valen de la propiedad de reflexión. Comprende la propiedad de reflexión al establecer una interrelación entre los puntos de la parábola y el foco.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición como lugar geométrico (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de los objetos parabólicos que identifica de manera oral y escrita (habilidad verbal). Reproduce la construcción gráfica que muestra la propiedad de reflexión (habilidad de dibujo). Comprende que la propiedad de reflexión se justifica geométricamente a través de la propiedad de ángulos opuestos por el vértice, elabora conjeturas para dicha demostración, argumenta sus resultados, hace deducciones lógicas y sigue una serie de pasos lógicos para dicha demostración (habilidad lógica y de razonamiento).		

Tabla 2.8 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 2.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.4. Estrategia 3.- La ecuación de la parábola con V (0, 0)

Una vez que se ha comprendido el concepto de parábola, en dónde puede aparecer y para qué sirve, el siguiente paso es escribirla matemáticamente. Para esto, la estrategia consiste en originar su ecuación con el apoyo de otro esquema construido con Geometría Dinámica en GeoGebra. Se comenzará por escribir la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha con vértice en el origen, debido a que es la parábola que tiene todos sus elementos positivos, como muestra la figura 2.4:

Esquema para obtener la ecuación de la parábola

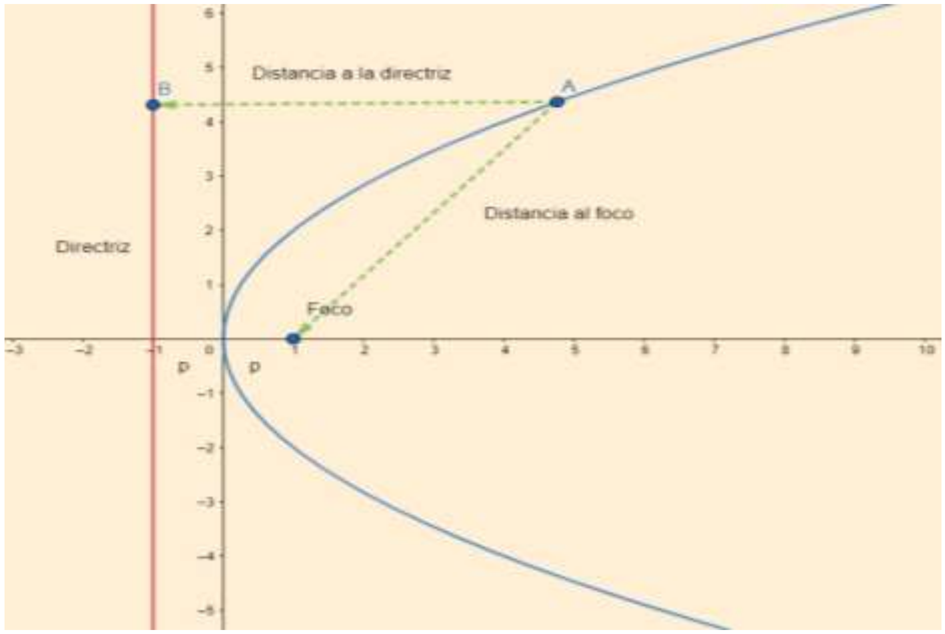


Figura 2.4 - Esquema en GeoGebra con Geometría Dinámica para obtener la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

En el esquema, el punto A y el punto B son movibles. El punto A representa los puntos de la parábola. El punto B representa los puntos de la directriz. El Foco es un punto fijo que no pertenece a la parábola. Se puede observar que se trazan las distancias que mantiene A tanto a la directriz como al foco, y ambas distancias son iguales. Al mover A (en el software) se puede ver que estas distancias cambian, pero siempre se mantienen iguales entre sí. Con esta idea en mente, si al punto A le damos coordenadas cualesquiera A = (x, y), se nombra la directriz como $\mathscr{L}$ y se considera a una distancia de p del vértice (el vértice de la parábola es el origen) al igual que el foco, la ecuación de la directriz sería $x = -p$ (recta vertical) y las coordenadas del foco serían F = $(p, 0)$. Al saber que ambas distancias son iguales, para escribirlo matemáticamente se hace el siguiente razonamiento en la clase:

Datos:

A = (x, y), F = $(p, 0)$, $\mathscr{L}: x = -p \rightarrow \mathscr{L}: x + p = 0$ (en forma general). Así:

Distancia del punto A a la directriz = Distancia del punto A al foco

$$\overline{d(A\mathcal{L})} = \overline{d(AF)}$$

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En el lado izquierdo de esta igualdad, A, B y C son los coeficientes de la ecuación de la recta en su forma general, en este caso, de la directriz, y x_1 y x_2 representan las coordenadas del punto (el punto A). Al sustituir los datos que se definieron del lado izquierdo de la igualdad, se obtiene:

$$\frac{1x + 0y + p}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego, del lado derecho de la igualdad, las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representan los puntos entre los que se quiere obtener la distancia, en este caso, serían los puntos A = (x, y) y F= (p, 0). Al sustituir sus coordenadas, se tiene:

$$\frac{1x + 0y + p}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(p - x)^2 + (0 - y)^2}$$

A partir de este punto, se deben realizar las operaciones aritméticas y algebraicas correspondientes de simplificación, para llegar a la ecuación:

$$\frac{1x + 0y + p}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(p - x)^2 + (0 - y)^2}$$

Simplificación aritmética / Desarrollo de binomios al cuadrado

$$\frac{x + p}{\sqrt{1}} = \sqrt{p^2 - 2px + x^2 + y^2}$$

Simplificación aritmética (lado izquierdo) y eliminación de raíz (lado derecho)

$$(x + p)^2 = p^2 - 2px + x^2 + y^2$$

Desarrollo de binomio al cuadrado del lado izquierdo de la igualdad

$$x^2 + 2px + p^2 = p^2 - 2px + x^2 + y^2$$

Igualar todo a y^2

$$x^2 + 2px + p^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$$

Simplificación de términos semejantes (suma y resta de términos algebraicos)

$$4px = y^2$$

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

Esta parte se trabajará con el modelo de exposición abierta (véase el capítulo: “El modelo de enseñanza”), ya que el profesor sólo presenta el tema y el objetivo, y guía a los alumnos hacia dicho objetivo: la ecuación buscada, siempre apoyado de la participación del grupo. Si los alumnos no llegan a recordar algún proceso algebraico, el profesor apoya. Si lo que no se recuerda es la fórmula para determinar la distancia de un punto a una recta, el alumno puede buscarla por internet y corroborar con el profesor que es correcta. En resumen, el profesor guía un trabajo en equipo de los alumnos para determinar la ecuación de la parábola. Esto tiene la idea de propiciar la autonomía de los alumnos, ya que es una de las funciones del profesor, como menciona León (1998): “La función del maestro (…) es proporcionarle los medios para que el tránsito hacia la autonomía pueda realizarse con los menores obstáculos posibles” (p. 44).

Esta parte de la escritura matemática puede parecer bastante compleja, y en realidad lo es si el alumno no está acostumbrado. Es necesario que el alumno comprenda de dónde vienen las cosas: ¿por qué una ecuación tiene determinada forma? ¿por qué la parábola (como en la estrategia anterior) tiene la propiedad de reflexión? ¿por qué se usan diversas fórmulas? Estas preguntas podrían ser parte de su inquietud. Al responderlas, el alumno interioriza en los objetos matemáticos, y esto contribuye a que su comprensión e interés sean mayores sobre el tema. Así, el alumno hace un proceso de prueba matemática al encontrar la ecuación de la parábola, que contribuye al desarrollo de su Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). El PMA, definido por Herlina (citado por Nieves, 2020) como: “(…) es el proceso del pensar matemático que comprende procesos de representación, abstracción, pensamiento matemático creativo y la prueba matemática” (p.15). Es decir, el Pensamiento Matemático Avanzado es un grupo de procesos cognitivos que intervienen en la enseñanza – aprendizaje de la matemática, de ahí su importancia.

Una vez que se ha comprendido el origen de la ecuación de la parábola, para no repetir nuevamente el proceso anterior por cuestiones de tiempo, se optó por la idea de mostrar al alumno los patrones a seguir para obtener las ecuaciones de las diferentes parábolas al identificar la variable que se encuentra a la primera potencia y su signo. Esto con la finalidad de que el alumno pueda obtener las demás ecuaciones de manera intuitiva. Por ejemplo, la ecuación obtenida en clase $y^2 = 4px$ tiene la variable x elevada a la primera potencia, y al ser positiva, nos habla de que es una parábola que abre hacia los valores positivos del eje de las x, es decir, que es una parábola horizontal que abre hacia la derecha. Esta estrategia es idónea para que el alumno recuerde fácilmente las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen, ya que, al recordar los patrones mencionados, el alumno no necesita memorizar las ecuaciones, sino que a través de los patrones puede intuir alguna de las ecuaciones que vaya a aplicar en determinada situación. Para terminar esta actividad, se diseñó una tabla que el alumno tiene que completar con estos patrones para obtener las demás ecuaciones de la parábola. Para visualizar dicha tabla completa, el lector puede dirigirse al anexo 2, punto 6.

Una vez obtenidas las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen, la siguiente estrategia es aplicarlas en contextos puramente geométricos. Para ello, se diseñaron tres ejemplos (anexo 2, punto 7) que se resolverán en clase con la ayuda del software. En este caso, el software jugará un papel de pizarrón, no de constructor de esquemas con Geometría Dinámica. Esto tiene la finalidad de que el alumno visualice la construcción de la parábola paso por paso para una construcción manual posterior. De esta forma, el alumno aprenderá a construir la parábola en el software y de manera manual.

Para que el alumno obtenga más práctica al usar las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen, se propone como tarea realizar unos ejercicios de relación (véase anexo 2, punto 10, sección 1), donde se dan seis ecuaciones de la parábola que se deben relacionar con alguna gráfica, donde se representan sus elementos. Más que un trabajo algebraico, el alumno debe realizar un trabajo visual al identificar el tipo de parábola y sus elementos, que lo conduzca a la elección de la gráfica correcta en cada caso. Algunos de estos ejercicios fueron tomados del libro de Ruíz (2019).

La tabla 2.9 describe esta estrategia a través del modelo de enseñanza inductivo:

El modelo inductivo en la tercera estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 3	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se establece el enfoque de la sesión: ¿cómo se escribe la parábola matemáticamente?
Fase 2: La fase abierta	Se sigue un modelo de exposición abierta para promover la participación de todo el grupo para realizar los procesos aritméticos, algebraicos y geométricos necesarios para encontrar la ecuación de la parábola con V (0, 0).
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha con vértice en el origen.
Fase 4: El cierre	El alumno comprende el proceso para hallar la ecuación de la parábola.
Fase 5: La aplicación	El alumno identifica los patrones en la ecuación trabajada para encontrar las ecuaciones restantes de la parábola con V (0, 0), y aplicarlas en contextos geométricos apoyándose de sus construcciones gráficas con el software.

Tabla 2.9 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la tercera estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Al finalizar esta estrategia, en la tabla 2.10 se muestra la evolución del alumno en su nivel de comprensión geométrico de Van Hiele, así como las habilidades de Hoffer trabajadas:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 3

Al comenzar la estrategia 3		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
2	Los individuos determinan las figuras por sus propiedades (…) pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Se pueden comprender las primeras definiciones que describen las	Identifica la parábola en objetos que pertenecen a su entorno y que se valen de la propiedad de reflexión. Comprende la propiedad de reflexión al establecer una interrelación entre los puntos de la parábola y el foco.

	interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes.	
Al finalizar la estrategia 3		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.	Desarrolla una secuencia de proposiciones algebraicas para obtener las ecuaciones ordinarias de la parábola con vértice en el origen, así como su aplicación en contextos geométricos.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición y sus tipos (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola que identifica a partir de las ecuaciones y gráficas, tanto de manera oral como escrita (habilidad verbal). Identifica los tipos de parábola existentes: vertical u horizontal, así como su dirección de apertura (habilidad de dibujo). Comprende el origen de la ecuación ordinaria de la parábola horizontal que abre a la derecha, a través de seguir una serie de pasos y deducciones lógicas para la deducción de su ecuación (habilidad lógica y de razonamiento).		

Tabla 2.10 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 3.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.5. Estrategia 4.- La ecuación de la parábola con V (*h, k*)

La estrategia siguiente es para enseñar a los alumnos las ecuaciones de la parábola con vértice fuera del origen. Esto se puede hacer mediante el razonamiento anterior con el que se obtuvieron las ecuaciones con vértice en el origen, pero eso implicaría volver a introducir a los alumnos al mismo proceso de prueba matemática anterior que tanto trabajo cuesta, además de que implica trabajos algebraicos más laboriosos, y, por lo tanto, más tiempo. En su lugar, se optó por una estrategia visual de traslación, en donde se encuentra una equivalencia entre los puntos del objeto matemático que se traslada. Se diseñó un esquema con Geometría Dinámica en GeoGebra, para que los alumnos visualicen cómo todos los puntos que pertenecen a la parábola se trasladan de la misma forma en que lo hace el vértice. Posteriormente, se hace una analogía entre las ecuaciones de las mismas, y se aclara que estas ecuaciones siguen los patrones anteriormente mencionados para las demás ecuaciones. Se comenzó de nueva cuenta con la parábola horizontal que abre a la derecha, pero con V (*h*, *k*).

En la figura 2.5 se muestra el esquema diseñado:

Esquema de traslación

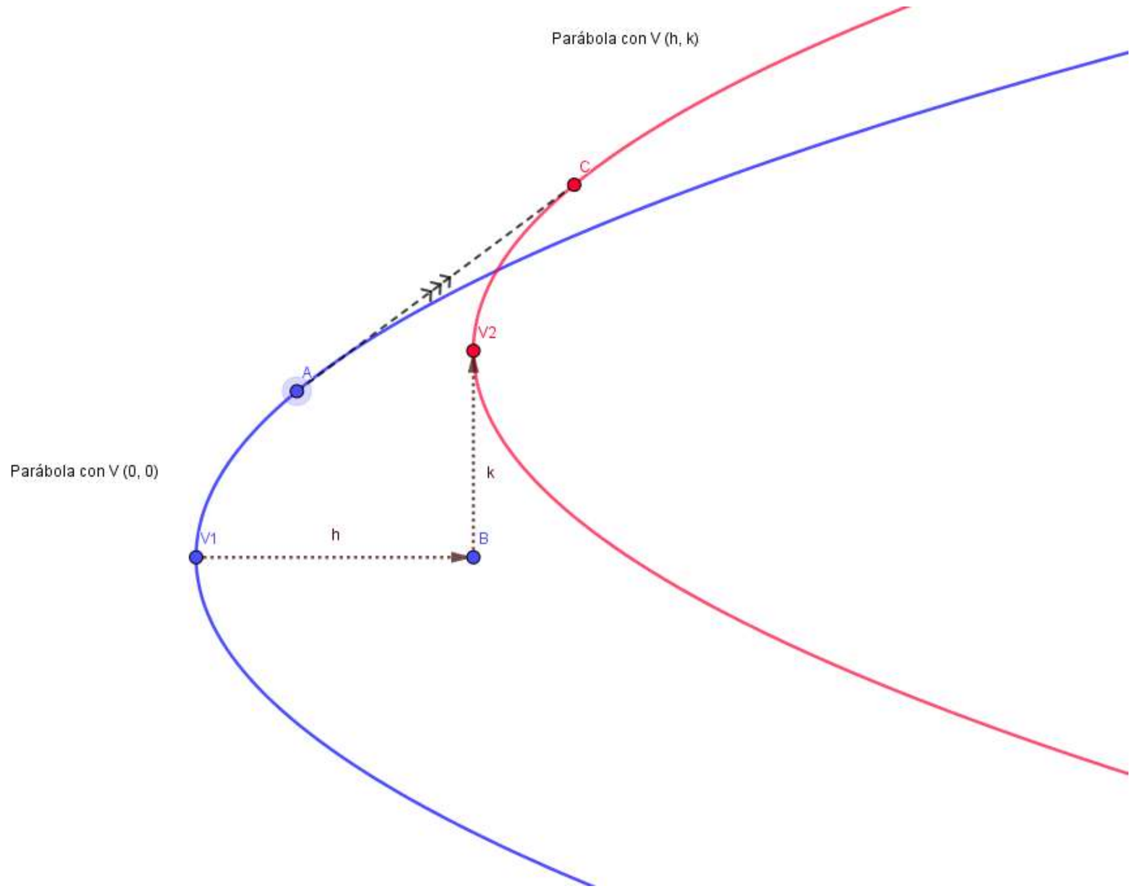


Figura 2.5 - Esquema de traslación de la parábola con V = (0, 0) a V = (*h*, *k*).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

En este esquema, el punto A y el punto C son movibles. El punto A representa los puntos de la parábola azul (con vértice en el origen), y el punto C son los puntos de la "nueva" parábola con vértice fuera del origen. Se toma como base el vértice, que se mueve una cierta distancia horizontal dada por h, y una distancia vertical dada por k, lo que provoca una traslación de dicho vértice dada por la línea punteada con tres flechas. En el esquema, se visualiza cómo todos los puntos de la parábola se trasladan la misma distancia dada por la línea punteada con tres flechas. De esta forma, se logra que el alumno comprenda la traslación de manera visual. Una vez mostrado esto, sigue la parte de escribirlo en la ecuación, y, para ello, el profesor sólo guía de nueva cuenta hacia dicho razonamiento:

La parábola horizontal que abre a la derecha con vértice en el origen tiene ecuación:

$$y^2 = 4px$$

Todos los puntos de la parábola, incluido el vértice (por ser un punto de la parábola), deben satisfacer tal ecuación. Si el vértice tiene coordenadas V = (0, 0), se sustituye para observar que satisface la ecuación:

$$y^2 = 4px \quad \rightarrow \quad 0^2 = 4p(0) \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \quad \rightarrow \quad se\ satisface\ la\ ecuación$$

Al realizar la traslación, todos los puntos se mueven bajo una misma constante (dada por la línea punteada con tres flechas), que es como si cada punto se moviera una distancia horizontal dada por h, y después, una distancia vertical dada por k (como se observó en el esquema dinámico). Al hacer esto a todos los puntos, podemos decir que sus coordenadas "nuevas" ($x´$, $y´$), cambian de la siguiente manera:

$$x^{´} = x + h$$

$$y^{´} = y + k$$

Esto es, todos los puntos de la parábola P = (x, y) se trasladan y se "transforman" a la forma P´= ($x´$, $y´$). Estos nuevos puntos deben satisfacer la ecuación de la parábola, pero dicha ecuación está construida para los puntos P = (x, y), entonces, se necesita encontrar el equivalente de esos puntos en términos de los puntos "nuevos":

$$x^{´} = x + h \quad \rightarrow \quad x^{´} - h = x$$

$$y^{´} = y + k \quad \rightarrow \quad y^{´} - k = y$$

Así, como en la ecuación $y^2 = 4px$ las variables x y y representan los puntos de la parábola, se puede sustituir las coordenadas de esos puntos en términos de las coordenadas de los "nuevos" puntos:

$$y^2 = 4px \quad \rightarrow \quad (y´ - k)^2 = 4p(x´ - h)$$

Por ejemplo, como el nuevo vértice de la parábola roja (véase el esquema) tiene coordenadas V = (h, k), debe satisfacer tal ecuación:

$$(y´ - k)^2 = 4p(x´ - h) \quad \rightarrow \quad (k - k)^2 = 4p(h - h) \quad \rightarrow \quad (0) = 4p(0) \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Finalmente, para no confundirse entre tantas variables diferentes, se opta por escribir la ecuación sin las apóstrofes de las nuevas variables:

$$\boldsymbol{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$$

Se debe hacer énfasis en que, independientemente de la explicación anterior, los alumnos son quienes construyen la clase con su participación dentro del modelo de enseñanza de exposición abierta del profesor. El docente sólo guía dicho proceso. Por supuesto, se describe porque es el proceso que el profesor tiene en la mente, es la forma en que espera que se conduzca la deducción de la ecuación, es la estrategia por seguir para esta sesión. Para esto, al inicio de la sesión se formula la pregunta: ¿cómo serían las ecuaciones de la parábola si el vértice no fuera el origen?, que implica que el alumno comience a pensar en diferentes posibilidades de escritura para la ecuación con los conocimientos que ya tiene, así como a fomentar su participación en la clase.

De la misma forma que se hizo con las parábolas con vértice en el origen, se diseñó una tabla incompleta para que los alumnos la trabajen con las restantes ecuaciones de la parábola. La idea es la misma que en la estrategia anterior, que los alumnos no memoricen las ecuaciones, sino que, a través de los patrones encuentren la ecuación de la parábola que ocupen en un determinado caso. La tabla se muestra en el anexo 2, punto 9.

Una vez obtenidas las ecuaciones de la parábola con V (*h*, *k*), se proponen algunos ejercicios para su trabajo grupal en la clase e individual, con la idea de aplicar las ecuaciones obtenidas de la parábola en contextos geométricos. Algunos de los ejercicios fueron tomados de Ruíz (2019) y Carreón (2012), y se pueden observar en el anexo 2, punto 10, secciones 2 y 3. La idea es hacer trabajar al alumno primero a partir de problemas dados algunos de los elementos de la parábola (sección 2, incisos *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*), y a partir de las ecuaciones obtenidas, el profesor introduce el concepto de ecuación general desde el primer ejemplo. Para esto, el profesor se vale de los procesos algebraicos necesarios, así como de los conocimientos previos del alumno (desarrollo de un binomio al cuadrado, entre otros). Así, en cada uno de los ejemplos posteriores, el alumno, además de encontrar la ecuación canónica de la parábola correspondiente, también encuentra la ecuación general de la misma y comprende que ambas ecuaciones representan el mismo lugar geométrico. Posteriormente, el alumno realiza a través de diversos ejercicios el proceso inverso: obtener los elementos de la parábola a través de la ecuación canónica, así como relacionar la gráfica con su ecuación.

En la tabla 2.11 se describe esta estrategia a través del modelo de enseñanza inductivo:

El modelo inductivo en la cuarta estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 4	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se establece el enfoque de la sesión: ¿cómo se escribirían matemáticamente las ecuaciones de la parábola con V (*h*, *k*)?
Fase 2: La fase abierta	Se sigue un modelo de exposición abierta para promover la participación del grupo al realizar los procesos aritméticos, algebraicos y geométricos necesarios para encontrar la ecuación de la parábola con V (*h*, *k*).
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha con V (*h*, *k*).
Fase 4: El cierre	El alumno comprende el proceso de traslación para hallar la ecuación de la parábola con V (*h*, *k*).
Fase 5: La aplicación	El alumno, a través de los patrones revisados en la estrategia anterior, deduce las ecuaciones restantes de la parábola con V (*h*, *k*), y las aplica en contextos geométricos apoyándose del software para sus construcciones gráficas. Finalmente, es capaz de

	encontrar la ecuación general de la parábola a partir de la canónica.

Tabla 2.11 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la cuarta estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Cabe resaltar que esta estrategia es una extensión del nivel 3 de Van Hiele, debido a la naturaleza del tema como extensión de la parábola con vértice en el origen, el alumno aún continúa en descubrir nuevas propiedades del objeto, como la traslación y las ecuaciones canónicas originadas por dicha traslación. Como ya se ha mencionado, para pasar de un nivel de comprensión geométrico a otro, Van Hiele (citado por Alsina, 1997) propone una serie de fases de aprendizaje por las que es necesario pasar para adquirir un nuevo nivel de comprensión. Dichas fases son las siguientes:

- *Fase 1*: *discernimiento*. Se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo.
- *Fase 2: orientación dirigida*. El profesor propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar. La ejecución y la reflexión propuesta servirá de motor para propiciar el avance en los niveles de conocimiento.
- *Fase 3: explicitación*. Los estudiantes, una vez realizadas las experiencias, expresan sus resultados y comentarios. Durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas.
- *Fase 4: orientación libre*. Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparable.
- *Fase 5: integración*. Los objetos y las relaciones son unificadas e interiorizadas en su sistema mental de conocimientos." (p. 40).

Hasta este punto, se puede decir que el alumno se ubica en la fase 3, ya que, al realizar las actividades correspondientes, el alumno expresa sus resultados y estructura su sistema de relaciones con las diferentes representaciones de la parábola: algebraica y geométrica.

Así, al finalizar esta estrategia, las habilidades abordadas y su nivel de razonamiento de Van Hiele, se describen en la tabla 2.12:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 4

Al comenzar la estrategia 4		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la	Desarrolla una secuencia de proposiciones algebraicas para obtener las ecuaciones ordinarias de la parábola con vértice en el origen, así como

	necesidad del rigor en los razonamientos.	su aplicación en contextos geométricos.
Al finalizar la estrategia 4		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.	Desarrolla una secuencia de proposiciones algebraicas para obtener las ecuaciones canónicas de la parábola con V (*h*, *k*), así como su aplicación en contextos geométricos.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición y sus tipos (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola que identifica a partir de las ecuaciones y gráficas, tanto de manera oral como escrita (habilidad verbal). Identifica los tipos de parábola con V (*h*, *k*) existentes: vertical u horizontal, así como su dirección de apertura (habilidad de dibujo). Comprende el origen de la ecuación canónica de la parábola horizontal que abre a la derecha, hace deducciones lógicas para deducir las ecuaciones de las parábolas restantes a través de seguir una serie de pasos lógicos para sus deducciones (habilidad lógica y de razonamiento).		

Tabla 2.12 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 4.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.6. Estrategia 5.- La ecuación general de la parábola

Esta estrategia está enfocada en enseñar a los alumnos el proceso para obtener los elementos de una parábola dada su ecuación general. En las estrategias anteriores se aborda el tema de obtener la ecuación canónica dados algunos elementos de la parábola, así como determinar los elementos de una parábola dada su ecuación canónica.

Se trabajó con algunos ejercicios presentados en el punto 10 del material didáctico (anexo 2), sección 4, de donde el inciso *r* fue tomado del texto de Ruiz (2019) y los incisos *p* y *q* del texto de Carreón (2012). La estrategia consiste en transitar de la ecuación general a la ecuación canónica de la parábola por el método de completar cuadrados.

Las fases del modelo inductivo que describen esta estrategia quedan descritas en la tabla 2.13:

El modelo inductivo en la quinta estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 5	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	

	Se establece el enfoque de la sesión: ¿cómo es la gráfica de una parábola si se nos presenta su ecuación general?
Fase 2: La fase abierta	Se sigue un modelo de exposición abierta para promover la participación del grupo al realizar al realizar el método de completar cuadrados para encontrar la ecuación canónica de una parábola dada su ecuación general.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia el uso del método de completar cuadrados para obtener la ecuación canónica de una parábola dada su ecuación general.
Fase 4: El cierre	El alumno comprende la necesidad del método de completar cuadrados para obtener la ecuación canónica de una parábola dada su ecuación general, para así obtener los elementos necesarios que permitan la construcción gráfica.
Fase 5: La aplicación	El alumno aplica el método de completar cuadrados en contextos algebraicos para la obtención de la ecuación canónica de una parábola. Identifica los elementos de la parábola a partir de la ecuación canónica obtenida y construye su gráfica manual o digitalmente. El alumno es capaz de identificar cuándo una ecuación general de 2do grado representa una parábola, su tipo (horizontal o vertical) y su dirección de apertura (arriba, abajo, derecha, o izquierda).

Tabla 2.13 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la quinta estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Esta estrategia se desarrolla la fase de aprendizaje número 4 de Van Hiele (orientación libre), donde los alumnos tienen que aplicar los conocimientos previos extendiendo la parábola con vértice en el origen a un vértice fuera de él. Asimismo, reconocen sus elementos e identifican su gráfica.

Así, al finalizar esta estrategia, las habilidades abordadas y su nivel de razonamiento de Van Hiele, se describen en la tabla 2.14:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 5

Al comenzar la estrategia 5		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.	Desarrolla una secuencia de proposiciones algebraicas para obtener las ecuaciones canónicas de la parábola con V (h, k), así como su aplicación en contextos geométricos.

Al finalizar la estrategia 5		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.	Desarrolla una secuencia de pasos lógicos y algebraicos para encontrar las ecuaciones canónicas de la parábola, y con ella, sus elementos para su construcción gráfica. A través de la práctica de estos temas, se forma un sólido sistema de relaciones del objeto matemático de la parábola, así como es capaz de aplicarlos en situaciones geométricas distintas, pero con estructura comparable. Aún se encuentra en el proceso de reconocer la necesidad del rigor en sus razonamientos.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición y sus tipos (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola que identifica a partir de las ecuaciones y gráficas, tanto de manera oral como escrita (habilidad verbal). Identifica el tipo de parábola (vertical u horizontal) y su dirección de apertura (arriba, abajo, derecha o izquierda) desde su ecuación general (habilidad de dibujo). Comprende el origen de una ecuación general de la parábola, hace deducciones lógicas y procesos algebraicos para encontrar la ecuación canónica correspondiente y sigue una serie de pasos lógicos para la identificación de sus elementos y construcción gráfica (habilidad lógica y de razonamiento).		

Tabla 2.14 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 5.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.7. Estrategia 6.- Ejercicios avanzados con conocimientos previos

La sexta estrategia consiste en la realización de ejercicios considerados de “nivel avanzado”, donde el alumno debe trabajar con diferentes técnicas algebraicas, geométricas y de razonamiento para llegar a su solución. Tales ejercicios consideran elementos de los conocimientos previos de los alumnos, en particular de rectas y circunferencia, donde debe combinarlos para resolver problemáticas en torno a la parábola. La idea es dotar al estudiante de un mayor bagaje de sus conocimientos geométricos: incrementar sus habilidades de visualización geométrica, distinguir entre los diferentes lugares geométricos y sus elementos, transitar entre los diferentes sistemas de representación (algebraico y geométrico), establecer una lógica en su proceder con los procesos correctos para alcanzar el objetivo, y aprender a combinar sus conocimientos previos en la resolución de ejercicios del tema presente. En pocas palabras, seguir con la contribución al desarrollo de las habilidades geométricas de Hoffer (citado por Bressan, en INEE, 2008).

Para resolver este tipo de ejercicios es óptimo hacerlo a través del modelo de exposición abierta, dentro del modelo inductivo, ya que el profesor debe resolver un ejercicio como ejemplo para guiar a los alumnos hacia los razonamientos correctos para su solución. Estos ejercicios fueron tomados del texto de Carreón (2012).

Dichos ejercicios se pueden ver en el punto 10, sección 3 del material didáctico anexo 2, y se ejemplificará su solución con el inciso *o*, el cual es el siguiente:

o) Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, sabiendo que la directriz es $y - 4 = 0$. Grafica.

Para resolver este tipo de ejercicios, el alumno debe establecer una lógica entre los pasos a seguir. El ejercicio pide la ecuación de una parábola y se dan dos datos: su vértice, que es el centro de una circunferencia en ecuación general, y su directriz. El dato más sencillo es la directriz, que al despejar la variable se obtiene $y = 4$, que es una recta horizontal que arroja el dato de que se trata de una parábola vertical, dato necesario para la elección de la ecuación canónica correcta.

Se puede trabajar en completar un plano con los elementos del problema para que el alumno visualice geométricamente lo que se obtiene algebraicamente, y establezca una relación entre los sistemas de representación. Se puede comenzar por el siguiente plano con el dato de la directriz:

Plano cartesiano para la solución del ejercicio *o*

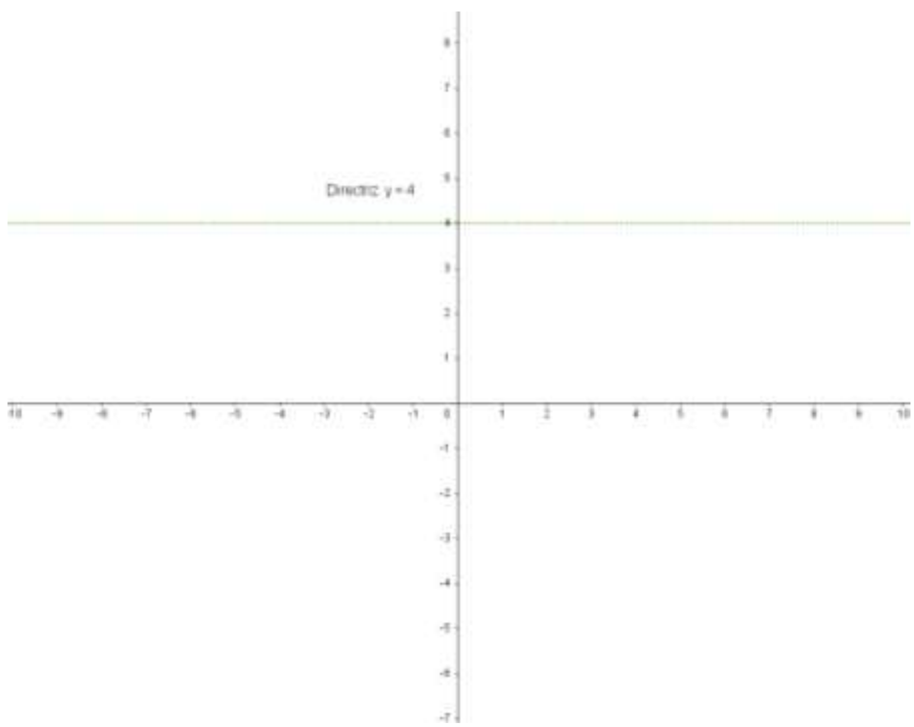


Figura 2.6 - Plano cartesiano con los elementos iniciales del ejercicio *o*.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Ya que se sabe que se trata de una parábola vertical, se puede plantear la pregunta en la clase: ¿qué sigue hacer?, las respuestas de los alumnos pueden ser: saber si abre hacia arriba o hacia abajo, encontrar el vértice o encontrar el parámetro *p*. Recordemos que el modelo inductivo es un modelo rico en preguntas que ayudan al alumno a razonar sobre las problemáticas que se plantean, en este caso, el paso siguiente del ejercicio. Para saber si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo, primero se debe encontrar el vértice, pero surge una nueva pregunta: ¿qué se debe hacer para obtener el vértice de esta parábola?, si el vértice es el centro de la circunferencia, entonces se debe encontrar dicho centro, y ¿cómo se encuentra dicho centro al observar que la circunferencia está en ecuación general?, entonces, el alumno debe razonar que, al obtener la ecuación canónica de la circunferencia, dicha ecuación muestra los elementos de la circunferencia, de donde se puede obtener el centro de la misma, que es el vértice de la parábola que se busca. Se puede plantear otra pregunta: ¿cómo obtenemos la ecuación canónica de la circunferencia?, "completando los cuadrados" es la respuesta más natural.

Al hacerlo, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

Al agrupar los términos:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) = 0$$

Completando los cuadrados:

$$\left(x^2 + 2x + \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2\right) + \left(y^2 - 2y + \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2\right) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 2y + 1 - 1) = 0$$

Al agrupar con el término positivo y mandar el negativo al lado derecho de la ecuación:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 1 + 1$$

Factorizando:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

De donde se puede obtener que el centro es C (-1, 1) y $r = \sqrt{2}$, y como el vértice de la parábola es el centro de la circunferencia, entonces se puede decir que el vértice que se busca es V = (-1, 1). Al trazarlo en el plano, se obtiene:

Plano cartesiano para la solución del ejercicio *o*

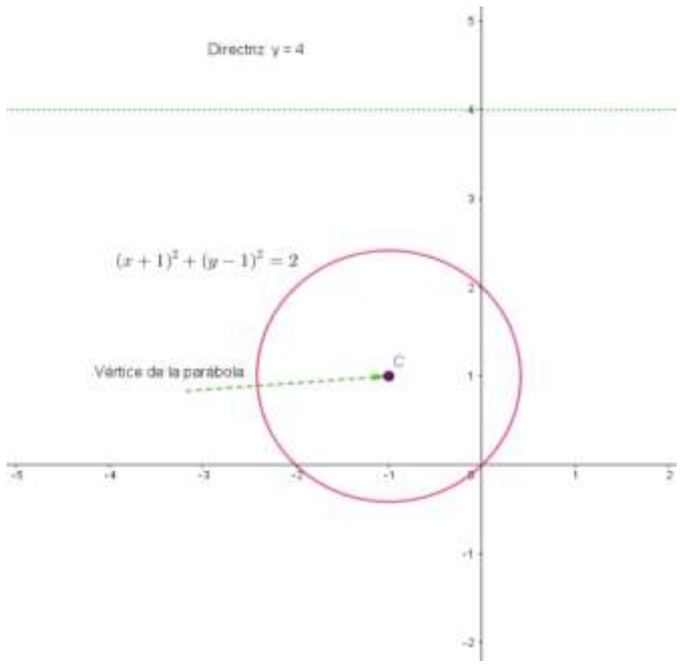


Figura 2.7 - Plano cartesiano con la directriz, la circunferencia y el vértice de la parábola del ejercicio *o*.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Si el vértice es V (-1, 1), entonces se puede plantear las preguntas: ¿qué tipo de parábola es? ¿hacia dónde va a abrir? En este punto, el alumno comienza a introducir los elementos de la parábola al recordar que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz, o que entre el vértice y la directriz hay una distancia que está determinada por el parámetro *p*. Cuando los alumnos responden que es una parábola vertical que abre hacia abajo, se puede conducir al grupo a la elección de la ecuación canónica de acuerdo con los patrones vistos en la estrategia anterior, que en este caso es:

$$(x-h)^2=-4p(y-k)$$

Si ya se cuenta con el vértice, se plantea la pregunta: ¿qué nos hace falta para encontrar la ecuación? Si sustituimos el vértice obtenido, se tiene:

$$(x-h)^2=-4p(y-k) \quad y \quad V=(-1,1)$$

$$(x-(-1))^2=-4p(y-1)$$

$$(x+1)^2=-4p(y-1)$$

De esta manera, si el alumno no recuerda que la distancia de la directriz al vértice es el parámetro *p*, puede visualizarlo de la ecuación al ser el elemento que falta para completarla. Cuando el grupo determine que el parámetro p = 3 porque es la distancia de vértice a la directriz, se sustituye en la ecuación. Incluso se podría marcar en el plano para el caso de los alumnos que no lo visualizan aún:

Plano cartesiano para la solución del ejercicio *o*

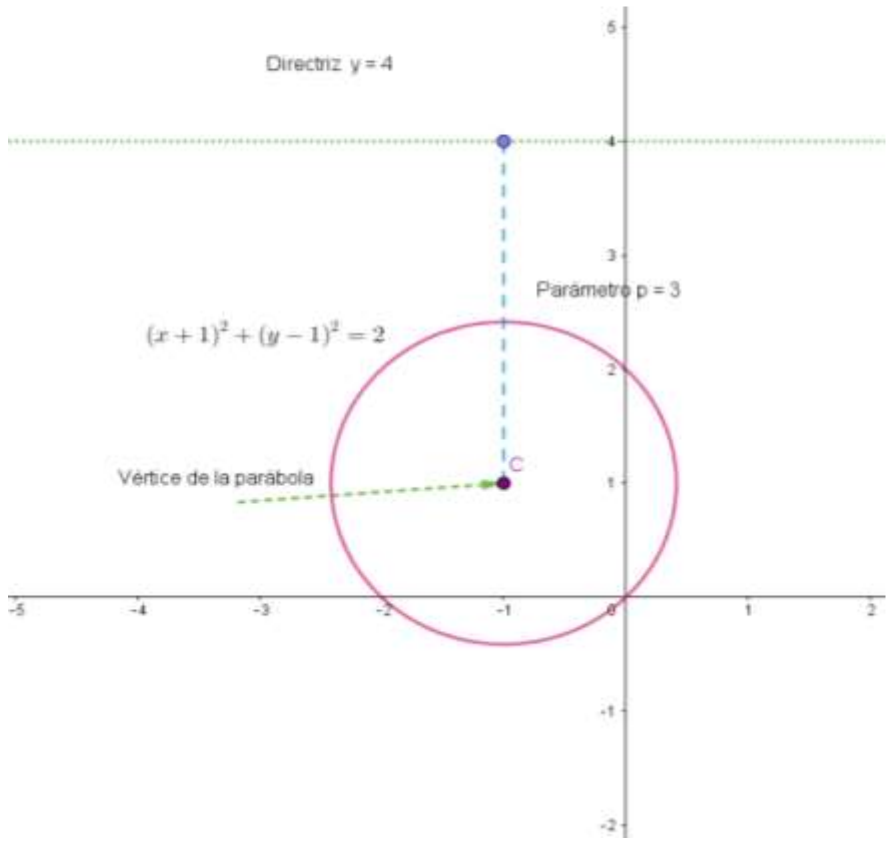


Figura 2.8 - Plano cartesiano con la directriz, la circunferencia, el vértice de la parábola y el parámetro *p* del ejercicio *o*.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Al volver a la ecuación para sustituir p, se obtiene:

$$(x+1)^2 = -4p(y-1)$$

$$(x+1)^2 = -4(3)(y-1)$$

$$\boldsymbol{(x+1)^2 = -12(y-1)} \quad \rightarrow \quad ecuación\ canónica\ de\ la\ parábola$$

Al obtener la ecuación canónica de la parábola, lo siguiente es encontrar sus elementos como se ha mencionado y realizar la gráfica paso por paso en el software, para al final comprobar con la introducción de la ecuación en el mismo para un bosquejo completo de la gráfica.

Si V (-1, 1), p = 3 y la parábola abre hacia abajo, entonces F = (-1, -2), y el lado recto mide $LR = 4p = 4(3) = 12$, que implica que sus extremos son los puntos E_1 = (5, -2) y E_2 = (-7, -2):

Plano cartesiano para la solución del ejercicio *o*

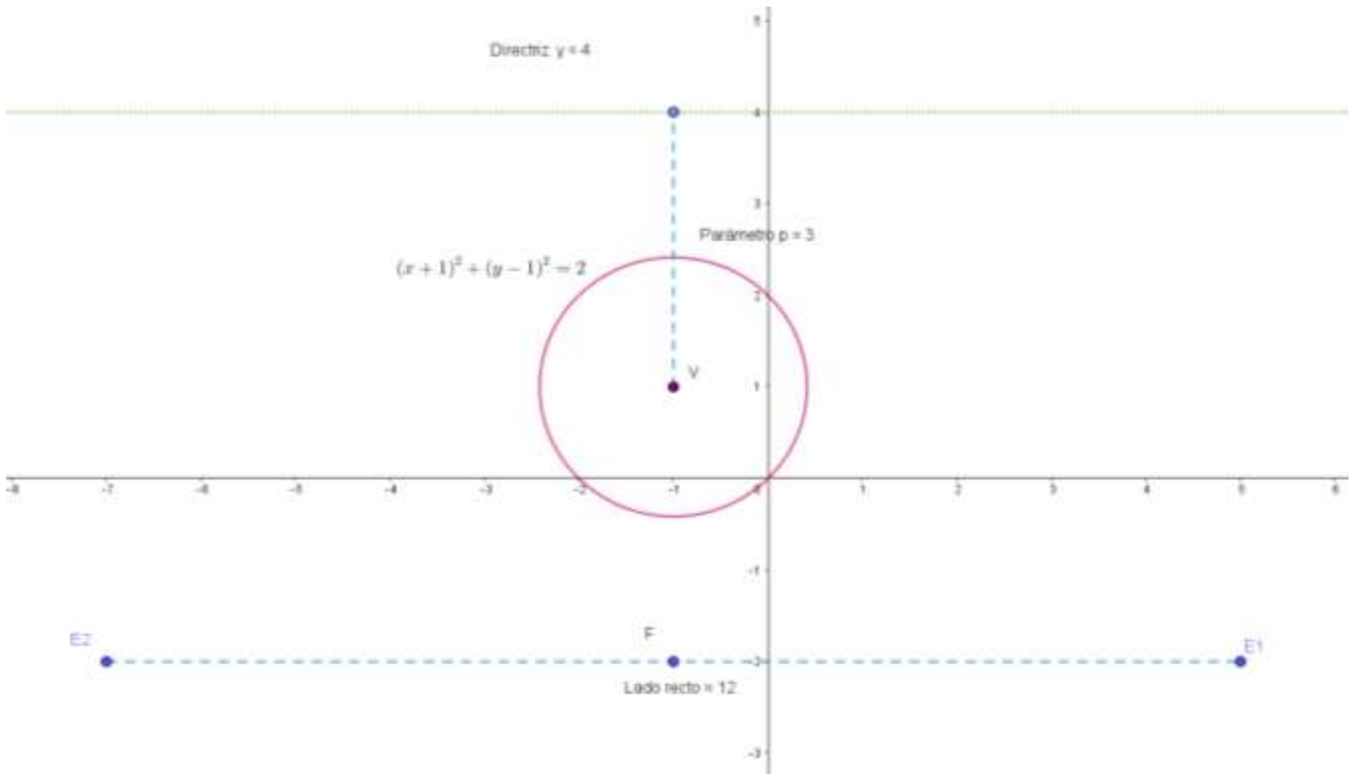


Figura 2.9 - Plano cartesiano con todos los elementos de la parábola para su trazo digital o manual del ejercicio *o*.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Una vez que se han encontrado los elementos de la parábola, se procede a la introducción de su ecuación en el software para su trazo y comprobación. La intención de enseñar este proceso de esta manera es que el alumno pueda hacer las cosas de manera manual, además de digital, como se mencionó en la estrategia 3.

Para terminar, se encuentra la ecuación general de la parábola:

$$(x+1)^2 = -12(y-1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = -12y + 12$$

$$x^2 + 2x + 1 + 12y - 12 = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 12y - 11 = 0} \quad \rightarrow \quad \textit{Ecuación general de la parábola}$$

Se grafica y se hace énfasis en que ambas ecuaciones representan el mismo lugar geométrico. De esta forma, la figura 2.10 representa el esquema final del ejercicio:

Plano cartesiano para la solución del ejercicio *o*

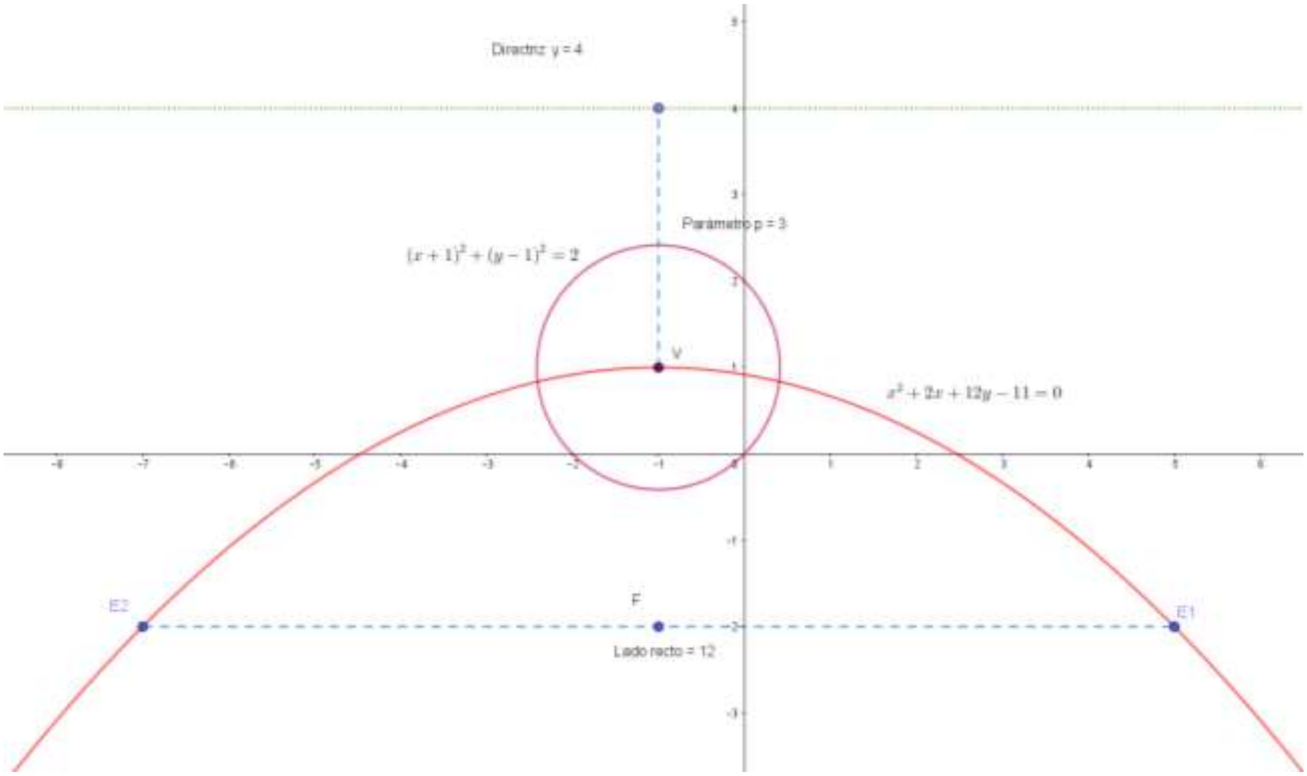


Figura 2.10 - Plano cartesiano con todos los elementos del ejercicio *o* terminados.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Esta estrategia queda descrita con el modelo inductivo en la tabla 2.15:

El modelo inductivo en la sexta estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 6	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se establece el enfoque de la sesión: “ejercicios nivel avanzado”
Fase 2: La fase abierta	Se sigue un modelo de exposición abierta para promover la participación del grupo al realizar los procesos aritméticos, algebraicos y geométricos necesarios para encontrar la ecuación de la parábola requerida en cada ejemplo.
Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia el establecimiento de una lógica de pasos analíticos y la aplicación de sus conocimientos geométricos previos para encontrar la ecuación de la parábola en cada ejercicio.
Fase 4: El cierre	

	El alumno comprende los procesos de análisis y la aplicación de sus conocimientos geométricos previos para encontrar la ecuación de la parábola en cada ejercicio.
Fase 5: La aplicación	El alumno aplica los conocimientos adquiridos en contextos geométricos apoyándose de sus construcciones gráficas con el software.

Tabla 2.15 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la sexta estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Esta estrategia es un ejercicio de integración debido a que se utiliza una problemática que involucra otros aspectos geométricos, la cual pretende que se establezcan relaciones y se unifiquen en su sistema mental de conocimientos como lo plantea la fase 5 de aprendizaje “integración” de Van Hiele.

Así, las habilidades abordadas y su nivel de razonamiento de Van Hiele se describen en la tabla 2.16:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 6

Al comenzar la estrategia 6		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
3	Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra (…) Sin embrago, no se reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.	Desarrolla una secuencia de pasos lógicos y algebraicos para encontrar la ecuación canónica de la parábola, y con ella sus elementos para su construcción gráfica. A través de la práctica, continúa en desarrollo su sistema de relaciones del objeto matemático de la parábola. Aún se encuentra en el proceso de reconocer la necesidad del rigor en sus razonamientos.
Al finalizar la estrategia 6		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
4	Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos. Pueden apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría.	Desarrolla una secuencia de pasos lógicos, tanto algebraicos como geométricos para dar solución a problemas que implican encontrar la ecuación de una parábola. Sigue pasos rigurosos para elaborar sus modelos algebraicos y geométricos. Ha logrado

		establecer una relación entre los sistemas de representación de la geometría, incluso involucrando sus conocimientos previos. La parábola se ha consolidado como parte de su sistema mental de conocimientos.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición y sus tipos (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola que identifica a partir de las ecuaciones y gráficas, tanto de manera oral como escrita (habilidad verbal). Identifica el tipo de parábola (vertical u horizontal) y su dirección de apertura (arriba, abajo, derecha o izquierda) desde su ecuación general (habilidad de dibujo). Ha logrado abstraer características y propiedades de los objetos geométricos, hace deducciones lógicas, procesos algebraicos y geométricos para dar solución a problemas que requieren un dominio de la parábola (habilidad lógica y de razonamiento), así como es capaz de transitar entre los diferentes sistemas de representación, incluso con sus conocimientos previos, para dar solución a los problemas propuestos en torno a la parábola (habilidad de aplicación y transferencia).		

Tabla 2.16 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 6.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

2.3.8. Estrategia 7.- Aplicaciones de la parábola

La estrategia está diseñada para que el alumno aplique los conocimientos adquiridos sobre la parábola en situaciones reales. Para esto, se tomaron y crearon una serie de ejercicios que se pueden observar en el punto 10 del material didáctico (anexo 2), en la sección 5, en donde la idea es enfrentar al alumno en diversas problemáticas reales cuya solución requiere de un modelo parabólico.

En estos ejercicios el alumno debe visualizar los datos del problema como elementos de una parábola, para así encontrar la ecuación (modelo parabólico) que lleve a su solución, de ser necesaria. En otros casos, sólo es necesario relacionar los datos del problema con algún elemento de la parábola, como el parámetro *p* o el lado recto. Pero al final, el objetivo es que el alumno identifique y aplique sus conocimientos adquiridos del tema de parábola.

El siguiente ejercicio fue elaborado con base a una imagen elaborada por Espinosa, G. (s.a.) que se tomó de internet (véase cita) y que hace referencia a un juego llamado “Angry Birds” que algunos alumnos juegan en sus celulares.

Imagen para el ejercicio y

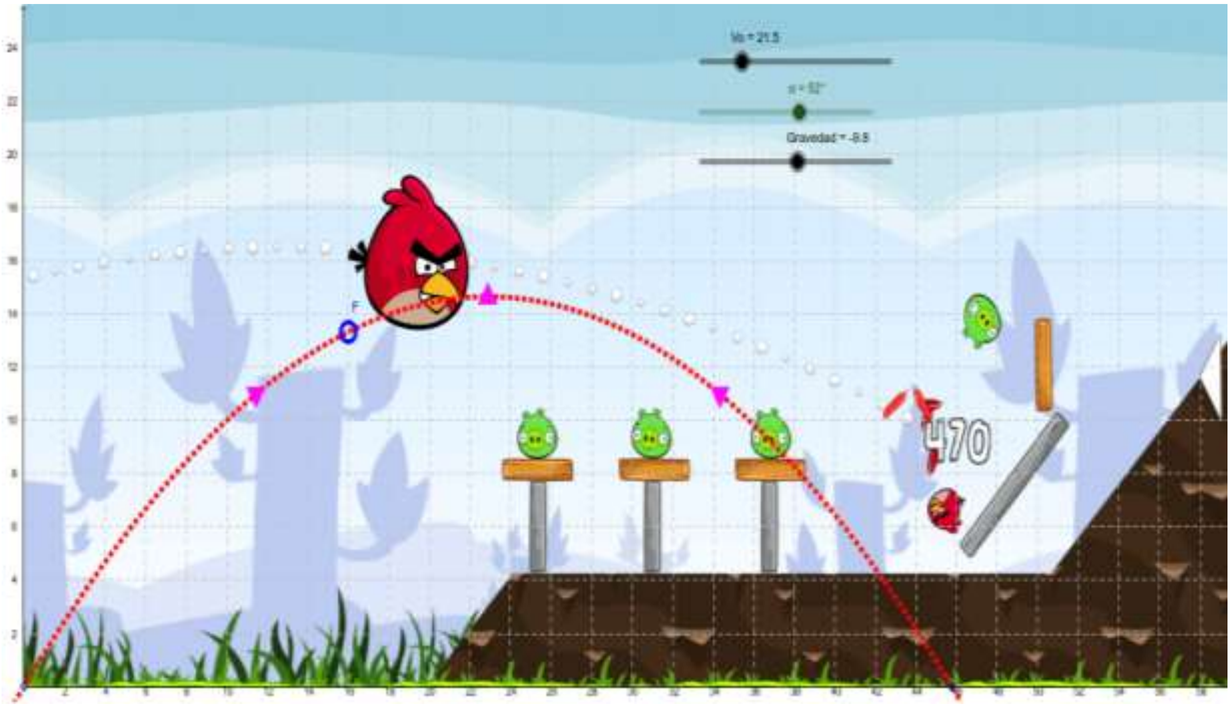


Figura 2.11 - Imagen de “Angry Birds” de Guillermo Espinosa Ruiz.

La idea en este ejemplo es que el alumno visualice el punto dado (14.5, 23) como el vértice de la parábola, e identifique que necesita otro punto para encontrar el modelo parabólico que representa la trayectoria del “bird”. Será parte del razonamiento del alumno tomar el punto donde cae el bird, es decir el (46, 0), o el punto de donde sale disparado, es decir el (0, 0), para dar conclusión al final de que tomar cualquiera de los dos es válido debido a que ambos pertenecen a la parábola, aunque es más sencillo tomar el origen debido a la eliminación de términos al momento de encontrar la ecuación de la parábola que representa esta trayectoria.

Por otro lado, en la secuencia se ubica otro ejercicio que consiste en ubicar los elementos que pide el problema a través de la ecuación de la parábola. Es un ejercicio que también implica un tiro parabólico, pero ahora se parte de la trayectoria matemática que lo describe.

Así, la estrategia de las aplicaciones de la parábola queda descrita en la tabla 2.17 con el modelo de enseñanza inductivo:

El modelo inductivo en la séptima estrategia

Modelo inductivo para la estrategia 7	
Fase	***Descripción***
Fase 1: Introducción	Se establece el enfoque de la sesión: ¿puede ayudarnos la parábola a resolver problemas de la vida real?
Fase 2: La fase abierta	Se sigue un modelo de exposición abierta para promover la participación del grupo al realizar algunos ejemplos durante la clase de problemas cuya solución depende de un modelo parabólico.

Fase 3: La fase convergente	La sesión converge hacia el planteamiento del modelo parabólico idóneo que conduzca a la solución de cada problema en particular.
Fase 4: El cierre	El alumno comprende la necesidad de la parábola en su mundo, la identifica en ciertos problemas, deduce el modelo parabólico adecuado y llega a la solución del problema con procesos aritméticos, algebraicos y geométricos.
Fase 5: La aplicación	El alumno aplica los conocimientos adquiridos de la parábola para dar solución a problemas donde interviene la cónica, sus elementos, así como sus ecuaciones. Usa sus conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos para resolver problemas de la vida real.

Tabla 2.17 - Descripción de las fases del modelo inductivo en la séptima estrategia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La idea de esta última estrategia es que el alumno consolide el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele, así como de contribuir al máximo en su habilidad de aplicación y transferencia. Todo esto se describe en la tabla 2.18:

Evolución del nivel de comprensión geométrico para la estrategia 7

Al comenzar la estrategia 7		
Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
4	Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos. Pueden apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría.	Desarrolla una secuencia de pasos lógicos, tanto algebraicos como geométricos para dar solución a problemas que implican encontrar la ecuación de una parábola. Sigue pasos rigurosos para elaborar sus modelos algebraicos y geométricos. Ha logrado establecer una relación entre los sistemas de representación de la geometría, incluso involucrando sus conocimientos previos. La parábola se ha consolidado como parte de su sistema mental de conocimientos.
Al finalizar la estrategia 7		

Nivel de Van Hiele	*Descripción*	*El alumno…*
4	Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos. Pueden apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría.	Desarrolla una secuencia de pasos lógicos, tanto algebraicos como geométricos para dar solución a problemas que implican la aplicación de un modelo parabólico. Sigue pasos rigurosos para elaborar modelos algebraicos y geométricos a través de la interpretación de los datos del problema como elementos parabólicos. Ha logrado establecer una sólida relación entre los sistemas de representación de la parábola y aplicarlos en diversas situaciones reales. La parábola se ha consolidado como parte de su sistema mental de conocimientos, que es capaz de aplicar en contextos geométricos y prácticos.
Habilidades de Hoffer trabajadas		
La parábola es el elemento visual en el que se trabaja con su definición y sus tipos (habilidad visual). El alumno interpreta, entiende y comunica información de la parábola que identifica a partir de las ecuaciones y gráficas, tanto de manera oral como escrita (habilidad verbal). Identifica el tipo de modelo parabólico idóneo para dar solución a los problemas propuestos (habilidad de dibujo). Ha logrado dominar características y propiedades del objeto geométrico, hacer deducciones lógicas, procesos algebraicos y geométricos para dar solución a problemas que requieren un dominio de la parábola (habilidad lógica y de razonamiento), así como es capaz de transitar entre los diferentes sistemas de representación para crear modelos parabólicos que den solución a los problemas propuestos en diferentes ámbitos (habilidad de aplicación y transferencia).		

Tabla 2.18 - Nivel de Van Hiele y habilidades trabajadas en la estrategia 7.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

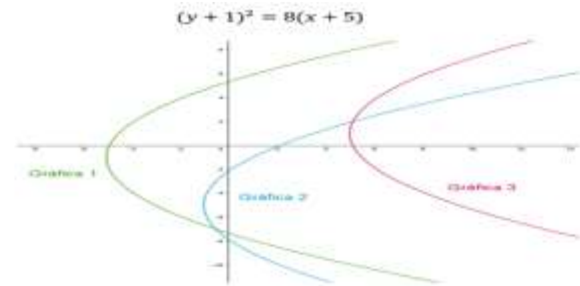
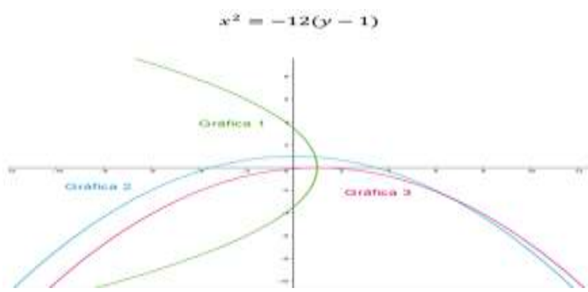
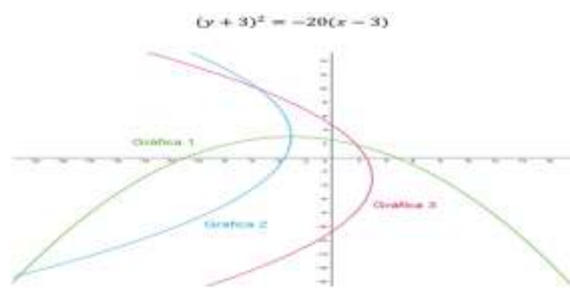
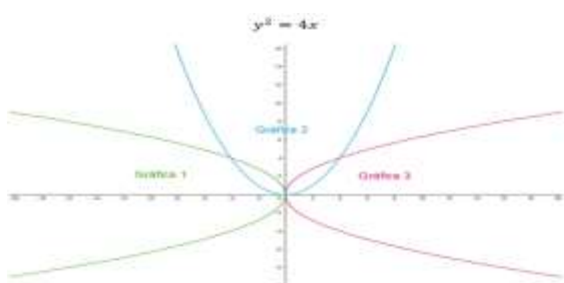
2.3.9. Diseño de la prueba post - test

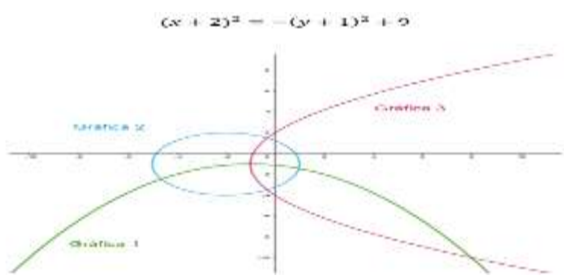
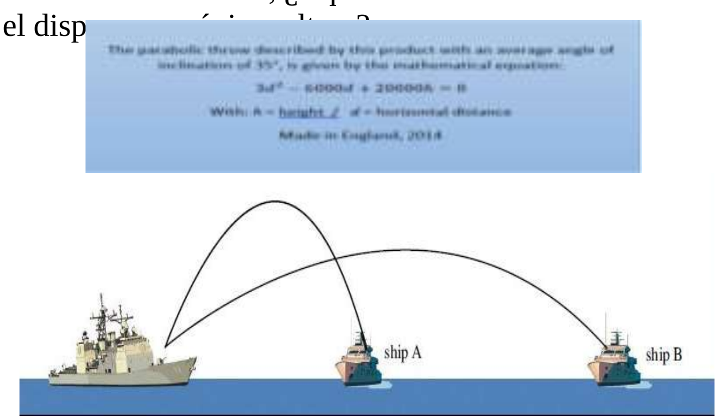
Finalmente, se diseña la prueba post – test para ver si se lograron los aprendizajes esperados. Esta prueba es análoga a la prueba pre-test, es decir, con el mismo tipo de preguntas que el pre-test, pero orientadas al tema de parábola. Dicha prueba se compone de cinco reactivos, donde el segundo reactivo consta a su vez de cinco ejercicios. El diseño de estos reactivos tiene su idea en los objetivos particulares a los que se pretende llegar en esta investigación: la contribución para el desarrollo de habilidades geométricas de Hoffer (citado por Bressan en INEE, 2008), así como el transitar en los niveles de comprensión geométrico de Van Hiele (citado por Alsina, 1997), sin dejar de tomar en cuenta los objetivos de aprendizaje propios del programa de estudios, así como en las problemáticas de aprendizaje en la enseñanza de la Geometría Analítica, en particular de la parábola, observadas en otras investigaciones. Para esto, cada reactivo cuenta con distractores, basados en los errores más comunes de los estudiantes.

Para comenzar, en la tabla 2.19 se muestra la estructura y los objetivos de cada reactivo de la prueba post-test:

Tabla descriptiva de los reactivos y sus objetivos del post-test

Número de reactivo	Reactivo	Objetivo
1	1) Determine la ecuación general de la parábola con F (-2, -4) y directriz x - 2 = 0 a) $y^2 + 8y - 8x + 16 = 0$ b) $y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$ c) $y^2 + 8y + 8x + 16 = 0$ d) $y^2 - 8y + 8x + 16 = 0$	Detectar la falta de reconocimiento entre los elementos de la parábola, así como problemas de corte aritmético - algebraico en el proceder del alumno ante este tipo de ejercicios. Problemas con la habilidad de comunicación y lógica o de razonamiento.
2	2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.	Detectar la falta de relación entre una representación algebraica con una geométrica, problemas con la habilidad de visualización, comunicación y dibujo, la falta de relación entre los elementos de parábola con su ecuación, así como problemas de corte aritmético - algebraico

		en el proceder del alumno ante este tipo de ejercicios.
a		Mismo objetivo anterior
b		Mismo objetivo anterior
c		Mismo objetivo anterior
d		Mismo objetivo anterior

e		Mismo objetivo anterior
3	3) La gráfica que muestra todos los elementos correctos de la ecuación: $$x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$$	Detectar errores algebraicos al pasar de ecuaciones generales a canónicas en una cónica; errores de visualización geométrica (se dan opciones gráficas de respuesta), así como fallas al obtener los elementos de una cónica (parábola) a partir de su ecuación canónica. Problemas con habilidad lógica, de dibujo y comunicación.
4	4) Dentro del inmenso arsenal de armas del ejército ruso, están unos poderosos cañones de largo alcance fabricados en Inglaterra, que transportan en barco. Este cañón cuenta con una leyenda de fabricación. El barco tiene en la mira dos embarcaciones extranjeras, como muestra la imagen. El general de la embarcación rusa da la orden a los militares de disparar al barco B, y los militares ajustan el cañón precisamente a 35°, haciendo un disparo perfecto. En estas condiciones, ¿a qué distancia horizontal alcanzó el disp 	Detectar la capacidad del alumno para modelar, crear o resolver problemas en contextos reales a través de herramientas geométricas (habilidad de aplicación y transferencia), así como problemas de corte aritmético - algebraico en el proceder del alumno ante este tipo de situaciones. Problemas de visualización, comunicación, dibujo y lógica o de razonamiento.

5	5) Con referencia al problema anterior, ¿a qué distancia se encuentra el barco B de la tripulación rusa? a) El barco B está a 20,000mts de distancia (lado recto de la parábola) b) El barco B, por simetría de la parábola, está a 6000mts de distancia. c) El barco B, por simetría de la parábola, está a 2000mts de distancia. d) El barco B está a $\frac{20000}{3}$ mts de distancia	Detectar problemas con la habilidad de visualización, comunicación, lógica, así como de aplicación y transferencia.

Tabla 6.19 - Post-test: reactivos y sus objetivos.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Los reactivos, su respuesta correcta y distractores se presentan a continuación. Los errores se encuentran señalados con rojo.

1) Determine la ecuación general de la parábola con *F* (-2, -4) y directriz *x* - 2 = 0

a) $y^2 + 8y - 8x + 16 = 0$
b) $y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$
c) $y^2 + 8y + 8x + 16 = 0$
d) $y^2 - 8y + 8x + 16 = 0$

a) Error en uso de la fórmula correcta de acuerdo con la dirección de apertura de la parábola

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y+4)^2 = 4(2)(x-0)$$
$$y^2 + 8y + 16 = 8x$$
$$y^2 + 8y - 8x + 16 = 0$$

b) Error en signo del primer binomio correspondiente a la ecuación canónica

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$
$$(y-4)^2 = -4(2)(x-0)$$
$$y^2 - 8y + 16 = -8x$$
$$y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$$

c) Correcta

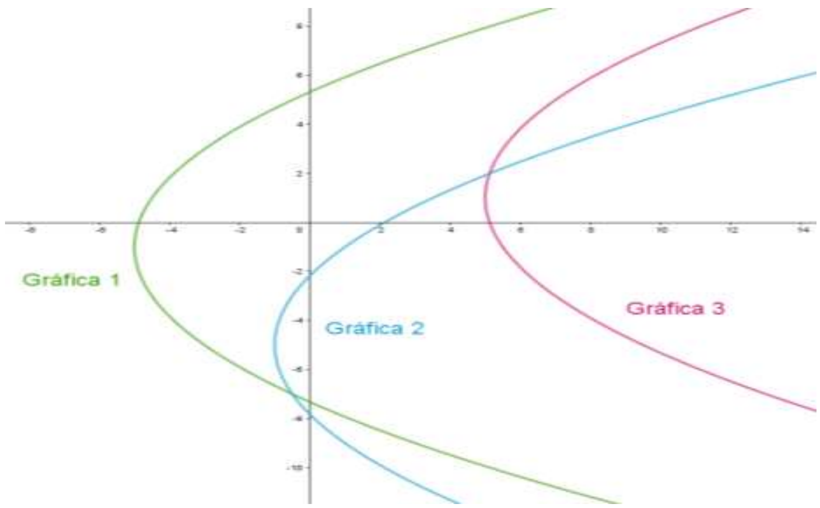
$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$
$$(y+4)^2 = -4(2)(x-0)$$
$$y^2 + 8y + 16 = -8x$$
$$y^2 + 8y + 8x + 16 = 0$$

d) Error (a) y (b) al mismo tiempo

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y-4)^2 = 4(2)(x-0)$$
$$y^2 - 8y + 16 = 8x$$
$$y^2 - 8y + 8x + 16 = 0$$

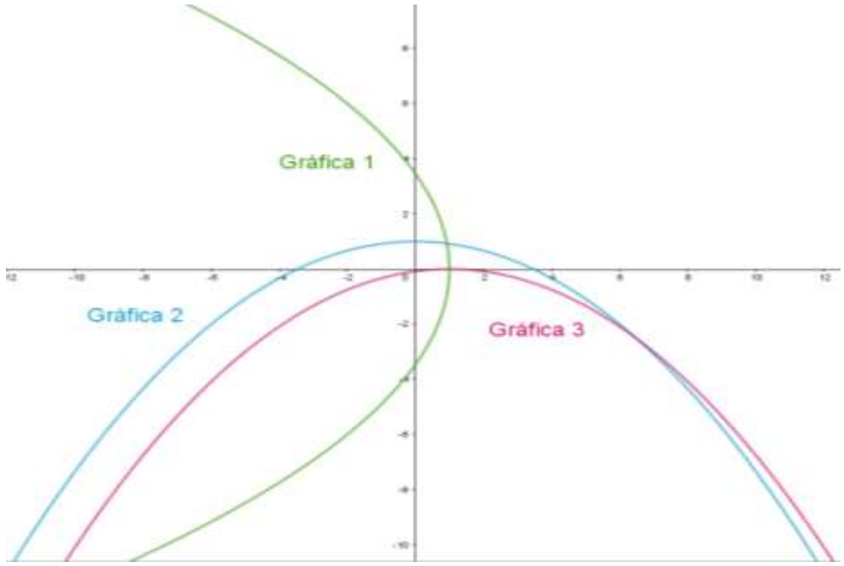
2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

   a) $(y+1)^2 = 8(x+5)$



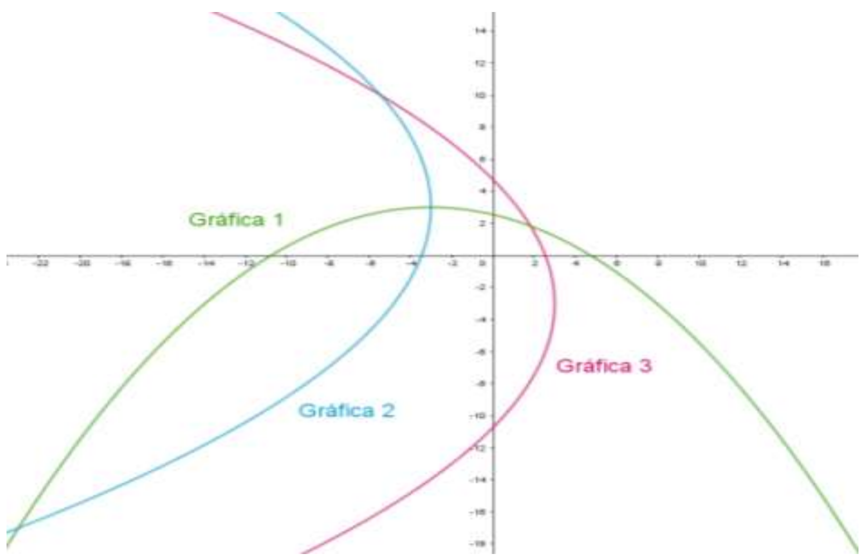
Gráfica 1.- Correcta
Gráfica 2.- Error posicional en las coordenadas del vértice
Gráfica 3.- Error en signos de las coordenadas del vértice

   b) $x^2 = -12(y-1)$



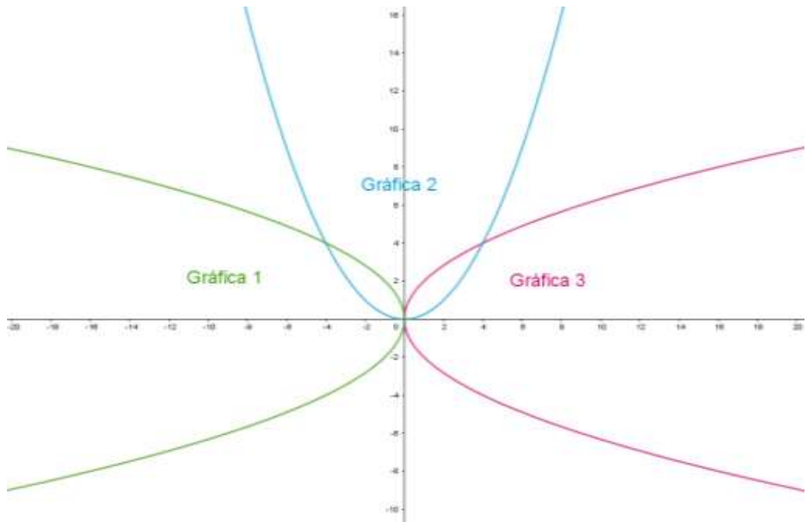
Gráfica 1.- No distingue las ecuaciones de las parábolas verticales de horizontales
Gráfica 2.- Correcta
Gráfica 3.- Error posicional en las coordenadas del vértice

c) $(y+3)^2 = -20(x-3)$



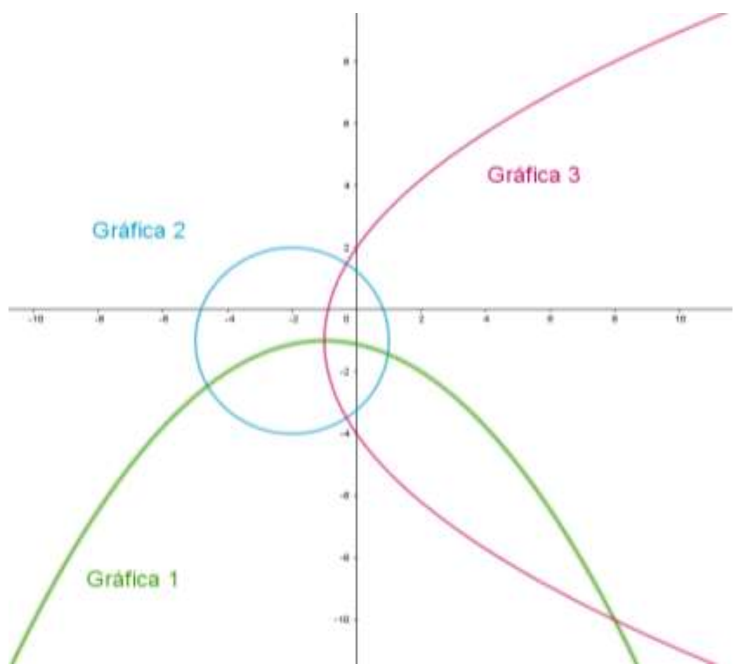
Gráfica 1.- Visualización errónea de la ecuación (confusión de variables)
Gráfica 2.- Error en las coordenadas del vértice
Gráfica 3.- Correcta

d) $y^2 = 4x$



Gráfica 1.- Error en ecuación; apertura de la parábola; signo de la ecuación
Gráfica 2.- Visualización errónea de la ecuación (confusión de variables)
Gráfica 3.- Correcta

e) $(x+2)^2 = -(y+1)^2 + 9$



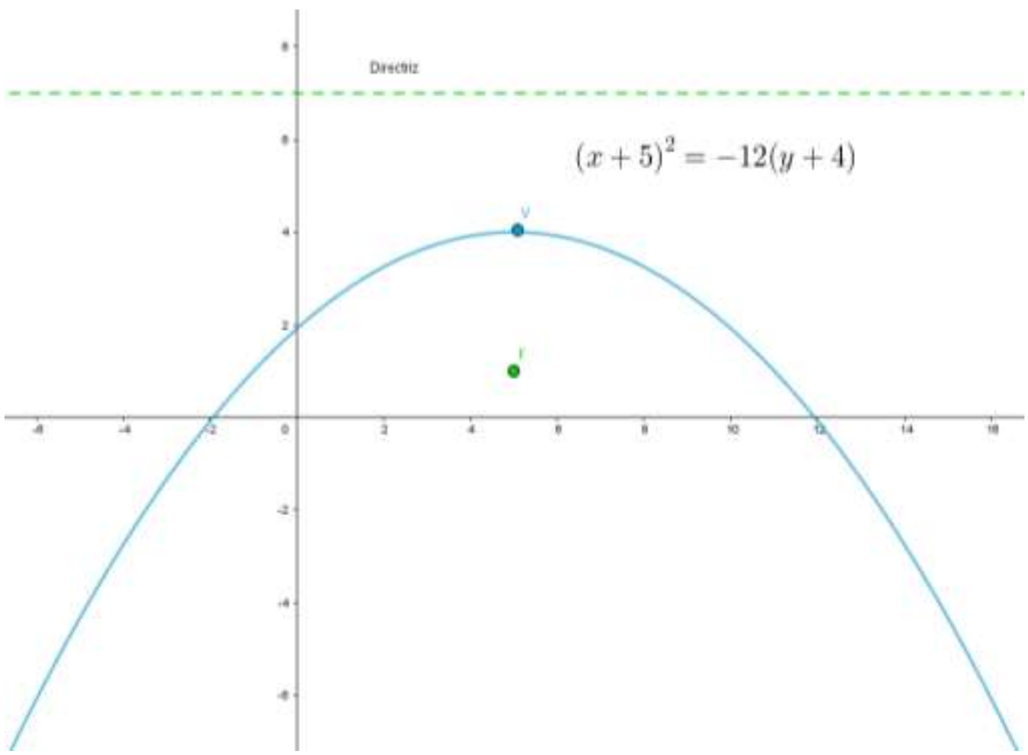
Gráfica 1.- Visualización errónea de la ecuación (confusión de lugares geométricos)
Gráfica 2.- Correcta
Gráfica 3.- Visualización errónea de la ecuación (confusión de lugares geométricos)

3) La gráfica que muestra todos los elementos correctos de la ecuación $x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$, es:

a) Consideración errónea de los signos de las coordenadas del vértice

$$x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$$
$$x^2 + 10x = -12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 - 25 = 12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 = -12y - 73 + 25$$
$$(x+5)^2 = -12y - 48$$
$$(x+5)^2 = -12(y+4)$$

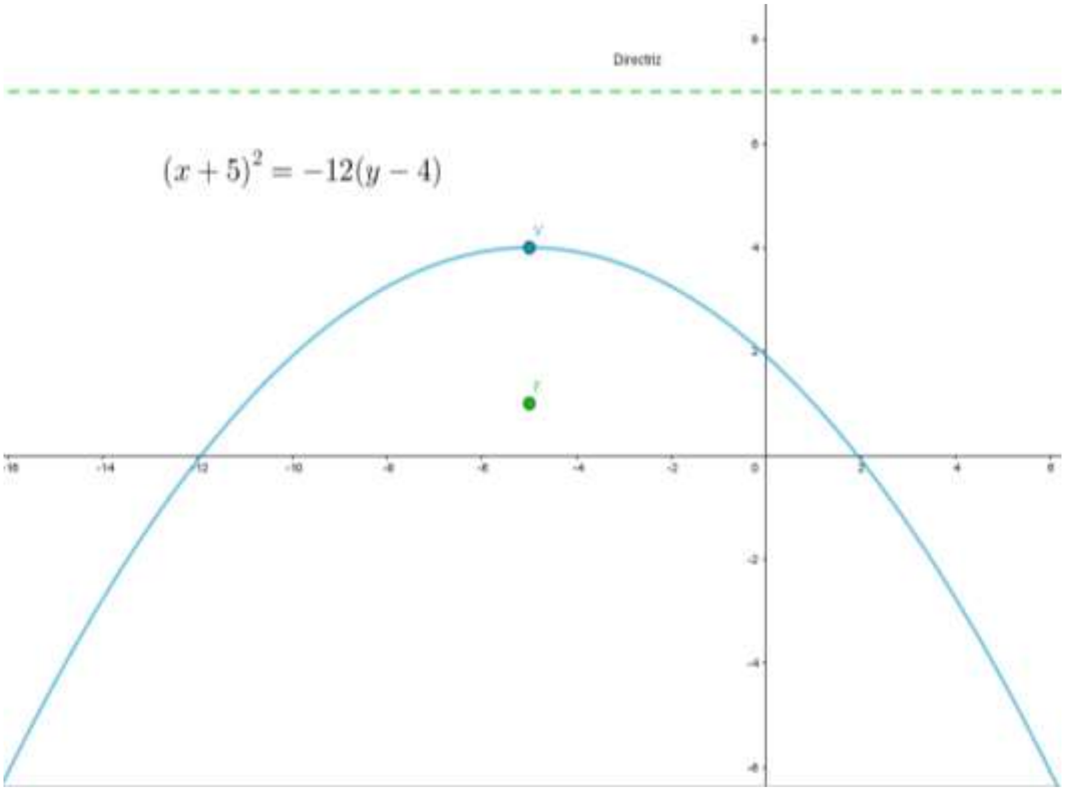
$$\rightarrow V(5,4), p = 3, parábola\ vertical\ que\ abre\ hacia\ abajo$$



b) Error en factorización del signo negativo

$$x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$$
$$x^2 + 10x = -12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 - 25 = 12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 = -12y - 73 + 25$$
$$(x+5)^2 = -12y - 48$$
$$(x+5)^2 = -12(y-4)$$

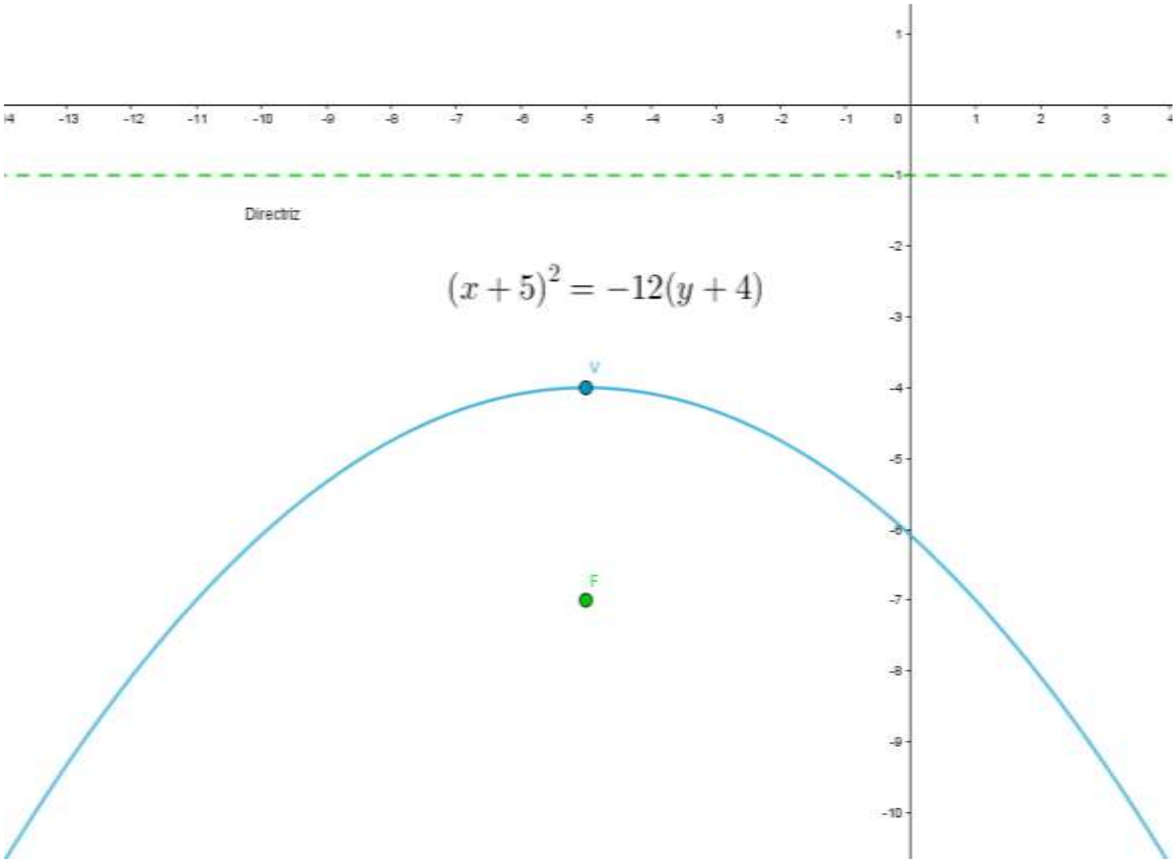
$$\rightarrow V(-5,4), p = 3, parábola\ vertical\ que\ abre\ hacia\ abajo$$



c) Correcta

$$x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$$
$$x^2 + 10x = -12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 - 25 = 12y - 73$$
$$x^2 + 10x + 25 = -12y - 73 + 25$$
$$(x + 5)^2 = -12y - 48$$
$$(x + 5)^2 = -12(y + 4)$$

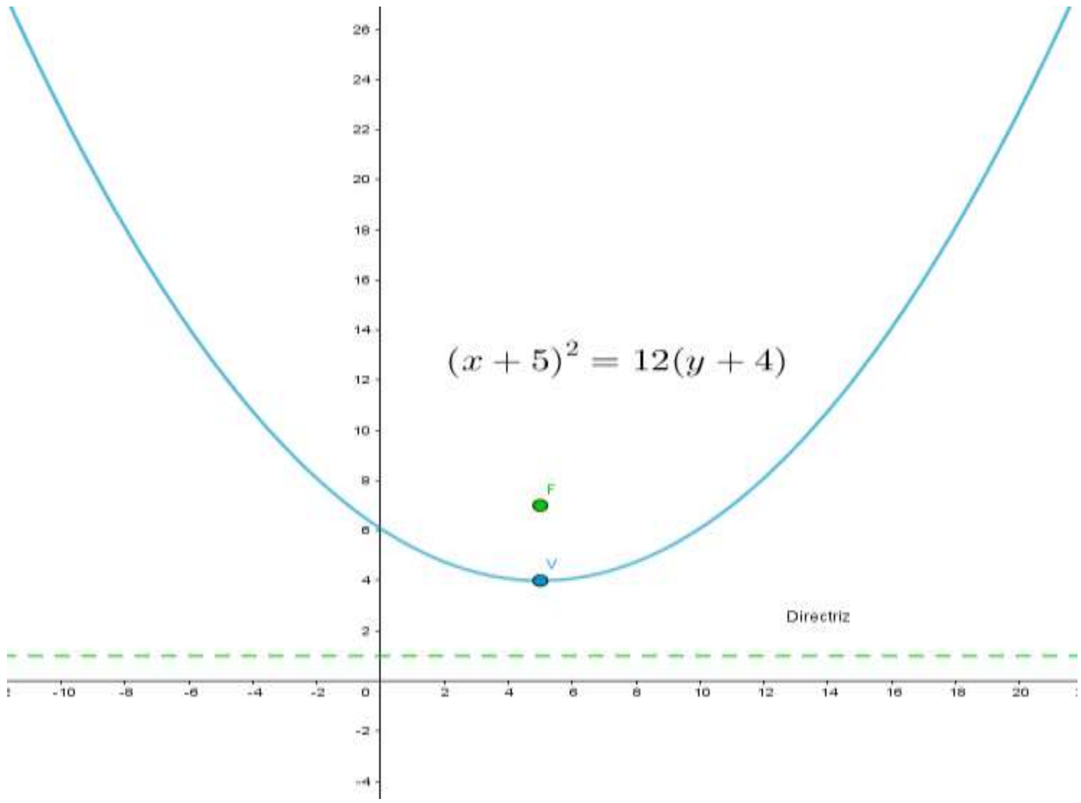
$$\rightarrow V(-5, -4), p = 3, parábola\ vertical\ que\ abre\ hacia\ abajo$$



d) Omite factorización del signo negativo y las coordenadas de vértice son erróneas

$$x^2+10x+12y+73=0$$
$$x^2+10x=-12y-73$$
$$x^2+10x+25-25=12y-73$$
$$x^2+10x+25=-12y-73+25$$
$$(x+5)^2=-12y-48$$
$$(x+5)^2=12(y+4)$$

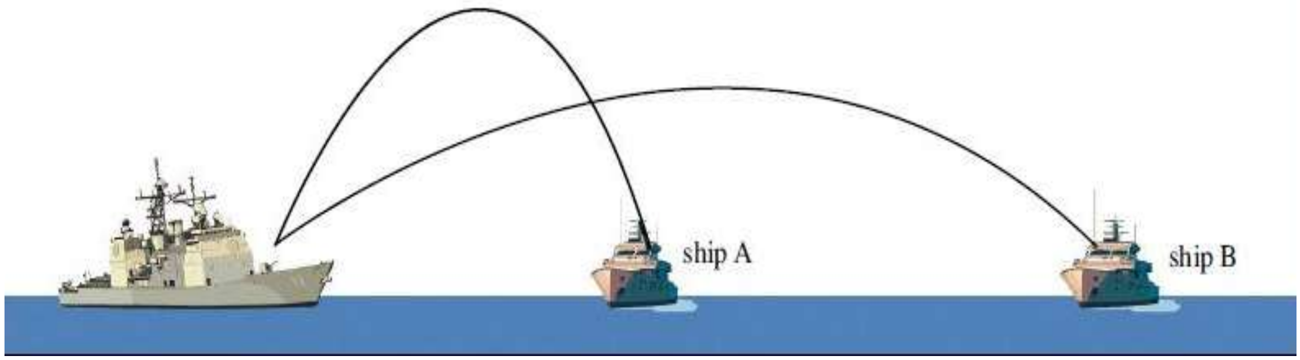
$$\rightarrow V(5,4), p=3, parábola\ vertical\ que\ abre\ hacia\ arriba$$



4) Dentro del inmenso arsenal de armas del ejército ruso, están unos poderosos cañones de largo alcance fabricados en Inglaterra, que transportan en barco. Este cañón cuenta con la siguiente leyenda de fabricación:

> The parabolic throw described by this product with an average angle of inclination of 35°, is given by the mathematical equation:
>
> $$3d^2 - 6000d + 20000h = 0$$
>
> With: *h* = height / *d* = horizontal distance
>
> Made in England

El barco tiene en la mira dos embarcaciones extranjeras, como muestra la imagen. El general de la embarcación rusa da la orden a los militares de disparar al barco B, y los militares ajustan el cañón precisamente a 35°, haciendo un disparo perfecto. En estas condiciones, ¿a qué distancia horizontal alcanzó el disparo su máxima altura?



a) Error en completar el cuadrado (error algebraico) y de razonamiento e interpretación geométrica del problema

$$3d^2 - 6000d = -20000h$$

Transformando variables:

$$3x^2 - 6000x + \left[\frac{1}{2}(6000)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(6000)\right]^2 = -20000y$$
$$3x^2 - 6000x + 9000000 - 9000000 = -20000y$$
$$(x - 3000)^2 = -20000y + 9000000$$
$$(x - 3000)^2 = -20000(y - 450)$$

La altura máxima del disparo fue de 450mts y ocurre a una distancia horizontal de 3000mts.

b) Correcta

$$3d^2 - 6000d = -20000h$$

Transformando variables:

$$3(x^2 - 2000x) = -20000y$$
$$3(x^2 - 2000x + \left[\frac{1}{2}(2000)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2000)\right]^2) = -20000y$$

$$3(x^2 - 2000x + 1000000 - 1000000) = -20000y$$
$$3(x^2 - 2000x + 1000000) - 3000000 = -20000y$$
$$3(x^2 - 2000x + 1000000) = -20000y + 3000000$$
$$3(x - 1000)^2 = -20000y + 3000000$$
$$3(x - 1000)^2 = -20000(y - 150)$$
$$(x - 1000)^2 = -\frac{20000}{3}(y - 150)$$

La altura máxima del disparo fue de 150mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.

c) Error algebraico y aritmético en el proceso de completar cuadrados para la obtención de la ecuación canónica.

$$3d^2 - 6000d = -20000h$$

Transformando variables:

$$3(x^2 - 2000x) = -20000y$$

$$3(x^2 - 2000x + \left[\frac{1}{2}(2000)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(2000)\right]^2) = -20000y$$

$$3(x^2 - 2000x + 1000000 - 1000000) = -20000y$$
$$3(x^2 - 2000x + 1000000) - 1000000 = -20000y$$
$$3(x^2 - 2000x + 1000000) = -20000y + 1000000$$
$$3(x - 1000)^2 = -20000y + 1000000$$
$$3(x - 1000)^2 = -20000(y - 50)$$
$$(x - 1000)^2 = -\frac{20000}{3}(y - 50)$$

La altura máxima del disparo fue de 50mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.

d) Error aritmético – algebraico en la ecuación equivalente. Error en interpretación de resultados geométricos. Error de razonamiento e interpretación del problema, así como en propiedades de la parábola.

$$3d^2 - 6000d = -20000h$$

Transformando variables:

$$3x^2 - 6000x = -20000y$$

Dividiendo entre 3:

$$x^2 - 6000x = -20000y$$

$$x^2 - 6000x + \left[\frac{1}{2}(6000)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(6000)\right]^2) = -20000y$$

$$x^2 - 6000x + 9000000 - 9000000 = -20000y$$

$$x^2 - 6000x + 9000000 = -20000y + 9000000$$

$$(x - 3000)^2 = -20000(y + 450)$$

La altura máxima del disparo fue de 3000mts y ocurre a una distancia horizontal de 450mts.

5) Con referencia al problema anterior, ¿a qué distancia se encuentra el barco B de la tripulación rusa?

La respuesta de esta pregunta está relacionada con lo que el alumno haya contestado en el problema anterior, aunque también podría depender de su razonamiento e intuición. Por ello, las opciones de respuesta a esta pregunta están diseñadas en base a los errores expuestos en la pregunta antecedente.

a) Si el alumno cayó en el error de la ecuación $(x-3000)^2=-20000(y+450)$, es posible que responda que “El barco B está a 20,000mts de distancia (lado recto de la parábola)”.

b) Si el alumno cayó en el error de la ecuación $(x-3000)^2=-20000(y-450)$, es posible que responda: “El barco B, por simetría de la parábola, está a 6000mts de distancia.”

c) Correcta:

El disparo cae en el barco B, donde la altura debe valer cero, es decir, h = 0. Así:

$$3d^2-6000d=-20000h$$
$$3d^2-6000d=0$$
$$3d(d-2000)=0$$

Despejando, obtenemos:

$$d_1=0 \quad y \quad d_2=2000$$

Evidentemente, la distancia debe ser de 2000mts.

d) Si el alumno eligió la opción (b) o (c) en la pregunta anterior, es posible que cometa el error de tomar el lado recto como distancia al barco B, lo que haría elegir la opción: “El barco B está a $\frac{20000}{3}mts$ de distancia”

En el capítulo: “Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación aplicados”, se analizarán los resultados obtenidos de tal prueba. El lector puede dirigirse al anexo 4 para visualizar la prueba post-test tal cual fue entregada a los alumnos.

El profesor aplica sus saberes en el diseño de las estrategias adecuadas para conseguir el objetivo: el aprendizaje de los alumnos, y debe tratar de tener en cuenta en mayor medida de lo posible el sin fin de variables que se involucran en el proceso de enseñanza aprendizaje. La finalidad de esta sección fue mostrar el diseño de todas las estrategias creadas para lograr tal fin, así como mostrar todos los recursos de los que se valdrá el profesor para impartir su cátedra. Cabe resaltar que no existe una estrategia perfecta. El profesor debe usar todos los recursos que conoce, que se encuentra por casualidad en un texto, en una revista, en internet, pero, sobre todo, lo que crea con su imaginación, con su intuición y lo que observa que le pide un grupo. Cualquier recurso, siempre que sea usado para lograr el objetivo de aprendizaje de los alumnos, es válido. “El docente nunca acaba de construir propuestas didácticas (…) encontramos modelos curriculares que quieren encajonar el trabajo docente en una propuesta de trabajo, en vez de reconocer la parte profesional del docente para construirla” (Díaz – Barriga, 2019, minuto 17:54).

3. INFORME DE LA INTERVENCIÓN

3.1. La implementación del proyecto de trabajo

"*Es más fácil aprender enseñando que solamente tratando de aprender*" Gómez (2004)

Una vez que el profesor ha diseñado las estrategias para su proyecto de trabajo al considerar las variables pertinentes para ello, el siguiente paso es su implementación en el grupo.

Así, en este capítulo se describe dicha implementación a través de una bitácora de las sesiones, con la finalidad de que el lector pueda visualizar el comparativo de las actividades planeadas y las realmente hechas, así como las observaciones y reflexiones del profesor en cada sesión impartida.

Las sesiones fueron grabadas de dos maneras distintas: algunas sesiones las grabó el profesor a través de un dispositivo móvil que graba el monitor de la computadora, y otras sesiones, donde la profesora de Práctica Docente III tuvo oportunidad de estar, ingresó a la reunión de Google Meet con la cuenta de la profesora titular de la materia, y a través de un software grabó desde su computadora las sesiones para que se puedan observar tal como la miran los alumnos que toman la clase en línea.

Para que el lector pueda vislumbrar un panorama completo de la implementación del proyecto de trabajo del profesor sesión por sesión, además del comparativo mencionado que se presenta en este capítulo, en cada sesión se presenta un vínculo de YouTube para la visualización de la implementación. Evidentemente, no hay vínculo de YouTube para las sesiones 1 y 15 porque dichas sesiones son las correspondientes a las pruebas pre-test y post-test respectivamente. Aunado a lo anterior, no hay video de la sesión 3 debido a fallas tecnológicas, y el video de la sesión 14 fue extraviado.

A continuación, se presentan los datos generales del profesor, datos de la asignatura y la bitácora:

FICHA DE IDENTIFICACIÓN
Nombre del alumno MADEMS: Prof. Jorge Luis Barragán Monroy
Número de cuenta: 302150760
Semestre: 4TO SEMESTRE
Domicilio del alumno MADEMS: Cd. Nezahualcóyotl, Estado de México
Teléfono celular: 551827-5888
Plantel de adscripción: Facultad de Ciencias, UNAM
Correo Electrónico: plosbarragan@gmail.com
Profesor de la Práctica Docente III Dra. Giselle Ochoa Hofmann
Supervisor de la Práctica Docente III Lic. Gloria Marisela García Landaverde
Institución Sede donde se realizará la Práctica Docente III "El Colegio A. C."
Tutor principal de tesis MADEMS Dra. Giselle Ochoa Hofmann
Título de tesis MADEMS: " Diseño e implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola bajo la modalidad híbrida sincrónica en la educación media superior "
Tema asignado para realizar la Práctica Docente III: La parábola

DATOS DE LA ASIGNATURA
Nombre de la asignatura a impartir Matemáticas V
Semestre o año escolar 5to año de preparatoria (2do año del nivel bachillerato) 24 alumnos entre los 16 y 18 años Modalidad híbrida sincrónica
Propósito general: El alumno desarrollará habilidades de pensamiento a través de la visualización, el análisis, la síntesis y la abstracción de situaciones que presenten diferentes relaciones de dependencia y que puedan ser modeladas dentro o fuera de un sistema de referencia. Además, desarrollará una formación estadística básica para interpretar y evaluar información procedente de diversas fuentes de información, y para describir el comportamiento de un fenómeno a partir del procesamiento, modelación y análisis de grandes cantidades de datos, utilizando herramientas digitales para la visualización y el análisis de las situaciones que lo ameriten. Todo lo anterior con el fin de que plantee preguntas, discuta ideas, verifique conjeturas, argumente procedimientos e interprete resultados y tome decisiones fundamentadas en un razonamiento matemático.
Propósitos específicos de la unidad V: Desarrollará habilidades de visualización, representación, abstracción y razonamiento través del estudio de alguno de los temas propuestos para ampliar su cultura matemática y profundizar en el conocimiento y aplicación de la temática seleccionada por el profesor.
Propósitos específicos del tema elegido (cónicas): Desarrollará habilidades de visualización, representación, generalización y razonamiento al resolver problemas de la geometría analítica mediante la introducción de un sistema de referencia cartesiano y el correspondiente tratamiento algebraico, con el fin de modelar fenómenos y analizar situaciones que puedan representarse gráfica y analíticamente. Analizará la ecuación de segundo grado, a través del uso de herramientas tecnológicas, para vincularla con las curvas cónicas.

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 01</td></tr>
<tr><td>FECHA 14 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: No aplica para esta sesión</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 8:20am</td><td>Hora de término 9:10am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Presentación de la prueba pre-test: su estructura y objetivos</td><td>Presentación de la prueba pre-test: su estructura y objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Prueba pre-test</td><td>Prueba pre-test</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Prueba pre-test elaborada en Google Formularios para los alumnos en línea, y en físico para los alumnos presenciales.</td><td>Prueba pre-test elaborada en Google Formularios para los alumnos en línea, y en físico para los alumnos presenciales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>La prueba pre-test está diseñada para observar las áreas de oportunidad del estudiante en geometría analítica, áreas que se trabajarán para su minimización a través de la enseñanza de la parábola.</td><td>La prueba pre-test está diseñada para observar las áreas de oportunidad del estudiante en geometría analítica, áreas que se trabajarán para su minimización a través de la enseñanza de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Los reactivos están hechos para que los alumnos realicen el desarrollo algebraico y geométrico correcto que los conduzca a la elección de la respuesta correcta.</td><td>Los reactivos están hechos para que los alumnos realicen el desarrollo algebraico y geométrico correcto que los conduzca a la elección de la respuesta correcta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>Se hará un análisis de los resultados obtenidos</td><td>Se hará un análisis de los resultados obtenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">No hubo dudas</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>Evaluación arrojada por el formulario de Google para alumnos en línea.
Evaluación de manera manual para alumnos presenciales.</td><td>La evaluación de las respuestas de cada pregunta se realizó con los resultados arrojados por el formulario. Los alumnos que hicieron el pre-test presencial se evaluaron manualmente. Se hará un análisis de los resultados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los alumnos realizaron el pre-test dentro del tiempo establecido. De los 24 alumnos del grupo realizaron la prueba 20, de manera presencial 6 y 14 en línea.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es una buena estrategia comentarles a los alumnos que la prueba sólo es informativa, que no cuenta para evaluar, ya que los alumnos no sienten presión y pueden contestar más honestamente, lo que permite obtener mejores resultados al observar sus áreas de oportunidad dentro de la geometría.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</th><th>FOLIO SESIÓN 02</th></tr>
<tr><td>FECHA 15 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: https://youtu.be/9qB08iAEREw</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 12:10pm</td><td>Hora de término 1:00pm</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Definición de la parábola y sus elementos.</td><td>Definición de la parábola y sus elementos</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Definición de la parábola y sus elementos. Construcción geométrica de la parábola con regla y compás.</td><td>Definición de la parábola y sus elementos</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas elaborados con geometría dinámica y pizarrón.</td><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas elaborados con geometría dinámica y pizarrón.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Usar los esquemas elaborados en GeoGebra para la definición e identificación de los elementos de la parábola. Video de elaboración propia para explicar la construcción geométrica de la parábola.</td><td>Usar los esquemas elaborados en GeoGebra para la definición e identificación de los elementos de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Visualización algebraica y geométrica de los elementos de la parábola. Proceso geométrico para la construcción de la parábola de manera manual.</td><td>Se ejecutó dicha estrategia de manera incompleta, ya que faltó definir el lado recto y su relación con el parámetro p. No se pudo pasar a la actividad de construcción de la parábola con regla y compás.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>Definición de la parábola como lugar geométrico. Identificar los elementos de la parábola. Construcción de una parábola de manera manual.</td><td>No se logró terminar la identificación de los elementos (faltó el lado recto)
No se ejecutó la otra estrategia de construcción de la parábola con regla y compás.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como es natural, surgieron dudas sobre la definición de la parábola, ya que es un concepto prácticamente desconocido para ellos hasta el momento. Sólo se cuenta con el referente de la ecuación de 2do grado y una curva como una “U”, de hecho, de ahí se partió.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">No se identificó ningún problema de aprendizaje crítico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">No hay ninguna observación crítica</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se nota una buena disposición de los alumnos hacia la clase. El hecho de tener el tema de circunferencia (una cónica) como antecedente, hace mucho más fácil la comprensión de otra cónica (la parábola). La estrategia de geometría dinámica resulta bastante favorable, ya que permite una mejor visualización de los elementos de la parábola. Me sentí bastante bien en nuestra primera clase formal. Alcanzo a apreciar que tienen los conocimientos previos necesarios para abordar favorablemente el tema de parábola. Me doy cuenta que algunas cosas no saben cómo expresarlas, pero las entienden.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 03</td></tr>
<tr><td>FECHA 16 de Marzo del 2022</td><td>Video no disponible debido a fallas tecnológicas</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 12:10pm</td><td>Hora de término 1:00pm</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>¿En dónde están las parábolas en mi vida cotidiana?; presentación: “El poder infinito de las parábolas”</td><td>Definición del lado recto de la parábola
Construcción geométrica de la parábola con regla y compás</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Exposición del profesor sobre la presencia de las parábolas en la vida cotidiana</td><td>Esquema dinámico en GeoGebra para la comprensión del lado recto y su relación con la amplitud de la parábola.
Proyección de un video de elaboración propia para la ejecución del método de construcción manual de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas elaborados con geometría dinámica y pizarrón.</td><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas elaborados con geometría dinámica y pizarrón.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Presentación en Power Point con ejemplos varios de las parábolas y sus aplicaciones.</td><td>Esquema dinámico para la definición del lado recto.
Proyección de un video para la construcción manual de la parábola usando regla y compás.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>El proceso geométrico consiste en la visualización de la parábola dentro de la vida cotidiana.</td><td>La definición del parámetro p nos ayuda a comprender la amplitud de la parábola dada por el lado recto, a través de un proceso algebraico.
La construcción de la parábola usando sólo regla y compás implica un proceso geométrico. Al identificar la lógica del proceso se refuerza la definición de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>Se espera lograr una amplia visualización de los alumnos sobre las parábolas en la vida cotidiana.</td><td>Amplitud de la parábola dada por el lado recto y su relación con el parámetro p.
No se terminó la construcción de la parábola usando regla y compás.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Debido a que resultaron muchas dudas con el método de construcción, esta actividad no fue terminada y se pospuso para la siguiente clase.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Surgieron varias dudas en este tema. Me doy cuenta que, por alguna razón que no alcanzo a apreciar, a los alumnos les cuesta mucho trabajo relacionar un elemento geométrico que depende de un parámetro, en este caso el lado recto que depende del parámetro p.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: ¿en dónde están las parábolas y catenarias en mi vida cotidiana?; comprobando la propiedad de reflexión</td><td>La construcción manual de la parábola se evaluó con una tarea donde se tenía que construir otra parábola con el mismo método</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">En esta clase surgieron bastantes problemas tecnológicos, ya que se instaló en la computadora una aplicación para grabar las clases, pero esto provocó una proyección de los materiales bastante lenta y confusa, lo que generó confusión en los estudiantes. Los alumnos que acuden al plantel (presencial) tienen desventaja en la visión de los materiales debido a la mala proyección del cañón, dificultando su aprendizaje. Detecté que el método de construcción manual de la parábola se dificultó bastante, además de los problemas tecnológicos, debido a la incomprensión de la lógica del mismo (la validez del método). Se retomará en la siguiente clase.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">La estrategia de geometría dinámica para la definición del lado recto resulta favorable, ya que apoya a los alumnos a visualizar de mejor forma las variaciones en amplitud de las parábolas dadas por el lado recto. La estrategia del video para la construcción manual de la parábola hay que mejorarla. Quizá hacer un video más corto y más claro. Además, se detectó un error de escritura en las coordenadas del foco. Quizá también plantear la actividad con otra parábola pero ahora horizontal, con el fin de darle la oportunidad al alumno de una visión más amplia del método.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</th><th>FOLIO SESIÓN 04</th></tr>
<tr><td>FECHA 17 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: https://youtu.be/Ir0bWc32MwE</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 7:30am</td><td>Hora de término 8:20am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo se escriben las parábolas en matemáticas?</td><td>Construcción geométrica de la parábola con regla y compás (continuación)</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Encontrar las diferentes ecuaciones de las parábolas con V(0,0)</td><td>Proyección de un video de elaboración propia para la ejecución del método de construcción manual de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas previamente elaborados en GeoGebra, pizarrón y marcadores.</td><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas elaborados con geometría dinámica y pizarrón.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Explicación del origen de la ecuación de la parábola a través de un esquema elaborado en GeoGebra.</td><td>Proyección de un video para la construcción manual de la parábola usando regla y compás.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>El profesor guía a los alumnos a encontrar la ecuación de la parábola. El profesor apoya a los alumnos en los procesos aritméticos y algebraicos que se puedan dificultar en el proceso.</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Procedimiento algebraico: álgebra desarrollada para la obtención de la ecuación de la parábola.
Procedimiento geométrico: generalización de los elementos de la parábola.</td><td>La construcción de la parábola usando sólo regla y compás implica un proceso geométrico. Al identificar la lógica del proceso se refuerza la definición de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Construcción de la parábola usando regla y compás. Definición de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se orientó uno por uno a los estudiantes presenciales en su trabajo, ya que algunos presentaban dudas en la construcción de método. Sólo 3 estudiantes en línea hicieron cuestionamientos del método, argumentando los demás que no tenían dudas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se siguió una estrategia de orientación personalizada para la construcción manual de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Se dejó como actividad la construcción manual de otra parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">El día de mañana viernes 18 de marzo no se impartirá clase debido a un torneo de fútbol soccer en la escuela. El día Lunes 21 de marzo tampoco habrá clase debido a que es día feriado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Noto la dificultad de realizar construcciones manuales y lo atribuyo a la falta de costumbre, de visualización y a las fallas tecnológicas particulares que ocurrieron. Me parece que se lograron aclarar todas las dudas, aunque me llamó la atención que hubiera varias dudas aún del tema anterior, en particular del lado recto.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</th><th>FOLIO SESIÓN 05</th></tr>
<tr><td>FECHA 22 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: https://youtu.be/4v_izZ_GGDE</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 12:10pm</td><td>Hora de término 1:00pm</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>La aplicación de las ecuaciones de la parábola en contextos geométricos</td><td>¿Dónde están las parábolas en mi vida cotidiana?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Ejemplos sobre la ecuación de la parábola.</td><td>Presentación: “El poder infinito de las parábolas”</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón y marcadores.</td><td>Presentación en Power Point con ejemplos varios de la aplicación de la parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Resolución de los ejemplos a través del software GeoGebra y se hace énfasis en su construcción manual a la vez, es decir, no se introduce la ecuación, sino que se le muestra al alumno el proceso equivalente manual a través del GeoGebra. La introducción de la ecuación en el software es sólo para comprobar resultados.</td><td>Identificación de ejemplos varios en la vida cotidiana donde aparece la parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Los ejemplos son resueltos por los alumnos de manera grupal, ya que el profesor sólo guía para llegar a su solución.</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Procedimiento algebraico: álgebra desarrollada para la obtención de la ecuación de la parábola
Procedimiento geométrico: construcción digital y manual de la parábola</td><td>La visualización de la parábola en la vida cotidiana implica un procedimiento geométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los alumnos respondieron correctamente acerca de aplicaciones de la parábola. Algunos trataron de generar sus propios ejemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">No hubo dudas sobre la exposición</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">No se detectaron problemas de aprendizaje críticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>Se les entregará una serie de ejercicios de este tema</td><td>Actividad: comprobación geométrica de la propiedad de reflexión</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">El día de hoy sólo acudieron 3 alumnos al plantel (presencial). No hubo clase el día Lunes 21 de marzo porque fue puente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sentí sin ánimos a los alumnos, quizá un tanto por lo del puente o debido a la falta de alumnos presenciales, ya que sólo asistieron 3. Se debe modificar el video de los espejos parabólicos de Arquímedes, ya que casi no se escucha. No me dio tiempo de plantear la actividad de la comprobación de la propiedad de reflexión.</td></tr>
</table>

BITÁCORA PRÁCTICA DOCENTE III	FOLIO SESIÓN 06
FECHA 23 de Marzo del 2022	YouTube: https://youtu.be/8tQfFBiNSXs
Hora de inicio 12:10pm	**Hora de término** 1:00pm
Actividad planeada	**Actividad realizada**
1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.	
Las ecuaciones de la parábola con V (h, k). La ecuación general.	¿Cómo se escriben las parábolas en matemáticas?
2. Exposición del tema de la práctica docente	
Encontrar las ecuaciones de la parábola cuando su vértice está en V (h, k). Aplicar dichas ecuaciones en contextos geométricos.	Generalización de los elementos de una parábola para encontrar su ecuación.
3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos	
Computadora, proyector, software GeoGebra, esquemas previamente elaborados en GeoGebra, pizarrón y marcadores. Ejercicios de práctica de contexto geométrico.	Se empleó un esquema elaborado en GeoGebra para la obtención de la ecuación de la parábola.
4. Uso de estrategias didácticas	
Guiar a los alumnos hacia a obtención de la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha con V (h, k) a través de una traslación, usando un esquema en GeoGebra. Ejemplos de práctica.	Guiar a los alumnos hacia la generalización de los elementos de la parábola, para facilitar la obtención de su ecuación.
5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo	
Colaboración del grupo para la obtención de la ecuación buscada, así como la generación de las demás ecuaciones usando los patrones y la lógica expuestos en las parábolas con V (0, 0).	Búsqueda de fórmulas para calcular distancias en internet.
6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico	
Procedimiento algebraico: técnicas algebraicas para obtener las nuevas coordenadas del vértice. Técnicas algebraicas para la obtención de las ecuaciones de la parábola. Procedimiento geométrico: construcción gráfica de las parábolas	Procedimiento algebraico: álgebra desarrollada para la obtención de la ecuación de la parábola. Procedimiento geométrico: generalización de los elementos de la parábola a partir de su visualización geométrica.
7. Identificación de aprendizajes logrados	
No aplica	Los alumnos responden a los cuestionamientos sobre la ecuación de la parábola, aunque la generalización les cuesta mucho trabajo.
8. Aclaración de dudas de los estudiantes	
Como era de esperarse, en este tema hubo bastantes dudas. Me parece que todas fueron contestadas acertadamente con la finalidad de aclarar el panorama de geeralización que se estaba tratando.	
9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje	
Los estudiantes preguntaron bastante acerca de los elementos generalizados de la parábola. Les cuesta mucho trabajo ver esta parte teórica. No noté dificultad en relacionar los elementos geométricos con algebraicos, sino en la generalización de los elementos de la parábola.	
10. Evaluación	
No aplica	No aplica
11. Observaciones	
Al principio de esta clase se planteó la actividad de visualización de la propiedad de reflexión. No se logró concluir con el tema, así que se continuará en la siguiente sesión.	
12. Reflexiones	
Hubo muchas dudas sobre la generalización de los elementos de la parábola, les costó mucho trabajo; me parece que no están acostumbrados a la parte teórica-abstracta de la matemática. Parece que se resolvieron las dudas, aunque no estoy muy seguro. Podría ser una mejora al esquema de la parábola quitar los ejes, para facilitarle a los alumnos la generalización de los elementos, ya que la numeración confunde.	

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 07</td></tr>
<tr><td>FECHA 24 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: https://youtu.be/4S4Qsjlgm5Y</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 7:30am</td><td>Hora de término 8:20am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Ejemplos y ejercicios en contextos geométricos de la ecuación de la parábola con V (h, k). Obtención de la ecuación general</td><td>¿Cómo se escriben las parábolas matemáticamente?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Ejemplos y ejercicios varios en contextos geométricos con V (h, k). Obtención de la ecuación general.</td><td>Las ecuaciones de la parábola con V(0, 0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón y marcadores.
Ejercicios de práctica de contexto geométrico del material didáctico.</td><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, ejercicios del material didáctico, pizarrón y marcadores.
Tabla de ecuaciones de la parábola con V (0, 0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Ejercicios elaborados para enfrentar al alumno con diferentes situaciones en contextos geométricos.</td><td>Se retomó el esquema y la construcción algebraica que hicimos la clase anterior para volver a repasar los conceptos teóricos aprendidos para la obtención de la ecuación de la parábola.
Se empleó una estrategia de intuición para obtener las ecuaciones de la parábola restantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td><td>El proceso algebraico para encontrar la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha fue resuelto de manera grupal, el profesor sólo fue un guía. La tabla de las ecuaciones de la parábola fue completada por los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td><td>Procedimiento algebraico: técnicas algebraicas para la obtención de la ecuación de la parábola
Procedimiento geométrico: identificación de los patrones algebraicos para determinar las ecuaciones de las diferentes parábolas usando la lógica e intuición.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Aprendizaje más consolidado sobre el proceso algebraico para la obtención de la ecuación de la parábola. Los alumnos lograron identificar los patrones algebraicos que llevan a deducir las demás ecuaciones de la parábola de manera lógica e intuitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las dudas que surgieron en esta clase fueron más de cuestiones algebraicas. Sigue habiendo dudas sobre el lado recto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hay alumnos que continúan teniendo dudas del lado recto. Parece que cuesta trabajo aún identificar su relación con p, su longitud, así como su significado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">No hay observaciones particulares críticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">En esta clase logramos terminar con la obtención de la ecuación de la parábola horizontal que abre a la derecha con V (0, 0), y se logró obtener las ecuaciones restantes de las parábolas de manera intuitiva, siguiendo los patrones vistos en las mismas. Parece que esta estrategia funciona, ya que noté una participación muy activa de los estudiantes tanto presenciales como en línea.</td></tr>
</table>

BITÁCORA PRÁCTICA DOCENTE III	FOLIO SESIÓN 08
FECHA 25 de Marzo del 2022	YouTube: https://youtu.be/VPjagHKP6yg
Hora de inicio 12:10pm	**Hora de término** 1:00pm
Actividad planeada	**Actividad realizada**
1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.	
Ejemplos y ejercicios en contextos geométricos avanzados de la ecuación de la parábola con V (*h*, *k*), en situaciones donde se involucran rectas y circunferencias (temas previos).	Aplicando las ecuaciones de la parábola en contextos geométricos
2. Exposición del tema de la práctica docente	
Ejemplos y ejercicios varios en contextos geométricos avanzados de la parábola con V (*h*, *k*). Para estos ejercicios se tienen contempladas dos sesiones.	Ejemplos sobre la ecuación de la parábola
3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos	
Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón y marcadores. Ejercicios de práctica de contexto geométrico del material didáctico.	Computadora, software GeoGebra, pizarrón y marcadores
4. Uso de estrategias didácticas	
Ejercicios planteados para enfrentar al alumno con diferentes situaciones en contextos geométricos avanzados, en donde involucra sus conocimientos de rectas, circunferencia y parábola en un mismo problema.	Resolución de los ejemplos a través de software GeoGebra haciendo énfasis en su construcción manual a la vez. Se le muestra al alumno el proceso equivalente manual a través de GeoGebra.
5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo	
Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.	Los ejemplos son resueltos por los alumnos de manera grupal, ya que el profesor sólo guía para llegar a su solución.
6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico	
Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.	Procedimiento algebraico: álgebra desarrollada para la obtención de la ecuación de la parábola. Procedimiento geométrico: construcción digital y manual de la parábola.
7. Identificación de aprendizajes logrados	
No aplica	Los alumnos lograron visualizar el patrón existente dentro de las ecuaciones de la parábola con V (0, 0), aplicándolos correctamente en los diferentes ejemplos.
8. Aclaración de dudas de los estudiantes	
Los estudiantes han tenido dudas sobre estas aplicaciones en contextos geométricos, aunque me parece que se van aclarando poco a poco.	
9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje	
No se detectó un problema de aprendizaje muy grave.	
10. Evaluación	
No aplica	No aplica
11. Observaciones	
No hay observaciones importantes a considerar.	
12. Reflexiones	
Me parece que los alumnos van evolucionando de manera positiva. Todas las preguntas dirigidas que he hecho las han contestado acertadamente. Me percato de que están estableciendo relaciones correctas entre las ecuaciones y las gráficas de las parábolas.	

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 09</td></tr>
<tr><td>FECHA 28 de Marzo del 2022</td><td>https://www.youtube.com/watch?v=76Qg5TnL5pI</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 8:20am</td><td>Hora de término 9:10am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Ejemplos y ejercicios en contextos geométricos avanzados de la ecuación de la parábola con V (h, k), en situaciones donde se involucran rectas y circunferencias (temas previos)</td><td>Aplicando las ecuaciones de la parábola en contextos geométricos</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Ejemplos y ejercicios varios en contextos geométricos avanzados de la parábola con V (h, k).</td><td>Ejemplos y ejercicios sobre la ecuación de la parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.</td><td>Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.
Actividad de parábolas con V (0,0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Ejercicios planteados para enfrentar al alumno con diferentes situaciones en contextos geométricos avanzados, en donde involucra sus conocimientos de rectas, circunferencia y parábola en un mismo problema.</td><td>Se terminó un último ejemplo sobre el uso de las ecuaciones de la parábola en contextos geométricos.
Actividad de resolución de problemas geométricos de la parábola con V (0,0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td><td>La actividad de resolución de problemas geométricos de la parábola con V (0,0) se resolvió en equipo por los alumnos presenciales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td><td>La actividad fue diseñada para aplicar ambos procedimientos, ya que los alumnos tenían que relacionar ecuaciones con sus gráficas respectivas, así como a partir de las gráficas encontrar sus ecuaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los alumnos lograron visualizar los elementos de las ecuaciones de la parábola con V (0, 0) en contexto geométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aún hay dudas, sobretodo en el lado recto, pero también noto mucha mejora en los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hubo una alumna en línea que aún tenía dudas con la estructura de las ecuaciones de la parábola, sobretodo en la identificación del lado recto. Se atendió y me parece que la alumna ha superado este problema, ya que posteriormente ella misma resuelve un ejercicio por sí misma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Se trabajó con unos ejercicios y se observó el trabajo de los alumnos. Esta actividad me pareció bastante bien porque fomenta el trabajo en equipo, así como el aprendizaje entre pares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">No hay observaciones importantes a considerar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Me gustó mucho esta clase y parece que los alumnos responden de manera positiva. En esta clase fallé en no ver el trabajo de los alumnos en línea, área que tengo que mejorar. Se les preguntó sobre dudas o dificultades, a lo que contestaron algunos sobre dudas que se atendieron oportunamente, sin embargo, sí pienso que debería implementar una estrategia que me permita ver sus trabajos en línea.</td></tr>
</table>

BITÁCORA PRÁCTICA DOCENTE III	FOLIO SESIÓN 10
FECHA 29 de Marzo del 2022	YouTube: https://youtu.be/wVs10PVlc_w
Hora de inicio 12:10pm	**Hora de término** 1:00pm
Actividad planeada	**Actividad realizada**
1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.	
Los elementos de la parábola a partir de su ecuación general	Las ecuaciones de la parábola con V (*h*, *k*)
2. Exposición del tema de la práctica docente	
Completar el cuadrado para obtener los elementos de la parábola	¿Cómo serían las ecuaciones de la parábola con el vértice fuera del origen?
3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos	
Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.	Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico. Esquemas hechos en GeoGebra.
4. Uso de estrategias didácticas	
Ejercicios planteados para enfrentar al alumno con diferentes situaciones en contextos algebraicos, así como el reforzamiento de conocimientos previos (completar el cuadrado en este caso).	Guiar a los alumnos hacia la obtención de la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la derecha con V (*h*, *k*) a través de una traslación, usando un esquema con geometría dinámica en GeoGebra. Ejemplos en contextos geométricos.
5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo	
Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.	Colaboración del grupo para la obtención de la ecuación buscada a través de preguntas dirigidas, así como la generalización de las demás ecuaciones a través patrones.
6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico	
Proceso algebraico: se puede ver esta actividad como reforzamiento, ya que el proceso de completar el cuadrado (en la parábola) es un conocimiento previo (álgebra y la circunferencia). Procedimiento geométrico: una vez que se tiene la parábola en su forma canónica, se procede a construir su gráfica y se vuelve a relacionar los elementos de la parábola con su gráfica.	Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola generales y en casos particulares de los diferentes problemas Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.
7. Identificación de aprendizajes logrados	
No aplica	Los alumnos lograron comprender el proceso de traslación de la parábola a través del cual de obtuvieron las ecuaciones de la parábola con V (h, k). Los alumnos originaron las demás ecuaciones (de las otras parábolas) a través de la deducción.
8. Aclaración de dudas de los estudiantes	
No se detectaron dudas graves.	
9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje	
No se detectaron alumnos con problemas de aprendizaje.	
10. Evaluación	
No aplica	No aplica
11. Observaciones	
El cañón proyector se conectaba y desconectaba seguido, lo que impedía la visión de los alumnos momentáneamente.	
12. Reflexiones	
Parece que la estrategia del esquema dinámico en GeoGebra para comprender la traslación de los puntos fue muy buena, ya que pienso que ayudó mucho a comprender la traslación de un objeto geométrico, situación que favoreció bastante a originar las ecuaciones de las parábolas.	

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 11</td></tr>
<tr><td>FECHA 30 de Marzo del 2022</td><td>YouTube: https://youtu.be/qF_-uL6FMCs</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 12:10pm</td><td>Hora de término 1:00pm</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Aplicaciones de la parábola</td><td>Ejercicios en contextos geométricos de la ecuación de la parábola con V (h, k). Obtención de la ecuación general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Solución de problemas que requieren un modelo parabólico</td><td>Ejercicios de contexto geométrico de ecuación de la parábola con V (h, k)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Computadora, proyector, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.</td><td>Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico. Actividad de parábolas con V (h, k)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Ejercicios elaborados para enfrentar al alumno con diferentes problemáticas en contextos reales cuya solución depende de un modelo parabólico.</td><td>Ejercicios elaborados para enfrentar al alumno en diferentes situaciones en contexto geométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td><td>Se formaron equipos con los alumnos presenciales para la solución de un grupo de ejercicios. Se asignó un ejercicio a cada alumno en línea. El profesor supervisó el trabajo en ambas modalidades a medida de lo posible.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Proceso algebraico: construcción de los modelos parabólicos adecuados para cada situación específica.
Procedimiento geométrico: visualización geométrica de la parábola y sus elementos en cada situación específica.</td><td>Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los alumnos presenciales lograron resolver los ejercicios propuestos por el profesor. Algunos alumnos en línea también lograron dicho objetivo y mostraron sus trabajos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hubo muchas dudas, aunque me parece que todos lograron disiparlas de manera eficiente. Me parece que el trabajo en equipos fomentó aprendizaje entre pares, que sumado a la supervisión del profesor, mejora el aprendizaje del tema.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">En esta clase noté dudas preocupantes: hubo alumnos que me preguntaron sobre localización de puntos en el plano, otros que me preguntaron la resta de 2 – ½ (aritmética), una alumna sigue teniendo dudas sobre la propiedad de reflexión, y una alumna dijo textualmente: “no he puesto atención a su materia. Me cuesta mucho trabajo ponerle atención a las clases de mate en general”. Aunque aclaré dichas dudas, me preocupa que los alumnos realmente hayan entendido, sobretodo, me preocupa la alumna que hace esta declaración.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Se dejaron de tarea unos ejercicios de parábolas con V (h, k) en contexto geométrico</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se trabajó con ejercicios durante la clase, de manera presencial y en línea.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Me parece que me equivoqué en esta estrategia, ya que los alumnos presenciales trabajaron muy bien, y noté que en todos los equipos colaboraban entre ellos para la solución de los problemas y sus propias dudas. Por otro lado, siento que abandoné un tanto a los alumnos en línea, ya que, aunque algunos mostraron sus trabajos y dudas, hubo otros que me di cuenta que no estaban trabajando, ya que no avanzaban nada del ejercicio. Hubo un alumno en línea que me comentó textualmente “no he empezado el ejercicio” después de aproximadamente 35 min de haber iniciado la clase. Tengo que pensar en otra estrategia que me ayude a atraer a esos alumnos que se quedan rezagados. Sé que es parte del desarrollo humano también, pero me parece que debo hacer lo posible porque no quede en mí.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td colspan="3">FOLIO SESIÓN 12</td></tr>
<tr><td>FECHA 31 de Marzo del 2022</td><td colspan="3">YouTube: https://youtu.be/jj-6DyNvWDg (1ra parte)
https://youtu.be/AsZUXWZHSZ4 (2da parte)</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 7:30am</td><td colspan="3">Hora de término 8:20am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td colspan="3">Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Presentación de la prueba post-test: su estructura y objetivos</td><td colspan="3">Ejemplos y ejercicios de parábola en contexto geométrico</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>Prueba post-test</td><td colspan="3">Ejemplos y ejercicios para determinar los elementos de la parábola a partir de la ecuación ordinaria o general. A partir de la gráfica, obtener su ecuación.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>Prueba post-test en físico y en formulario de Google elaborado para que los alumnos realicen los desarrollos algebraicos y geométricos adecuados que los conduzcan a la elección de la respuesta correcta.</td><td colspan="3">Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>Este examen está diseñado para enfrentar al alumno con distintas situaciones algebraicas, geométricas y de modelación parabólica, situaciones análogas con las que se enfrentó en la prueba pre-test.</td><td colspan="3">Ejercicios elaborados para enfrentar al alumno en diferentes situaciones en contexto geométrico.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td colspan="3">Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>Prueba post-test elaborado para que los alumnos realicen los desarrollos algebraicos y geométricos correctos que los conduzcan a la elección de la respuesta correcta.</td><td colspan="3">Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td colspan="3">Los alumnos lograron identificar los elementos de la parábola a partir de la ecuación, y hacer relaciones correctas entre ecuación y gráfica. Se logró identificar los elementos de la parábola dada su ecuación general.</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aún hubo algunas dudas con las ecuaciones ordinarias de la parábola, aunque se aclararon sin problema alguno.</td></tr>
<tr><td colspan="4">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="4">No se notó ningún caso alarmante de dificultad de aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="4">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>Evaluación arrojada por el formulario de Google para alumnos en línea.
Evaluación de manera manual para alumnos presenciales.</td><td colspan="3">Se dejaron algunos ejercicios adicionales de parábolas con V (h, k), agregando algunos donde se tiene que pasar de la ecuación general a la ordinaria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Esta sesión contiene dos videos distintos de YouTube debido a una desconexión de internet. El video se interrumpió y después de 10min aproximadamente se continuó con la grabación. El lector puede apreciar la clase en dos partes a través de estos videos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="4">A diferencia de la sesión anterior, me doy cuenta que los alumnos han adquirido una mayor habilidad en el manejo los elementos de la parábola, ya que logramos avanzar sin problemas con los ejemplos. Hoy noté un mejor dominio algebraico, de conceptos, así como una mejor visualización geométrica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td colspan="2">FOLIO SESIÓN 13</td></tr>
<tr><td>FECHA</td><td>1 de Abril del 2022</td><td colspan="2">YouTube: https://youtu.be/vAK6g-ca60c</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio</td><td>12:10pm</td><td>Hora de término</td><td>1:00pm</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad planeada</td><td colspan="2">Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Modelación con parábolas</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Ejemplos sobre situaciones cotidianas que se pueden resolver con un modelo parabólico.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Ejercicios diseñados para enfrentar al alumno en diferentes situaciones en contextos reales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Los alumnos mostraron mucha facilidad para identificar los elementos de la parábola en contextos reales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="4">Hubo dudas acerca de la identificación de los elementos de la parábola en situaciones concretas, aunque se disiparon fácilmente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="4">No se identificó ningún caso crónico de dificultad de aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="4">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td><td colspan="2">Se dejaron de tarea algunos ejercicios de modelación parabólica (punto 10 del material didáctico, sección 5, inciso v, w, y x)</td></tr>
<tr><td colspan="4">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">No hay observaciones crónicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Me parece que los alumnos están aprendiendo muy fácilmente a aplicar modelos parabólicos en contextos reales. Por medio de su participación, me doy cuenta de que ya identifican mucho mejor las ecuaciones de la parábola así como sus elementos, y logran relacionarlos correctamente de acuerdo a la problemática tratada.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</td><td>FOLIO SESIÓN 14</td></tr>
<tr><td>FECHA 4 de Abril del 2022</td><td>El video de esta sesión se extravió</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 8:20am</td><td>Hora de término 9:10am</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Modelación con parábolas</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Ejemplos y ejercicios sobre situaciones cotidianas que se pueden resolver con un modelo parabólico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Computadora, software GeoGebra, pizarrón, marcadores y material didáctico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Ejercicios elaborados para enfrentar al alumno en diferentes situaciones en contextos reales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los ejercicios en clase pueden ser resueltos en equipo. Los ejemplos son resueltos de manera colaborativa, con la participación del grupo en todo momento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Proceso algebraico: construcción de las ecuaciones de la parábola en los diferentes problemas
Proceso geométrico: construcción de las gráficas que representen el problema dado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los alumnos mostraron mucha facilidad para identificar los elementos de la parábola en contextos reales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hubo dudas acerca de la identificación de los elementos de la parábola en situaciones concretas, aunque se disiparon fácilmente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">No se identificó algún caso crónico de dificultad de aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Se dejó como tarea un último ejercicio de modelación parabólica (punto 10 del material didáctico, sección 5, inciso aa), como preparación para la prueba post-test del día siguiente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta fue nuestra última sesión</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los alumnos volvieron a participar muy activamente en las problemáticas expuestas que se resuelven a través de modelos parabólicos. Me parece que ya tienen un dominio mucho más amplio de la cónica, así como de su relación con contextos reales. Terminé las sesiones muy contento de los resultados que vi en los alumnos. Veo que son capaces no sólo de identificar los elementos de la parábola, sino de aplicar estos conocimientos sin problema alguno. Quizá ellos no lo noten, pero yo sí me percato del cambio radical que hay en ellos y que seguro se reflejará en la prueba post-test.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>BITÁCORA
PRÁCTICA DOCENTE III</th><th>FOLIO SESIÓN 15</th></tr>
<tr><td>FECHA 5 de Abril del 2022</td><td>YouTube: No aplica para esta sesión</td></tr>
<tr><td>Hora de inicio 12:10pm</td><td>Hora de término 1:00pm</td></tr>
<tr><td>Actividad planeada</td><td>Actividad realizada</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Presentación de las actividades de la sesión y la forma de trabajo.</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Presentación de la prueba post-test: su estructura y objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Exposición del tema de la práctica docente</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Prueba post-test</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Empleo de recursos didácticos y tecnológicos</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Prueba post-test elaborada en un formulario de google para los alumnos en línea y en físico para los alumnos presenciales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Uso de estrategias didácticas</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>La prueba está diseñada para enfrentar al alumno con diversas situaciones algebraicas, geométricas y de modelación parabólica, situaciones análogas con las que se enfrentó en la prueba pre-test.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Técnicas o estrategias para propiciar el trabajo en equipo</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Desarrollo o aplicación de un procedimiento algebraico o geométrico</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Prueba post-test elaborada para que los alumnos realicen los desarrollos algebraicos y geométricos adecuados que los conduzcan a la respuesta correcta en el tema de parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Identificación de aprendizajes logrados</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los resultados se describen detalladamente en la sección “Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación” de esta investigación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Aclaración de dudas de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hubo algunas dudas sobre la identificación de las gráficas de la pregunta 2, las cuales fueron aclaradas de manera general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Manejo de estudiantes con dificultades de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Evaluación</td></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>Los alumnos que hicieron el post-test presencial se evaluaron manualmente. Los dos alumnos que hicieron la prueba en línea se evaluaron a través del formulario. Se presenta el análisis en la sección “Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación” de esta investigación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">11. Observaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los alumnos que hicieron la prueba de manera presencial fueron veinte, dos lo hicieron en línea y 2 no presentaron la prueba.</td></tr>
<tr><td colspan="2">12. Reflexiones</td></tr>
<tr><td colspan="2">El análisis de esta prueba se podrá observar en la sección mencionada, así como el comparativo con la prueba pre-test y las conclusiones.</td></tr>
</table>

Inicialmente, la profesora titular de la materia sólo concedió diez sesiones para terminar la implementación del proyecto de trabajo, debido a que la planeación considera esas 10 sesiones para su implementación. Posteriormente, el profesor le solicitó otras cinco sesiones adicionales para terminar dicho proyecto, pero a costa de no implementar una de las estrategias diseñadas, debido a que hubiera llevado más tiempo.

Todas las estrategias diseñadas en este proyecto de trabajo se llevaron a cabo con excepción de la estrategia seis, los ejercicios de nivel avanzado (véase el capítulo: "El diseño de las estrategias didácticas"). El profesor decidió descartarla del proyecto debido al tiempo, ya que se hubieran necesitado aproximadamente dos o tres sesiones más para resolverlos. Esta estrategia tenía la finalidad de hacer que los alumnos repasen los lugares geométricos vistos hasta ese punto a través de problemas de corte geométrico de la parábola. De esta forma, el alumno aprende a distinguir entre las ecuaciones de los diferentes lugares geométricos y a manipular sus gráficas en un mismo plano para dar solución a una situación específica de la parábola. Esta estrategia representaba la culminación del nivel de comprensión geométrica 3 para pasar al nivel 4 de Van Hiele (citado por Alsina, 1997). A este respecto, Mercado y Luna (2013) afirman: "(…) algunos maestros tratan de evitar el apresuramiento en la enseñanza, aunque identifican que, en ocasiones, se ven obligados a "cortar donde no se debería hacer" el tratamiento de los contenidos (…) hacerlo así, reduce las oportunidades de aprendizaje para los alumnos y limita las opciones que se deben brindar a cada uno, dadas sus distintas posibilidades ante los contenidos" (p. 32). Lamentablemente, en este caso, los alumnos no tuvieron esa oportunidad de aprendizaje que se tenía como objetivo de la estrategia seis, pero la implementación de este proyecto de trabajo se llevó a cabo sin apresurar a los alumnos, y sin dejar de tomar en cuenta los objetivos del programa de estudios y de esta investigación.

Una planeación siempre se va a enfrentar a problemas de distintas índoles, problemas que dependen de la institución, del contexto de los alumnos, de su desarrollo humano, de sus intereses, entre muchas otras variables que son externas al profesor. Pero, se debe tener en cuenta que (como ya se ha mencionado) el profesor es un profesional de la docencia, y como todo profesional debe tomar decisiones en las situaciones críticas que le exigen hacerlo. Y tomar estas decisiones no es algo negativo, sino que habla de su experiencia. Tal como menciona Díaz – Barriga (2019): "Su planeación se enfrenta siempre al azar (…) Las situaciones exigen actuar" (minuto 32:39).

4. RESULTADOS Y VALORACIÓN

4.1. Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación

“Maestro es aquel idealista que se ha ofrecido para ser ayudante de Dios en su creación”
Berrum de Labra (1995)

4.1.1. El diseño de la estrategia de evaluación

“La evaluación para el aprendizaje de los alumnos permite valorar el nivel de desempeño y el logro de los aprendizajes esperados” (SEP, 2013, p. 17). Además, permite identificar los aprendizajes no logrados para la mejora continua de las estrategias de enseñanza, a través de la recolección y análisis de información de diversas fuentes, con el objetivo de mejorar el aprendizaje y la práctica docente.

La evaluación es un proceso complejo y no puede depender de un único instrumento de evaluación, ya que se estarían evaluando conocimientos y habilidades de una manera desintegrada. Así, a través de las estrategias de evaluación adecuadas, se valora el proceso de aprendizaje y nos muestra el nivel de desempeño de los alumnos.

Existen diferentes tipos de evaluación, los cuales, según la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS, 2018) son:

a) “*Diagnóstica*: Permite conocer cuáles son las principales fortalezas que los estudiantes poseen al empezar el ciclo escolar, un nuevo tema o una unidad (…) Ésta se realiza en la fase de apertura.
b) *Formativa*: Es útil para determinar el avance de los estudiantes durante el proceso para establecer qué han aprendido y qué les falta por aprender (…) puede aplicarse a lo largo de toda la Exploración, Conceptualización y Aplicación (ECA) (…), deberá estar presente en la fase de desarrollo y en la de cierre.
c) *Sumativa*: Permite hacer un recuento del nivel de logro de los aprendizajes esperados proyectados a obtener con la ECA. Esencialmente, debe estar incluida en la fase de cierre”.

De acuerdo con Orozco, Acosta y Villareal (2016), se entiende por ECA (Exploración, Conceptualización y Aplicación): “una estrategia que permite organizar el proceso de aprendizaje en fases que dan pertinencia y activan el potencial de crecimiento intelectual del estudiante” (p. 103).

“Las técnicas de evaluación son los procedimientos utilizados por el docente para obtener información acerca del aprendizaje de los alumnos; cada técnica de evaluación se acompaña de sus propios instrumentos, definidos como recursos estructurados diseñados para fines específicos” (SEP, 2013, p. 19). Dada la diversidad existente de instrumentos de evaluación, el docente debe elegir aquellos que le permiten obtener la información que se desea, dentro del tipo de evaluación correspondiente. No existe un instrumento mejor que otro, sino que tal elección depende de lo que se quiere saber y de los recursos con los que se cuenta.

En la tabla 4.1 se muestran las técnicas, sus instrumentos y los aprendizajes que pueden evaluarse con ellos.

Tabla de las técnicas e instrumentos de evaluación

Técnicas	**Instrumentos**	**Aprendizajes que pueden evaluarse**		
		Conocimientos	*Habilidades*	*Actitudes y valores*
Observación	Guía de observación	x	x	x
	Registro anecdótico	x	x	x
	Diario de la clase	x	x	x
	Diario de trabajo	x	x	x
	Escala de actitudes			x
Desempeño de los alumnos	Preguntas sobre el procedimiento	x	x	
	Cuadernos de los alumnos	x	x	x
	Organizadores gráficos	x	x	
Análisis del desempeño	Portafolio	x	x	
	Rúbrica	x	x	x
	Lista de cotejo	x	x	x
Interrogatorio	Tipo textuales: debate y ensayo	x	x	x
	Tipos orales y escritos: pruebas escritas	x	x	

Tabla 4.1 - Técnicas y sus instrumentos de evaluación. Tomado de (SEP, 2013, p. 20).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Para los fines de esta investigación y de acuerdo con las evidencias obtenidas para realizar los tres tipos de evaluación mencionados, se optará por el uso de tres instrumentos de evaluación: diario de la clase, portafolio y pruebas escritas.

En primer lugar, a través de la técnica de observación asistemática, la cual, consiste en que el profesor registre la mayor cantidad de información posible de una situación de aprendizaje, sin centrarse algún aspecto en particular (SEP, 2013), como el registro de todo lo sucedido en una clase sin omitir detalle alguno que pueda revelar muestras del aprendizaje de los alumnos, esto a través del instrumento de diario de la clase, en donde el docente lleva un registro a modo de narración de los hechos para recolectar evidencias que hayan influido en el desarrollo del trabajo (SEMS, 2018). Este instrumento permite reconstruir mentalmente la práctica y reflexionar sobre ella. Dicho instrumento es el que el lector pudo visualizar en el capítulo 3 “La implementación del proyecto de trabajo”.

Posteriormente, a través de la técnica de análisis del desempeño, la cual, requiere que el alumno responda o realice una tarea que demuestre su aprendizaje de una determinada situación (SEP, 2013), se optará por el instrumento del portafolio, ya que este instrumento “es un concentrado de evidencias estructuradas que permiten obtener información valiosa del desempeño de los alumnos (…); muestra una historia documental construida a partir de las producciones relevantes de los alumnos, a lo largo de una secuencia (…), debe integrarse por un conjunto de trabajos y producciones (escritas, gráficas, cartográficas o digitales) realizadas de manera individual o colectiva, que constituyen evidencias relevantes del logro de los aprendizajes esperados de los alumnos” (SEP, 2013, p. 46) . Este instrumento resulta adecuado, ya que involucran la integración de conocimientos, habilidades y valores para el logro de los aprendizajes y competencias esperadas, visibles a partir de las propias producciones de los alumnos.

Finalmente, de la técnica de interrogatorio se usará el instrumento de pruebas escritas, las cuales son usadas “para valorar la comprensión, apropiación, interpretación, explicación y formulación de argumentos de los diferentes contenidos de las distintas asignaturas” (SEP, 2013, p. 58).

La SEMS (2018) menciona tres tipos de evaluación de acuerdo con el sujeto evaluado:

a) “*La autoevaluación*: Es la que realiza el alumno acerca de su propio desempeño. Hace una valoración y reflexión acerca de su actuación en el proceso de aprendizaje.
b) *La coevaluación*: Se basa en la valoración y retroalimentación que realizan los pares miembros del grupo de alumnos.
c) *La heteroevaluación*: Es la valoración que el docente (…) realiza de los desempeños de los alumnos, aportando elementos para la retroalimentación del proceso”.

La evaluación de los alumnos en esta investigación se hará a través de distintas técnicas con el objetivo de hacer énfasis en el proceso de aprendizaje de los alumnos, para una mejor visión de la evolución de su aprendizaje más que el hecho de asignar una calificación.

Así, para obtener dicha visión del proceso, en esta investigación se diseñó la siguiente estrategia de evaluación:

Estrategia de evaluación

	Tipo	*Forma de evaluación*	*Técnica(s)*	*Instrumentos*	*Evidencias*
Plan de evaluación	Diagnóstica	Heteroevaluación	Interrogatorio	Prueba escrita	Prueba pre-test
	Formativa	Heteroevaluación	Observación asistemática Análisis del desempeño	Diario de la clase Portafolio	Bitácora. Portafolios con ejercicios y tareas
	Sumativa	Heteroevaluación y Autoevaluación	Interrogatorio	Prueba escrita Autoevaluación	Prueba post-test y cuestionario de autoevaluación

Tabla 4.2 - Estrategia de evaluación.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

4.2. Evaluación diagnóstica: la prueba pre - test

La evaluación diagnóstica se da a través de la técnica de interrogatorio cuyo instrumento es la prueba escrita, mediante la prueba pre-test.

Esta prueba busca evaluar los conocimientos previos en geometría que poseen los alumnos adquiridos por los temas precedentes al tema de parábola, en particular, la recta y la circunferencia. Las preguntas fueron diseñadas para detectar problemáticas específicas de corte aritmético, algebraico y geométrico en el proceder del alumno al enfrentarse a un ejercicio o problema de geometría.

Los reactivos de dicha prueba, su diseño, así como los objetivos particulares de cada uno, se describieron en la sección anterior “El diseño de las estrategias didácticas”. Corresponde a esta sección analizar los resultados de dicha prueba como parte de la evaluación.

La prueba se diseñó en Google Formularios y en físico (impresa), para que la puedan presentar tanto los alumnos que están en línea como presenciales. De esta manera, 6 alumnos realizaron la prueba de manera presencial, 14 en línea y 4 no presentaron la prueba. La siguiente tabla se muestra el promedio general del grupo, donde las calificaciones coloreadas en verde representan a los alumnos que realizaron la prueba en línea; a los que no realizaron la prueba se les asentó la leyenda “NP” y no fueron considerados dentro del promedio del grupo. Las demás calificaciones representan a los alumnos que presentaron la prueba de manera presencial.

Promedio del grupo en la prueba pre-test

No. de alumno	Prueba pre-test
1	9.5
2	5
3	3
4	2.5
5	7
6	NP
7	7
8	4
9	7.5
10	6.5
11	NP
12	1
13	3.5
14	2.5
15	4.5
16	4.5
17	8
18	7
19	9.5

20	5
21	NP
22	4
23	NP
24	0.5
Promedio	5.1

Tabla 4.3 - Resultados de la prueba pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

En la siguiente tabla se pueden apreciar los promedios obtenidos al separar las modalidades, presencial y en línea:

Tablas de resultados promedio de la prueba pre-test

Pre-test en línea		**Pre-test presencial**	
No. de alumno	*Prueba pre-test*	*No. de alumno*	*Prueba pre-test*
1	9.5	4	2.5
2	5		
3	3	8	4
5	7		
7	7	12	1
9	7.5		
10	6.5	13	3.5
14	2.5		
15	4.5	16	4.5
17	8		
18	7	22	4
19	9.5		
20	5	**Promedio**	3.25
24	0.5		
Promedio	5.89		

Tabla 4.4 - Resultados promedio de la prueba pre-test. A la izquierda la modalidad en línea, a la derecha la modalidad presencial.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Es importante mencionar el detalle de que la muestra de alumnos presenciales puede parecer mucho más pequeña, pero al retirar a los alumnos que no presentaron la prueba, resulta ser significativa (más del 25% del grupo). Este detalle es importante debido a que esta muestra puede arrojar resultados más fiables al estar el alumno totalmente solo al realizar la prueba, cosa que no se puede constatar con los alumnos en línea. Además, los alumnos presenciales disponen de no contestar alguna pregunta, mientras que los que están en línea pueden haber contestado alguna pregunta al azar para avanzar en el formulario.

A continuación, se muestra un análisis de los resultados por pregunta y modalidad, junto con sus gráficos descriptivos correspondientes:

Pregunta 1: Determine la ecuación general de la circunferencia con C (-1, 3) y radio r = 2

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$

Gráficas de respuestas a la pregunta 1 del pre-test

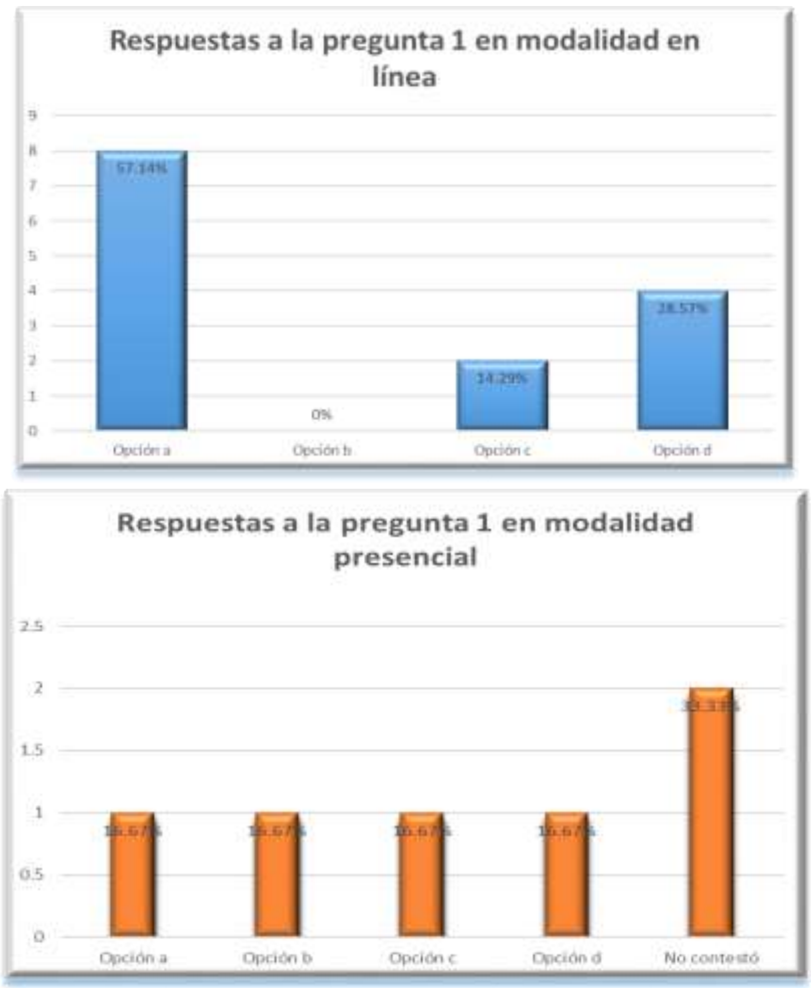


Figura 4.1 – Respuestas a la pregunta 1 del pre-test.

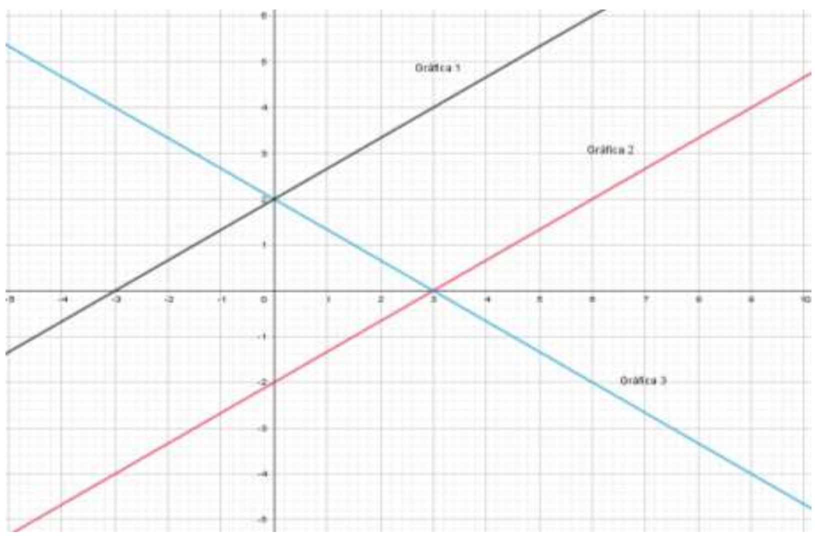
Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (a). Así, se aprecia del resultado de la modalidad en línea que más del 42% de los alumnos tiene problemas de falta de relación entre los elementos de la cónica, al mostrar esta deficiencia de relación analítica de la ecuación con los elementos de la circunferencia. Por otro lado, los resultados de la modalidad presencial no son más alentadores, ya que este porcentaje se incrementa a más del 83%, con sólo una respuesta correcta.

La pregunta 2 se divide en 5 incisos, cuyo objetivo general es observar la proporción de estudiantes que presenten dificultad en reconocer los elementos de una ecuación y relacionarlos con su gráfica, así como problemas algebraicos al no relacionar de manera correcta una representación algebraica con una geométrica. Se muestran los resultados de los 5 incisos de esta pregunta.

<u>Pregunta 2</u>: En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

<u>Inciso a</u>: $2x - 3y = 6$



Gráficas de respuestas a la pregunta 2, inciso (a) del pre-test

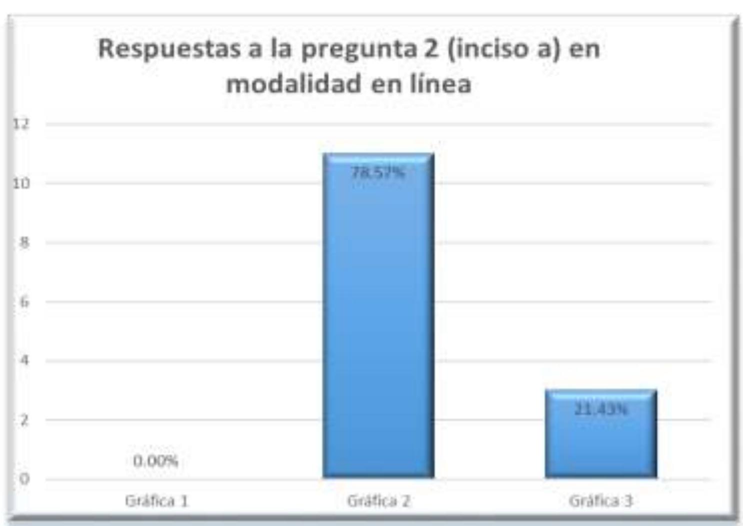
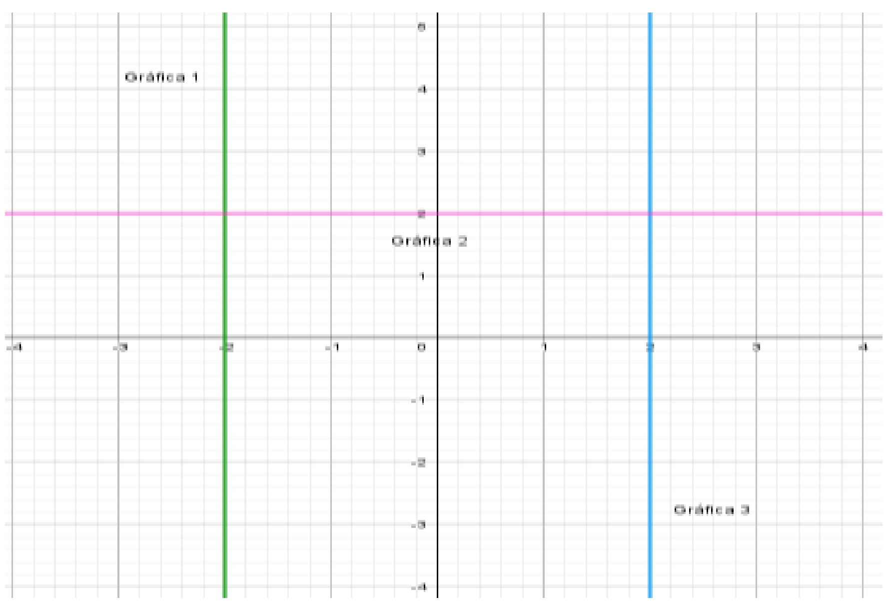


Figura 4.2 – Respuestas a la pregunta 2 (a) del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 2. El resultado muestra que los alumnos tienen problemas en pasar de un sistema de representación a otro, así como deficiencia en sus habilidades de visualización y dibujo, ya que mostraron dificultad para graficar la recta desde su ecuación, y en relacionar la ecuación de la recta con su gráfica. En la modalidad en línea esto ocurre con aproximadamente el 21.5%, pero en la modalidad presencial podemos ver que este porcentaje se incrementa al 50%.

Inciso b: $x - 2 = 0$



Gráficas de respuestas a la pregunta 2, inciso (b) del pre-test

Figura 4.3 – Respuestas a la pregunta 2 (b) del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 3. Alrededor del 36% de los alumnos en línea presentaron la misma problemática anterior, pasar de un sistema de representación a otro, así como algebraicos, ya que se aprecia dificultad para graficar la recta desde su ecuación. Este porcentaje que se incrementa en el caso de los alumnos presenciales, hasta más del 83%.

Inciso c: $y = -1$

Gráficas de respuestas a la pregunta 2, inciso (c) del pre-test

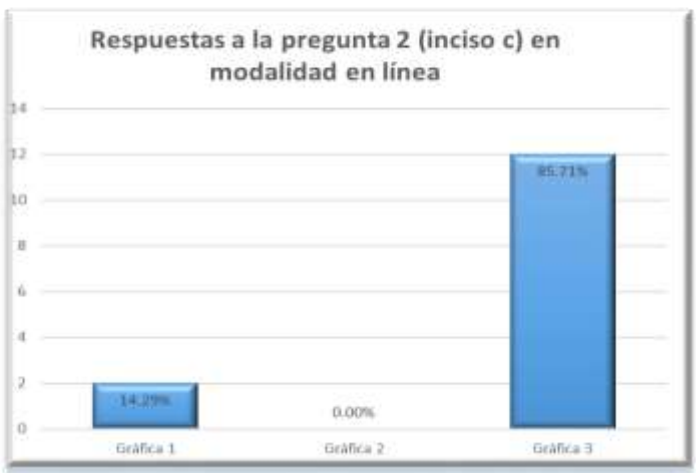
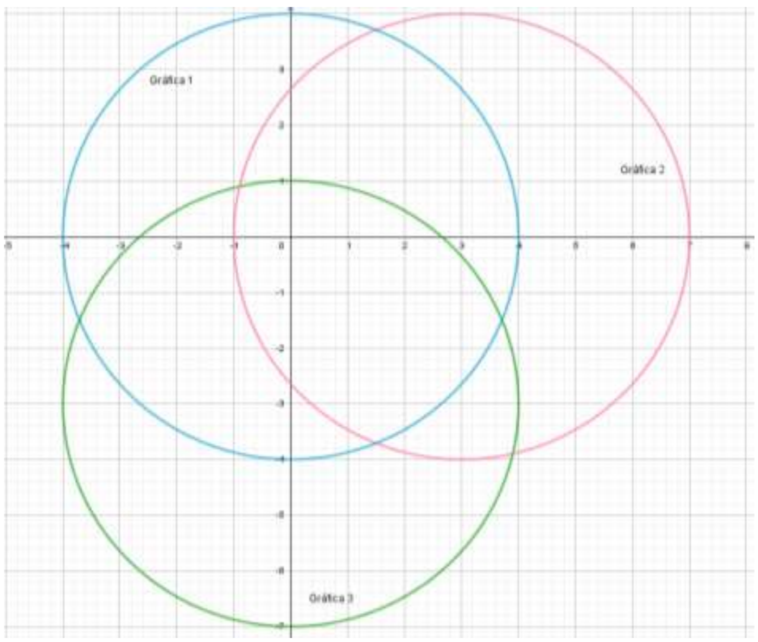


Figura 4.4 – Respuestas a la pregunta 2 (c) del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 3. Se aprecia que más del 14% de los alumnos en línea presentaron la misma problemática anterior, pasar de un sistema de representación a otro, así como algebraicos. Porcentaje que aumenta en los alumnos presenciales hasta más del 66%, casi cuadruplicando a los de en línea.

<u>Inciso d</u>: $x^2 + (y + 3)^2 = 16$



Gráficas de respuestas a la pregunta 2, inciso (d) del pre-test

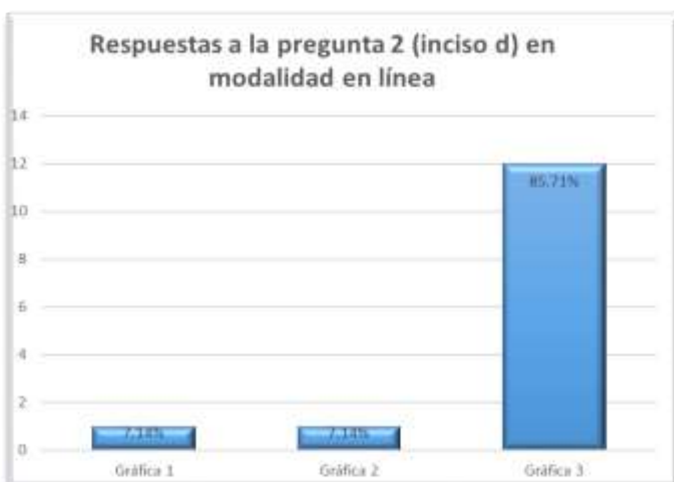
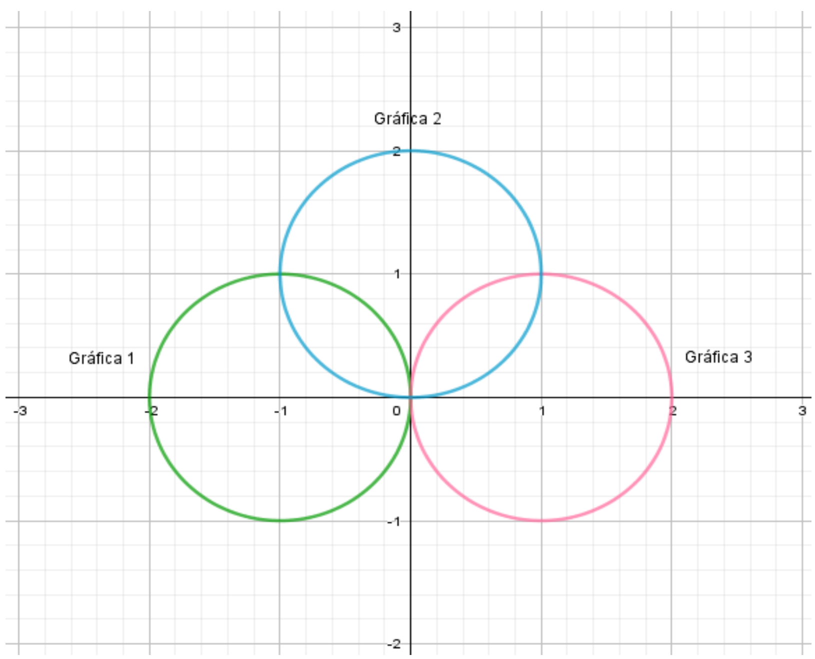


Figura 4.5 – Respuestas a la pregunta 2 (d) del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 3. Aquí parece ser que poco menos del 15% de los alumnos en línea presentaron la misma problemática anterior, pero, si se observa a los alumnos presenciales este porcentaje incrementa hasta 50%, mismo porcentaje que representa a los que no contestaron. En este caso, es difícil determinar la problemática que presentan.

Inciso e: $(x-1)^2 + y^2 = 1$



Gráficas de respuestas a la pregunta 2, inciso (e) del pre-test

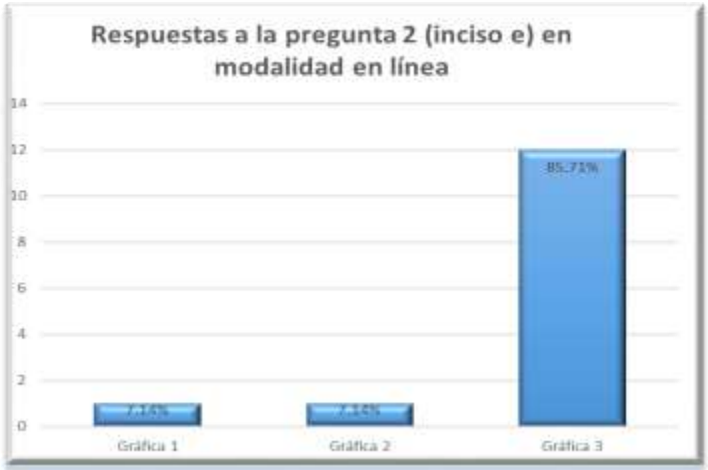


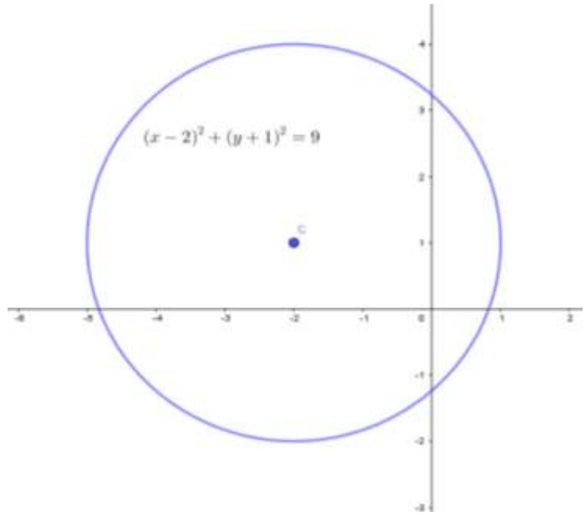
Figura 4.6 – Respuestas a la pregunta 2 (e) del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

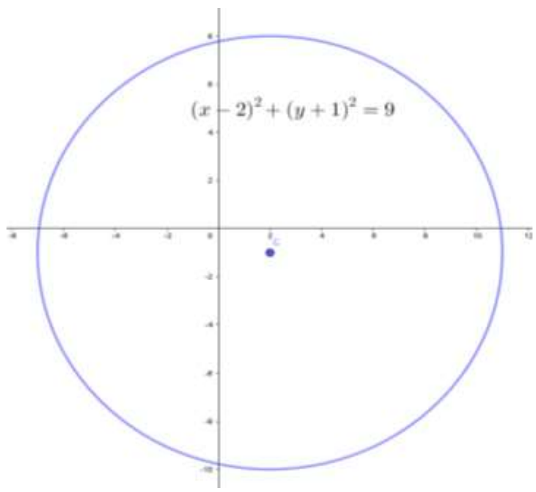
La respuesta correcta es la gráfica 3. Llama la atención que los porcentajes de respuesta respecto del inciso anterior sean los mismos en los alumnos en línea, con sólo poco más del 14% quienes presentan la misma problemática anterior, pasar de un sistema de representación a otro, así como de operar con el álgebra. De nueva cuenta, al observar a los alumnos presenciales, el porcentaje aumenta hasta más del 66%, casi cuadruplicando el porcentaje obtenido con los alumnos en línea.

Pregunta 3: Identifica la gráfica que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

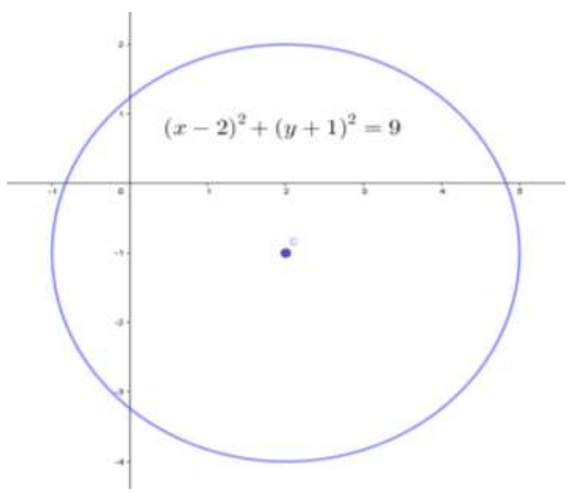
a)



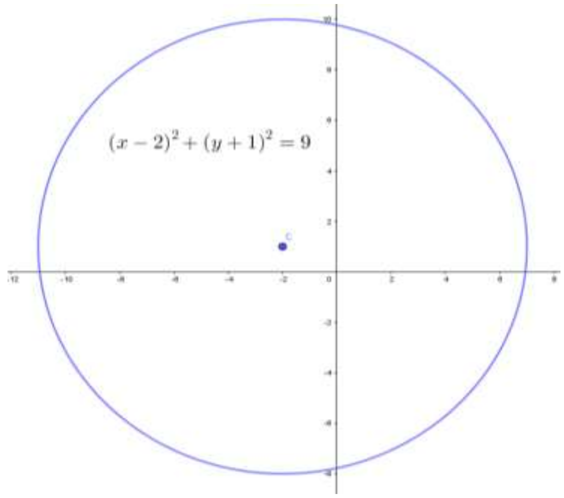
b)



c)



d)



Gráficas de respuestas a la pregunta 3 del pre-test

Figura 4.7 – Respuestas a la pregunta 3 del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (c). Este reactivo representa el proceso inverso de la pregunta 1, es decir, muestra una la falta de reconocimiento de los elementos de la cónica, una incorrecta relación entre una representación algebraica con una geométrica, así como deficiencia en la habilidad de visualización. Más del 42% de los estudiantes muestra estos problemas en modalidad en línea, mientras que en presencial no varía mucho, al mostrar 50% de los alumnos con esta problemática.

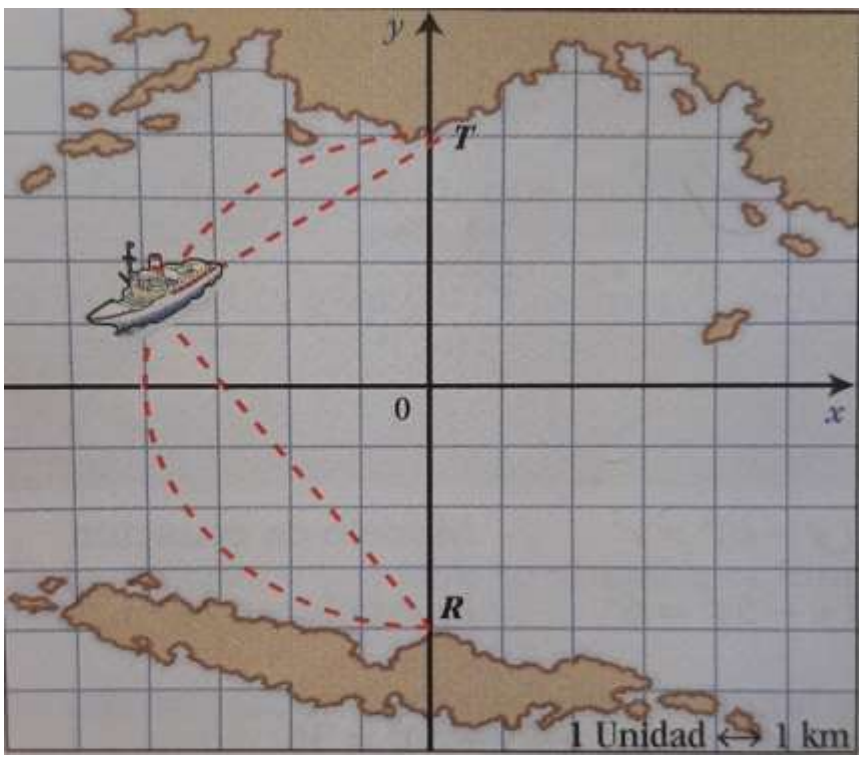
Pregunta 4: A través de un sistema de navegación por radio, un barco turista se traslada de una isla a otra, conservando cuidadosamente sus distancias a dos faros situados en los puntos T y R (como se muestra en la figura) para no perder su ubicación. Encuentre la ecuación que describe su trayectoria entre las islas.

e) $(x-4)^2+(y+1)^2=4$

f) $x^2+y^2=16$

g) $(x+4)^2+(y-1)^2=16$

h) $x^2+y^2=4$



Gráficas de respuestas a la pregunta 4 del pre-test

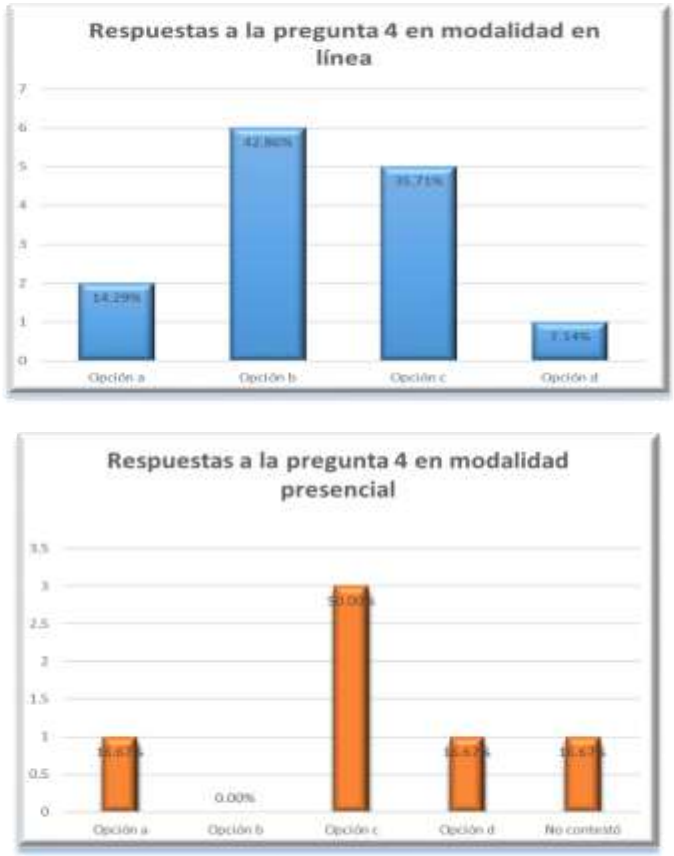


Figura 4.8 – Respuestas a la pregunta 4 del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (b). Esta pregunta muestra que más del 57% de los estudiantes en línea tiene problemas con la representación de fenómenos de la cotidianidad, ya que no aplican correctamente conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas, es decir, hay deficiencia en su habilidad de aplicación y transferencia. De los alumnos presenciales ninguno pudo contestar correctamente la pregunta (100% con esta problemática). Esto convierte a la habilidad de aplicación y transferencia en el área de oportunidad más importante a mejorar en este grupo.

Pregunta 5: Con base a la pregunta anterior, ¿cuál es la longitud de dicha trayectoria seguida por el barco?

e) 16π unidades
f) 8 unidades
g) 4 unidades
h) 8π unidades

Gráficas de respuestas a la pregunta 5 del pre-test

Figura 4.9 – Respuestas a la pregunta 5 del pre-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (d). De nueva cuenta, más del 64% de los estudiantes en línea tiene problemas con la representación de fenómenos de la cotidianidad, la habilidad de aplicación y transferencia, ya que no aplican correctamente conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas. Dicho porcentaje no varía mucho respecto de los alumnos presenciales, con poco más del 66% con esta problemática.

Las preguntas 1 y 3 están relacionadas para medir la misma problemática, la cual es la falta de relación entre los elementos de las cónicas a través de procesos algebraicos. Al ser los porcentajes de 42% de respuestas erróneas en la pregunta 1 de las pruebas en línea, y casi duplicarse para los alumnos en presencial, muestra una importante problemática a trabajar con los alumnos. La pregunta 3 con porcentajes de respuestas erróneas de más del 40% en modalidad en línea y con 50% de modalidad presencial, habla del mismo problema. Parece que la pregunta 3 es la única pregunta donde los porcentajes de respuestas erróneas son muy parecidos.

La pregunta 2 (dividida en 5 incisos) muestra los porcentajes aproximados de alumnos en línea 21.5%, 36%, 14%, 15% y 14% que contestaron de manera errónea, que pone sobre la mesa la problemática que presentan de pasar de un sistema de representación a otro, así como en mejorar su habilidad de visualización y dibujo. Aunque los porcentajes son menores, no deja de ser una problemática que pueda mejorarse. El contraste grave son estos mismos porcentajes de los alumnos presenciales: 50%, 83%, 66%, 50% y 66%, que, al comparar, en algunos casos casi cuadruplica los errores obtenidos.

La pregunta 4 y 5 están relacionadas para medir la capacidad de alumno de representar fenómenos de la cotidianidad, así como aplicar conocimientos geométricos para resolver problemas (habilidad de aplicación y transferencia). Al obtener los porcentajes de 57% y 100% de respuestas erróneas de la pregunta 4 en la modalidad en línea y presencial respectivamente, y de 64% y 66% de respuestas erróneas para la pregunta 5 en la modalidad en línea y presencial también respectivamente, convierte a esta problemática en el área de oportunidad más importante en trabajar y mejorar.

4.3. Evaluación formativa: portafolios con ejercicios y tareas

Para la evaluación formativa, una de las técnicas por las que se optó fue la del análisis del desempeño, a través del instrumento del portafolio, donde la SEP (2013) afirma:

> Para utilizar de manera adecuada el portafolio, es recomendable que el docente seleccione los productos que permitan reflejar significativamente el progreso de los alumnos y valorar sus aprendizajes (…) La observación, la revisión y el análisis de las producciones permiten al docente contar con evidencias objetivas, no sólo del producto final, sino del proceso que los alumnos siguieron para su realización (…) La evaluación de los aprendizajes esperados por medio del portafolio requiere de criterios que permitan al docente identificar en qué nivel de desempeño (destacado, satisfactorio, suficiente o insuficiente) se encuentra cada alumno (p. 46).

Para determinar el nivel de desempeño (A, B, C o D, respectivamente), se debe elaborar una lista de cotejo, la cual, es una lista frases u oraciones que señalan las tareas, acciones, procesos y actitudes que se desean evaluar (SEP, 2013). Así, esta lista de cotejo debe reflejar los criterios de evaluación a seguir para cada producto o evidencia de aprendizaje del portafolio de los alumnos. La suma de tales criterios, forman el total de los criterios de evaluación para cada actividad. La SEP (2013) proporciona la siguiente escala de valoración de los criterios como ejemplo:

Ejemplo de tabla de referencia numérica de acuerdo con el nivel de desempeño

Nivel de desempeño	Valoración de criterios	Referencia numérica
A Destacado	Nueve criterios demostrados	10
B Satisfactorio	Ocho criterios demostrados	9
	Siete criterios demostrados	8
C Suficiente	Seis criterios demostrados	7
	Cinco criterios demostrados	6
D Insuficiente	Cuatro o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.5 - Escala de valoración de criterios. Fuente: (SEP, 2013, p. 50).

Fuente: Elaboración propia: JLBM

De esta manera, en la figura 4.10 se muestra la ficha control general para la integración del portafolio. Para la integración del portafolio cada alumno tendrá su propia ficha de control con los datos necesarios de sus productos o evidencias de aprendizaje.

Ficha control para la elaboración del portafolio

Centro de Prácticas Docentes: El Colegio	
Asignatura:	Matemáticas V
Profesor:	Jorge Luis Barragán Monroy
Unidad:	Tema optativo "La Parábola"
Eje temático:	Lugares geométricos y sistemas de referencia
Aprendizaje esperado:	Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:
	Identifica los elementos que definen a la parábola.
	Reconoce la simetría de esta curva.
	Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.
	Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.
	Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y sólo sí, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
	Resuelve problemas de aplicación
Nombre del alumno:	"Alumno 1"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió
La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Figura 4.10 - Ficha para control general del portafolio.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Las actividades realizadas para la integración de este portafolio, así como el objetivo de cada una de ellas, son descritas en la tabla 4 .6:

Descripción de las actividades del portafolio

Número	Actividad	Descripción	Objetivo
1	*Parábola con regla y compás*	El alumno elige un vértice y un foco cualesquiera, ambos sobre el eje de simetría de su preferencia. A partir de estos puntos, obtiene el valor de *p*, con el que traza la directriz. Después, elige tres puntos de manera aleatoria sobre el mismo eje de simetría, para trazar sobre ellos unas paralelas a la directriz. Con el compás, mide la distancia de un punto de los elegidos hacia la directriz, y con esa misma apertura del compás (distancia), a partir del foco, cruza las paralelas trazadas por ambos lados, encontrando así dos puntos pertenecientes a la parábola.	Que el alumno identifique el valor del parámetro *p* y su relación con el foco, el vértice y la directriz. Que reconozca la simetría de la curva. Visualice la definición de parábola al tomar las distancias respectivas con el compás. Logre un trazado manual de la parábola. Contribuir al desarrollo de su habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel 0 al 1 de comprensión geométrica de Van Hiele.
2	*La propiedad de reflexión*	El alumno traza los rayos que caen verticalmente hacia el cuerpo de la parábola, paralelos al eje de simetría en algunos puntos de tangencia dados por el profesor. Con estos rayos, usando un transportador, el alumno mide el ángulo entre un rayo y la tangente correspondiente de la parábola en el punto de tangencia, y, por la propiedad de ángulos opuestos por el vértice, reflejar este rayo considerando la misma tangente. Después de haber reflejado todos los rayos, el alumno concluirá que éstos se intersectan en un mismo punto determinado, el cual es el foco de la parábola.	Que el alumno recuerde conceptos precedentes de geometría, como paralelismo entre rectas y ángulos opuestos por el vértice, para que aplique tales conceptos en una visualización construida de manera manual de la propiedad de reflexión. Que reconozca que la propiedad de reflexión tiene lugar debido a una situación geométrica, que, a su vez, lo lleve a entender algunas de las aplicaciones de la parábola en contextos reales. Contribuir al desarrollo de su habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 1 al 2 de Van Hiele.

3	*Parábolas dados algunos de sus elementos*	El alumno debe elegir un ejercicio de entre un banco de reactivos que se comenzó a realizar en clase. En estos ejercicios, el alumno tiene que originar la ecuación canónica de la parábola dados algunos de sus elementos. Posteriormente, debe desarrollar la ecuación general que representa a la misma parábola, además de hacer un bosquejo de su gráfica en el plano cartesiano en donde muestre todos sus elementos.	Que el alumno obtenga las ecuaciones de la parábola dados algunos de sus elementos. Logre escribir de manera algebraica (ecuación) los elementos de la parábola, identifique los tipos de parábola (vertical u horizontal), sus aperturas (derecha, izquierda, arriba, abajo), y que elabore un bosquejo gráfico de la parábola en el plano cartesiano, estableciendo una relación analítica entre su ecuación y su representación gráfica. Contribuir al desarrollo de su habilidad visual, verbal, de dibujo, así como de lógica y razonamiento.
4	*Parábola y sus elementos a partir de su ecuación*	El alumno debe realizar los ejercicios restantes de una actividad comenzada en clase, donde a partir de su ecuación canónica, debe identificar el tipo de parábola que se presenta (vertical u horizontal) y la dirección de su apertura (derecha, izquierda, arriba o abajo), los elementos de la parábola (vértice, lado recto, parámetro *p*, foco y directriz), y relacionar tal ecuación con su bosquejo grafico correcto. Por otro lado, se encuentran dos ejercicios donde el alumno debe realizar la misma actividad, pero dada la ecuación general, esto es, a través de los procesos algebraicos correspondientes, debe encontrar la ecuación canónica equivalente y repetir el proceso anterior, con la diferencia de que no se da un bosquejo gráfico para relacionar, sino que el alumno debe realizarlo manual o digitalmente.	Que el alumno identifique los elementos de la parábola a partir de su ecuación canónica. Que relacione la ecuación de la parábola y su representación gráfica. Que desarrolle procesos algebraicos para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general. Contribuir al desarrollo de su habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 2 al 3 de Van Hiele.
5	*Aplicaciones de la parábola*	El alumno analiza cada problema dado en contextos reales para encontrar el modelo parabólico que se ajusta mejor a cada situación en particular. Una vez decidido el modelo, relaciona los datos del problema con los elementos de la parábola. Finalmente, aplica los procedimientos aritméticos - algebraicos necesarios que lo lleven a la solución del problema.	Que el alumno resuelva problemas en contextos reales donde transite por los diferentes sistemas de representación. Contribuir al desarrollo de su habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como de aplicación y transferencia. De igual manera, en su paso del nivel de comprensión geométrica 3 al 4 de Van Hiele.

Tabla 4.6 - Tabla de la descripción de las actividades.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

El portafolio de cada alumno está integrado por su ficha de control, el producto entregado en cada actividad, la lista de cotejo correspondiente a la actividad y la escala de valoración que origina a su calificación. Cabe aclarar que, esta evaluación se realiza con aquellos alumnos que tienen un portafolio completo, es decir, que cumplieron con todas las actividades descritas anteriormente que conforman el portafolio. No se elaboró portafolio con aquellos alumnos que no tienen todas las actividades entregadas, ya que no es posible tener evidencias completas del proceso de aprendizaje de estos alumnos. Bajo estas condiciones se elaboraron 5 portafolios completos.

La lista de cotejo se presenta en la tabla 4.7:

Lista de cotejo para la evaluación del portafolio

LISTA DE COTEJO		
Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro *p*)		
Reconoce la simetría de la parábola		
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco		
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz es la misma que del punto al foco		
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola		
Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola		
Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola		
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo		
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco		

Explica la propiedad de reflexión geométricamente		
Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)		
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola		
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general		
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos		
Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación		
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano		
Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola		
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general		
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida		
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad		
Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**

Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real		
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada		
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola		
Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola		
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada		
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad		

Tabla 4.7 - Lista de cotejo.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

A continuación, se presentan los portafolios de cada uno de los alumnos seleccionados:

Portafolio de evidencias del alumno 2

Centro de Prácticas Docentes: “El Colegio”	
Nombre del alumno:	"Alumno 2"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió
La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Tabla 4.8 - Ficha control para la elaboración del portafolio de evidencias del alumno 2.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La actividad 1 del alumno 2 es la siguiente:

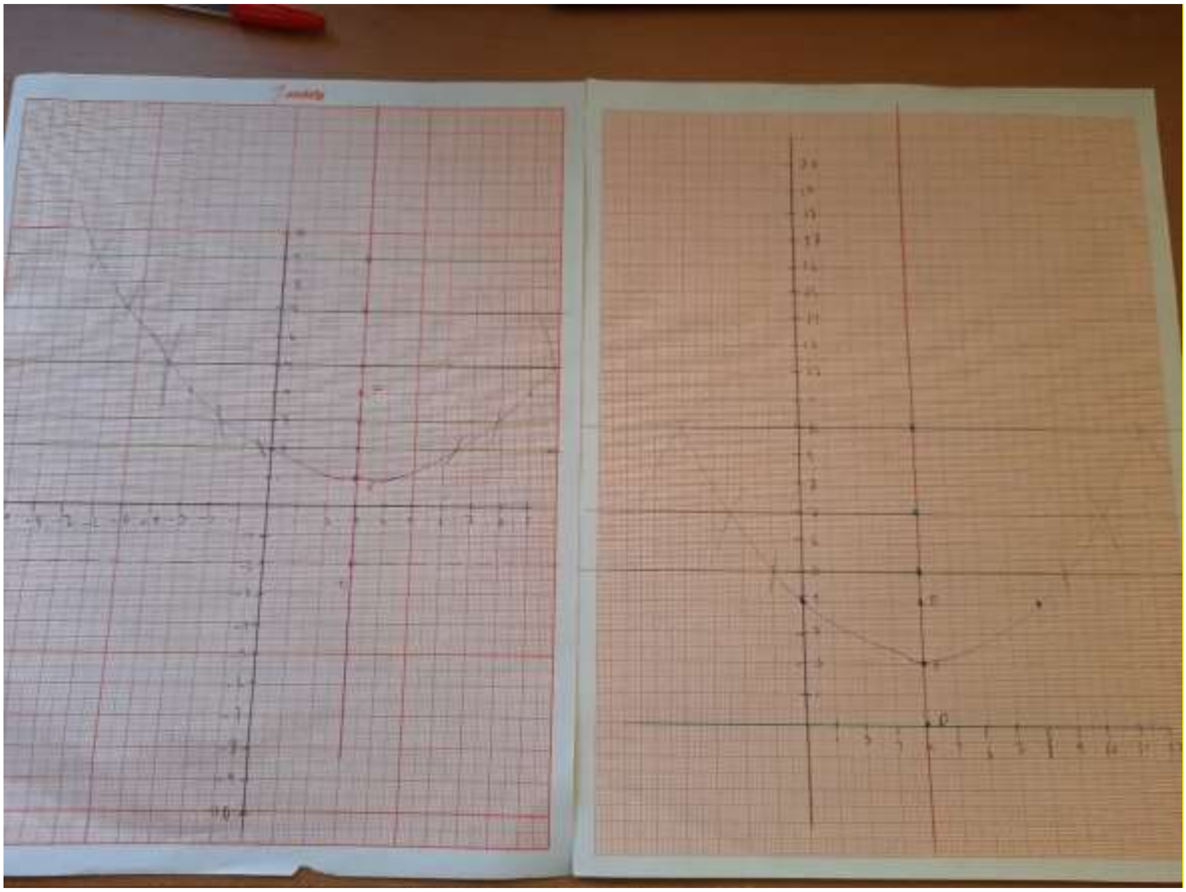


Figura 4.10 - Actividad 1 del alumno 2: Parábola con regla y compás

Se puede observar que el alumno identifica los elementos de la parábola y reconoce su simetría, incluso dibuja tal eje. Encuentra los puntos pertenecientes a la parábola tomando como base la distancia hacia la directriz, localizando tales puntos a partir del foco. Finalmente, construye el bosquejo gráfico de la parábola. Esta actividad está diseñada para contribuir al desarrollo de la habilidad visual, verbal, de dibujo, de lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 0 al 1 de Van Hiele (véase el capítulo "El diseño de las estrategias didácticas", estrategia 1). A su vez, permite que los alumnos analicen las partes y propiedades de la parábola experimentalmente.

La lista de cotejo de esta actividad resulta:

Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro *p*)	x	

Reconoce la simetría de la parábola	x	
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco	x	
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz es la misma que del punto al foco	x	
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola	x	

Tabla 4.9 - Lista de cotejo de la actividad 1 para el alumno 2

La escala de valoración para esta actividad es la siguiente:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.10 - Escala de valoración de la actividad 1

De esta manera, el alumno cuenta con los cinco criterios en su actividad, por lo que se le asigna 10 de calificación en la actividad 1.

La actividad 2 del alumno 2 es la siguiente:

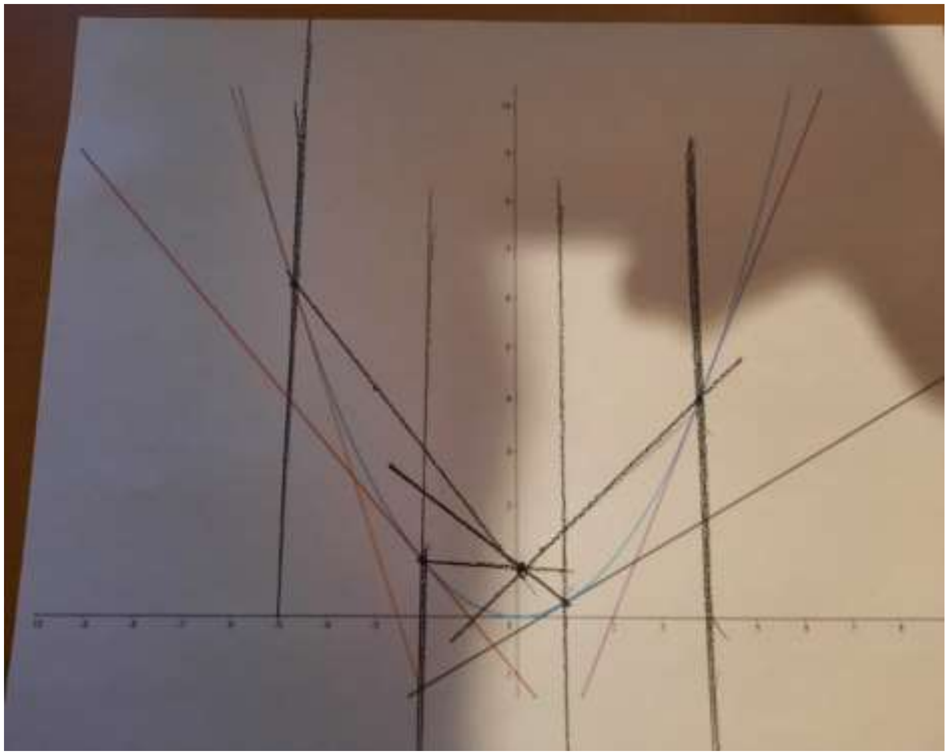


Figura 4.11 - Actividad 2 del alumno 2: La propiedad de reflexión

Se puede observar que el alumno traza los rayos verticalmente hacia la parábola, además de que logra reflejarlos hacia el foco, comprobando con ello la propiedad de reflexión geométricamente. Esta actividad está diseñada para contribuir al desarrollo de la habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 1 al 2 de Van Hiele (véase el capítulo "El diseño de las estrategias didácticas", estrategia 2). A su vez, el alumno relaciona a la parábola con su propiedad de reflexión.

La lista de cotejo de esta actividad es:

Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola	x	
Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola	x	
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo	x	
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco	x	

Explica la propiedad de reflexión geométricamente	x	

Tabla 4.11 - Lista de cotejo de la actividad 2 para el alumno 2

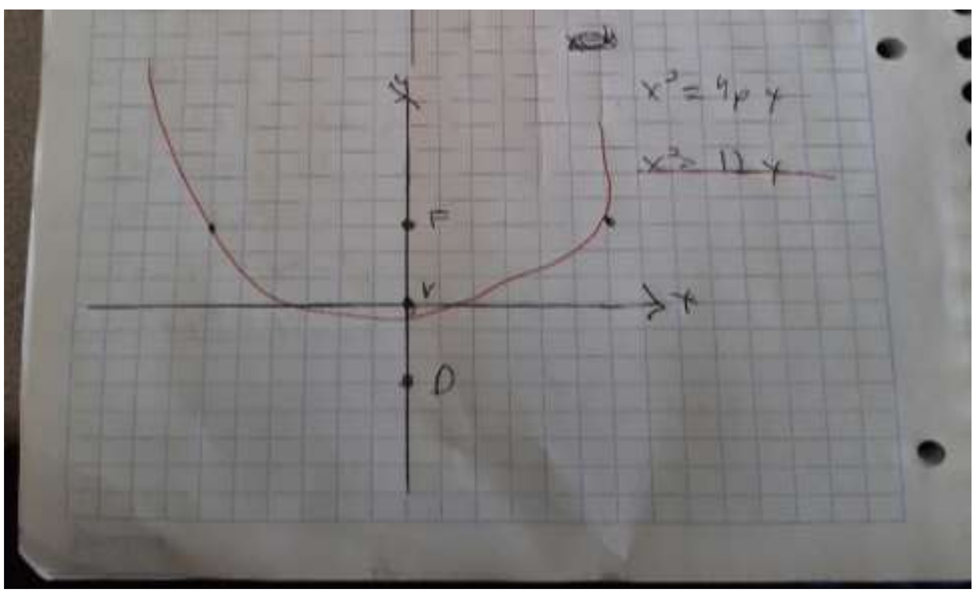
La escala de valoración para esta actividad es la siguiente:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.12 - Escala de valoración de la actividad 2

De esta manera, se observa que el alumno cuenta con los cinco criterios en su actividad, por lo que se le asigna 10 de calificación en la actividad 2.

La actividad 3 del alumno 2 es la siguiente:



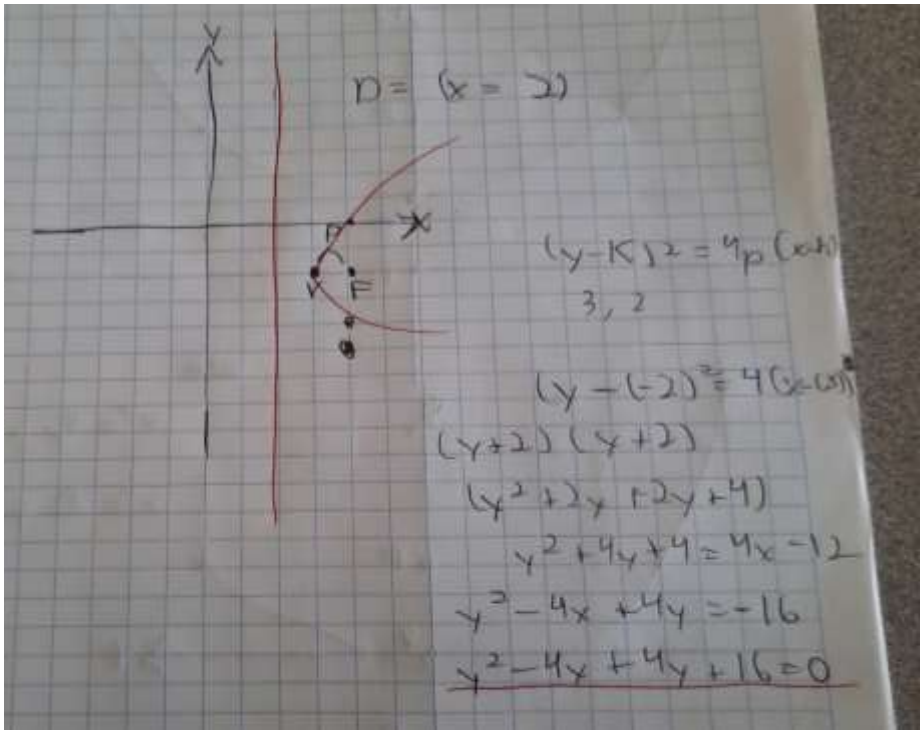


Figura 8.12 - Actividad 3 del alumno 2: Parábolas dados algunos de sus elementos

En la primera parte se nota como el alumno corrige sus propios errores, ya que la primera ecuación que encuentra para representar la parábola es errónea, pero se aprecia cómo él mismo la corrige al subrayar la correcta. En la segunda parte se aprecia cómo calcula el valor del parámetro *p* al macar la distancia del vértice al foco. Otro aspecto que llama la atención es que no usa los productos notables para desarrollar el binomio al cuadrado, sino que separa tal binomio al cuadrado en dos binomios para realizar la multiplicación término por término.

La lista de cotejo de esta actividad es:

Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)	x	
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos	x	

Tabla 4.13 - Lista de cotejo de la actividad 3 para el alumno 2

La escala de valoración para esta actividad es la siguiente:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

Tabla 4.14 - Escala de valoración de la actividad 3

De esta manera, se observa que el alumno, a pesar de haber encontrado una ecuación errónea en el primer ejercicio, la corrige y realiza correctamente el bosquejo gráfico. Así, cuenta con los cuatro criterios en su actividad, por lo que se le asigna 10 de calificación en la actividad 3. Esta actividad está diseñada para contribuir al desarrollo de la habilidad visual, verbal, de dibujo, así como de lógica y razonamiento (véase el capítulo "El diseño de las estrategias didácticas", estrategia 3).

La actividad 4 del alumno 2 es la siguiente:

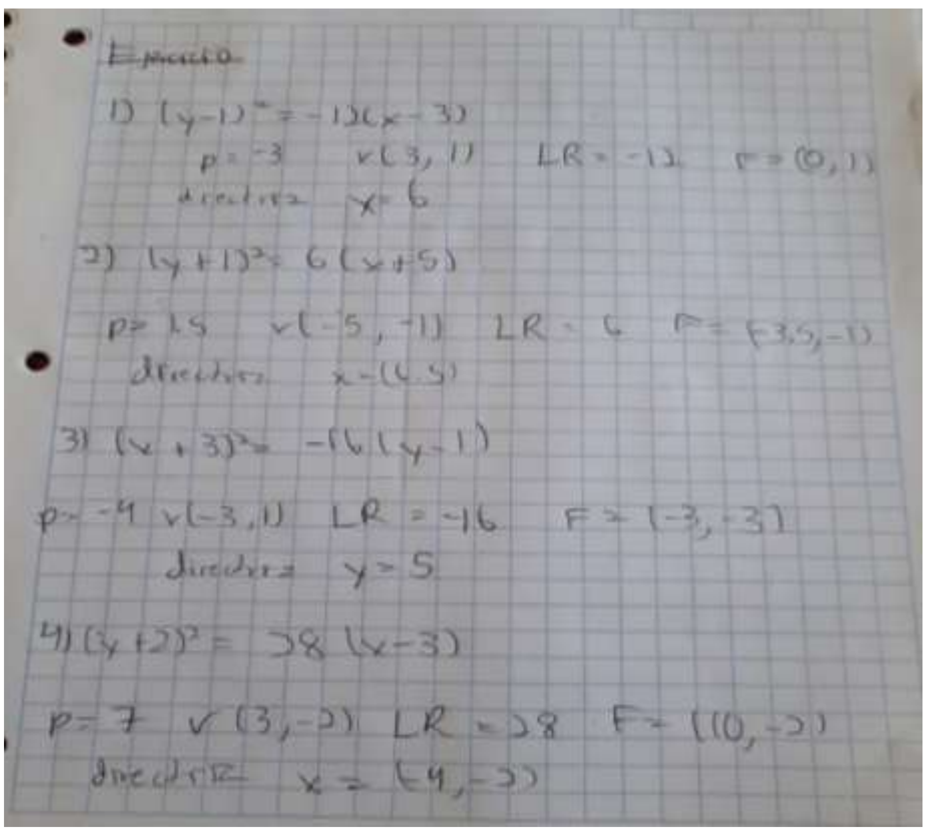


Figura 4.13 - Actividad 4 del alumno 2: Parábola y sus elementos a partir de su ecuación

En esta actividad se puede observar que el alumno tiene confusión en el signo de los elementos de la parábola que representan una distancia, ya que los considera negativos en algunos casos (el lado recto y el parámetro *p*), como en el inciso (1) y (3) de esta actividad.

En el ejercicio (4) el alumno marca el punto sobre el eje de simetría por el que pasa la directriz, no la ecuación de la directriz como tal. Esto significa que tiene la visión geométrica de la directriz, mas no tiene clara su representación algebraica al menos en este ejercicio, ya que en los demás lo realiza de manera correcta. Lamentablemente, el alumno no relaciona tales ecuaciones con las gráficas respectivas que se daban en la actividad, así como tampoco realiza el último ejercicio que partía de la ecuación general.

Así, la lista de cotejo de esta actividad es:

Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación	x	
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano	x	
Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola		x
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general		x
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida		x
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad		x

Tabla 4.15 - Lista de cotejo de la actividad 4 para el alumno 2

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.16 - Escala de valoración de la actividad 4

Se observa que el alumno sólo cuenta con dos criterios en su actividad. Se le asigna 5 de calificación. Esta actividad está diseñada para contribuir al desarrollo de la habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 2 al 3 de Van Hiele (véase el capítulo “El diseño de las estrategias didácticas”, estrategia 4). Con esta actividad, el alumno obtiene los elementos de la parábola a partir de la ecuación canónica.

La actividad 5 del alumno 2 es la siguiente:

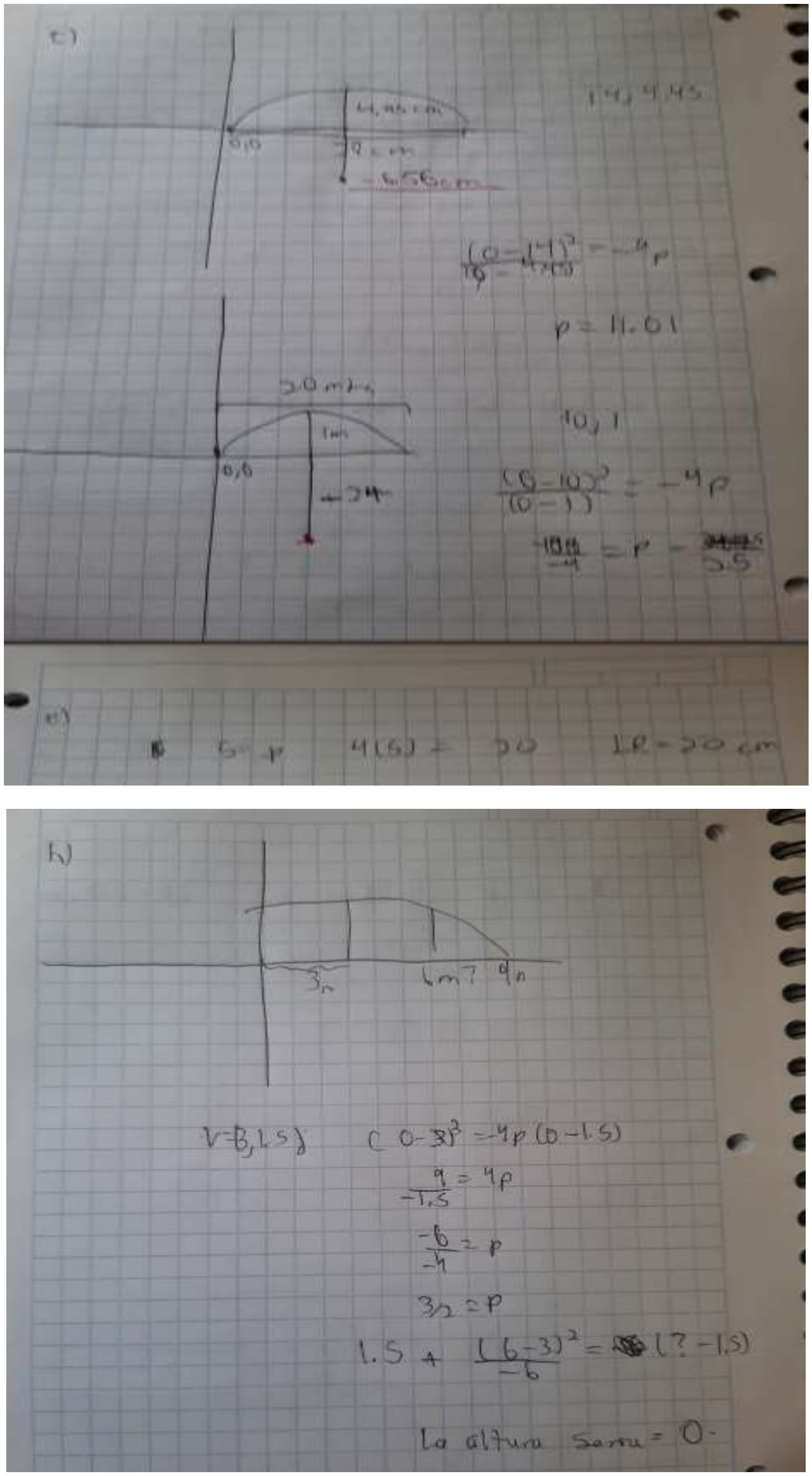


Figura 4.14 - Actividad 5 del alumno 2: Aplicaciones de la parábola

Se aprecia en los incisos (c) y (d) que el alumno realiza sus procedimientos de una manera bastante directa. Comprende la simetría de la parábola al tomar ambas parábolas como verticales que abren hacia abajo. En ambas realiza el despeje del parámetro p de una manera directa, identifica el vértice de la parábola correspondiente y comprende que el punto P = (0, 0) pasa por ambas parábolas. En el inciso (e) demuestra una comprensión del lado recto y su valor en términos de p, ya que encuentra la respuesta de manera inmediata al problema planteado que involucra este concepto. En el inciso (h) hubo una confusión de su parte, ya que la parábola que modela la situación no pasa por el punto P = (0, 0), lo que conduce a un resultado erróneo.

La lista de cotejo de esta actividad es:

Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real	x	
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada	x	
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola	x	
Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad		x

Tabla 4.17 - Lista de cotejo de la actividad 4 para el alumno 2

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.18 - Escala de valoración de la actividad 5

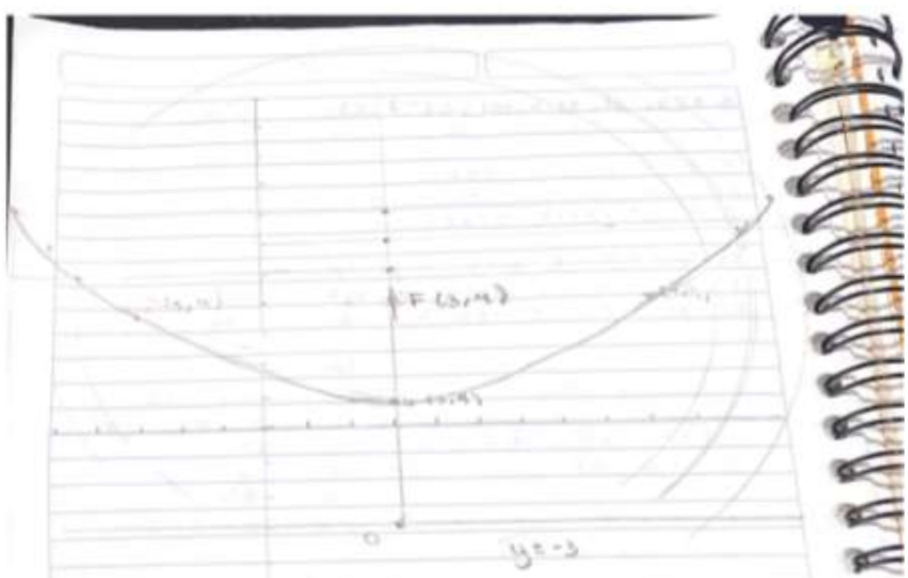
Así, se asigna al alumno 8 de calificación. Esta actividad está diseñada para contribuir al desarrollo en el alumno de su habilidad visual, verbal, de dibujo, lógica y razonamiento, y de aplicación y transferencia, así como en su paso del nivel de comprensión geométrica 3 al 4 de Van Hiele (véase el capítulo “El diseño de las estrategias didácticas”, estrategia 7). Con esta actividad, el alumno resuelve problemas contextualizados donde se aplican los conocimientos adquiridos de la parábola.

Portafolio de evidencias del alumno 14:

Centro de Prácticas Docentes: “El Colegio”	
Nombre del alumno:	"Alumno 14"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió
La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Tabla 4.19 - Ficha control para la elaboración del portafolio de evidencias del alumno 14

La actividad 1 del alumno 14 es la siguiente:



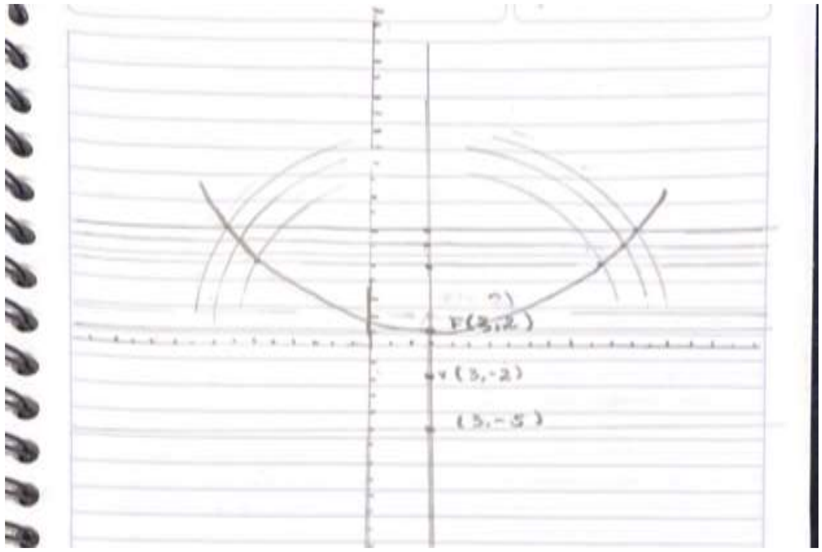


Figura 4.15 - Actividad 1 del alumno 14: Parábola con regla y compás

Se puede observar que el alumno identifica los elementos de la parábola y reconoce su simetría, incluso dibuja tal eje. En la primera parábola localiza correctamente el vértice, el foco y su directriz, aunque escribe erróneamente las coordenadas del foco, mismo error que comete en el bosquejo gráfico de la segunda parábola, ya que sus elementos son señalados correctamente, pero las coordenadas del foco con erróneas (el parámetro $p = 3$). Adicionalmente, el bosquejo gráfico de la segunda parábola es erróneo, ya que el alumno confundió el vértice con el foco, por lo que realiza el trazado de la curva como si el foco fuera el vértice.

La lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro *p*)	x	
Reconoce la simetría de la parábola	x	
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco		x
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz, es la misma que del punto al foco		x
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola		x

Tabla 4.20 - Lista de cotejo de la actividad 1 para el alumno 14

La escala de valoración correspondiente es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.21 - Escala de valoración de la actividad 1

De esta forma, al contar sólo con dos criterios demostrados, el alumno obtiene 5 de calificación en esta actividad.

La actividad 2 del alumno 14 es:

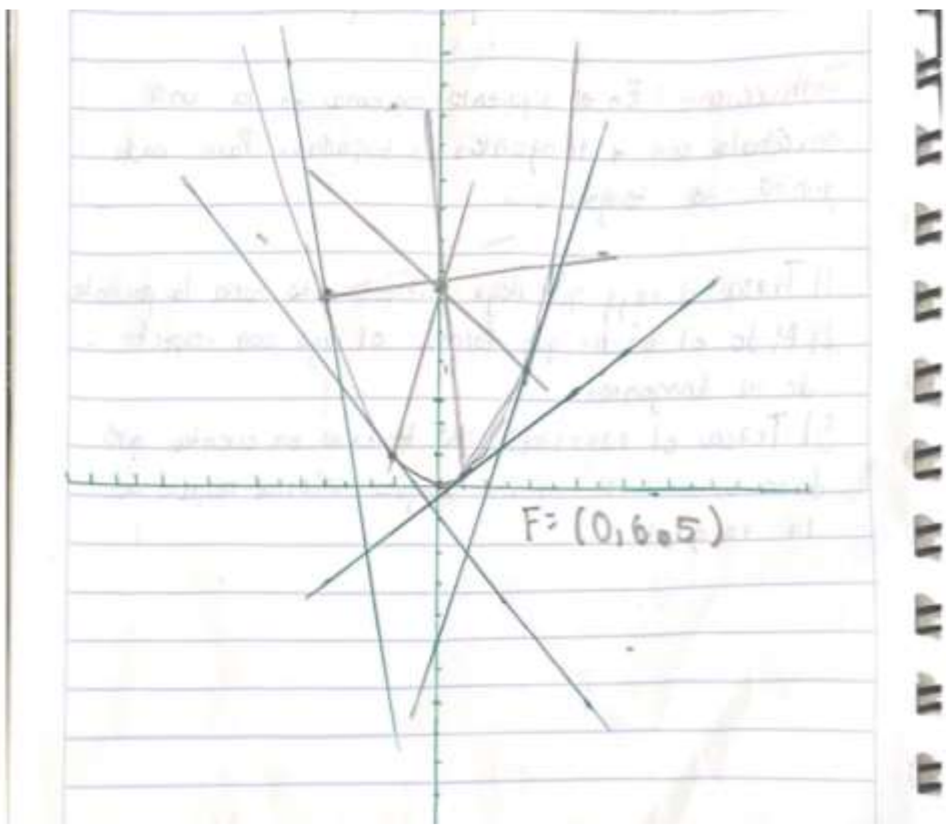


Figura 4.16 - Actividad 2 del alumno 14: La propiedad de reflexión

Se puede observar que el alumno no traza los rayos verticalmente hacia la parábola, además de que no logra reflejarlos hacia el foco, con lo que no es posible demostrar la propiedad de reflexión geométricamente.

La lista de cotejo correspondiente es:

Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola		x
Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola		x
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo		x
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco		x
Explica la propiedad de reflexión geométricamente		x

Tabla 4.22 - Lista de cotejo de la actividad 2 para el alumno 14

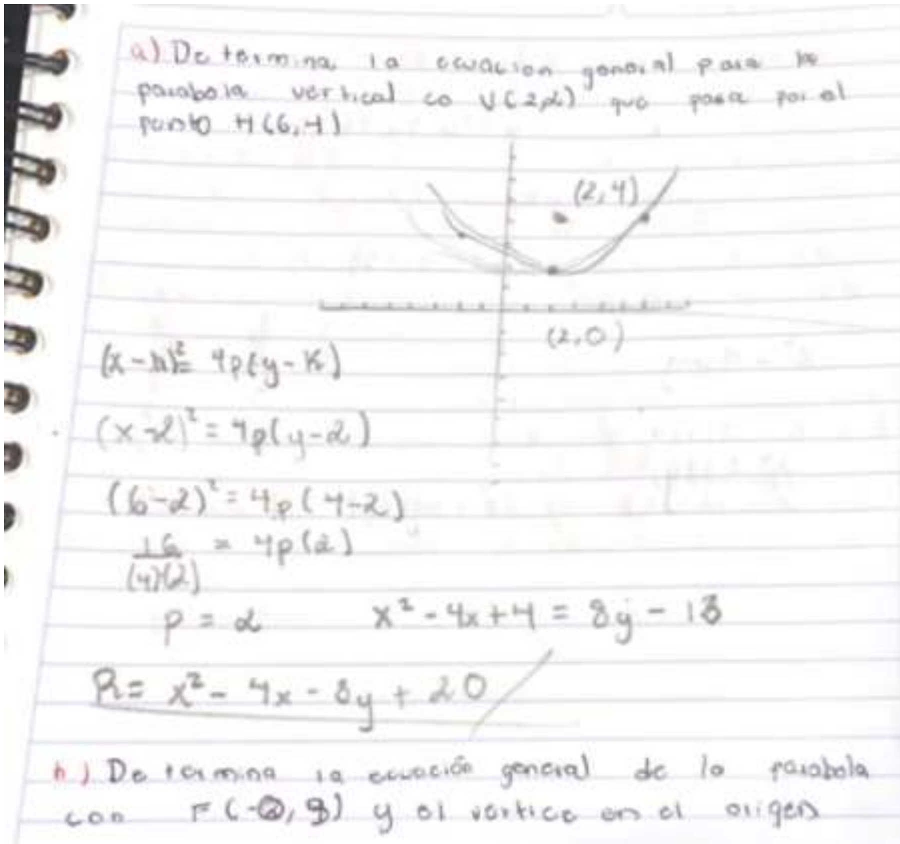
La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.23 - Escala de valoración de la actividad 2

Así, el alumno no mostró cumplir con ninguno de los criterios de esta actividad, por lo cual, se le asigna la calificación de 5.

La actividad 3 del alumno 14 es:



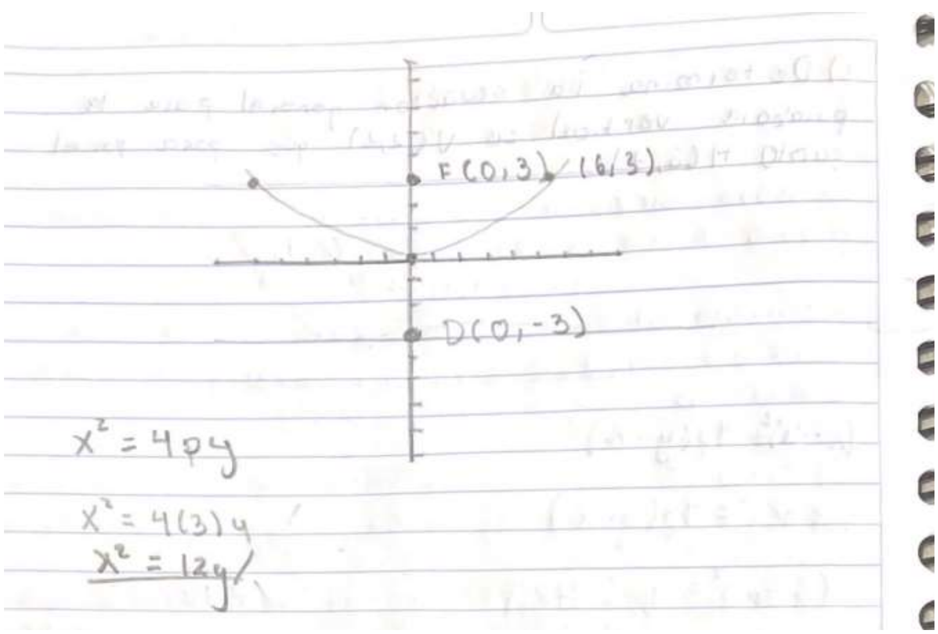


Figura 4.17 - Actividad 3 del alumno 14: Parábolas dados algunos de sus elementos

Se observa que el alumno comprende el proceso a seguir para encontrar la ecuación canónica de una parábola dados algunos de sus elementos. Para encontrar la ecuación general lo hace de manera casi directa. En el segundo ejercicio encuentra la ecuación directamente, aunque cabe destacar que escribe el punto por donde pasa la directriz, no su ecuación.

La lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)	x	
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos	x	

Tabla 4.24 - Lista de cotejo de la actividad 3 para el alumno 14

La escala correspondiente de valoración de criterios es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

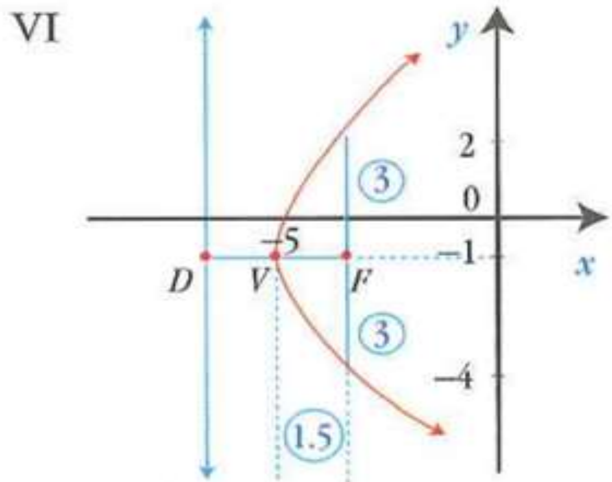
Tabla 4.25 - Escala de valoración para la actividad 3

De esta manera, se asigna una calificación de 10 en esta actividad al alumno 14.

La actividad 4 entregada por el alumno 14 es:

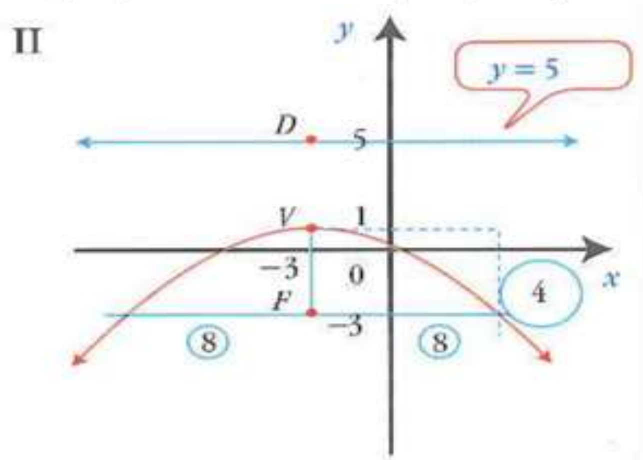
3) $(y+1)^2 = 6(x+5)$

V= (-5,-1); LR= 6; P=3/2 ; F= -7/2; D= X= -13/2



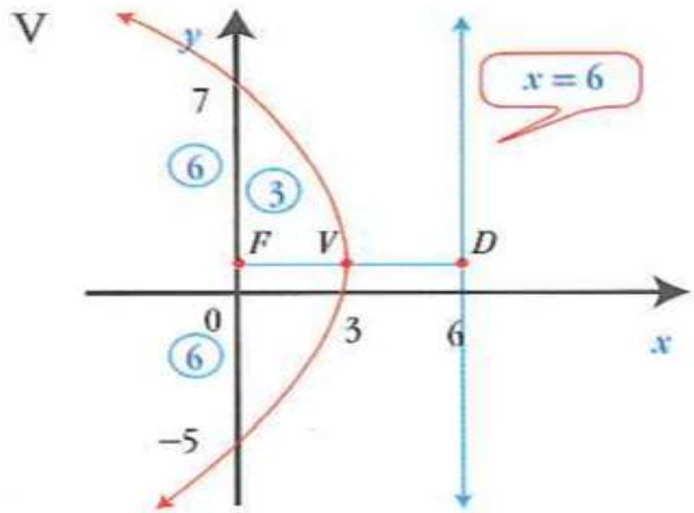
4) $(x+3)^2 = -16(y-1)$

V= (-3,1); LR=16; P=4; F= (-3,-3); D= y=5



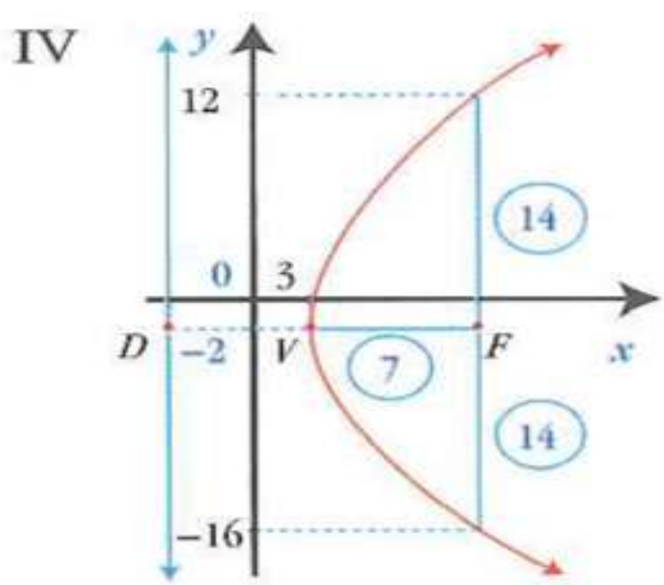
2) $(y-1)^2 = -12(x-3)$

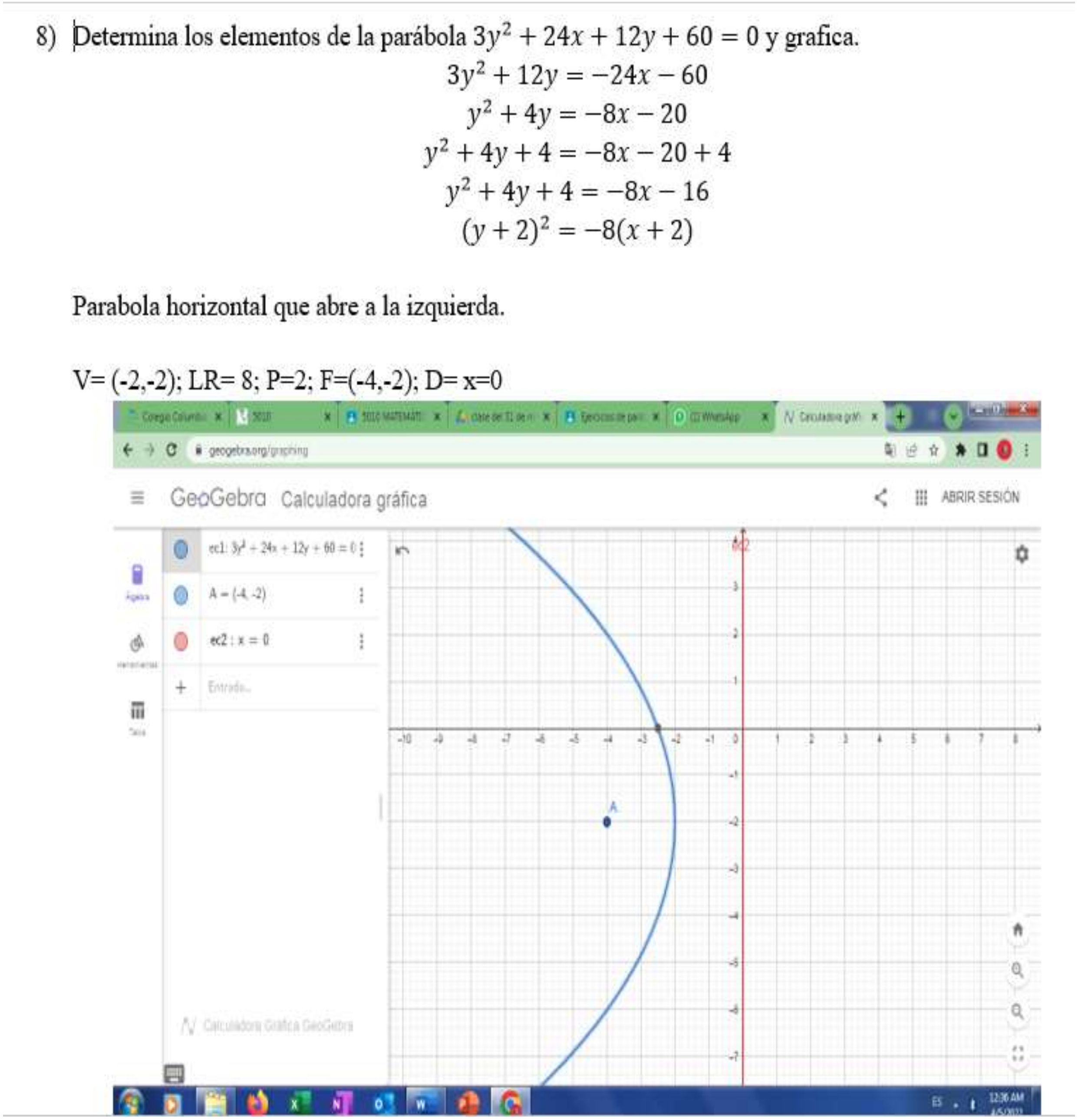
V= (3,1); LR= 12 ; P= 3 ; F= (0,3); D= x=6



5) $(y+2)^2 = 28(x-3)$

V= (3,-2); LR=28; P=7; F= (10,-2); D= x= -4





8) Determina los elementos de la parábola $3y^2 + 24x + 12y + 60 = 0$ y grafica.

$$3y^2 + 12y = -24x - 60$$
$$y^2 + 4y = -8x - 20$$
$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 20 + 4$$
$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 16$$
$$(y + 2)^2 = -8(x + 2)$$

Parabola horizontal que abre a la izquierda.

V= (-2,-2); LR= 8; P=2; F=(-4,-2); D= x=0

Figura 4.18 - Actividad 4 del alumno 14: Parábola y sus elementos a partir de su ecuación

Se puede observar en esta actividad que el ejercicio (2), (4) y (5) fueron realizados sin ningún error, con todos los elementos de la parábola bien definidos y la relación correcta con su gráfica. En el ejercicio (3) el alumno comete el error de no escribir la coordenada en y del foco, sin embargo, realiza el cálculo correcto a través del parámetro p para la coordenada x del foco. En el ejercicio (8) no sólo muestra el dominio de los procesos aritméticos y algebraicos para encontrar la ecuación canónica de la parábola y sus elementos a partir de ésta, sino que muestra también un dominio del uso del software para la realización del bosquejo gráfico de la parábola con sus elementos.

De esta forma, la lista de cotejo de esta actividad es:

Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación	x	
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano	x	
Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad	x	

Tabla 4.26 - Lista de cotejo de la actividad 4 para el alumno 14

La escala de valoración de criterios de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.27 - Escala de valoración de criterios de la actividad 4

Por lo cual, el alumno obtiene una calificación de 10 en esta actividad.

La entrega de la actividad 5 del alumno 14 es la siguiente:

c)

$(y-k)^2=-4p(x-h)$

Proce

V = (0.0495, .145)   Pasa por (0,0) → Siempre

$(y-0.145)^2=-4p(x-.0495)$

$(0-.14)^2=-4p(0-.0445)$

$0.0196 = 1.78p$

$0.011011 = p$

$+0.0445$

$0.0555...$

R= Debe de estar a 55cm del vertice.

d)

$(x-k)^2=4p(y-h)$

V = (10, 1)   pasa por (0,0)

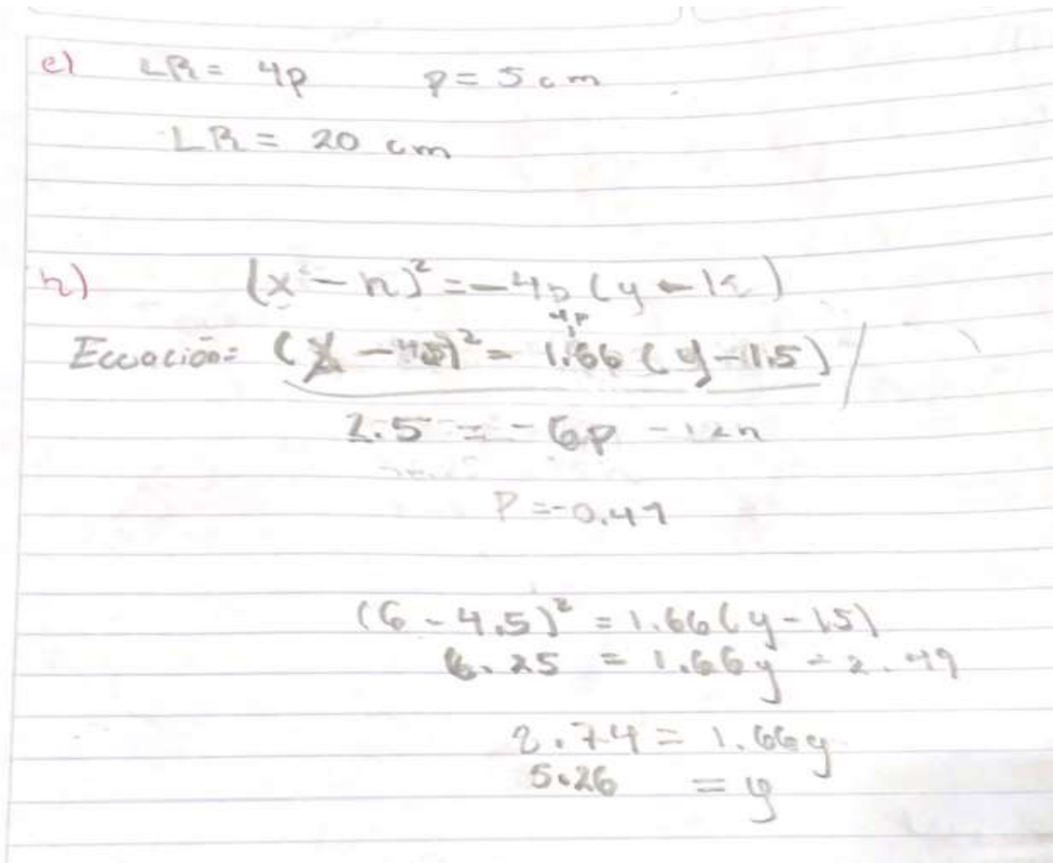
$(0-10)^2=4p(-1)$

$100 = 4p$

$\frac{100}{4} = p$

$p = 25$

R= Tiene que estar a 25 m del vertice, osea, mide 25 metros.



e) $LR = 4p$ $p = 5\,cm$

$LR = 20\,cm$

h) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

Ecuación: $(x-4.5)^2 = 1.66(y-1.5)$

$2.5 = -6p - 12h$

$P = -0.47$

$(6-4.5)^2 = 1.66(y-1.5)$

$6.25 = 1.66y - 2.49$

$2.74 = 1.66y$

$5.26 = y$

Figura 4.19 - Actividad 5 del alumno 14: Aplicaciones de la parábola

En el inciso (c) el alumno 2 convirtió las unidades dadas en centímetros a metros. Hace un planteamiento correcto del problema y realiza bien los cálculos, aunque su conclusión no es la adecuada. Los incisos (d) y (e) los plantea y desarrolla sin problema alguno. En el inciso (h) encuentra la ecuación que representa el movimiento del agua de la manguera del bombero, pero se confunde con la simetría de la parábola y define un vértice erróneo.

Así, la lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real	x	
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada	x	
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola	x	

Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad		x

Tabla 4.28 - Lista de cotejo para la actividad 5 del alumno 14

La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.29 - Escala de valoración de criterios de la actividad 5

Por lo cual, la calificación obtenida en esta actividad por el alumno 2 es de 8.

Portafolio de evidencias del alumno 19:

Centro de Prácticas Docentes: “El Colegio”	
Nombre del alumno:	"Alumno 19"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió
La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Tabla 4.30 - Ficha control para la elaboración del portafolio de evidencias del alumno 14

La actividad 1 del alumno 19 es:

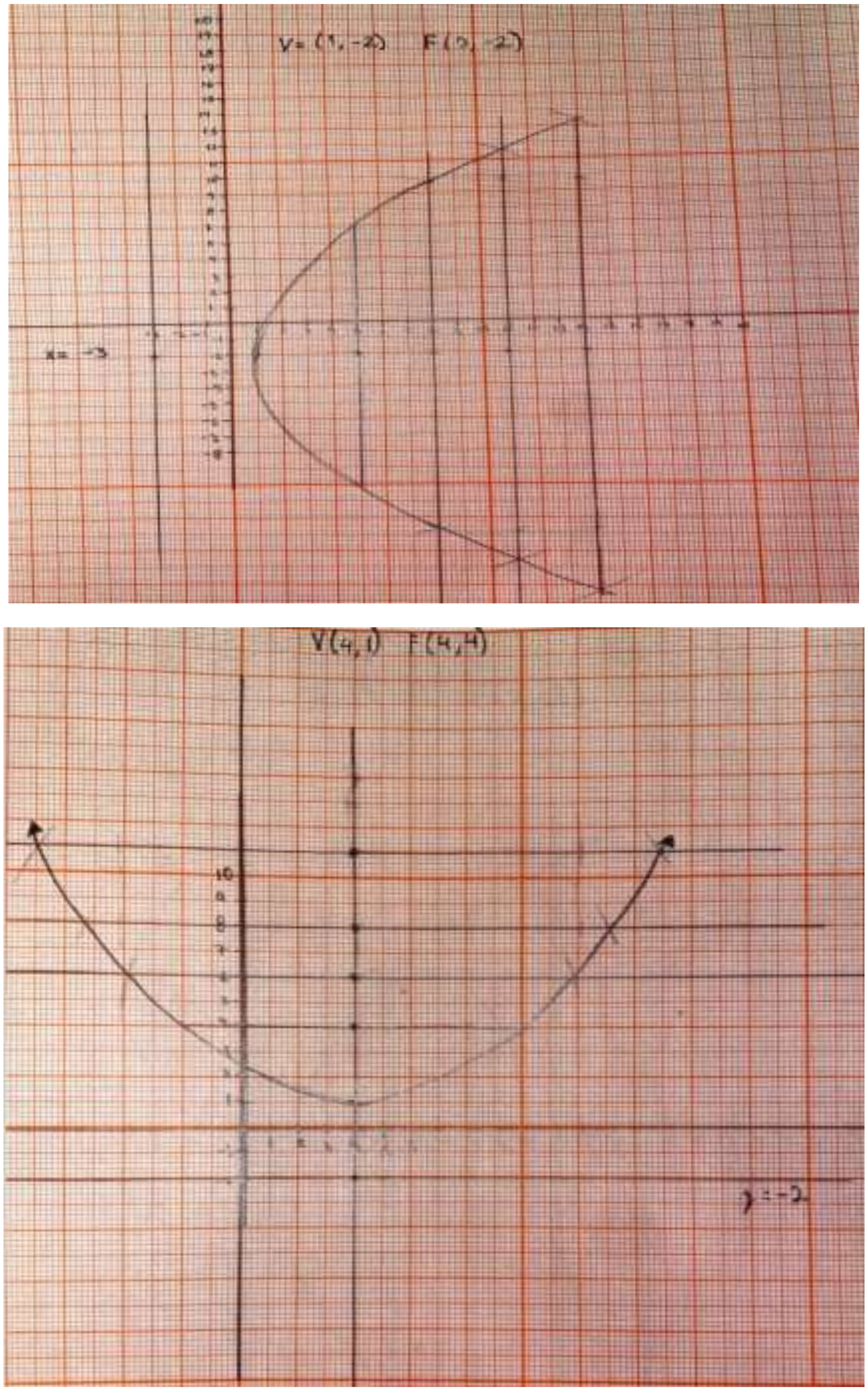


Figura 4.20 - Actividad 1 del alumno 19: Parábola con regla y compás

Se puede observar que el alumno identifica perfectamente todos los elementos de la parábola y reconoce su simetría, incluso dibuja tal eje en su segundo esquema. Un punto que resaltar es que el alumno no entregó la parábola con el vértice y el foco indicados en el video presentado durante las sesiones, sino que inventó sus propios ejemplos. El video presenta una parábola vertical que abre hacia arriba con V (2, 1) y F (2, 4), el alumno sigue el ejemplo y crea otra parábola distinta, no sólo vertical, sino que entrega otra parábola horizontal de manera totalmente correcta.

La lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro *p*)	x	
Reconoce la simetría de la parábola	x	
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco	x	
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz es la misma que del punto al foco	x	
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola	x	

Tabla 4.31 - Lista de cotejo para la actividad 1 del alumno 19

La escala de valoración para esta actividad resulta:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 8.32 - Escala de valoración para la actividad 1

Al contar con los cinco criterios de evaluación correctos, el alumno obtiene 10 de calificación en esta actividad.

La entrega de la actividad 2 del alumno 19 es la siguiente:

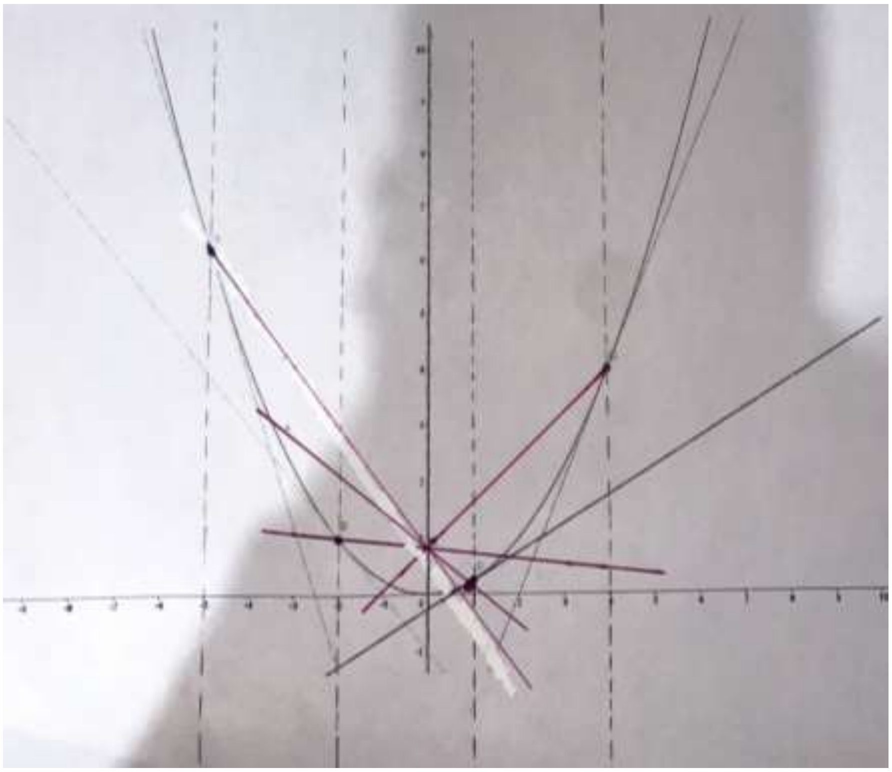


Figura 4.21 - Actividad 2 del alumno 19: La propiedad de reflexión

Se puede observar que el alumno traza los rayos verticalmente con líneas punteadas hacia la parábola, además de que logra reflejarlos hacia el mismo punto, encontrando con ello el foco de la parábola y comprobando, como consecuencia, la propiedad de reflexión de una forma geométrica.

La lista de cotejo para esta actividad sería:

Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola	x	
Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola	x	
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo	x	
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco	x	
Explica la propiedad de reflexión geométricamente	x	

Tabla 4.33 - Lista de cotejo para la actividad 2 del alumno 19

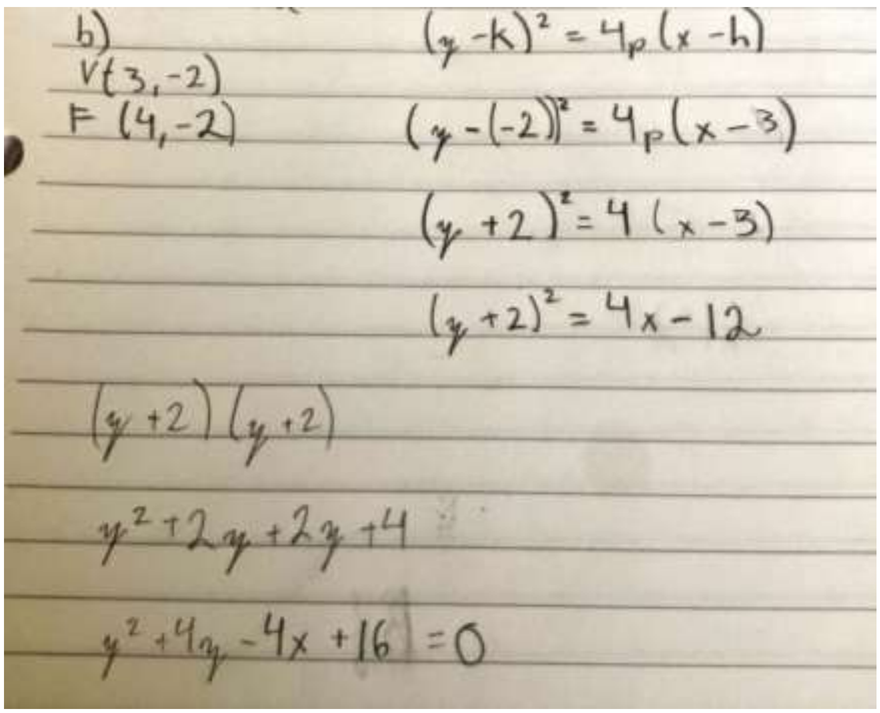
La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.34 - Escala de valoración para la actividad 2

Por lo cual, la calificación obtenida para esta actividad por el alumno 19 es 10.

La entrega del alumno 19 de la actividad 3, es la siguiente:



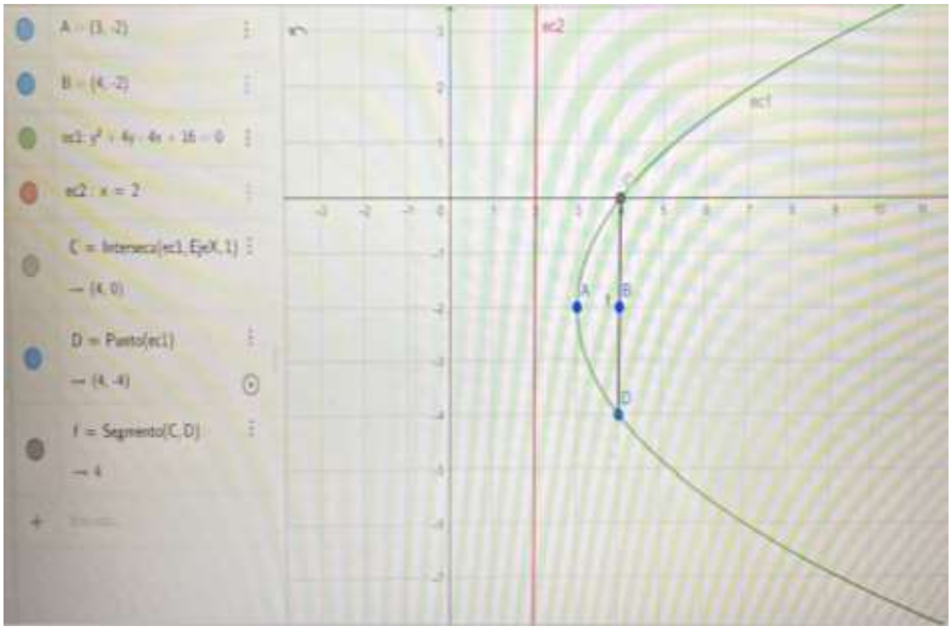


Figura 4.22 - Actividad 3 del alumno 19: Parábolas dados algunos de sus elementos

Se puede observar que el alumno elige correctamente la ecuación de la parábola que describe este ejercicio particular, además de que identifica todos sus elementos. Desarrolla perfectamente todos procesos aritméticos y algebraicos, además de que muestra un dominio del software para la construcción del bosquejo gráfico de esta parábola.

La lista de cotejo de esta actividad sería:

Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)	x	
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos	x	

Tabla 4.35 - Lista de cotejo para la actividad 3 del alumno 19

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*

A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

Tabla 4.36 - Escala de valoración para la actividad 3

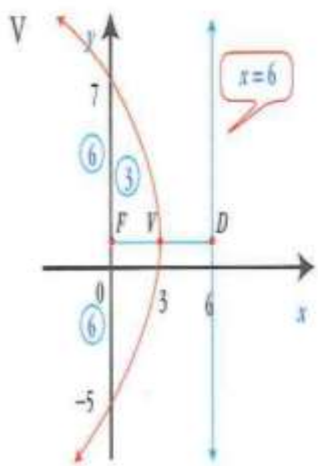
Por lo cual, al cumplir con los cuatro criterios de evaluación, el alumno obtiene 10 de calificación en esta actividad.

La actividad 4 entregada por el alumno 19 es la siguiente:

2) $(y-1)^2 = -12(x-3)$

Es una parábola horizontal que abre hacia la izquierda

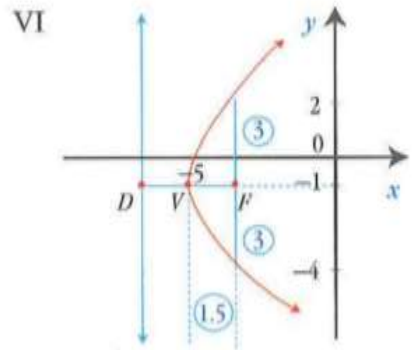
V (1,3) ; LR = 12 y eso nos lleva a p = 3; F = (0,1) ; directriz $x = 6$



3) $(y+1)^2 = 6(x+5)$

Es una parábola horizontal que abre hacia la derecha

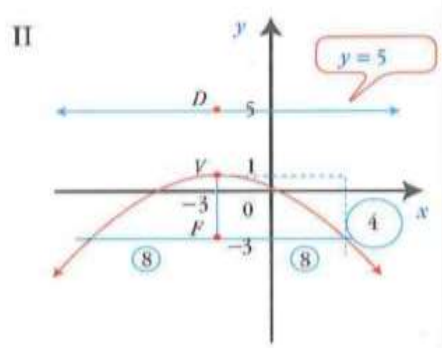
V (-5,-1) ; LR = 6 y eso nos lleva a p = 6/4= 1.5; F = (-3.5,-1) ; directriz $x = -6.5$



4) $(x + 3)^2 =- 16(y - 1)$

Es una parábola vertical que abre hacia abajo

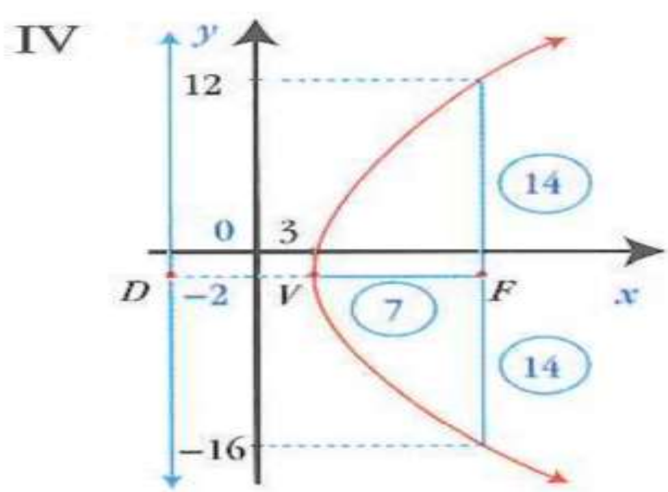
V (-3,1) ; LR = 16 y eso nos lleva a p = 4; F = (-3,-3) ; directriz $y = 5$



5) $(y + 2)^2 = 28(x - 3)$

Es una parábola horizontal que abre hacia la derecha

V (3,-2) ; LR = 28 y eso nos lleva a p = 7; F = (10,-2) ; directriz $x = -4$



8) Determina los elementos de la parábola $3y^2 + 24x + 12y + 60 = 0$ y grafica.

$$3y^2 + 12y + \left(\tfrac{1}{2}(12)\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}(12)\right)^2 = -24x - 60$$

$$3y^2 + 12y + \left(\tfrac{1}{2}(12)\right)^2 = -24x - 60 + \left(\tfrac{1}{2}(12)\right)^2$$

$$3y^2 + 12y + 36 = -24x - 60 + 36$$

$$3(y + 2)^2 = -24x - 24$$

$$3(y + 2)^2 = -2(12x + 12)$$

V=(-2, -2) ; LR = 4 ; p = 1 ; F = (-4, -2) ; x = 0

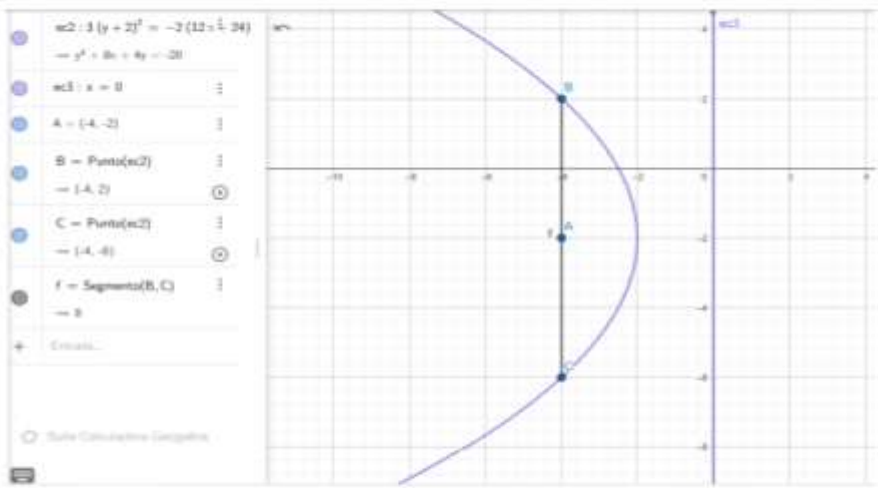


Figura 4.23 - Actividad 4 del alumno 19: Parábola y sus elementos a partir de su ecuación

En el ejercicio (2) el alumno escribe erróneamente el vértice, ya que escribe las coordenadas al revés. Los demás elementos son correctos, incluso la relación con su gráfica sólo es ese detalle de las coordenadas del vértice. Para el ejercicio (3) corrige ese error al identificar el vértice correcto, así como todos los demás elementos de la parábola; adicionalmente, muestra un dominio del tema con números racionales, ya que el parámetro *p* resulta racional en este ejercicio. El ejercicio (4) y (5) los resuelve con todos sus elementos sin problema alguno, además de relacionar sus desarrollos con las expresiones gráficas correctas.

En el ejercicio (8) cabe resaltar que el alumno realiza el proceso de completar el cuadrado para encontrar la ecuación canónica de manera correcta, pero no termina de factorizar hasta la mínima expresión del lado derecho de la igualdad, para mostrar la longitud del lado recto, así como la coordenada en *x* del vértice. Posteriormente, introduce la ecuación encontrada al software, y al obtener la gráfica correspondiente logra localizar el vértice, el foco, el parámetro *p* y la directriz correcta, sin embargo, hay un detalle más llamativo aún, y es el hecho de que escribe erróneamente la longitud del lado recto, pero la localiza correctamente con los extremos de éste en el software (los puntos B y C), incluso traza un segmento que le arroja su longitud.

El problema viene desde la factorización que representa problema algebraico, pero el alumno logra resolverlo usando el software como herramienta para este caso. Es decir, probablemente de manera manual no hubiera podido hacerlo, sin embargo, el software le ayuda a concluirlo de manera visual.

Así, la lista de cotejo para esta actividad sería:

Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación	x	
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano	x	
Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad	x	

Tabla 4.37 - Lista de cotejo para la actividad 4 del alumno 19

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.38 - Escala de valoración para la actividad 4

Por lo tanto, la calificación obtenida por el alumno 19 en esta actividad es 10.

La actividad 5 del alumno 19 es la siguiente:

c)

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

$$(0-0.14)^2 = -4p(0-0.0445)$$

$$0.0196 = 0.178p$$

$$0.11011 = p$$

Se debe encontrar a 0.11011m del vértice

d)

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

$$(0-10)^2 = -4p(0-1)$$

$$100 = 4p$$

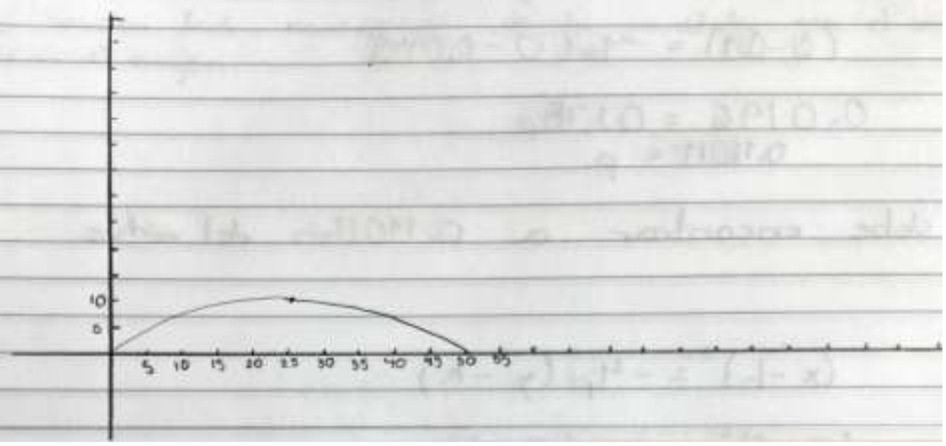
$$25 = p$$

25m

e) $4(5) = 20$

20cm

g) Altura máxima: 10
Distancia horizontal: 50



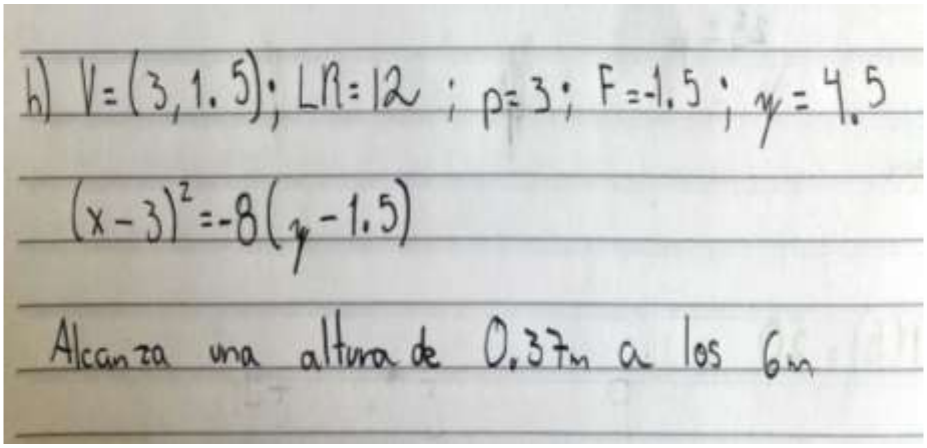


Figura 4.24 - Actividad 5 del alumno 19: Aplicaciones de la parábola

En los ejercicios (c) y (d), a pesar de contestar correctamente de manera algebraica, el alumno no realiza ninguna representación gráfica del problema, lo que impide visualizar claramente su proceso de aprendizaje geométrico. El problema (e) lo resuelve de una manera directa, lo que nos habla de su comprensión del concepto de lado recto. Por otro lado, en el ejercicio (h) identifica correctamente el modelo parabólico a seguir para resolver el problema, así como el vértice, pero identifica los elementos de la parábola de manera errónea y no realiza una representación gráfica del problema, lo que conduce a una respuesta errónea.

La lista de cotejo para esta actividad queda de la siguiente forma:

Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real		x
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada	x	
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola	x	
Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola		x
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada		x
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad		x

Tabla 4.39 - Lista de cotejo para el alumno 19 de la actividad 5

La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.40 - Escala de valoración para la actividad 5

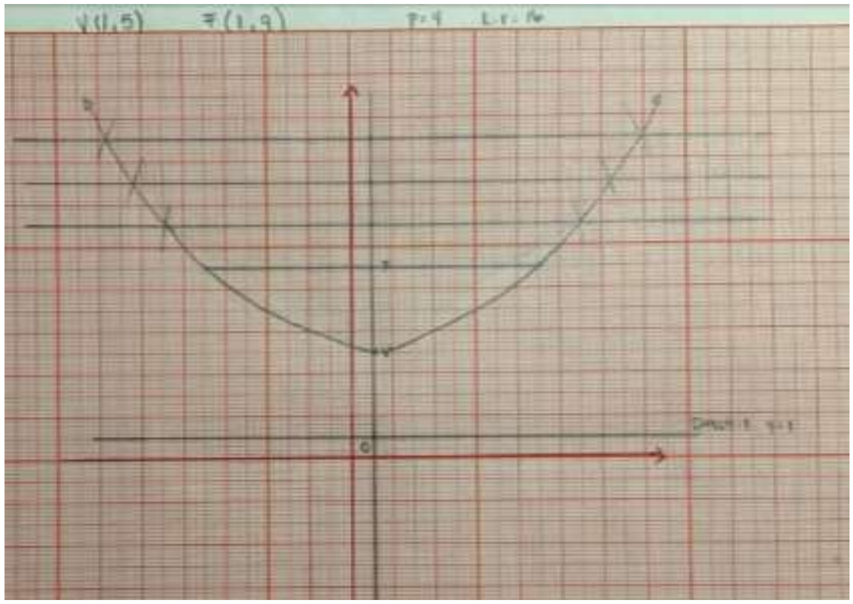
Así, la calificación asignada para este alumno en la actividad 5 es de 5.

Portafolio de evidencias del alumno 17:

Centro de Prácticas Docentes: “El Colegio”	
Nombre del alumno:	"Alumno 17"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió
La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Tabla 4.41 - Ficha control para la elaboración del portafolio de evidencias del alumno 17

La actividad 1 del alumno 17 es:



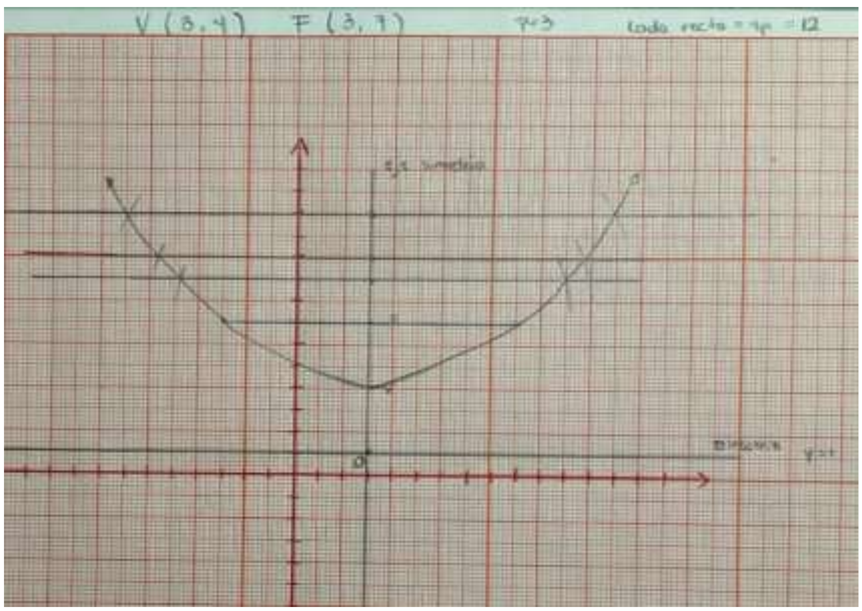


Figura 4.25 - Actividad 1 del alumno 17: Parábola con regla y compás

Se puede observar que el alumno 17 identifica todos los elementos de la parábola, reconoce su simetría y dibuja este eje. El alumno no entregó el ejemplo expuesto en el video para esta actividad, sino que realizó dos ejercicios distintos, ejercicios donde aplica el procedimiento visto correctamente.

La lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
	x	

Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro *p*)		
Reconoce la simetría de la parábola	x	
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco	x	
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz es la misma que del punto al foco	x	
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola	x	

Tabla 4.42 - Lista de cotejo para el alumno 17 de la actividad 1

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.43 - Escala de valoración para la actividad 1

Así, la calificación asignada al alumno 17 para esta actividad es de 10.

La entrega de la actividad 2 del alumno es la siguiente:

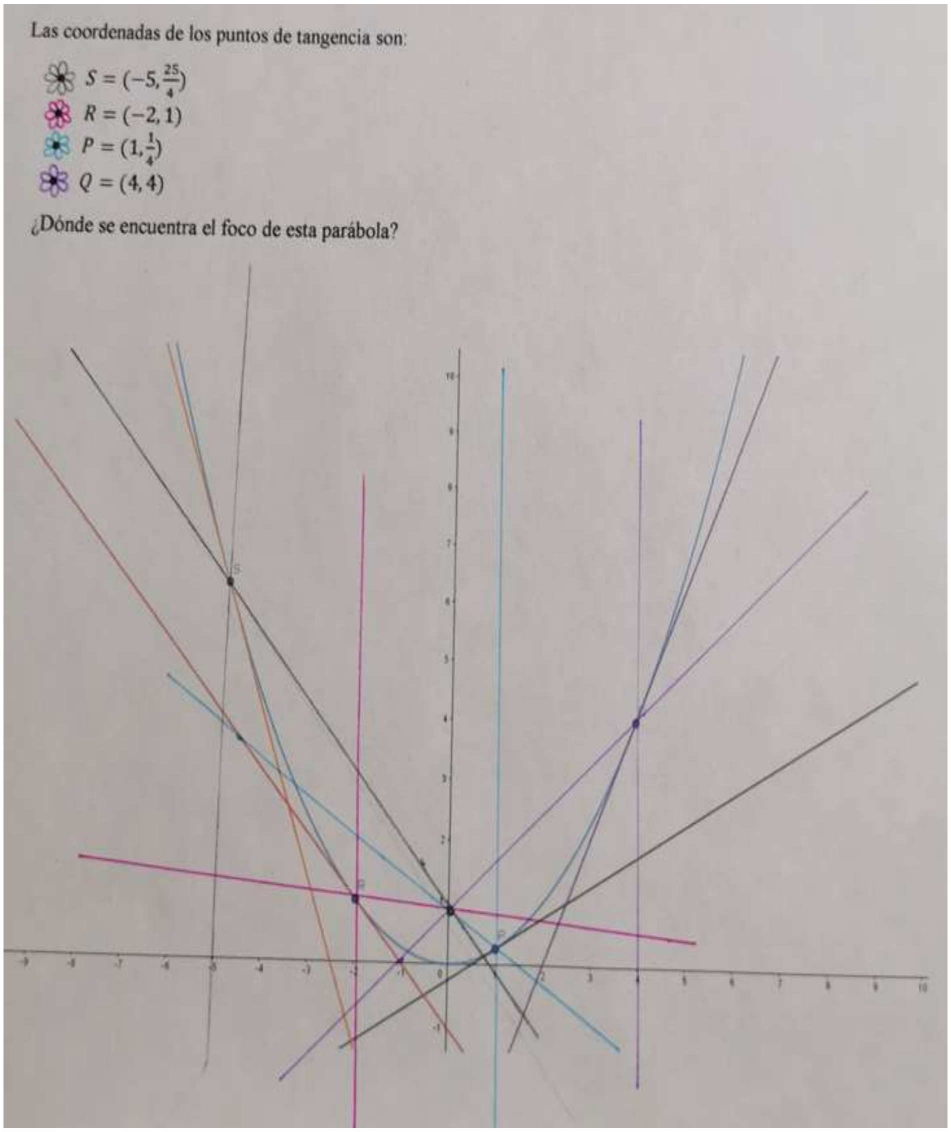


Figura 4.26 - Actividad 2 del alumno 17: La propiedad de reflexión

Se observa como el alumno 17 incluso usa colores para reflejar los rayos correspondientes en cada punto de tangencia. Determina los ángulos de reflexión para cada rayo y los interseca en un mismo punto, encontrando así el foco de la parábola y comprobando la propiedad de reflexión de manera geométrica.

La lista de cotejo para el alumno 17 en esta actividad es:

Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola	x	
	x	

Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola		
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo	x	
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco	x	
Explica la propiedad de reflexión geométricamente	x	

Tabla 4.44 - Lista de cotejo para el alumno 17 de la actividad 2

La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.45 - Escala de valoración para la actividad 2

Por lo cual, la calificación asignada al alumno 17 en esta actividad es de 10.

La entrega de la actividad 3 del alumno 17 es:

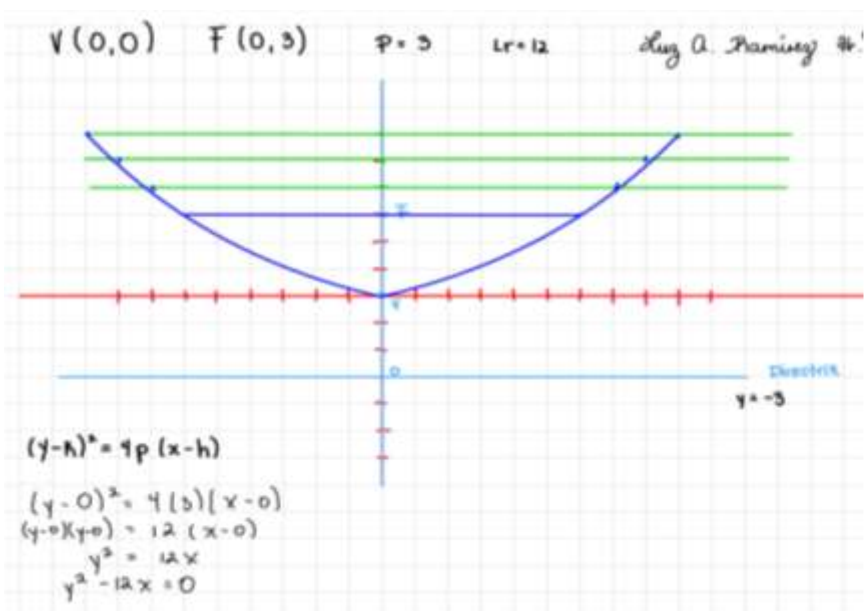


Figura 4.27 - Actividad 3 del alumno 17: Parábolas dados algunos de sus elementos

En esta actividad se observa que el alumno 17 identifica los elementos de la parábola correspondiente. Llama la atención que dibuja la parábola a través del método visto en la actividad 1, a través de la localización de puntos, lo que habla de la comprensión de la definición de la parábola. Comete el error de elegir la ecuación inadecuada para describir algebraicamente a esta parábola, quizá debido a una confusión entre las variables.

La lista de cotejo para esta actividad del alumno 17 es:

Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)	x	
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola		x
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos	x	

Tabla 4.46 - Lista de cotejo para el alumno 17 de la actividad 3

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

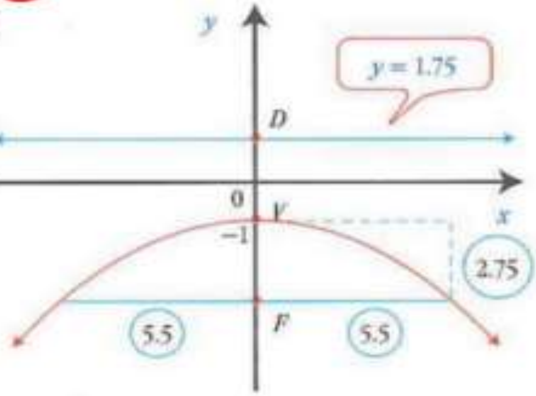
Tabla 4.47 - Escala de valoración para la actividad 3

Así, la calificación asignada al alumno 17 para esta actividad, es de 8.

La entrega de la actividad 4 del alumno 17 es:

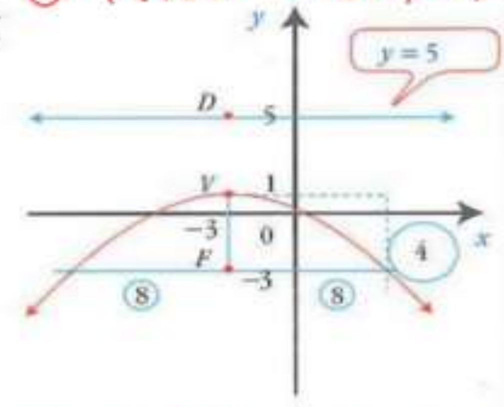
(6) $x^2 = -11(y+1)$

I



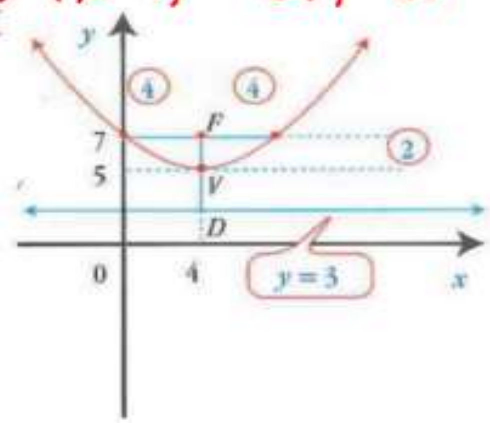
(4) $(x+3)^2 = -16(y-1)$

II



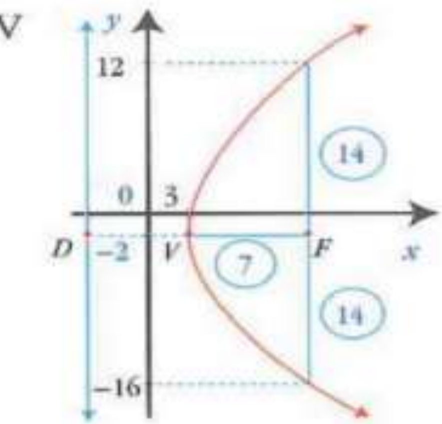
(1) $(x-4)^2 = 8(y-5)$

III



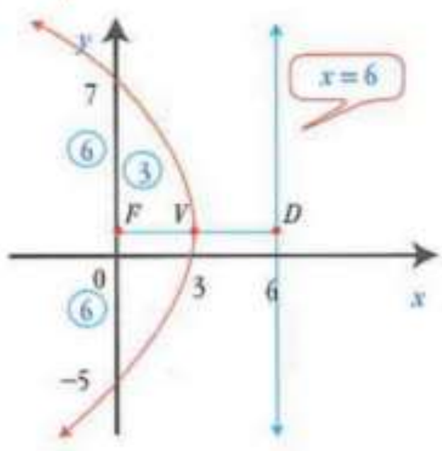
(5) $(y+2)^2 = 28(x-3)$

IV



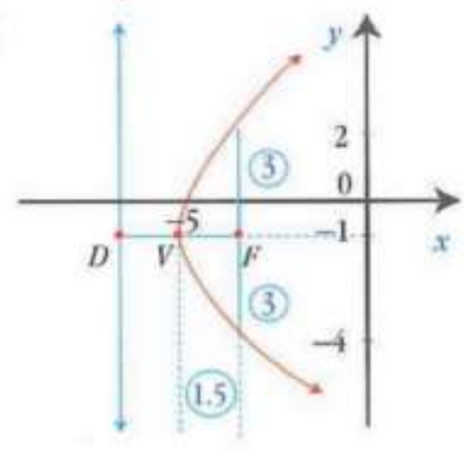
(2) $(y-1)^2 = -12(x-3)$

V



(3) $(y+1)^2 = 6(x+5)$

VI

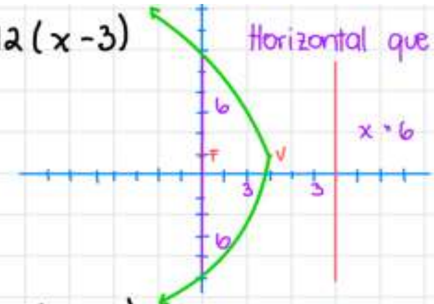


② $(y-1)^2 = -12(x-3)$

Horizontal que abre a la izquierda

$V = (3, 1)$

$LR = 12 \rightarrow p = 3$



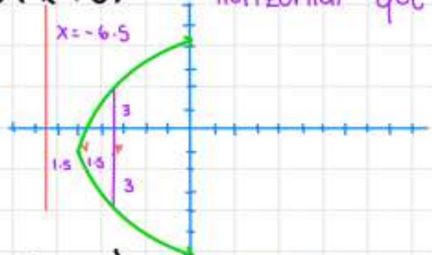
V

③ $(y+1)^2 = 6(x+5)$

Horizontal que abre a la derecha

$V = (-5, -1)$

$LR = 6 \rightarrow p = 3/2 = 1.5$



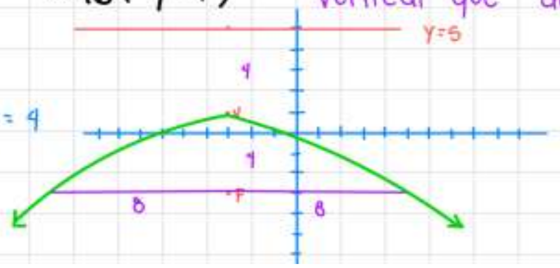
VI

④ $(x+3)^2 = -16(y-1)$

Vertical que abre hacia abajo

$V = (-3, 1)$

$LR = 16 \rightarrow p = 4$



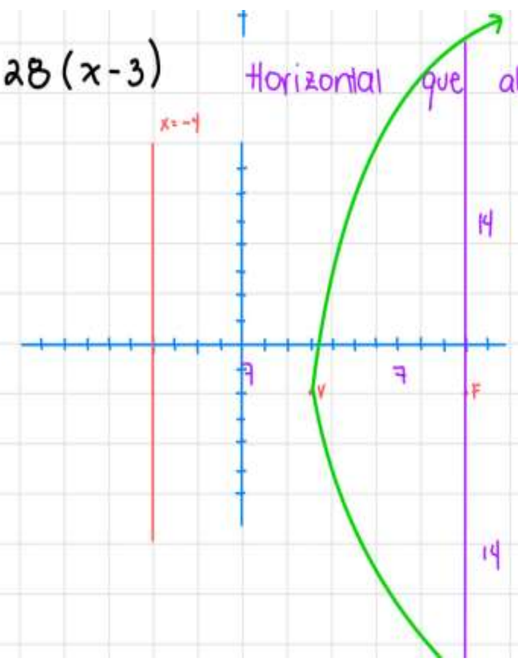
II

⑤ $(y+2)^2 = 28(x-3)$

Horizontal que abre a la derecha

$V = (3, -2)$

$LR = 28 \rightarrow p = 7$



IV

8) Determina los elementos de la parábola $3y^2 + 24x + 12y + 60 = 0$ y grafica.

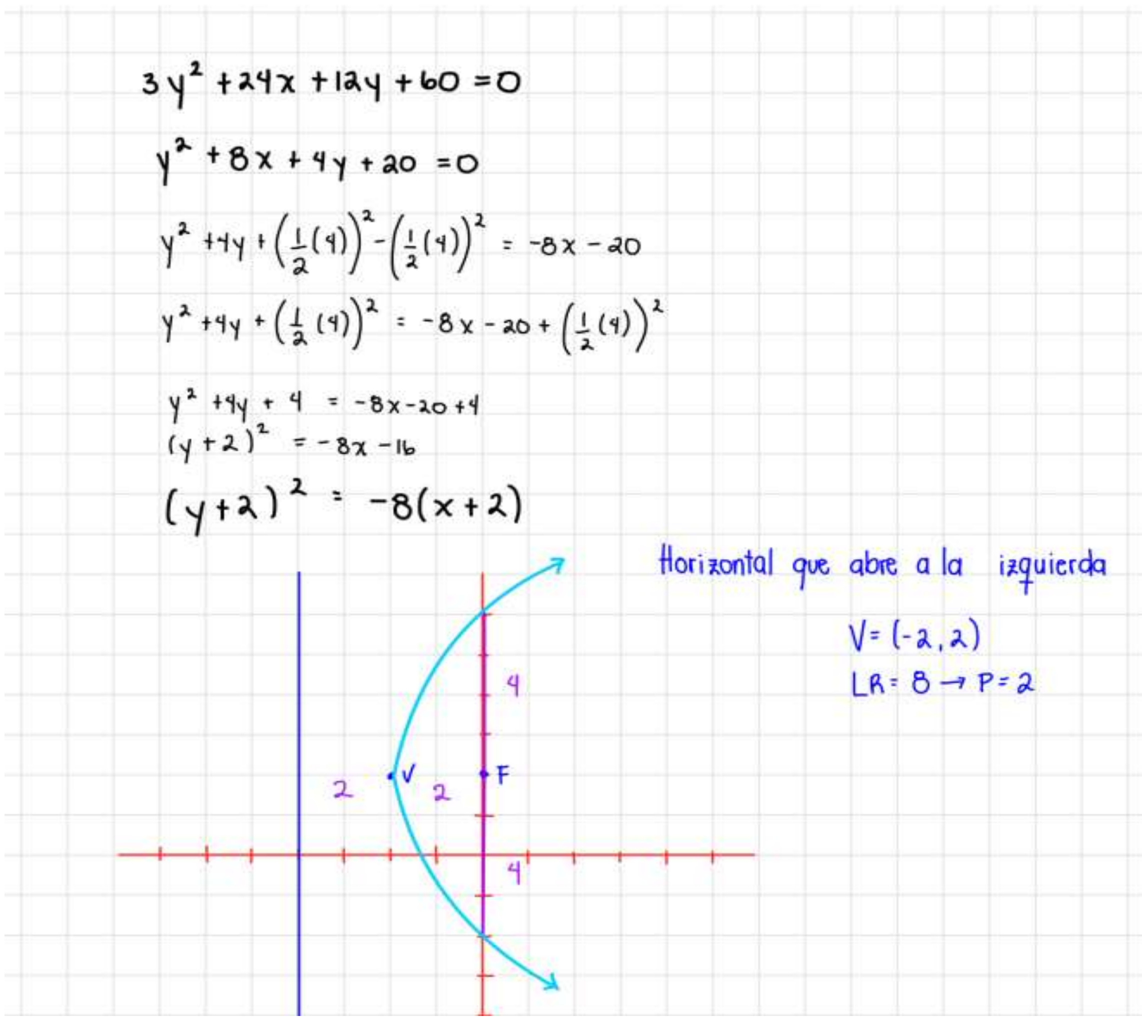


Figura 8.28 - Actividad 4 del alumno 17: Parábola y sus elementos a partir de su ecuación

Se puede observar que el alumno 17 identifica perfectamente el tipo de parábola a partir de la ecuación y sus elementos, a la vez que es capaz de localizarlos en el plano cartesiano. Se resalta el detalle de que el alumno no sólo relaciona las ecuaciones con las gráficas dadas para este ejercicio, sino que las realiza por cuenta propia, lo que le proporciona una práctica más sólida. En el ejercicio (8) muestra un dominio algebraico para encontrar la ecuación canónica, así como sus elementos y la construcción del bosquejo gráfico de la parábola, que refleja su capacidad de transitar entre ambos sistemas de representación.

Así, la lista de cotejo de esta actividad para el alumno 17 es:

Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación	x	

Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano	x	
Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad	x	

Tabla 4.48 - Lista de cotejo para el alumno 17 de la actividad 4

La escala de valoración para esta actividad es:

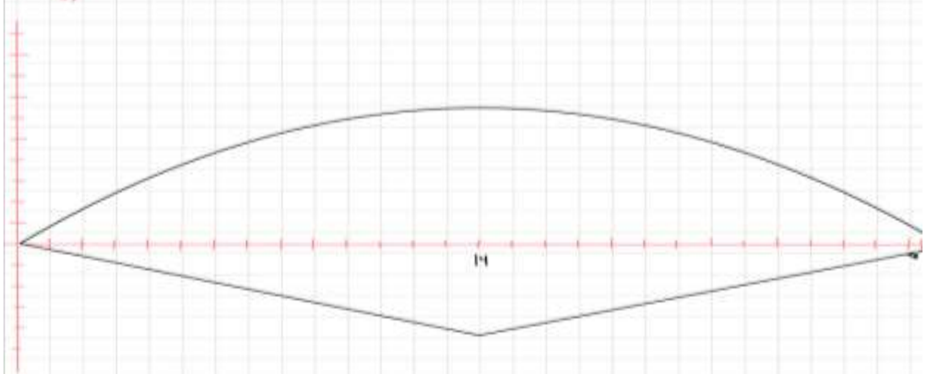
Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.49 - Escala de valoración para la actividad 4

Por lo cual, la calificación asignada para esta actividad al alumno 17 es de 10.

La entrega de la actividad 5 del alumno 17 es:

c)



$V = (14, 4.45)$ $P = 0$

$(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$

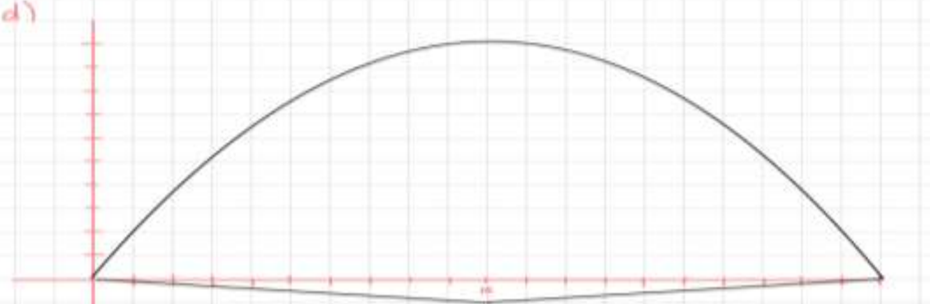
$(0-14)^2 = -4p\,(0-4.45)$ 11.01123 cm

$196 = 17.8\,p$

$\frac{196}{17.8} = p$

$11.01123 = p$

d)



$V = (10,1)$ $P = (0,0)$

$(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$

$(0-10)^2 = -4p\,(0-1)$

$100 = 4p$

$25 = p$

e)

$LR = 4p = 4(5) = 20$ cm $= 0.2$ mts.

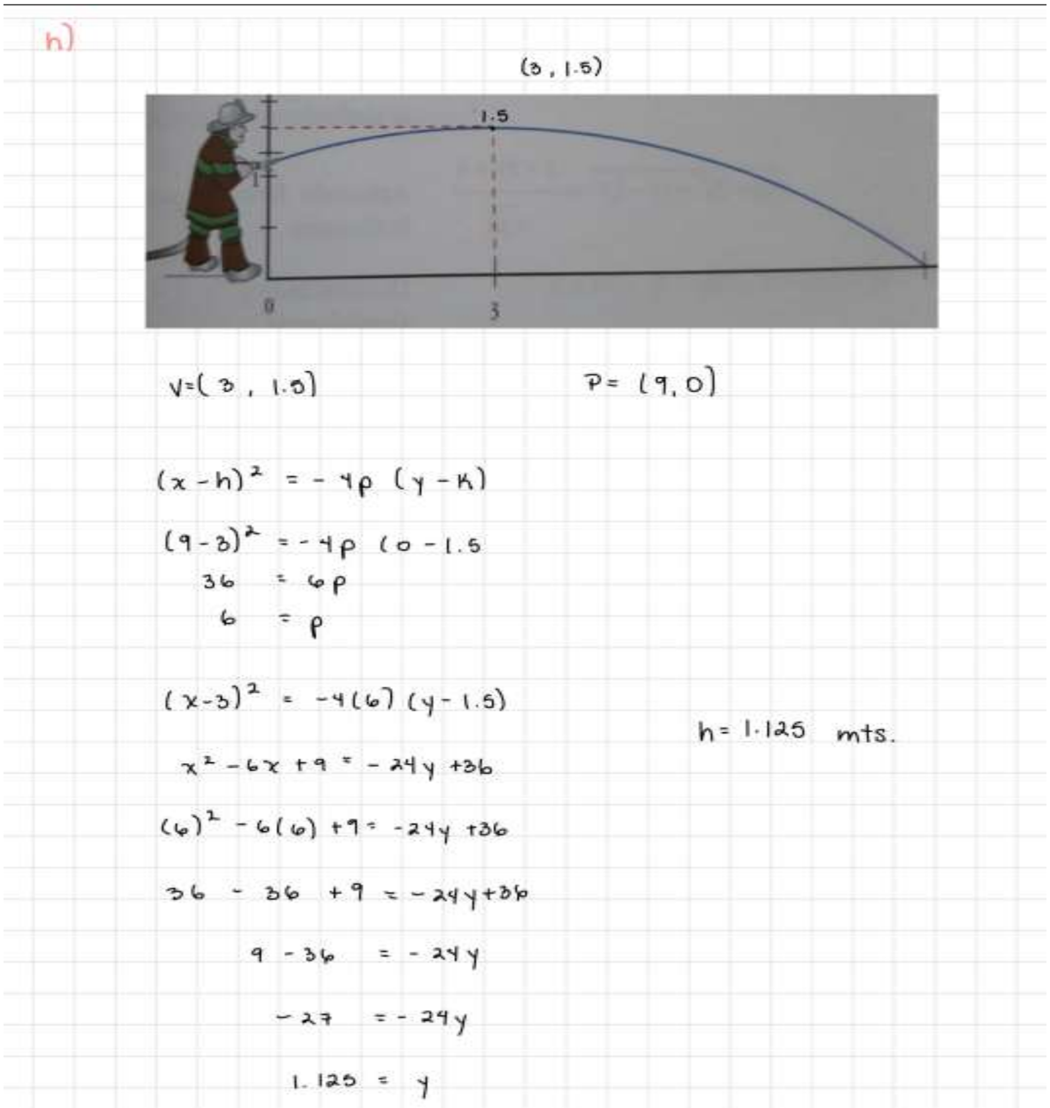


Figura 4.29 - Actividad 5 del alumno 17: Aplicaciones de la parábola

Se puede observar que en los ejercicios (c) y (d) el alumno hace planteamientos correctos y resuelve sin problema alguno, sólo tiene una falla de localización del vértice, ya que, a pesar de escribir las coordenadas correctas, en el plano cartesiano parece que localiza otro punto de acuerdo con la escala. Esto no necesariamente es un error. Quizá sólo da otra escala al eje y para hacer gráficos más descriptivos. El ejercicio (e) lo realiza de manera directa, muestra de la comprensión y aplicación del lado recto. En el ejercicio (h) el alumno muestra el nivel de comprensión que posee del objeto matemático de la parábola. Identifica los datos que otorga el problema como elementos de la parábola, así como el tipo de parábola que representa la situación y determina el valor del parámetro *p* como dato necesario para encontrar dicha ecuación. Posteriormente, encuentra la ecuación general, y aunque no la escribe igualada a cero, comprende que esto no es un factor que repercuta para dar respuesta a la problemática planteada, ya que la usa para responder acertadamente al problema.

Así, la lista de cotejo para el alumno 17 en esta actividad es:

Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real	x	
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada	x	
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola	x	
Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad	x	

Tabla 4.50 - Lista de cotejo para el alumno 17 de la actividad 5

La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.51 - Escala de valoración para la actividad 5

Así, la calificación asignada para esta actividad al alumno 17 es de 10.

Portafolio de evidencias del alumno 10:

Centro de Prácticas Docentes: “El Colegio”	
Nombre del alumno:	"Alumno 10"
Productos o evidencias de aprendizaje del alumno	
Parábola con regla y compás	Cumplió

La propiedad de reflexión	Cumplió
Parábolas dados algunos de sus elementos	Cumplió
Parábola y sus elementos a partir de su ecuación	Cumplió
Aplicaciones de la parábola	Cumplió

Tabla 4.52 - Ficha control para la elaboración del portafolio de evidencias del alumno 10

La actividad 1 entregada por el alumno 10 es:

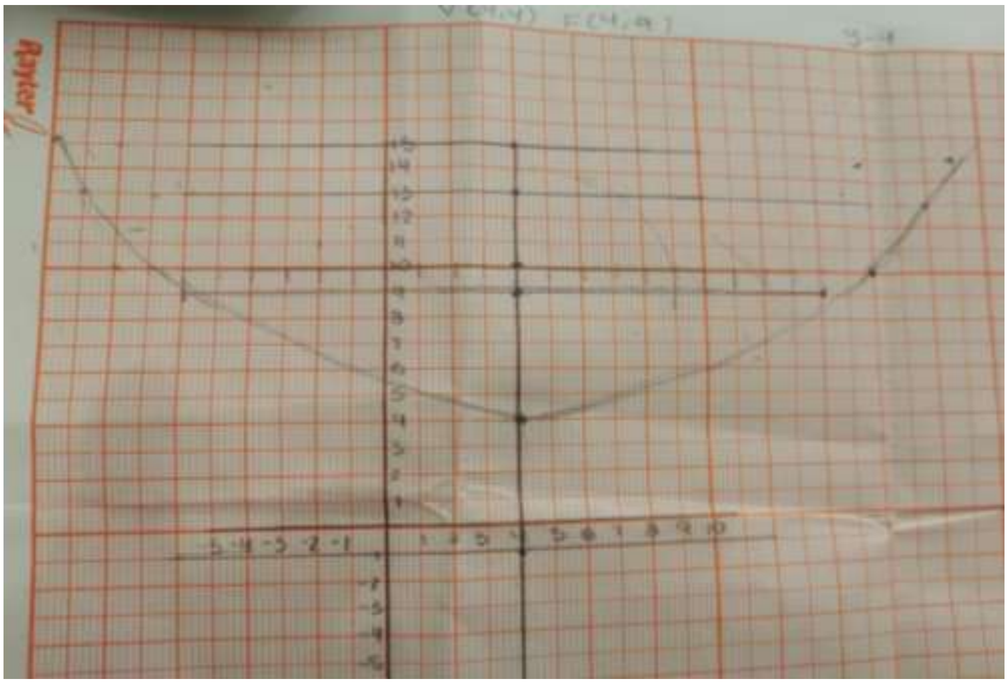


Figura 4.30 - Actividad 1 del alumno 10: Parábola con regla y compás

Se aprecia que el alumno identifica el valor del parámetro p de acuerdo con su ejemplo, y con él, identifica y traza el lado recto, pero se equivoca al dibujar la directriz de su parábola y escribir su ecuación. Al considerar una directriz errónea, las distancias tomadas para localizar los puntos pertenecientes a la parábola son equivocadas, lo que implica que los puntos encontrados de la parábola son erróneos. Se aprecia que el alumno sigue el proceso visto en clase, pero lo hace de manera errónea por no ubicar de forma correcta la directriz de la parábola.

La lista de cotejo para el alumno en esta actividad es:

Actividad 1.- Parábola con regla y compás		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)		x

Reconoce la simetría de la parábola	x	
Utiliza la distancia de un punto sobre el eje de simetría a la directriz, para encontrar un punto de la parábola aplicando esa distancia al foco	x	
Comprende que la distancia de un punto de la parábola hacia la directriz es la misma que del punto al foco	x	
Dibuja el bosquejo gráfico de la parábola		x

Tabla 4.53 - Lista de cotejo para el alumno 10 de la actividad 1

La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cinco criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cuatro criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Tres criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Dos o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.54 - Escala de valoración para la actividad 1

Así, la calificación asignada para esta actividad al alumno 10 es de 6.

La entrega realizada por el alumno para la actividad 2 es:

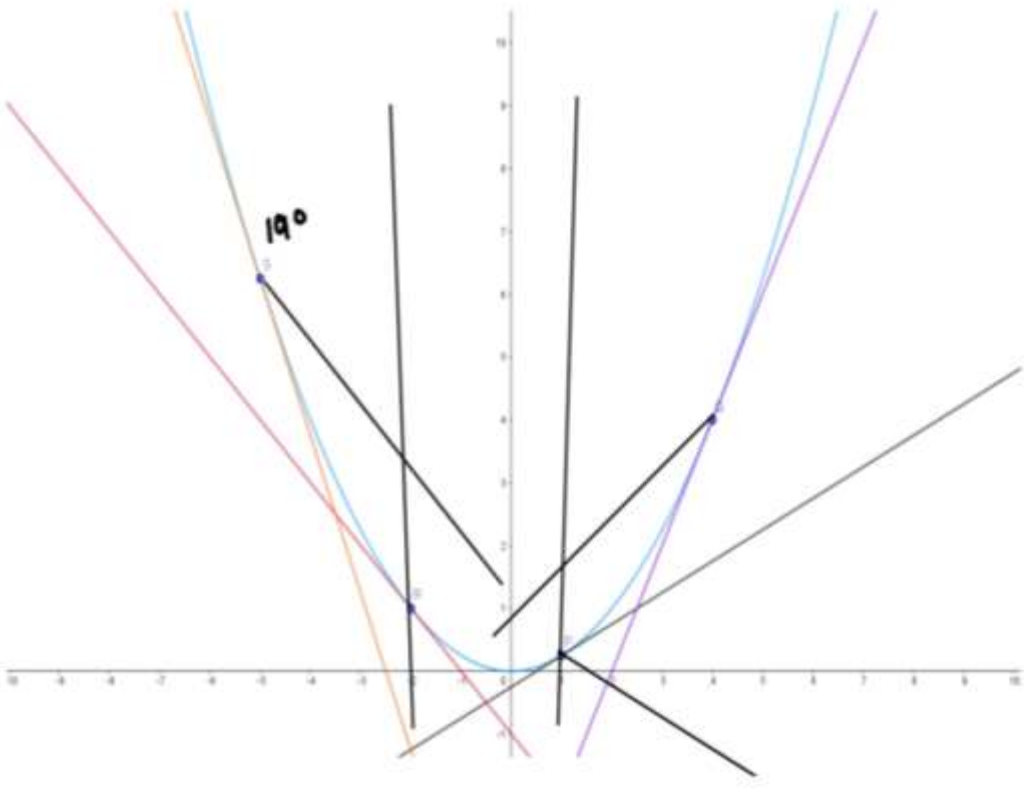


Figura 4.31 - Actividad 2 del alumno 10: La propiedad de reflexión

Se puede apreciar que el alumno logra reflejar tres rayos hacia el punto común (el foco), pero no lo hace con los otros dos rayos restantes.

De esta forma, la lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 2.- La propiedad de reflexión		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Recuerda que los rayos (luz, calor, sonido, ondas) caen verticalmente en el cuerpo de la parábola	x	
Mide el ángulo entre el rayo y la tangente correspondiente en el cuerpo de la parábola	x	
Aplica el concepto de ángulos opuestos por el vértice para reflejar el rayo	x	
Construye la reflexión de cada uno de los rayos hacia el foco		x
Explica la propiedad de reflexión geométricamente		x

Tabla 4.55 - Lista de cotejo para el alumno 10 de la actividad 2

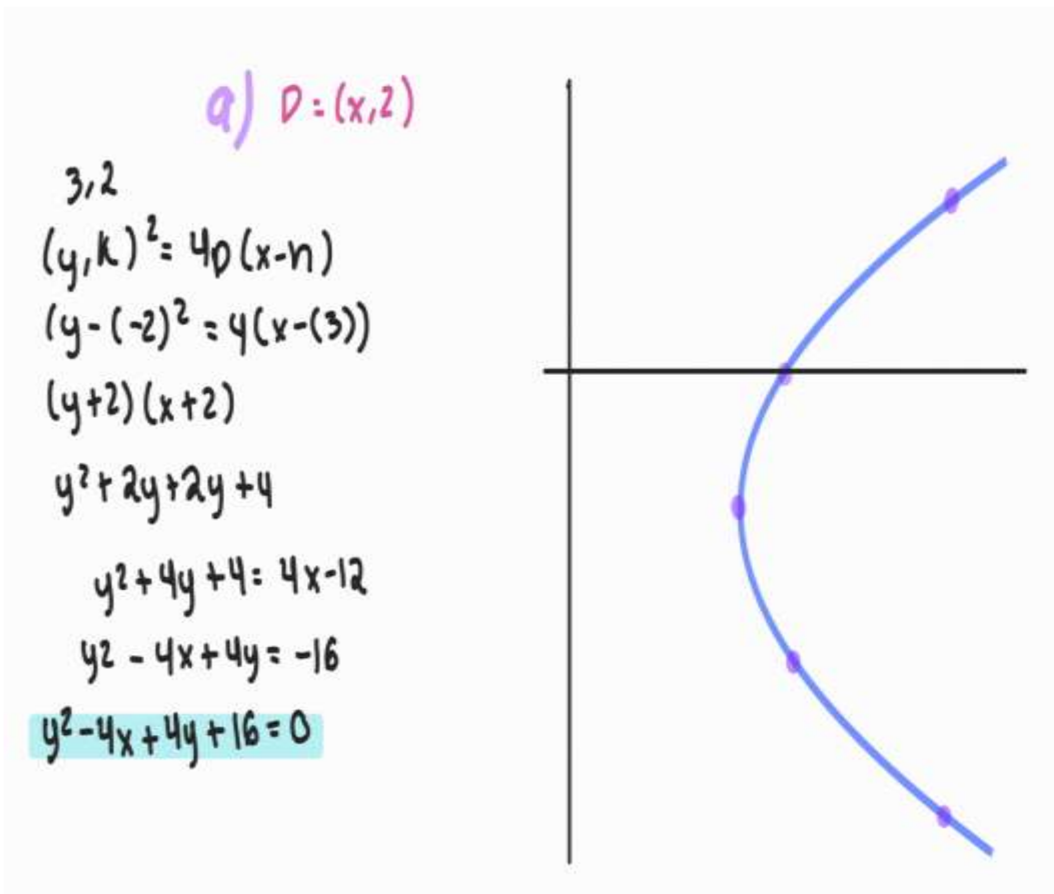
La escala de valoración correspondiente a esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

Tabla 4.56 - Escala de valoración para la actividad 2

Así, la calificación aginada en esta actividad para el alumno 10 es de 6.

La entrega de la actividad 3 del alumno 10 fue:



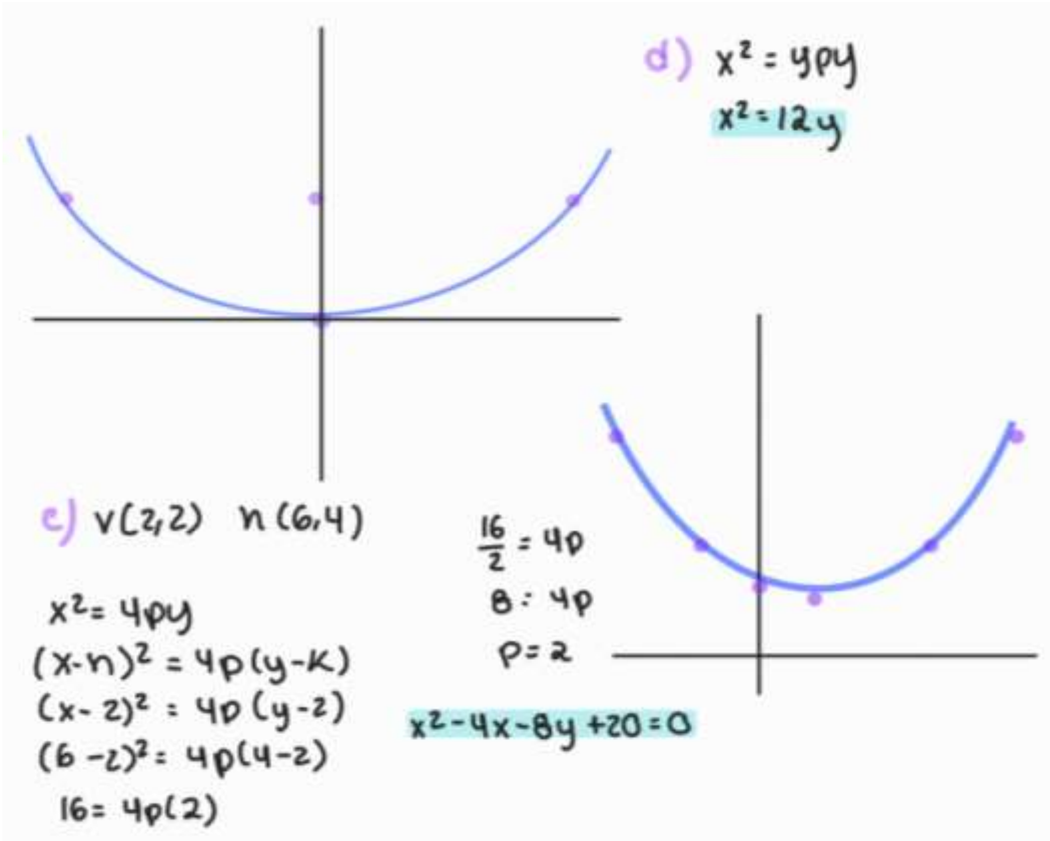


Figura 4.32 - Actividad 3 del alumno 10: Parábolas dados algunos de sus elementos

En el inciso (a) hay una confusión por parte del alumno, ya que el inciso de los ejercicios que contiene *V* (3, -2) es el inciso (b) en realidad (Determine la ecuación general de la parábola con V (3, -2) y F (4, -2). Grafica). Por otro lado, lo escribe erróneamente, pero lo ejecuta de forma correcta, ya que en este ejercicio *F* (4, -2), de tal manera que $p = 1$. Las coordenadas del vértice las escribe correctamente en la ecuación canónica de la parábola, pero en su bosquejo gráfico no incluye escalas, lo que impide valorar el transitar del alumno por el sistema de representación geométrico. En el inciso que marca como (d), en realidad es el inciso (c): Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y F (0, 3). Este ejercicio también lo resuelve de una manera directa y correcta, pero su gráfica carece de escala numérica en los ejes coordenados. Finalmente, el inciso que marca como (e) en realidad es el inciso (d). Los datos son correctos y encuentra el parámetro *p* acertadamente, pero no se visualiza un proceso que lo haya llevado a la obtención de la ecuación general de la parábola, aunque ésta es correcta.

Así, la lista de cotejo para el alumno en esta actividad es:

Actividad 3.- Parábolas dados algunos de sus elementos		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**

Identifica los elementos de la parábola en el plano cartesiano (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p)		x
Elige la ecuación correcta que describe la apertura de la parábola	x	
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos		x

Tabla 4.57 - Lista de cotejo para el alumno 10 de la actividad 3

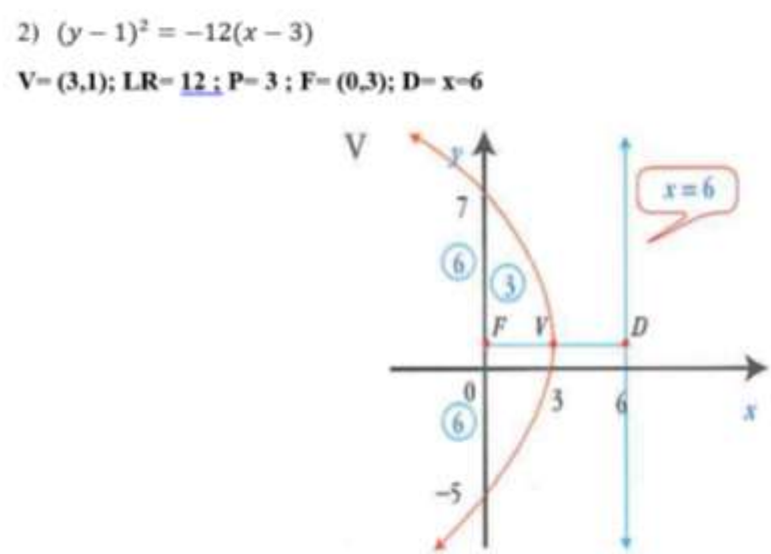
La escala de valoración para esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Cuatro criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Tres criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Dos criterios demostrados	6
D (Insuficiente)	Un criterio demostrado	5

Tabla 4.58 - Escala de valoración para la actividad 3

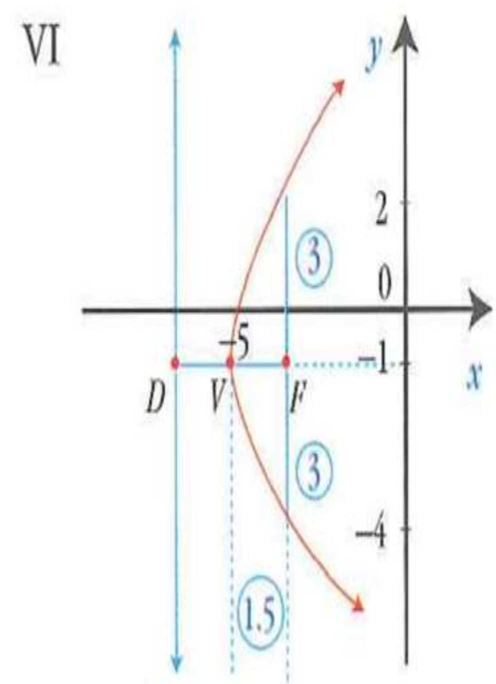
Por tanto, la calificación asignada al alumno 10 por esta actividad es de 6.

La entrega de la actividad 4 del alumno es:



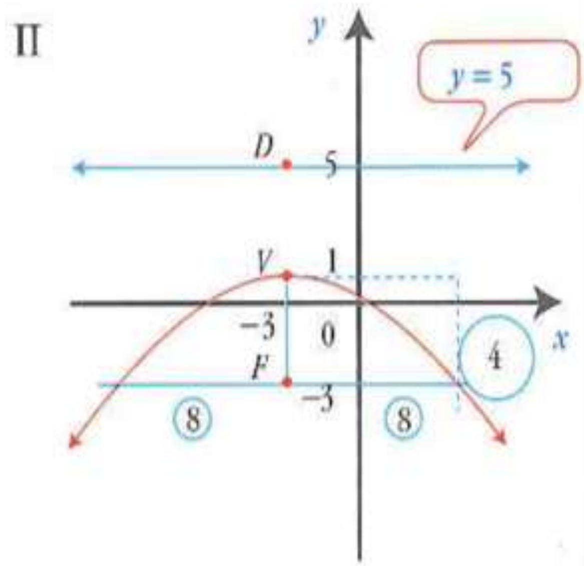
3) $(y+1)^2 = 6(x+5)$

V= (-5,-1); LR= 6; P=3/2 ; F= -7/2; D= X = -13/2



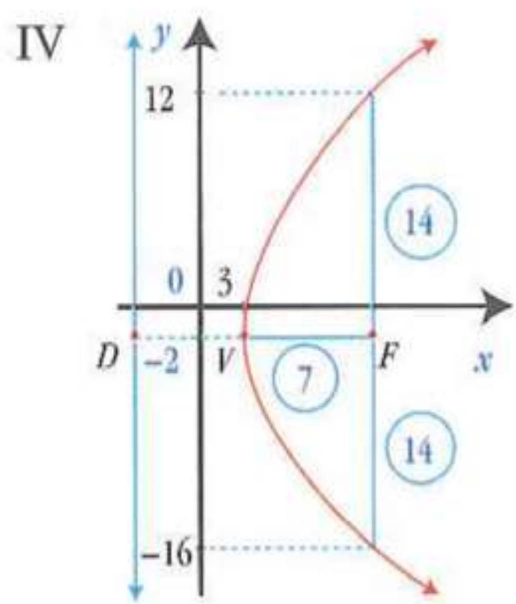
4) $(x+3)^2 = -16(y-1)$

V= (-3,1); LR=16; P=4; F= (-3,-3); D= y=5



5) $(y+2)^2 = 28(x-3)$

V= (3,-2); LR=28; P=7; F= (10,-2); D= X = -4



8) Determina los elementos de la parábola $3y^2 + 24x + 12y + 60 = 0$ y grafica.

$$3y^2 + 12y = -24x - 60$$

$$y^2 + 4y = -8x - 20$$

$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 20 + 4$$

$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 16$$

$$(y + 2)^2 = -8(x + 2)$$

Parabola horizontal que abre a la izquierda.

V= (-2,-2); LR= 8; P=2; F=(-4,-2); D= x=0

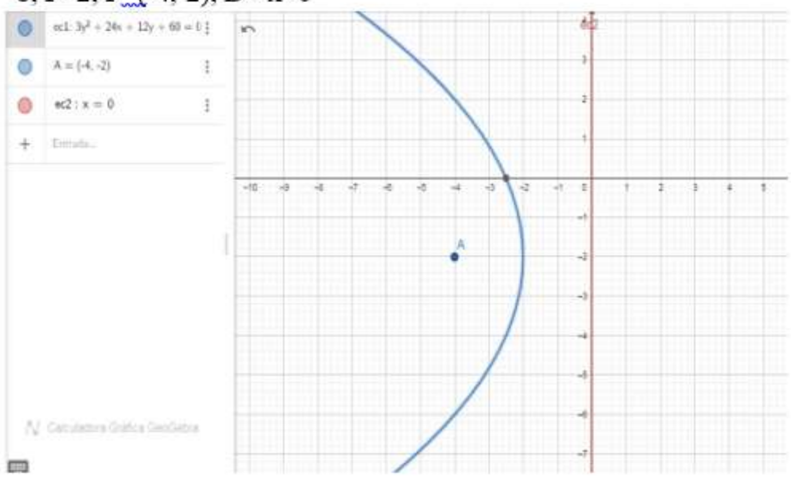


Figura 4.33 - Actividad 4 del alumno 10: Parábolas y sus elementos a partir de su ecuación

Se observa que en el ejercicio (2) el alumno escribe erróneamente las coordenadas del foco, y en el ejercicio (3) no escribe la coordenada en *y* de este elemento, mientras que los ejercicios (4) y (5) son totalmente correctos. El ejercicio (8) también es resuelto de una forma correcta, mostrando dominio algebraico para pasar de la ecuación general a la canónica y encontrar los elementos de la parábola a partir de esta ecuación.

Así, la lista de cotejo para esta actividad es:

Actividad 4.- Parábola y sus elementos a partir de su ecuación		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Identifica el tipo de parábola y su apertura a partir de su ecuación	x	
Identifica los elementos de la parábola (vértice, foco, directriz, lado recto y el parámetro p) a partir de su ecuación y en el plano cartesiano	x	
	x	

Selecciona la gráfica correspondiente a una ecuación dada de la parábola		
Desarrolla procesos aritméticos y algebraicos para obtener la ecuación canónica a partir de la ecuación general	x	
Construye el bosquejo gráfico de la parábola con todos sus elementos a partir de la ecuación canónica obtenida	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 5 ejercicios considerados en esta actividad	x	

Tabla 4.59 - Lista de cotejo para el alumno 10 de la actividad 4

La escala de valoración de esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.60 - Escala de valoración para la actividad 4

Así, la calificación asignada al alumno 10 en esta actividad es de 10.

La entrega del alumno de la actividad 5 fue:

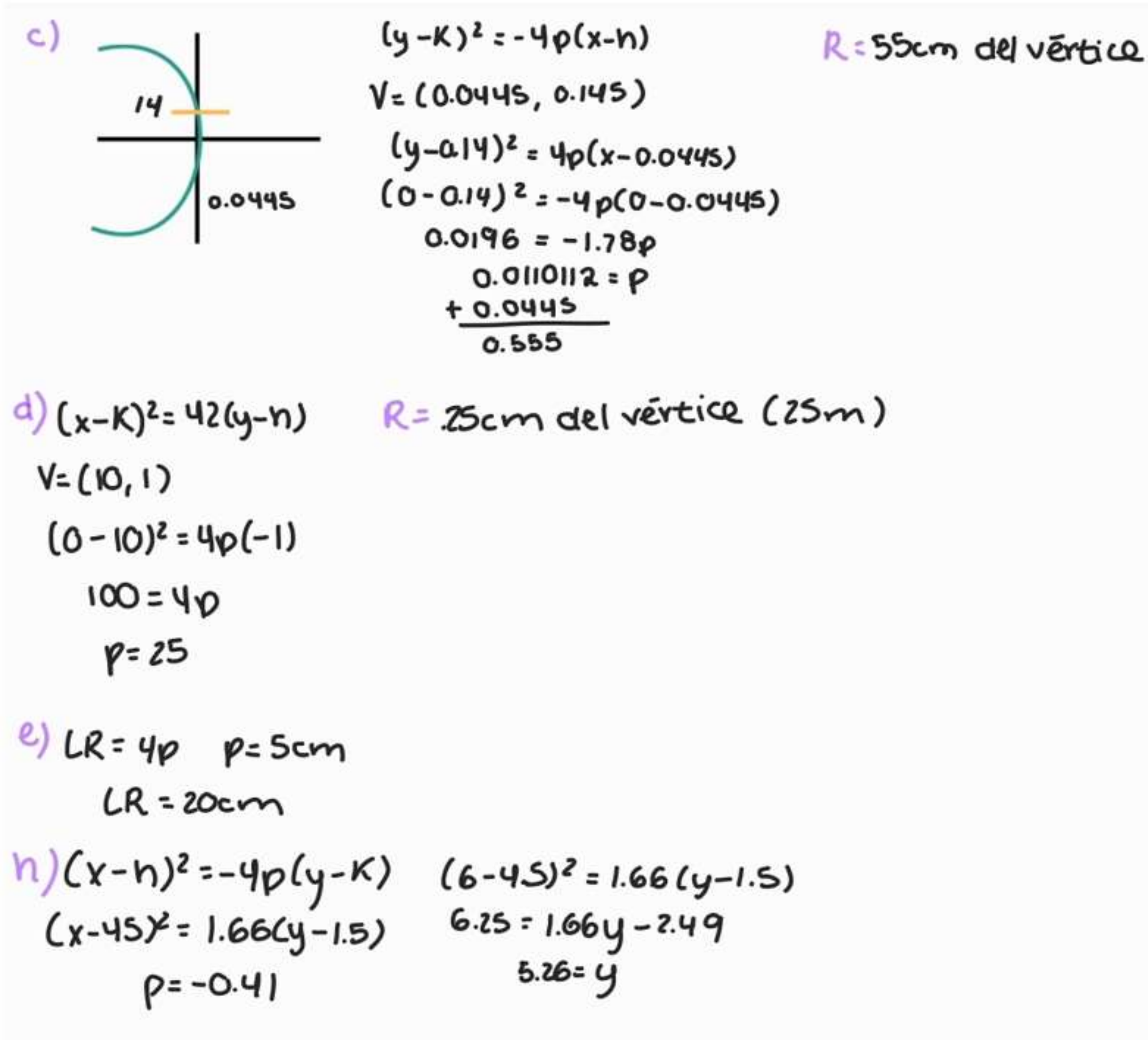


Figura 4.34 - Actividad 5 del alumno 10: Aplicaciones de la parábola

Se observa que en el ejercicio (c) el planteamiento gráfico del problema es erróneo, el vértice es tomado con coordenadas inversas, además de que llama la atención la transformación que hace el alumno a metros cuando el problema está dado en centímetros. A pesar de esto, obtiene un resultado correcto, pero transforma a centímetros nuevamente de una manera errónea, que lo conduce a un resultado incorrecto.

En el inciso (d) llama la atención su desarrollo directo y correcto del ejercicio, pero resulta un detalle interesante que expresa unas medidas incorrectas en la respuesta, ya que resuelve el problema en las unidades dadas (metros) pero posteriormente menciona que son décimas de centímetros, y luego metros. Se aprecia que el alumno tiene dificultades en las unidades de medida y sus conversiones, aunque no eran necesarias.

El ejercicio (e) es correcto.

En el ejercicio (h) no se alcanza a entender el proceso seguido por el alumno, además de que resulta incorrecto.

Así, la lista de cotejo correspondiente para esta actividad es:

Actividad 5.- Aplicaciones de la parábola		
Criterios de evaluación	**Sí**	**No**
Selecciona el modelo parabólico que representa una situación en un contexto real		x
Aplica los elementos parabólicos necesarios para dar solución a la problemática tratada		x
Modela algebraicamente el problema dado a través de la ecuación de la parábola	x	
Modela geométricamente el problema dado a través de la gráfica de la parábola		x
Desarrolla procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en su modelo parabólico para dar solución a la problemática tratada	x	
Demuestra los criterios de evaluación en los 4 ejercicios considerados en esta actividad		x

Tabla 4.61 - Lista de cotejo para el alumno 10 de la actividad 5

La escala de valoración correspondiente a esta actividad es:

Nivel de desempeño	*Valoración de criterios*	*Referencia numérica*
A (Destacado)	Seis criterios demostrados	10
B (Satisfactorio)	Cinco criterios demostrados	8
C (Suficiente)	Cuatro criterios demostrados	7
D (Insuficiente)	Tres o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.62 - Escala de valoración para la actividad 5

Por lo cual, la calificación asignada al alumno en esta actividad es de 5.

Una vez analizadas las evidencias de aprendizaje obtenidas con las actividades en clase como parte de la evaluación formativa, se asigna una calificación global al alumno durante la secuencia, con la finalidad de tener una visión numérica del desempeño del alumno y de su proceso de aprendizaje, tal como lo menciona Díaz – Barriga (2021) : “qué evidencias entrega el alumno durante el curso (…) para de esas evidencias derivar una nota, una calificación (…) La evaluación formativa está articulada tanto a situaciones didácticas (…), como a las evidencias de aprendizaje. Mientras que la calificación se centra sólo en las evidencias, no se centra en el proceso" (minuto 3:46). Así, el profesor asignó a cada actividad un porcentaje determinado, al considerar los criterios de evaluación por actividad, el nivel de dificultad, los objetivos, así como la cantidad de ejercicios en caso de las tres últimas actividades. De esta forma, se tiene el siguiente resumen de calificaciones asignadas:

Tabla de calificaciones finales

Porcentajes	10%	10%	20%	30%	30%	100%
No. de alumno	*Parábola con regla y compás*	*La propiedad de reflexión*	*Parábolas dados algunos de sus elementos*	*Parábola y sus elementos a partir de su ecuación*	*Aplicaciones de la parábola*	**Calificación**
2	10	10	5	10	5	7.5
10	6	6	6	10	5	6.9
14	5	5	10	10	8	8.4
17	10	10	8	10	10	9.6
19	10	10	10	10	5	8.5
Promedios por actividad	8.2	8.2	7.8	10	6.6	8.18

Tabla 4.63 - Calificaciones asignadas a los alumnos a partir del análisis de sus portafolios de evidencias de aprendizaje.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

En esta tabla se puede observar el desempeño promedio por actividad (última fila), la calificación general obtenida por el alumno durante la secuencia al considerar los porcentajes por actividad (última columna), y, finalmente, un promedio de esas calificaciones asignadas de los cinco estudiantes seleccionados.

De acuerdo con el ejemplo de referencia numérica citado anteriormente obtenido de SEP (2013):

Ejemplo de tabla de referencia numérica de acuerdo con el nivel de desempeño

Nivel de desempeño	**Valoración de criterios**	**Referencia numérica**
A Destacado	Nueve criterios demostrados	10
B Satisfactorio	Ocho criterios demostrados	9
	Siete criterios demostrados	8
C Suficiente	Seis criterios demostrados	7
	Cinco criterios demostrados	6
D Insuficiente	Cuatro o menos criterios demostrados	5

Tabla 4.64 - Escala de valoración de criterios. Fuente: (SEP, 2013, p. 50)

Se observa que los alumnos, adquirieron un nivel de desempeño “Satisfactorio”, al obtener el promedio general en 8.18. A la vez, se puede observar como detalles importantes del proceso de aprendizaje, que hay una mejora considerable de la actividad “parábolas dados algunos de sus elementos”, a la actividad “parábola y sus elementos a partir de su ecuación”. Ambas actividades están muy relacionadas al contener procesos aritméticos, algebraicos y geométricos en sus procesos, además de que el alumno debe ser capaz de pasar de un sistema de representación a otro. Dicha mejora nos habla del aspecto positivo en su aprendizaje y de un dominio progresivo del tema; es una muestra clara de la evolución de su aprendizaje. Otro detalle son las actividades y resultados del alumno 17. Todas sus actividades las realiza satisfactoriamente, pero lo más importante es que, con base a su evaluación formativa, el alumno desarrolla su habilidad de aplicación y transferencia, así como llega al nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele. De hecho, en esta actividad 5 “aplicaciones de la parábola”, los alumnos alcanzan un nivel “Suficiente” en promedio. Se debe trabajar en mejorar la estrategia en este sentido para que los alumnos logren aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones reales al desarrollar su habilidad de aplicación y transferencia, así como alcanzar el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele. Incluso, se puede decir que dicho nivel se alcanzó en el grupo al menos en un nivel “Satisfactorio”.

Otro punto que destacar es el hecho de tener sólo cinco portafolios completos. El grupo tiene un total de 24 alumnos, entonces, cinco alumnos representan poco más del 20%. Pero si se considera que 11 alumnos no entregaron actividad alguna, se podría decir que se trabajó con 13 alumnos, lo que se traduce en que **5 portafolios completos representan casi el 40% del grupo**. Se desconoce el motivo por el cual algunos alumnos cumplieron de forma parcial o nula con las actividades. Los resultados de sus evaluaciones a través de la misma lista de cotejo y escala de valoración son los siguientes:

Resultados de la evaluación formativa a través del portafolio de evidencias

No. de alumno	*Parábola con regla y compás*	*La propiedad de reflexión*	*Parábolas dados algunos de sus elementos*	*Parábola y sus elementos a partir de su ecuación*	*Aplicaciones de la parábola*
1	NP	NP	NP	NP	NP
2	10	10	5	10	5
3	NP	NP	NP	NP	NP
4	10	NP	6	NP	NP
5	10	NP	NP	NP	NP
6	NP	NP	NP	NP	NP
7	10	10	NP	10	NP
8	10	10	6	NP	NP
9	10	NP	NP	NP	NP
10	6	6	6	10	5
11	NP	NP	NP	NP	NP
12	NP	NP	NP	NP	NP

13	10	NP	7	NP	5
14	5	5	10	10	8
15	NP	NP	NP	NP	NP
16	NP	NP	NP	NP	NP
17	10	10	8	10	10
18	10	NP	5	8	NP
19	10	10	10	10	5
20	NP	NP	NP	NP	NP
21	NP	NP	NP	NP	NP
22	10	5	6	NP	NP
23	NP	NP	NP	NP	NP
24	NP	NP	NP	NP	NP

Tabla 4.65 - Calificaciones asignadas por alumno y actividad. Elaboración propia: JLBM

Como se mencionó, hay 11 alumnos que no entregaron actividad alguna, y 8 que entregaron algunas actividades y otras no. La razón de esto puede ser atribuida a muchos factores, como la motivación, el ambiente del aula para el aprendizaje, las estrategias del profesor, el poco interés y compromiso de los alumnos hacia alguien que no es su profesor titular, entre otros. Sin embargo, también se debe tomar en cuenta lo que comenta Díaz – Barriga (2019) al respecto: "Se aprende sólo lo que se desea aprender; se aprende sólo lo que uno quiere aprender. Los docentes podemos hacer que los alumnos hagan trabajos, respondan un cuestionario a una lectura que les dejamos. Lo que no podemos hacer, es que ese trabajo que hacen lo hagan para aprender (…) La voluntad del alumno no puede ser forzada" (minuto 17:19).

Para complementar la evaluación formativa, el otro instrumento usado para este fin fue el diario de la clase, a través de la técnica de observación asistemática, de donde resultó la bitácora que el lector observó en el capítulo de "La implementación del proyecto de trabajo".

4.4. Evaluación sumativa: la prueba post- test

Finalmente, se realizó la evaluación sumativa a través de la técnica de interrogatorio, con los instrumentos de prueba escrita y autoevaluación.

Dicha prueba escrita, la prueba post-test, busca evaluar los conocimientos adquiridos y mostrar un contraste del antes y después de la secuencia referente a las habilidades geométricas del alumno. Las preguntas fueron diseñadas para realizar este contraste de acuerdo con las problemáticas específicas de corte aritmético, algebraico y geométrico en el proceder del alumno al enfrentarse a un ejercicio o problema de este tipo.

Los reactivos de dicha prueba, su diseño, así como los objetivos particulares de cada uno, se describieron en el capítulo "El diseño de las estrategias didácticas". A continuación, se analizarán los resultados de dicha prueba.

La prueba post- test se aplicó a veinte alumnos de manera presencial, dos en línea y dos no presentaron. Resultó favorable contar con la mayor cantidad posible de alumnos en la prueba presencial, lo que tiene mayor probabilidad de arrojar resultados más confiables. Ambos alumnos que presentaron el post-test en línea obtuvieron 10 de calificación, y se desconoce la razón de por qué no presentaron los otros dos alumnos.

En la siguiente tabla se muestra el promedio general del grupo. Las calificaciones coloreadas de verde representan a los alumnos que realizaron el examen en línea. Se asentó la leyenda "NP" a los alumnos que no hicieron el examen, y no fueron considerados dentro del promedio del grupo.

Tabla de los resultados del post-test

No. de alumno	*Prueba post-test*
1	5
2	7.5
3	9.5
4	7.5
5	9.5
6	NP
7	6.5
8	10
9	7.5
10	6
11	7.5
12	4
13	9
14	9.5
15	5
16	7.5
17	3.5
18	10
19	7
20	9.5
21	NP
22	5
23	5.5
24	7.5
Promedio	7.25

Tabla 4.66 - Resultados y promedio grupal de la prueba post-test

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por alumno, así como el promedio grupal en las pruebas pre-test y post-test. Las calificaciones de color verde representan a los alumnos que hicieron las pruebas en línea, y los alumnos coloreados de azul son los alumnos que entregaron un portafolio de actividades completo:

Tabla comparativa de prueba pre-test y post-test

No. de alumno	*Prueba pre-test*	*Prueba post-test*
1	9.5	5
2	5	7.5
3	3	9.5
4	2.5	7.5
5	7	9.5
6	NP	NP
7	7	6.5
8	4	10
9	7.5	7.5
10	6.5	6
11	NP	7.5
12	1	4
13	3.5	9
14	2.5	9.5
15	4.5	5
16	4.5	7.5
17	8	3.5
18	7	10
19	9.5	7
20	5	9.5
21	NP	NP
22	4	5
23	NP	5.5
24	0.5	7.5
Promedio	5.1	7.25

Tabla 4.67 - Resultados de las pruebas pre-test y post-test por alumno y sus promedios

En general, hay un aumento considerable en el promedio del grupo. Si se separan las modalidades (presencial y en línea) se puede ver también que hay un aumento en ambas:

Gráfica comparativa de los promedios de las pruebas pre-test y post-test

Figura 4.35 - Gráfica de los resultados promedio de las pruebas pre-test y post-test por modalidad.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Se debe tener en cuenta que, a pesar de que la modalidad es híbrida sincrónica y el grupo es uno solo, es importante considerar los resultados de manera “separada”, es decir, entre presenciales y en línea, debido a la posibilidad que los alumnos tienen de realizar la prueba. Los alumnos que realizan las pruebas presenciales no tuvieron ayuda alguna de ningún tipo, ni siquiera de sus propios apuntes. Es posible que entre ellos comentaran respuestas, procedimientos sin que el profesor se percate de ello, o incluso hacer uso discreto del celular, sin embargo, no es lo mismo que realizar dicha prueba solo, con cualquier tipo de ayuda a la mano como un software, los apuntes, un compañero, e incluso, hasta un profesor. Evidentemente, no hay forma de constatar lo anterior, pero es una situación inevitable en la modalidad. Por ello, el hecho de visualizar las dos modalidades arroja un panorama más amplio de los resultados.

El detalle más importante para considerar es el énfasis en los alumnos que tienen su portafolio completo, ya que son sus portafolios de donde se puede observar la evolución de su aprendizaje y la veracidad de sus resultados. Dicha evolución puede observarse en la tabla 4.68:

Evaluación de alumnos con evidencias completas

No. de alumno	*Examen pre-test*	*Parábola con regla y compás*	*La propiedad de reflexión*	*Parábolas dados algunos de sus elementos*	*Parábola y sus elementos a partir de su ecuación*	*Aplicaciones de la parábola*	*Examen post-test*
2	5	10	10	5	10	5	7.5
10	6.5	6	6	6	10	5	6
14	2.5	5	5	10	10	8	9.5

17	8	10	10	8	10	10	3.5
19	9.5	10	10	10	10	5	7
Promedio	6.3	8.2	8.2	7.8	10	6.6	6.7

Tabla 4.68 – Evolución del aprendizaje de alumnos con evidencias completas

Se puede observar que todos los alumnos tienen una evolución favorable en su aprendizaje. En promedio hay un aumento sólo en décimas respecto del pre – test y el post-test, pero no se debe pasar por alto el detalle de que esta última prueba se realizó de manera presencial. Los alumnos que mostraron un desempeño ejemplar en esta prueba son los alumnos 2 y 14.

A continuación, se muestra un análisis de los resultados por pregunta de la modalidad presencial, junto con sus gráficos respectivos. De la modalidad en línea no hay mucho que analizar debido a que ambos alumnos obtuvieron 10 de calificación.

<u>Pregunta 1</u>: Determine la ecuación general de la parábola con F (-2, -4) y directriz x - 2 = 0

e) $y^2 + 8y - 8x + 16 = 0$
f) $y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$
g) $y^2 + 8y + 8x + 16 = 0$
h) $y^2 - 8y + 8x + 16 = 0$

Respuestas de la pregunta 1 de la prueba post-test

Figura 4.36 - Gráfica de respuestas de la pregunta 1 de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

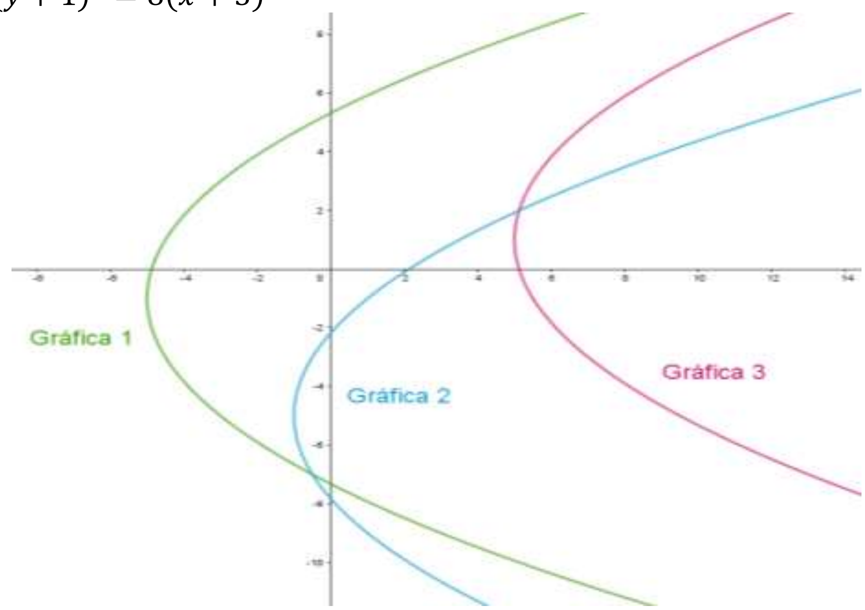
La respuesta correcta es la opción (c). Este resultado refleja que el 30% de los alumnos mantiene esta problemática de falta de relación entre los elementos de una cónica, así como deficiencia de relación analítica de la ecuación con los elementos de la cónica, en este caso de la parábola, así como de su habilidad lógica y de razonamiento. Este porcentaje que representa una mejora considerable al comparar con el 42% y 83% de estudiantes con esta problemática en línea y presencial respectivamente de la prueba pre-test.

La pregunta 2 se divide en 5 incisos, cuyo objetivo general es detectar problemas en pasar de un sistema de representación a otro, así como de trabajo algebraico, problemas con la habilidad de visualización y dibujo. Se pretende observar la proporción de estudiantes que presenten dificultad en reconocer los elementos de una ecuación y relacionarlos con su gráfica, así como problemas al relacionar de manera correcta una representación algebraica con una geométrica.

A continuación, se muestran los resultados de los 5 incisos de esta pregunta.

<u>Pregunta 2</u>: En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

<u>Inciso a</u>: $(y+1)^2 = 8(x+5)$



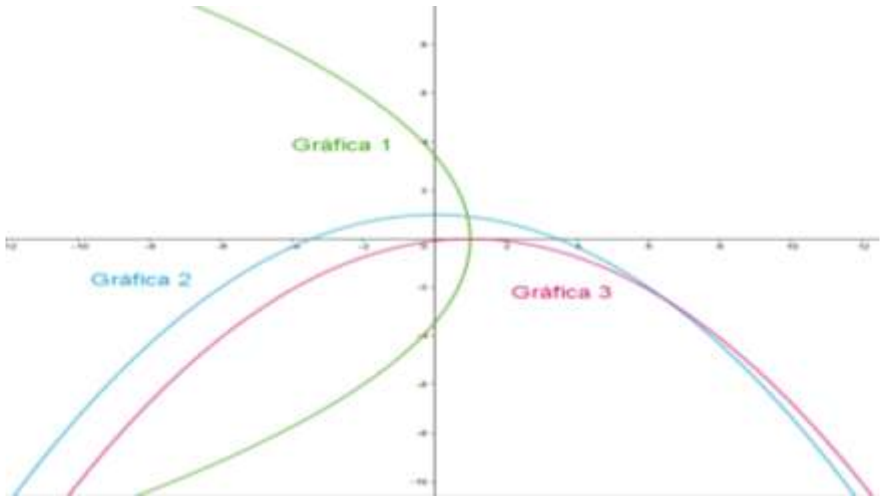
Respuestas de la pregunta 2, inciso (a) de la prueba post-test

Figura 4.37 - Gráfica de respuestas de la pregunta 2 (a) de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 1. El resultado muestra que sólo 15% de alumnos tienen aún problemas en pasar de un sistema de representación a otro, así como en relacionar los elementos de la parábola a partir de su ecuación con la gráfica y en su habilidad de visualización y dibujo. Este porcentaje representa una mejora significativa respecto del pre-test, donde el porcentaje correspondiente a la modalidad presencial fue del 50% y 21.5% en línea.

Inciso b: $x^2 = -12(y-1)$



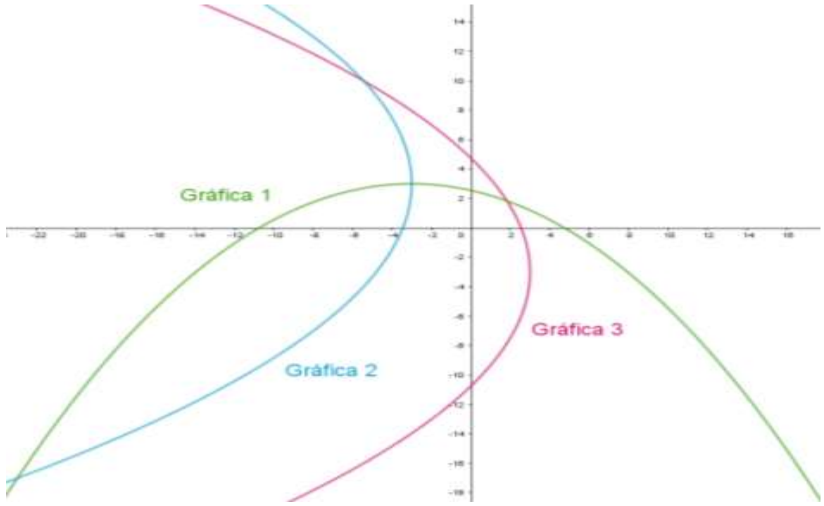
Gráfica de respuestas de la pregunta 2, inciso (b) de la prueba post-test

Figura 4.38 - Gráfica de respuestas de la pregunta 2 (b) de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 2. Al igual que en la pregunta anterior, estos problemas de pasar de un sistema de representación a otro, así como relacionar los elementos de la parábola a partir de su ecuación con la gráfica, y con su habilidad de visualización y dibujo, siguen presentes en 25% de los alumnos, muy por debajo de los porcentajes obtenidos en el pre-test, 83% en presencial y 36% en línea.

<u>Inciso c</u>: $(y+3)^2 = -20(x-3)$



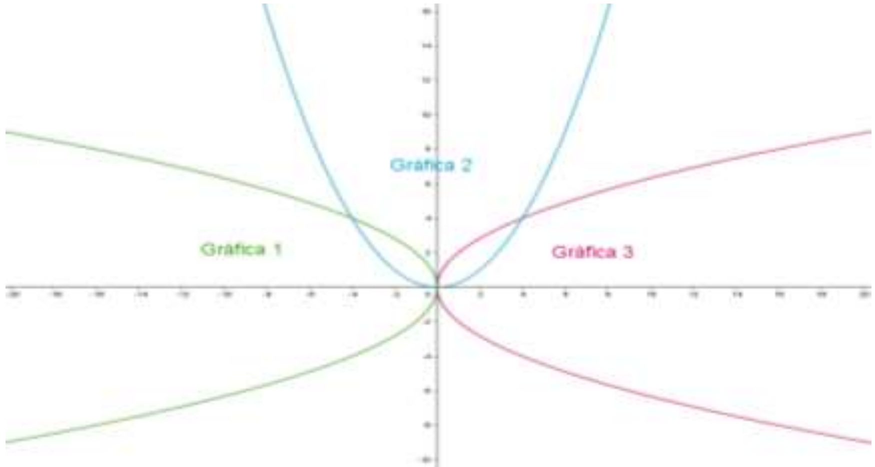
Gráfica de respuestas de la pregunta 2, inciso (c) de la prueba post-test

Figura 4.39 - Gráfica de respuestas de la pregunta 2 (c) de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 3. Sólo 10% de los alumnos presentaron la misma problemática anterior. Porcentaje que representa una mejora en comparación con más del 66% de la modalidad presencial y 14% de modalidad en línea del pre-test.

<u>Inciso d</u>: $y^2 = 4x$



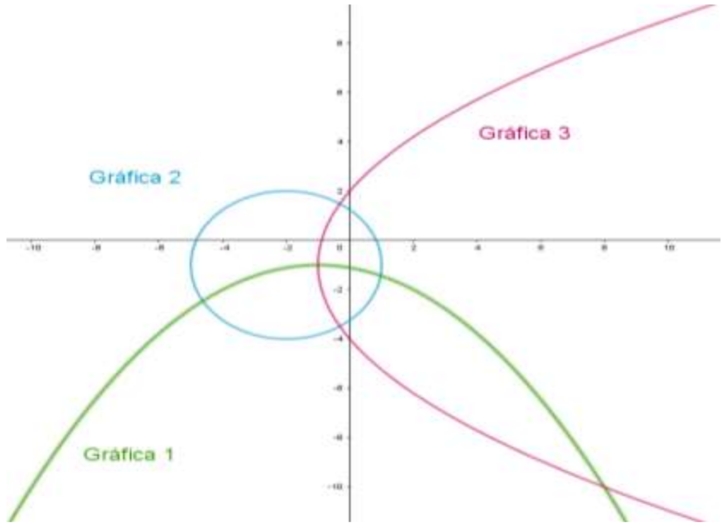
Gráfica de respuestas de la pregunta 2, inciso (d) de la prueba post-test

Figura 4.40 - Gráfica de respuestas de la pregunta 2 (d) de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la gráfica 3. Se nota que el 20% contestan erróneamente al caer en las mismas problemáticas mencionadas anteriormente. Este porcentaje es difícil de comparar con los presenciales del pre-test, ya que 50% no contestaron la pregunta, y de los alumnos en línea en dicha prueba, poco más del 14% contestaron erróneamente.

<u>Inciso e</u>: $(x+2)^2 = -(y+1)^2 + 9$



Gráfica de respuestas de la pregunta 2, inciso (e) de la prueba post-test

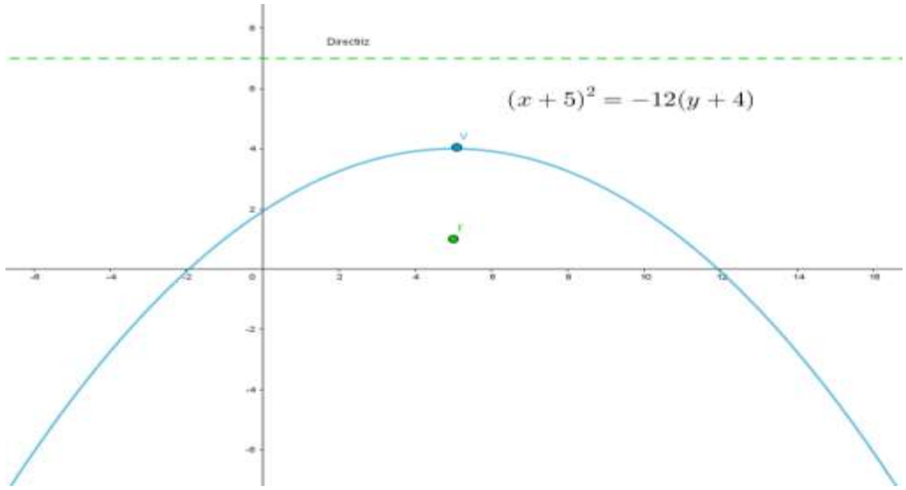
Figura 4.41 - Gráfica de respuestas de la pregunta 2 (e) de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

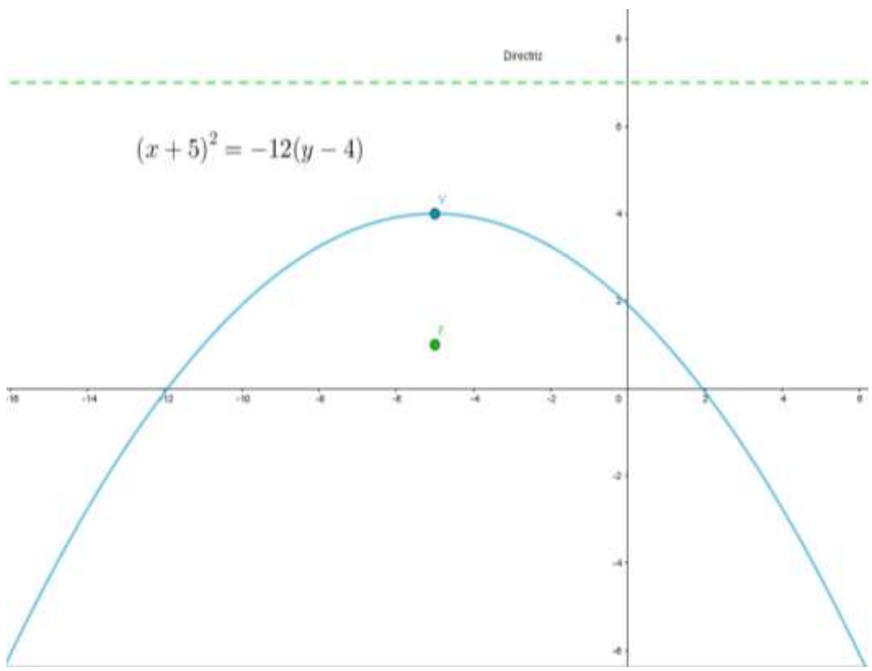
La respuesta correcta es la gráfica 2. Esta pregunta, además de estar relacionada con los incisos anteriores para medir las mismas problemáticas, tiene la particularidad de reflejar si el alumno es capaz de distinguir entre las ecuaciones de las cónicas. Se obtuvo que el 70% de los alumnos presenciales fue capaz de hacerlo, lo que implica error en el 30%, pero comparado con la modalidad presencial de pre-test del 66% representan una mejora considerable.

Pregunta 3: La gráfica que muestra todos los elementos correctos de la ecuación $x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$, es:

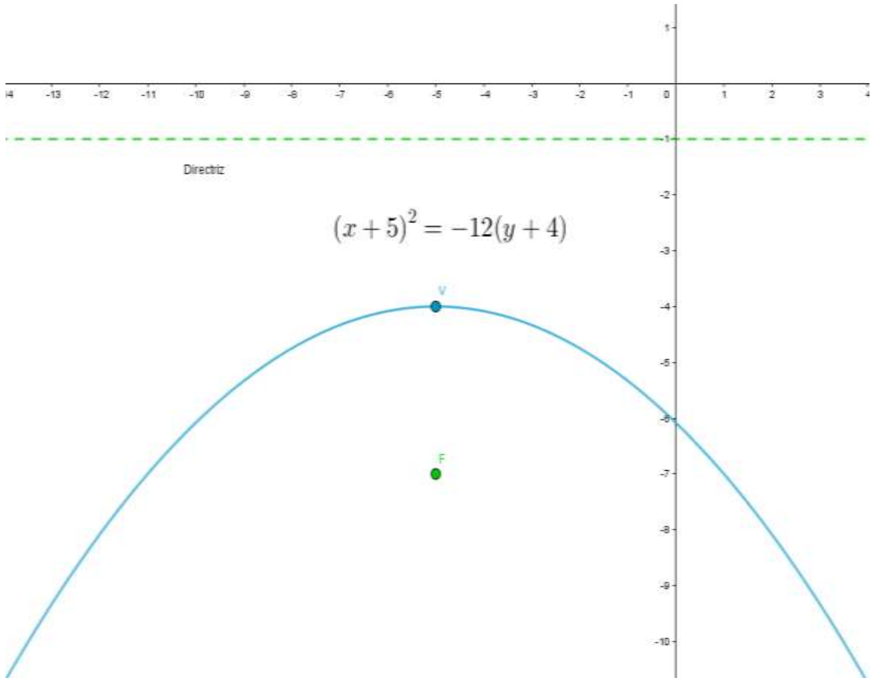
a)



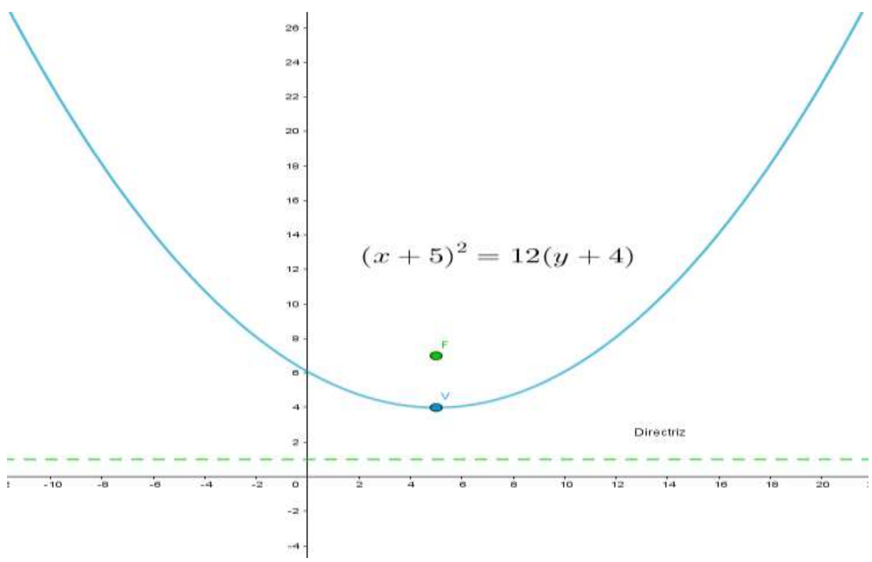
b)



c)



d)



Gráfica de respuestas de la pregunta 3 de la prueba post-test

Figura 4.42 - Gráfica de respuestas de la pregunta 3 de la prueba post-test.

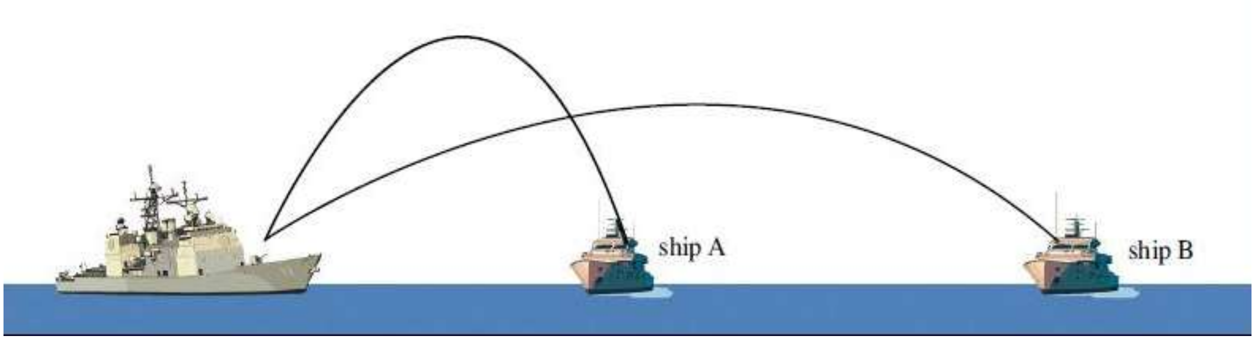
Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (c). Este reactivo representa el proceso inverso de la pregunta 1, es decir, medir la falta de conocimientos algebraicos para encontrar los elementos de la cónica, además, problemas de realizar álgebra al establecer la relación algebraica con una geométrica, así como en su habilidad lógica y de razonamiento. Sólo 35% de los estudiantes muestra estos problemas, pero representa una mejora respecto con el 50% obtenido en el pre-test de la modalidad presencial en la pregunta análoga.

<u>Pregunta 4</u>: Dentro del inmenso arsenal de armas del ejército ruso, están unos poderosos cañones de largo alcance fabricados en Inglaterra, que transportan en barco. Este cañón cuenta con la siguiente leyenda de fabricación:

> The parabolic throw described by this product with an average angle of inclination of 35°, is given by the mathematical equation:
>
> $$3d^2 - 6000d + 20000h = 0$$
>
> With: h = height / d = horizontal distance
>
> Made in England, 2014

El barco tiene en la mira dos embarcaciones extranjeras, como muestra la imagen. El general de la embarcación rusa da la orden a los militares de disparar al barco B, y los militares ajustan el cañón precisamente a 35°, haciendo un disparo perfecto. En estas condiciones, ¿a qué distancia horizontal alcanzó el disparo su máxima altura?



a) La altura máxima del disparo fue de 450mts y ocurre a una distancia horizontal de 3000mts.
b) La altura máxima del disparo fue de 150mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.
c) La altura máxima del disparo fue de 50mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.
d) La altura máxima del disparo fue de 3000mts y ocurre a una distancia horizontal de 450mts.

Gráfica de respuestas de la pregunta 4 de la prueba post-test

Figura 4.43 - Gráfica de respuestas de la pregunta 4 de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (b). Esta pregunta muestra que el 35% de los estudiantes presenciales mantienen los problemas con la representación de fenómenos de la cotidianidad, es decir, con su habilidad de aplicación y transferencia, ya que no aplican correctamente conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas. De la prueba pre-test se obtuvo que los alumnos presenciales ninguno pudo contestar correctamente la pregunta, y que en más del 57% de los alumnos en línea tampoco pudo hacerlo. Esto subrayó a la modelación como el área de oportunidad más importante a mejorar en este grupo, lo que representa un resultado muy positivo.

Pregunta 5: Con referencia al problema anterior, ¿a qué distancia se encuentra el barco B de la tripulación rusa?

a) El barco B está a 20,000mts de distancia (lado recto de la parábola)
b) El barco B, por simetría de la parábola, está a 6000 m de distancia.
c) El barco B, por simetría de la parábola, está a 2000 m de distancia.
d) El barco B está a $\frac{20000}{3}m$ de distancia

Gráfica de respuestas de la pregunta 5 de la prueba post-test

Figura 4.44 - Gráfica de respuestas de la pregunta 5 de la prueba post-test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La respuesta correcta es la opción (c). De nueva cuenta, 35% de los estudiantes presenciales tiene problemas con habilidad de aplicación y transferencia, ya que no aplican correctamente conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas. Aunque parezca negativo, dicho porcentaje fue reducido considerablemente respecto del pre-test, donde se obtuvo a más del 66% de los alumnos presenciales y 64% de los alumnos en línea con esta problemática.

Para la observación de la prueba post-test tal como fue aplicada a los alumnos, el lector puede consultar el anexo número 4.

4.5. Autoevaluación: cuestionario de autoevaluación

Para la autoevaluación, se aplicó un cuestionario a los alumnos que busca obtener datos acerca de la percepción de su propio aprendizaje y de sus conocimientos adquiridos como parte de la estrategia seguida por el profesor. Las preguntas fueron elaboradas con base a lo revisado durante las sesiones, a lo que el profesor trató de enseñar, así como a las problemáticas de aprendizaje de la parábola y la geometría expuestas en esta investigación.

Para la aplicación de dicho cuestionario, se elaboró en Google Formularios, el cual recibió respuestas durante 2 semanas y fue respondido por 14 alumnos, como se detalla a continuación:

Tabla de registro de autoevaluación

Número de alumno	¿Realizó autoevaluación?
1	No
2	Sí
3	No
4	No
5	Sí
6	Sí
7	Sí
8	Sí
9	No
10	No
11	No
12	Sí
13	Sí
14	Sí
15	Sí
16	Sí
17	Sí
18	No
19	Sí
20	Sí
21	Sí
22	No
23	No
24	No

Tabla 4.69 - Alumnos que realizaron autoevaluación.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Los alumnos en azul son aquellos que tuvieron un portafolio de evidencias completo, mientras que los alumnos en rojo son aquellos que no entregaron actividad alguna. Se debe resaltar que, de estos alumnos, 5 de ellos tampoco realizaron autoevaluación, sin embargo, 6 de ellos sí lo hicieron pese a no haber entregado actividades. Esto es un detalle importante que hay que tomar en cuenta, debido a que, a pesar de no haber entregado actividades, tienen una perspectiva de su propio aprendizaje.

La estructura y resultados se detallan a continuación:

Instrucciones: *Lee cuidadosamente cada una de las siguientes oraciones. De acuerdo con las sesiones del tema de parábola, elige la opción que consideres describe mejor tus aprendizajes.*

Al pensar en un ejercicio / problema de la parábola, tú puedes:

1) Reconocer la parábola y sus elementos

   a) Siempre
   b) La mayoría de las veces
   c) En pocas ocasiones
   d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 1

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	4	28.6%
La mayoría de las veces	10	71.4%
En pocas ocasiones	0	0.0%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.70 - Resultados de la pregunta 1 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

2) Integrar la relación existente entre el vértice, el foco y la directriz, a través del parámetro p

   a) Siempre
   b) La mayoría de las veces
   c) En pocas ocasiones
   d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 2

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	6	42.9%
La mayoría de las veces	5	35.7%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.71 - Resultados de la pregunta 2 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

3) Visualizar la relación entre la amplitud de la parábola y su lado recto

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 3

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	7	50.0%
La mayoría de las veces	6	42.9%
En pocas ocasiones	1	7.1%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.72 - Resultados de la pregunta 3 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

Para efectos de esta encuesta, se entiende como "respuesta favorable", la opción de respuesta "siempre" y "la mayoría de las veces". Al sumar sus porcentajes respectivos, se obtiene el porcentaje de respuesta favorable de dicha pregunta. Así, de los porcentajes de respuestas favorables de las preguntas 1, 2 y 3, que son 100%, 78.6 y 92.9% respectivamente, nos habla de la percepción de los alumnos del desarrollo de sus habilidades de visualización al reconocer a la parábola y sus elementos, así como habilidad para argumentar y de abstracción de propiedades (lógica y de razonamiento) al establecer las relaciones entre los elementos de la parábola.

4) Construir la gráfica de una parábola tanto manual como digitalmente

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 4

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	5	35.7%
La mayoría de las veces	6	42.9%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.73 - Resultados de la pregunta 4 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

De estas respuestas se puede inferir que el 78.6% (respuestas favorables) de los alumnos perciben el desarrollo principalmente de su habilidad gráfica, tanto manual como digitalmente.

5) Determinar la ecuación canónica de una parábola con V (*h*, *k*) dados algunos de sus elementos

   a) Siempre
   b) La mayoría de las veces
   c) En pocas ocasiones
   d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 5

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	5	35.7%
La mayoría de las veces	5	35.7%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	2	14.3%
Total	14	100.0%

Tabla 4.74 - Resultados de la pregunta 5 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

6) Identificar el tipo de parábola, la orientación de su apertura, el vértice, la longitud del lado recto, así como su parámetro *p*, a partir de su ecuación canónica.

   a) Siempre
   b) La mayoría de las veces
   c) En pocas ocasiones
   d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 6

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	6	42.9%
La mayoría de las veces	5	35.7%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.75 - Resultados de la pregunta 6 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

De las respuestas a las preguntas 5 y 6, con 71.4% y 78.6% de porcentajes de respuestas favorables, se puede decir que los alumnos se perciben con la habilidad para abstraer elementos de la parábola a partir de sus ecuaciones (habilidad lógica y de razonamiento), habilidad visual y de dibujo, así como la capacidad para transitar entre los diferentes sistemas de representación de la parábola.

7) Identificar los elementos de una parábola a partir de su gráfica.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 7

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	3	21.4%
La mayoría de las veces	8	57.1%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.76 - Resultados de la pregunta 7 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

8) Determinar la ecuación de una parábola a partir de su gráfica.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 8

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	4	28.6%
La mayoría de las veces	6	42.9%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	2	14.3%
Total	14	100.0%

Tabla 4.77 - Resultados de la pregunta 8 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

De la pregunta 7 y 8 se puede inferir que los alumnos se perciben con una habilidad de dibujo desarrollada; habilidad de abstracción de las características y propiedades de la parábola a partir de su gráfica (habilidad lógica y de razonamiento), así como habilidad visual, con porcentajes de 78.5% y 71.5% de respuestas favorables con esta autoconcepción positiva respectivamente.

9) Aplicar las operaciones algebraicas (desarrollar binomios, sumar términos algebraicos e igualar a cero) necesarias para determinar la ecuación general de una parábola a partir de su ecuación canónica

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 9

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	6	42.9%
La mayoría de las veces	4	28.6%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	2	14.3%
Total	14	100.0%

Tabla 4.78 - Resultados de la pregunta 9 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

10) Aplicar las operaciones algebraicas necesarias (completar cuadrados, sumar términos algebraicos e identificar la ecuación canónica resultante) para determinar la ecuación canónica de una parábola a partir de su ecuación general

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 10

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	4	28.6%
La mayoría de las veces	5	35.7%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	2	14.3%
Total	14	100.0%

Tabla 4.79 - Resultados de la pregunta 10 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

11) De las operaciones algebraicas mencionadas en las dos preguntas anteriores, ¿hay alguna que se te siga dificultando?

a) Completar cuadrados
b) Sumar términos algebraicos

c) Desarrollar binomios
d) Identificar la ecuación canónica resultante
e) No tengo problemas con ninguna operación

Tabla de respuestas de la pregunta 11

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Completar cuadrados	0	0.0%
Sumar términos algebraicos	1	7.1%
Desarrollar binomios	2	14.3%
Identificar la ecuación canónica resultante	4	28.6%
No tengo problemas con ninguna operación	7	50.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.80 - Resultados de la pregunta 11 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

De las preguntas 9, 10 y 11, con porcentajes de respuestas favorables de 71.5%, 64.3% y 50% respectivamente, se puede inferir que los alumnos se perciben con las habilidades algebraicas necesarias para pasar de una ecuación a otra de la parábola, es decir, perciben el desarrollo de su habilidad de comunicación algebraica, así como su habilidad para seguir una serie de argumentos lógicos (habilidad lógica y de razonamiento).

12) Establecer una correcta relación entre la ecuación y la gráfica de una parábola

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 12

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	3	21.4%
La mayoría de las veces	9	64.3%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	0	0.0%
Total	14	100.0%

Tabla 4.81 - Resultados de la pregunta 12 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

De esta pregunta se puede inferir que el 85.7% de los alumnos se perciben con la capacidad para establecer una relación entre la ecuación y la gráfica de una parábola, lo que implica el desarrollo de habilidad visual, así como de abstracción de propiedades de cuerpos geométricos (habilidad lógica y de razonamiento) y de dibujo (al analizar la gráfica para establecer una correcta relación).

13) Resolver problemas reales que impliquen la aplicación de un modelo parabólico.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 13

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	1	7.1%
La mayoría de las veces	7	50.0%
En pocas ocasiones	5	35.7%
Nunca	1	7.1%
Total	14	100.0%

Tabla 4.82 - Resultados de la pregunta 13 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

Esta pregunta es la más importante de todas, ya que la aplicación de lo aprendido, la capacidad de modelación matemática representa el punto cumbre del conocimiento y la apropiación del objeto matemático (véase el capítulo “La enseñanza de la geometría analítica y la parábola”), que se traduce en el desarrollo de la habilidad de aplicación y transferencia, íntimamente relacionada con el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele, objetivo a alcanzar en esta investigación. El 57.1% de los encuestados se perciben de esta manera, dato que resulta bastante significativo.

14) Expresar el desarrollo y resultados del ejercicio / problema de manera algebraica.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 14

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	5	35.7%
La mayoría de las veces	6	42.9%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	1	7.1%
Total	14	100.0%

Tabla 4.83 - Resultados de la pregunta 14 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

15) Expresar el desarrollo y resultados del ejercicio / problema de manera gráfica.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 15

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	4	28.6%
La mayoría de las veces	6	42.9%
En pocas ocasiones	3	21.4%
Nunca	1	7.1%
Total	14	100.0%

Tabla 4.84 - Resultados de la pregunta 15 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

16) Expresar el desarrollo y resultados del ejercicio / problema de manera analítica.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 16

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	4	28.6%
La mayoría de las veces	4	28.6%
En pocas ocasiones	5	35.7%
Nunca	1	7.1%
Total	14	100.0%

Tabla 4.85 - Resultados de la pregunta 16 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

17) Expresar el desarrollo y resultados del ejercicio / problema de manera verbal.

a) Siempre
b) La mayoría de las veces
c) En pocas ocasiones
d) Nunca

Tabla de respuestas de la pregunta 17

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Siempre	5	35.7%
La mayoría de las veces	5	35.7%
En pocas ocasiones	2	14.3%
Nunca	2	14.3%
Total	14	100.0%

Tabla 4.86 - Resultados de la pregunta 17 del cuestionario de autoevaluación con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

Las respuestas a las preguntas 14, 15, 16 y 17, con porcentajes de respuestas favorables de 78.6%, 71.5%, 57.2% y 71.4% respectivamente, nos hablan de la percepción del alumno de su habilidad de comunicación en sus diferentes tipos: algebraica, gráfica, analítica y verbal.

4.6. Encuesta de opinión de los alumnos hacia el profesor

Adicionalmente, con el propósito de mejorar progresivamente la práctica docente, el profesor aplicó una encuesta de opinión a los alumnos a través de otro formulario elaborado en Google Formularios. Dicha encuesta tiene la finalidad de conocer la opinión de los alumnos acerca del profesor en el sentido de su forma de enseñar, sus recursos y estrategias, el ambiente en el aula, su interacción en el grupo y su visión como profesional de la docencia. Así, para el diseño de esta encuesta se tomaron los rasgos que debe tener una docencia profesional, los cuales, de acuerdo con Díaz – Barriga (2014), son:

1) Sus acciones tienen fundamento, pero también intuición pedagógica (…); los sistemas de evaluación no tienen forma de captar esto”
2) Tiene dominio de conocimientos disciplinares y de conocimientos pedagógicos (…)
3) Muestra pasión por su trabajo (…)
4) Tiene altas o medianas expectativas sobre sus alumnos (…)
5) Planifica a partir de situaciones concretas (…), pasar del tema al problema real. (minuto 8:36).

A la vez, algunas preguntas están orientadas a conocer acerca de la capacidad del profesor para generar ambientes adecuados de aprendizaje, tal como afirma Díaz - Barriga (2021): “La responsabilidad del aprendizaje es del alumno; la responsabilidad de trabajar pedagógicamente en un curso escolar, para que los alumnos tengan condiciones de aprendizaje es nuestra” (minuto 79:31). La finalidad de esta encuesta es conocer la percepción de los alumnos sobre el profesionalismo del docente, es decir, si el profesor ejerció una docencia profesional con ellos, así como su capacidad para generar ambientes de aprendizaje adecuados, y también, conocer la opinión del propio desempeño de los alumnos.

La encuesta aplicada fue contestada por 16 alumnos, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla de registro de encuesta de opinión

Número de alumno	¿Respondió la encuesta de opinión?
1	Sí
2	Sí
3	No
4	No
5	Sí
6	Sí
7	Sí
8	Sí
9	No
10	No
11	No
12	Sí
13	Sí
14	Sí
15	Sí
16	Sí
17	Sí
18	No
19	Sí
20	Sí
21	Sí
22	Sí
23	No
24	No

Tabla 4.87 - Alumnos que contestaron la encuesta de opinión.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

Se puede apreciar que, al igual que en la autoevaluación, de los alumnos en color rojo (que no entregaron actividad alguna) hay 4 de ellos que tampoco contestaron dicha encuesta. Por otro lado, hay 7 de ellos que sí la realizaron.

La estructura de la encuesta, sus resultados y análisis se muestran a continuación:

Instrucciones: *De acuerdo con las sesiones del tema de parábola y a la forma de enseñanza del profesor, en las siguientes oraciones elige la opción que consideres más pertinente de acuerdo con tu punto de vista*.

1) El profesor expuso de manera clara y detallada el tema de la parábola

   a) Totalmente de acuerdo
   b) De acuerdo
   c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
   d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 1

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	6	37.5%
De acuerdo	6	37.5%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	4	25.0%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.88 - Resultados de la pregunta 1 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

2) El profesor logró crear un ambiente adecuado en el salón de clases para el aprendizaje

   a) Totalmente de acuerdo
   b) De acuerdo
   c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
   d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 2

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	4	25.0%
De acuerdo	8	50.0%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	4	25.0%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.89 - Resultados de la pregunta 2 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

3) Las estrategias y recursos de enseñanza del profesor (materiales, ejemplos, ejercicios, recursos tecnológicos, etc.) fueron adecuados para mi proceso de aprendizaje

   a) Totalmente de acuerdo
   b) De acuerdo
   c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
   d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 3

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	4	25.0%
De acuerdo	7	43.8%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	4	25.0%
En desacuerdo	1	6.3%
Total	16	100.0%

Tabla 4.90 - Resultados de la pregunta 3 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

4) El profesor consigue que los estudiantes participen activamente en sus clases

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 4

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	2	12.5%
De acuerdo	7	43.8%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	4	25.0%
En desacuerdo	3	18.8%
Total	16	100.0%

Tabla 4.91 - Resultados de la pregunta 4 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

5) El profesor busca la forma de que los estudiantes respondan sus propias preguntas

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 5

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	5	31.3%
De acuerdo	8	50.0%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	3	18.8%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.92 - Resultados de la pregunta 5 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios. Fuente: Elaboración propia: JLBM

6) El profesor tiene dominio del conocimiento de la materia (matemáticas) y del conocimiento pedagógico (sabe enseñar)

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 6

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	12	75.0%
De acuerdo	3	18.8%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	1	6.3%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.93 - Resultados de la pregunta 6 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

7) El profesor mostró pasión por su trabajo

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 7

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	9	56.3%
De acuerdo	7	43.8%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	0	0.0%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.94 - Resultados de la pregunta 7 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

8) El profesor logró motivar a los alumnos

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla y gráfico de respuestas de la pregunta 8

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	1	6.3%
De acuerdo	6	37.5%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	8	50.0%
En desacuerdo	1	6.3%
Total	16	100.0%

Tabla 4.95 - Resultados de la pregunta 8 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

9) El profesor mostró tener altas o medianas expectativas de los alumnos

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 9

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	5	31.3%
De acuerdo	8	50.0%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	2	12.5%
En desacuerdo	1	6.3%
Total	16	100.0%

Tabla 4.96 - Resultados de la pregunta 9 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

10) El profesor es capaz de planear a partir de situaciones concretas, es decir, pasa del tema al problema real

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla y gráfico de respuestas de la pregunta 10

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	4	25.0%
De acuerdo	9	56.3%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	3	18.8%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.97 - Resultados de la pregunta 10 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

11) El profesor siempre mostró disposición para contestar tus preguntas

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 11

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	11	68.8%
De acuerdo	5	31.3%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	0	0.0%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.98 - Resultados de la pregunta 11 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

12) El profesor generaba preguntas que llevaban hacia un razonamiento, un debate y/o una discusión acerca del tema

a) Totalmente de acuerdo
b) De acuerdo
c) Ni en acuerdo ni en desacuerdo
d) En desacuerdo

Tabla de respuestas de la pregunta 12

Respuesta	Cantidad	Porcentaje
Totalmente de acuerdo	8	50.0%
De acuerdo	6	37.5%
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	2	12.5%
En desacuerdo	0	0.0%
Total	16	100.0%

Tabla 4.99 - Resultados de la pregunta 12 de la encuesta de opinión con datos de Google Formularios.
Fuente: Elaboración propia: JLBM

13) Escribe una libre opinión general acerca del profesor

En estas últimas dos preguntas, los alumnos señalados con azul son aquellos que tienen un portafolio de actividades completo, los alumnos señalados de rojo son aquellos que no entregaron actividad alguna. Las respuestas aparecen tal cual las escribió el alumno en el formulario, por ello algunas tienen faltas de ortografía.

Alumno 1.- “Un buen profesor en mi opinión, mostraba un dominio del tema y además logró enseñar de forma eficaz usando ejemplos reales”.

Alumno 2.- “Es un buen profe”

Alumno 5.- “Me cayó muy bien. Se crea un ambiente muy padre en su salón de clases y da los temas muy bien, yo en lo personal entendí muy bien.”

Alumno 6.- “Siento que si es muy buen profesor, pero faltan cosas por pulir como hacer que los alumnos presenten mas atención por ejemplo siendo mas autoritario, hablar mas fuerte, no permitir que los alumnos se desconcentren etc etc, pero eso seria lo único ya que explica bien las cosas.”

Alumno 7.- “Fue un buen profesor, no tengo ninguna queja la verdad.”

Alumno 8.- “Me cayo bien y creo que sabe dar bien la clase y resolver preguntas de los alumnos”

Alumno 12.- “La verdad el profesor se probo como maestro durante las clases que nos estubo dando, los resultados hubieran sido mejores si hubieramos contado con mas tiempo con el.”

Alumno 13.- “Es buen profesor solamente que puede mejorar en los métodos de enseñanza ya que se puede empezar a volver un poco aburrida la clase”

Alumno 14.- “Gran profesor, pero en mi opinión le faltó un poco de control sobre el grupo. Pero en general muy buen material y muy bueno enseñando”

Alumno 15.- “Pues la verdad por actividades extracurriculares del colegio no pude estar en muchas clases lo que hizo que no entendiera muy bien el tema además de mi ya costumbre a matemáticas en inglés. Así que no tengo una opinión ya que no estuve lo suficiente en au clase.”

Alumno 16.- “Honestamente creo que sus clases fueron muy buenas, y de cierta manera si aprendí varias cosas que antes no sabía, y que posiblemente en el futuro me ayuden mucho.”

Alumno 17.- “Me agradó su preparación y forma de enseñar, al igual que su paciencia cuando no entendíamos. Se nota que le gustan las matemáticas porque no se quedaba con la pura teoría, sino se expandía y nos mostraba la aplicación en la vida real al igual que su origen.”

Alumno 19.- “Me gustó su manera de enseñar y cómo nos hacía cuestionar cosas”

Alumno 20.- “Siento que necesita encontrar mejores formas de que los alumnos participen/estén más motivados para prestar atención y/o participar en clase, y que no debería de usar tantos videos de youtube como material de aprendizaje”

Alumno 21.- “Enseña muy bien la verdad”

Alumno 22.- “explica muy bien, solo que a veces me confundía”

14) Finalmente, escribe una libre opinión acerca de tu desempeño en la clase

Alumno 1.- “No satisfactorio debido a mi falta de responsabilidad, por mi ausencia en las clases como efecto de mi participación en otros eventos académicos. Sin embargo, las clases donde estuve presente, fue fácil comprender las explicaciones del profesor y respondió mis preguntas de forma satisfactoria”.

Alumno 2.- “Me fue bien y mejore mucho pero el dudar de mi en el ultimo examen y me bajo la puntuación”.

Alumno 5.- “Entendí todo Perfecto pero lo que me falló fue hacer las tareas y entregarlas.”

Alumno 6.- “Seria el mismo caso ya que yo soy una persona que se distrae fácilmente o se aburre fácilmente entonces yo diría que mi desempeño no fue el mejor por eso por falta de atencion mía”

Alumno 7.- “Lo que me afecto mas fueron los nervios en la evaluación al final del bloque, pero fuera de eso si entendí bien el tema y sus problemas.”

Alumno 8.- “Al principio se me complicó un poco pero poco a poco fui entendiendo”

Alumno 12.- “La verda pude haber trabajado mejor y haberme motivado mas durante las clases”

Alumno 13.- “Sinceramente, puede que haya entendido el tema en el momento pero ahorita no recuerdo nada”

Alumno 14.- “Logré aprender todo el tema de una manera adecuada. Al principio si no tenía mucha idea de que hacer pero al final de la clase ya tenía una clara idea de todos los procedimientos y las maneras de resolver los problemas.”

Alumno 15.- “Me fue muy mal, por que no entendia el tema, y cuando le pedia ayuda a mis compañeros ellos estaban igual de perdidos.”

Alumno 16.- “Personalmente me cuesta mucho trabajo entender las matemáticas en general y la mayor parte del tiempo me estoy distrayendo con muchas cosas en lugar de enfocarme en clase, y a la hora de hacer un análisis de un problema, me pongo nerviosa y se me olvida todo, en especial si no tengo a lado al profesor para apoyarme con mis dudas por lo que las tareas y ejercicios que nos dejaba me costaban mucho trabajo”

Alumno 17.- “Siento que fui de las pocas personas que se comprometieron a entregar todo sin embargo le sufrí bastante, me costó entender algunas cosas pero esto no se relaciona con la clase ni la forma de enseñar del profesor.”

Alumno 19.- “Me pareció eficiente y más participativa de lo normal”

Alumno 20.- “Siento que no fue lo mejor siendo que no presté tanta atención y que no buscaba que participaramos para entender mejor, y los videos de youtube no me estaban ayudando y de hecho me molestaba tener que pasar mitad de la clase viendo el video para entender el tema”

Alumno 21.- “Yo creo que me fue bien aunque me falto prestar atención en unos temas pero al final logré entender todo”

Alumno 22.- “la verdad mi desempeño no fue el mejor”

Para el análisis de esta encuesta se entenderá como “aprobatorio” las primeras dos opciones de respuesta, es decir, si el alumno optó por la opción “Totalmente de acuerdo” o “De acuerdo” se tomaron dichos porcentajes en suma como una percepción de “aprobatorio” hacia el profesor por parte del alumno. Por otro lado, la característica de tener fundamento en sus acciones e intuición pedagógica se tomó como el promedio de los porcentajes “aprobatorios” obtenidos de las preguntas 1, 3, 5 y 12, de la misma forma, la capacidad para generar ambientes de aprendizaje adecuados se tomó como el promedio de los porcentajes “aprobatorios” obtenidos de las preguntas 2, 3, 8 y 11.

Como ya se mencionó, las respuestas de las preguntas 13 y 14 son una transcripción tal cual de lo que los alumnos contestaron en el formulario.

Así, se obtienen los siguientes resultados:

Resultados sobre la encuesta de opinión acerca del ejercicio de la docencia del profesor

Evaluación del profesor sobre el ejercicio de la docencia profesional		
Característica	*Pregunta*	*Porcentaje de aprobación*
Sus acciones tienen fundamento e intuición pedagógica	1, 3, 5 y 12	78.15%
Dominio de conocimientos disciplinares y pedagógicos	6	93.70%
Muestra pasión por su trabajo	7	100%
Tiene altas o medianas expectativas de sus alumnos	9	81.30%
Pasa del tema al problema real	10	81.30%
Promedio del ejercicio de docencia profesional		86.89%
Evaluación del profesor sobre la capacidad para generar ambientes de aprendizaje favorables		
Capacidad para generar condiciones de aprendizaje	2, 3, 8 y 11	71.90%

Tabla 4.100 - Evaluación del profesor respecto al ejercicio de su docencia.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La evaluación es un proceso bastante complejo. Es muy difícil establecer conclusiones a partir de evaluaciones grupales, escolares, e incluso nacionales, ya que pueden influir infinidad de variables que quizá un plan de evaluación no tenga contempladas. Díaz – Barriga (2014) considera que: "la evaluación es una disciplina compleja (…), merece ser reconocida como una especialidad de las ciencias de la educación" (minuto 20:48). Incluso las pruebas a gran escala no alcanzan a detectar todas las variables y contextos diferentes en donde se desenvuelven los estudiantes y que pudieran ser factores que afecten una evaluación.

En esta investigación se trató de diseñar una estrategia de evaluación adecuada para verificar los objetivos que se buscan: contribuir al desarrollo de las habilidades geométricas de Hoffer y lograr un nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele, dentro de la modalidad híbrida sincrónica. Al tener en cuenta las evidencias arrojadas por instrumentos de evaluación: los resultados del portafolio de ejercicios y tareas, los resultados del pre – test y post- test, así como la percepción de los alumnos sobre su propio aprendizaje, son evidencias suficientes en las que se basa el profesor para concluir que sí fue posible diseñar una secuencia didáctica que lleve a los alumnos al desarrollo de las habilidades de Hoffer y alcanzar un nivel 4 de comprensión geométrica Van Hiele en la modalidad híbrido sincrónica, para este grupo de alumnos. Esto de detallará en el siguiente capítulo "Conclusiones".

Se dio muestra de la percepción de los alumnos sobre su propio aprendizaje es positiva, lo que se comprueba con los porcentajes favorables de las encuestas. Incluso, la percepción de los alumnos hacia el profesor resulta ser satisfactoria.

Esto no significa que esta secuencia didáctica sea perfecta, pero funcionó para este grupo de alumnos en su propio contexto. El profesor debe seguir en el trabajo de construir situaciones, recursos, ideas que mejoren de manera continua sus estrategias de enseñanza, para una mejora progresiva en el aprendizaje de sus alumnos, y, sobre todo, para enfrentar los retos que se presentan en la profesión docente, como fue en este caso la modalidad híbrida sincrónica. Finalmente, nunca se termina de ser docente, nunca se termina de ser profesional; toda la vida se aprende a serlo.

Conclusiones

“*La ciencia de los números y el arte de la voluntad son las dos claves de la magia. Ellas permiten abrir y acceder a las puertas del Universo y ahí se está mucho más cerca de los dioses*” Gómez (2004).

La docencia es una profesión que depende de muchas variables, algunas que el profesor pueda controlar, y como cualquier otra profesión requiere de personas comprometidas que se asuman como tal y puedan crear estrategias de enseñanza que arrojen los mejores resultados. El concepto de profesionalización es el más importante dentro de cualquier profesión, por redundante que parezca, y la docencia no es la excepción. La profesionalización docente es lo que le permite a un profesor afrontar los nuevos retos que aparecen en materia educativa. En este caso, el reto fue el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola bajo la modalidad híbrida sincrónica, que contribuya al desarrollo de las habilidades de Hoffer, así como al nivel de comprensión geométrica de Van Hiele.

Esta investigación cumplió satisfactoriamente con el diseño de dicha secuencia. Ésta implicó un diseño innovador debido a que, por las condiciones post – pandémicas muchas escuelas enseñaban a distancia, y, en este caso, se tenía que cumplir simultáneamente con la enseñanza a distancia y presencial. El diseño de las estrategias de esta secuencia contribuye al desarrollo de las habilidades de Hoffer, así como permiten que el alumno alcance el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele de manera progresiva, como se puede observar en la tabla 5.1:

Habilidades de Hoffer y evolución del nivel de comprensión geométrica de Van Hiele por estrategias didácticas

Habilidades de Hoffer abordadas en las estrategias y su evolución en el nivel de comprensión geométrica de Van Hiele			
No. de estrategia	**Habilidades de Hoffer trabajadas**	**Nivel de Van Hiele**	**Referencia**
Estrategia 1	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento	0 al 1	Tabla 6.5, pág. 57
Estrategia 2	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento	1 al 2	Tabla 6.7, pág. 63
Estrategia 3	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento	2 al 3	Tabla 6.9, pág. 68
Estrategia 4	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento	3	Tabla 6.11, pág. 72

Estrategia 5	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento	3	Tabla 6.13, pág. 74
Estrategia 6	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento, habilidad de aplicación y transferencia	3 al 4	Tabla 6.15, pág. 82
Estrategia 7	Habilidad visual, habilidad de comunicación, habilidad de dibujo, habilidad lógica o de razonamiento, habilidad de aplicación y transferencia	4	Tabla 6.17, pág. 85

Tabla 5.1.- Habilidades de Hoffer y el nivel de comprensión geométrica de Van Hiele a través de las estrategias didácticas.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

Los resultados obtenidos de esta secuencia didáctica se pueden observar a través del esquema de evaluación, el cual, tenía énfasis en la evaluación formativa. En este punto, los portafolios de actividades, cuya calificación se sustenta a través de una lista de cotejo y una escala de valoración específica, así como la bitácora y los videos de las sesiones (véase el capítulo 7 "La implementación del proyecto de trabajo"), muestra la evolución de los alumnos en su nivel de comprensión geométrica de Van Hiele, así como en el trabajo de las habilidades de Hoffer, y cuyos resultados se pueden observar en la tabla 5.2:

Resumen de la estrategia de evaluación

Habilidades de Hoffer desarrolladas		*V, C, D, L o R*	*V, C, D, L o R*	*V, C, D, L o R*	*V, C, D, L o R*	*V, C, D, L o R, A y T*		
Evolución del nivel de comprensión geométrica de Van Hiele		Nivel 0 al Nivel 1	Nivel 1 al Nivel 2	Nivel 2	Nivel 2 al Nivel 3	Nivel 3 al Nivel 4		
Porcentajes	0%	10%	10%	20%	30%	30%	0%	100%
No. de alumno	*Prueba pre-test*	*Parábola con regla y compás*	*La propiedad de reflexión*	*Parábolas dados algunos de sus elementos*	*Parábola y sus elementos a partir de su ecuación*	*Aplicaciones de la parábola*	*Prueba post-test*	**Calificación**
2	5	10	10	5	10	5	7.5	7.5
10	6.5	6	6	6	10	5	6	6.9
14	2.5	5	5	10	10	8	9.5	8.4
17	8	10	10	8	10	10	3.5	9.6
19	9.5	10	10	10	10	5	7	8.5
Promedio	6.3	8.2	8.2	7.8	10	6.6	6.7	8.18

Tabla 5.2.- Resumen de los datos obtenidos por la estrategia de evaluación. Se muestra la evolución del nivel de comprensión geométrica de los alumnos, así como las habilidades de Hoffer trabajadas.

Fuente: Elaboración propia: JLBM.

En esta tabla, las calificaciones coloreadas de verde del pre – test nos indican que dicha prueba se presentó en línea. Las habilidades de Hoffer se simbolizan a través de letras: Visual – V, Comunicación o verbal – C, Dibujo – D, Lógica o Razonamiento – L o R, Aplicación y transferencia – A y T. Se puede observar que en cada una de las actividades se trabajan todas las habilidades de Hoffer, a excepción de la habilidad de aplicación y transferencia que pertenece a la última actividad. Los alumnos que se tomaron para esta evidencia son aquéllos que tienen un portafolio de actividades completo para dar sustento a la investigación. Las habilidades de Hoffer y el hecho de haber alcanzado el nivel 4 de comprensión geométrica de Van Hiele (al menos en un nivel suficiente), permitirá que los alumnos continúen con su desarrollo en el ámbito matemático de así quererlo. El diseño de esta evaluación formativa se considera adecuado, dado que permite observar evidencia de la evolución en el nivel de comprensión geométrica de Van Hiele. Los resultados dan muestra que falta potenciar la habilidad de aplicación y transferencia, esta situación representa un área de oportunidad que permitirá mejorar este trabajo de investigación.

Por otro lado, la evaluación diagnóstica (prueba pre - test) y la evaluación sumativa (prueba post - test) son evidencia que muestra la minimización en las problemáticas de aprendizaje de la geometría analítica y la parábola abordadas en otras investigaciones por expertos en el tema (véase el capítulo 2 “La enseñanza de la geometría analítica y la parábola”), así como también arroja evidencia sobre el desarrollo de habilidades de Hoffer de los alumnos. Las problemáticas mencionadas se resumieron en los siguientes puntos:

1) *Algebraicos*: Consiste en la memorización de las ecuaciones sin hacer procesos de análisis para su obtención, así como la dificultad de realizar procesos algebraicos.
2) *La visualización*: Dejar de lado la parte visual de los objetos geométricos por tratar la geometría desde la parte algebraica. La visualización constituye el soporte de la actividad cognitiva en geometría, porque es donde el estudiante evoluciona en su percepción de los objetos y en su potencial para la solución de problemas.
3) *Falta de relación entre elementos*: el alumno no logra reconocer los elementos de la parábola, por tanto, es muy difícil establecer una relación analítica de la ecuación con sus elementos. No se logra establecer una relación entre el vértice, la directriz y el foco.
4) *Transitar entre sistemas de representación*: Dificultad para reconocer la ecuación de la parábola dada su gráfica, realizar el bosquejo gráfico de una parábola a partir de su ecuación, describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación canónica y su gráfica, así como realizar la conversión entre cada uno de los registros: gráfico, analítico algebraico y verbal.
5) *Resolver problemas de aplicación (modelación)*: problemas en la enseñanza de la geometría en otros contextos. Aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas. Dificultad para lograr que los estudiantes asocien sus saberes a una situación contextualizada.

En la tabla 9.3 se aprecia un comparativo de porcentajes de respuestas erróneas entre las pruebas pre – test y post – test. Estos porcentajes muestran una mejora evidente en las problemáticas de aprendizaje de la parábola. En cada una de las preguntas se abordan también las habilidades de Hoffer, de lo que se puede concluir que hubo un incremento en su desarrollo:

Porcentajes de respuestas erróneas pre – test y post - test

Porcentajes de respuestas erróneas									
Prueba pre - test	Pregunta 1	Pregunta 2					Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5
		a	b	c	d	e			
En línea	42%	21.50%	36%	14%	15%	14%	42%	57%	64%
Presencial	83%	50%	83%	66%	50%	66%	50%	100%	66%
Prueba post - test									
Presencial	30%	15%	25%	10%	20%	30%	35%	35%	35%
Habilidades de Hoffer	C, L o R	V, C y D					V, C, D, L o R	V, C, D, L o R, A y T	V, C, L o R, A y T
Problemáticas abordadas	1 y 3	1, 2, 3 y 4					1, 2, 3 y 4	1, 2, 3, 4 y 5	1, 2, 3, 4 y 5

Tabla 5.3 – Comparativo de porcentajes de respuestas erróneas entre el pre – test y post – test.

Fuente: Elaboración propia: JLBM

La implementación de la geometría dinámica y del software GeoGebra para las actividades resulta favorable para la enseñanza de la geometría, sobre todo en las modalidades a distancia. El uso de esta herramienta permite mantener la atención de los alumnos en los objetos movibles durante la clase, así como el usarlo para realizar los ejercicios y actividades. La secuencia didáctica se desarrolló en una modalidad híbrido-sincrónica, pero a su vez se considera que puede implementarse en una modalidad presencial, debido a que se logran visualizar los elementos de la Geometría Analítica con un enfoque dinámico que contribuye a la comprensión de las definiciones.

Otro punto por destacar es el uso del juego de geometría para el trazado de cónicas con regla y compás debido a que se desarrollan habilidades psicomotoras necesarias para el desarrollo personal de cada alumno. Por otra parte, las construcciones geométricas con regla y compás facultan el desarrollo del pensamiento deductivo, ejercita el reconocimiento de patrones, demostraciones, fortalece las definiciones y conceptos de cada cónica. En la actualidad, el uso de las tecnologías ha dotado al alumno de mayores facilidades para estos fines, lo que priva al alumno del desarrollo de habilidades psicomotoras y de análisis. La secuencia establece un balance entre estas actividades manuales y el uso de software para la construcción de la parábola.

Por otro lado, en esta investigación se trabajó con el programa de la materia de Matemáticas V, que pertenece al Plan de Estudios de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP, 1996), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). El programa destina solamente 20 horas para abordar los contenidos de Geometría Analítica y los concentra en la Unidad V que llama “Tema optativo”. En dicho programa, el profesor tiene la libertad de decidir si enseña o no los contenidos referentes a la Geometría Analítica. Sin embargo, el tiempo destinado en la unidad es limitado al estudio de una sola cónica (circunferencia, parábola, elipse o hipérbola), lo que impide el desarrollo integral de los alumnos en las habilidades de Hoffer, así como en la comprensión geométrica de Van Hiele.

Este trabajo da muestra de la necesidad para realizar futuras investigaciones en la enseñanza de la Geometría Analítica a través de estrategias que consideren el desarrollo de habilidades de Hoffer y la comprensión geométrica de Van Hiele, con el objetivo de que se potencien las habilidades geométricas, contribuir a disminuir las problemáticas en el aprendizaje de la geometría, así como motivar al alumno en el aprendizaje de la matemática en general.

Anexos

> “*La ignorancia es la causa de la injusticia, y la educación, suprema igualitaria, es la mejor aliada de la justicia (...) Maestro y tirano son dos términos que se excluyen. En cambio, libertador y maestro son sinónimos.*” UNAM (1983).

En esta sección se pueden encontrar los anexos mencionados a lo largo de esta investigación. Dichos anexos son los siguientes:

Anexo 1.- Secuencia didáctica

Anexo 2.- Material didáctico

Anexo 3.- Prueba pre – test

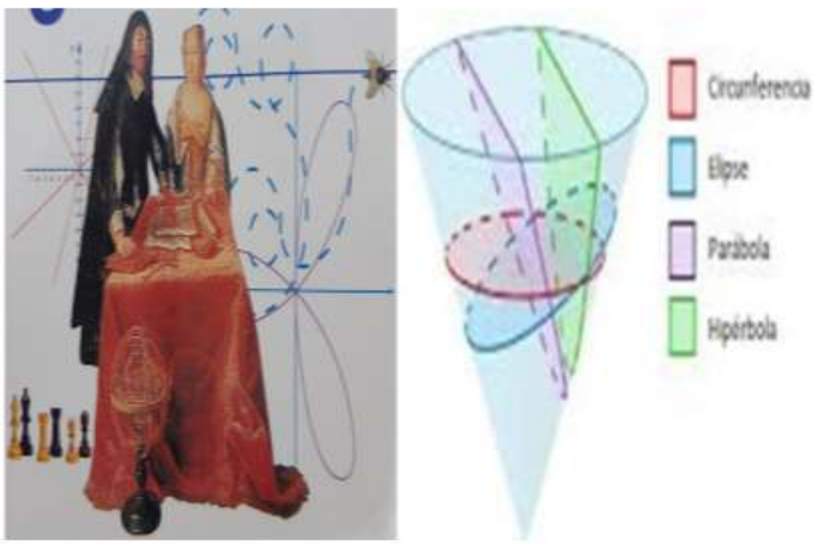
Anexo 4.- Prueba post – test

Anexo 5.- Evaluación de la profesora supervisora de la práctica docente

Anexo 1.- Secuencia didáctica

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
POSGRADO MADEMS MATEMÁTICAS
PRÁCTICA DOCENTE III SEMESTRE 2022 - II

SECUENCIA DIDÁCTICA DEL TEMA DE PARÁBOLA EN LA MODALIDAD HÍBRIDA SINCRÓNICA



"Las matemáticas y la religión construyen sus ideas sobre axiomas innegables: 1+1=2, Dios existe; he elegido en qué axiomas poner mi fe"[1]

Marcus Du Sautoy

[1] BBC (Productor). (2016). *La historia de las matemáticas. El genio de Oriente. Capítulo 3 de 4* [YouTube]. De https://www.youtube.com/watch?v=GOS7lZI05dQ

Institución: El Colegio	**Turno:** Matutino
Profesor practicante: Prof. Jorge Luis Barragán Monroy	**Materia:** Práctica docente III
Profesor supervisor: Profa. Gloria Maricela García Landaverde	**Semestre:** 2022 – II
Profesor titular: Dra. Giselle Ochoa Hofmann	**Fecha de elaboración:** 14/ Febrero / 2022

Temática: La parábola y su ecuación cartesiana	**Tema de la Práctica Docente III** La parábola	**Fecha de inicio** 14 / Marzo / 2022
Propósitos Generales: El alumno será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de su ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.	**Aprendizajes Esperados** Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas: 1) Identifica los elementos que definen a la parábola. 2) Reconoce la simetría de esta curva. 3) Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico. 4) Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él. 5) Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y sólo sí, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente. 6) Resuelve problemas de aplicación.	**Fecha de término** 28 / Marzo / 2022

Descripción de la Estrategia de Enseñanza – Aprendizaje en la modalidad híbrida sincrónica para implementar el tema en el Colegio.

Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

Justificación de la Estrategia

Para observar detalladamente la justificación para elaborar las estrategias de esta secuencia didáctica, véase el capítulo "El diseño de las estrategias didácticas" de esta investigación.

Materiales y recursos para las sesiones en línea

Docente: Computadora, Office (Word), Software "GeoGebra", material didáctico anexo, plumones, pizarrón, proyector y celular.

Estudiantes: Computadora y/o celular, cuaderno u hojas cuadriculadas, regla y compás.

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Título del Tema La parábola y sus elementos	**SESIÓN __1__ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión Evaluar los conocimientos previos del alumno, así como sus áreas de oportunidad en cuestiones geométricas.		**Fecha de aplicación** 14 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**

Saludos cordiales Introducción al tema **(2min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Se presenta la prueba pre-test como una prueba sin peso para la calificación de los alumnos. El profesor reparte las pruebas físicas pre-test para los alumnos presenciales. Se habilita la prueba a través de un formulario de Google para los alumnos en línea. **(5min)**	Los alumnos realizan la prueba pre-test **(45min)**	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
		El alumno conocerá su calificación independientemente de su modalidad (presencial o en línea). Esta prueba es para observar las áreas de oportunidad en cuestiones algebraicas y geométricas de los alumnos. Se realizará un análisis de las respuestas obtenidas con la finalidad de compararlas con el post-test, para evaluar el avance de los alumnos al final de la secuencia.
Comentarios y observaciones de la sesión Se aplicó la prueba pre-test sin ningún problema, tanto en la forma presencial como en línea. Para observar los resultados de la prueba y su análisis, el lector puede dirigirse al capítulo "Tipos, instrumentos y estrategias de evaluación"		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema La parábola y sus elementos	**SESIÓN _2_ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**

Propósitos de la sesión		Fecha de aplicación
El alumno, en función de la resolución de problemas, identifica los elementos que definen a la parábola, reconocerá la simetría de esta curva, así como obtendrá por inducción la definición de parábola como lugar geométrico.		15 / marzo / 2022
	ACTIVIDADES DE APERTURA	
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Introducción al tema **(2min)**		
	ACTIVIDADES DE DESARROLLO	
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor define la parábola como lugar geométrico, así como los elementos que la componen a través de unos esquemas en GeoGebra (véase material didáctico, anexo 2, punto 1) **(15min)** El profesor muestra la construcción manual de una parábola usando sólo regla y compás a través de un video de elaboración propia. Posteriormente, el profesor propone a los alumnos construir su propia parábola con elementos definidos de manera individual (véase material didáctico, anexo 2, punto 2) **(14min)**	Los alumnos elegirán el vértice y el foco de una parábola cualquiera para realizar su construcción manual con elementos definidos de manera individual. **(17min)**	
	ACTIVIDADES DE CIERRE	
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor asigna las actividades a través del classroom de la materia. **(2min)**	Los alumnos terminan su ejemplo de construcción manual de la parábola	La construcción manual de la parábola de cada alumno se enviará a través del classroom de la materia para su evaluación (así como las demás actividades de esta planeación).

Comentarios y observaciones de la sesión

Se nota una buena disposición de los alumnos hacia la clase. El hecho de tener el tema de circunferencia (una cónica) como antecedente, hace mucho más fácil la comprensión de otra cónica (la parábola). La estrategia de geometría dinámica resulta bastante favorable, ya que permite una mejor visualización de los elementos de la parábola. Me sentí bastante bien en nuestra primera clase formal. Alcanzo a apreciar que tienen los conocimientos previos necesarios para abordar favorablemente el tema de parábola. Me doy cuenta que algunas cosas no saben cómo expresarlas, pero las entienden.

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Título del Tema La parábola en la vida cotidiana	**SESIÓN __3__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno identificará la parábola en fenómenos y objetos de su alrededor. Comprenderá la utilidad práctica de las parábolas a través de la propiedad de reflexión.		**Fecha de aplicación** 16 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Repaso sobre la definición y los elementos de la parábola aprendidos en la clase anterior. **(2min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Presentación: "*El poder infinito de las parábolas*". La finalidad de esta exposición es mostrar al alumno varias situaciones de la vida cotidiana en donde nos valemos de la propiedad de reflexión de las parábolas para resolver ciertas problemáticas, así como de sus propiedades constructivo – estructurales en la arquitectura e ingeniería (véase material didáctico, anexo 2, punto 3) **(30min)**	Al finalizar la presentación, se comentará en grupo los aspectos importantes más relevantes sobre las aplicaciones de las parábolas. **(8min)**	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor asigna las actividades a través de classroom de la materia. **(3min)** El profesor explica la actividad a realizar para comprobar la propiedad de reflexión de una manera geométrica.	El alumno observará, como tarea, un video acerca de la diferencia entre la parábola y la catenaria, para poder realizar la actividad que se considerará para su evaluación. El alumno comprobará, como tarea, la	El video mencionado, así como la actividad que realizarán los estudiantes, se subirán al classroom de la clase y se describen en el material didáctico (véase material didáctico, anexo 2, punto 4).

(7min)	propiedad de reflexión a través de una actividad puramente geométrica, usando sólo regla y transportador.	

Comentarios y observaciones de la sesión

En esta clase surgieron bastantes problemas tecnológicos, ya que se instaló en la computadora una aplicación para grabar las clases, pero esto provocó una proyección de los materiales bastante lenta y confusa, lo que generó confusión en los estudiantes. Los alumnos que acuden al plantel (presencial) tienen desventaja en la visión de los materiales debido a la mala proyección del cañón, dificultando su aprendizaje. Detecté que el método de construcción manual de la parábola se dificultó bastante, además de los problemas tecnológicos, debido a la incomprensión de la lógica del mismo (la validez del método).

La estrategia de geometría dinámica para la definición del lado recto resulta favorable, ya que apoya a los alumnos a visualizar de mejor forma las variaciones en amplitud de las parábolas dadas por el lado recto. La estrategia del video para la construcción manual de la parábola hay que mejorarla. Quizá hacer un video más corto y más claro. Además, se detectó un error de escritura en las coordenadas del foco. Quizá también plantear la actividad con otra parábola, pero ahora horizontal, con el fin de darle la oportunidad al alumno de una visión más amplia del método.

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Título del Tema	**SESIÓN __4__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
La parábola con V (0, 0) y su ecuación cartesiana		

Propósitos de la sesión		**Fecha de aplicación**
El alumno, en función de la resolución de problemas, aprenderá a escribir una parábola matemáticamente a través de la deducción de su ecuación cartesiana con vértice en el origen.		17 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Repaso sobre las aplicaciones de la parábola aprendidas en la clase anterior. **(2min)**	Los alumnos (voluntariamente) muestran los ejemplos encontrados de parábolas y catenarias que se les encargaron en la clase anterior. **(5min)**	
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor conduce el proceso algebraico para la obtención de la ecuación de la parábola horizontal $y^2 = 4px$, apoyándose en todo momento de la colaboración de los alumnos y de la representación de dicha parábola en GeoGebra. (véase material didáctico	Los alumnos cooperan con el profesor en la deducción de la ecuación de la parábola horizontal $y^2 = 4px$.	De manera grupal y guiados por el profesor, los alumnos obtienen las demás ecuaciones de las otras parábolas (verticales y horizontal que abre hacia la izquierda), completando una tabla que servirá de base para la realización de actividades posteriores (véase material

anexo 2, punto 5) **(26min)**		didáctico anexo 2, punto 6) **(15min)**
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
En cooperación con los alumnos, se establecerán las conclusiones sobre los patrones vistos en las ecuaciones de las parábolas **(2min)**		
Comentarios y observaciones de la sesión Noto la dificultad de realizar construcciones manuales y lo atribuyo a la falta de costumbre, de visualización y a las fallas tecnológicas particulares que ocurrieron. Me parece que se lograron aclarar todas las dudas, aunque me llamó la atención que hubiera varias dudas aún del tema anterior, en particular del lado recto.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema La parábola con V (0, 0) y su ecuación cartesiana	**SESIÓN __5__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, aplicará las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen, así como comprenderá que un punto pertenece a la parábola si y sólo sí sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.		**Fecha de aplicación** 22 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Repaso sobre las ecuaciones de la parábola aprendidas en la clase anterior. **(2min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor colabora con los estudiantes para aplicar las ecuaciones de la parábola obtenidas en la clase anterior en contextos puramente geométricos. El	Los alumnos cooperan y participan con el profesor en la solución de los 3 ejemplos (véase material didáctico, anexo 2, punto 7) donde se debe aplicar alguna de las	

profesor guía hacia la aplicación de las ecuaciones mediante 3 ejemplos, apoyándose en todo momento del software GeoGebra para lograr una mejor visualización por parte de los alumnos. **(46min)**	ecuaciones de la parábola con vértice en el origen.	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
		El profesor entregará la 1ra serie de ejercicios correspondiente a este tema de "parábola con vértice en el origen" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10, sección 1). **(2min)**
Comentarios y observaciones de la sesión Sentí sin ánimos a los alumnos, quizá un tanto por lo del puente o debido a la falta de alumnos presenciales, ya que sólo asistieron 3. Se debe modificar el video de los espejos parabólicos de Arquímedes, ya que casi no se escucha. No me dio tiempo de plantear la actividad de la comprobación de la propiedad de reflexión.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Título del Tema La parábola con V(h, k) y su ecuación cartesiana	**SESIÓN __6__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, deducirá la ecuación de la parábola con vértice fuera del origen, así como la ecuación general correspondiente a cada parábola.		**Fecha de aplicación** 23 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. El profesor plantea las preguntas de reflexión: ¿cómo creen que serían las ecuaciones de la parábola si el vértice no fuera el origen?, ¿cambiarían mucho las ecuaciones? **(2min)**	El alumno comenta, a través de una lluvia de ideas, su pensar acerca de las ecuaciones de la parábola con vértice fuera del origen. **(3min)**	
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**

El profesor conduce el proceso geométrico de traslación para la obtención de la ecuación de la parábola horizontal $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, apoyándose en todo momento de la colaboración de los alumnos y de la representación de dicha traslación de la parábola en GeoGebra (véase material didáctico anexo punto 8). Se plantea el llenado de otra tabla de ecuaciones de la parábola con vértice fuera del origen (véase material didáctico, anexo 2, punto 9). **(10min)** El profesor plantea una serie de ejercicios a resolver (véase material didáctico, anexo 2, punto 10) con la ayuda de la tabla construida en el punto anterior. **(5min)** Guía a los alumnos en el proceso para la obtención de la ecuación general. **(5min)**	Los alumnos cooperan y participan con el profesor en la traslación mencionada, además de que completan la tabla correspondiente con las ecuaciones de la parábola con vértice fuera de origen (véase material didáctico, anexo 2, punto 9). **(10min)** Se comienza con la resolución de los diversos ejercicios que plantea el profesor. En cada ejercicio, el alumno deducirá el camino para la obtención de la ecuación general correspondiente en cada caso. **(15min)**	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Se terminan los ejemplos en conjunto hasta donde lo permita el tiempo.		
Comentarios y observaciones de la sesión Al principio de esta clase se planteó la actividad de visualización de la propiedad de reflexión. No se logró concluir con el tema, así que se continuará en la siguiente sesión. Hubo muchas dudas sobre la generalización de los elementos de la parábola, les costó mucho trabajo; me parece que no están acostumbrados a la parte teórica-abstracta de la matemática. Parece que se resolvieron las dudas, aunque no estoy muy seguro. Podría ser una mejora al esquema de la parábola quitar los ejes, para facilitarle a los alumnos la generalización de los elementos, ya que la numeración confunde.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Título del Tema	**SESIÓN __7__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
La parábola con V (h, k) y su ecuación cartesiana		

<table>
<tr><td colspan="2">Propósitos de la sesión
El alumno, en función de la resolución de problemas, resolverá problemas de corte geométrico aplicando las diferentes ecuaciones de la parábola.</td><td>Fecha de aplicación
24 / Marzo / 2022</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES DE APERTURA</td></tr>
<tr><td>Realizadas por el Docente</td><td>Realizadas por los Estudiantes</td><td>Proceso de Evaluación</td></tr>
<tr><td>Saludos cordiales.
Repaso de los conceptos y detalles vistos la clase anterior. (2min)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES DE DESARROLLO</td></tr>
<tr><td>Realizadas por el Docente</td><td>Realizadas por los Estudiantes</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>El profesor propone diversos ejercicios de la sección 2: "parábola con vértice fuera del origen" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10) a resolver de manera conjunta en el grupo, apoyándose en todo momento del software GeoGebra para una visualización geométrica del problema. En todos ellos se determinan ambas ecuaciones: canónica y general, así como se realiza su bosquejo gráfico en GeoGebra. (43min)</td><td>Los alumnos colaboran con el profesor para dar solución a los diferentes problemas que se plantean.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES DE CIERRE</td></tr>
<tr><td>Realizadas por el Docente</td><td>Realizadas por los Estudiantes</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Se comentan algunos detalles importantes sobre los ejercicios y dudas (si las hubiera), además de que se asigna la actividad correspondiente a este tema en classroom. (5min)</td><td></td><td>De estos ejercicios (véase material didáctico, anexo 2, punto 10) correspondientes a la sección 2: "parábola con vértice fuera de origen", el alumno realizará los que indique el profesor como tarea, que se entregarán a través del classroom de la clase.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Comentarios y observaciones de la sesión
En esta clase logramos terminar con la obtención de la ecuación de la parábola horizontal que abre a la derecha con V (0, 0), y se logró obtener las ecuaciones restantes de las parábolas de manera intuitiva, siguiendo los patrones vistos en las mismas. Parece que esta estrategia funciona, ya que noté una participación muy activa de los estudiantes tanto presenciales como en línea.</td></tr>
</table>

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema La parábola con V (h, k) y su ecuación cartesiana	**SESIÓN _8_ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, resolverá problemas de corte geométrico avanzado aplicando las diferentes ecuaciones de la parábola, así como sus conocimientos previos en circunferencia y recta.		**Fecha de aplicación** 25 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. **(2min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor propone diversos ejercicios denominados como "ejercicios avanzados" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10, sección 3) a resolver de manera conjunta en el grupo, apoyándose en todo momento del software GeoGebra para una visualización geométrica del problema. La intención es ligar los conocimientos geométricos adquiridos hasta el momento: rectas, circunferencia y parábola. **(43min)**	Los alumnos colaboran con el profesor para dar solución a los diferentes problemas que se plantean.	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Se comentan conclusiones y dudas generales sobre los ejercicios realizados. **(5min)**		
Comentarios y observaciones de la sesión Me parece que los alumnos van evolucionando de manera positiva. Todas las preguntas dirigidas que he hecho las han contestado acertadamente. Me percato de que están estableciendo relaciones correctas entre las ecuaciones y las gráficas de las parábolas.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema La parábola con V(h, k) y su ecuación cartesiana	**SESIÓN _9_ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, resolverá problemas de corte geométrico avanzado aplicando las diferentes ecuaciones de la parábola, así como sus conocimientos previos en circunferencia y recta.		**Fecha de aplicación** 28 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. **(2min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor propone diversos ejercicios de la sección 3 "ejercicios avanzados" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10) a resolver de manera conjunta en el grupo, apoyándose en todo momento del software GeoGebra para una visualización geométrica del problema, como complemento a los ejemplos realizados en la clase anterior. **(43min)**	Los alumnos colaboran con el profesor para dar solución a los diferentes problemas que se plantean.	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Se comentan conclusiones y dudas generales sobre los ejemplos realizados, además de que se asigna la actividad correspondiente a la evaluación en classroom. **(5min)**		De la sección 3 "ejercicios de nivel avanzado" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10), el alumno tendrá que elegir 2 ejercicios que tendrá que resolver como tarea, y que será su evaluación de esta sección.
Comentarios y observaciones de la sesión Aún hay dudas, sobretodo en el lado recto, pero también noto mucha mejora en los alumnos. Hubo una alumna en línea que aún tenía dudas con la estructura de las ecuaciones de la parábola, sobretodo en la identificación del lado recto. Se atendió y me parece que la alumna ha superado este problema, ya que posteriormente ella misma resuelve un ejercicio por sí misma. Me gustó mucho esta clase y parece que los alumnos responden de manera positiva. En esta clase fallé en no ver el trabajo de los alumnos en línea, área que tengo que mejorar. Se les preguntó sobre dudas o dificultades, a lo que contestaron algunos sobre dudas que se atendieron oportunamente, sin embargo, sí pienso que debería implementar una estrategia que me permita ver sus trabajos en línea.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema La parábola y su ecuación general	**SESIÓN _10_ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, obtendrá los elementos de una parábola que está dada en su ecuación general.		**Fecha de aplicación** 29 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Repaso de los conceptos relevantes vistos hasta el momento. Se comenta y recuerda el proceso de completar el cuadrado para la obtención de la ecuación canónica de una circunferencia, ya que se usará en este tema también. **(3min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor propondrá el problema de obtener los elementos de una parábola para su construcción geométrica a partir de su ecuación general. **(20min)**	Los alumnos aplicarán sus conocimientos previos del método de completar cuadrados para obtener la ecuación canónica de una parábola dada en su ecuación general, para obtener los elementos que permitan realizar un bosquejo de su gráfica. **(25min)**	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor abre el espacio en classroom para la entrega de la actividad correspondiente a este tema. **(2min)**		Del punto 10, de la sección 4 "ecuación general de la parábola" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10), el alumno entregará los ejercicios *p*, *q* y *r* como tarea.
Comentarios y observaciones de la sesión		

Parece que la estrategia del esquema dinámico en GeoGebra para comprender la traslación de los puntos fue muy buena, ya que pienso que ayudó mucho a comprender la traslación de un objeto geométrico, situación que favoreció bastante a originar las ecuaciones de las parábolas.

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema Aplicaciones de la parábola	**SESIÓN __11__ DE __12__**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión El alumno, en función de la resolución de problemas, aplicará los conocimientos adquiridos de la parábola y su ecuación para dar solución a varias problemáticas reales.		**Fecha de aplicación** 30 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Comentarios acerca de la presentación "El poder infinito de las parábolas" sobre las aplicaciones de las parábolas. **(3min)**		

ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor plantea un grupo de problemas cuya solución depende de un modelo parabólico, para que los alumnos encuentren e implementen dicho modelo que conlleve a su solución (véase material didáctico, anexo 2, punto 10, sección 5). Se realizarán al menos 3 ejemplos cuya solución se hará en conjunto. **(42min)**		
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
Conclusiones generales acerca de la importancia y presencia de las parábolas en nuestra vida cotidiana, además de que se abre el espacio en classroom para la entrega de la actividad correspondiente a		De la sección 5: "aplicaciones de la parábola" (véase material didáctico, anexo 2, punto 10), el alumno entregará 3 ejercicios de su elección para cumplir con esta tarea.

la evaluación de este tema. **(5min)**		
Comentarios y observaciones de la sesión En esta clase noté dudas preocupantes: hubo alumnos que me preguntaron sobre localización de puntos en el plano, otros que me preguntaron la resta de 2 – ½ (aritmética), una alumna sigue teniendo dudas sobre la propiedad de reflexión, y una alumna dijo textualmente: "no he puesto atención a su materia. Me cuesta mucho trabajo ponerle atención a las clases de mate en general". Aunque aclaré dichas dudas, me preocupa que los alumnos realmente hayan entendido, sobretodo, me preocupa la alumna que hace esta declaración. Me parece que me equivoqué en esta estrategia, ya que los alumnos presenciales trabajaron muy bien, y noté que en todos los equipos colaboraban entre ellos para la solución de los problemas y sus propias dudas. Por otro lado, siento que abandoné un tanto a los alumnos en línea, ya que, aunque algunos mostraron sus trabajos y dudas, hubo otros que me di cuenta que no estaban trabajando, ya que no avanzaban nada del ejercicio. Hubo un alumno en línea que me comentó textualmente "no he empezado el ejercicio" después de aproximadamente 35 min de haber iniciado la clase. Tengo que pensar en otra estrategia que me ayude a atraer a esos alumnos que se quedan rezagados. Sé que es parte del desarrollo humano también, pero me parece que debo hacer lo posible porque no quede en mí.		

PLANEACIÓN DE CLASE PARA PRÁCTICA DOCENTE III 2022 – II		
Titulo del Tema Aplicaciones de la parábola	**SESIÓN _12_ DE _12_**	**Tiempo total _50_ minutos**
Propósitos de la sesión		**Fecha de aplicación**
Evaluar los conocimientos adquiridos por el alumno después de la secuencia completa.		31 / Marzo / 2022
ACTIVIDADES DE APERTURA		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Proceso de Evaluación**
Saludos cordiales. Presentación del examen post-test. **(3min)**		
ACTIVIDADES DE DESARROLLO		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
El profesor proporciona el examen post-test a los alumnos presenciales y habilita el formulario de Google para los alumnos en línea **(2min)**.	Los alumnos realizan el examen post-test **(45min)**.	
ACTIVIDADES DE CIERRE		
Realizadas por el Docente	**Realizadas por los Estudiantes**	**Evaluación**
		Los alumnos conocerán su calificación vía correo electrónico, independientemente de

		la modalidad en que hayan realizado su examen.
Comentarios y observaciones de la sesión A diferencia de la sesión anterior, me doy cuenta que los alumnos han adquirido una mayor habilidad en el manejo los elementos de la parábola, ya que logramos avanzar sin problemas con los ejemplos. Hoy noté un mejor dominio algebraico, de conceptos, así como una mejor visualización geométrica.		

Anexo 2.- Material didáctico

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

POSGRADO MADEMS MATEMÁTICAS

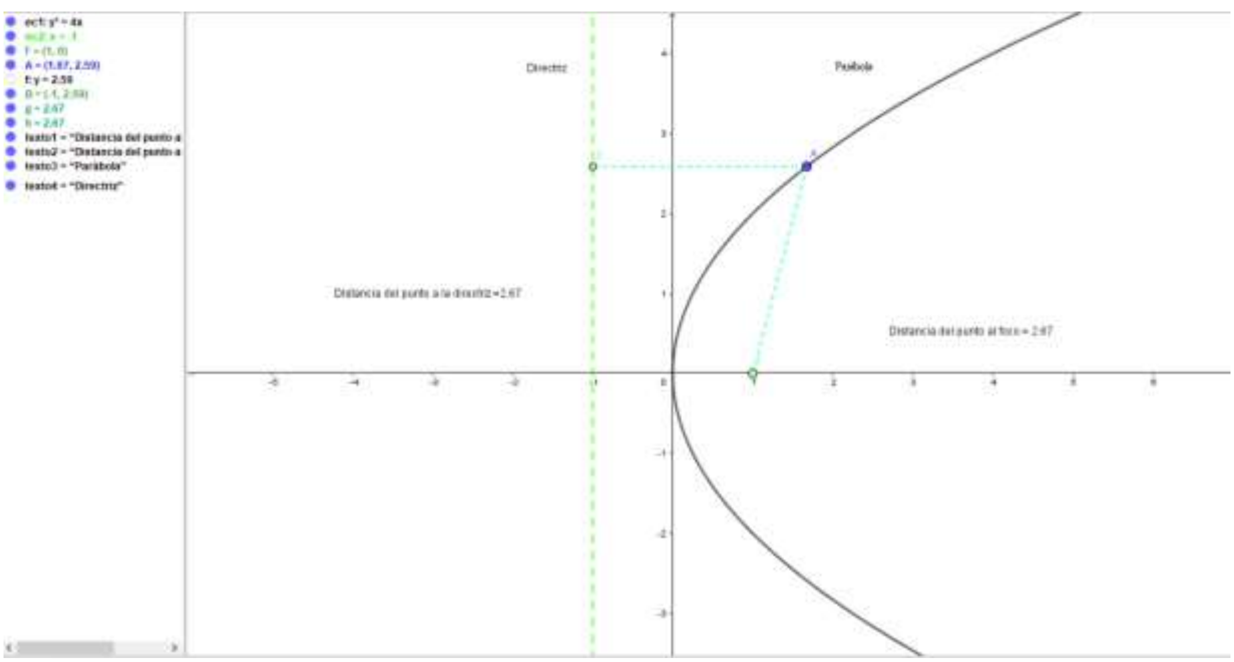
PRÁCTICA DOCENTE III   SEMESTRE 2022 - II

MATERIAL DIDÁCTICO

Prof. Jorge Luis Barragán Monroy

“Un docente no debe renunciar nunca a la necesidad de reinventar formas de trabajo con sus alumnos” (Meirieu, citado por Díaz – Barriga, 2014)

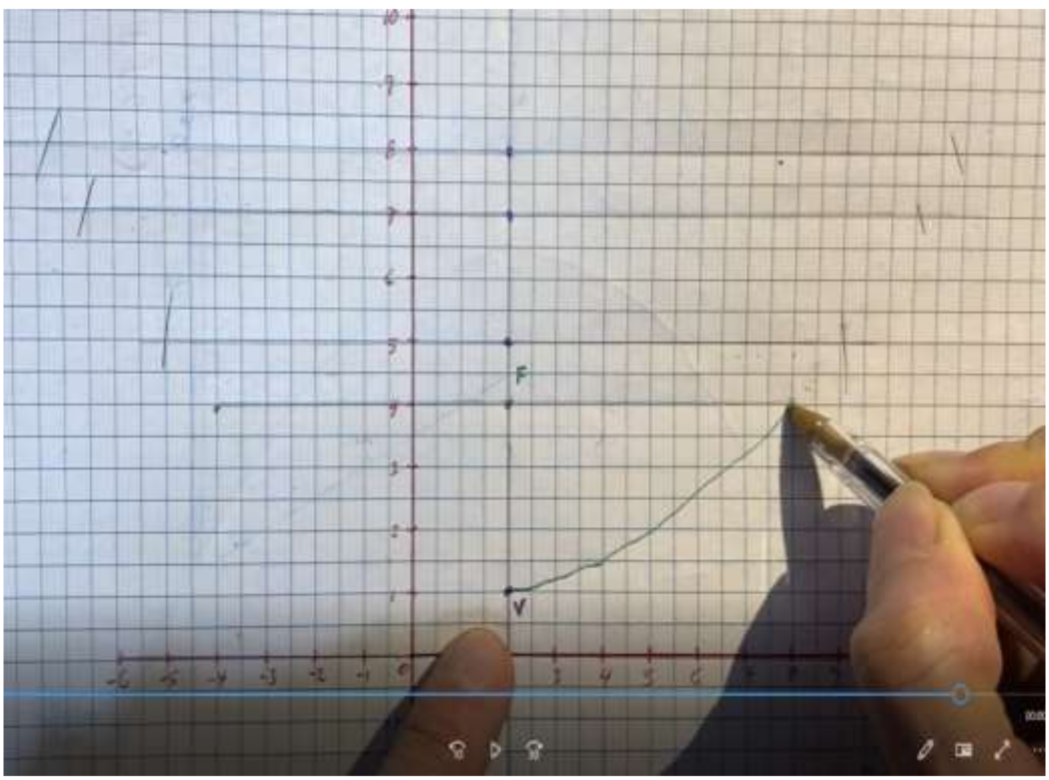
1) Esquemas para la definición de la parábola y sus elementos:



2) La construcción manual de la parábola con regla y compás se realiza a través de las siguientes instrucciones:

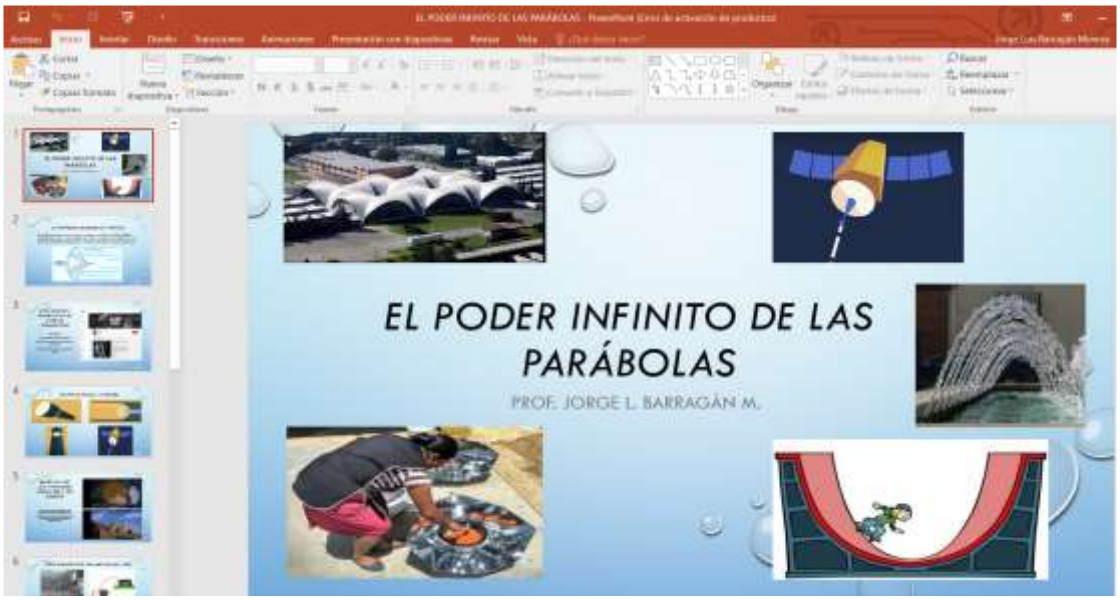
a) Se localiza el vértice y el foco (a elección del alumno)
b) Se trazan los ejes de simetría y la directriz, llamando al punto de su intersección O.
c) Se proponen tres o cuatro puntos cualesquiera sobre el eje de simetría y después del foco.
d) Por estos puntos (1, 2, 3, 4), se trazan rectas paralelas a la directriz, correspondientes a cada punto.
e) Se toma la abertura del compás de O hasta el punto 1, y apoyándose en el foco se trazan unos arcos que cortan a la recta 1 en dos puntos que pertenecerán a la parábola (¿por qué?)
f) Se repite el paso (e) con los demás puntos (2, 3 y 4).
g) Se traza el lado recto de la parábola. Los extremos del lado recto son puntos de la parábola que nos sirven para el trazo. ¿Por qué mide 4p?
h) Se traza la parábola con los puntos encontrados en las rectas paralelas, así como de los extremos del lado recto.

Para hacer la representación visual de esta construcción, se proyectará el siguiente video:



El video puede apreciarse de manera completa en el siguiente link: https://youtu.be/fFTJ9t3eh-o

3) Presentación: "*El poder infinito de las parábolas*"



4) Video: "Catenaria: la curva favorita de Gaudí que hace que no se caigan los puentes" https://www.youtube.com/watch?v=NnjnlxfB_D8

Actividad de la propiedad de reflexión

Se puede comprobar la propiedad de reflexión geométricamente a través del siguiente proceso.

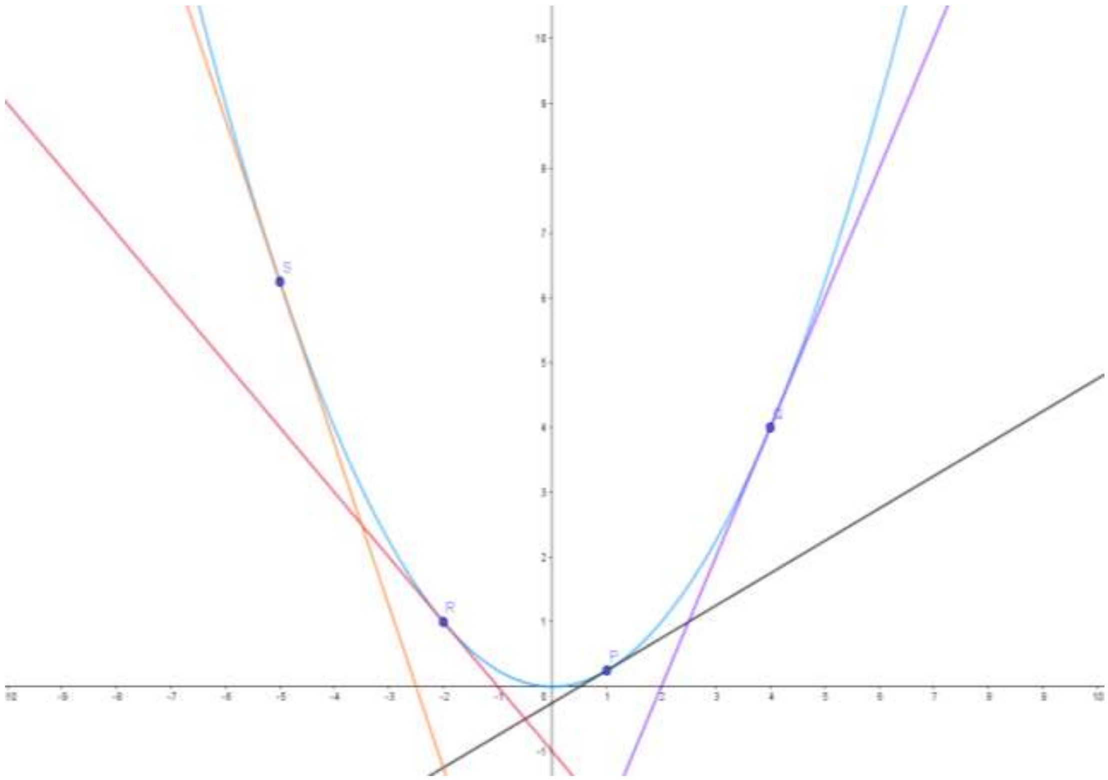
Instrucciones: *En el siguiente esquema se da una parábola con 4 tangentes dibujadas. Para cada punto de tangencia…*

1) *Traza el rayo que llega verticalmente hacia la parábola.*
2) *Mide el ángulo que forma el rayo con respecto de la tangente.*
3) *Traza el rayo reflejado teniendo en cuenta que debe conservar el mismo ángulo anterior respecto de la tangente.*

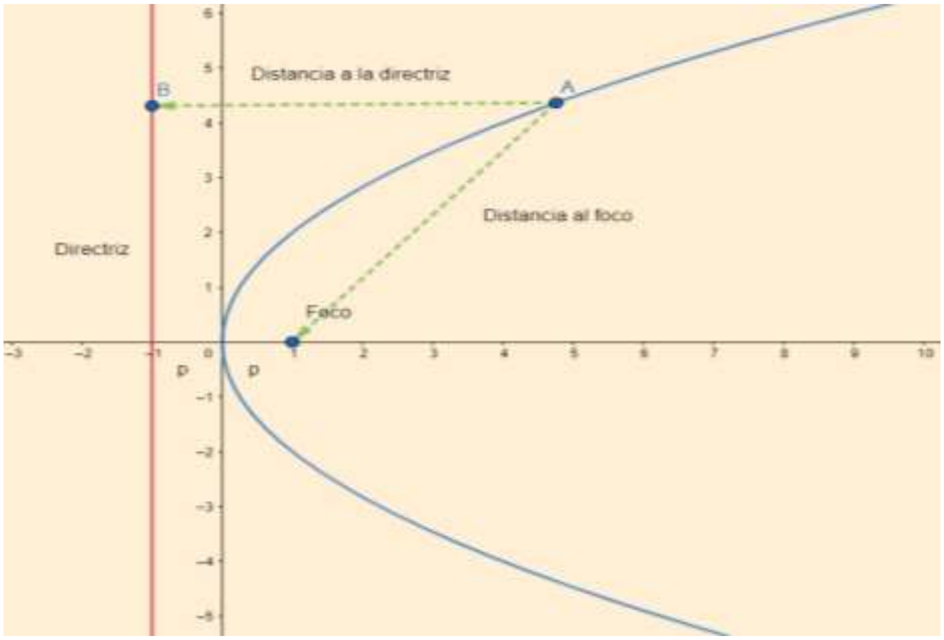
Las coordenadas de los puntos de tangencia son:

- $S = (-5, \frac{25}{4})$
- $R = (-2, 1)$
- $P = (1, \frac{1}{4})$
- $Q = (4, 4)$

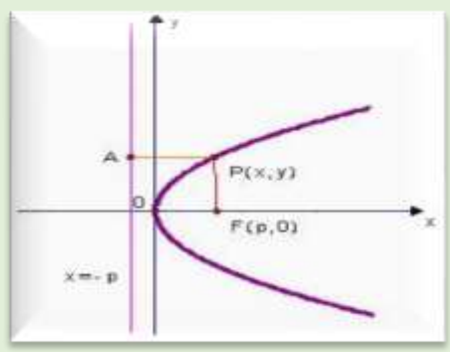
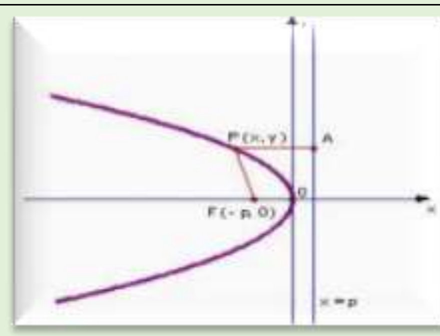
¿Dónde se encuentra el foco de esta parábola?

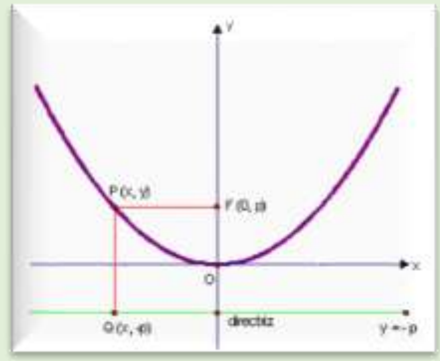
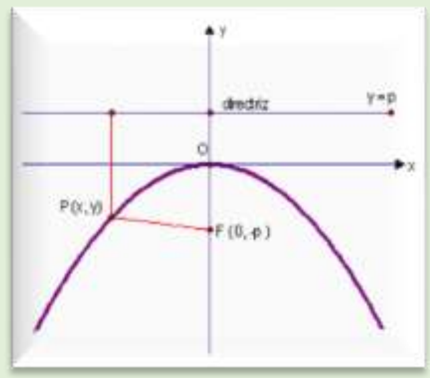


5) Esquema de GeoGebra para la obtención de la ecuación de la parábola $y^2 = 4px$:



6) Tabla de las ecuaciones de la parábola que se completará con los alumnos:

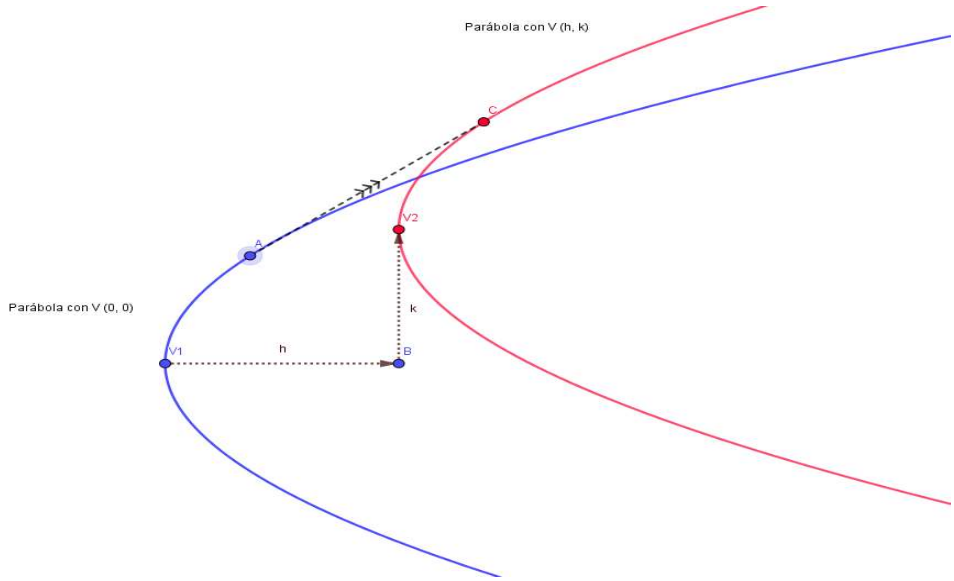
Inciso	**Ecuación en forma canónica**	**Tipo de parábola** V **(h, k)**	**Visualización general**
A	$y^2 = 4px$	Horizontal que abre hacia la derecha	
B	$y^2 = -4px$	Horizontal que abre hacia la izquierda	

C	$x^2 = 4py$	Vertical que abre hacia arriba	
D	$x^2 = -4py$	Vertical que abre hacia abajo	

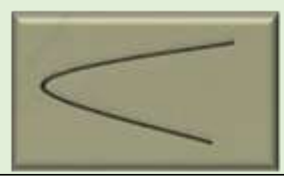
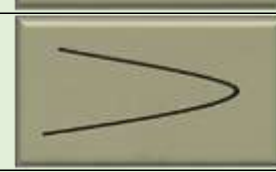
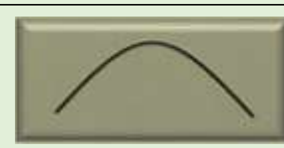
7) Ejemplos a realizar en conjunto con los alumnos:

a) Determine la ecuación de la parábola con V (0, 0) y $p = 2$, sabiendo que la parábola abre hacia la izquierda. Grafica.
b) Determine la ecuación de la parábola sabiendo que F (0, 4) y que la ecuación de su directriz es $y + 4 = 0$. Grafica.
c) Determina la ecuación de la parábola vertical con V (0, 0) sabiendo que pasa por el punto P (6, -3). Grafica.

8) Esquema de geometría dinámica en GeoGebra para la obtención de las ecuaciones canónicas de la parábola con vértice fuera de origen:



9) Tabla de ecuaciones canónicas de la parábola para completar por los alumnos:

Inciso	**Ecuación en forma canónica**	**Tipo de parábola** ***V* (h, k)**	**Visualización general**
A	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Horizontal que abre hacia la derecha	
B	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	Horizontal que abre hacia la izquierda	
C	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Vertical que abre hacia arriba	
D	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	Vertical que abre hacia abajo	

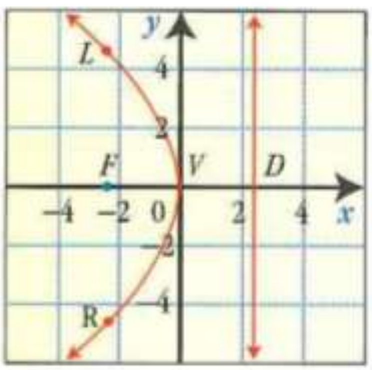
10) Ejercicios propuestos:

Sección 1: *Parábola con vértice en el origen*

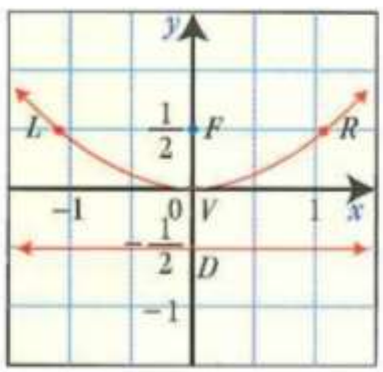
a) Asocia cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica respectiva:

1) $x^2 = 2y$
2) $2x^2 = 6y$
3) $y^2 = -9x$
4) $y = 2x^2$
5) $-6x = y^2$
6) $4x^2 + 8y = 0$

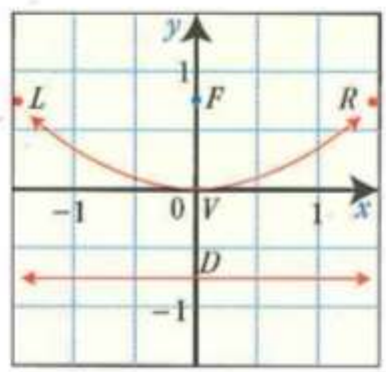
I



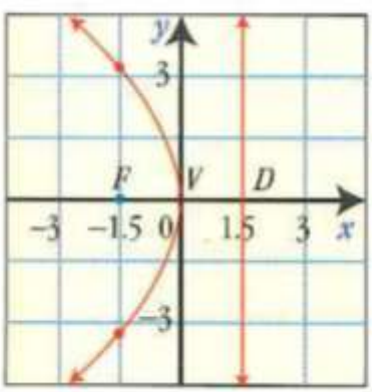
II



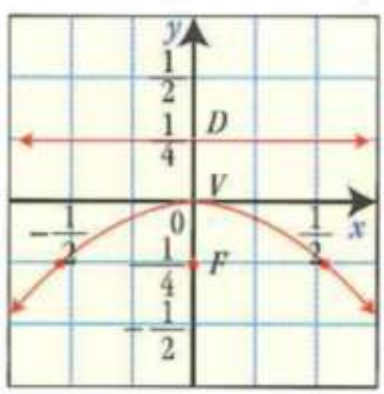
III



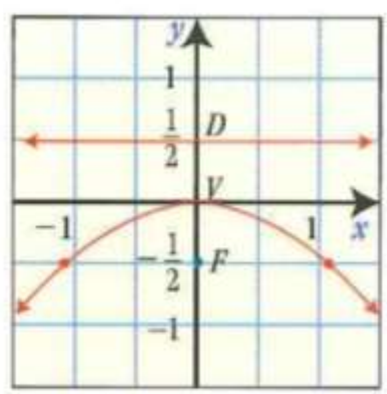
I



II



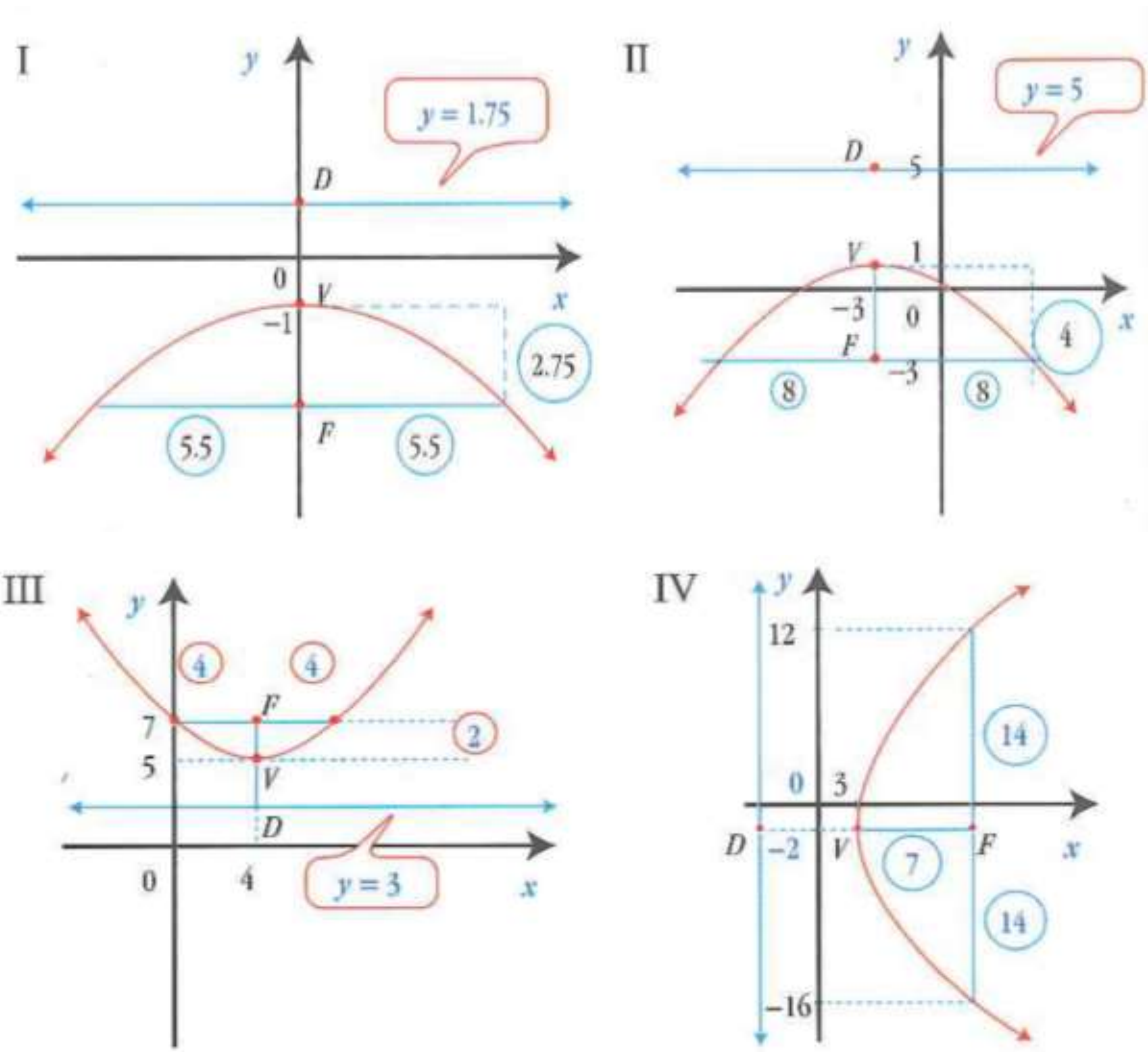
III

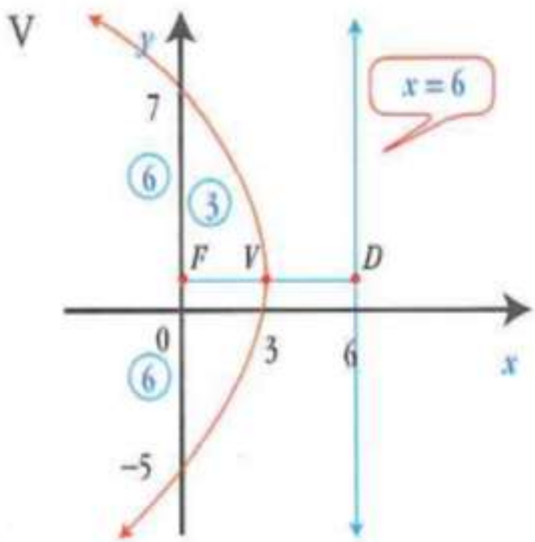


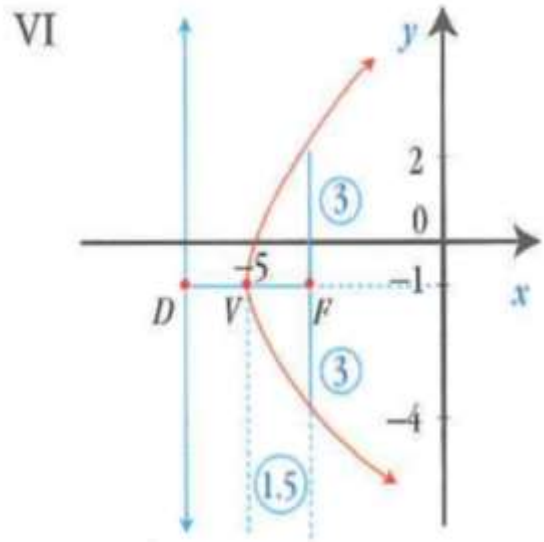
Sección 2: *Parábola con vértice fuera del origen*

b) Determina el valor de p de las siguientes parábolas. Escribe las coordenadas de vértice y el foco para cada una de ellas, y asocia cada ecuación con la gráfica que le corresponda:

1) $(x-4)^2 = 8(y-5)$
2) $(y-1)^2 = -12(x-3)$
3) $(y+1)^2 = 6(x+5)$
4) $(x+3)^2 = -16(y-1)$
5) $(y+2)^2 = 28(x-3)$
6) $x^2 = -11(y+1)$







c) Determine la ecuación general de la parábola con F (2, -4) y directriz x + 2 = 0. Grafica.
d) Determine la ecuación general de la parábola con V (3, -2) y F (4, -2). Grafica.
e) Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y F (0, 3). Grafica.
f) Determina la ecuación general de la parábola vertical con V (2, 2) y que pasa por el punto H (6, 4).
g) Determine la ecuación general de la parábola con F (-2, 4), p = 5/2. La parábola abre hacia la izquierda. Grafica.
h) Determine la ecuación de la parábola sabiendo que V (0, 0), p = 3/2 y que la parábola abre hacia arriba. Grafica.
i) Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco se localiza en F (-2, 4) y p = 3/2. El eje de simetría es paralelo al eje x y la parábola abre hacia la izquierda.

Sección 3: *Ejercicios avanzados*

j) Determine la ecuación general de la parábola cuyo vértice se encuentra en el punto de intersección de las rectas $-2x + y - 2 = 0$ y $2x + y + 6 = 0$, sabiendo que p = 2 y que la parábola abre hacia abajo. Grafica.
k) Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto de intersección de las rectas $2x + y + 5 = 0$ y $-4x + 5y - 10 = 0$, sabiendo que p = 5/2 y que la parábola abre hacia la izquierda. Grafica.
l) Determina la ecuación de la parábola con vértice en el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, sabiendo que la parábola abre hacia la derecha y que p = 2. Grafica

m) Determina la ecuación de la parábola con V (2, 4) y que pasa por el punto de intersección de la recta $x + 2y - 4 = 0$ con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$. Grafica.
n) Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$, y que pasa por el punto E (5, 2). Grafica.
o) Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, sabiendo que la directriz es $y - 4 = 0$. Grafica.

Sección 4: *Ecuación general de la parábola*

p) Determina los elementos de la parábola $x^2 + 10x + 2y + 29 = 0$ y grafica.
q) Determina los elementos de la parábola $3y^2 + 24x + 12y + 60 = 0$ y grafica.
r) Sin convertir a la forma canónica y sin trazar la gráfica, responda: ¿es horizontal o vertical la parábola?, ¿hacia dónde abre?

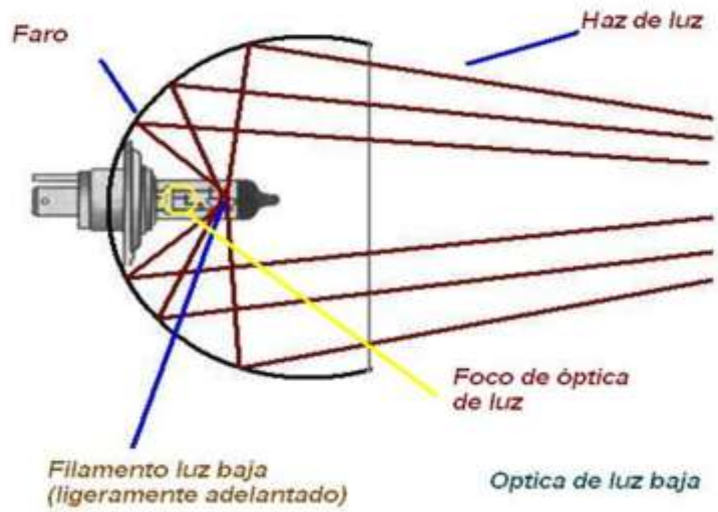
1) $x^2 - 2x + 3y + 6 = 0$
2) $y^2 + 3x - y = 0$
3) $x^2 + 6x - y + 4 = 0$
4) $y^2 + 7x + 2y = 0$
5) $x^2 + 4y + 8x = 0$
6) $y^2 - 5x + 10y - 5 = 0$

Sección 5: *Aplicaciones de la parábola*

s) Una antena parabólica de televisión tiene un diámetro de 1m. Si se sabe que tiene una profundidad de 20cm, ¿a qué distancia se debe colocar el receptor?, es decir, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

t) En una cocina solar, la parrilla se encuentra a 30cm por encima del fondo del paraboloide. ¿Cuánto debe medir la varilla que sostiene dicha parrilla?

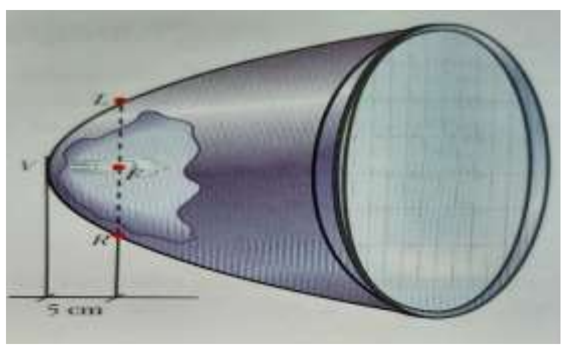
u) Un diseñador de automóviles trabaja en un faro que debe tener 32cm de diámetro. La bombilla que utilizará en él, tiene el filamento a 2cm del cuello (la base de la bombilla). Este filamento debe quedar a la altura del foco del faro. ¿Cuánto debe medir el cuello de la bombilla si ésta se coloca a la altura del vértice del faro?



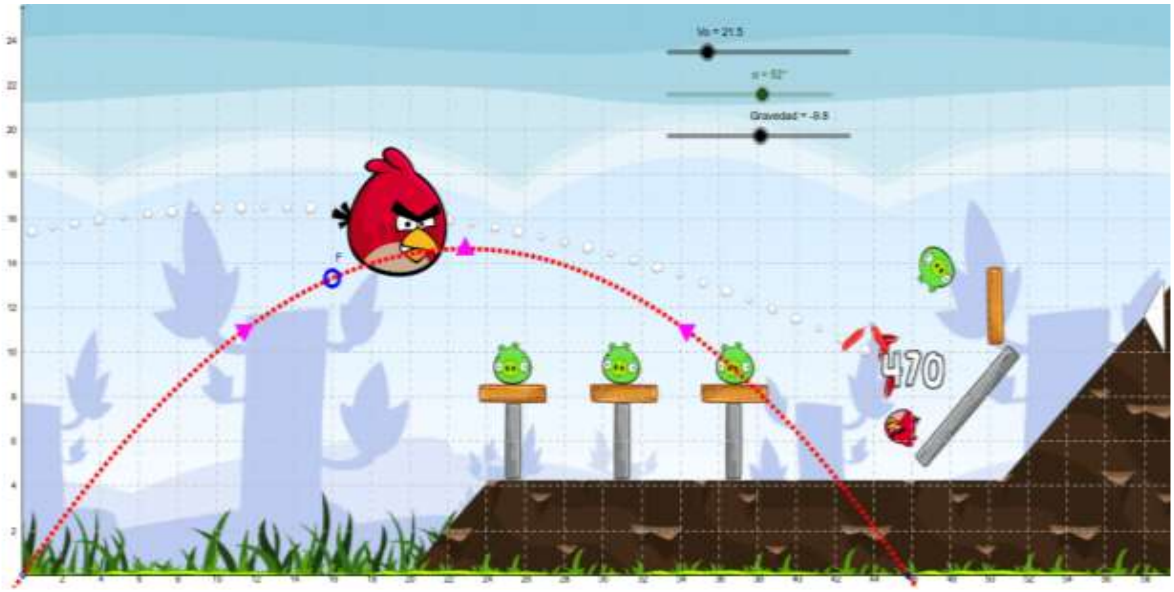
v) Un científico quiere construir un micrófono parabólico para hacer un documental sobre animales salvajes. Para esto, tiene un paraboloide de 28cm de diámetro (véase la ilustración) pero le hace falta colocar el micrófono. ¿A qué altura debe colocar este micrófono si al medir la profundidad del paraboloide resulta ser de 4.45cm?

w) Determine la altura de la antena del radiotelescopio mostrado en la imagen, si se sabe que tiene un diámetro de 20mts y una profundidad de 1m.

x) La figura muestra la distancia a la cual se halla situado el foco de luz, en el faro delantero de un automóvil. ¿Cuál es el ancho que tiene el faro delantero del automóvil?



y) El siguiente esquema muestra la trayectoria seguida por un ave de “Angry Birds”. Gracias a Galileo Galilei (1564 - 1642) sabemos que estas trayectorias son parabólicas. Si la altura máxima que alcanza el ave es 14.5*u* a 23*u* de su lanzamiento (como se aprecia en la imagen), determina la ecuación de la parábola que representa esta trayectoria.

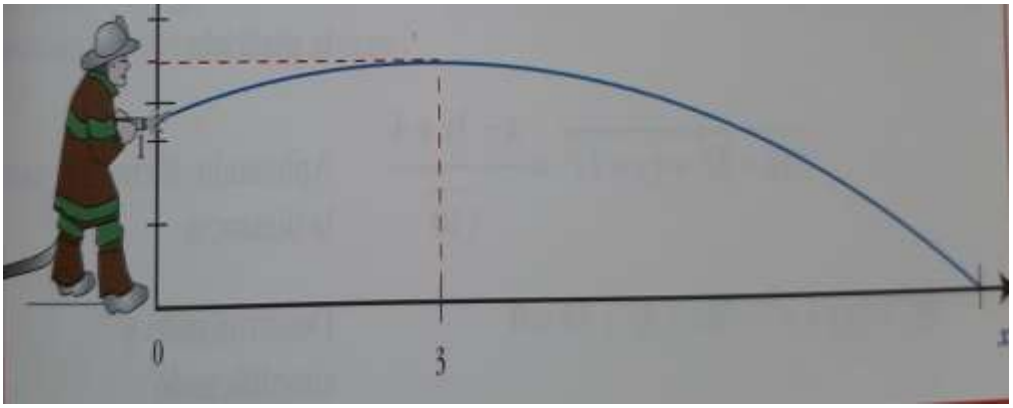


z) Unos amigos juegan con unas pistolas de gotcha. Por curiosidad, leen el reverso de la caja de las pistolas, donde se encuentran con el siguiente cuadro:

> Advertencia:
>
> Las balas disparadas con un ángulo aproximado de 25° por este producto, siguen la trayectoria:
>
> $$a = \frac{500d - 10d^2}{625}$$
>
> Donde a = altura alcanzada por el proyectil
>
> d = distancia horizontal alcanzada

Sabiendo esto, ¿cuál es la altura máxima promedio que puede alcanzar una bala disparada por estas pistolas?, ¿hasta qué distancia puede estar un oponente en el juego y alcanzarlo con una bala? Haga un bosquejo gráfico de la situación.

aa) El agua que lanza una manguera tiene un alcance horizontal de 9m y asciende a una altura máxima de 1.5m cuando está horizontalmente a 3m de su salida, como se muestra en la imagen. Determine la ecuación que describe la trayectoria de la manguera. ¿Qué altura alcanza el agua sobre el piso cuando está horizontalmente a 6m de la manguera?



1
0
3

Anexo 3.- Prueba Pre – test

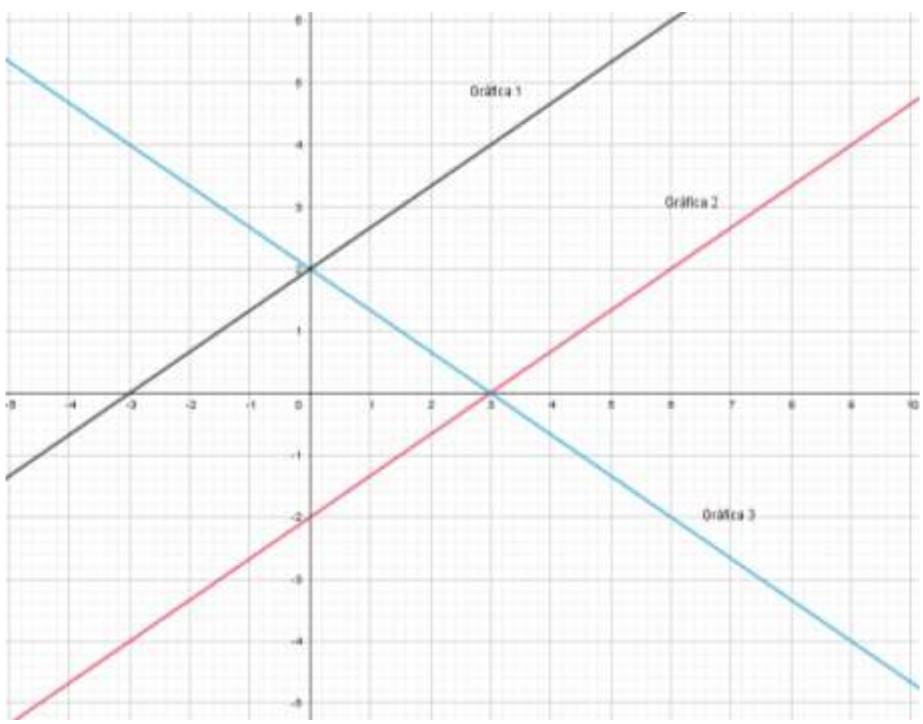
<u>Instrucciones</u>: En cada uno de los siguientes ejercicios aplica las técnicas adecuadas para elegir la respuesta correcta. Este examen no tendrá peso sobre tu calificación, sólo es para medir los conocimientos previos al tema que desarrollaremos.

1) Determine la ecuación general de la circunferencia con C (-1, 3) y radio r = 2

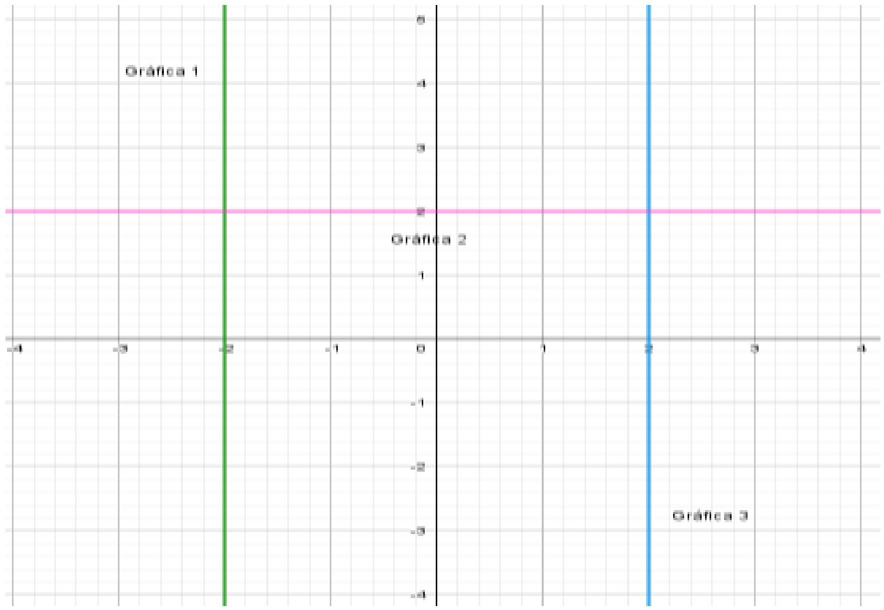
   a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$

2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

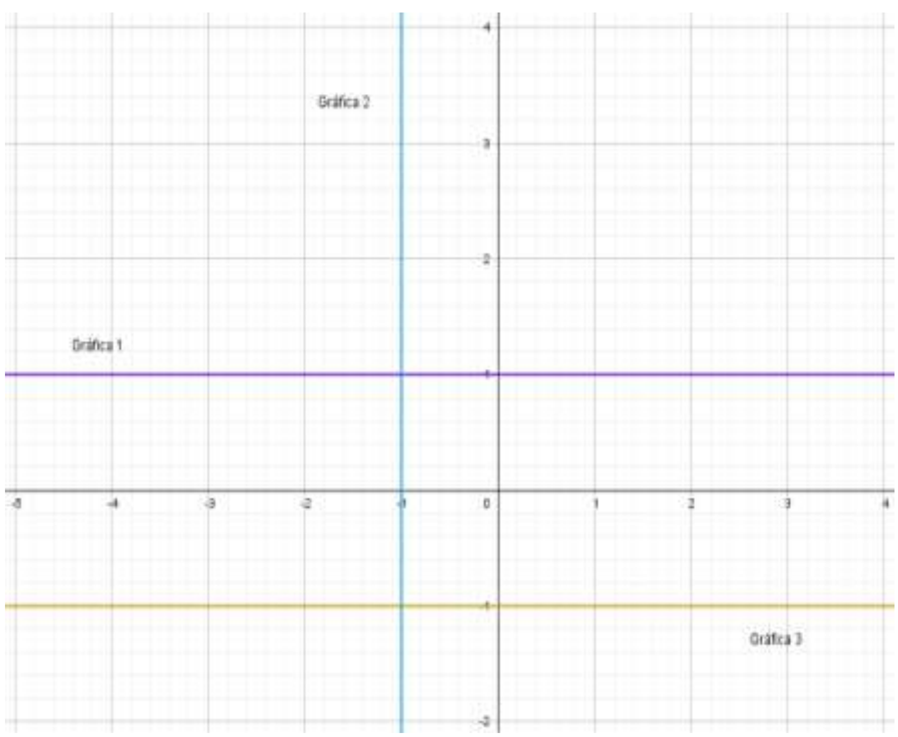
   a) $2x - 3y = 6$



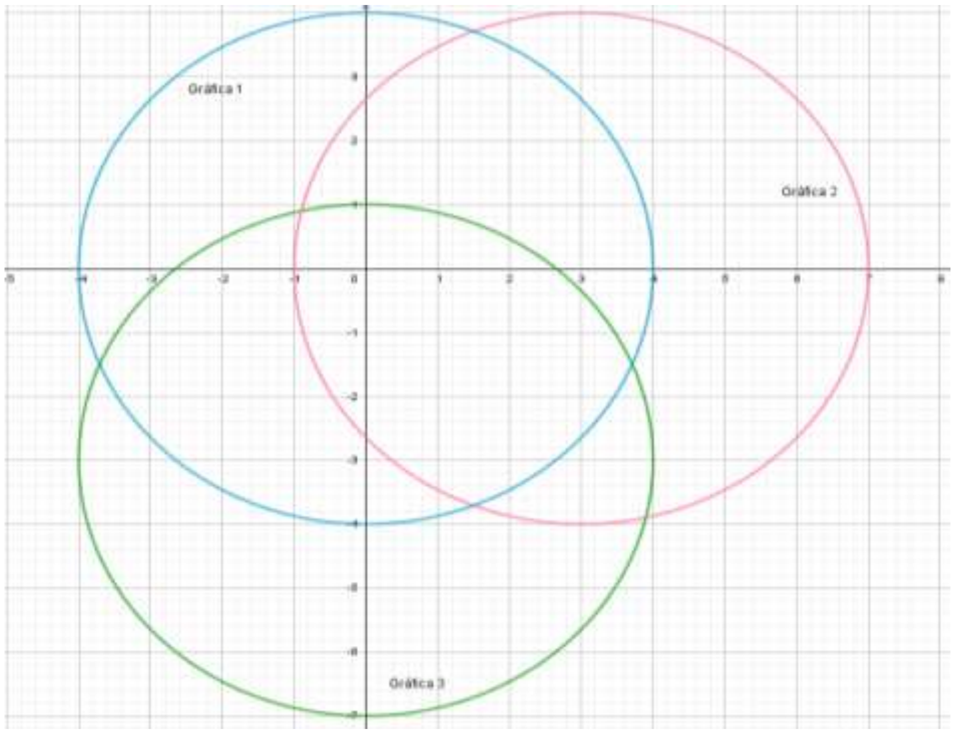
b) $x - 2 = 0$



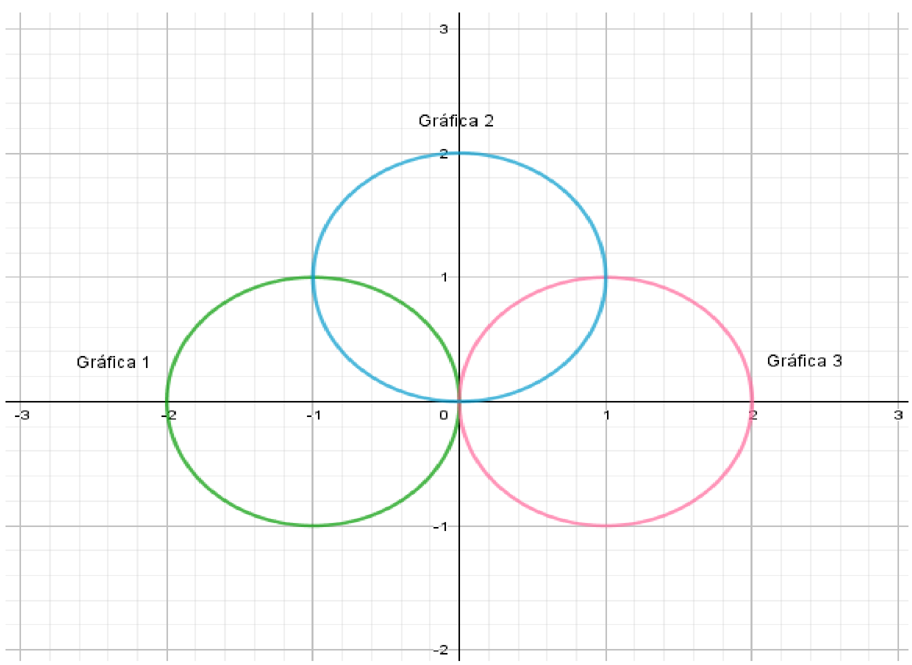
c) $y = -1$



d) $x^2 + (y+3)^2 = 16$

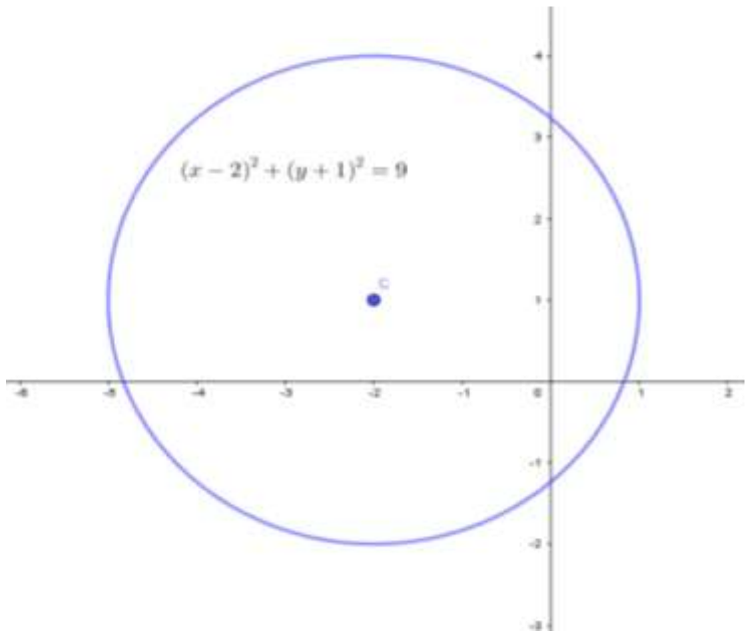


e) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

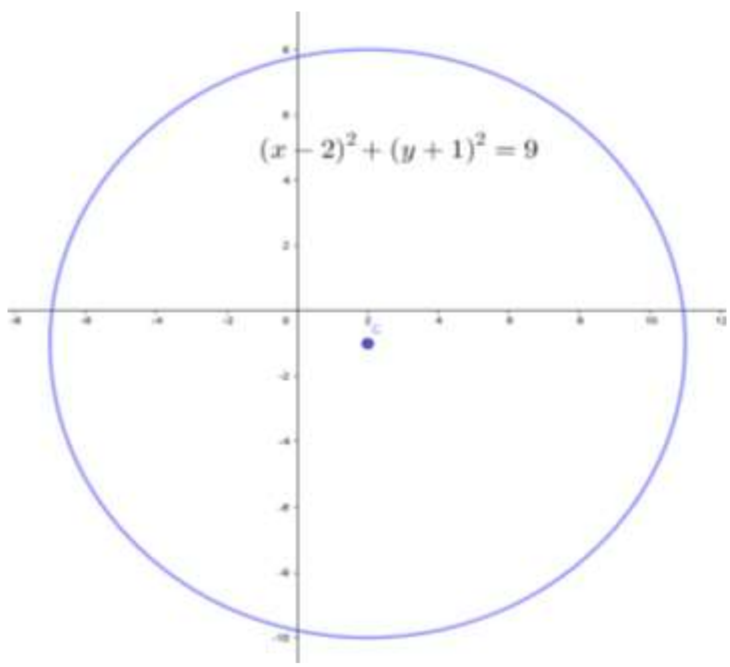


3) Identifica la gráfica que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

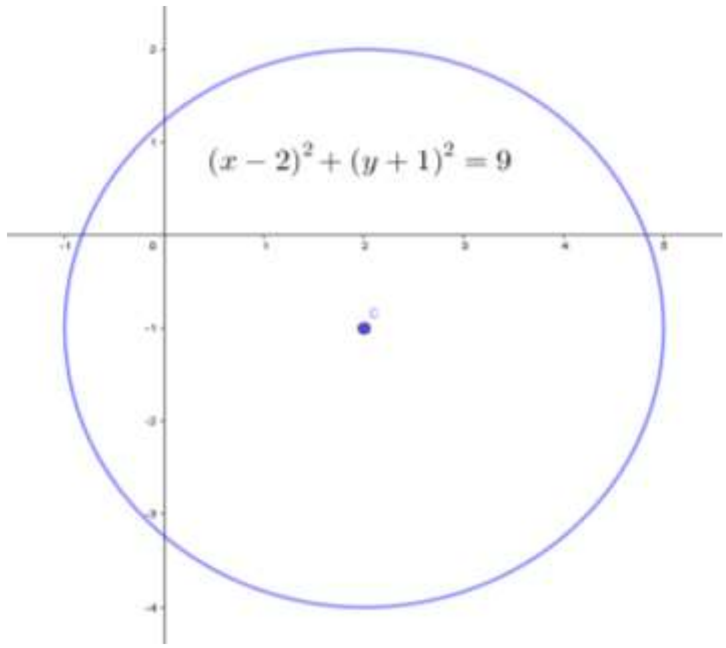
a)



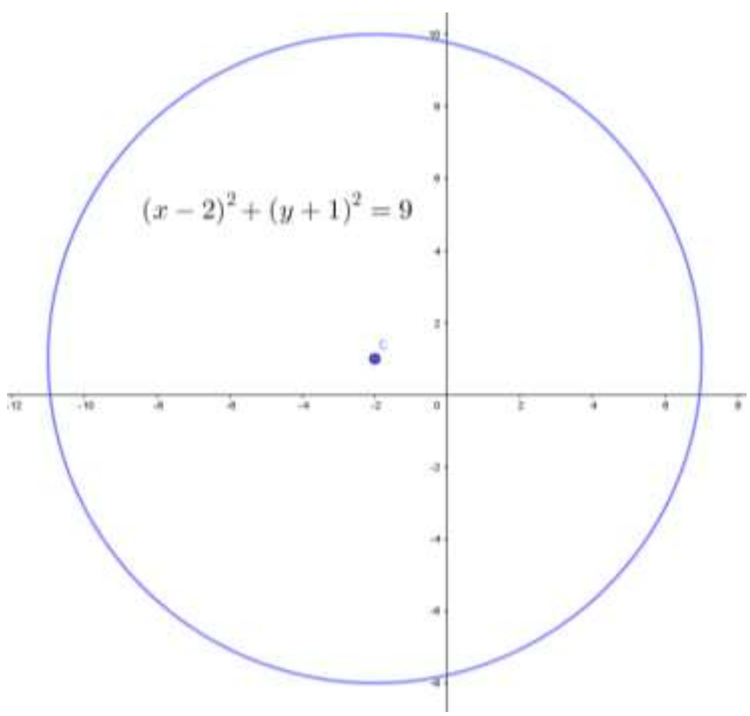
b)



c)



d)



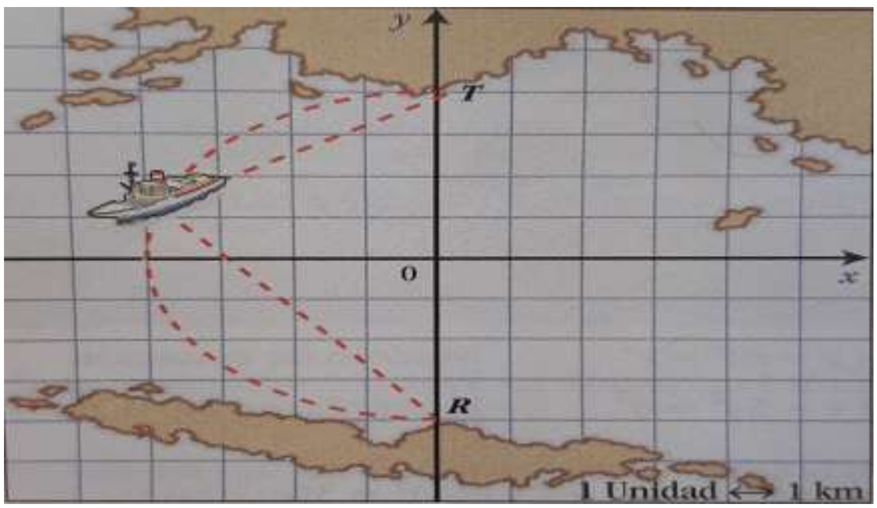
4) A través de un sistema de navegación por radio, un barco turista se traslada de una isla a otra, conservando cuidadosamente sus distancias a dos faros situados en los puntos T y R (como se muestra en la figura) para no perder su ubicación. Encuentre la ecuación que describe su trayectoria entre las islas.

a) $(x-4)^2+(y+1)^2=4$

b) $x^2+y^2=16$

c) $(x+4)^2+(y-1)^2=16$

d) $x^2+y^2=4$



5) Con base a la pregunta anterior, ¿cuál es la longitud de dicha trayectoria seguida por el barco?

i) $16\pi\ unidades$
j) 8 unidades
k) 4 unidades
l) $8\pi\ unidades$

Anexo 4.- Prueba Post – test

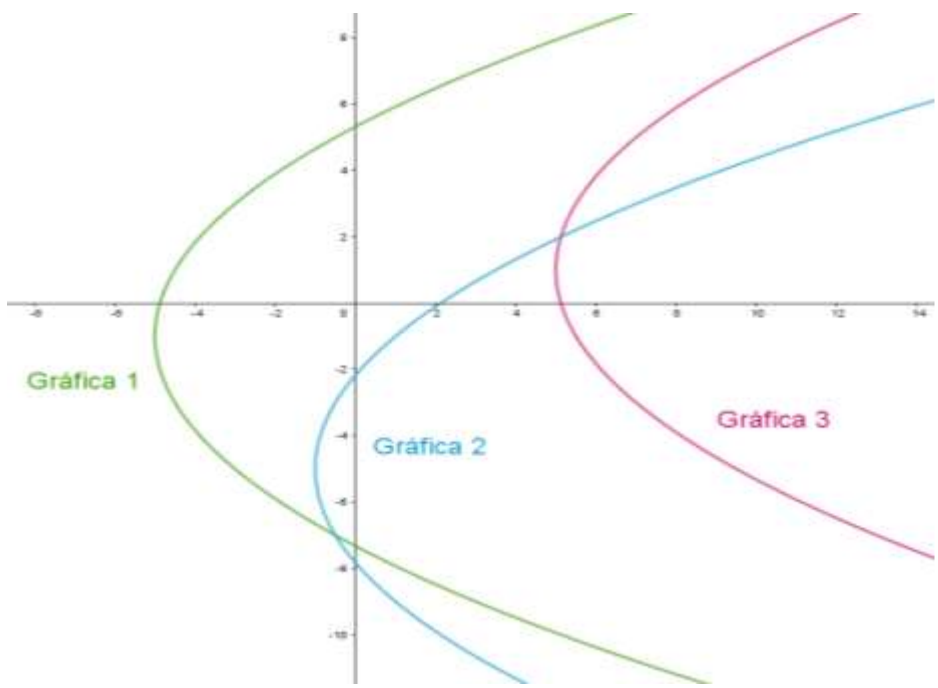
Instrucciones: En cada uno de los siguientes ejercicios aplica las técnicas adecuadas para elegir la respuesta correcta. Este examen no tendrá peso sobre tu calificación, sólo es para medir los conocimientos adquiridos con el tema de parábola.

1) Determine la ecuación general de la parábola con *F* (-2, -4) y directriz *x* - 2 = 0

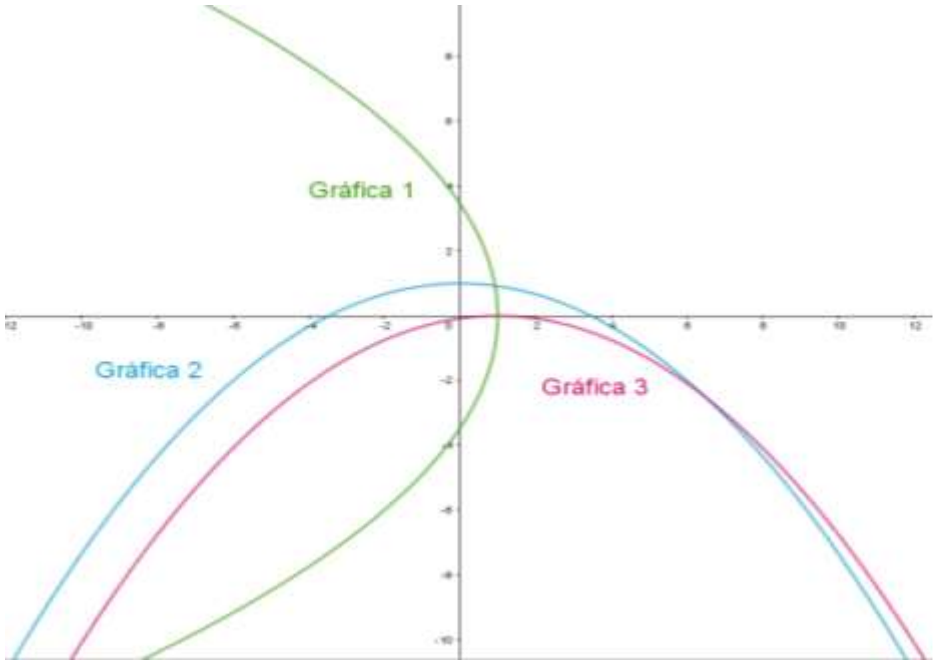
   a) $y^2 + 8y - 8x + 16 = 0$
   b) $y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$
   c) $y^2 + 8y + 8x + 16 = 0$
   d) $y^2 - 8y + 8x + 16 = 0$

2) En cada uno de los siguientes incisos se muestra una ecuación que debe relacionar con su gráfica respectiva. En los planos cartesianos de cada inciso se dan tres opciones. Elija la gráfica que le corresponda a la ecuación.

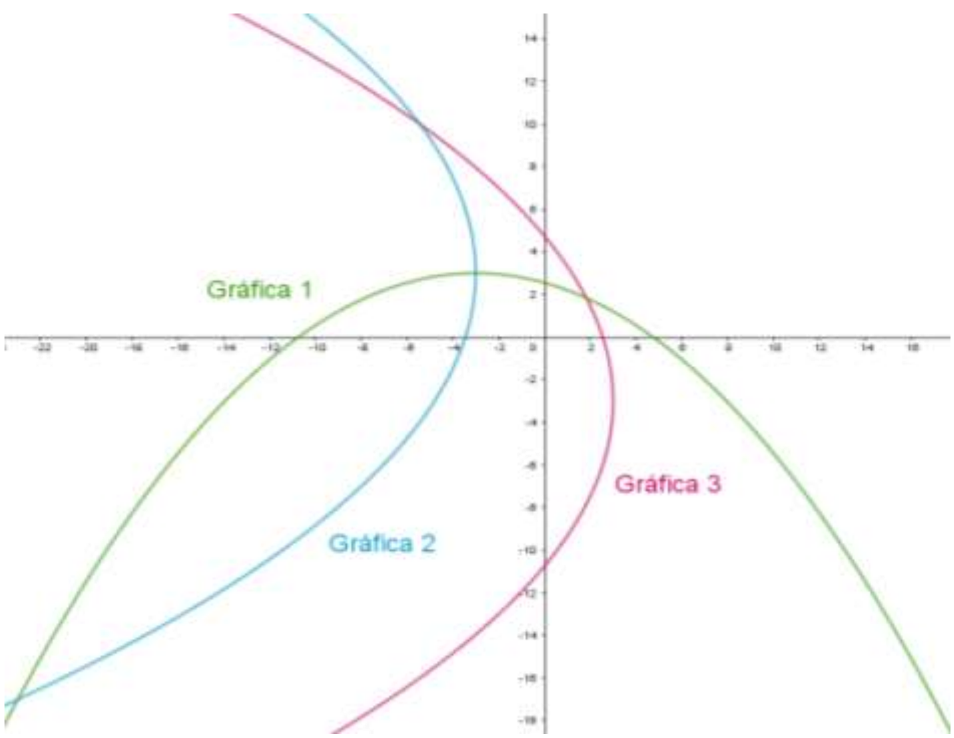
   a) $(y + 1)^2 = 8(x + 5)$



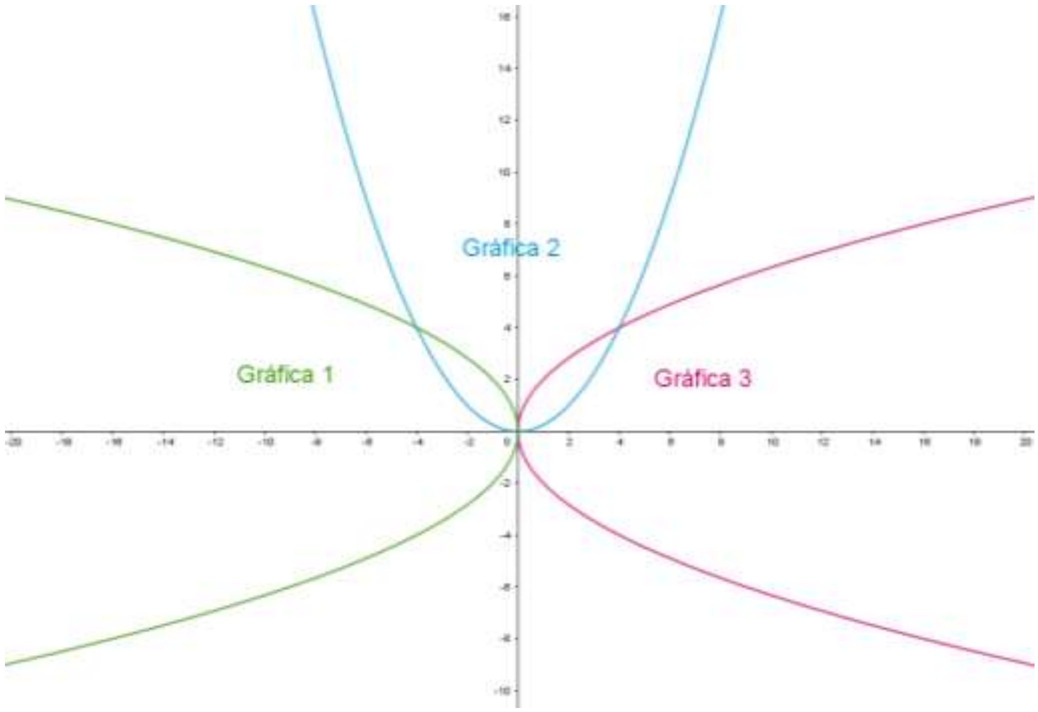
b) $x^2 = -12(y-1)$



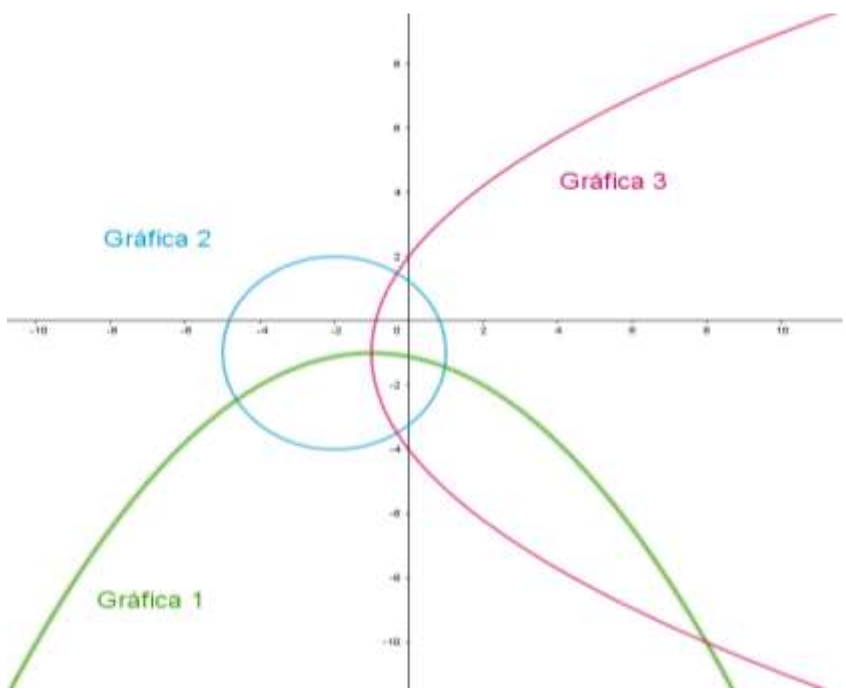
c) $(y+3)^2 = -20(x-3)$



d) $y^2 = 4x$

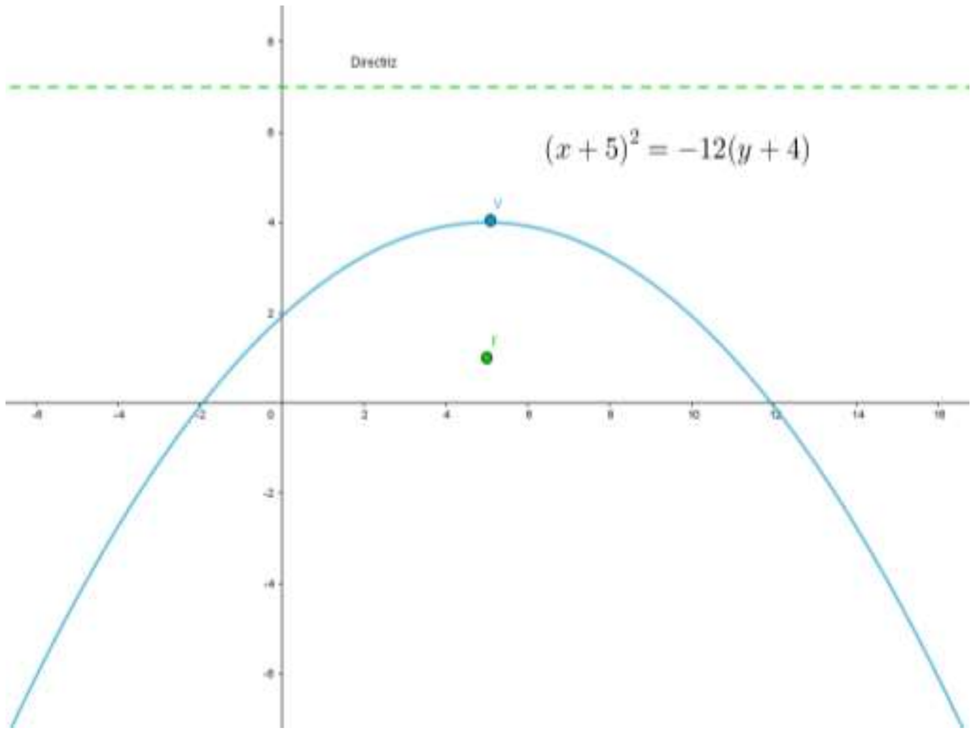


e) $(x+2)^2 = -(y+1)^2 + 9$

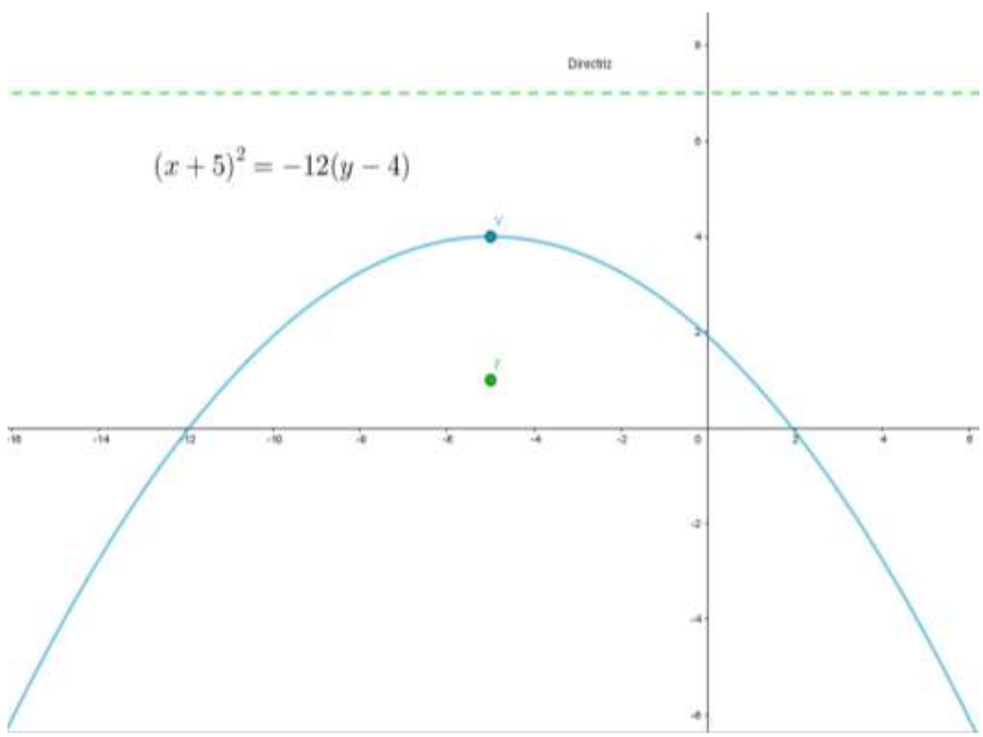


3) La gráfica que muestra todos los elementos correctos de la ecuación $x^2 + 10x + 12y + 73 = 0$, es:

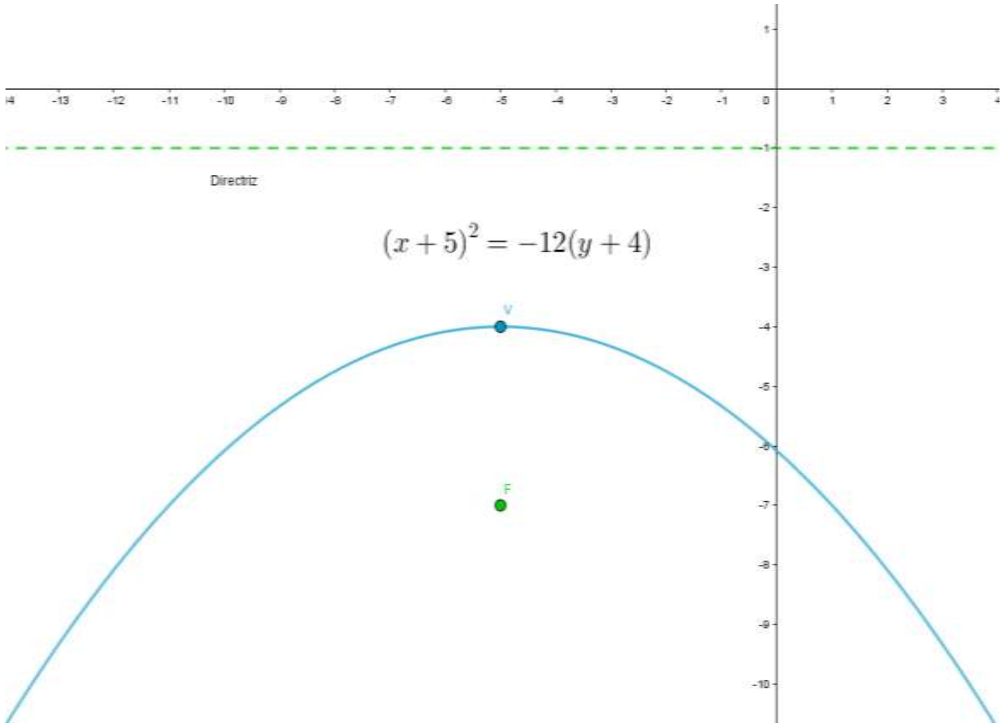
a)



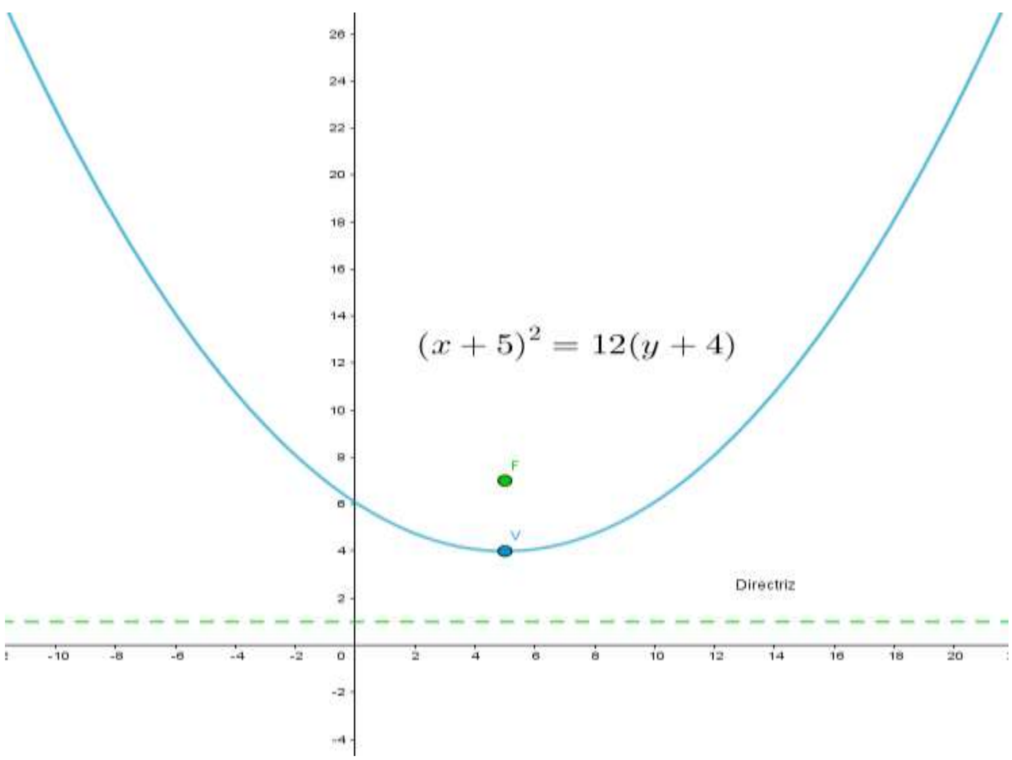
b)



c)



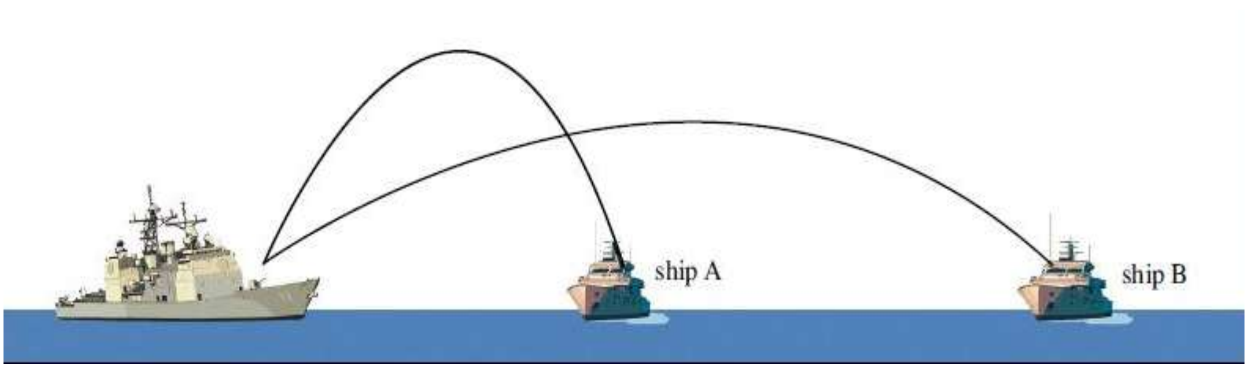
d)



4) Dentro del inmenso arsenal de armas del ejército ruso, están unos poderosos cañones de largo alcance fabricados en Inglaterra, que transportan en barco. Este cañón cuenta con la siguiente leyenda de fabricación:

> The parabolic throw described by this product with an average angle of inclination of 35°, is given by the mathematical equation:
>
> $$3d^2 - 6000d + 20000h = 0$$
>
> With: h = height / d = horizontal distance
>
> Made in England

El barco tiene en la mira dos embarcaciones extranjeras, como muestra la imagen. El general de la embarcación rusa da la orden a los militares de disparar al barco B, y los militares ajustan el cañón precisamente a 35°, haciendo un disparo perfecto. En estas condiciones, ¿a qué distancia horizontal alcanzó el disparo su máxima altura?



a) La altura máxima del disparo fue de 450mts y ocurre a una distancia horizontal de 3000mts.
b) La altura máxima del disparo fue de 150mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.
c) La altura máxima del disparo fue de 50mts y ocurre a una distancia horizontal de 1000mts.
d) La altura máxima del disparo fue de 3000mts y ocurre a una distancia horizontal de 450mts.

5) Con referencia al problema anterior, ¿a qué distancia se encuentra el barco B de la tripulación rusa?

a) "El barco B está a 20,000mts de distancia (lado recto de la parábola)"
b) "El barco B, por simetría de la parábola, está a 6000mts de distancia."
c) "El barco está a 2,000mts de distancia"
d) "El barco B está a $\frac{20000}{3}mts$ de distancia"

Anexo 5.- Evaluación de la profesora supervisora de la práctica docente

En este anexo se presenta evaluación de la profesora supervisora hacia el profesor practicante. Tal evaluación se hizo a través de la rúbrica proporcionada por el Programa de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior, a través de su página de internet.

MADEMS
Maestría en Docencia
para la Educación Media Superior

UNAM POSGRADO

Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

Rúbrica de Evaluación de Práctica docente

Este formato deberá ser llenado en su totalidad por el profesor superior.

Inicio de la clase

Presentación	5	6	7	8	9	10
Fue puntual al inciar la clase						x
Indicó la planeación de la clase						x
Informó a los estudiantes los criterios de evaluación					x	

Durante la actividad académica

Actitud docente	5	6	7	8	9	10
Propoció un ambiente de respeto y confianza						x
Manifestó apertura para la comunicación y el diálogo						x
Mostró control de grupo						x
Aclaró las dudas planteadas por los alumnos						x

Conocimiento y dominio de los contenidos	5	6	7	8	9	10
Mostró dominio del contenido de la clase						x
Explicó el tema de forma clara y concisa						x
Contextualizó el contenido						x

Habilidades pedagógicas	5	6	7	8	9	10
Implementó estrategias de enseñanza					x	
Detectó las ideas o conocimientos previos de los estudiantes						x
Generó un aprendizaje autorregulado					x	
Proporcionó instrucciones claras para realizar las actividades						x
Logró la participación activa e interés de los alumnos						x
Relacionó los contenidos de las actividades implementadas con actividades académicas del nivel Medio Superior						x

Uso de recursos y materiales	5	6	7	8	9	10
Utilizó recursos didácticos de manera adecuada				x		
Empleó técnicas de enseñanza acordes al objetivo de aprendizaje					x	
Incorporó recursos y materiales innovadores					x	

Al concluir la clase

Evaluación y afirmación de contenidos	5	6	7	8	9	10
Evaluó con equidad e imparcialidad						x
Realizó la evaluación de manera objetiva						x
Proporcionó actividades para reafirmar conocimientos					x	
Entregó oportunamente las correcciones y observaciones de los trabajos derivados de la clase					x	
Finalizó la clase a tiempo						x

Valoración del alumnado

	Cumple	No cumple
Empatía	x	
Manejo de la voz	x	
Lenguaje corporal	x	
Dominio de contenido	x	
Motivación	x	

Nombre completo del alumno: Jorge Luis Barragán Monroy

Campo de conocimiento del alumno: Matemáticas

Nombre de la institución de realización de la práctica docente: El Colegio A.C.

Fecha o periodo de realización de la práctica docente: 14/Marzo/22 - 5/Abril/22

Evaluación global del alumno MADEMS (numérica): 9.62

Nombre completo del profesor supervisor: Lic. Gloria Maricela García Landaverde

Entidad de adscripción del profesor supervisor: El Colegio A.C.

Referencias

"Es sólo en las misteriosas ecuaciones del amor que existe una razón verdadera" Grazer y Howard (2010)

Acevedo, A. (2013). El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media (tesis de magister). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de formación a Distancia. (Memoria de tesis doctoral). Universidad de Barcelona, Barcelona. Recuperado de https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Almeida02.pdf.

Alsina, C., J. Fortuny, R. Pérez (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.

Arce, J. (2002). *El matemático del Rey*. España: Planeta.

Aray, C.A., Párraga, O., y Chun, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. Rehuso, 4(2), 20 - 31. Recuperado de: https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1622.

Aroca, A. 2019. La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. Rev. U.D.C.A Act. & Div. Cient. 22(1): e1222. https://doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222.

Bazán, J. (2014, 21 de mayo). Un acercamiento a la definición de modelo educativo. Foro de Consulta Nacional para la Revisión del Modelo Educativo. Recuperado de http://memoria.cch.unam.mx/tmp/pdfarticulo/122/JosedeJesus_Bazan_Levy_1414778440.pdf.

Berruecos, A. (2020). ¿De qué hablamos cuando hablamos de educación a distancia híbrida? Comunicación Institucional de la Universidad Iberoamericana Ciudad de México. Recuperado de https://ibero.mx/prensa/de-que-hablamos-cuando-hablamos-de-educacion-distancia-hibrida.

Berrum de Labra, J. (Ed.). (1995). *Maestro de excelencia*. Ciudad de México, México. Fernández Editores.

Bishop, A. (2005). Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática. Programa Editorial Universidad del Valle. (Cali). 199p.

Barillé, A. (Productor). (1994). *Érase una vez los inventores* [serie de televisión]. Francia: PROCIDIS.

Barillé, A. (Productor). (2013). *Érase una vez los inventores* [serie de televisión]. Francia: PROCIDIS. De https://www.youtube.com/watch?v=2SCfgi-pYsA.

Carreón, C. (2012). *Trigonometría y Geometría Analítica*. Ciudad de México, México. Editorial Ducere, S.A. de C.V.

Castillo, Naix'ieli (2021, 7 de junio). Modalidad híbrida para la educación en tiempos de coronavirus. *Ciencia UNAM*. Recuperado de http://ciencia.unam.mx/leer/1125/modalidad-hibrida-para-la-educacion-en-tiempos-de-coronavirus#:~:text=%C2%BFC%C3%B3mo%20es%20la%20modalidad%20h%C3%ADbrida,no%20en%20un%20horario%20fijo.

De la Rosa, L. Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador geométrico. Recuperado de https://docplayer.es/24797636-Una-propuesta-didactica-para-abordar-la-parabola-utilizando-un-procesador-geometrico.html.

Delgado, Paulette (2020, 23 de junio). Aprendizaje sincrónico y asincrónico: definición, ventajas y desventajas. *Observatorio del Instituto para el Futuro de la Educación*. Recuperado de https://observatorio.tec.mx/edu-news/aprendizaje-sincronico-y-asincronico-definicion.

De Oteyza, E., et. al. (2011). *Geometría Analítica*. Estado de México, México. Editorial Pearson.

Diario Oficial de la Federación (2020). *Acuerdo 02/03/20*. Recuperado de https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5589479&fecha=16/03/2020.

Díaz - Barriga, A. (septiembre del 2019). *El currículum ante la didáctica y sus retos*. Universidad Autónoma de Tlaxcala, Centro de Investigación Educativa. *Currículum 2019*. Congreso Internacional de Educación llevado a cabo en Tlaxcala, México. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=l3f_YnKWYWw.

Díaz – Barriga, A. (marzo del 2014). *Evaluación y Reforma Educativa: Un desafío para la Educación Media Superior*. Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la Escuela de Bachilleres. Conferencia Magistral llevada a cabo en Querétaro, México. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=9s4bNA61Qz4.

Díaz – Barriga, A. (2019). Los normalistas ante los retos de la profesión docente. Congreso Nacional de Investigación sobre Educación Normal, *3er Congreso Nacional de Investigación sobre Educación Normal*. Conferencia magistral llevada a cabo en Tijuana, Baja California. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=hZYZYoEkl38&t=752s.

Díaz - Barriga, A. y Orozco, B. (octubre del 2014). Currículum en educación. Ministerio de Educación Santa Fe. *Fortalecimiento de la Educación*. Conferencia magistral llevada a cabo en Santa Fe, Argentina. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=lqkwqVzxjw0.

Díaz – Barriga, A. (enero del 2021). Desarrollo de secuencias didácticas. Universidad Autónoma de Tlaxcala, Secretaría Académica. Foro: "*Jornadas de formación y actualización docente, primavera 2021*", llevado a cabo en Tlaxcala, México. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=0U4F8bXcu70.

Díaz – Barriga, A. (agosto, 2021). Evaluación de los aprendizajes en el trabajo a distancia y el híbrido. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Secretaría Académica. Capacitación docente "*El contexto universitario ante la nueva normalidad, Otoño 2021"*. Tlaxcala, México. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ATl5nquCubk&t=2s.

Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria (1996). Escuela Nacional Preparatoria. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://enp.unam.mx/assets/pdf/planesdeestudio/5to/1500_matematicas_5.pdf.

Eggen y Kauchak (2009). Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento. Ciudad de México, México: Fondo de Cultura Económica.

Ferri, E. (productor) y Benigni, R. (director). (1997). *La vida es bella* [Cinta cinematográfica]. Italia: Cecchi Gori Group.

Freire, P. (2004). *Pedagogía de la autonomía*. Sao Paulo, Brasil: Paz e Terra SA.

García Aretio, L. (2020). Bosque semántico: ¿educación/enseñanza/aprendizaje a distancia, virtual, en línea, digital, eLearning…? RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 23(1), pp. 09-28. doi: http://dx.doi.org/10.5944/ried.23.1.25495.

García, M. (2011). La Geometría Dinámica como herramienta didáctica para el dibujo (tesis de máster). Universidad de Cantabria, Cantabria, España. Recuperado de https://geogebra.es/pub/TFM_tgm.pdf.

GeoGebra (2002). GeoGebra para enseñar y aprender matemáticas. Austria: GeoGebra GmbH. Recuperado de https://www.geogebra.org.

Gobierno de México (2021). Todo sobre le COVID - 19. Ciudad de México, México. Recuperado de https://coronavirus.gob.mx/.

Gómez, M. (2004). *Pitágoras*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Tomo.

González, P. (2001). Pitágoras. El filósofo de número. España: NIVOLA.

Grazer, B., Howard, R. (productores), y Howard, R. (director). (2001). *Una mente brillante* [Cinta cinematográfica]. EU: Paramount Pictures.

Hay seis clases sociales en México, ¿a cuál perteneces? (1 de abril del 2019). *Excelsior*. Recuperado de https://www.excelsior.com.mx/nacional/hay-seis-clases-sociales-en-mexico-a-cual-perteneces/1305195.

[Imagen de Guillermo Espinosa]. (s.a.). Tiro parabólico. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/hJtP7rkk.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2008). La enseñanza de la geometría. Recuperado de https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf.

Ivic, I. (1994). Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934). Perspectivas: revista trimestral de educación comparada, vol. XXIV, nos 3-4, págs. 773 – 779.

Lehmann, C. (1993). Geometría Analítica. Nueva york, E.U.A.: Limusa Noriega.

León, G. (1998). Al rescate de la escuela tradicional. Ciudad de México, México: Auroch.

López, J., Aldana, E. y Alonso, A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. Respuestas, 18(2), 74-79. Recuperado de file:///C:/Users/actua/Downloads/Dialnet-AnalisisDeLaComprensionDelConceptoDeParabolaEnUnCo-5364513.pdf.

Ledesma, M. (2014). Análisis de la teoría de Vygotsky para la reconstrucción de la inteligencia social. (investigar ciudad y país). Cuencua, Ecuador. Editorial Universitaria Católica (EDÚNICA).

Mazzitelli, M. (2016). Desarrollo de habilidades básicas a través del estudio geométrico de mosaicos. VI REPEM – Memorias, (06), 40 – 45. Recuperado de http://redi.exactas.unlpam.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/2013/194/10_Taller%2006%20-%20Desarrollo%20de%20habiliades%20b%C3%A1sicas.pdf?sequence=1.

Mercado, R. y Luna, M. (2013). Saber enseñar: un trabajo de maestros. Análisis de la docencia en el aula y propuestas para mejorarla. Ciudad de México, México: SM de Ediciones.

Millán, A. (2004). Euclides. La fuerza del razonamiento matemático. España: NIVOLA.

Nieves, S. (2020). El desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde la disciplina análisis matemático (tesis de doctorado). Universidad de Pinar del Río, Cuba. Recuperado de https://rc.upr.edu.cu/jspui/handle/DICT/3549.

Orozco, G., Acosta, Villareal, S. (2016). Incidencia de la Estrategia ECA Y Las Tic en el Desarrollo de Destrezas del Pensamiento en Estudiantes de Secundaria. Escenarios, 14 (1), p.p.102-116 DOI: http://dx.doi.org/10.15665/esc.v14i1.882.

Oviedo, M., Kanashiro, M., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. Aula Universitaria, 13, 29 – 36. Recuperado de https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/AulaUniversitaria/article/view/4112/6207.

Palma, L., Lluch, C., y Ruiz, A. (2018). Uso del holograma como herramienta para trabajar contenidos de geometría en Educación Secundaria. Pensamiento Matemático, 8(2), 91-100. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6636697.

Postigio, L. (1978). $\sqrt{Matemáticas}$. Barcelona, España: Editorial Ramón Sopena.

Pressman, E. (productor) y Brown, M. (director). (2016). *El hombre que conocía el infinito* [Cinta cinematográfica]. Inglaterra: Animus films. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=b0ks_inot4I.

Ruíz, J. (2019). Geometría analítica. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria.

Sáenz de Cabezón, E. (Productor). (2015) Derivando [YouTube]. España. De https://www.youtube.com/c/Derivando/about.

Sáenz de Cabezón, E. (2015). El poder de las historias. TED (Presidencia). TEDxRíodelaPlataED. Conferencia llevada a cabo en el TEDxRíodelaPlata, Buenos Aires, Argentina. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=mWFqtxI4NKM.

Sánchez, L. (2019). La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas. Tesis de Magister. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia.

Schunk, D. (2012). Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa. Ciudad de México, México. Editorial Pearson.

Secretaría de Educación Pública. 2013. Las estrategias y los instrumentos de evaluación desde el enfoque formativo (4). Recuperado de https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/doctos/2Academicos/h_4_Estrategias_instrumentos_evaluacion.pdf.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2018). Diseño de instrumentos de evaluación. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=FzD2OtwnQmg.

Tünnermann, C. (2008). Modelos educativos y académicos. Recuperado de https://www.enriquebolanos.org/media/publicacion/Modelos%20educativos%20y%20academicos.pdf.

Universidad del Valle (Productor). (2017). Centro de Innovación Educativa Regional - Sur [YouTube]. Colombia. De https://www.youtube.com/watch?v=CZpRhyR0MyQ.

Universidad Nacional Autónoma de México (2022). *Maestría en Docencia para la Educación Media Superior*. Ciudad de México, México. UNAM Posgrado. Recuperado de https://madems.posgrado.unam.mx/tramites/procesos.html.

Universidad Nacional Autónoma de México (1983). *José Vasconcelos y la Universidad* (36). Ciudad de México, México: Textos de Humanidades. Difusión Cultural, UNAM.