



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA – MECÁNICA APLICADA

“CRITERIOS DE DISEÑO DE SUSPENSIÓN DE LAVADORA DE CARGA FRONTAL”

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**SHAIR MENDOZA FLORES**

TUTORES PRINCIPALES  
Dr. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM  
Dr. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
Dr. MARCELO LÓPEZ PARRA, CAT, UNAM  
Dr. RICARDO YÁÑEZ VALDEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM  
Dr. FRANCISCO R. PEÑUÑURI ANGUIANO, FACULTAD DE INGENIERÍA, UADY

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX, México. JUNIO 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. López Parra Marcelo  
Secretario: Dr. Velázquez Villegas Fernando  
1<sup>er</sup>. Vocal: Dr. Cuenca Jiménez Francisco  
2<sup>do</sup>. Vocal: Dr. Yáñez Valdez Ricardo  
3<sup>er</sup>. Vocal: Dr. Peñuñuri Anguiano Francisco Ramón

Ciudad Universitaria, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

**TUTORES DE TESIS:**

Dr. Francisco Cuenca Jiménez

Dr. Fernando Velázquez Villegas

-----  
**FIRMA**

-----  
**FIRMA**

## **Agradecimientos y Dedicatoria**

Agradezco a Padre por dar aliento de vida a mi existencia, por permitirme ir más allá de mis capacidades y darme los dones que me han permitido llegar a este momento de mi vida.

Agradezco al Dr. Fernando Velázquez Villegas y al Dr. Francisco Cuenca Jiménez por guiarme durante este proceso de investigación, por sus enseñanzas, su visión de resolver los problemas, por no dejarme rendirme y, sobre todo, por su amistad.

Gracias a todos los integrantes del comité sinodal, Dr. Marcelo López Parra, Dr. Ricardo Yáñez Valdez y Dr. Francisco R. Peñuñuri Anguiano, porque siempre estuvieron atentos a cada presentación y sus observaciones enriquecieron esta investigación.

Sin el apoyo incondicional de mi querida esposa Brenda Gutiérrez Martínez quien a estado a mi lado desde el inicio de este proceso, gracias a su tiempo y esfuerzo por hacer menos pesada mi carga, no hubiese sido posible cumplir con este objetivo.

La vida me regalo a mi gran orgullo, Sofia Yeray, mi querida hija. Agradezco por tu vida y porque siempre serás un motor para que siga adelante. Tu puedes alcanzar las estrellas hija, nunca te rindas.

Madre, María del Carmen Flores García, tus ganas de vivir y tu pasión por luchar por las cosas que quieres, son y serán siempre mi estandarte de superación. Gracias Madre por seguirme enseñando.

Mis hermanos, Yidel e Ivon, ¡lo logramos! Este éxito es parte de ustedes.

Mariano, Papá, estuviste ausente, pero te agradezco, porque Padre usó tu vida para que yo estuviera aquí.

Gracias a la UNAM, porque me brindo la oportunidad de estudiar dentro de sus aulas, a crecer como profesional y conocer las personas más increíbles de mi vida.

Dedico esta tesis a mi hija, espero que algún día logres tus metas y objetivos de vida, y cuando sientas que todo parece cuesta arriba, recuerdes que para mí y tu madre también lo fue, solo levanta tus ojos y agradece por lo maravilloso que vendrá.

Atte. Shair Mendoza Flores

“The one thing that you have that nobody else has is you.  
Your voice, your mind, your story, your vision. So, write and draw  
and build and plan and dance and live as only you can.”

Neil Gaiman

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
Estado del arte . . . . .	VII
<b>1. Modelado y simulación dinámica de multicuerpos rígidos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Descripción del modelo . . . . .	3
1.2.1. Condiciones de análisis . . . . .	4
1.3. Resultados del análisis dinámico . . . . .	5
<b>2. Modelación y análisis dinámico de la suspensión de lavadora de eje horizontal de 7 GDL.</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Análisis cinemático . . . . .	10
2.2.1. Cinemática del ensamble-tina . . . . .	10
2.2.2. Cinemática del ensamble canasta . . . . .	13
2.2.3. Cinemática de la masa de desbalanceo . . . . .	16
2.3. Análisis dinámico - Formulación Euler - Lagrange . . . . .	17
2.3.1. Energía cinética de ensamble-tina . . . . .	19
2.3.2. Energía cinética de ensamble-canasta . . . . .	19
2.3.3. Energía cinética de masa de desbalanceo . . . . .	20
2.3.4. Energía potencial del ensamble-tina . . . . .	20
2.3.5. Energía potencial de ensamble canasta . . . . .	21
2.3.6. Energía potencial de masa de desbalanceo . . . . .	21
2.4. Función Lagrangiana . . . . .	21
2.4.1. Ensamble-tina . . . . .	22
2.4.2. Ensamble-canasta . . . . .	22
2.4.3. Masa de desbalanceo . . . . .	22
2.4.4. Fuerzas Generalizadas del sistema suspensión . . . . .	27
2.4.5. Fuerzas Generalizadas $Q$ . . . . .	30
<b>3. Análisis estático del centro de gravedad del sistema para el diseño de suspensión</b>	<b>36</b>
3.1. Introducción . . . . .	36
3.2. Distribución de masa para optimizar la posición del centro de gravedad del sistema suspensión . . . . .	37
3.3. Interpretación de resultados . . . . .	40

<b>4. Verificación de modelos MBD y Modelación Análítica Dinámica</b>	<b>42</b>
4.1. Introducción . . . . .	42
4.2. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico - Contrapesos iniciales . . . . .	42
4.3. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico - Contrapesos reducidos . . . . .	45
4.4. Modelo MBD línea base - Contrapesos iniciales vs reducidos . . . . .	47
4.5. Modelo Dinámico de 7 GDL - Contrapesos iniciales vs reducidos . . . . .	50
4.6. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico (Menor contrapeso - Modelación de Cilindros) . . . . .	52
<b>5. Optimización de modelo aplicando Síntesis Dinámica</b>	<b>55</b>
5.1. Introducción . . . . .	55
5.2. Definición del problema de optimización . . . . .	58
5.2.1. Función Objetivo . . . . .	58
5.3. Resultados . . . . .	62
<b>6. Aplicación de algoritmos genéticos en lavadora de eje horizontal de 7 grados de libertad</b>	<b>70</b>
6.1. Introducción . . . . .	70
6.2. Aplicación de Bounding Box . . . . .	71
6.3. Algoritmo genético . . . . .	74
6.3.1. Función de fitness . . . . .	77
6.4. Resultados de la simulación . . . . .	84
6.4.1. Algoritmo genético - resultados en el sistema de coordenadas rotado $CS_1(X'Y'Z')$ . . . . .	84
6.4.2. Algoritmo genético - resultados en el sistema de cordenadas no rotado $CS_0(XYZ)$ . . . . .	89
6.4.3. Algoritmo genético y los efectos sobre las variables de diseño . . . . .	91
<b>7. Conclusiones</b>	<b>96</b>

# Introducción

La siguiente investigación está enfocada en establecer los parámetros de diseño para una suspensión de lavadora de eje horizontal, utilizando un modelo dinámico de la suspensión y dos métodos de optimización: optimización gráfica y ,algoritmo genéticos. Estos parámetros definen el desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de gravedad con el objetivo de minimizarlos.

El diseño de lavadoras automáticas ha visto un acelerado desarrollo desde la introducción de los motores eléctricos, detergentes, ciclos de centrifugado y ciclos de secado. Las lavadoras automáticas se dividen en dos tipos de acuerdo al tipo de carga de ropa. Estos modelos son carga superior con eje vertical y los tipos de carga frontal con eje horizontal (Sergio et al., 2005) como se muestra en Fig. 1.

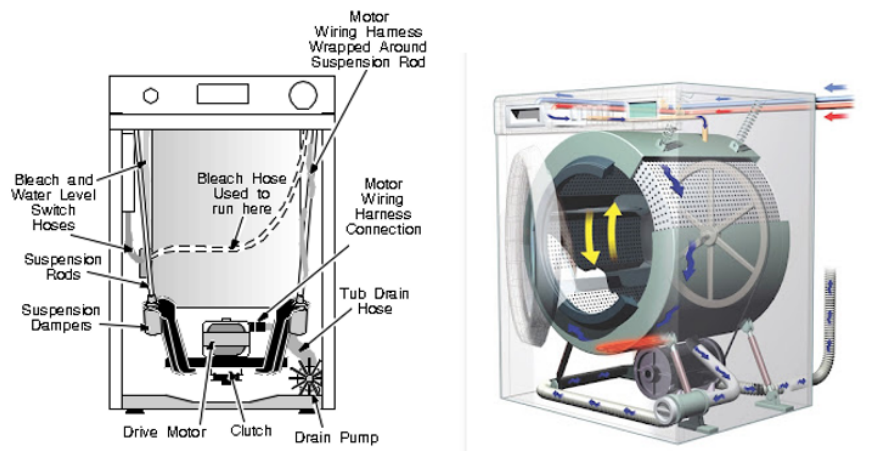


Fig.1. Lavadoras de eje vertical vs Lavadoras de eje horizontal.

Lavadoras de carga frontal son de mayor uso en Europa y los modelos de carga superior son más populares en América y Asia. En los modelos de carga superior se tiene dos tipos: el de modo agitador (usado comúnmente en EUA) y los de tipo pulsador (usados en Asia). Entre estos dos tipos de lavadoras, los de carga frontal tienen la ventaja que el daño a la ropa y el uso de agua son menores, por lo tanto, el consumo de energía usado también es menor. Recientemente la capacidad de las lavadoras ha aumentando y, en consecuencia, su desempeño ha ido mejorando. Esto ha expandido el mercado a nivel mundial (Sánchez-Tabuenca et al. 2020).



Mientras la capacidad de la lavadora se incrementa, un objetivo paralelo es reducir el peso de la misma para reducir costo de materiales, transporte, manufactura, etc. La configuración y capacidad de carga de las lavadoras de carga frontal juega un papel muy importante. Las capacidades de carga típicas y comerciales para el usuario están en un rango entre 5 y 8 kg con un tamaño estándar de 60 cm de ancho por 60 cm de profundidad. Sin embargo, existen ejemplos de lavadora de hasta 11 kg de capacidad ocupando las mismas dimensiones mencionadas. Estas restricciones de tamaño están en función del espacio disponible en cocinas y baños con dimensiones estándares. Ahora bien, el volumen del tambor de la lavadora (diámetro y altura) ayuda a determinar la capacidad de la lavadora (Department of Energy, 2021).

Este último concepto de capacidad volumétrica ayuda a definir parámetros para cumplir con la norma de ahorro de energía (Department of Energy, 2021). Por otra parte, contar con un sistema de suspensión que permita minimizar los desplazamientos y vibraciones de la lavadora ayudará a incrementar la capacidad volumétrica, permitiendo aumentar las dimensiones de tina y tambor, los cuales son elementos que definen el volumen de la lavadora.

El diseño de una lavadora considera los siguientes ensambles: ensamble canasta, ensamble tina, ensamble contrapesos. El primero generalmente está asociado a los elementos que rotan, el segundo esta asociado a componentes que son considerados fijos a tierra y, por último, el ensamble de contrapesos balancean estáticamente el sistema.

Los procesos empleados más comunes para cualquier lavadora son (Hai-Wei y Qiu-Ju, 2009):

- 1.- Llenado
- 2.- Lavado
- 3.- Enjuague
- 4.- Centrifugado

La presente investigación se centra en el proceso de centrifugado, donde se extrae el agua de la ropa a altas velocidades de rotación. Al incrementar la velocidad de centrifugado se mejora la eficiencia para deshidratar o extraer el exceso de agua de la ropa. Sin embargo, el problema de vibración comienza a ser gradualmente grave, debido al acomodo de la ropa después del proceso de lavado. A este acomodo de ropa se le define como desbalanceo. Éste (que puede variar entre lavado y lavado, así como su posición dentro del tambor) en la etapa de centrifugado es la fuente de vibraciones indeseables y ruido que puede causar un efecto desagradable en el usuario, así como el deterioro de la lavadora debido a las vibraciones que tienen un alto impacto en la vida útil, la confiabilidad y la operación de la misma.

Como fue mencionado el aumento de velocidad de giro permite una mayor extracción de agua. Respecto a este punto existen normas, las cuales evalúan el consumo de energía del producto.

El Departamento de Energía de los Estados Unidos de Norteamérica (D.O.E. por sus siglas en inglés) tiene parámetros muy específicos al respecto y recomienda a los consumidores que adquieran productos con clasificación Energy Star<sup>®</sup> que son productos que cumplen con un mínimo de consumo de energía y agua (Department of Energy, 2021).

Bajo estos estudios, el departamento de energía hace una observación importante acerca de la velocidad de centrifugado en las lavadoras: “Motores más eficientes giran dos o tres veces

más rápido durante el ciclo de centrifugado para extraer mayor cantidad de agua. Menos humedad en la ropa representa menor tiempo y consumo de energía en la secadora”.

El mismo D.O.E ha emitido en su estudio que los ahorros hechos por una lavadora con clasificación “Energy Star<sup>®</sup>”, en el décimo primer año, sería suficiente para adquirir una nueva lavadora con esta misma clasificación.

En este trabajo se minimizan las vibraciones en etapa de centrifugado de una lavadora horizontal, determinando las características óptimas de los elementos de suspensión. Estas características son la posición, la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento.

Debido a la secrecía en el diseño y desarrollo de productos, la informacion es limitada o está restringida. Se presenta en el apartado de antecedentes de este trabajo una serie de patentes, investigaciones y herramientas de simulación que han surgido en los últimos años respecto al desarrollo de suspensiones de lavadoras que ayudarán a ubicar la presente investigación dentro del estado de arte. Esta investigación del estado de arte muestra la necesidad de plantear un modelo dinámico analítico al menos de 6 grados de libertad que permitan representar los movimientos de traslación y de rotación del sistema, un grado de libertad más es incluido en este modelo y define la posición angular de unos de los ensambles del sistema

En el Capítulo 1, se presenta la modelación del sistema de suspensión de multicuerpos rígidos empleando un software especializado - Altair Motion View que servirá para verificar resultados.

En el Capítulo 2 se desarrolla el modelado y el análisis dinámico de la suspensión, presentando un modelo de 7 grados de libertad. Se desarrolla la cinemática y dinámica; esta última, empleando la formulación Euler - Lagrange para obtener el modelo dinámico.

En el Capítulo 3 se muestra el análisis estático de centro de gravedad para el diseño de la suspensión, se hace un análisis para distribuir la masa del sistema en una mejor localización y balancear estáticamente el sistema. Esto sirve como antecedente para mejorar el desempeño de la suspensión.

En el Capítulo 4 se verifica el modelo dinámico contra la simulación de multicuerpos rígidos mediante el software Altair Motion View.

En el Capítulo 5 se describe un proceso de optimización gráfico del modelo dinámico de suspensión de 7 grados de libertad utilizando el método de Síntesis Dinámica proponiendo una reducción del 10 % en desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centro de gravedad.

En el Capítulo 6 se muestra la aplicación de algoritmos genéticos para la optimización del sistema suspensión, utilizando el concepto de Bounding Box para la minimización de desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de gravedad.

Por último, se presentan conclusiones del trabajo, haciendo énfasis en los resultados y mejoras al modelo dinámico.

## Objetivo General

Diseñar una suspensión para una lavadora horizontal, cuyos desplazamientos, velocidad y aceleración del centro del gravedad, generados por las cargas de desbalanceo sean mínimos, maximizando así la eficiencia del centrifugado.

### Objetivos Particulares.

1. Balancear estáticamente los ensambles tina-tambor y los contrapesos frontal y posterior con el objetivo de redistribuir y reducir la masa del sistema..
2. Analizar dinámicamente un sistema de 7 grados de libertad de una suspensión actual.
3. Simular a través de multicuerpos rígidos y empleando programas comerciales la dinámica de una suspensión actual de carga frontal.
4. Optimizar los parámetros de la suspensión: posición de los anclajes y propiedades físicas de rigidez y amortiguamiento.

### Hipótesis

Es posible maximizar la eficiencia del centrifugado en una lavadora horizontal de carga frontal minimizando, mediante métodos de optimización, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de gravedad, en función de los parámetros de rigidez y amortiguamiento, así como las posiciones geométricas del sistema de suspensión.

## Estado del arte

Al ser un tema de carácter industrial la información disponible es escasa; sin embargo, la dinámica de la lavadora ha sido estudiada en los últimos años debido al interés estricto de cumplir con requerimientos de desempeño, así como mejorar la eficiencia energética y el consumo de agua.

La suspensión es de los elementos más significantes en el diseño de lavadoras. Hay dos esquemas principales de suspensiones: las suspensiones superiores suspendidas y suspensiones inferiores Fig.2. Las suspensiones superiores suspendidas consisten en montar la unidad de lavado o sublavadora a través de resortes por la parte superior del gabinete Fig. 2 (A), Fig. 2 (B) y Fig. 2(C). Este tipo de suspensiones hace que el gabinete sea estructuralmente muy reforzado. Las suspensiones inferiores Fig. 2 (D), Fig 2. (E) típicamente tienen resorte/amortiguador conectados a la tina y directamente a la base de la estructura (Conrad, 1994). Este tipo de suspensiones ayuda a reducir los requerimientos estructurales del gabinete.

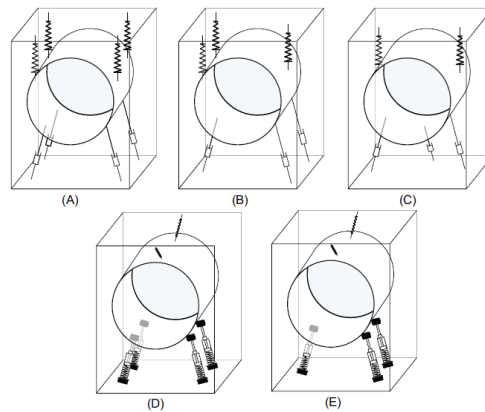


Fig.2. Configuraciones típicas de suspensiones para lavadoras de eje horizontal (Conrad, 1994).

Hay diferentes tipos de problemas a los cuales se enfrentan los tipos de suspensión anteriormente mencionados. Los problemas comunes de diseño de estas suspensiones de lavadoras son causados por fuerzas centrífugas que se generan por tener masas de desbalanceo o ropa mal distribuida. Estos problemas son (Conrad, 1994):

- 1.- Golpeteo de la tina contra el gabinete en el inicio del ciclo de deshidratación mientras la velocidad de rotación del tambor atraviesa frecuencias críticas del ensamble suspensión, causando amplitudes de vibración muy grandes.
- 2.- Caminado del gabinete, el cual ocurre durante el ciclo de deshidratación a velocidades altas de rotación debido al exceso de fuerzas transmitidas horizontalmente al piso sobre las fuerzas de fricción en piso.
- 3.- Ruido de lavadora, originada de las vibraciones de los elementos que giran.

Por tales motivos los esfuerzos de trabajos anteriores se han enfocado en la necesidad de balancear las canastas de las lavadoras durante la etapa de extracción de agua. Durante esta etapa, la ropa se mantiene girando dentro de la canasta a altas velocidades, el exceso de agua es forzado a salir por la presencia de fuerzas centrífugas a través de las perforaciones de la

canasta. Una extracción eficiente del agua de la ropa es benéfica, ya que reduce el tiempo de deshidratación de la ropa (Jonsson, 2003).

Algunas soluciones para disminuir el desbalance provocado por la ropa al interior, es utilizar elementos auto-balanceantes o aros de balance fijados en o los extremos del tambor. Los aros de balance en su mayoría son tubos circulares con aletas internas y parcialmente llenados con líquido. Cuando ropa desbalanceada queda al final del ciclo de lavado, el movimiento de la canasta causa que el fluido del aro de balance se distribuya de una forma opuesta a la carga o ropa desbalanceada, y por lo tanto, reduzca el desbalance (Oligee et al., 1994).

Convencionalmente, las lavadoras de eje vertical incluyen aros de balance, uno en la parte superior de la canasta y otro en la parte inferior de la misma Fig.3. Los aros de balance tienen cavidades circunferenciales, éstas están parcialmente llenas (típicamente entre un 10 % y 90 %) con agua salada y dichas cavidades son independientes unas de otras (Ryan, 2000). Algunos trabajos previos (Jonsson, 2003) describen parámetros tales como la velocidad de rotación y la viscosidad del fluido que permitirán alcanzar un autobalanceo a bajas velocidades.

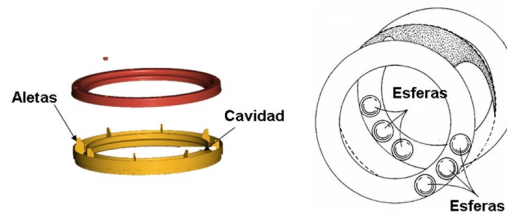


Fig. 3. Formas de aro de balance, aletas, esferas para optimizar funcionamiento (Ryan, 2003).

Otras investigaciones están enfocadas en optimizar el autobalanceo a través de la geometría. Estos trabajos incluyen colocar más cavidades, interconexión de cavidades, forma de álabes de los aros de balance, colocar elementos de mayor densidad dentro de las cavidades del aro de balance como pueden ser esferas, etc. El presente trabajo de investigación actual no considera estos elementos de autobalanceo.

Diferentes compañías han utilizado elementos pasivos para incrementar el momento de inercia, agregando contrapesos o pesos muertos a la lavadora o incrementando el número de resortes y amortiguadores.

Como se describió en la parte introductoria, se han hecho esfuerzos para reducir vibraciones y desplazamientos a través del uso de contrapesos o pesos muertos (Rovira et al., 2002) para controlar la vibración durante el ciclo de centrifugado en una lavadora, también se utilizan elementos de disipación de energía (amortiguadores), elementos de resistitución (resortes), contrapesos para reducir la vibración natural y elementos de autobalanceo que ayudan al balanceo dinámico, principalmente cuando existen un desbalanceo en el tambor.

Sin embargo, cada componente mencionado presenta sus ventajas y desventajas. En (Rovira et al., 2002) se muestra que sistemas con grandes cantidades de contrapesos, ubicados en la parte frontal y posterior de la tina, ayudan a reducir la vibración junto con la incorporación de cámaras de fluidos. No obstante, la distancia a la cual se encuentran de los baleros provoca grandes esfuerzos en los componentes del sistema como son: la flecha de transmisión, caja de

baleros, baleros, tina y tambor, lo que obliga que los diseños se hagan demasiado robustos con altos requerimientos de esfuerzo mecánico.

Compañías como LG Electronics han desarrollado contrapesos (Cho et al., 2007) para equilibrar estáticamente el peso del motor y los componentes colgados al ensamble tina-tambor (Fig. 4).

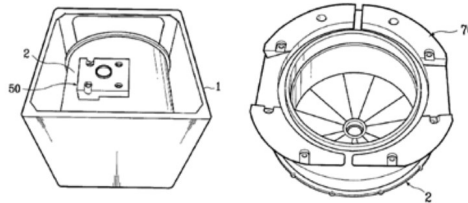


Fig.4. Contrapesos diseñados para balancear estáticamente el sistema (Cho et al., 2007).

LG muestra un desarrollo en (Han y Jeon, 2000) de contrapesos que son llenados con agua que se extrae del proceso de centrifugado, el exceso de agua es extraído de esta cámara de balance por una bomba que tiene conectada una válvula tipo check. Este atenuador tiene como función principal reducir la vibración del ensamble tina-tambor (Fig. 5).

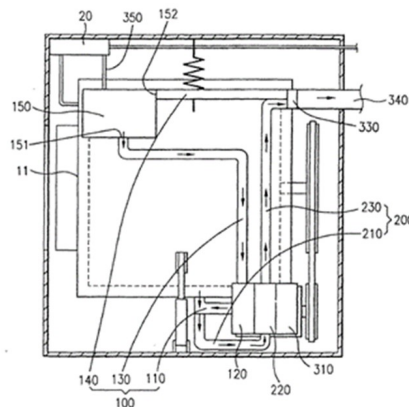


Fig. 5. Cámaras de agua que sirven como contrapesos en el proceso de centrifugado.

Otros esfuerzos se han enfocado en el análisis de multi-cuerpos rígidos MBD (Multibody Dynamics) (Oigee et al., 1994) en los cuales el software DADS es empleado para predecir el comportamiento del diseño. Este trabajo de investigación desarrollado por GE Appliance muestra las guías de diseño de lavadoras de eje vertical. El modelo contempla la incorporación de los efectos dinámicos del aro de balance, y finalmente, las propiedades físicas como masa, inercia, centro de gravedad, rigidez; amortiguamientos de componentes como motor, transmisión, tina, canasta y suspensión. Una de las limitantes de esta modelación es el uso de un software especializado para resolver análisis dinámicos y diseño de sistemas (DADS); así mismo, se requiere conocimiento de componentes con cierto nivel de diseño que se tienen en etapas avanzadas del desarrollo del producto para poder tener un modelo con cierta exactitud.

En el trabajo de Marsh, Tylor y Milliken (2006) se desarrolló un modelo dinámico de lavadora de eje vertical, mostrando los problemas que se tienen en los estados transitorio y estable del ciclo de centrifugado. Desarrollan un modelo de 3 GDL de la suspensión, considerando solo las rotaciones en los tres ejes (Fig. 6). No obstante, el modelo no considera fricción en juntas o amortiguamiento en el sistema, no hay efectos de fuerzas externas, por lo que el sistema gira libremente. Los rebotes o modos en la dirección vertical del sistema se desprecian, no hay efectos de elementos de autobalance. Se desarrolla también un modelo de 2 GDL para el aro de balance considerando una masa de desbalance en el interior del aro como contramedida para el desbalance dentro del tambor. Otro aspecto al que se enfrentaron los investigadores fue la no linealidad de las ecuaciones de movimiento del sistema; por lo tanto, linealizan las ecuaciones perdiendo precisión en los resultados.

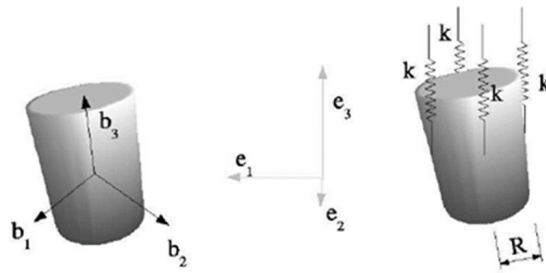


Fig. 6. Sistema de 3 DOF de modelo de lavadora vertical F&P (Marsch et al., 2006).

La relación de análisis de vibración y acústica es abordada por Koizumi et al. (2008) en su trabajo de investigación. Emplean un modelo de MBD (Fig. 7) realizado en ADAMS, este modelo dinámico atacó los problemas de vibración de la tina, gabinete y fuerzas que se transmiten al piso. Una relación importante empleada en el modelo, es la rigidez de los cojinetes, teniendo:

$$\text{sen } \delta = \frac{2 \Delta W}{\pi W} \quad (1)$$

$$k = k' \cos \delta \quad (2)$$

Donde:

- $W$  – Mitad del área inscrita en el cuadrante de desplazamiento carga de la curva cerrada [ $mm^2$ ]
- $\Delta W$  – Área del curva cerrada de carga-desplazamiento [ $mm^2$ ]
- $k'$  – Gradiente de la curva cerrada de carga-desplazamiento [ $Nmm/rad$ ]
- $k$  – Coeficiente de rigidez [ $N/mm$ ]
- $\delta$  – Pérdida de ángulo [ $rad$ ]

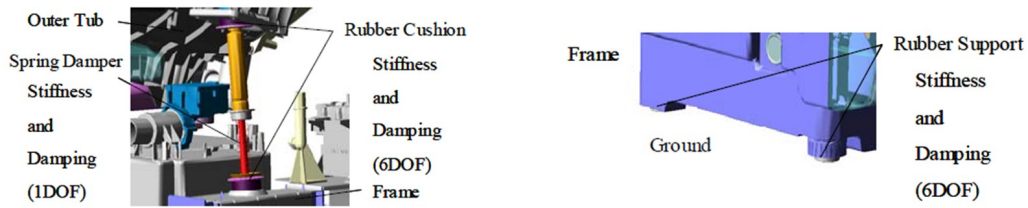


Fig. 7. Elementos de amortiguamiento en MBD, análisis acústico de gabinete (Koizumi et al., 2008).

Cuerpos flexibles son modelados para ver la aportación de vibración tales como los paneles del gabinete. Este análisis permite tener mayor comprensión del fenómeno de vibración y el comportamiento de los elementos sujetos a la suspensión. Finalmente, un análisis de radiación de ruido se desarrolla comparando los resultados de vibración en los paneles contra los resultados del análisis acústico en los paneles, mostrando una buena predicción de las zonas de radiación de ruido.

Wagner et al. (1999) construyen un modelo dinámico de cuerpo rígido y vibraciones elásticas. El método de elemento finito es empleado para describir el comportamiento elástico de algunos componentes con cierta complejidad, tales como la tina, el tambor y el hub (Fig. 8). También incorpora elementos que restringen el movimiento del ensamble tina-tambor y que, a su vez, son empleados como sellos en la tina, llamados gaskets. Sin embargo esta modelación contempla la linealización de las ecuaciones dinámicas del sistema, despreciando los movimientos angulares del sistema y derivando estas ecuaciones de movimiento solo a partir de la rotación del tambor. Otro de los inconvenientes que muestra este artículo es el uso de software de métodos de elemento finito (FEM) para obtener el comportamiento elásticos de componentes de gran complejidad.

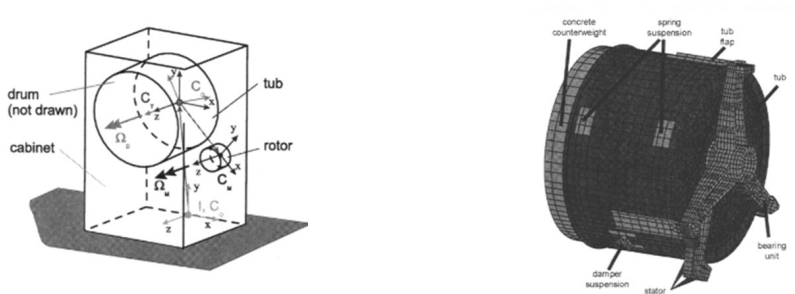


Fig. 8. Modelo dinámico empleando elementos elásticos (Wagner et al., 1999).

Nuevamente, un análisis de MBD es utilizado por Sergio et al. (2005) para el diseño de un prototipo de lavadora de carga frontal. Una gran desventaja de estos modelos es la necesidad de contar con bases de datos con cierto nivel de detalle y poder validar con datos experimentales.

Sowards (1972) plantea un modelo dinámico de 6 DOF; la dificultad de las operaciones y la no linealidad del sistema orillan al autor a linealizar el sistema de manera, que se pueda



obtener la solución de las ecuaciones de forma analítica. Se plantea un método de optimización, la misma dificultad de la función objetivo no permite conocer los parámetros de optimización. Por lo tanto, construyen y sugieren gráficas (Fig. 9), a través de la exploración física de las ecuaciones, para determinar los parámetros  $K$  – rigidez y  $C$  – amortiguamiento del sistema que den un comportamiento adecuado.

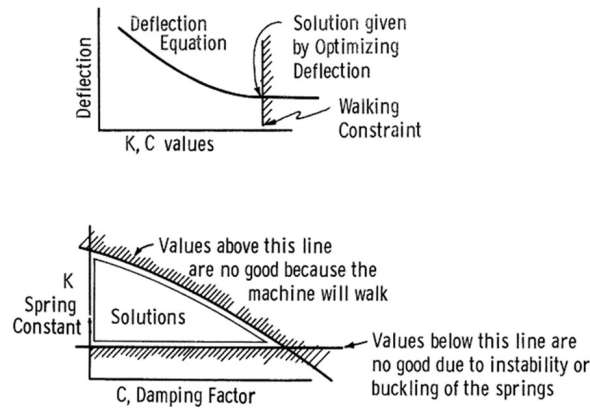


Fig. 9. Gráficas propuestas por Sowards para  $K$  y  $C$  (Soward, 1972).

Bagepelli (1987) presenta una investigación de un modelo dinámico de 4 DOF, dos movimientos en un plano ortogonal y dos movimientos más en otro plano ortogonal, un movimiento de traslación y un movimiento de rotación. El desbalance dinámico es causado principalmente por la excentricidad de la masa que está rotando en el sistema. Dos planteamientos son explicados. El diseño considerando nodos fijos de no-traslación. NTFN, el cual considera que solo existe rotación en el sistema, por lo cual este mismo está sobre-restringido. Esta sobre-restricción causa el fenómeno de caminado. Por otra parte, se plantea el modelo matemático con el método de diseño de nodo libre de translación (TFN). Este último contempla que el sistema puede tener traslación y rotación (4 DOF) y para obtener un concepto de diseño favorable las excursiones en estado transitorio deben minimizarse.

Algunos modelos dinámicos contemplan efectos de elementos de autobalance (Bae et al., 2002). Bae incluye la fuerza centrífuga del balanceador. En este análisis se concluye que un parámetro importante para definir la respuesta del balanceador es la excentricidad entre el eje de giro y el tambor. El modelo dinámico desarrollado en este trabajo de investigación contempla 6 DOF (Fig. 10). Parte de sus resultados muestran el comportamiento de la aceleración de vibración como una función de la rigidez de los resortes de la suspensión, longitud de componentes, masa de tambor, tina, altura o longitud de tambor y tina, masa de balanceador, porcentaje de llenado y radio interno de balanceador.

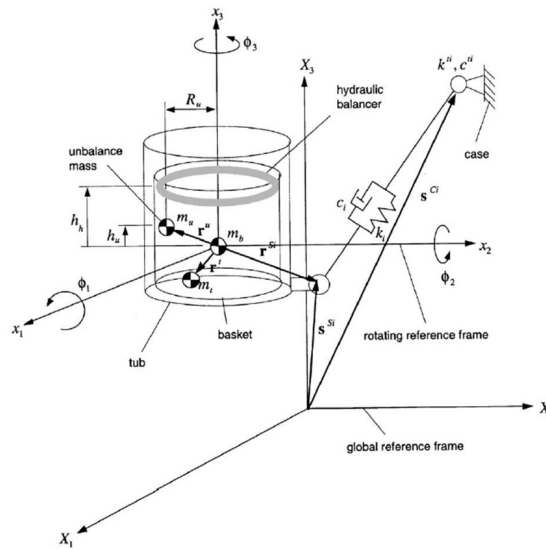


Fig. 10. Modelo dinámico de 6 DOF que incluye efectos de balanceador (Bae et al., 2002).

El trabajo de investigación de Hai-Wei y Qiu-Ju (2009) muestra un análisis de estabilidad de una lavadora de eje vertical (Fig. 11) sin contemplar efectos de autobalance. Plantea un modelo dinámico de 7 DOF formulado a través del método de Lagrange, en el cual incluye un modelo con fuerzas de amortiguamiento tangencial en la unión del sistema de suspensión con el ensamble tina-tambor. Sin embargo, el autor maneja ecuaciones autónomas que definen la posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad del ensamble tina-tambor-suspensión como función de la velocidad angular constante y el tiempo, quedando la discusión de análisis de estabilidad a través de la teoría de bifurcación para las ecuaciones autónomas. El modelo elimina 1 DOF por considerar una valor de entrada a la velocidad angular. Se proponen valores de amortiguamiento y rigidez para lograr la estabilidad del sistema y encontrar zonas estables del mismo.

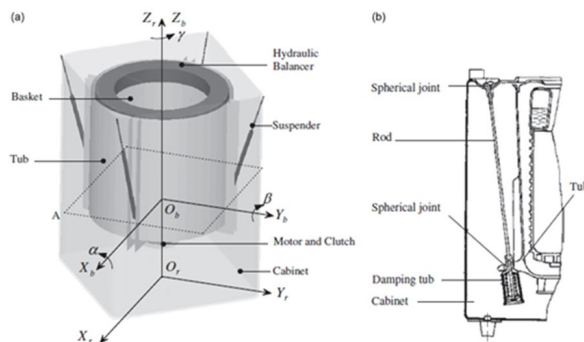


Fig. 11. (a) Estructura de lavadora de eje vertical y (b) estructura de suspensión (Hai-Wei y Qiu-Ju, 2009).

Hai-Wei y Qiu-Ju (2011) incluyeron en una segunda investigación los efectos que tiene un balanceador hidráulico en estado estable para la lavadora de eje vertical sobre los ángulos

de deflexión. Se emplean una vez mas las ecuaciones autónomas para resolver el sistema y encontrar parámetros como: altura óptima, (altura a la cual debe colocarse el balanceador para minimizar el ángulo de deflexión que se genera entre el eje de rotación y el eje del balanceador), porcentaje de llenado de aro de balance, la longitud de componentes de suspensión así como coeficientes de amortiguamiento y rigidez (Fig. 12).

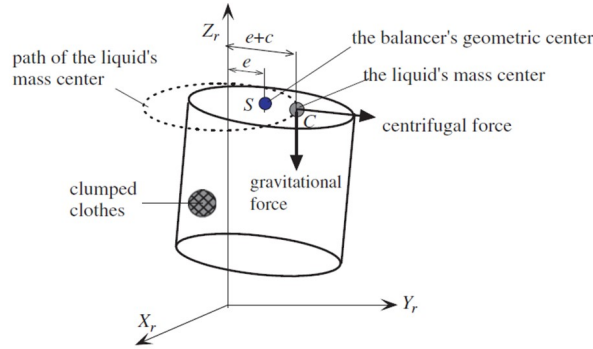


Fig. 12. Fuerzas centrífugas actuando en el sistema en estado estable (Hai-Wei y Qiu-Ju, 2011).

Turkay et al. (1992) plantea la modelación dinámica de una suspensión de carga frontal de 6 DOF, utilizando la segunda de Ley de Newton. Este análisis incluye la no linealidad de elementos como amortiguadores y las fuerzas por sellos de la lavadora llamados “bellows”. La modelación de estos componentes se realiza a través de funciones no lineales y sus valores obtenidos vía experimental. Los desplazamientos angulares se obtienen mediante las proyecciones de los desplazamientos de traslación en la parte frontal y trasera de los centros de la tina respectivamente. Valida su modelación comparando con datos experimentales, llegando a porcentajes de error entre modelos entre 7% y 73% en estado transitorio y 2% a 32% en estado estable.

Más adelante Turkay et al. (1995) formula e implementa una optimización paramétrica de su modelo dinámico de sistema de suspensión, buscando la optimización de los parámetros de amortiguamiento y rigidez del sistema. Emplea dos métodos: el primero a través de una optimización gráfica secuencial y el segundo método usando programación cuadrática secuencial. En este último método se plantea la minimización del fenómeno de caminado, usando la ponderación de funciones multi-objetivos. Parte de la optimización que se desarrolla en esta investigación es la implementación del método de optimización gráfica secuencial donde se selecciona una variable a optimizar y el resto de ellas se mantiene constante. Una vez que se optimiza la variable seleccionada ahora es turno de seleccionar otra y mantener las demás constantes, esto se hace una y otra vez hasta optimizar cada variable de diseño.

El trabajo de Conrad (1994) muestra la dinámica de las lavadoras verticales y horizontales desde el punto de vista de las restricciones dinámicas de la suspensión. Modelos dinámicos de sistema resorte-masa-amortiguador son presentados para ambos modelos de lavadoras. La necesidad de balancear la ropa durante el ciclo de secado se discute en este trabajo, así como criterios de diseño de sistemas de autobalance. Las principales restricciones dinámicas impuestas sobre las lavadoras son las deflexiones de la tina y los fenómenos de caminado debidos a

cargas desbalanceadas. Modelos dinámicos básicos son presentados para cada configuración y presentan ventajas y desventajas de su uso.

Conrad y Soedel (1995) describen, a través del uso de dinámica básica, las características de caminado y de oscilación de caminado de lavadoras de eje horizontal y vertical respectivamente sin la consideración de los efectos de la suspensión. Así mismo, se definen criterios para evitar el caminado en las lavadoras automáticas. Se determina porque las lavadoras de eje vertical describen características inestables, mientras las lavadoras de eje horizontal exhiben un caminado en el sentido de giro de la lavadora.

Los modelos presentados en esta investigación muestran características básicas dinámicas a considerar en el diseño de lavadoras, sin embargo por la falta de las variables de la suspensión este análisis solo sirve para predecir ciertos fenómenos dinámicos.

Sistemas de autobalance se han incluido en lavadoras de carga frontal, tal como se muestra en el trabajo de Papadopoulos y Papadimitru (2001), donde desarrollaron un modelo de 3 DOF de una lavadora portable de eje horizontal. Este modelo es usado para predecir la inestabilidad de caminado durante la etapa de centrifugado, se considera para esta modelación que el tambor está montado dentro del gabinete de forma que solo tiene un grado de libertad. Dos métodos se proponen para balancear la canasta de modo que se contrarreste el efecto de desbalanceo. El deslizamiento rotacional puede ser un mayor problema si el centro de masa no coincide con el eje de rotación de la lavadora.

Belloli et al. (2005), plantean un proceso de optimización donde el estudio se centra en el cálculo de las frecuencias naturales, los modos de vibración y el análisis dinámico de la lavadora para poder optimizar las variables de la suspensión. A través del análisis experimental miden la vibración en paneles, fuerzas en resortes y amortiguadores para validar los modelos de elemento finito y modelos dinámicos de multi-cuerpo rígido. Emplean un modelo analítico dinámico reducido de 6 GDL de la suspensión para poder determinar el impacto de las variables de diseño de la suspensión sobre el cálculo de las frecuencias naturales del sistema.

Siguiendo con la modelación dinámica de suspensión de lavadora de carga frontal, Hee-Tae y Weul-Bong (2010), empleando la segunda Ley de Newton, obtienen un modelo de 12 DOF, siendo 5 DOF para el movimiento de la tina, 5 DOF para el movimiento del tambor y 2 DOF para describir el comportamiento del balero entre la tina y tambor. Se omiten los desplazamientos de traslación en el eje X del sistema (Fig. 13). Se introducen números complejos para reducir las 12 ecuaciones de movimiento a 6 ecuaciones y posteriormente se transforma al espacio real para entender los movimientos.

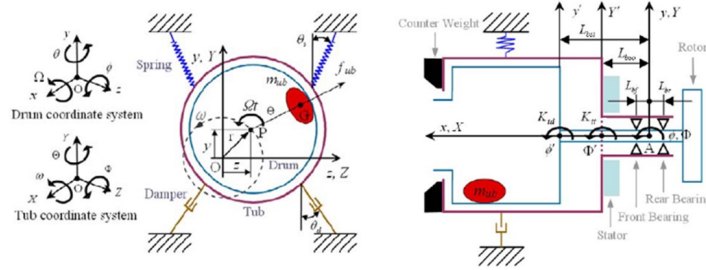


Fig. 13. (a) Representación del sistema de suspensión 10 GDL.

(b) Representación de modelación de 2 GDL- balero (Hee-Tae y Weul-Bong, 2010).

Los resultados obtenidos son validados contra datos experimentales. Se muestran resultados de orbitaciones, modos flexibles y rígidos de la canasta durante el centrifugado. Emplean el método de índice de directividad (SDI) para diagnosticar en el dominio de frecuencia el comportamiento de los modos y separar estos mismos, así como determinar la influencia de la velocidad de giro del ensamble canasta y el tipo de movimiento que genera el centro de gravedad, esto pone en evidencia las características dinámicas de la lavadora.

En el trabajo de Nygard y Berbyuk (2011) se desarrollan modelos matemáticos y computacionales de una lavadora de carga frontal. Se formulan análisis dinámicos y de optimización para mejorar el diseño mecánico. Se desarrollan MBD de un modelo de lavadora comercial para ser usado en el análisis de vibración dinámica. Se emplea el software Adams/View de MSC Software para este fin. Se definen funciones cinemáticas para la optimización del movimiento de la tina y sus resultados son empleados para reducir/evitar la colisión entre partes internas. El determinar el espacio disponible donde se mueve partes internas de la lavadora constituye un paso en el proceso de incrementar la capacidad del sistema y evitar las colisiones. Se utilizó una función de transmisión de fuerza para medir las fuerzas verticales transmitidas a la estructura. También se utiliza un criterio para estabilidad de la lavadora para evitar el fenómeno de caminado. La introducción de amortiguadores magnetoreológicos en los MBD y formulaciones dinámicas se implementaron para mejorar la respuesta del sistema de suspensión.

Nygar y Berbyuk (2007) desarrollan un modelo de multicuerpos rígidos MBD (Fig. 14 a) utilizando un software comercial, MSC ADAMS para su desarrollo. El modelo contempla, los siguientes cuerpos como rígidos: tambor, tina y contenedor. Las partes principales de la suspensión consisten en 4 barras conectadas entre la parte inferior de la tina y la parte inferior de la lavadora; cada barra tiene un cojinete de goma en la parte superior, un resorte, un amortiguador y un cojinete de goma en el extremo inferior. Se utiliza una masa de desbalanceo de 0.3 kg fijada al interior del tambor y se tiene un perfil de velocidad de 0 a 1400 rpms. Los resultados obtenidos se comparan con datos experimentales. La creación del modelo numérico en ADAMS permite hacer un análisis de sensibilidad para el diseño de la suspensión; por ejemplo, número y posición de barras, rigidez y parámetros de amortiguamiento.

Nygar y Berbyuk en (2011) presentan un modelo computacional de lavadora de eje horizontal, usando una metodología teórico-experimental donde se integran sistemas de multicuerpo así como modelos de componentes mecánicos funcionales (Fig. 14 b) y datos de

validación experimentales. Estos sistemas son implementados en un software comercial MSC ADAMS. Los datos experimentales de amortiguadores y resortes son empleados para construir el modelo de multicuerpo rígido. Se introduce la modelación y simulación de componentes de balanceo dinámico en dos planos para eliminar la carga de desbalance (Fig. 14 c).

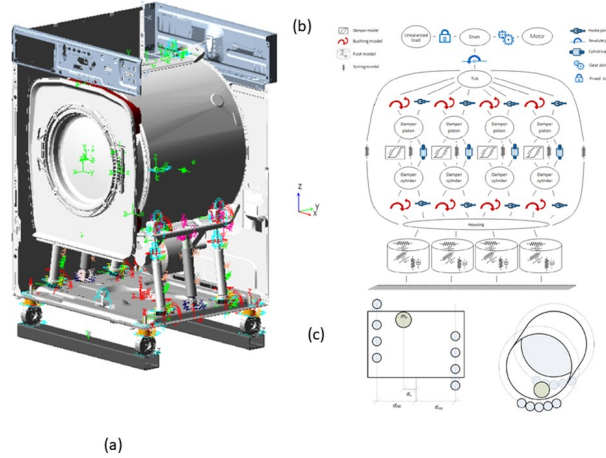


Fig. 14. (a) Modelo de lavadora carga frontal empleando ADAMS software.  
 (b) Arquitectura del sistema de MBD.  
 (c) Arreglo de componentes de balanceo dinámico (Nygards y Berbyuk, 2011).

Los amortiguadores magnetoreológicos son empleados por Nygards y Sandgre (2006). Se construye un modelo teórico-experimental de un modelo dinámico de suspensión, considerando amortiguadores clásicos y activos (magnetoreológicos). Para los amortiguadores clásicos se tiene la siguiente relación:

$$F^d = A \arctan(B\dot{x}) + C\dot{x} \quad (3)$$

Y para el amortiguador magnetoreológico se tiene:

$$F^{dMR} = c_d \dot{x} + \alpha z \quad (4)$$

Donde  $c_d(I)$  es la corriente del parámetro del amortiguador y  $\alpha(I)$  es el parámetro dependiente de la corriente de la variable  $z$  causante del comportamiento de histéresis.

Se modelan componentes elásticos como resortes, elementos no lineales como los amortiguadores y montajes de goma como resortes torsionales y amortiguadores que consideran la velocidad angular.

$$M^r = F^r l = -k_\theta \theta - b_\theta \dot{\theta} \quad (5)$$

Además este artículo muestra que se utilizó un modelo numérico creado en ADAMS para validar los resultados obtenidos en el análisis matemático que emplea Simulink de Matlab como herramienta de desarrollo

Se utilizan funciones objetivo para evaluar la transmisión de fuerza y energía de absorción de los amortiguadores. Se concluye que la inclusión de un amortiguador magnetoreológico mejora el desempeño dinámico de la lavadora; sin embargo, encarece el costo del producto.

La implementación de un laboratorio virtual (Fig. 15) para el diseño de lavadoras horizontal es el trabajo que se realiza en esta investigación (Martin-Villalba et al. 2007). A través del uso del software MODELICA se puede implementar un sistema de suspensión que incluya un tambor, tina, resortes, amortiguadores, así como la posición de estos componentes para desarrollar el modelo dinámico de la lavadora. Este software de simulación utiliza elementos ideales, tales como los resortes, cuya fuerza es proporcional al desplazamiento y en donde la fuerza de los amortiguadores es proporcional a la velocidad.

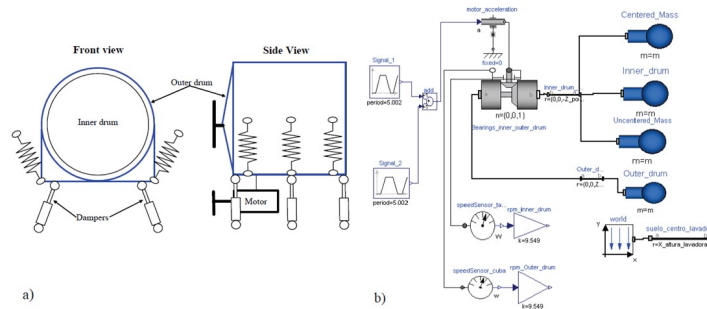


Fig. 15. Interface de laboratorio virtual de desarrollo de Lavadora - MODELICA (Martin-Villalba et al., 2007).

La interacción entre un fluido y ropa húmeda hace difícil la obtención de una solución de un modelo dinámico analítico de lavadora; por tal razón, la experimentación resulta un camino menos complicado. La creación de un modelo de multicuerpos rígidos MBD (Fig. 16a) es realizada en este trabajo de investigación (Gyung-Hun et al. 2006) para la medición de la vibración de aceleración en una lavadora de eje horizontal. Esta modelación en una primera instancia se lleva a cabo empleando una junta de revolución entre la tina y el tambor; sin embargo, los resultados no son los esperados respecto a la experimentación. El siguiente paso fue simular la tina y canasta como un modelo de cojinete (Fig. 16b), donde en la parte posterior se simula una junta esférica. Posteriormente una junta de traslación entre la tina y canasta, una junta universal al frente entre los dos cuerpos, así como una junta planar al frente de la tina y tambor para simular solo movimientos de traslación.

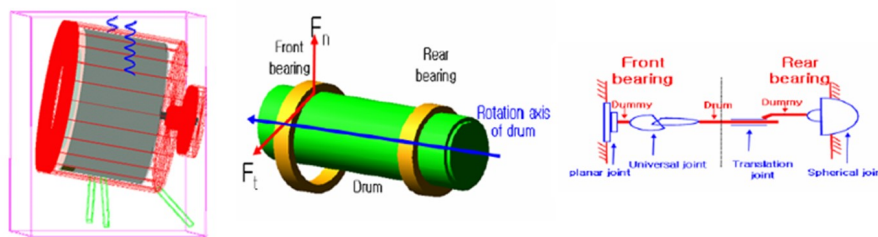


Fig. 16 (a) MBD de lavadora carga frontal.

(b) modelación de junta universal entre tina y tambor (Gyung-Hun et al., 2006).

La traslación de la tina con respecto a la canasta no afectó los resultados de aceleración mostrados en el modelo de MBD, para hacer frente a esto, una fuerza externa se aplica en la

posición posterior de la junta esférica. Los resultados mejoraron. El software empleado para dicho análisis es ADAMS.

La construcción de modelos multicuerpos - MBD es una herramienta bastante empleada en la actualidad. Nuevamente esta técnica es empleada para predecir el comportamiento vibracional y las emisiones acústicas de toda la lavadora de carga frontal (Agnani et al. 2008). El comportamiento dinámico de los amortiguadores se obtiene experimental. Posteriormente se emplean para mejorar el modelo de MBD.

Koizumi et al. (2006) realizaron un trabajo de investigación para desarrollar un modelo dinámico de multi-cuerpos. El modelo puede analizar las vibraciones de la tina, del marco y las fuerzas transmitidas al piso (Fig. 17). Este modelo es retro-alimentado con propiedades de rigidez y amortiguamiento de las juntas de sujeción y amortiguadores. Se valida experimentalmente y se correlaciona el modelo de MBD. Se emplea este modelo de MBD para mejorar los parámetros del sistema como, amortiguamiento y rigidez del mismo.

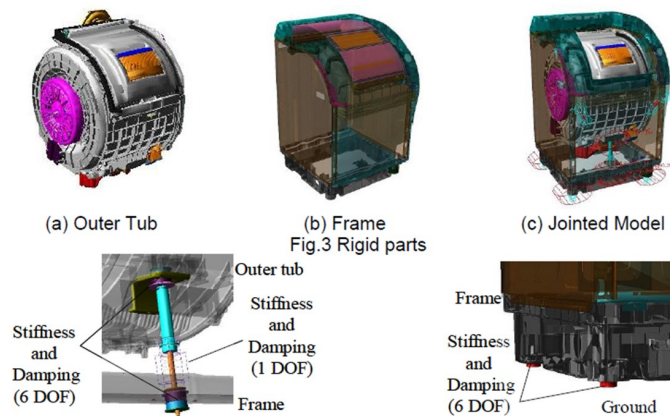


Fig. 17 MBD de lavadora carga frontal (Koizumi et al., 2006).

Varios autores han utilizado amortiguadores en sus modelos de MBD, siendo éste un elemento importante en la disipación de energía. Tal razón fue de interés de Wan-Suk et al. (2009), para hacer un análisis más profundo de este tema compara modelos experimentales de amortiguadores clásicos contra los de sistema “free-stroke”, (Fig. 18) generando los modelos matemáticos que describen el comportamiento de estos elementos.

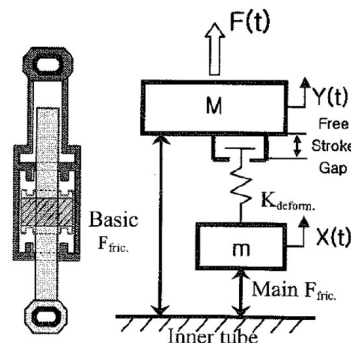


Fig. 18. Modelo de amortiguador de fricción y modelo “free-stroke” (Wan-Suk et al., 2009).



Ortega (2008) caracterizó y evaluó el funcionamiento de un sistema de suspensión con amortiguamiento por fricción. Generó un procedimiento que, mediante el uso de herramientas de simulación MBD permite, diseñar, analizar y evaluar el comportamiento de una suspensión. Rediseñó el sistema actual de suspensión de lavadora vertical para obtener un mejor comportamiento. La incorporación de componentes flexibles al modelo de MBD ayuda a determinar el comportamiento dinámico de la deformación de los componentes y rediseñar de una mejor forma. Esta investigación se llevó a cabo mediante el uso del software Motion View de Altair.

Hai-Wei et al. (2015) desarrollaron un modelo matemático de 6 Grados de libertad de una lavadora de eje horizontal con un balanceador de esferas (Fig. 19). El uso de Multiplicadores de Floquet fueron empleados para juzgar la estabilidad del sistema. El análisis de estabilidad es desarrollado en una región mayor a 4 Hz. Se considera dentro del análisis solo la región estable del fenómeno de vibración.

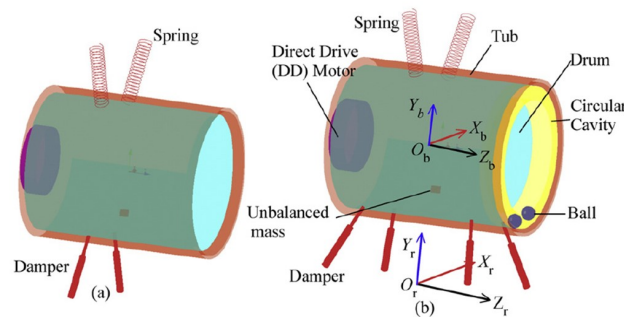


Fig. 19. Estructura de una lavadora de eje horizontal para suspensión clásica (Hai-Wei et al., 2015).

En 2016 se desarrolló un modelo dinámico con 4 GDL para estudiar el efecto de los amortiguadores sobre la suspensión y predecir los desplazamientos en los ejes vertical y lateral del sistema. Los resultados mostraron que la vibración y las fuerzas transmitidas al marco se reducen significativamente cuando se desacopla el amortiguador (Fig. 20). No obstante, el modelo no abordó el movimiento longitudinal del sistema (Buśkiewicz & Pittner 2016).

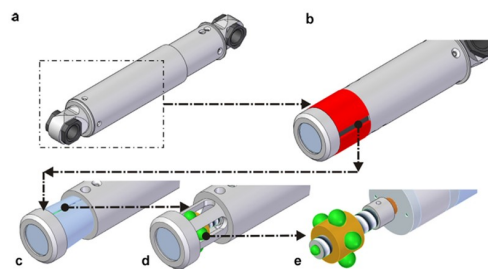


Fig.20. Esquema de amortiguador capaz de desconectarse, (Buśkiewicz y Pittner 2016).

La mayoría de los problemas relacionados con el comportamiento de vibraciones excesivas, tales como el torque ejercido en la tina, las fuerzas transmitidas a la estructura y el ruido radiado son tratados en estado estacionario; sin embargo, el golpeteo entre componentes debido a

grandes excursiones o desplazamientos ocurre en el estado transitorio. Algunos investigadores estudiaron una lavadora usando un análisis dinámico de múltiples cuerpos para predecir la posible colisión de la tina con el marco durante el estado transitorio. Se incluyó un modelo de junta o la simulación del sello (Fig. 21) entre la tina y el marco para predecir con precisión el comportamiento del movimiento de la tina. Sin embargo, debido a la naturaleza del modelo multicuerpo, se requieren modelos con mayor detalle geométrico (Sánchez-Tabuenca et al. 2020).

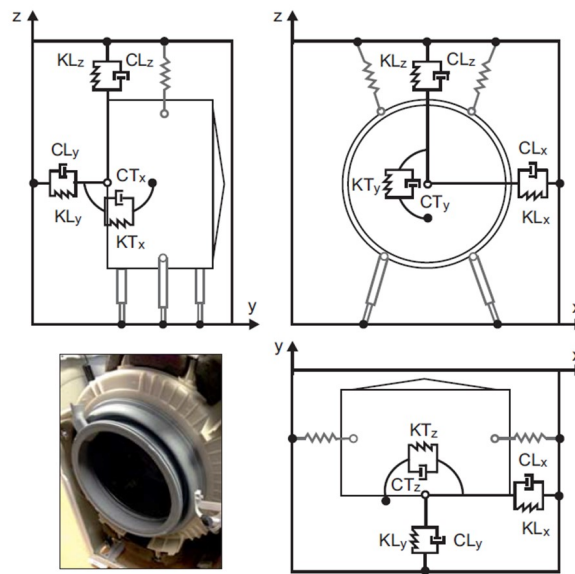


Fig. 21. Modelo de multicuerpo rígido, modelación de sello o gasket (Sánchez-Tabuenca et al., 2020).

Para ahorrar tiempo y recursos computacionales se linealizan algunos modelos analíticos dinámicos (Fig 22.), tal es el caso del modelo dinámico no lineal desarrollado de una lavadora de carga frontal utilizando el método de Kane (Park, Jeong & Yoo, 2021). Este modelo se verificó y comparó utilizando un modelo dinámico multicuerpo creado en el software RecurDyn. Se utilizó un proceso de linealización para predecir la forma del modo de resonancia con el modelo lineal. Sin embargo, este estudio no predijo el mismo comportamiento dinámico que el no lineal debido al coeficiente de amortiguamiento del amortiguador. Esto indica que la confiabilidad del modelo lineal depende de los coeficientes de amortiguamiento empleados. Se estableció un rango de coeficiente de amortiguamiento para garantizar la confiabilidad del modelo analítico lineal. Aunque hay estudios que incluyen una formulación analítica con múltiples grados de libertad, ninguno ha considerado la mayoría de las variables de suspensión tanto en estado transitorio como estacionario.

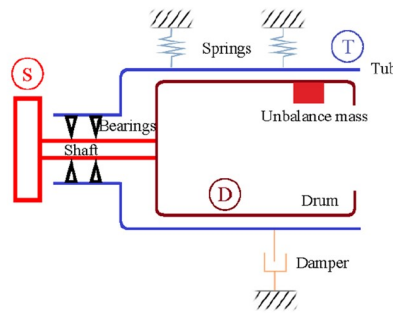


Fig. 22. Modelo simplificado de lavadora de carga frontal (Park, Jeong y Yoo, 2021).

Las investigaciones revisadas en el estado del arte centran sus esfuerzos en mejorar el desempeño dinámico de la suspensión. Se consideran diferentes métodos y análisis para alcanzar dicho objetivo. La incorporación de elementos de autobalance son un buen método para disminuir las vibraciones generadas asociadas al desbalance que provoca la ropa. Sin embargo, la complejidad y costo en la manufactura puede ser una enorme desventaja sobre otras alternativas.

Por otra parte, otros métodos usados para disminuir las fuerzas de excitación transmitidas a la estructura, es a través del uso de resortes y amortiguadores convencionales o magnetoreológicos, pero, las investigaciones estudiadas solo se enfocaron en encontrar propiedades de rigidez y amortiguamiento capaces de atenuar estas fuerzas sin considerar otras posibilidades como: posición y ángulos de ataque de estos componentes.

El análisis dinámico de la suspensión incluye definir los grados de libertad que ayudan a comprender el movimiento y dinámica del centro de gravedad del sistema, es así como varios autores trabajaron con modelos con dos o más GDL para establecer relaciones que mejoren el comportamiento de la suspensión. Sin embargo, un problema al cual se enfrentaron éstos es la complejidad del sistema dinámico, por lo cual, la reducción de grados de libertad se empleó para reducir dicha complejidad y encontrar soluciones acotadas, dando como consecuencia la pérdida valiosa de información que puede mejorar aún más el rendimiento de la suspensión. Aunque el proceso de centrado conlleva el estudio de los fenómenos que ocurren en estado transitorio y estable, la mayoría de autores concentraron sus trabajos en estado estable. Es necesario estudiar completamente los fenómenos donde ocurre el mayor desplazamiento y mayor transmisión de vibración, para poder establecer adecuadamente los parámetros que mejoran el rendimiento de la suspensión.

La modelación de multicuerpos rígidos a través de software comerciales es una herramienta que facilita la creación de modelos dinámicos, a pesar de esto aún es necesario contar con geometrías con un nivel de detalle de diseño para poder obtener resultados confiables. Por tal motivo, esta herramienta virtual se emplea como un método de verificación para la presente investigación.

La presente investigación considera para el desarrollo de diseño de suspensión, un modelo de 7 grados de libertad sin reducción de los mismos y considerando el análisis dinámico en ambos estados, transitorio-estable, además tomando no solo las propiedades físicas de rigidez y amortiguamiento, si no también las ubicaciones de los elementos de la suspensión.

# Capítulo 1

## Modelado y simulación dinámica de multicuerpos rígidos

### 1.1. Introducción

El modelado de multicuerpos rígidos ha sido utilizada recientemente para resolver problemas complejos de modelos dinámicos que contemple las no linealidades de diversos componentes (Oligee 1994, Takayuki et al. 2008, Sergio et al. 2005, Nygard 2011, Gyung-Hun et al. 2006, y Agnani et al. 2008). Diferentes modelos de cuerpo rígido han sido desarrolladas considerando como objetivo disminuir las vibraciones a altas revoluciones, encontrándose que el amortiguamiento es una variable importante.

Otras investigaciones llevadas a cabo por Nygard y Sandgren (2006) consideran varios elementos de amortiguamiento torsional para mejorar los resultados obtenido por su MBD, así como la incorporación de amortiguadores magnetoreológicos que permiten variar el amortiguamiento y mejorar el desempeño de la suspensión.

Otros autores, en búsqueda de tener mejores correlaciones de los modelos MBD con datos experimentales han ido agregando más elementos de simulación. Gyung-Hun et al. (2006) modela la unión entre la tina y la canasta como un modelo de balero, donde en la clásica junta de rotación entre estos dos elementos se incluye una junta esférica, una junta de traslación, y finalmente, dos juntas en la parte frontal, una universal y otra planar, teniendo mejores resultados en el MBD.

Uno de los beneficios de la modelación de MBD es que permite de una manera rápida y sencilla obtener resultados de simulación dinámica; sin embargo, en la mayoría de las ocasiones es necesario contar con geometrías y propiedades de masa de los cuerpos a analizar para tener un resultado confiable. Otros autores manejan el análisis de MBD, incluyendo cuerpos

flexibles, de modo que no solo el movimiento y/o fuerzas son conocidos, sino también la deflexión de los cuerpos como se describe en la investigación de Öztürk y Haluk (2010), y Ortega (2008).

Los elementos de autobalance han ido incorporándose a los análisis de MBD; sin embargo, la complejidad del modelo de los elementos de autobalance que trabajan con fluidos provoca que estos mismos se vean reducidos a modelos básicos para su convergencia en el análisis (Ortega, 2008). Otros elementos de autobalance que contemplan esferas y/o volantes de inercia se han ido incorporando también a estos análisis (Hai-Wei et al. 2015, Nygard y Berbyuk 2011).

La presente investigación incluye la creación de un modelo de MBD para tener un modelo que permitiera verificar y comparar los resultados entre modelaciones, es decir la modelación analítica y modelación de MBD. Los resultados a comparar de este modelo son: los desplazamientos del centro de gravedad en  $eje - x$ ,  $eje - y$ ,  $eje - z$ , así como el perfil de velocidad que se obtiene al imponer un par de motor constante.

El modelado de multicuerpos rígidos para esta investigación considera los siguientes elementos a modelar:

- 1.- Ensamble tina: incluye las masas del motor, bomba, portabaleros, baleros (Fig 1.1).

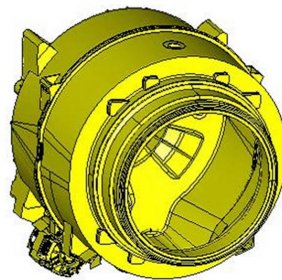


Fig. 1.1. Ensamble tina.

- 2.- Ensamble canasta: incluye masas de canasta, flecha, portaflecha (Fig 1.2).



Fig. 1.2. Ensamble canasta.

- 3.- Contrapeso frontal superior.
- 4.- Contrapeso frontal inferior,
- 5.- Contrapeso posterior (Fig. 1.3).

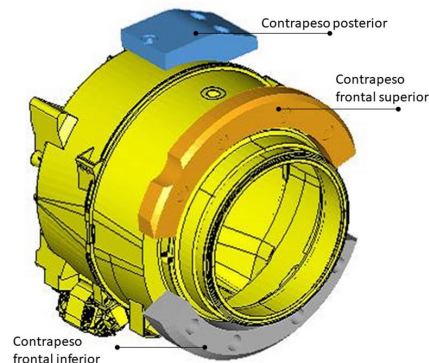


Fig. 1.3. Contrapesos frontales y posterior.

- 6.- Elementos de comportamiento lineal- resortes
- 7.- Amortiguadores (Fig. 1.4).

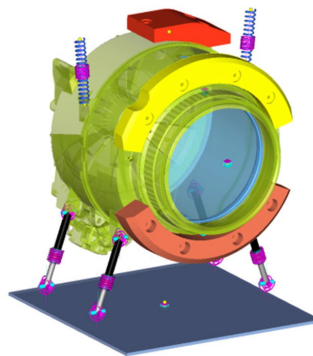


Fig. 1.4. Ensamble resortes y amortiguadores.

El software empleado para el modelo de multicuerpos rígidos es MOTIONVIEW, ALTAIR<sup>R</sup>. Todos los cuerpos se consideran rígidos, esto significa que no existe deformación en los mismos.

Este análisis considera que no hay fenómeno de caminado durante los estados transitorio y estable, esto significa que la base del sistema de suspensión está fija a tierra.

## 1.2. Descripción del modelo

El ensamblaje de tina se conecta a través de una junta rotacional con el ensamblaje canasta, esto permite la rotación de la canasta dentro de la tina. Los contrapesos, que comúnmente son hechos de concreto, son fijados al ensamblaje tina.

Para los elementos de la suspensión, resortes lineales y amortiguadores son empleados. Los resortes principalmente sirven para restituir el desplazamiento y fuerza, mientras que los amortiguadores van disipando energía a través de calor.

Cuatro elementos de amortiguamiento son colocados en la parte inferior del ensamble tina, estos elementos están gobernados por la siguiente definición de fuerza de amortiguamiento:

$$F_d = -cv \quad (1.1)$$

Donde:

$c$  - coeficiente de amortiguamiento [N s/m]

$v$  - velocidad del amortiguador [m/s]

Los elementos de la suspensión y componentes del sistema se muestran a continuación y su conexión entre ellos (Fig. 1.5):

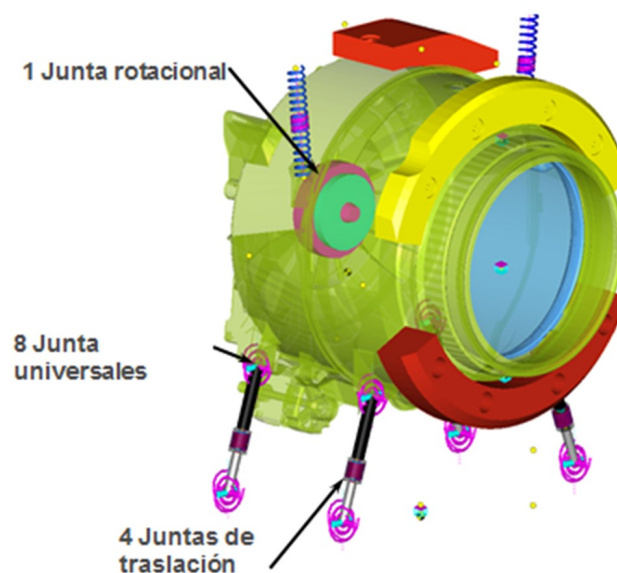


Fig. 1.5. Elementos de unión entre ensambles.

### 1.2.1. Condiciones de análisis

Se fija una masa que tiene propiedades inerciales al interior del ensamble tambor, de modo que sirva como elemento de desbalanceo. Esta masa es de aproximadamente 0.68 [kg], esta masa representa una condición crítica de desbalanceo.

Se considera un torque constante de 3.3 [N-m] que permita romper la inercia inicial y mover el sistema. Este torque viene de resultados experimentales.

Se desprecian los efectos de amortiguamiento y rigidez de las juntas en los extremos de los amortiguadores por no tener datos experimentales o un modelo analítico que defina el comportamiento de estos componentes.

La masa de los contrapesos frontales y posterior es de 27kg.

Se simula un tiempo de operación de 50 segundos donde se espera que la velocidad final de centrifugado alcance 1000 - 1100 rpm.

### 1.3. Resultados del análisis dinámico

Las respuestas solicitadas al modelo dinámico de multicuerpo son los desplazamientos del centro de gravedad de la lavadora que se gráficas a continuación (Fig. 1.6).

Desplazamiento X

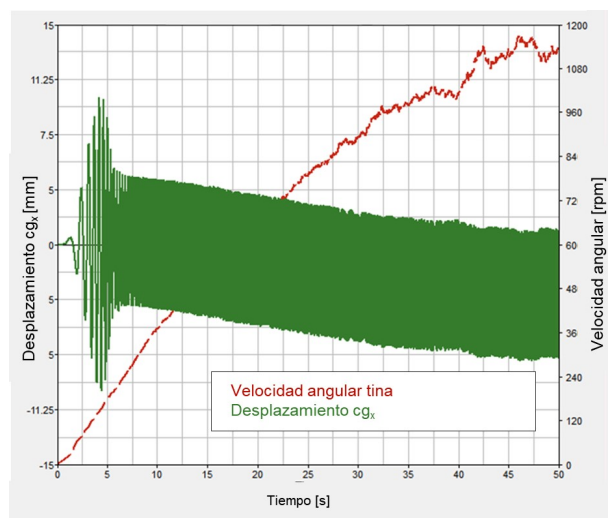


Fig. 1.6. Desplazamiento de CG en dirección X y velocidad angular de tina vs tiempo.

Desplazamiento Y

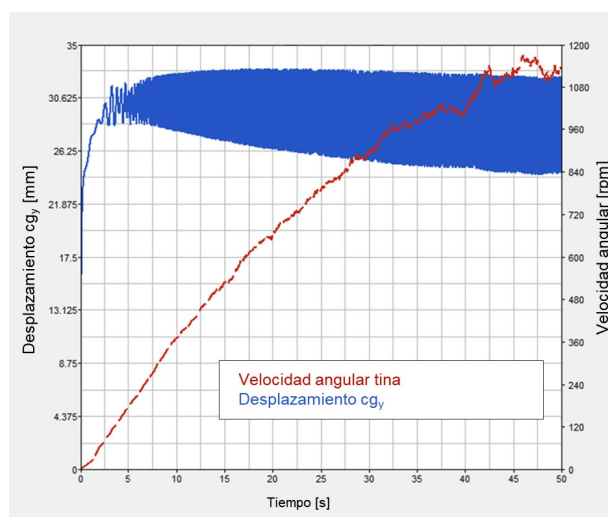


Fig. 1.7. Desplazamiento de CG en dirección Y y velocidad angular de tina vs tiempo.



## Desplazamiento Z

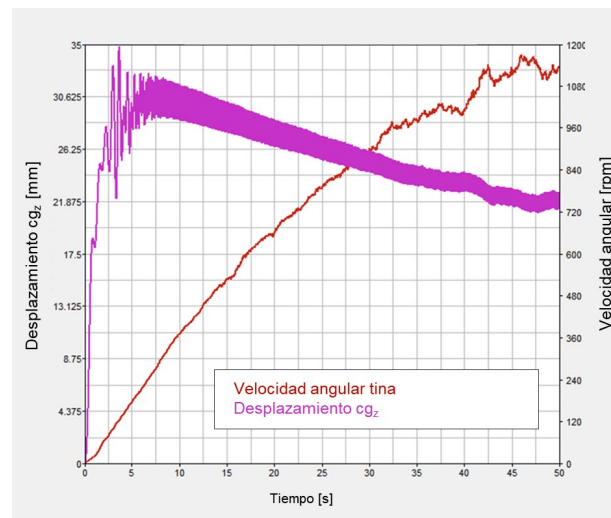


Fig. 1.8. Desplazamiento de CG en dirección Z y velocidad angular de tina vs tiempo.

La masa del sistema y la inercia rotacional del ensamble tina juegan un papel importante para describir el movimiento en los primeros instantes de la dinámica del sistema. La Fig. 1.6 muestra el desplazamiento (eje primario -  $y$ ) del centro de gravedad del sistema en dirección  $x$  y el comportamiento de la velocidad angular de la tina que se alcanza (eje secundario -  $y_1$ ). Es posible determinar la velocidad angular en donde existen zonas de mayor desplazamiento pico-pico y zonas de menor desplazamiento pico-pico, a estas zonas se les define como desplazamientos en estado transitorio y desplazamientos en estado estable respectivamente. La importancia de saber donde ocurren estos fenómenos y como se acelera angularmente el ensamble tina ayuda a identificar movimientos extremos del centro de gravedad que causan choques entre componentes estáticos (gabinete, bomba, etc) y componentes con comportamiento dinámico (ensamble tina). En el intervalo de tiempo (eje -  $x$ ) 0.0 s - 2.5 s se tiene una velocidad de 0 - 60 rpm y desplazamientos de -4.0 mm a +4.0 mm pico-pico, es decir 8mm de desplazamiento total. El siguiente intervalo de 2.5s - 5.0s se observan desplazamientos pico-pico de -10 mm a +10 mm, 20 mm de magnitud de desplazamiento y una velocidad angular de 60 -180 rpm, es en esta zona donde se registran los mayores desplazamientos del centro de gravedad en dirección  $x$ . Se aprecia una última zona donde se registran desplazamientos pico-pico de -4.0 mm a +4.0 mm donde el comportamiento es estable y esta zona va desde 7.5 s a 50s. La zona donde se registran los mayores desplazamientos se conoce como paso por frecuencia natural  $\omega$  del sistema y se busca que el sistema evite estas zonas o pasar lo más rápido posible por estas mismas. La gravedad no tiene afectación alguna en esta dirección ya que el eje vertical del sistema está representado en la dirección -  $y$ .

El desplazamiento en la dirección -  $y$ , está marcado por un acomodo inicial del centro de gravedad, se observa que parte del reposo y del origen comenzando la oscilación instantes

después. Puede apreciarse que en intervalo de tiempo de 0.0s - 2.5s existe este ajuste debido a la gravedad que actúa en la dirección vertical. En el intervalo de 2.5s - 5.0s se observa la zona transitoria de desplazamientos y velocidades angulares de 60 -140 rpm. La zona estable se tiene a partir de 200 rpm.

De igual forma puede interpretarse el movimiento del centro de gravedad en dirección  $-z$ , la frecuencia natural en eje  $-z$  se tiene en el intervalo de 2.5s -5.0s siendo la frecuencia natural alrededor de 120 rpm, sin embargo es de notar que no es clara la zona estable ya que presenta continuos ajustes y esto puede ser causado por las condiciones de frontera arriba mencionadas.

Más adelante se comparará esta modelacion de MBD contra un modelo dinámico analítico permitiendo ver las diferencias de resultados entre modelos.

# Capítulo 2

## Modelación y análisis dinámico de la suspensión de lavadora de eje horizontal de 7 GDL.

### 2.1. Introducción

Reducir las vibraciones es uno de los aspectos mas importantes en el diseño de una lavadora, por lo tanto las vibraciones que se generan en el ciclo de centrifugado es parte fundamental del análisis dinámico de una suspensión. Los modelos analíticos se han empleado para comprender la cinemática y dinámica de sistemas, donde los grados de libertad juegan un papel importante para definir unívocamente la posición de un sistema mecánico en el espacio en cualquier instante.de tiempo.

Sowards (1972), planteó un modelo dinámico de 6 GDL para una suspensión de lavadora de eje horizontal, sin embargo, las no linealidades del sistema orillaron al autor a linealizarlo para poder encontrar soluciones a su modelo analítico. Bae et al. (2002) desarrollaron un modelo dinámico de 6 GDL para una lavadora de eje vertical y empleando la formulación de Lagrange e incluyendo elementos de autobalance en la formulación, lograron establecer parámetros de estós últimos elementos para reducir las vibraciones del sistema en la etapa de centrifugado. Hee-Tae y Weul-Bong (2010) empleado la segunda ley de Newton, obtienen un modelo de 12 GDL y cabe destacar que este desarrollo permitio definir y estudiar el movimiento relativo entre ensamble-canasta y ensamble-tina. Más recientemente Hai-Wei et al. (2015) desarrollaron un modelo matemático de 6 GDL empleando la formulación de Lagrange, para una lavadora de eje horizontal que incluía un balanceador de esféras. Esté modelo junto con ecuaciones de autonomía que definen el movimiento de las respuesta del centro de gravedad, ayudaron a plantear el análisis de estabilidad para definir los valores de las variables del

sistema suspensión, donde se definen zonas estables e inestables del sistema, lo que implica que el proceso de centrifugado tiene una solución periódica estable. Finalmente en 2016 se desarrolló un modelo dinámico con 4 GDL para estudiar el efecto de los amortiguadores sobre la suspensión y predecir los desplazamientos en los ejes vertical y lateral del sistema. No obstante, el modelo no abordó el movimiento longitudinal del sistema (Bu 'skiewicz & Pittner 2016).

Es importante poder describir la mayor cantidad de movimientos del centro de gravedad para establecer la influencia de las variables de la suspensión sobre los grados de libertad de esté mismo.

Se presenta en este capítulo el análisis dinámico de la lavadora de eje horizontal de 7 GDL empleando el álgebra matricial y la formulación de Lagrange para cada ensamble del sistema: ensamble-tina, ensamble-canasta y masa de desbalance.

Los ensambles tienen los siguientes componentes:

Ensamble-tina: motor, tina, portabaleros, contrapesos.

Ensamble-canasta: baleros, flechas, portaflecha y canasta.

Masa de desbalanceo.

Es de notar que existen tres marcos de referencia, el sistema global  $(\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0)$ , un sistema referencia local  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$  unido al ensamble-tina y un marco de referencia local  $(\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2)$  unido al ensamble-canasta. Los sistemas de referencia local  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$  y  $(\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2)$  coinciden en sus orígenes.

Estos tres marcos permiten describir el movimiento de rotor y estator, dicho movimiento está representado mediante el vector de coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q} = [x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma, \theta]^T$$

Donde el subvector  $[x, y, z]^T$  representa la posición del origen del marco  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$ , y el subvector  $[\alpha, \beta, \gamma]^T$  representan la orientación del marco  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$ , ambos respecto al marco de referencia absoluto  $(\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0)$  y  $\theta$  representa el giro en eje z, del marco  $(\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2)$  respecto a  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$ .

## 2.2. Análisis cinemático

### 2.2.1. Cinemática del ensamble-tina

#### Posición

La ubicación y orientación del centro de gravedad medido respecto al marco inercial ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ ) está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G1'}^0 \\ &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{G1'}^1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^0 &= [x, y, z]^T \\ \mathbf{r}_{G1'}^0 &= \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{G1'}^1, \quad \mathbf{r}_{G1'}^1 = [x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}]^T \end{aligned}$$

Los vectores de posición del ensamble-tina se muestran en la Fig. 2.1.

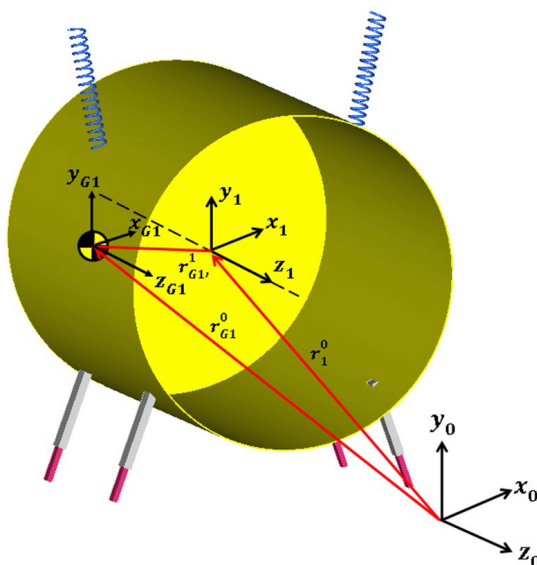


Fig. 2.1. Vectores de posición de ensamble tina.

Los siguientes términos se definen como:

- $\mathbf{r}_{G1}^0$  Vector de posición del centro de gravedad del ensamble-tina, medido desde el marco referencia inercial ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ )
- $\mathbf{r}_1^0$  Vector de posición del sistema de referencia ( $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ ), medido desde ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ )
- $\mathbf{r}_{G1'}^0$  Vector de posición del centro de gravedad del ensamble-tina, medido desde el sistema de referencia ( $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ )
- $\mathbf{R}_1^0 = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)$  Matriz de rotación de transformación de ( $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ ) a ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ ).

Donde se definen las siguientes matrices básicas de rotación:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de  $\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z$  es una expresión que utiliza un conjunto de tres ángulos para definir el número de rotaciones secuenciales, describen la orientación de un cuerpo con un movimiento de junta esférica. Este conjunto de tres ángulos se le conoce como ángulos Cardán (Stejskal y Valasek, 1996) mostrados en Fig. 2.2.

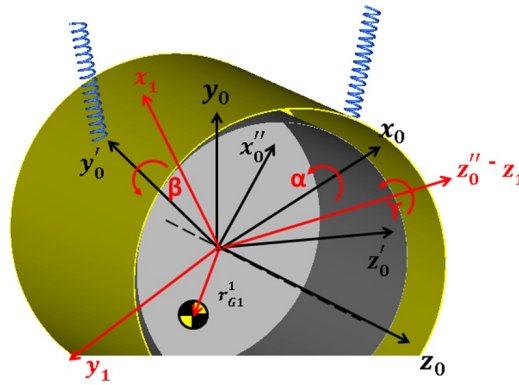


Fig. 2.2 Ángulos cardán.

### Velocidad

Derivando ec. (2.1) con respecto al tiempo, tal que  $\dot{\mathbf{r}}_{G1'}^2 = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{v}_{G1}^0 = \mathbf{v}_1^0 + \mathbf{v}_{G1'}^0 \quad (2.2)$$

$$= \mathbf{v}_1^0 + \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{r}_{G1'}^1 \quad (2.3)$$

Por otra parte, la velocidad angular del ensamblaje-tina asociada al marco de referencia  $(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1)$  definida en  $(\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0)$  es representada por la matriz:

$$\boldsymbol{\Omega}_1^0 = \dot{\mathbf{R}}_1^0 (\mathbf{R}_1^0)^T$$

Definiendo la velocidad angular del estator en el marco de referencia  $(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1)$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_0^1 &= (\mathbf{R}_1^0)^T \boldsymbol{\Omega}_1^0 \mathbf{R}_1^0 \\ &= (\mathbf{R}_1^0)^T \dot{\mathbf{R}}_1^0 (\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{R}_1^0 \\ \boldsymbol{\Omega}_0^1 &= (\mathbf{R}_1^0)^T \dot{\mathbf{R}}_1^0 \end{aligned}$$

Despejando  $\dot{\mathbf{R}}_1^0$  y sustituyendo en ec. (2.3):

$$\mathbf{v}_{G1}^0 = \mathbf{v}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\Omega}_0^1 \mathbf{r}_{G1'}^1 \quad (2.4)$$

Definiendo la matriz antisimétrica en función del producto cruz:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\Omega}_0^1 \mathbf{r}_{G1'}^1 &= \mathbf{R}_1^0 (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_{G1'}^1) \\ &= -\mathbf{R}_1^0 (\mathbf{r}_{G1'}^1 \times \boldsymbol{\omega}_0^1)\end{aligned}$$

Donde  $\boldsymbol{\omega}_0^1$  es el vector de velocidad angular, medido en el sistema de referencia local ( $\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1$ ).

Utilizando la definición de matriz antisimétrica, se obtiene:

$$\mathbf{R}_1^0 (\mathbf{r}_{G1'}^1 \times \boldsymbol{\omega}_0^1) = \mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \boldsymbol{\omega}_0^1 \quad (2.5)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1$  es la matriz antisimétrica del vector  $\mathbf{r}_{G1'}^1$ .

Sustituyendo ec. (2.5) en ec. (2.4):

$$\mathbf{v}_{G1}^0 = \mathbf{v}_1^0 - \mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \boldsymbol{\omega}_0^1 \quad (2.6)$$

**Obteniendo  $\boldsymbol{\omega}_0^1$**

La matriz de velocidad angular del ensamble tina se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_0^1 &= (\mathbf{R}_1^0)^T \dot{\mathbf{R}}_1^0 \\ &= (\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z)^T (\dot{\mathbf{R}}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_x \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_z) \\ &= \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \dot{\mathbf{R}}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_z\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\Omega}_0^1 = \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_y^T \boldsymbol{\Omega}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_z^T \boldsymbol{\Omega}_y \mathbf{R}_z + \boldsymbol{\Omega}_z \quad (2.7)$$

Las matrices

$$\boldsymbol{\Omega}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son matrices de velocidad angular, medidas en el marco de referencia correspondiente. De ec. (2.7) se obtiene:

$$\boldsymbol{\Omega}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & -s\beta\dot{\alpha} - \dot{\gamma} & -c\beta s\gamma\dot{\alpha} + c\gamma\dot{\beta} \\ s\beta\dot{\alpha} + \dot{\gamma} & 0 & -c\beta c\gamma\dot{\alpha} - s\gamma\dot{\beta} \\ c\beta s\gamma\dot{\alpha} - c\gamma\dot{\beta} & c\beta c\gamma\dot{\alpha} + s\gamma\dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz  $\boldsymbol{\Omega}_0^1$  formamos  $\boldsymbol{\omega}_0^1 = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ , en el cual se considerarán las derivadas respecto al tiempo de los desplazamientos angulares incluidos en  $\mathbf{q}$ , es decir:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \mathbf{R}_{\phi_1} \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.8)$$

Con:

$$\mathbf{R}_{\phi_1} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\gamma & 0 & 0 \\ -c\beta s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ s\beta & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = [\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}]^T$$

Sustituyendo ec. (2.8) en ec. (2.6):

$$\mathbf{v}_{G1}^0 = \mathbf{v}_1^0 - \mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

Ordenando en forma matricial:

$$\mathbf{v}_{G1}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.9)$$

Donde  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  es la matriz identidad y  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}]^T$  es la derivada con respecto al tiempo del vector de coordenadas generalizadas.

Reescribiendo la velocidad angular del estator en función de las coordenadas generalizadas se tiene:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \mathbf{R}_{\phi_1} \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.10)$$

## 2.2.2. Cinemática del ensamble canasta

### Posición

La ubicación y orientación del centro de gravedad del ensamble-canasta, medido respecto al marco inercial ( $\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0$ ) está dada por la expresión;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G2}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G2'}^0 \\ &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}_{G2'}^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde:

$$\mathbf{r}_{G2'}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}_{G2'}^2, \quad \mathbf{r}_{G2'}^2 = [x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]^T$$

En la Fig. 2.3 se muestran los vectores de posición del ensamble canasta.

- $\mathbf{r}_{G2}^0$  Vector de posición del centro de gravedad del ensamble-tina, medido desde el marco referencia inercial ( $\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0$ )
- $\mathbf{r}_{G2'}^2$  Vector de posición del centro de gravedad del ensamble-tina medido desde el sistema de referencia ( $\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2$ )
- $\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_{z_1}(\gamma) \mathbf{R}_{z_2}(\theta)$  Matriz de rotación de transformación de ( $\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2$ ) a ( $\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0$ )



### Velocidad

Derivando ec. (2.11) con respecto al tiempo, tal que  $\dot{\mathbf{r}}_{G2'}^2 = \mathbf{0}$  (Fig. 2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{G2}^0 &= \mathbf{v}_1^0 + \dot{\mathbf{R}}_2^0 \mathbf{r}_{G2'}^2 + \mathbf{R}_2^0 \dot{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \\ &= \mathbf{v}_1^0 + \dot{\mathbf{R}}_2^0 \mathbf{r}_{G2'}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

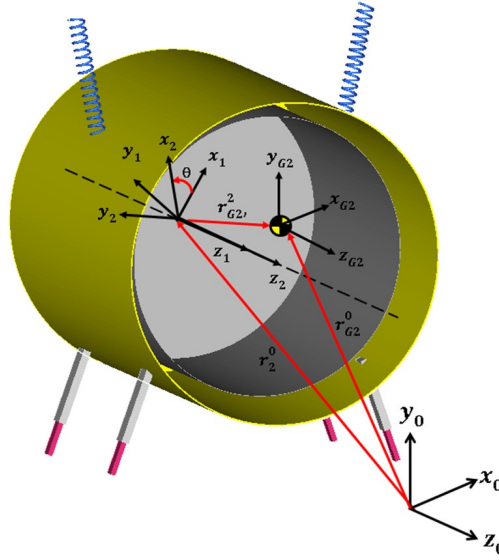


Fig. 2.3. Vectores de posición de ensamble canasta.

Análogamente como se hizo con la velocidad angular del ensamble tina, se hará ahora con el ensamble canasta.

La velocidad angular del rotor asociada al marco de referencia  $(\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2)$ , definida en  $(\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0)$ , es representada por la matriz  $\Omega_0^2$ :

$$\Omega_0^2 = (\mathbf{R}_2^0)^T \dot{\mathbf{R}}_2^0$$

Despejando  $\dot{\mathbf{R}}_2^0$  y sustituyendo en ec. (2.12):

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \mathbf{v}_1^0 + \mathbf{R}_2^0 \Omega_0^2 \mathbf{r}_{G2'}^2 \quad (2.13)$$

De la misma forma que se tomó la matriz antisimétrica en función del producto cruz para el estator, se tiene para el rotor:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2^0 \Omega_0^2 \mathbf{r}_{G2'}^2 &= \mathbf{R}_2^0 (\boldsymbol{\omega}_0^2 \times \mathbf{r}_{G2'}^2) \\ &= -\mathbf{R}_2^0 (\mathbf{r}_{G2'}^2 \times \boldsymbol{\omega}_0^2) \end{aligned}$$

Donde  $\boldsymbol{\omega}_0^2$  es el vector de velocidad angular medido en el sistema de referencia local  $(\mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2)$ .

Utilizando la definición de matriz antisimétrica, se obtiene:

$$\mathbf{R}_2^0 (\mathbf{r}_{G2'}^2 \times \boldsymbol{\omega}_0^2) = \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \boldsymbol{\omega}_0^2 \quad (2.14)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2$  es la matriz antisimétrica del vector  $\mathbf{r}_{G2'}^2$ . Sustituyendo ec. (2.14) en ec. (2.13):

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \mathbf{v}_1^0 - \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \boldsymbol{\omega}_0^2 \quad (2.15)$$

**Obteniendo  $\boldsymbol{\omega}_0^2$**

La matriz de velocidad angular del estator se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_0^2 &= (\mathbf{R}_2^0)^T \dot{\mathbf{R}}_2^0 \\ &= (\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2})^T \left( \dot{\mathbf{R}}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_x \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \dot{\mathbf{R}}_{z2} \right) \\ &= \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \dot{\mathbf{R}}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \\ &\quad \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \dot{\mathbf{R}}_{z2} \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\Omega}_0^2 = \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \mathbf{R}_y^T \boldsymbol{\Omega}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_{z2}^T \mathbf{R}_{z1}^T \boldsymbol{\Omega}_y \mathbf{R}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \mathbf{R}_{z2}^T \boldsymbol{\Omega}_{z1} \mathbf{R}_{z2} + \boldsymbol{\Omega}_{z2} \quad (2.16)$$

Las matrices:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & \dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{\Omega}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}_{z1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{\Omega}_{z2} &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Son matrices de velocidad angular medidos en el marco de referencia correspondiente.

De ec. (2.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_0^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -s\beta\dot{\alpha} - (\dot{\gamma} + \dot{\theta}) & -c\beta s(\gamma + \theta)\dot{\alpha} + c(\gamma + \theta)\dot{\beta} \\ s\beta\dot{\alpha} + (\dot{\gamma} + \dot{\theta}) & 0 & -c\beta c(\gamma + \theta)\dot{\alpha} - s(\gamma + \theta)\dot{\beta} \\ c\beta s(\gamma + \theta)\dot{\alpha} - c(\gamma + \theta)\dot{\beta} & c\beta c(\gamma + \theta)\dot{\alpha} + s(\gamma + \theta)\dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la matriz  $\boldsymbol{\Omega}_0^2$  se extrae  $\boldsymbol{\omega}_0^2 = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ ; sin embargo, el vector  $\boldsymbol{\omega}_0^2$  se puede descomponer como:

$$\boldsymbol{\omega}_0^2 = \mathbf{R}_{\phi_2} \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.17)$$

Con:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\phi_2} &= \begin{bmatrix} c\beta c(\gamma + \theta) & s(\gamma + \theta) & 0 & 0 \\ -c\beta s(\gamma + \theta) & c(\gamma + \theta) & 0 & 0 \\ s\beta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} &= [\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}]^T \end{aligned}$$

Sustituyendo ec. (2.17) en ec. (2.15):

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \mathbf{v}_1^0 - \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \dot{\phi}$$

Ordenando en forma matricial:

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

Reescribiendo la velocidad angular del rotor en función de las coordenadas generalizadas se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0^2 &= \mathbf{R}_{\phi_2} \dot{\phi} \\ \boldsymbol{\omega}_0^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.2.3. Cinemática de la masa de desbalanceo

#### Posición

La ubicación y orientación del centro de gravedad de la masa de desbalanceo, medido respecto al marco inercial ( $\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0$ ), está dado por la expresión;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Gm}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{Gm'}^0 \\ &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}_{Gm'}^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde:

$$\mathbf{r}_{Gm}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}_{Gm'}^2, \quad \mathbf{r}_{Gm'}^2 = [x_{Gm}, y_{Gm}, z_{Gm}]^T$$

En la Fig. 2.4 se muestran los vectores de posición de masa de desbalanceo.

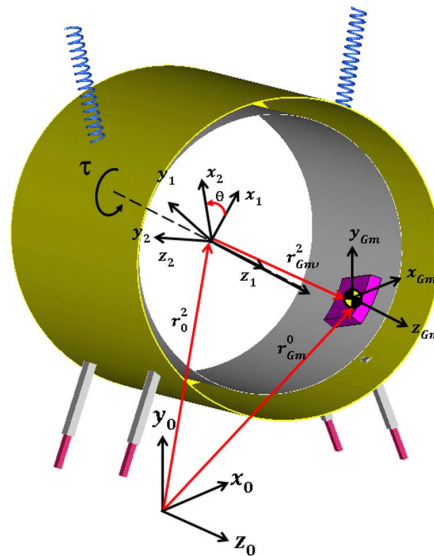


Fig. 2.4. Vectores de posición de masa de desbalanceo.

donde:

$\mathbf{r}_{Gm}^0$  Vector de posición del centro de gravedad de masa de desbalanceo, medido desde el marco referencia inercial ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ )

$\mathbf{r}_{Gm'}^0$  Vector de posición del centro de gravedad de masa de desbalanceo, medido desde el sistema de referencia ( $\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2$ )

### Velocidad

De manera análoga al ensamble canasta se tiene:

$$\mathbf{v}_{Gm}^0 = \mathbf{v}_1^0 + \dot{\mathbf{R}}_2^0 \mathbf{r}_{Gm'}^2 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{v}_{Gm}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3x3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.22)$$

Además, la velocidad angular de la masa descentrada es igual a la velocidad angular del rotor:

$$\boldsymbol{\omega}_2^{Gm} = \boldsymbol{\omega}_0^2$$

Ordenando matricialmente:

$$\boldsymbol{\omega}_2^{Gm} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.23)$$

## 2.3. Análisis dinámico - Formulación Euler - Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange son métodos básicos de ecuaciones de ensamble de movimiento de sistemas mecánicos basados en principios mecánicos analíticos. En otras palabras, formula las ecuaciones de movimiento usando un conjunto de coordenadas generalizadas (Spong y Vidyasagar, 1989) . Esto elimina todas o algunas de las fuerzas de restricción.

Se empleó la siguiente notación para la formulación:

- $\mathbf{I}_i$ : Matriz de inercia de cuerpo  $i$
- $K$ : Energía cinética del sistema mecánico
- $L$ : Función Lagrangiana
- $\mathbf{M}$ : Matriz de masas del sistema
- $\mathbf{M}_i$ : Matriz de elementos de masa cuerpo  $i$
- $q_j$ : Coordenada  $j$  – ésima generalizada
- $\mathbf{q}$ : Vector de coordenadas generalizadas
- $U$ : Energía potencial del sistema mecánico
- $Q_j$ : Vector de fuerzas generalizadas

La función Lagrangiana  $L$  es definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema mecánico como (Lung-Wen, 1999):

$$L = K - U$$

Donde  $K$  es definida como:

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T\mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

Y  $U$  como:

$$U = m\mathbf{g}^T\mathbf{R}_{CGi}, \quad \mathbf{g} = [0, -g, 0]^T$$

La energía cinética depende de la localización y la velocidad de los ensambles del sistema suspensión, mientras que la energía potencial depende únicamente de la localización de los ensambles. La ecuación de Lagrange de movimiento es formulada en términos de la función de Lagrange (Goldstein, 1980) y sus coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , de manera que se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

La fuerza generalizada  $Q_j$  correspondiente a la  $j$ -ésima coordenada está definida por la igualdad del trabajo virtual de las fuerzas  $\mathbf{F}_l$  actuando en las coordenadas  $\mathbf{r}_l$  y el trabajo del momento  $\mathbf{M}_m$  actuando en las coordenadas generalizadas  $\phi_m$ :

$$\delta\mathbf{W} = \mathbf{Q}^T\delta\mathbf{q} = \sum_l \mathbf{F}_l^T\delta\mathbf{r}_l + \sum_m \mathbf{M}_m^T\delta\phi_m \tag{2.24}$$

### 2.3.1. Energía cinética de ensamble-tina

Tomando ecuaciones (2.9) y (2.10), velocidad traslacional y rotacional respectivamente del ensamble tina:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G1}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_0^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Obteniendo la energía cinética:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right)^T \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\mathbf{R}_{\phi_1})^T \end{bmatrix}^T \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -(\mathbf{R}_{\phi_1})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1)^T (\mathbf{R}_1^0)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ (\mathbf{R}_{\phi_1})^T \end{bmatrix} \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \\ -(\mathbf{R}_{\phi_1})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1)^T (\mathbf{R}_1^0)^T & (\mathbf{R}_{\phi_1})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1)^T (\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\mathbf{R}_{\phi_1})^T \mathbf{J}_1 \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_1 \mathbf{R}_1^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 \mathbf{R}_{\phi_1} \\ -m_1 (\mathbf{R}_{\phi_1})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1)^T (\mathbf{R}_1^0)^T & (\mathbf{R}_{\phi_1})^T \left( m_1 (\tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1)^T \tilde{\mathbf{r}}_{G1'}^1 + \mathbf{J}_1 \right) \mathbf{R}_{\phi_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.25)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} \quad (2.26)$$

### 2.3.2. Energía cinética de ensamble-canasta

Tomando ecuaciones. (2.19) y (2.20), velocidad traslacional y rotacional del rotor respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G2}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_0^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Obteniendo la energía cinética, tenemos:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2}m_2 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right)^T \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2}m_2 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\mathbf{R}_{\phi_2})^T \end{bmatrix}^T \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2}m_1 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -(\mathbf{R}_{\phi_2})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2)^T (\mathbf{R}_2^0)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ (\mathbf{R}_{\phi_2})^T \end{bmatrix} \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2}m_1 \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \\ -(\mathbf{R}_{\phi_2})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2)^T (\mathbf{R}_2^0)^T & (\mathbf{R}_{\phi_2})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2)^T (\mathbf{R}_2^0)^T \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\mathbf{R}_{\phi_2})^T \mathbf{J}_2 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_2 \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \\ -m_2 (\mathbf{R}_{\phi_2})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2)^T (\mathbf{R}_2^0)^T & (\mathbf{R}_{\phi_2})^T \left( m_2 (\tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2)^T \tilde{\mathbf{r}}_{G2'}^2 + \mathbf{J}_2 \right) \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.27)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} \quad (2.28)$$

### 2.3.3. Energía cinética de masa de desbalanceo

De manera análoga se obtiene la energía cinética de la masa de desbalanceo, por lo tanto, la energía cinética de este cuerpo es:

$$K_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_m \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_m \mathbf{R}_2^0 \tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2 \mathbf{R}_{\phi_2} \\ -m_m (\mathbf{R}_{\phi_2})^T (\tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2)^T (\mathbf{R}_2^0)^T & (\mathbf{R}_{\phi_2})^T \left( m_m (\tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2)^T \tilde{\mathbf{r}}_{Gm'}^2 + \mathbf{J}_m \right) \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.29)$$

$$K_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (2.30)$$

### 2.3.4. Energía potencial del ensamble-tina

Tomando las definiciones de los vectores de centros de gravedad de los cuerpos, mostrados en la cinemática, se consideran los siguientes vectores como se muestra en la Fig. 2.5:

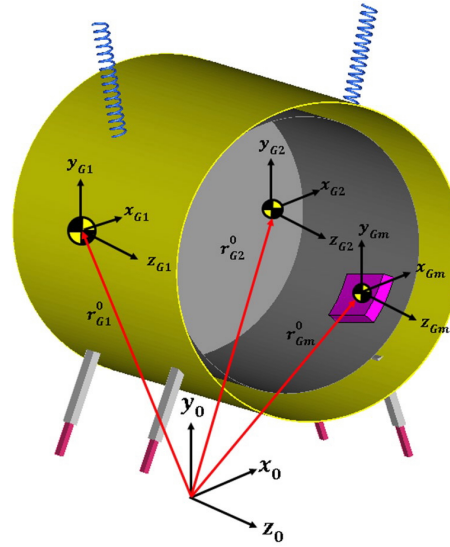


Fig. 2.5 Vectores de centro de gravedad de ensambles.

La energía potencial se define como:

$$U = -m\mathbf{g}^T \mathbf{R}_{CG_i}$$

Para el ensamble de tina se definió el vector de posición en ec. (2.1)  $\mathbf{r}_{G1}^0 = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G1'}^0$ ; por lo tanto, la energía potencial del ensamble tina es:

$$U_1 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G1}^0$$

### 2.3.5. Energía potencial de ensamble canasta

El vector de posición que apunta al centro de gravedad del ensamble canasta es  $\mathbf{r}_{G2}^0 = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G2'}^0$ ; por lo tanto, la energía potencial es:

$$U_2 = -m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0$$

### 2.3.6. Energía potencial de masa de desbalanceo

El vector de posición que apunta al centro de gravedad de la masa de desbalanceo es  $\mathbf{r}_{Gm}^0 = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{Gm'}^0$ ; por lo tanto, la energía potencial es:

$$U_m = -m_m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{Gm'}^0$$

## 2.4. Función Lagrangiana

La función Lagrangiana del sistema se define como:

$$L = L_1 + L_2 + L_m$$



Para cada cuerpo:

$$\begin{aligned} L_1 &= K_1 - U_1 \\ L_2 &= K_2 - U_2 \\ L_m &= K_m - U_m \end{aligned}$$

### 2.4.1. Ensemble-tina

Tomando la expresión  $L_1$  y utilizando las definiciones de energía cinética y potencial se tiene las siguientes funciones de Lagrange:

$$L_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G1}^0$$

### 2.4.2. Ensemble-canasta

$$L_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0$$

### 2.4.3. Masa de desbalanceo

$$L_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{Gm}^0$$

Donde:

$$\mathbf{g} = [0, -g, 0]^T$$

Desarrollando los términos de la función de Lagrange

**Desarrollando**  $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j}$  Para el sistema se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j}$$

Donde  $\dot{q}_1 = \dot{x}$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{y}$ ,  $\dot{q}_3 = \dot{z}$ ,  $\dot{q}_4 = \dot{\alpha}$ ,  $\dot{q}_5 = \dot{\beta}$ ,  $\dot{q}_6 = \dot{\gamma}$ ,  $\dot{q}_7 = \dot{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G1}^0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} + m_m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{Gm}^0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned}$$

Se debe aclarar que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}_1} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_4} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_5} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_6} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0] \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_7} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]\end{aligned}$$

De lo anterior:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \mathbf{0}$$

**Desarrollando el término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$  para el ensamble tina** Para el sistema se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)\end{aligned}$$

Se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^T \left( \dot{\mathbf{M}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \left( \dot{\mathbf{M}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}}^T \left( \dot{\mathbf{M}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \left( \dot{\mathbf{M}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Con dichas identidades se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \mathbf{D}_{1j}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{1j}^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{D}_{1j}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_1 \quad (2.32)$$

$$\mathbf{V}_{1j}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_1 \quad (2.33)$$

Donde el término  $\dot{\mathbf{M}}_1 = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_1$ .

**Desarrollando el término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$  para el ensamble canasta** Siguiendo el mismo procedimiento se establece que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_2 \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_2^T \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_2^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{M}}_2 + \dot{\mathbf{M}}_2^T) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \mathbf{D}_{2j}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{2j}^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{D}_{2j}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_2 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{V}_{2j}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_2 \quad (2.36)$$

Donde el término  $\dot{\mathbf{M}}_2 = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_2$ .

Desarrollando el término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$  para masa de desbalanceo Siguiendo el mismo procedimiento se establece que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_m \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_m^T \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_m^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_m + \mathbf{M}_m^T) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{M}}_m + \dot{\mathbf{M}}_m^T) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \mathbf{D}_{mj}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{mj}^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{D}_{mj}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_m \quad (2.38)$$

$$\mathbf{V}_{mj}^T = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_m \quad (2.39)$$

Donde el término  $\dot{\mathbf{M}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_m$ .

Desarrollando el término  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  Nuevamente escribiendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G1}^0 \\ L_2 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0 \\ L_m &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{Gm}^0 \end{aligned}$$

Para el sistema se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial L_1}{\partial q_j} + \frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_m}{\partial q_j}$$

Desarrollando el término  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  para el ensamble tina Tomando las definiciones de  $\mathbf{r}_{G1}^0$ :

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G1}^0 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G1}^0}{\partial q_j}$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{r}_{G1}^0}{\partial q_j}$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{G1}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G1'}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G1'}^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1'}^1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1'}^1 \right) \\ \frac{\partial L_1}{\partial q_j} &= \mathbf{V}_{1jp}^T \dot{\mathbf{q}} + C_{1jp}\end{aligned}\quad (2.40)$$

$$\mathbf{V}_{1jp}^T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial q_j} \quad (2.41)$$

$$C_{1jp} = m_1 \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1'}^1 \right) \quad (2.42)$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j}$  es de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

Y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q_j}\end{aligned}$$

**Desarrollando el término  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  para el ensamble canasta** Tomando las definiciones de  $\mathbf{r}_{G2}^0$ :

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j}$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j}$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{G2'}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G2'}^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G2'}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G2'}^2 \right) \\ \frac{\partial L_2}{\partial q_j} &= \mathbf{V}_{2jp}^T \dot{\mathbf{q}} + C_{2jp}\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$\mathbf{V}_{2jp}^T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial q_j} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{V}_{2jp}^T = m_2 \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G2'}^2 \right) \quad (2.45)$$

Y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q_j}\end{aligned}$$

**Desarrollando el término  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  para masa de desbalanceo.** Tomando las definiciones de  $\mathbf{r}_{Gm}^0$ :

$$\frac{\partial L_m}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_m \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{Gm}^0 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_m \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{Gm}^0}{\partial q_j}$$

El término  $\frac{\partial \mathbf{r}_{Gm}^0}{\partial q_j}$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_{Gm}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{Gm'}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{Gm'}^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{Gm'}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_m}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_m \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{Gm'}^2 \right) \\ \frac{\partial L_m}{\partial q_j} &= \mathbf{V}_{mjp}^T \dot{\mathbf{q}} + C_{mjp}\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$\mathbf{V}_{mjp}^T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial q_j}\tag{2.47}$$

$$C_{mjp} = m_m \mathbf{g}^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{r}_{Gm'}^2 \right)\tag{2.48}$$

Con:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial q_j}$$

#### 2.4.4. Fuerzas Generalizadas del sistema suspensión

De acuerdo a ec (2.26) es necesario obtener las fuerzas generalizadas  $\mathbf{Q}$  del sistema, en esta sección se describen las fuerzas generalizadas del sistema suspensión. Debido a que la masa de los resortes y amortiguadores es muy pequeña comparada contra el resto del sistema, las fuerzas inerciales actuando sobre los cuerpos de la misma suspensión son despreciadas. Se establecen marcos de referencia que permiten determinar la posición de la suspensión en todo momento, por tal razón, se definen los siguientes sistemas de coordenadas locales  $(\mathbf{X}_{si} \mathbf{Y}_{si} \mathbf{Z}_{si})$  y  $(\mathbf{X}_{di} \mathbf{Y}_{di} \mathbf{Z}_{di})$  para los componentes de la suspensión resortes y amortiguadores, respectivamente.

### Fuerzas de resortes

Por definición de fuerza en resorte:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{si} &= F_{si} \mathbf{Y}_{si} \\ F_{si} &= k_{si} (L_{si} - L_0) = k_{si} (\| \mathbf{d}_{si} \| - L_0) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Donde  $k_{si}$  es la rigidez del resorte y  $L_0$  la longitud inicial del resorte.

#### Obteniendo $\| \mathbf{d}_{si} \|$

Considerando el siguiente diagrama de vectores mostrado en Fig. 2.6. para la posición de la sujeción del resorte sobre el ensamble tina del resorte  $i$ -ésimo, se define la siguiente ecuación vectorial:

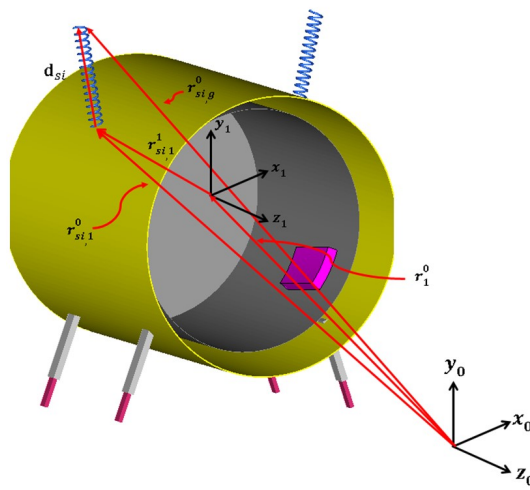


Fig. 2.6. Vectores de posición de resortes.

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{si,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{si,1}^1 \\ \mathbf{r}_{si,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1}^1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ahora, definiendo la posición de sujeción del resorte  $i$ -ésimo sobre la tierra:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{si} &= \mathbf{r}_{si,g}^0 - \mathbf{r}_{si,1}^0 \\ \mathbf{d}_{si} &= \mathbf{r}_{si,g}^0 - (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1}^1) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Donde el vector  $\mathbf{r}_{si,1}^1$  está definido en el marco de referencia  $(\mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1)$ . El vector unitario en la dirección de  $\mathbf{Y}_{si}$  se define como:

$$\mathbf{Y}_{si} = \frac{\mathbf{d}_{si}}{\| \mathbf{d}_{si} \|}$$

### Fuerzas de amortiguadores

Por definición de fuerza en amortiguadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{di} &= F_{di} \mathbf{Y}_{di} \\ F_{di} &= -c_{di} \dot{L}_{di} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Donde  $c_{si}$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\dot{L}_{di}$  es la magnitud del vector de velocidad del amortiguador  $i$ -ésimo.

#### Obteniendo $\dot{L}_{di}$

La posición de sujeción contra el ensamble tina y tierra del amortiguador  $i$ -ésimo, medido desde el marco de referencia  $(\mathbf{X}_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Z}_0)$ , se define con la siguiente ecuación vectorial, ver Fig. 2.7:

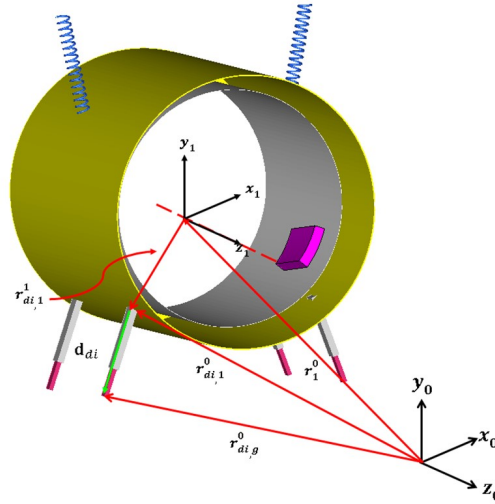


Fig. 2.7. Vectores de posición de amortiguadores.

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{di,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_{di,1}^1 \\ \mathbf{r}_{di,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{di,1}^1 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por otro lado, también se puede definir la posición del amortiguador  $i$ -ésimo de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_{di,g}^0 = \mathbf{d}_{di} + \mathbf{r}_{di,1}^0$$

Despejando  $\mathbf{d}_{di}$ :

$$\mathbf{d}_{di} = \mathbf{r}_{di,g}^0 - \mathbf{r}_{di,1}^0 \quad (2.54)$$

Derivando ecuación. (2.54) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{d}}_{di} = -\dot{\mathbf{r}}_{di,1}^0 \quad (2.55)$$



Derivando ecuación (2.53) con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_{di,1}^0 = \dot{\mathbf{r}}_1^0 + \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{r}_{di,1}^1$$

Y tomando de ecuaciones cinemáticas de  $\dot{\mathbf{R}}_1^0$  se consigue:

$$\dot{\mathbf{r}}_{di,1}^0 = \dot{\mathbf{r}}_1^0 - \mathbf{R}_1^{0\sim 1} \mathbf{R}_{\phi 1} \dot{\phi} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{v}_{di,1}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^{0\sim 1} \mathbf{R}_{\phi 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_1^{0\sim 1} \mathbf{R}_{\phi 1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.57)$$

Por otra parte, se tiene:

$$L_{di} = \|\mathbf{d}_{di}\| = (\mathbf{d}_{di}^T \mathbf{d}_{di})^{1/2}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{L}_{di} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{di}^T \mathbf{d}_{di})^{-1/2} (\dot{\mathbf{d}}_{di}^T \mathbf{d}_{di} + \mathbf{d}_{di}^T \dot{\mathbf{d}}_{di}) \\ \dot{L}_{di} &= \frac{\dot{\mathbf{d}}_{di}^T \mathbf{d}_{di}}{\|\mathbf{d}_{di}\|} \\ \dot{L}_{di} &= \dot{\mathbf{d}}_{di}^T \frac{\mathbf{d}_{di}}{\|\mathbf{d}_{di}\|} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{L}_{di} = \dot{\mathbf{d}}_{di}^T \mathbf{Y}_{di} \quad (2.58)$$

Donde:

$$\mathbf{Y}_{di} = \frac{\mathbf{d}_{di}}{\|\mathbf{d}_{di}\|}$$

### 2.4.5. Fuerzas Generalizadas Q

La formulación de la ecuación de Lagrange considera el uso de fuerzas generalizadas contemplando las fuerzas aplicadas externamente, fuerzas y torques de actuadores, fuerzas de resortes lineales y torsionales, amortiguadores etc., de modo que es necesario desarrollar estas expresiones para que sean compatibles con el lagrangiano y consistentes con las restricciones mecánicas. Las fuerzas generalizadas se obtienen a partir de la expresión de trabajo virtual. Por lo tanto, la fuerza generalizada  $\mathbf{Q}$  está definida por la igualdad del trabajo virtual :

$$\delta W = \sum_l \mathbf{F}_l^T \delta \mathbf{r}_l + \sum_m \mathbf{M}_m^T \delta \Theta_m = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (2.59)$$

Las fuerzas de la suspensión se definieron como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{si} &= F_{si} \mathbf{Y}_{si} \\ \mathbf{F}_{di} &= F_{di} \mathbf{Y}_{di} \end{aligned}$$

$\mathbf{Y}_{si}$ — vector unitario definido a largo del resorte i-ésimo.

$\mathbf{Y}_{di}$ — vector unitario definido a lo largo del amortiguador i-ésimo.

Por lo tanto sustituyendo  $\mathbf{F}_{si}$  y  $\mathbf{F}_{di}$  y el momento externo (momento de excitación) en ecuación. (2.59) se tiene:

$$\delta\mathbf{W} = \mathbf{F}_{si}^T \delta\mathbf{r}_{si}^0 + \mathbf{F}_{di}^T \delta\mathbf{r}_{di}^0 + \boldsymbol{\tau}_0^T \delta\boldsymbol{\Theta}_\omega = \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{q} \quad (2.60)$$

Será necesario definir los vectores de posición de los puntos de aplicación de las fuerzas de restitución y amortiguamiento como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{si,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1 \\ \mathbf{r}_{di,1}^0 &= \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{di,1'}^1 \end{aligned}$$

Se plantean los desplazamientos virtuales que están relacionados con las fuerzas externas, por lo tanto, los desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{r}$  están expresados de la siguiente manera (Goldstein, 1980):

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.61)$$

Obteniendo desplazamientos virtuales del resorte:

$$\delta\mathbf{r}_{si,1}^0 = \delta\mathbf{r}_1^0 + \delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1)$$

Encontrando  $\delta\mathbf{r}_1^0$  y  $\delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1)$ :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}_1^0 &= \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{r}_1^0}{\partial z} \delta z \\ &= \frac{\partial [x, y, z]^T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial [x, y, z]^T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial [x, y, z]^T}{\partial z} \delta z \\ &= [1, 0, 0]^T \delta x + [0, 1, 0]^T \delta y + [0, 0, 1]^T \delta z \\ \delta\mathbf{r}_1^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

Para el término  $\delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1)$  se tiene:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1) &= \delta\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1 + \mathbf{R}_1^0 \delta\mathbf{r}_{si,1'}^1 \\ &= \delta\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1 \end{aligned}$$

Donde el término  $\delta\mathbf{r}_{s-i,1'}^1 = \mathbf{0}$  por ser un vector constante. Por otra parte:

$$\delta\mathbf{R}_1^0 = \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \delta\beta + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \delta\gamma + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \delta\theta$$

$$\begin{aligned}\Omega_1^0 &= \dot{\mathbf{R}}_1^0 (\mathbf{R}_1^0)^T \\ \dot{\mathbf{R}}_1^0 &= \Omega_1^0 \mathbf{R}_1^0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \frac{\delta \alpha}{\delta t} &= \Omega_1^0 \mathbf{R}_1^0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} &= \Omega_1^0 \mathbf{R}_1^0 \frac{\delta t}{\delta \alpha}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1) &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \delta \theta \right) \mathbf{r}_{si,1'}^1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \mathbf{r}_{si,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \mathbf{r}_{si,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \mathbf{r}_{si,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \mathbf{r}_{si,1'}^1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta \alpha \\ \delta \beta \\ \delta \gamma \\ \delta \theta \end{bmatrix} \\ \delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{si,1'}^1) &= \mathbf{J}_{si} \delta \phi\end{aligned}$$

Tomando los términos de desplazamientos virtuales obtenidos y ordenando en forma matricial:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_{si,1}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{si} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_1^0 \\ \delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{si} \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{r}_{si,1}^0 &= \mathbf{\Gamma}_{si} \delta \mathbf{q}\end{aligned}\tag{2.62}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{si} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{si} \end{bmatrix}$$

De manera similar se tiene para los desplazamientos virtuales de amortiguadores:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{di,1'}^1) &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \delta \theta \right) \mathbf{r}_{di,1'}^1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \alpha} \mathbf{r}_{di,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \beta} \mathbf{r}_{di,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \gamma} \mathbf{r}_{di,1'}^1 & \frac{\partial \mathbf{R}_1^0}{\partial \theta} \mathbf{r}_{di,1'}^1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta \alpha \\ \delta \beta \\ \delta \gamma \\ \delta \theta \end{bmatrix} \\ \delta(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}_{di,1'}^1) &= \mathbf{J}_{di} \delta \phi\end{aligned}$$

Los términos de desplazamientos virtuales para el amortiguador  $i$ -ésimo son:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_{di,1}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_1^0 \\ \delta \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{di} \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{r}_{di,1}^0 &= \mathbf{\Gamma}_{di} \delta \mathbf{q}\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{di} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{di} \end{bmatrix}$$

La definición que relaciona las velocidades angulares (Greenwood, 1988) con los desplazamientos virtuales:

$$\delta\Theta_\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_j} \delta q_j \quad (2.64)$$

Donde el vector  $\omega_2^0$  es el vector de velocidad angular del ensamble-tina definido en el marco inercial ( $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$ ), retomando de las ecuaciones cinemáticas (2.19) se define entonces:

$$\begin{aligned} \omega_2^0 &= \mathbf{R}_2^0 \omega_2^2 \\ &= \mathbf{R}_2^0 \mathbf{R}_{\phi_2} \dot{\phi} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_2^0 \mathbf{R}_{\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \omega_2^0 &= \Gamma_\omega \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\Gamma_\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación de desplazamientos angulares virtuales en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \delta\Theta_\omega &= \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{q}_j} \delta\mathbf{q}_j \\ \delta\Theta_\omega &= \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{x}_1} \delta x_1 + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{y}_1} \delta y_1 + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{z}_1} \delta z_1 + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{\alpha}} \delta\alpha + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{\beta}} \delta\beta + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{\gamma}} \delta\gamma + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial\dot{\theta}} \delta\theta \end{aligned} \quad (2.66)$$

Sustituyendo la ec. (2,65) en ec. (2,66) y simplificando:

$$\delta\Theta_\omega = \Gamma_\omega \left( \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{x}_1} \delta x_1 + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{y}_1} \delta y_1 + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{z}_1} \delta z_1 + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{\alpha}} \delta\alpha + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{\beta}} \delta\beta + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{\gamma}} \delta\gamma + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{\theta}} \delta\theta \right)$$

Además, considerando:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{q}_j} \right) = \mathbf{0}$$

finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} \delta\Theta_\omega &= \Gamma_\omega \mathbf{I}_{7 \times 7} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}_1^0 \\ \delta\phi \end{bmatrix} \\ \delta\Theta_\omega &= \Gamma_\omega \delta\mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Una vez que se tienen los desplazamientos virtuales se plantea la ecuación de trabajo virtual para obtener las fuerzas generalizadas.

Tomando las ecuaciones de trabajo virtual (2.62), (2.63) y (2.67) e integrando el signo de las fuerzas generalizadas así como tomando ecuaciones (2.49) y (2.52) de las fuerzas de

los elementos de la suspensión y donde  $\boldsymbol{\tau}_0^T$  es considerado un valor de par constante  $\boldsymbol{\tau}_0 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \tau \end{bmatrix}^T$ , sustituyendo en la ecuación (2.60) de trabajo virtual:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_l \mathbf{F}_l^T \delta \mathbf{r}_l + \sum_m \mathbf{M}_m^T \delta \boldsymbol{\Theta}_\omega \\ &= (\mathbf{F}_{di}^T \delta \mathbf{r}_{di,1}^0 + \mathbf{F}_{si}^T \delta \mathbf{r}_{si,1}^0 + \boldsymbol{\tau}_0^T \delta \boldsymbol{\Theta}_\omega) \\ \delta W &= (\mathbf{F}_{di}^T \boldsymbol{\Gamma}_{di} \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_{si}^T \boldsymbol{\Gamma}_{si} \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}_0^T \boldsymbol{\Gamma}_\omega \delta \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} \delta W &= (\mathbf{F}_{di}^T \boldsymbol{\Gamma}_{di} + \mathbf{F}_{si}^T \boldsymbol{\Gamma}_{si} + \boldsymbol{\tau}_0^T \boldsymbol{\Gamma}_\omega) \delta \mathbf{q} \\ \delta W &= \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{F}_{di}^T \boldsymbol{\Gamma}_{di} + \mathbf{F}_{si}^T \boldsymbol{\Gamma}_{si} + \boldsymbol{\tau}_0^T \boldsymbol{\Gamma}_\omega)^T$$

Expandiendo los términos  $\boldsymbol{\Gamma}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_{di}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_{di} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_{si}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_{si} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_\omega^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{J}_{di}^T \mathbf{F}_{di} + \mathbf{J}_{si}^T \mathbf{F}_{si} + \mathbf{J}_\omega^T \boldsymbol{\tau}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{di} + \mathbf{F}_{si}$$

### Ecuación Dinámica del Sistema

Tomando las ecs. (2.31), (2.34), (2.37), (2.40), (2.43) y (2.46) de la formulación Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \mathbf{D}_{1j}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_{2j}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_{mj}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{1j}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{2j}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{mj}^T \dot{\mathbf{q}} \\ &= (\mathbf{D}_{1j} + \mathbf{D}_{2j} + \mathbf{D}_{mj})^T \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{V}_{1j} + \mathbf{V}_{2j} + \mathbf{V}_{mj})^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

El término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \frac{\partial L_1}{\partial q_j} + \frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_m}{\partial q_j} \\ &= \mathbf{V}_{1jp}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{2jp}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_{mjp}^T \dot{\mathbf{q}} + C_{1jp} + C_{2jp} + C_{mjp} \\ \frac{\partial L}{\partial q_j} &= (\mathbf{V}_{1jp} + \mathbf{V}_{2jp} + \mathbf{V}_{mjp})^T \dot{\mathbf{q}} + C_{1jp} + C_{2jp} + C_{mjp} \end{aligned} \quad (2.71)$$

De acuerdo a la ecuación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= Q_j \\ (\mathbf{D}_{1j}^T + \mathbf{D}_{2j}^T + \mathbf{D}_{mj}^T) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{V}_{1j}^T + \mathbf{V}_{2j}^T + \mathbf{V}_{mj}^T) \dot{\mathbf{q}} \\ - (\mathbf{V}_{1jp}^T + \mathbf{V}_{2jp}^T + \mathbf{V}_{mjp}^T) \dot{\mathbf{q}} - (C_{1jp} + C_{2jp} + C_{mjp}) &= Q_j \\ (\mathbf{D}_{1j} + \mathbf{D}_{2j} + \mathbf{D}_{mj})^T \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{V}_{1j} + \mathbf{V}_{2j} + \mathbf{V}_{mj} - \mathbf{V}_{1jp} - \mathbf{V}_{2jp} - \mathbf{V}_{mjp})^T \dot{\mathbf{q}} \\ - (C_{1jp} + C_{2jp} + C_{mjp}) &= Q_j \\ \mathbf{D}_j^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_j^T \dot{\mathbf{q}} + C_j &= Q_j \end{aligned} \quad (2.72)$$

Escribiendo la ecuación anterior siete veces, una para cada  $j=1,2,3,\dots,7$  obtenemos 7 ecuaciones escalares, las cuales se pueden ordenar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^T \\ \mathbf{D}_2^T \\ \mathbf{D}_3^T \\ \mathbf{D}_4^T \\ \mathbf{D}_5^T \\ \mathbf{D}_6^T \\ \mathbf{D}_7^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{V}_3^T \\ \mathbf{V}_4^T \\ \mathbf{V}_5^T \\ \mathbf{V}_6^T \\ \mathbf{V}_7^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo:

$$\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \mathbf{Q} \quad (2.73)$$

La ec. (2.73) es la ecuación dinámica de movimiento para la lavadora.

El modelo dinámico se resuelve como una ecuación diferencial, en la que la excitación de entrada es el par del motor y las soluciones de la ecuación diferencial dan la velocidad angular de una canasta no constante ( $\dot{\theta}[t]$ ). La velocidad angular de la canasta se considera no constante porque, en ese caso, obligaría a resolver ecuaciones dinámicas como un problema dinámico inverso, resultando en encontrar un par motor innecesario.

El modelo dinámico proporciona siete ecuaciones diferenciales para cada coordenada generalizada. Las primeras seis ecuaciones consideran los resortes, los amortiguadores y el efecto del torque del motor. La séptima ecuación está relacionada exclusivamente con el par motor.

# Capítulo 3

## Análisis estático del centro de gravedad del sistema para el diseño de suspensión

### 3.1. Introducción

El diseño de una suspensión de lavadoras de eje vertical u horizontal, considera la atenuación de vibraciones durante el ciclo de centrifugado. La presencia de excentricidades entre los ejes de rotación y geométrico del ensamble tina-tambor causadas por la rotación de la masa de desbalance favorece a tener mayores ángulos de deflexión entre tina y tambor (Bae y Lee 2002, Hai-Wei y Qiu-Ju 2011). Esta misma masa de desbalance contribuye a tener mayores desplazamientos que podrían ocasionar golpeteos entre componentes internos; así como el fenómeno de caminado en la dirección de rotación (Conrad y Soedel 1995), principalmente en la etapa de aceleración de la lavadora. El fenómeno de resonancia presente en todos los sistemas genera que, con una mínima fuerza de excitación, se generen grandes desplazamientos.

Existen varios atenuadores de vibración y /o desplazamiento, siendo los amortiguadores los elementos para atenuar vibración. Estos funcionan bajo el efecto de disipación de energía por fricción y pueden utilizarse en la lavadora en diferentes configuraciones (Nygards y Berbyuk 2007, Nygards y Sandgren 2006, Gyung-Hun et al. 2006, Koizumi et al. 2006 y Wan-Suk et al. 2009).

Otros elementos de atenuación son los resortes conectados principalmente, en la parte superior del gabinete de la lavadora, y por el otro extremo, hacia la tina de lavadora (Conrad 1994), para restaurar el desplazamiento absorbido por el amortiguador causado por la rotación y el desbalance de la canasta.

Un tercer atenuador de vibración son las masas que están sujetas a la tina. Su función principal es reducir la vibración natural del ensamble canasta-tina. Estas masas de contrapeso no solo sirven para incrementar masa en el sistema, sino también permiten balancear el peso de los componentes como el motor, bomba que están montados en la lavadora.

Como se describe en (Rovira et al., 2004) y (Han et al., 2000) los contrapesos fijos a la tina o al tambor (volantes de inercia) ayudan a atenuar las vibraciones y esfuerzos mecánicos en los componentes de la lavadora. Por lo tanto, es de importancia realizar un balance estático y dinámico. El presente capítulo analiza el balanceo estático, de forma que se puedan reducir los momentos producidos por estar el centro de gravedad del sistema fuera del eje de rotación. Este análisis estático tiene como objetivo determinar la cantidad, distribución y ubicación de masa para lograr que el centro de gravedad del ensamble tina-tambor permanezca sobre el eje de giro de la canasta. Un método para balancear estáticamente es minimizando la distancia del centro de gravedad del sistema al origen del sistema, por lo tanto los momentos generados por la excentricidad entre el centro de gravedad y origen será cero.

### **3.2. Distribución de masa para optimizar la posición del centro de gravedad del sistema suspensión**

Para el análisis del centro de gravedad se considerarán los siguientes ensambles y componentes de una configuración típica de lavadora frontal:

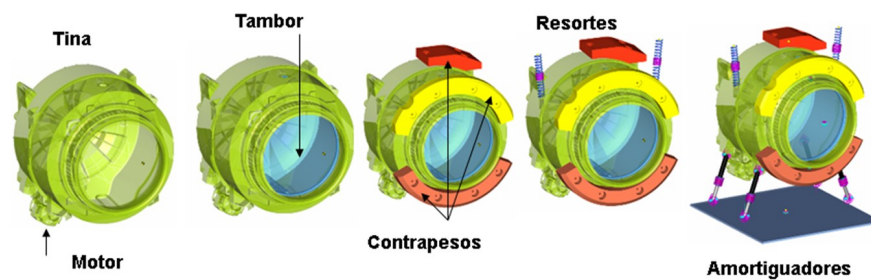


Fig.3.1. Ensambls considerados para análisis de balanceo estático.

- 1.- Ensamble canasta: flechas, portaflecha.
- 2.- Ensamble tina: motor, portabaleros, baleros, bomba.
- 3.- Contrapesos frontal superior.
- 4.- Contrapeso frontal inferior.
- 5.- Contrapeso posterior superior.

Se consideran las siguientes restricciones de diseño, tomando las dimensiones existentes de producto:



- 1.- Masa mínima en el ensamble contrapesos de hasta 16 kg.
- 2.- Respetar espacios disponibles dentro la lavadora.
- 3.- Masa y posición de centros de gravedad de los ensambles tambor y tina se consideran fijos.

Los componentes contrapeso frontal superior, frontal inferior y posterior superior tienen un peso total de 28 kg.

Las expresiones de cálculo de centro de gravedad son:

$$cg_x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m_t} \quad cg_y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m_t} \quad cg_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m_t} \quad (3.1)$$

Donde:

- $m_t$ : masa total del sistema
- $m_i$ : masa de cada ensamble o componente;
- $x_i, y_i, z_i$ : ubicación de centro de gravedad para cada ensamble o componentes
- $cg_x$ : ubicación de centro de gravedad del ensamble canasta-tina y contrapeso en dirección x
- $cg_y$ : ubicación de centro de gravedad del ensamble canasta-tina y contrapeso en dirección y
- $cg_z$ : ubicación de centro de gravedad del ensamble canasta-tina y contrapeso en dirección z

Desarrollando las expresiones de ecuación. (3.1), se obtiene la posición del centro de gravedad del sistema en cada coordenada:

$$\begin{aligned} cg_x &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \\ cg_y &= \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4 + y_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \\ cg_z &= \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + z_4 m_4 + z_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde:

- $m_1$ : masa de ensamble canasta
- $m_2$ : masa de ensamble tina
- $m_3$ : masa de contrapeso superior frontal
- $m_4$ : masa de contrapeso superior inferior
- $m_5$ : masa de contrapeso posterior

Se define el sistema de referencia absoluto  $(x, y, z)$  para los ensambles, como se muestra en la figura (Fig. 3.2):

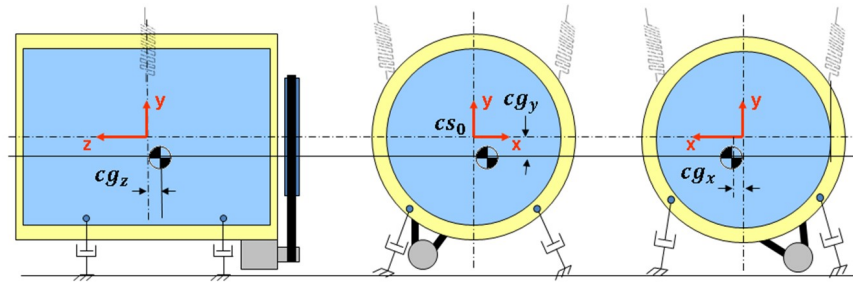


Fig. 3.2. Sistema de referencia inercial.

Se plantea la creación de una superficie donde la variable a optimizar es la distancia del centro de gravedad al sistema de referencia inercial  $cs_0$ , si esta distancia es mínima, los momentos producidos por la excentricidad entre estos puntos serán menores o despreciables, de modo que la ecuación de magnitud resultante es:

$$mag = \sqrt{(cg_x - 0_x)^2 + (cg_y - 0_y)^2 + (cg_z - 0_z)^2} \quad (3.3)$$

Los datos de ubicación de centros de gravedad y masa de los componentes y/o ensamblajes corresponden a una suspensión clásica que consta de 3 contrapesos, de acuerdo a la investigación realizada dentro de las patentes. Entonces los datos a variar son: la masa de los contrapesos frontal superior, frontal inferior y posterior superior.

Se propone un rango de masa para cada contrapeso de la siguiente forma:

1. Contrapeso frontal superior      4 kg a 7 kg
2. Contrapeso frontal inferior      4 kg a 7 kg
3. Contrapeso posterior              3 kg a 5 kg

Este rango de variación de masa en contrapesos está relacionado a los valores encontrados en otras lavadoras.

Se define una simetría para los contrapesos frontales de manera que su masa sea igual, de esta manera se grafica y se obtiene la siguiente superficie de respuesta (Fig. 3.3):

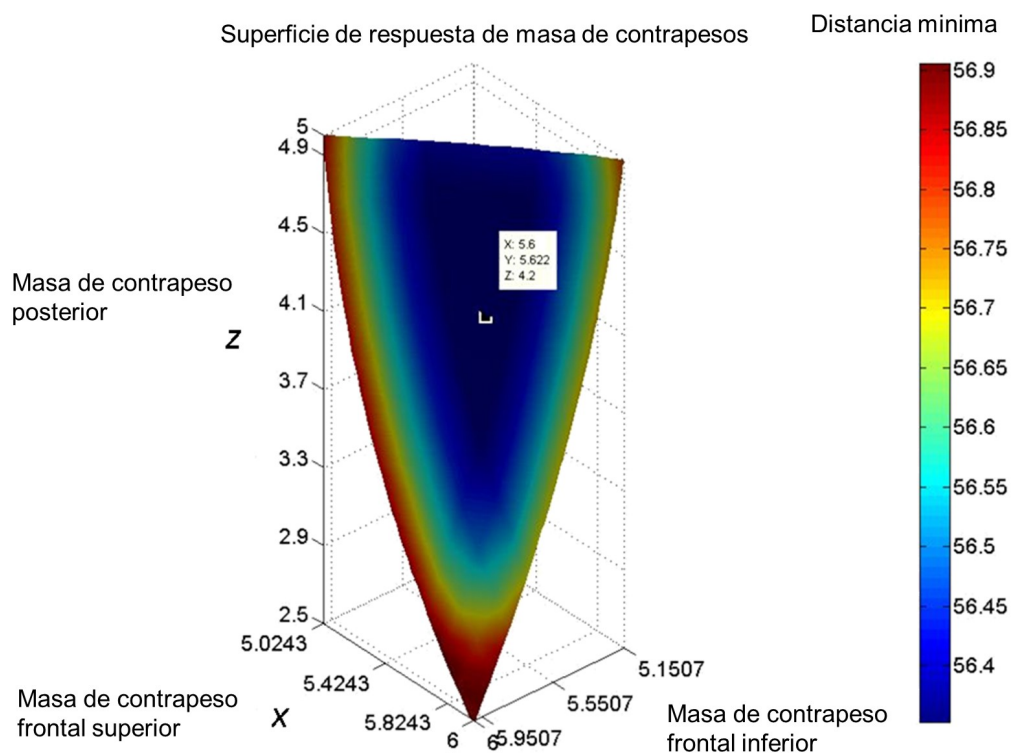


Fig. 3.3. Superficie de respuesta para selección de masas de contrapesos.

Donde sobre el eje x se tiene la masa para contrapeso frontal superior, sobre el eje y masa de contrapeso frontal inferior y a lo largo del eje z la masa del contrapeso posterior.

Una escala en colores muestra la distancia mínima del centro de gravedad al sistema de referencia inercial. Entre menor sea la diferencia significa que el momento que se puede producir por la distancia entre estos dos puntos es menor.

### 3.3. Interpretación de resultados

La superficie de respuesta muestra en colores la distancia mínima de acuerdo a la ecuación (3.3). En los ejes x, y, z se tienen los valores de masa de contrapesos que permiten obtener la mínima distancia entre el centro de gravedad y el sistema de referencia. Considerando la existencia en el mercado de contrapesos frontales simétricos y con menor cantidad de masa, se selecciona un punto de la superficie de respuesta donde se obtengan valores similares o iguales en contrapesos frontales, y además se busca que la distancia entre el centro de gravedad y el origen sea mínima; por lo tanto, se tiene como resultado:

1. Contrapeso frontal superior de 5.6 kg
2. Contrapeso superior de 5.6 kg

3. Contrapeso posterior de 4.2 kg

La masa total para el ensamble contrapesos es de 15.40 kg.

Como conclusiones preliminares del análisis estático del centro de gravedad, se encontró una mínima distancia entre centro de gravedad del sistema y la referencia inercial o eje de giro, de esta forma se minimizan las reacciones debidas a la excentricidad de estos puntos.

En los siguientes capítulos se mostrará la influencia de la posición del centro de gravedad en los análisis de desplazamientos y vibración.

# Capítulo 4

## Verificación de modelos MBD y Modelación Análitica Dinámica

### 4.1. Introducción

La verificación de los modelos de multicuerpos rígidos creados en el capítulo uno se lleva a cabo a través de la comparación directa contra el modelo dinámico desarrollado en el capítulo dos. Este procedimiento permitira determinar si el modelo analítico presenta inconsistencias en su programación y matemática empleada para su desarrollo. Se compararán los resultados de desplazamiento y aceleración del centro de gravedad de ambos modelos así como el la velocidad de giro del ensamble canasta. Para el modelo dinámico el software Mathematica se emplea para el planteamiento y solución de las ecuaciones diferenciales.

### 4.2. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico - Contrapesos iniciales

#### Desplazamientos y Aceleraciones Líneales

Las siguientes figuras (Fig. 4.1, Fig. 4.2 y Fig. 4.3) muestran la forma y magnitud de los desplazamientos del centro de gravedad de los modelos analíticos y de MBD. El comportamiento de los desplazamientos líneales muestran tendencias entre modelos, teniendo un margen de correlación de entre 70 % - 80 %. Para las aceleraciones mostradas en el modelo analítico, solo las magnitudes en la dirección  $Y$  muestran mayores niveles que el modelo de MBD, sin embargo la forma de la respuesta muestra similitudes, teniendo un rango de correlación entre 60 - 75 %.

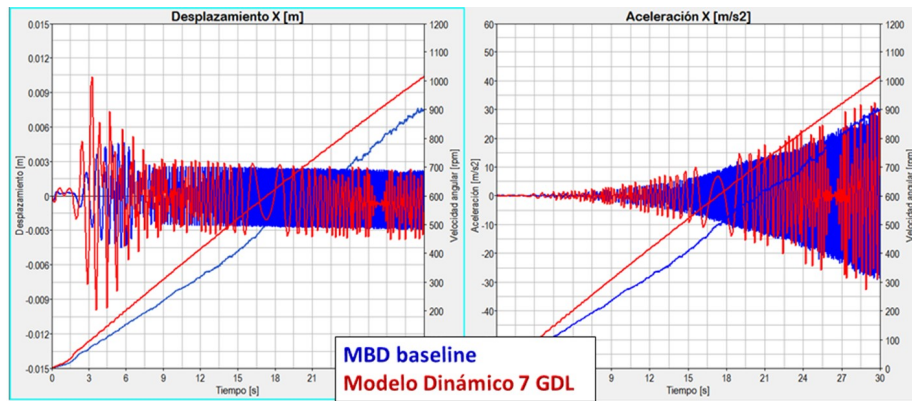


Fig. 4.1. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.

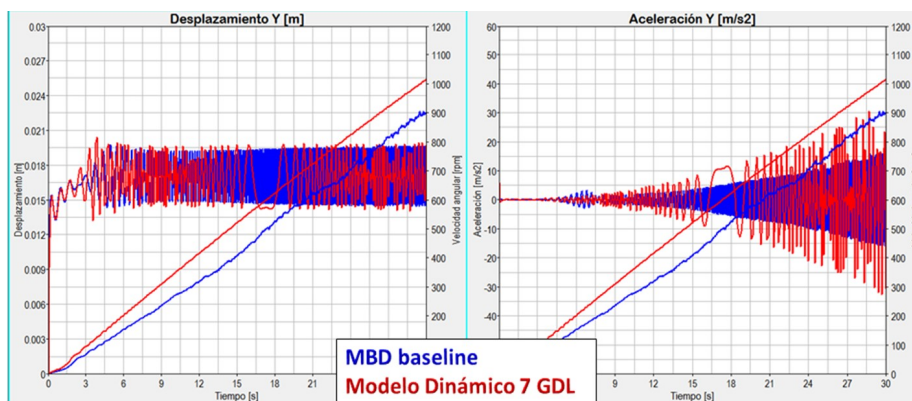


Fig. 4.2. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

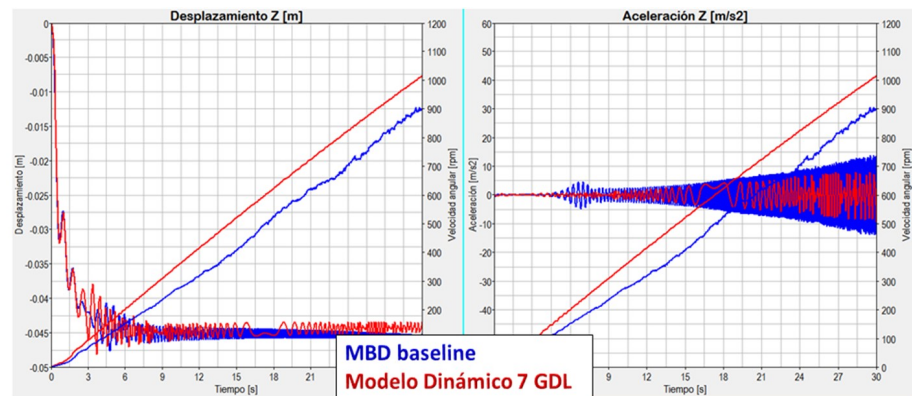


Fig. 4.3. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Z.

### Desplazamientos y Aceleraciones Angulares

Las tendencias mostradas en desplazamientos y aceleraciones angulares se muestran en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6. El modelo analítico presenta formas equivalentes en la dirección angular alrededor del eje  $X$  y eje  $Z$ ; no obstante alrededor del eje  $Y$  el modelo no describe el comportamiento como lo hace el MBD. Esto es una consecuencia de los algoritmos empleados por Altair Motion View, donde el algoritmo agrega inercias a elementos que normalmente no tienen o son despreciables. En el modelo dinámico no se considera dichas inercias. Las aceleraciones angulares muestran un comportamiento similar en magnitudes y forma entre los modelos numérico y analítico, especialmente en dirección  $X$  y  $Z$  teniendo niveles de correlación entre un 50 % -70 %.

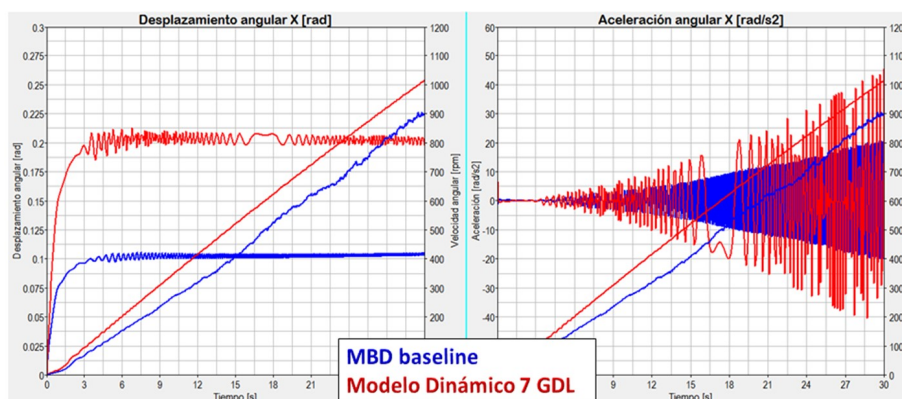


Fig. 4.4. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.

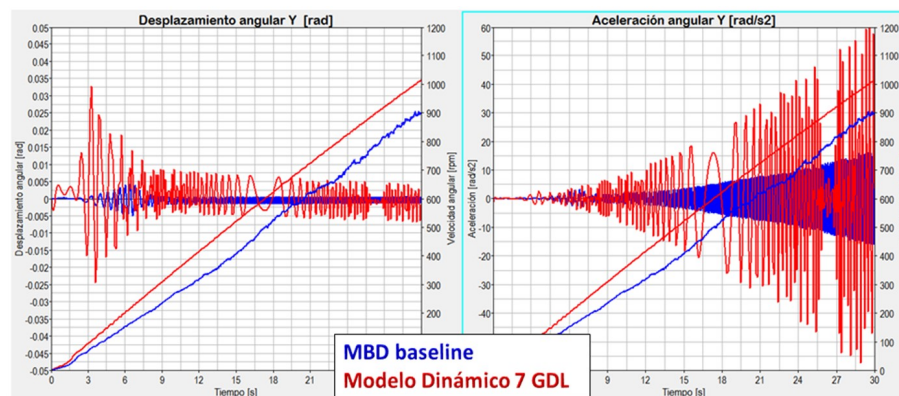


Fig. 4.5. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

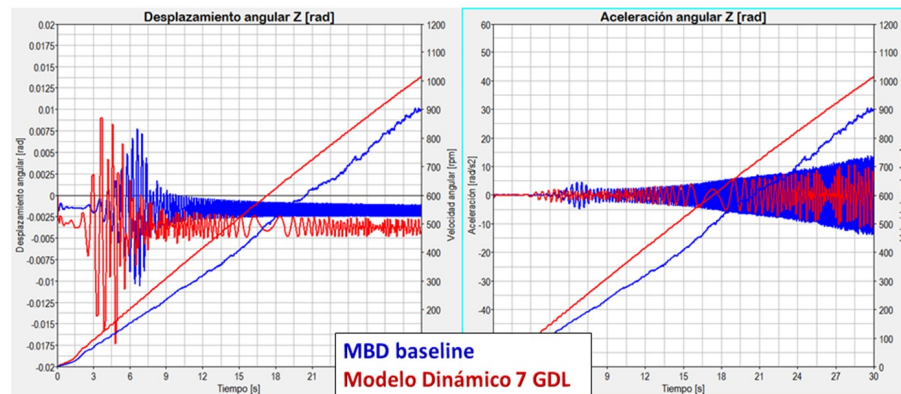


Fig. 4.6. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Z.

### 4.3. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico - Contrapesos reducidos

#### Desplazamientos y Aceleraciones Líneales

Las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 muestran los resultados de los desplazamientos y aceleraciones líneales del centro en gravedad del sistema. Estos modelos consideran la masa reducida en los contrapesos. La tendencia entre resultados de modelos es similar, especialmente en las direcciones  $X$  y  $Y$ . El valor de correlación en estas direcciones está dentro de un rango de 60 %-85 %. Los niveles de correlación son bajos en la dirección  $Z$ .

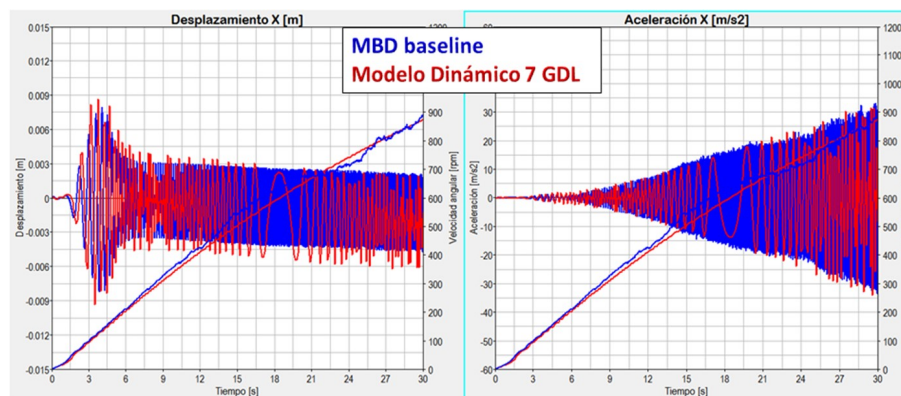


Fig. 4.7. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección X.



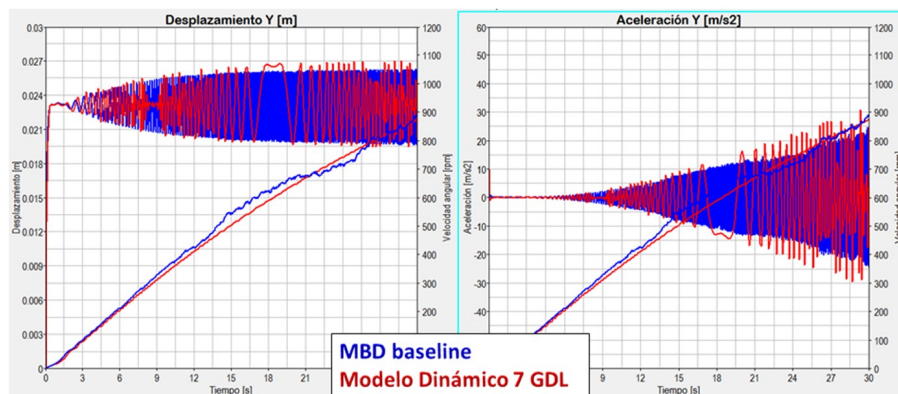


Fig. 4.8. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Y.

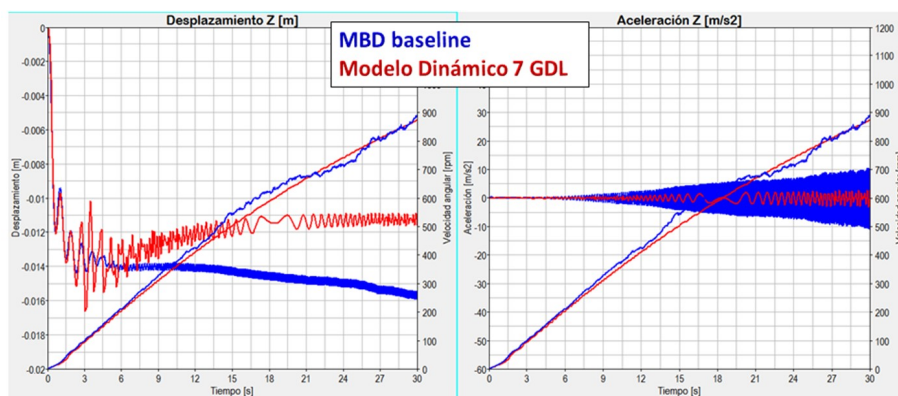


Fig. 4.9. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Z.

### Desplazamientos y Aceleraciones Angulares

Las figuras 4.10, 4.11 y 4.12 muestran los resultados de los desplazamientos y aceleraciones angulares del centro de gravedad. Se observan tendencias similares para los movimientos angulares alrededor del eje X y eje Z. Los porcentajes de correlación en estas direcciones oscilan entre un 40 -70 %, pero los desplazamientos y aceleraciones alrededor del eje Y del modelo dinámico analítico no están cerca de los resultados del MBD.

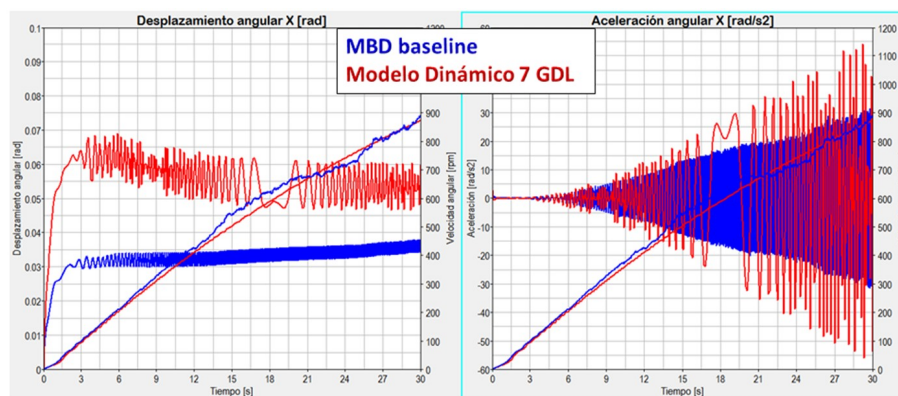


Fig. 4.10. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.

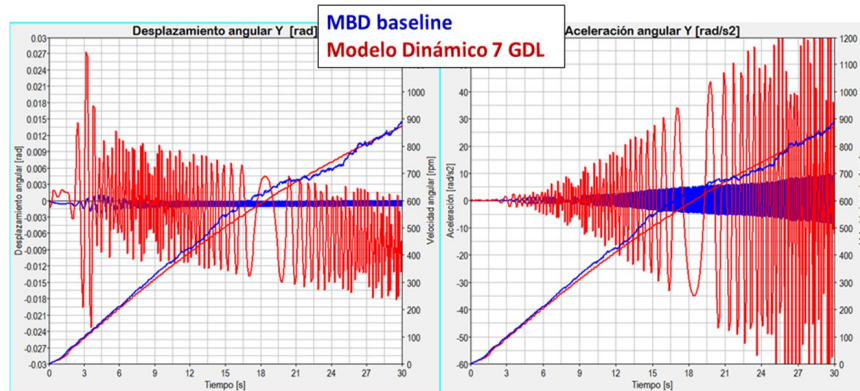


Fig. 4.11. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

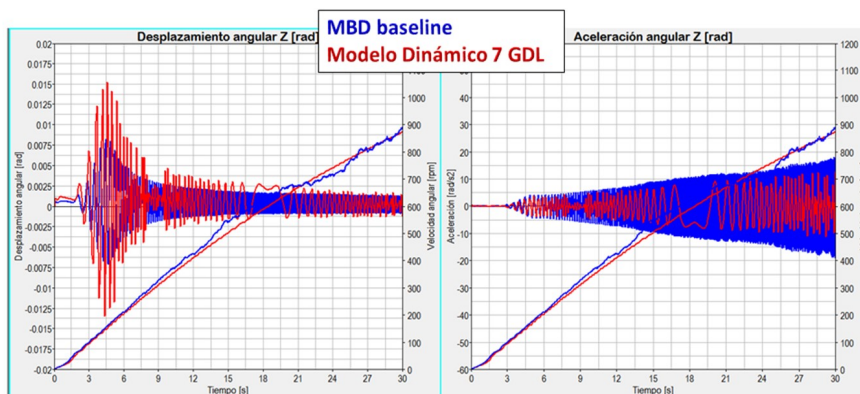


Fig. 4.12. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Z.

#### 4.4. Modelo MBD línea base - Contrapesos iniciales vs reducidos

##### Desplazamientos y Aceleraciones Líneales

Comparando los modelos de MBD de contrapesos iniciales vs. reducidos (Figuras 4.13, 4.14 y 4.15) en masa se observa un aumento en la aceleración del centro de gravedad debido a la reducción de masa, este hecho impacta directamente la magnitud de los desplazamientos y aceleraciones sobre la dirección en eje  $X$  y  $Y$  a excepción de la aceleración en dirección del eje  $Z$ , donde se tiene una mejora de 30%. Los desplazamientos y aceleraciones se ven aumentados en dirección  $X$  hasta un 40%. Para la aceleración en dirección  $Y$  se registran aumentos de hasta un 30%.

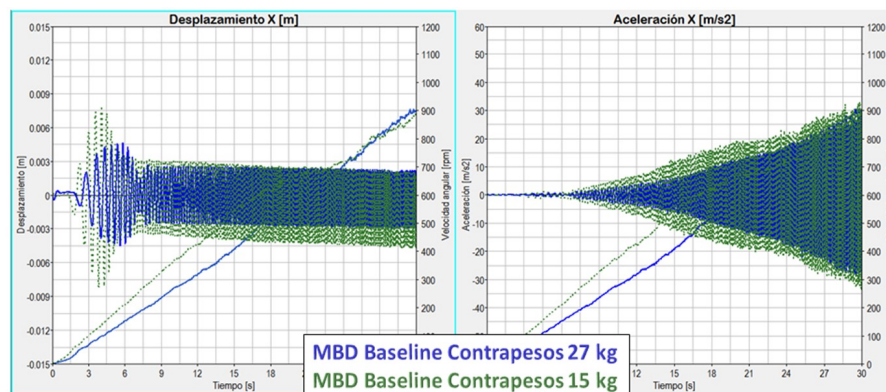


Fig. 4.13. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección X.

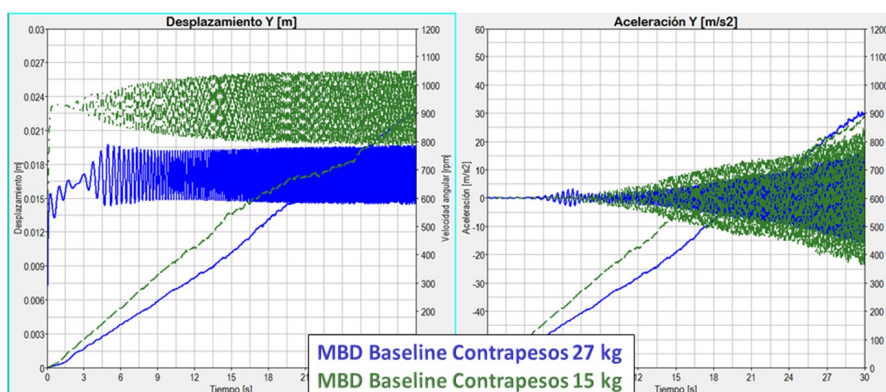


Fig. 4.14. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Y.

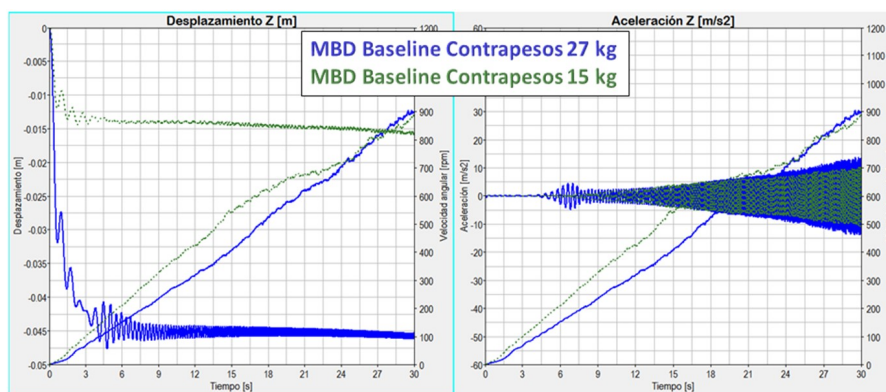


Fig. 4.15. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Z.

### Desplazamientos y Aceleraciones Angulares

En las figuras 4.16, 4.17 y 4.18, se observa un aumento de aceleración angular en  $X$  y  $Z$  de un 30% para el modelo que incluye contrapesos reducidos, a excepción de la aceleración en dirección  $Y$ , donde se tiene una mejora de 30%. En términos generales, la disminución de masa aumentó la aceleración del centro de gravedad; sin embargo, la optimización de los parámetros de la suspensión ayudará a recuperar el desempeño mostrado al igual que modelos de mayor masa.

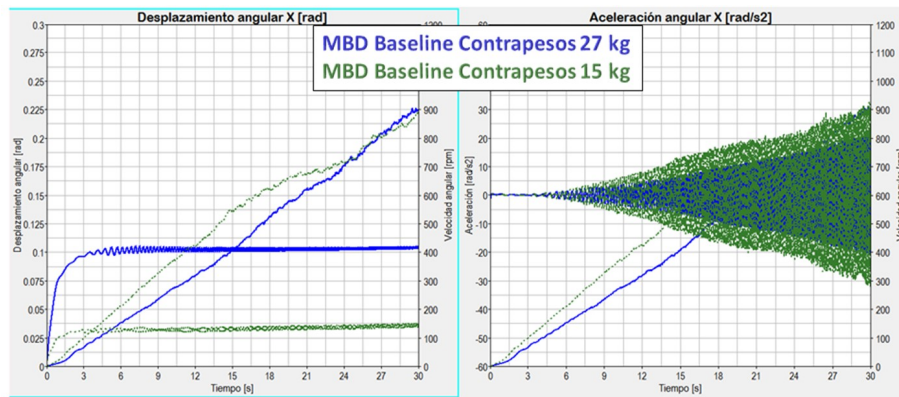


Fig. 4.16. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.

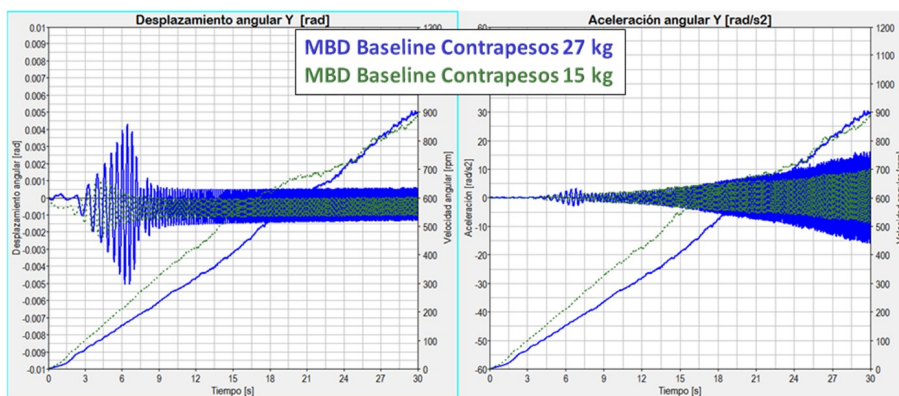


Fig. 4.17. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

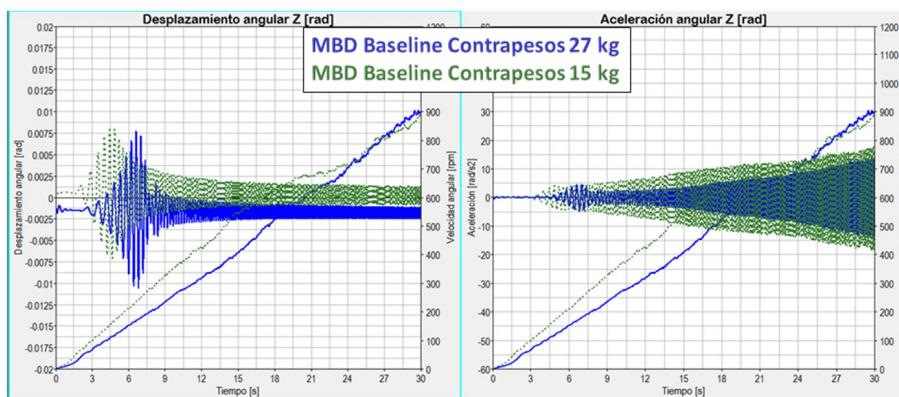


Fig. 4.18. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Z.

## 4.5. Modelo Dinámico de 7 GDL - Contrapesos iniciales vs reducidos

### Desplazamientos y Aceleraciones Líneales

En las figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se muestran los resultados entre el modelo analítico con contrapesos originales y modelo analítico con contrapesos reducidos (15kg) muestran tendencias similares como los resultados obtenidos en la modelación de multicuerpo rígido. Es decir, la disminución de masa en contrapesos genera mayor desplazamiento y aceleración del centro de gravedad. Durante este proceso comparativo se encontró que la variación de la masa es un factor importante que afecta la velocidad angular final. Se aprecia en las siguientes figuras que la velocidad final del modelo que usa contrapesos de mayor masa tiene una mayor velocidad en el mismo intervalo de tiempo que el modelo de contrapesos reducidos.

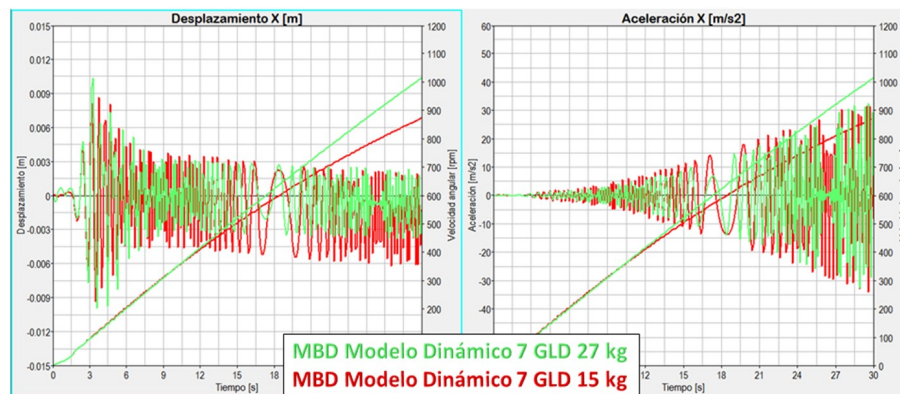


Fig. 4.19. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección X.

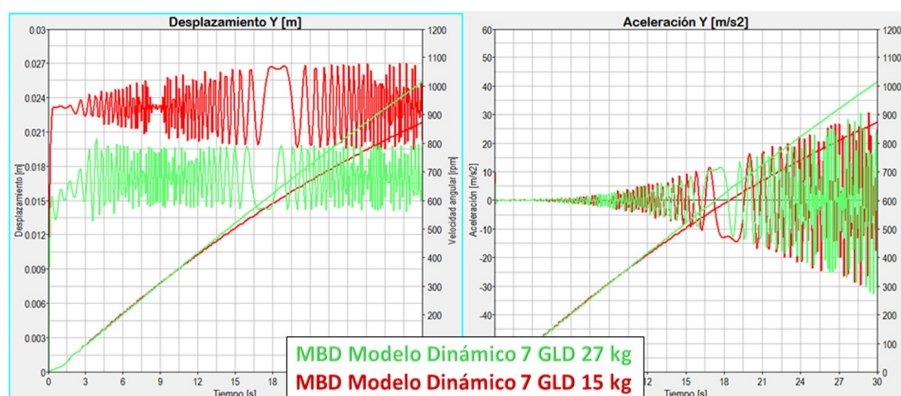


Fig. 4.20. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Y.

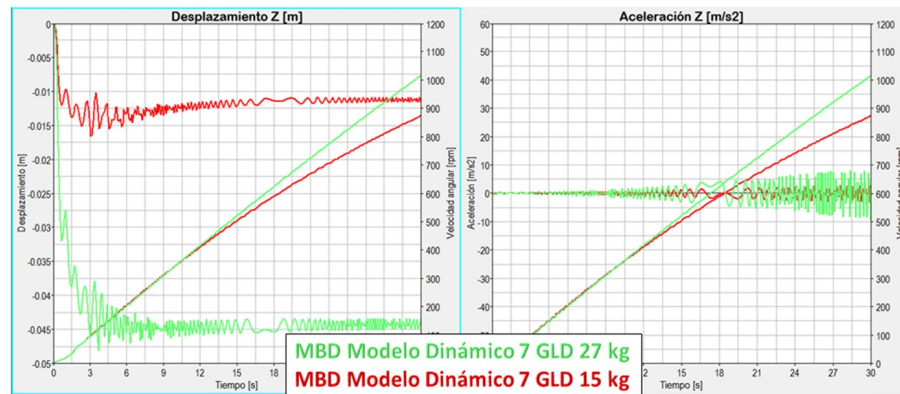


Fig. 4.21. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Z.

### Desplazamientos y Aceleraciones Angulares

Las degradaciones que se obtienen en el modelo dinámico analítico de los desplazamiento y aceleraciones angulares con el modelo de contrapesos reducidos son consistentes al igual que los resultados de los desplazamientos lineales, menor masa en contrapesos, mayor nivel de desplazamiento angular, tal como se observan en las figuras 4.22, 4.23 y 4.24.

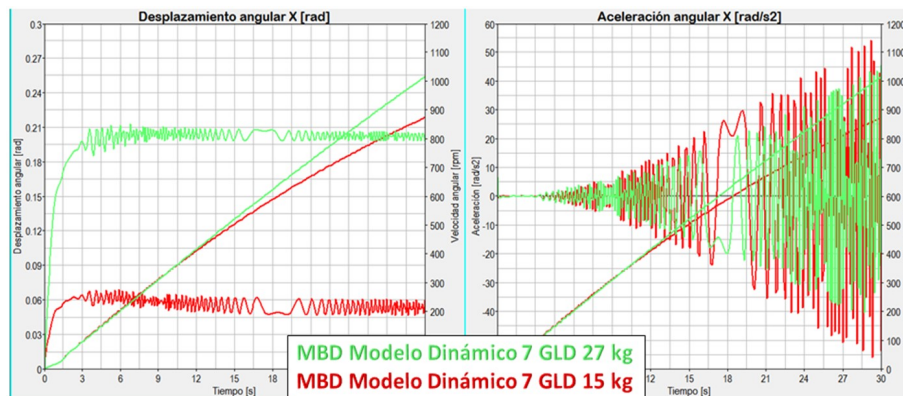


Fig. 4.22. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.

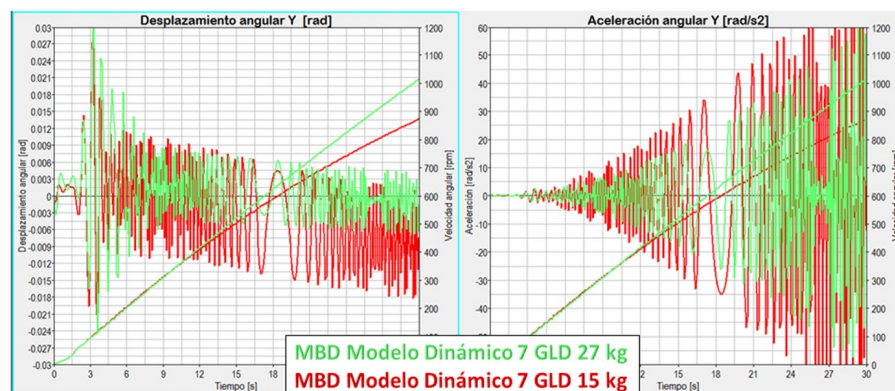


Fig. 4.23. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

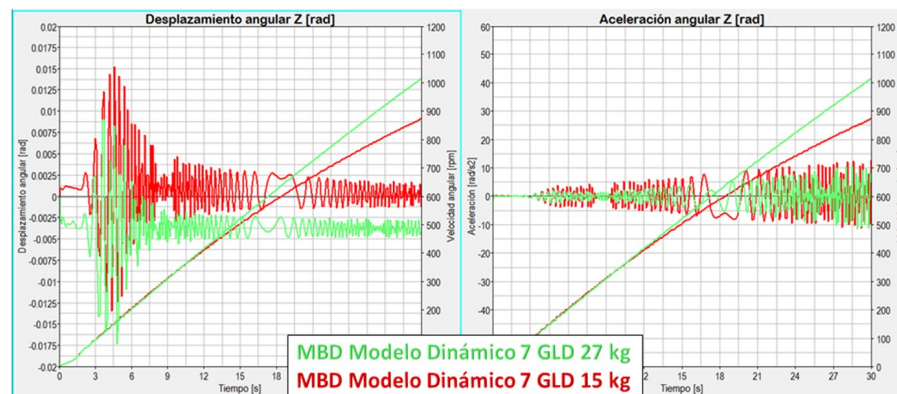


Fig. 4.24. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Z.

## 4.6. Modelo MBD línea base vs Modelo dinámico (Menor contrapeso - Modelación de Cilindros)

Para tener un mejor control de los resultados se emplean datos de cuerpos regulares como cilindros para el ensamble tina y ensamble canasta, manteniendo las mismas masas de ensambles originales, esto además permite mostrar la bondad de la modelación dinámica, ya que en etapas tempranas de diseño es difícil contar con propiedades finales de componentes; por lo cual aproximaciones son necesarias para la toma de decisiones.

### Desplazamientos y Aceleraciones Líneales

Las comparaciones de desplazamiento y aceleraciones lineales entre los modelos analítico y MBD se puede observar en las figuras 4.25, 4.26 y 4.27. La correlación para los desplazamientos en  $X, Y, Z$  está dentro de un rango del 70 - 85%, no obstante que la velocidad angular final mostrada para el modelo de MBD es mucho mayor, esto puede verse reflejado en las magnitudes de las aceleraciones. Principalmente, se ve afectada la aceleración en dirección Z.

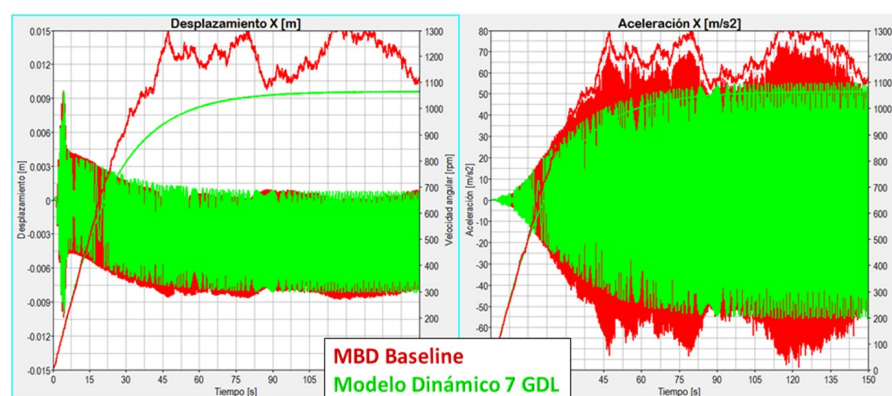


Fig. 4.25. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección X.

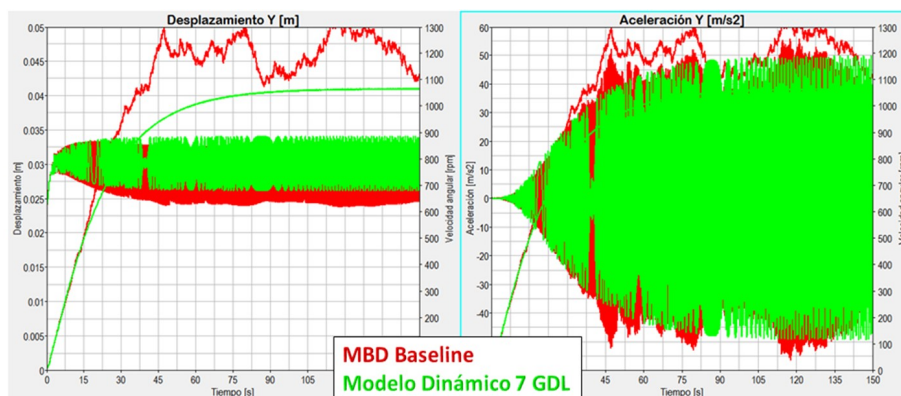


Fig. 4.26. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Y.

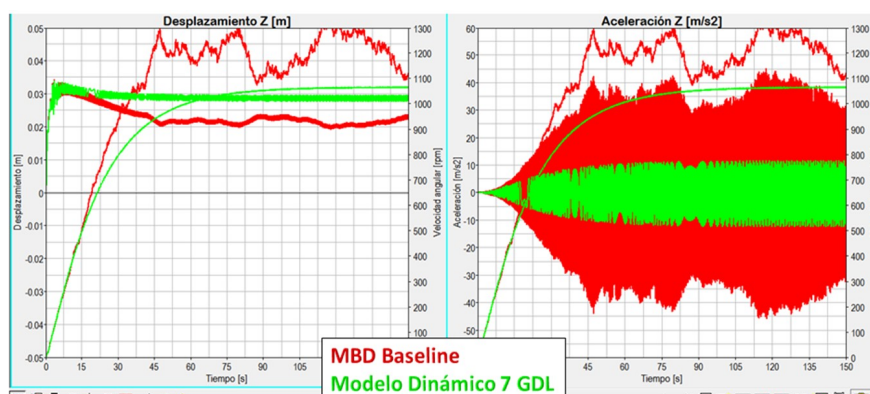


Fig. 4.27. Desplazamiento y aceleración lineal en dirección Z.

### Desplazamientos y Aceleraciones Angulares

Finalmente la comparación de desplazamiento y aceleración angular se observa en las figuras 4.28, 4.29 y 4.30. Ambos, desplazamiento y aceleración angular en dirección Y, muestran correlaciones bajas, un fenómeno registrado en comparaciones previas y siendo un factor principal las correcciones a cuerpos que Altair MotionView considera, como asignar inercias a cuerpos.

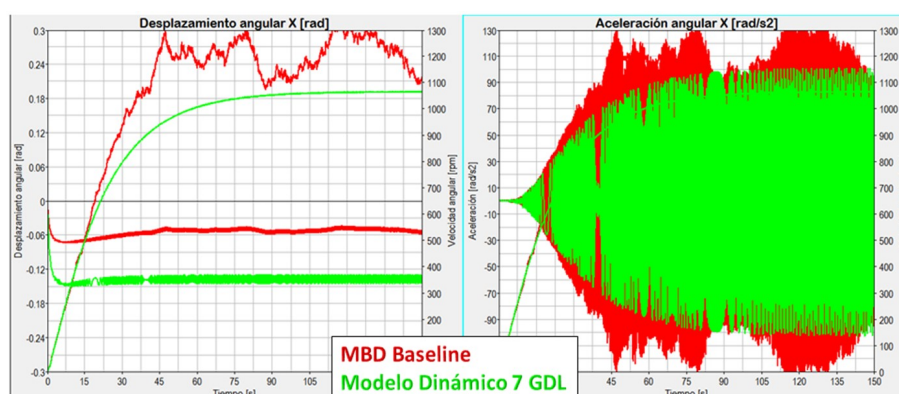


Fig. 4.28. Desplazamiento y aceleración angular en dirección X.



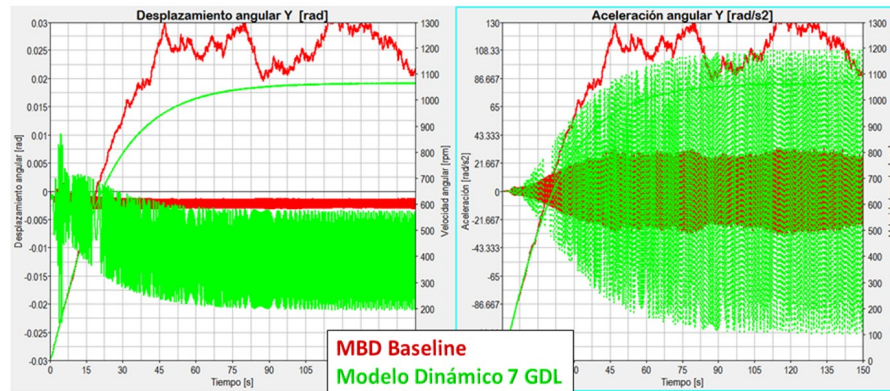


Fig. 4.29. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Y.

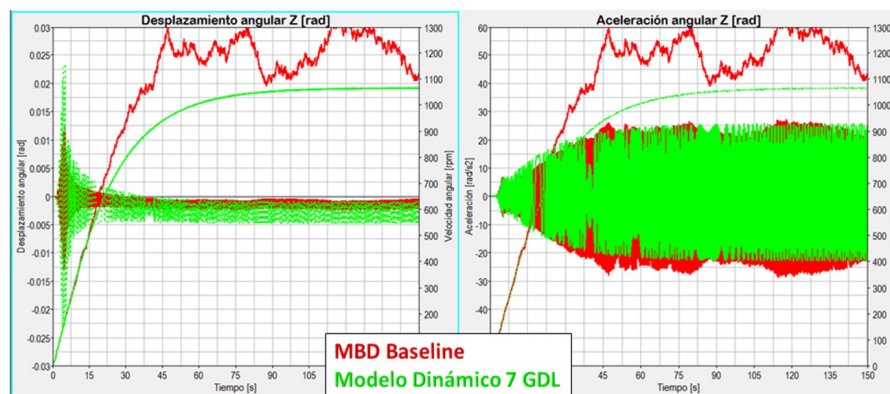


Fig. 4.30. Desplazamiento y aceleración angular en dirección Z.

En este capítulo se presentó la comparación entre un modelo de multicuerpo rígido y modelo analítico, siendo evidente que los desplazamientos y aceleraciones angulares presenta menores niveles de correlación, principalmente, en la dirección del eje Y. Existe una relación de masa - inercia y su efecto en la velocidad de giro que no se trata en esta investigación, sin embargo este fenómeno puede incluirse en un trabajo a futuro.

# Capítulo 5

## Optimización de modelo aplicando Síntesis Dinámica

### 5.1. Introducción

Optimización es el acto de obtener el mejor resultado bajo ciertas condiciones dadas. En diseño, construcción y mantenimiento de cualquier sistema de ingeniería, los ingenieros tienen que tomar la mejor decisión tecnológica y/o administrativa en etapas críticas.

El último objetivo de tales decisiones es, minimizar o maximizar los efectos deseados. Ya que los esfuerzos requeridos o beneficios deseados en cualquier situación práctica pueden expresarse como una función de ciertas variables de decisión, optimización puede ser definida como el proceso de encontrar las condiciones que den el máximo o mínimo valor de una función.

El objetivo principal de este trabajo es la optimización del sistema de suspensión de la lavadora de eje horizontal que considera los ensamblés tina y canasta teniendo en cuenta los puntos de suspensión de los resortes y los amortiguadores así como los coeficientes de rigidez / amortiguamiento. Nueve variables y 5 niveles de diseño se encuentran. Se considera que los niveles de diseño son los valores que puede tomar el diseño que cumplen las restricciones de manufactura y espacio de trabajo. La optimización se realiza en estado transitorio y estable.

Diferentes trabajos han empleado el método de programación no lineal (NLP) basados en la programación cuadrática secuencial (SQP) (Turkay et al., 1995), además de utilizar técnicas de superficies de respuestas para determinar el comportamiento dinámico como función de la fuerza de amortiguamiento.

Una técnica empleada para la obtención de los criterios de diseño de lavadora de carga frontal en esta investigación, es utilizar un diseño de experimentos (Cavazzuti, 2013). Esta

técnica utiliza una superficie de respuesta cuyas valores de salida consideran el nivel de aceleración que se obtiene de la suma de la raíz cuadrada de sus argumentos o llamada en inglés Root Sum Square. Un conjunto de datos o rango de variables de diseño es necesario para el comienzo. En esta técnica se evalúan diferentes conjuntos de variables buscando uno que minimice la función. Este es un método iterativo el cual requiere un esfuerzo computacional grande y mucho tiempo para ser completado. Por ejemplo, los parámetros  $k$  con  $L$  niveles cada parámetro definen el número posible de combinaciones de  $N$  muestras en un conjunto, es decir:

$$\frac{L^{KN}}{N!} \quad (5.1)$$

Para un caso muy simple de tres variables  $k = 3$ , con cuatro diferentes valores de cada variable  $L = 4$ , y diez muestras  $N = 10$ , significaría tener  $3.2 \times 10^{11}$  conjuntos a ser evaluados. El procedimiento se detiene después de cierto número de iteraciones y la mejor solución encontrada es tomada para ser la óptima. Johnson (1961), define el procedimiento para seguir la técnica de diseño óptimo, como se ilustra en el siguiente diagrama de flujo (Fig. 5.1).

Turkay et al. (1995) en su trabajo de investigación “Formulation and Implementation of Parametric Optimization of a Washing Machine Suspension System”, utiliza este método gráfico de superficies de respuesta para encontrar las constantes de amortiguamiento y rigidez del sistema que mejoren el desempeño de la suspensión. Su programa de simulación fue procesado manteniendo la constante de amortiguamiento  $c$  y variando la rigidez de los resortes. Este mismo procedimiento se repite para cada valor de amortiguamiento. A cada iteración, el valor máximo de la función objetivo correspondiente y la fuerza de resistencia al caminado  $F_{rsf}$  es graficada. Posteriormente, el vector de diseño óptimo es construido de acuerdo a la formulación de optimización. Es importante mencionar que la optimización gráfica se lleva dentro de un espacio discreto de las variables diseños dado la naturaleza del método. Por lo tanto, el resultado del vector de diseño óptimo no será el valor óptimo pero se puede considerar como un subóptimo o cerca de uno.

Como se ha mencionado anteriormente esta técnica de “Diseño óptimo” es utilizado en este trabajo de investigación; sin embargo, se introduce una metodología de diseño empleado para el diseño de mecanismos, llamada “Síntesis Dinámica”. Esta técnica considera los efectos que pueden provocar las fuerzas internas y/o externas sobre la síntesis de un mecanismo.

Sherwood (1968) realizó un trabajo donde se describió el procedimiento para una síntesis dimensional de un mecanismo tomando en cuenta los efectos dinámicos. En la síntesis de mecanismos para tener una coordenada de posición en función del tiempo como respuesta, la aproximación geométrica convencional asume constante la velocidad angular. Esto frecuentemente resulta en serios errores debido a los efectos dinámicos.

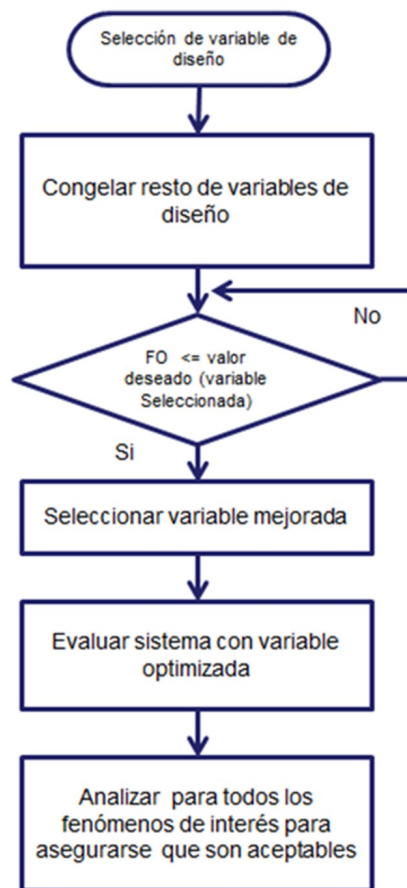


Fig. 5.1. Diagrama de flujo de modelación de Técnica Diseño Óptimo.

Dos formas se tienen para corregir dichos efectos:

1. Tener cuidado con la distribución de masa en una o más barras, de tal forma que la fluctuación de energía es minimizada y, por lo tanto, la suposición de la velocidad constante como entrada será más realista.
2. La modificación de las dimensiones geométricas de tal forma que los efectos dinámicos puedan ser considerados como “factores de corrección”, dando a la salida de respuesta una tolerancia específica.

Haciendo una analogía de mecanismo al sistema de suspensión puede considerarse que las dimensiones geométricas de un mecanismo son las posiciones de los elementos de suspensión y las propiedades físicas como  $c$  y  $k$ .

## 5.2. Definición del problema de optimización

Una optimización o problema de programación matemática puede definirse como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \text{ que minimice la } f(\mathbf{X}) \quad (5.2)$$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{X}) &\leq 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ l_j(\mathbf{X}) &= 0, & j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (5.3)$$

Donde  $\mathbf{X}$  es un vector n-dimensional llamado el vector de diseño,  $f(\mathbf{X})$  es llamado la función objetivo, y  $g_j(\mathbf{X})$  y  $l_j(\mathbf{X})$  son llamados como restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente. El número de variables  $n$  y el número de restricciones  $m$  y  $p$  no están relacionadas necesariamente. A éste se le llama problema de optimización restringido. Algunos problemas de optimización no consideran ninguna restricción y pueden ser definidos como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \text{ que minimice la } f(\mathbf{X})$$

Tales problemas son llamados problemas de optimización sin restricción.

### 5.2.1. Función Objetivo

El procedimiento de diseño convencional ayuda a encontrar un aceptable o inadecuado diseño que meramente satisface los aspectos funcionales y otros requerimientos del problema. En general, hay más de un diseño aceptable y el propósito de la optimización es seleccionar el mejor dentro de muchos diseños aceptables. Por lo tanto un criterio tiene que ser escogido de tal manera que compare diferentes alternativas de diseño aceptable para seleccionar el mejor. El criterio con respecto el cual el diseño es optimizado, cuando se expresa como una función de variables de diseño es conocido como criterio o función objetivo. La selección de la función objetivo está gobernada por la naturaleza del problema (Rao, 2009), (Papalambros, 1998).

### Planteamiento del Problema de Optimización del sistema de Suspensión

La función objetivo dependerá del modelo dinámico de la suspensión de la lavadora, representado por la ec.(2.73), la cual considera:

1. Posición de resortes en tierra y tina: resorte Izquierdo y derecho.

2. Posición de amortiguadores en tierra y tina: amortiguador frontal derecho e izquierdo y amortiguador posterior derecho e izquierdo.
3. Propiedades físicas de masa e inercia de tina.
4. Propiedades físicas de masa e inercia de tambor.
5. Propiedades físicas de masa e inercia de masa de desbalanceo.
6. Propiedades de rigidez y amortiguamiento.
7. Par de motor constante.

Por lo tanto, de acuerdo con la síntesis dinámica, la declaración de la optimización es "*Dado el desplazamiento, la velocidad y aceleración lineal del centro de gravedad, hallar los parámetros de diseño de suspensión que minimice la función objetivo*". Esta formulación minimizaría el comportamiento dinámico del sistema de suspensión.

De esta manera, la función objetivo del sistema de suspensión de lavadora se declara como:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^7 \left( \sum_{j=1}^{12} f_{i,j}^2 \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

$$f_{i,j} = (\mathbf{D}_j^T \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{V}_j^T \dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{C}_j - \mathbf{Q}_j)_i$$

Donde:

*i*: Componente de la ecuación dinámica.

*j*: Punto de precisión a satisfacer para la síntesis dinámica.

De la evaluación del modelo dinámico empleando los datos originales de la lavadora, se obtiene una trayectoria del centro de gravedad del ensamble tina-canasta. Las figuras 5.2a, 5.2b, 5.2c, muestran los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de gravedad, respectivamente, mientras que la Fig. 5.2d. muestra la velocidad angular de la canasta.

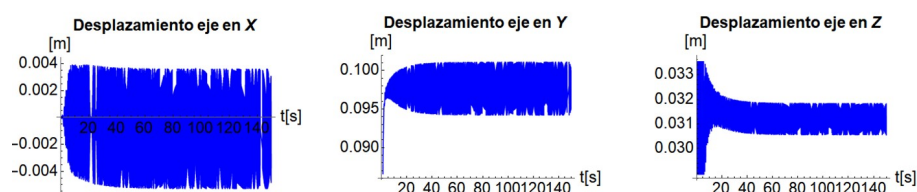


Fig. 5.2a. Desplazamientos del centro de gravedad del sistema suspensión.

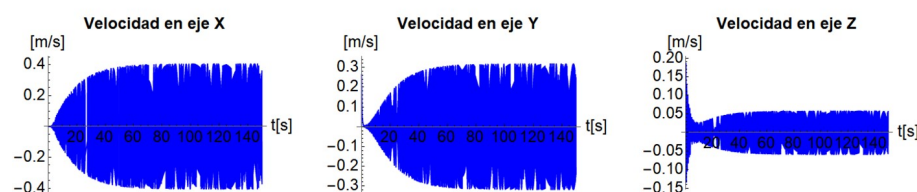


Fig. 5.2b. Velocidad del centro de gravedad del sistema suspensión.

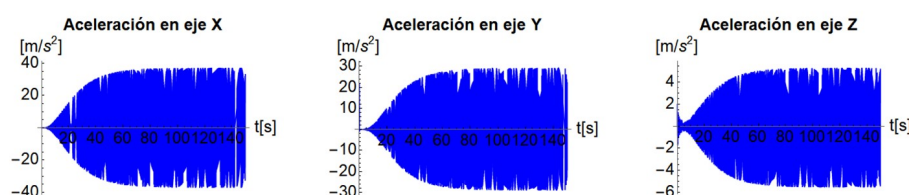


Fig. 5.2c. Aceleración del centro de gravedad del sistema suspensión.

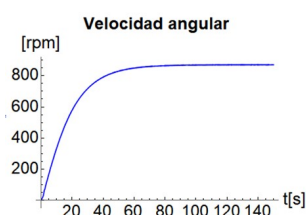


Fig. 5.2d. Velocidad angular de ensamblaje canasta.

Se definen 12 puntos para forzar al centro de gravedad del ensamblaje tina-canasta a pasar sobre estos puntos. Estos doce puntos engloban el comportamiento cinemático del centro de gravedad. Esta nueva trayectoria que describe el desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de gravedad está definida a lo largo del tiempo, proponiendo una mejora del 10% de atenuación con respecto a los valores originales (Fig. 5.5a, Fig. 5.5b y Fig. 5.5c). Este 10% representa un rango mínimo del desplazamiento de la lavadora que puede ser aceptable debido a la capacidad de fabricación y las limitaciones del espacio de trabajo.

En la función objetivo, se utiliza la función R.M.S (Root Mean Square) para obtener la raíz cuadrada del promedio del balance dinámico. Esta función implícitamente nos describe la amplitud de vibración del sistema y nos indica que tanta energía de vibración existe en el sistema. Entre más alta energía de vibración tengamos, más alto será el R.M.S.

Es importante mencionar que las suspensiones de lavadoras convencionales presentan una configuración típica de simetría sobre el plano  $y - z$ , por lo que los puntos de conexión de los componentes de la suspensión como resortes, amortiguadores tienen las mismas coordenadas de posición excepto a lo largo de la dirección  $x$ , donde las abscisas son positivas si se ubican al lado derecho y negativas al lado izquierdo. Caso especial para las fijaciones de los resortes a lo largo de las direcciones  $y$ , y  $z$ , estas coordenadas están fijas porque el centro de gravedad de los ensambles tina y canasta se encuentra en el plano  $z$  donde se encuentran las fijaciones del resorte. Dado que los parámetros de rigidez y coeficientes de amortiguamiento de los cuatro amortiguadores, a saber,  $k$  y  $c$  son parámetros de diseño importantes que afectan a la dinámica de la suspensión, se seleccionan como variables de diseño. Por lo tanto, el vector de variables de diseño se define como:

$$\mathbf{X} = [x_{st}, x_{af}, y_{af}, z_{af}, x_{ap}, y_{ap}, z_{ap}, k, c]^T$$

donde:

- $x_{st}$  : Posición de resorte en coordenada  $x$  de punto en tierra [m].
- $(x_{af}, y_{af}, z_{af})$  : Posición de amortiguadores frontales localizados sobre la tina [m].
- $(x_{ap}, y_{ap}, z_{ap})$  : Posición de amortiguadores posteriores localizados sobre la tina [m].
- $k$  : Rígidez de resorte [N/m].
- $c$  : Constantes de amortiguamiento [Ns/m].

La figura 5.3 muestra las variables de diseño en el sistema de suspensión, así como el rango de posiciones que puede tomar cada variable.

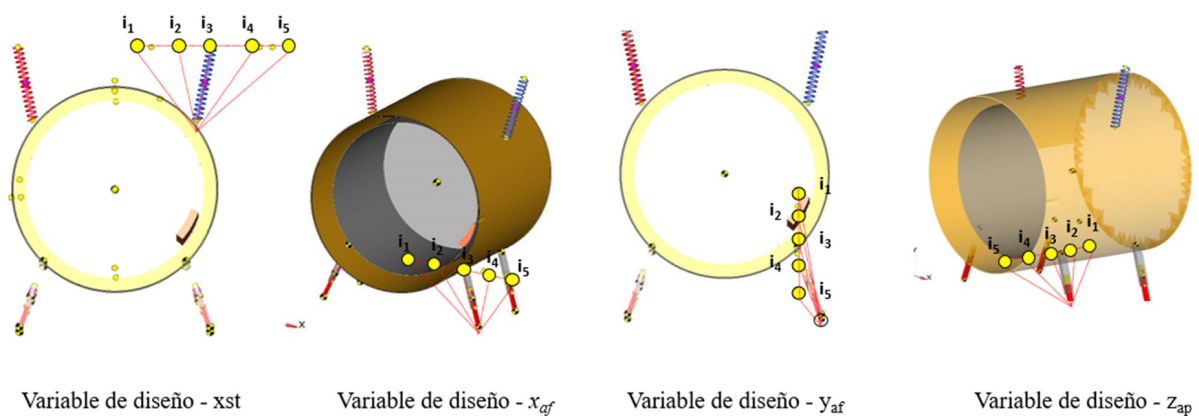


Fig.5.3a. Variables de diseño, posición de resortes y amortiguadores frontales.



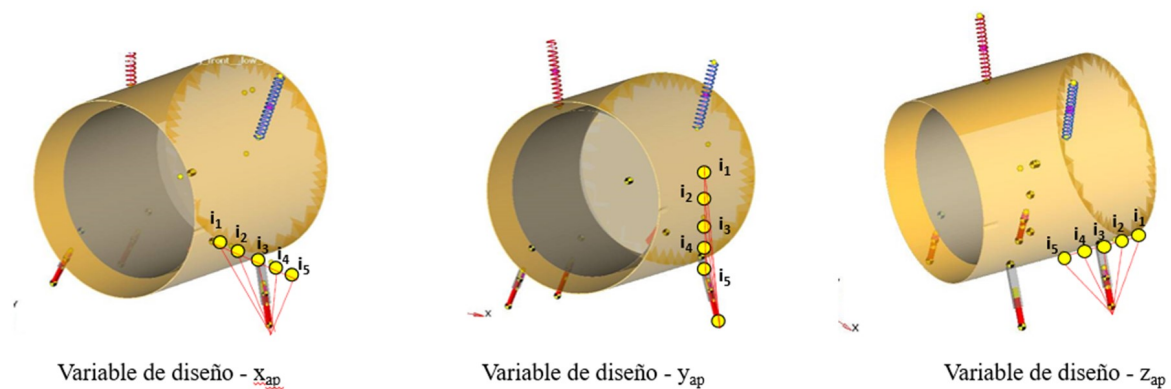


Fig.5.3a. Variables de diseño, posición de amortiguadores posteriores.

La optimización mencionada contempla el diagrama de flujo de la Fig.5.1, siguiendo el orden de selección de acuerdo a la definición del vector de variable de diseño.

Se utiliza el programa computacional Mathematica (2011) para plantear el problema de optimización usando la función FindMinimum. Esta función está definida para localizar los puntos mínimos locales que cumplan la función.

### 5.3. Resultados

Se siguió el proceso de optimización de Síntesis Dinámica como se explicó en el diagrama de flujo:

- 1.- Elegir una variable de diseño como se enumeran en el vector de diseño.
- 2.- Congelar las variables restantes.
- 3.- Resolver para la minimización de la función objetivo.
- 4.- Seleccionar la variable que cumple la minimización de la función objetivo.
- 5.- Evaluar el sistema con la variable optimizada y asegurar que los resultados son aceptables.
- 6.- Comenzar desde el punto 1, seleccionando la siguiente variable de diseño y repetir todos los pasos nuevamente

Los resultados, después de que se aplicó la Síntesis Dinámica a la función objetivo, se

muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
 x_{st} &= [0.1551, 0.2004, \mathbf{0.3064}, 0.4570, 0.4978] [m] \\
 x_{af} &= [0.0161, 0.1127, \mathbf{0.2240}, 0.3000, 0.4042] [m] \\
 y_{af} &= [-0.2968, -0.2489, -\mathbf{0.2220}, -0.1004, -0.0498] [m] \\
 z_{af} &= [0.1301, \mathbf{0.1800}, 0.2077, 0.2500, 0.3364] [m] \\
 x_{ap} &= [0.1101, 0.1534, \mathbf{0.2281}, 0.2731, 0.3563] [m] \\
 y_{ap} &= [-0.2871, -\mathbf{0.2408}, -0.2275, -0.1101, 0.1380] [m] \\
 z_{ap} &= [-0.3222, -0.2722, -0.2439, -\mathbf{0.1800}, -0.0324] [m] \\
 k &= [6971, 8143, \mathbf{9500}, 10007, 12100] [N/m] \\
 c &= [307, \mathbf{615}, 1100, 1601, 2560] [Ns/m]
 \end{aligned}$$

Los elementos dentro de los vectores definidos anteriormente representan la posición y las propiedades físicas del sistema de suspensión. Los puntos iniciales que se destacan en negrita se basan en experiencias previas y juicios de ingeniería. Cada elemento dentro de vector cumple con la minimización de la función objetivo. La Fig. 5.4 muestra los resultados del proceso de optimización para desplazamientos, velocidades y aceleración a lo largo de los ejes X, Y y Z, respectivamente; tanto para el estado transitorio, como para el estado estacionario. Los valores RMS son graficados para tal efecto.

Se explica la interpretación correcta de los gráficos a continuación:

1.- Cada iteración para cada variable de diseño tiene una configuración de contribución positiva o negativa, como referencia de los valores originales.

Los valores más bajos de desplazamiento son deseable (tendencia al color azul) mientras que los desplazamientos más grandes son indeseable (tendencia al color rojo).

2.- Las iteraciones se muestran a lo largo del eje X y las variables de diseño son trazadas a lo largo del eje Y, mientras que el color significa las medidas máximas.

3.- Los gráficos superiores son mediciones en estado transitorio hasta 600 rpm. Este rango de operación de 0 - 600 rpm considera los efectos inestables del centro de gravedad. Por arriba de 600 rpm se garantiza la estabilidad en los movimientos del centro de gravedad. Los gráficos inferiores son mediciones en estado estacionario entre 600 - 1050 rpm.

Aunque se propuso un 10% de reducción en cada característica cinemática, surge un problema técnico, contradicciones técnicas, los desplazamientos podrían mejorarse pero las velocidades o la aceleración podrían ser peores, por otro lado la aceleración se mejora pero los desplazamientos / velocidades son peores.

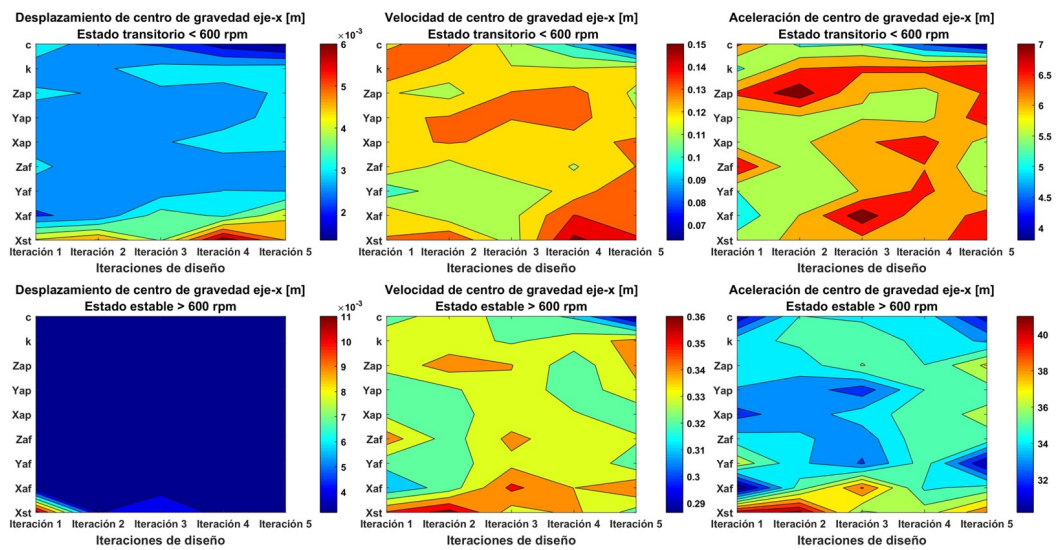


Fig. 5.4a. Desplazamientos, Velocidades y Aceleraciones de centro de gravedad en dirección X vs Iteraciones de Diseño.

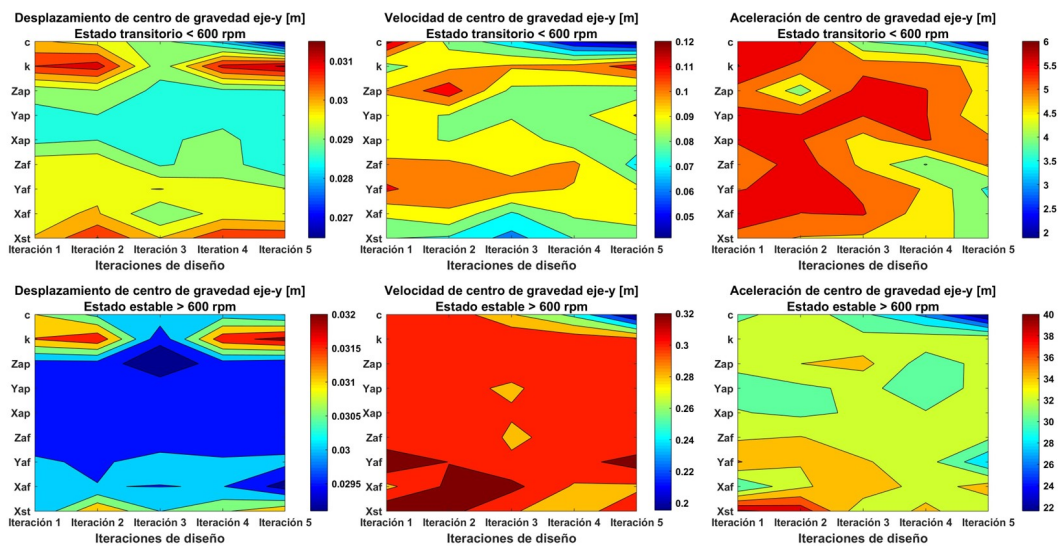


Fig. 5.4b. Desplazamientos, Velocidades y Aceleraciones de centro de gravedad en dirección Y vs Iteraciones de Diseño.

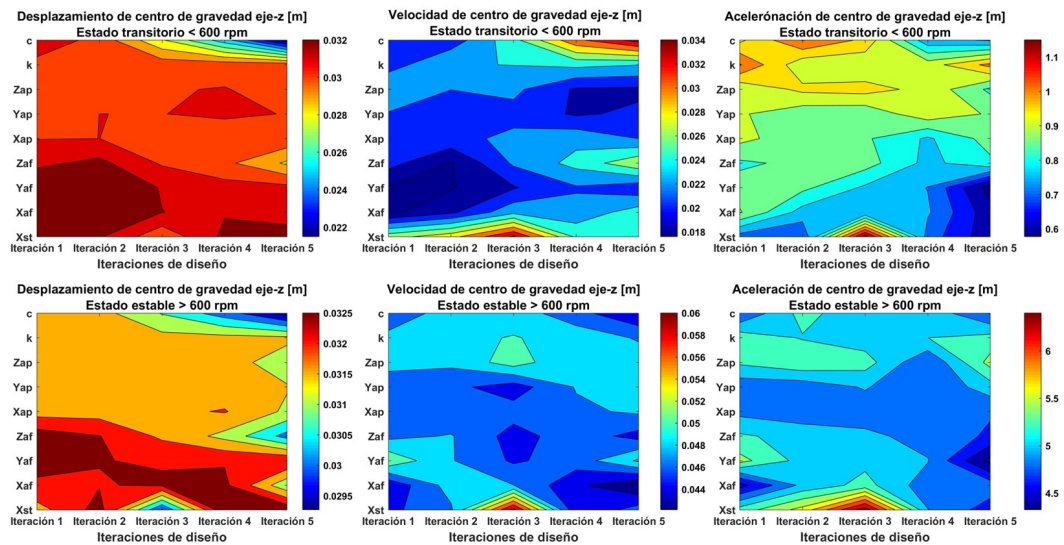


Fig. 5.4c. Desplazamientos, Velocidades y Aceleraciones de centro de gravedad en dirección Z vs Iteraciones de Diseño.

Por lo tanto, dependiendo de qué parámetros cinemáticos se seleccionen, se mejorarán los problemas comunes relacionados con el comportamiento dinámico de la lavadora. Por ejemplo, se podrían evitar grandes desplazamientos a lo largo del eje  $X$  que causen impacto entre las componentes internas si se selecciona la posición de resorte de la iteración 3, mientras que la posición en  $X$  del amortiguador delantero sería la iteración 1 y podría seleccionarse cualquier iteración para la posición del amortiguador a lo largo de la dirección  $Y$  y  $Z$ . Para la selección de las posiciones de los amortiguadores traseros se tiene que, la posición en  $X$  y  $Y$  puede ser la iteración 2 o 3 y la posición en  $Z$  la mejor iteración es la 1. La selección de la rigidez del resorte puede ser la iteración 1 o 3 y finalmente el coeficiente de amortiguamiento es definitivamente la iteración 5.

Se seleccionó una estrategia tratando de mejorar todas las respuestas cinemáticas. Este camino se muestra en cada gráfico. La descripción del movimiento que genera el centro de gravedad en el plano  $X - Y$  se le llaman órbitas, y se muestran en la Fig. 5.5. Además, se grafican no solo las órbitas del desplazamiento, sino también las órbitas que describen las velocidades y aceleraciones del centro de gravedad. Se incluyen también los puntos de la síntesis dinámica en color rojo.

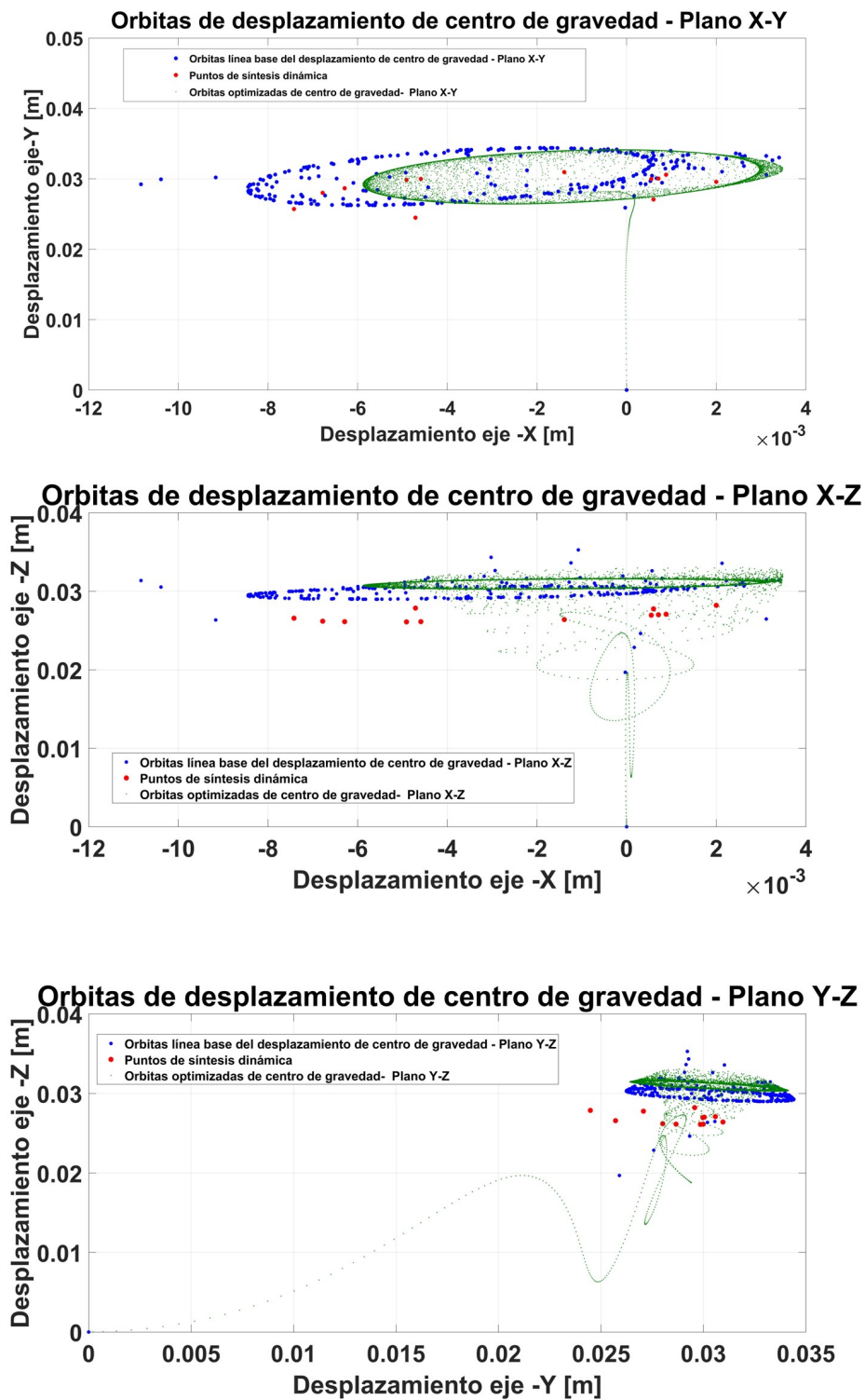


Fig. 5.5a. Órbitas de desplazamiento resultantes después del proceso de optimización.

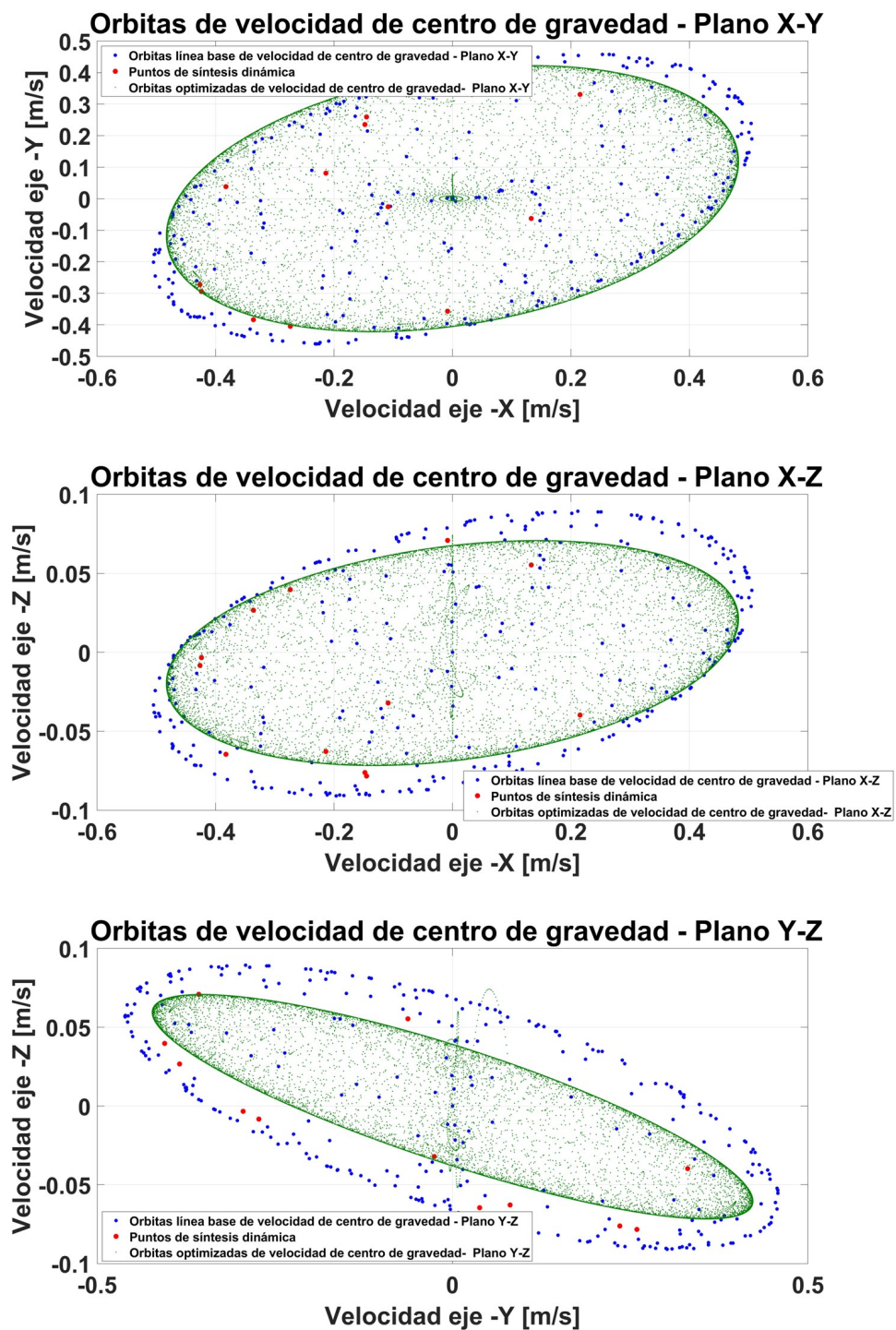


Fig. 5.5b. Órbitas de velocidad resultantes después del proceso de optimización.

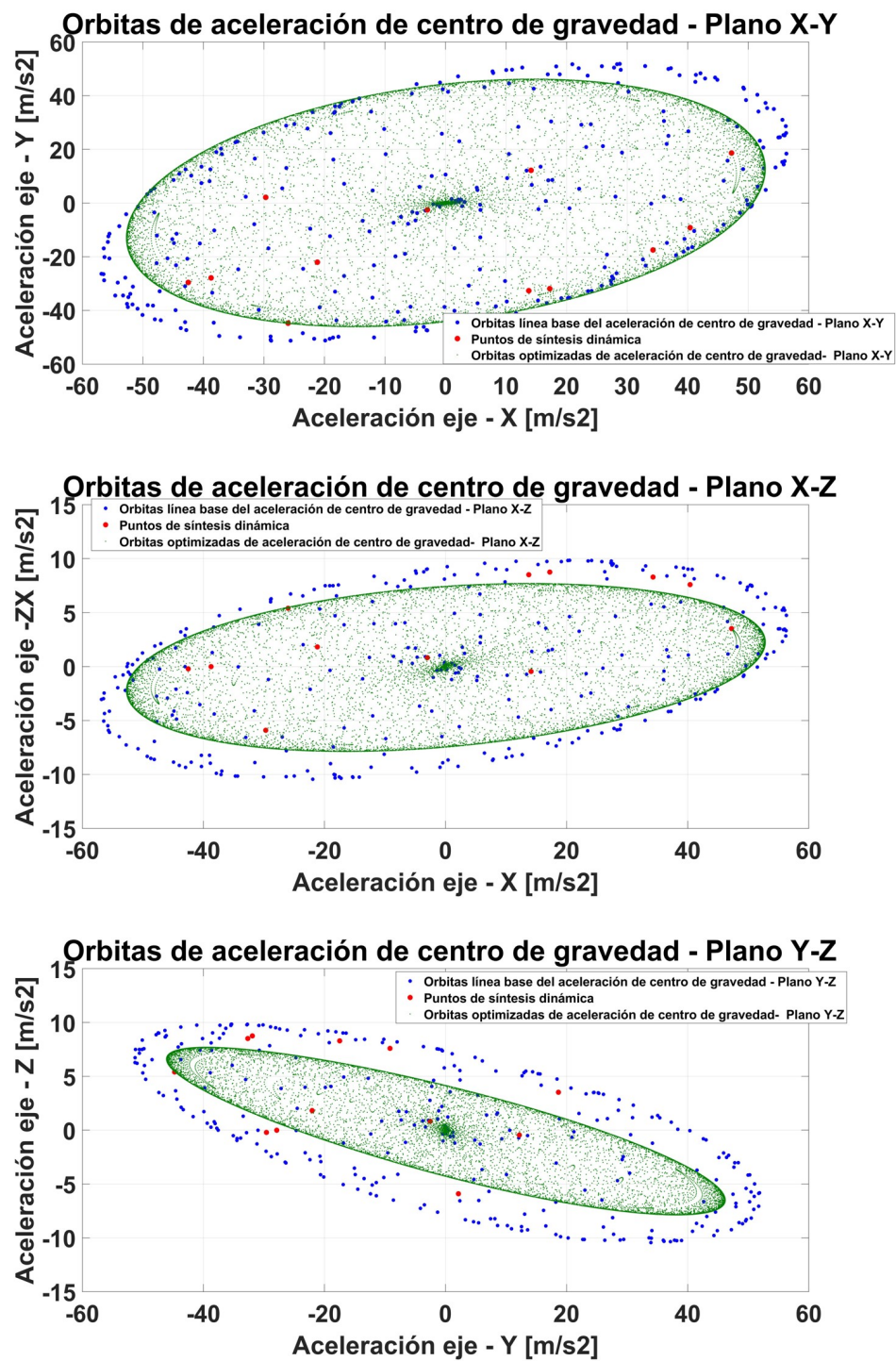


Fig. 5.5c. Órbitas de aceleración resultantes después del proceso de optimización.

La mayor parte de los puntos de la síntesis dinámica encierran las órbitas y muestran que el proceso de optimización funcionó, especialmente para las órbitas de velocidad y aceleración. Las órbitas debido al desplazamiento mejoraron en el plano  $X - Y$ , pero en el plano  $X - Z$  y  $Y - Z$  mantuvieron un comportamiento similar como el modelo inicial o línea base.

Durante el proceso de optimización se descubrió que la velocidad angular del ensamble canasta tiene variaciones significativas debido a las variables de diseño y par del motor. La relación entre las variables de diseño (eje  $X$ ), velocidad de giro (eje- $Y$  *primario*) y par motor (eje- $Y$  *secundario*) se muestran en la Fig. 5.6. Consideremos el siguiente caso para poder entender la relación existente de las variables mencionadas. Tomemos la variable de diseño  $x_{st}$ , la iteración 3 corresponde a los valores originales del modelo donde, el par de motor tiene un valor de  $3.0 [N \cdot m]$  y la velocidad angular resultante es de  $1076 [rpm]$ . Las iteraciones 1, 2, 4, 5 al conservar el par de motor original se obtenían velocidades angulares de hasta  $1170 [rpm]$ , por lo tanto, se buscó un valor de par y junto con las variables ya encontradas que estuvieran dentro de un rango de  $\pm 5\%$  del valor original de velocidad angular. Este rango de operación es debido a la variación que puede tener un motor para dicha aplicación. Es así que para estas iteraciones se encontró que un valor de par de  $3,0 [N \cdot m]$  permitía que el modelo alcanzará velocidades angulares similares.

Se construye las gráfica de la Figura 5.6 con el resto de las variables de diseño y el par de motor modificado, y se observa que las variables de diseño donde el par necesita ser modificado para tener velocidades angulares comparables son: posiciones del amortiguador frontal  $x_{af}$ ,  $z_{af}$  y coeficiente de amortiguamiento  $c$ .

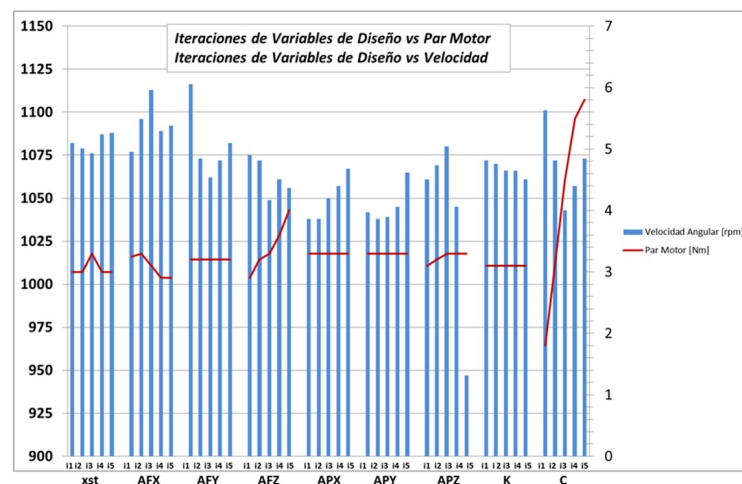


Fig. 5.6. Relación entre velocidad angular de ensamblaje canasta y excitación - Par Motor.



# Capítulo 6

## Aplicación de algoritmos genéticos en lavadora de eje horizontal de 7 grados de libertad

### 6.1. Introducción

En los últimos años, la industria de electrodomésticos se ha movido para cumplir con nuevos diseños donde los objetivos principales son lavadoras ligeras, portátiles y de alta capacidad que se enfocan en reducir el consumo de energía y agua, reducir el ruido y minimizar la vibración durante el funcionamiento. Sin embargo, estos nuevos esquemas de lavadora son más susceptibles a las grandes características de vibración y al ruido, especialmente durante el ciclo de centrifugado.

Para el proceso de optimización, algunas investigaciones han utilizado la Programación No lineal (NLP) basada en la programación cuadrada secuencial (SQP) (Turkay et al., 1995), donde las respuestas de superficie se han utilizado para determinar el comportamiento dinámico en función de la fuerza de amortiguación.

Boyraz y Gündüz (2013) presenta un modelado dinámico de una lavadora horizontal y la optimización de las características de vibración usando Algoritmos Genéticos (AG). Este estudio involucra un modelo dinámico 2D de una lavadora horizontal y un proceso de optimización usando AG, donde los parámetros a optimizar son los coeficientes de rigidez de resortes, coeficientes de amortiguación y las ubicaciones geométricas de los elementos de suspensión en los ejes  $X$  y  $Z$ .

En 2016 se desarrolló un modelo dinámico con 4 GDL para estudiar el efecto de los amortiguadores sobre la suspensión y predecir los desplazamientos en los ejes vertical y lateral del sistema. Los resultados mostraron que la vibración y las fuerzas transmitidas al marco se

reducen significativamente cuando se desacopla el amortiguador. No obstante, el modelo no abordó el movimiento longitudinal del sistema (Buśkiewicz y Pittner 2016).

En este trabajo de investigación se utiliza un modelo dinámico de 7 DOF para optimizar los parámetros de suspensión, como coeficiente de amortiguación y rigidez de resorte así como ubicaciones geométricas de elementos de suspensión (Fig. 6.1), este proceso de optimización se llevará durante el estado estable y transitorio, buscando minimizar las excursiones, desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de gravedad.

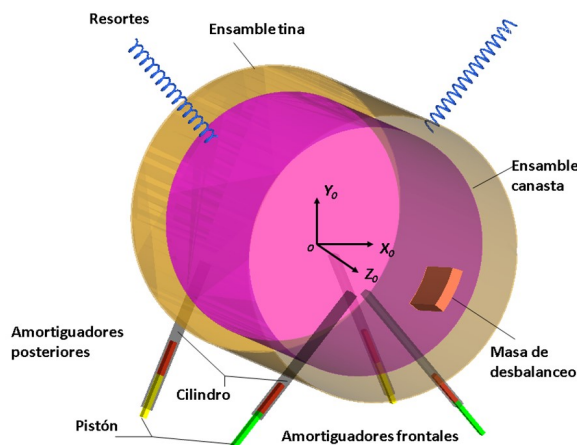


Fig. 6.1. Sistema de suspensión de lavadora de eje horizontal.

## 6.2. Aplicación de Bounding Box

El modelo dinámico describe las respuestas cinemáticas (desplazamientos  $\mathbf{q}$ , velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$ ) del centro de gravedad como un conjunto de puntos (Fig. 6.2). Estos conjuntos de puntos pueden encerrarse en un cuadro delimitador no-orientado cuyo volumen puede ser maximizado o minimizado. Sin embargo para entender la dispersión de estos puntos es necesario emplear cuadros delimitadores más simples y equivalentes que se generan orientando el conjuntos de puntos. Esta orientación se realiza a través del análisis de componentes principales (PCA) (Jolliffe 2002). El análisis PCA necesita el cálculo de los vectores propios de las matrices de covarianza para usarlos como ejes de un marco ortonormal.

Por lo tanto, la matriz de covarianza debe formularse para comprender la dispersión en datos dimensionales de  $3 \times 3$ . Esta se forma de la siguiente manera:

Resolviendo el modelo dinámico ec. 2.73 de la suspensión de la lavadora:

$$\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \mathbf{Q}$$

y recuperando las respuestas del vector de desplazamiento  $\mathbf{q} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \theta]^T$ , vector de velocidad

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}]^T$  y vector de aceleración  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}, \ddot{\theta}]^T$  todos en estado transitorio y estable.

Se define un nuevo vector considerando solo movimientos traslacionales:

$$\mathbf{q}_t = [x, y, z]^T, \dot{\mathbf{q}}_t = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T, \ddot{\mathbf{q}}_t = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]^T$$

El primer paso para crear la matriz de covarianza es calcular la posición promedio del centro de gravedad en cada dirección de los ejes  $X, Y, Z$

para crear un vector  $\mathbf{c} = [c_x, c_y, c_z]^T$ . Este vector representa el centro de los datos de una nube de puntos generada por el movimiento del centro de gravedad, velocidad y aceleración.

De modo, el promedio de cada dirección es dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_t^T}{n} & \dot{\mathbf{c}} &= \frac{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_t^T}{n} & \ddot{\mathbf{c}} &= \frac{\sum_{i=1}^n \ddot{\mathbf{q}}_t^T}{n} \\ c_x &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_t^T[x]}{n} & \dot{c}_x &= \frac{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_t^T[x]}{n} & \ddot{c}_x &= \frac{\sum_{i=1}^n \ddot{\mathbf{q}}_t^T[x]}{n} \\ c_y &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_t^T[y]}{n} & \dot{c}_y &= \frac{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_t^T[y]}{n} & \ddot{c}_y &= \frac{\sum_{i=1}^n \ddot{\mathbf{q}}_t^T[y]}{n} \\ c_z &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_t^T[z]}{n} & \dot{c}_z &= \frac{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{q}}_t^T[z]}{n} & \ddot{c}_z &= \frac{\sum_{i=1}^n \ddot{\mathbf{q}}_t^T[z]}{n} \end{aligned}$$

El segundo paso es calcular la dispersión de las respuestas cinemáticas del centro de gravedad respecto al promedio a lo largo de los ejes

El segundo paso es calcular qué tan lejos está separado un conjunto de  $\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t$ , de su media, respectivamente, en otras palabras, calculando la dispersión de movimientos de GC respecto de sus medias a lo largo de los ejes  $X, Y, Z$  y construyendo la matriz de covarianza para  $\mathbf{I}_{q_t}, \dot{\mathbf{I}}_{q_t}, \ddot{\mathbf{I}}_{q_t}$ .

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^n ((y_i - c_y)^2 + (z_i - c_z)^2) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^n ((x_i - c_x)^2 + (z_i - c_z)^2) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^n ((x_i - c_x)^2 + (y_i - c_y)^2) \\ I_{xy} &= -\sum_{i=1}^n ((x_i - c_x)(y_i - c_y)) \\ I_{yz} &= -\sum_{i=1}^n ((y_i - c_y)(z_i - c_z)) \\ I_{xz} &= -\sum_{i=1}^n ((x_i - c_x)(z_i - c_z)) \end{aligned} \quad \text{donde } \mathbf{I}_{q_t} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{xx} &= \sum_{i=1}^n ((\dot{y}_i - \dot{c}_y)^2 + (\dot{z}_i - \dot{c}_z)^2) \\ \dot{I}_{yy} &= \sum_{i=1}^n ((\dot{x}_i - \dot{c}_x)^2 + (\dot{z}_i - \dot{c}_z)^2) \\ \dot{I}_{zz} &= \sum_{i=1}^n ((\dot{x}_i - \dot{c}_x)^2 + (\dot{y}_i - \dot{c}_y)^2) \\ \dot{I}_{xy} &= -\sum_{i=1}^n ((\dot{x}_i - \dot{c}_x)(\dot{y}_i - \dot{c}_y)) \\ \dot{I}_{yz} &= -\sum_{i=1}^n ((\dot{y}_i - \dot{c}_y)(\dot{z}_i - \dot{c}_z)) \\ \dot{I}_{xz} &= -\sum_{i=1}^n ((\dot{x}_i - \dot{c}_x)(\dot{z}_i - \dot{c}_z)) \end{aligned} \quad \text{donde } \dot{\mathbf{I}}_{q_t} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{xx} & \dot{I}_{xy} & \dot{I}_{xz} \\ \dot{I}_{yx} & \dot{I}_{yy} & \dot{I}_{yz} \\ \dot{I}_{zx} & \dot{I}_{zy} & \dot{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{xx} &= \sum_{i=1}^n ((\ddot{y}_i - \ddot{c}_y)^2 + (\ddot{z}_i - \ddot{c}_z)^2) \\
 \ddot{I}_{yy} &= \sum_{i=1}^n ((\ddot{x}_i - \ddot{c}_x)^2 + (\ddot{z}_i - \ddot{c}_z)^2) \\
 \ddot{I}_{zz} &= \sum_{i=1}^n ((\ddot{x}_i - \ddot{c}_x)^2 + (\ddot{y}_i - \ddot{c}_y)^2) \\
 \ddot{I}_{xy} &= -\sum_{i=1}^n ((\ddot{x}_i - \ddot{c}_x)(\ddot{y}_i - \ddot{c}_y)) \\
 \ddot{I}_{yz} &= -\sum_{i=1}^n ((\ddot{y}_i - \ddot{c}_y)(\ddot{z}_i - \ddot{c}_z)) \\
 \ddot{I}_{xz} &= -\sum_{i=1}^n ((\ddot{x}_i - \ddot{c}_x)(\ddot{z}_i - \ddot{c}_z))
 \end{aligned}
 \quad \text{donde } \ddot{\mathbf{I}}_{\ddot{q}_t} = \begin{bmatrix} \ddot{I}_{xx} & \ddot{I}_{xy} & \ddot{I}_{xz} \\ \ddot{I}_{yx} & \ddot{I}_{yy} & \ddot{I}_{yz} \\ \ddot{I}_{zx} & \ddot{I}_{zy} & \ddot{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

Cada matriz de covarianza se construye en un estado estable - transitorio para capturar todos los movimientos del centro de gravedad de la lavadora. La matriz de covarianza define tanto la dispersión (varianza) como la orientación (covarianza) de los datos. Entonces, para representar la matriz de covarianza con un vector y su magnitud, simplemente se debe encontrar el vector que apunta en la dirección de la mayor dispersión de los datos, y cuya magnitud es igual a la dispersión (varianza) en esta dirección.

Sin embargo, la varianza solo se puede utilizar para explicar la dispersión de los datos en las direcciones paralelas a los ejes del espacio característico (Fig. 6.2). En otras palabras, debemos aplicar una transformación lineal a nuestros datos originales para obtener los datos de mayor dispersión paralelos al espacio característico, luego obtendremos los datos rotados y escalados.

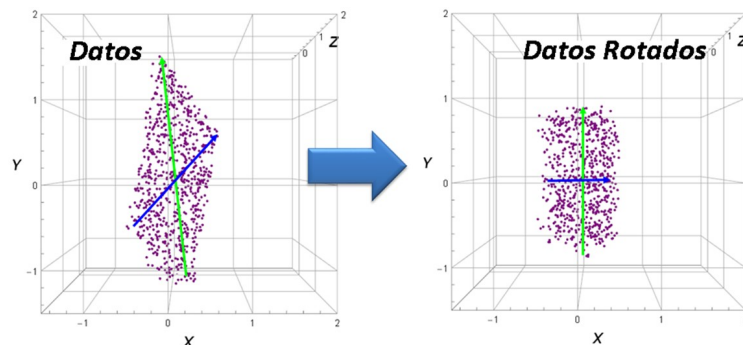


Fig. 6.2. La matriz de covarianza representa una transformación lineal de los datos originales.

Esta transformación lineal se obtiene extrayendo el *eigenvector* de la matriz de covarianza y luego normalizándolos. Donde los *eigenvectores* representan las direcciones de la mayor varianza de los datos y los *eigenvalores* representan la magnitud de esta varianza en esas direcciones. Por lo tanto, podemos representar la matriz de covarianza por sus *eigenvectores*  $\mathbf{v}$  y *eigenvalores*  $\lambda$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{\ddot{q}_t} \mathbf{v} &= \lambda \mathbf{v} \\
 \bar{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}
 \end{aligned}$$

En el caso tridimensional, obtenemos tres *eigenvectores* y tres *eigenvalores*. Finalmente, estableciendo la matriz de transformación lineal con el uso de estos tres *eigenvectores*:

$$\mathbf{T} = \left[ \bar{\mathbf{v}}_1 \quad \bar{\mathbf{v}}_2 \quad \bar{\mathbf{v}}_3 \right]^T$$

De esta forma se pueden organizar los datos originales en el espacio característico, donde los vectores más grandes apuntan hacia direcciones paralelas  $CS_1 (X'Y'Z')$ . Se utilizó el mismo proceso para obtener no solo el desplazamiento sino también la velocidad y la aceleración del centro de gravedad de la lavadora.

$$\mathbf{c}^R = \mathbf{T}\mathbf{c}$$

$$\dot{\mathbf{c}}^R = \mathbf{T}\dot{\mathbf{c}}$$

$$\ddot{\mathbf{c}}^R = \mathbf{T}\ddot{\mathbf{c}}$$

Este nuevo conjunto de datos  $\mathbf{c}^R$ ,  $\dot{\mathbf{c}}^R$ , y  $\ddot{\mathbf{c}}^R$  se usará para definir un cuadro delimitador de volumen para todas las respuestas cinemáticas.

### **6.3. Algoritmo genético**

Los algoritmos genéticos son una técnica de optimización de búsqueda directa estocástica, que se basa en la mecánica de la genética natural (Gen y Cheng, 2000). Por lo tanto, ejecutado en diferentes momentos, el algoritmo puede conducir a una secuencia diferente de diseños y un evento de solución de problema diferente con las mismas condiciones iniciales. Varias ventajas del AG lo hacen superior a otros métodos de optimización. Primero, los algoritmos genéticos usan solo los valores de las funciones en el proceso de búsqueda para avanzar hacia una solución, sin importar cómo se evalúan las funciones. La continuidad o la diferenciabilidad de las funciones del problema no se requieren, ni se usan en los cálculos de los algoritmos (Arora, 2012). Las operaciones del AG son simples y una mejora en los espacios de búsqueda es notablemente poderosa incluso en sistemas no lineales. Finalmente, la principal ventaja de AGs es su capacidad de saltar aleatoriamente de un punto en el espacio de búsqueda a otro, lo que los hace inmunes a la optimización local. Estas características del AG lo hacen aplicable a la gran mayoría de los problemas de optimización.

Los algoritmos genéticos son paralelos a la evolución biológica y se basan en la teoría de la selección natural de Darwin. La mecánica específica del algoritmo utiliza el lenguaje de la microbiología, y su implementación imita las operaciones genéticas. La idea básica del enfoque es comenzar con un conjunto de diseños, generados aleatoriamente utilizando los valores permitidos para cada variable de diseño. A cada diseño también se le asigna un

valor de aptitud. El proceso continúa hasta que se cumple un criterio de detención. A cada diseño también se le asigna un valor de aptitud. El proceso continúa hasta que se cumple un criterio de detención. Hay varios términos asociados con el algoritmo genético utilizado en este trabajo, los cuales se describen a continuación.

### **Población**

El conjunto de puntos de diseño en la iteración actual se llama población. Representa un grupo de diseños como posibles puntos de solución.  $Np$  - número de diseños en una población. Esto también se llama tamaño de la población.

### **Generación**

Una iteración del algoritmo genético se llama generación. Una generación tiene una población de tamaño  $Np$  que se manipula en un algoritmo genético.

### **Cromosoma**

Este término se usa para representar un punto de diseño. Por lo tanto, un cromosoma representa un diseño del sistema, ya sea factible o no factible. Contiene valores para todas las variables de diseño del sistema.

### **Gen**

Este término se usa para un componente escalar del vector de diseño; es decir, representa el valor de una variable de diseño particular.

### **Representación de diseño**

Sin embargo, la parte más importante para preparar un problema de optimización mediante un AG reside en definir las variables de diseño del sistema en una cadena particular de valores numéricos para usar como cromosoma. Esto puede codificarse o no. Aunque la codificación binaria es el enfoque más común, también puede usarse una codificación de números enteros y/o reales. La codificación binaria implica una cadena de 0 y 1. Las cadenas binarias también son útiles porque es más fácil explicar el funcionamiento del algoritmo genético con ellas. En este documento, se utilizó la codificación de números reales para representar el cromosoma del  $i$ -ésimo tamaño de la población en el controlador AG.

En esta investigación, el vector de diseño que se empleará en la optimización está definido con la rigidez del resorte, coeficiente de amortiguamiento y los lugares geométricos en los que los resortes y amortiguadores se fijan en el ensamble tina y las fijaciones que se conectan a

tierra. El sistema de suspensión se considera simétrico; por lo tanto, hay cuatro parámetros independientes para elementos de muelles, ocho parámetros independientes para amortiguadores (cilindro y pistón) y dos parámetros independientes, rigidez de resorte y coeficiente de amortiguación, ver Fig. 6.3. y Tabla 1.

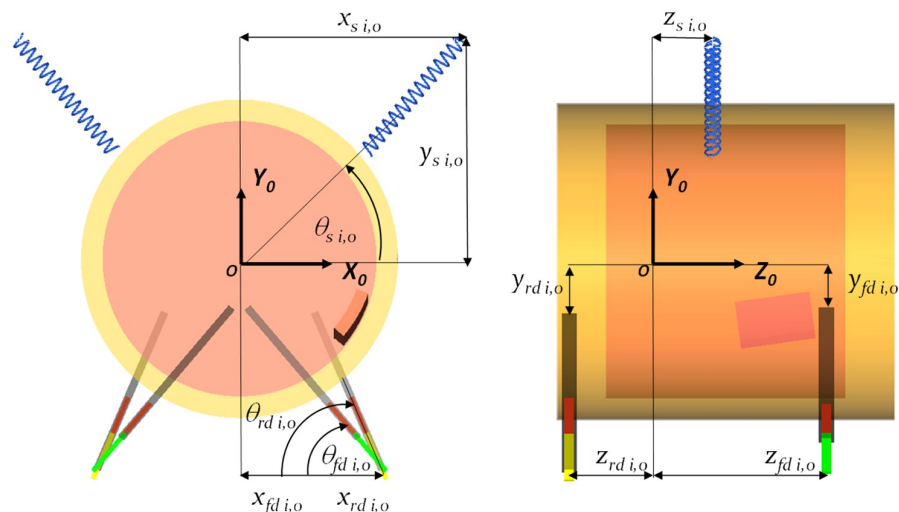


Fig. 6.3. Variables de vector de diseño.

Tabla 1. Variables de diseño.

Variables de Diseño	Componentes	Referencia	Dirección
$x_{s i, o}$	Resorte $i$ – esimo	$CS_0(X_0 Y_0 Z_0)$	$x$
$y_{s i, o}$			$y$
$z_{s i, o}$			$z$
$\theta_{s i, o}$			Plano $xy$
$x_{f d i, o}$	Amortiguador Frontal $i$ – esimo		$x$
$y_{f d i, o}$			$y$
$z_{f d i, o}$			$z$
$\theta_{f d i, o}$			Plano $xy$
$x_{r d i, o}$	Amortiguador Posterior $i$ – esimo		$x$
$y_{r d i, o}$			$y$
$z_{r d i, o}$			$z$
$\theta_{r d i, o}$			Plano $xy$
$k$	Rigidez de resorte		
$c$	Coficiente de amortiguamiento		

Los elementos del cromosoma se generan al azar, y un cromosoma proporciona una secuencia.

### Población Inicial

Con un método para representar un punto de diseño definido, se necesita crear la primera población que consiste en un número de diseños  $Np$ . En algunos casos, el diseñador ya conoce algunos buenos diseños utilizables para el sistema. Considerando los datos de optimización secuencial previamente estudiada, se tomaron algunas ubicaciones físicas y variables de suspensión física como un diseño inicial para generar el número requerido de diseños para la población usando algún proceso aleatorio. La función aleatoria en el programa Mathematica se usa como el generador de números aleatorios. Se generan una cantidad de cromosomas igual al tamaño de la población; todo el conjunto es la población inicial. El proceso comienza con 10 cromosomas para cada población.

#### 6.3.1. Función de fitness

La función aptitud evalúa el desempeño de cada cromosoma. El siguiente paso es definir la función de aptitud debido a la importancia relativa de un diseño. Para mejorar la solución obtenida usando AG, se evalúa la aptitud de cada individuo. Se calcula un valor de aptitud para cada individuo en la población. Para construir la función de aptitud se utiliza la diferencia entre el máximo y mínimo desplazamiento del centro de gravedad. Esta diferencia se define como delta de desplazamiento, de manera análoga se define, delta de velocidad y delta de aceleración del centro de gravedad de los ensambles tina / canasta en cada dirección  $x, y, z$  para construir un volumen como se muestra en la Fig. 6.4.

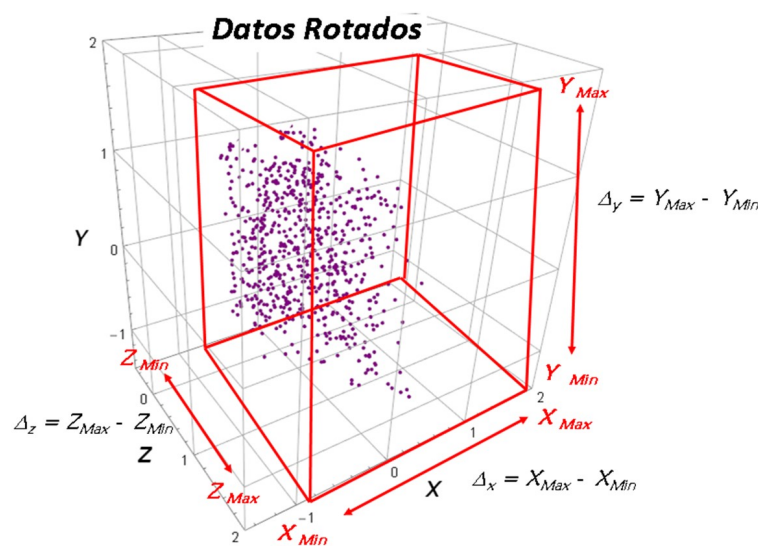


Fig. 6.4. Bounding box de movimientos de centro de gravedad.



La función de aptitud en este trabajo trata el problema de encontrar el volumen mínimo orientado por el cuadro delimitador o llamado "Bounding Box" de un conjunto dado de  $N$  puntos, denotado por  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ , desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de gravedad de la lavadora respectivamente, por lo tanto el problema básicamente es encontrar el paralelepípedo cuboide o rectangular de volumen mínimo que encierre  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ . Los términos de la función aptitud se describen como:

$$fit = w_1 (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z + \Delta_{\dot{x}} + \Delta_{\dot{y}} + \Delta_{\dot{z}} + \Delta_{\ddot{x}} + \Delta_{\ddot{y}} + \Delta_{\ddot{z}}) + w_2 t_{min} + w_3 (c_x + c_y + c_z) + w_4 \dot{\theta}_{max} \quad (6.1)$$

donde:

- $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  Delta de desplazamiento entre el máximo y mínimo movimiento de CG en dirección  $X, Y, Z$  ejes espectivamente,  $CS_1(X'Y'Z')$ .
- $\Delta_{\dot{x}}, \Delta_{\dot{y}}, \Delta_{\dot{z}}$  Delta de velocidad entre el máximo y mínimo movimiento deCG en dirección  $X, Y, Z$  ejes respectivamente,  $CS_1(X'Y'Z')$ .
- $\Delta_{\ddot{x}}, \Delta_{\ddot{y}}, \Delta_{\ddot{z}}$  Delta de aceleración entre el máximo y mínimo movimiento deCG en dirección  $X, Y, Z$  ejes respectivamente,  $CS_1(X'Y'Z')$ .
- $c_x, c_y, c_z$  Movimientos de centro de gravedad.
- $t_{min}$  Mínimo tiempo necesario para alcanzar máxima velocidad angular constante.
- $\dot{\theta}_{max}$  Máxima velocidad angular en estado estable.

El primer término de la función aptitud representa el comportamiento en estado estable de todas las respuestas cinemáticas (términos ponderados con  $w_1$ ) y puede observarse en la Fig.6.5., donde se observa la representación del estado estable del centro de gravedad. La gráfica contiene dos ejes- $Y$ , el principal representa la magnitud de la variable cinemática, mientras el eje secundario está relacionado a la magnitud de la velocidad de giro. El estado transitorio termina cuando se alcanza una velocidad estable.

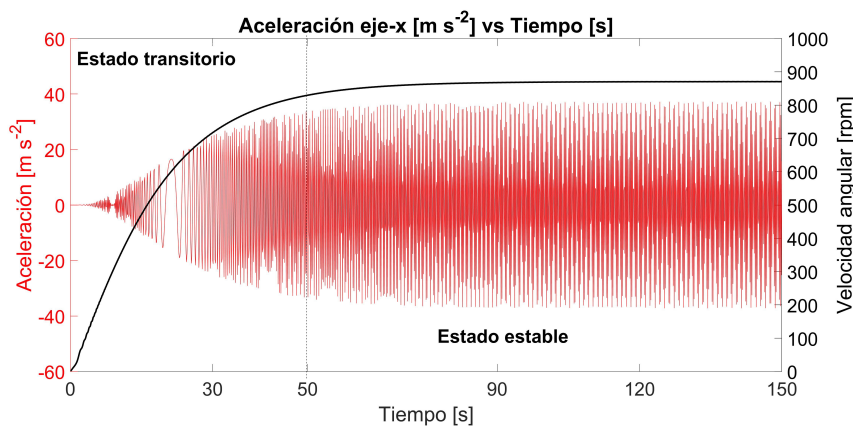


Fig. 6.5. Representación de estado transitorio-estable del centro de gravedad en el eje-X.

Finalmente, algunos parámetros como el tiempo en el que se alcanza la velocidad máxima de centrifugado, el desplazamiento del estado transitorio del centro de gravedad y la velocidad máxima de centrifugado están incluidos en la función de aptitud, donde cada parámetro es ponderado de la siguiente manera

$$w_1 = 5 \% \quad w_2 = 25 \% \quad w_3 = 15 \% \quad w_4 = 15 \%$$

Todas las variables cinemáticas tienen la misma ponderación debido a que todas son importantes para optimizarlas al mismo tiempo. Tiempo necesario para alcanzar la velocidad máxima de velocidad de centrifugado es ponderado al 25 % para cruzar los fenómenos transitorios lo más rápido posible. Los grandes movimientos del centro de gravedad se ponderan al 15 % porque las grandes excursiones son indeseables. La velocidad angular máxima se pondera al 15 % solo para garantizar que se alcance la velocidad máxima de centrifugado.

### Operadores genéticos

**Reproducción** La reproducción es un proceso de seleccionar un conjunto de diseños de la población actual y llevarlos a la próxima generación. El proceso de selección está sesgado hacia miembros más adecuados del conjunto de diseño actual. Para este análisis, se utiliza un enfoque de ruleta como procedimiento de selección. Un par de cromosomas se seleccionan para ir a la operación de cruce.

**Cruce** Una fase significativa en un AG se lleva a cabo utilizando el cruce para introducir variación en una población. El cruce es el proceso de combinar o mezclar dos diseños diferentes (cromosomas) en la población. Algunos estudios sugieren que un buen desempeño de GA requiere una alta probabilidad de cruce (Goldberg, 1989). Para obtener la ventaja del cruce se define un 80 % en este estudio (Hassanat et al., 2019). Aunque hay muchos métodos para realizar el cruce, los más comunes son los métodos de punto de cruce y dos puntos de cruce. El método de punto de cruce define la cruce en una posición dentro del cromosoma. En el método punto de cruce se selecciona aleatoriamente una posición en el cromosoma que marca el punto en el que se dividen dos padres o cromosomas. Las cuatro mitades resultantes se intercambian para producir nuevos diseños o hijos.

**Mutación** La mutación es la siguiente operación sobre los miembros del nuevo conjunto de diseño. La idea de la mutación es salvaguardar el proceso de una pérdida prematura completa de material genético valioso durante los pasos de reproducción y cruzamiento. La probabilidad de mutación se basa en valores más altos [0.05-0.1] para combatir la pérdida prematura de material genético, mientras que los valores más bajos [0.001-0.005] evitan que todas las soluciones caigan en un óptimo local. En este estudio, la probabilidad se establece

en 0.10, si el número aleatorio en el rango  $[0,1]$  es menor que la probabilidad de mutación, entonces el cromosoma seleccionado está mutado.. Este operador debe evitar que todas las soluciones de la población caigan en un óptimo local.

**Elitismo** Si un miembro o miembros de cada generación tienen el valor de aptitud más bajo entre todos los diseños, deben preservarse para garantizar que los mejores diseños nunca se pierdan, por lo que se necesita elitismo para este propósito. Para esta investigación se utiliza un elitismo del 20 % debido a la alta tasa de mutación.

**Criterio de paro** Finalmente, para detener el AG en este estudio se define una terminación de dos criterios. El primer criterio se utiliza para encontrar la desviación estándar de aptitud para cada diez generaciones, y si su valor es menor que  $P$  (1 %) se da por terminado el AG; de lo contrario, la evaluación continúa hasta llegar a 10000 generaciones. Además, cuando se alcanza la terminación del primer criterio, se elige la solución óptima entre todas las generaciones. Sin embargo, si la GA continúa hasta que se encuentra el límite superior, entonces este individuo se define como la función de aptitud mínima en todas las poblaciones, por lo tanto, la mejor solución.

Las características dinámicas de la lavadora y las condiciones iniciales de las variables de diseño del algoritmo genético son mostradas en la Tabla 2.

Tabla 2. Características dinámicas de la lavadora y condiciones iniciales de las variables de diseño del AG.

	Masa $kg$	Momentos de Inercia $kg \cdot m^2$	Posición $m$
Ensamble tina $m_1$	31.8	$[Ixx_1, Iyy_1, Izz_1] = [3.12, 3.12, 3.01]$ $[Ixy_1, Ixz_1, Iyz_1] = [0, 0, 0]$	$[x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}]$ $= [0.0, 0.0, -0.064]$
Ensamble canasta $m_2$	11.2	$[Ixx_2, Iyy_2, Izz_2] = [0.69, 0.69, 0.78]$ $[Ixy_2, Ixz_2, Iyz_2] = [0, 0, 0]$	$[x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]$ $= [0.0, 0.0, -0.054]$
Masa de desbalanceo $m_m$	0.68	$[Ixx_m, Iyy_m, Izz_m]$ $= [0.0017, 0.0015, 0.0005]$ $[Ixy_m, Ixz_m, Iyz_m]$ $= [0.0002, 0, 0.0001]$	$[x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]$ $= [0.23, -0.12, 0.102]$
		Posición lado izquierdo $m$	Posición lado derecho $m$
Resorte – posición en tierra		$A_1 = (x_{A1}, y_{A1}, z_{A1})$ $= (-0.457, 0.449, -0.026)$	$A_3 = (x_{A3}, y_{A3}, z_{A3})$ $= (0.457, 0.449, -0.026)$
Resorte – posición en tina		$A_2 = (x_{A2}, y_{A2}, z_{A2})$ $= (-0.259, 0.219, -0.026)$	$A_4 = (x_{A4}, y_{A4}, z_{A4})$ $= (0.259, 0.219, -0.026)$
Longitud libre resorte		0.188 $m$	
Rigidez de resorte		6971 $N/m$	
Amortiguador frontal – posición en tierra		$B_1 = (x_{B1}, y_{B1}, z_{B1})$ $= (-0.300, -0.431, -0.252)$	$B_3 = (x_{B3}, y_{B3}, z_{B3})$ $= (0.300, -0.431, -0.252)$
Amortiguador frontal – posición en tina		$B_2 = (x_{B2}, y_{B2}, z_{B2})$ $= (-0.016, -0.100, -0.207)$	$B_4 = (x_{B2}, y_{B2}, z_{B2})$ $= (0.016, -0.100, -0.207)$
Amortiguador posterior – posición en tierra		$C_1 = (x_{C1}, y_{C1}, z_{C1})$ $= (-0.300, -0.447, -0.275)$	$C_3 = (x_{C3}, y_{C3}, z_{C3})$ $= (0.300, -0.447, -0.275)$
Amortiguador posterior – posición en tina		$C_2 = (x_{C2}, y_{C2}, z_{C2})$ $= (-0.153, -0.110, -0.322)$	$C_4 = (x_{C4}, y_{C4}, z_{C4})$ $= (0.153, -0.110, -0.322)$
Coefficiente de amortiguamiento		1100 $N \cdot s/m$	

La Figura 6.6 muestra la configuración inicial del sistema de suspensión.

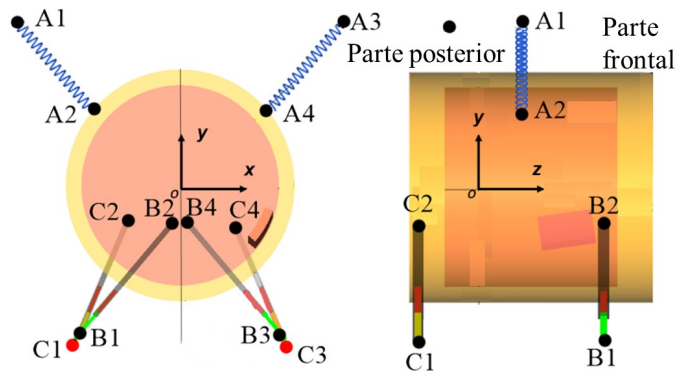


Fig.6.6. Configuración inicial del sistema de suspensión

Aunque el AG puede enfrentar casi todo tipo de problemas, el análisis de esta investigación abordó catorce variables y miles de corridas para alcanzar el valor óptimo de la función aptitud. Debido a la complejidad de la función de fitness que considera cuatro objetivos, la convergencia tomó demasiado tiempo encontrar una buena solución.

### **Diagrama de flujo de optimización de algoritmos genéticos**

La Fig. 6.7, representa un diagrama de flujo del AG propuesto con la función de aptitud descrita anteriormente. Se mencionó que este programa de AG se desarrolló utilizando el lenguaje de programación de Mathematica. El AG se aplica al modelo dinámico de la lavadora. La optimización a través del uso de Algoritmo Genético se describe de la siguiente manera:

- 1.- Generar al azar la población inicial de cromosomas.
- 2.- Evaluar cada cromosoma usando el modelo dinámico de la lavadora.
- 3.- Evaluar la función de aptitud para cada resultado dinámico de la lavadora.
- 4.- Seleccionar diseños de la población actual de acuerdo con el proceso de selección de la ruleta seleccionando dos cromosomas.
- 5.- Cruzar dos cromosomas siempre y cuando la probabilidad de cruce sea menor a 80 %.
- 6.- Mutar el cromosoma para voltear bits individuales o genes en los cromosomas, aunque el proceso de cruce no haya tenido lugar.
- 7.- Evaluar los cromosomas como resultado del proceso de cruce y mutación a través del modelo dinámico.
- 8.- Evaluar la función de aptitud nuevamente para el resultado dinámico de la lavadora del paso anterior.
- 9.- Crear una nueva población repitiendo el proceso de reproducción, cruce y mutación hasta que el tamaño de la población sea 10.
- 10.- Usar elitismo del 20 % para preservar los mejores individuos / cromosomas.
- 11.- Guardar cada generación de cromosomas.
- 12.- Aplicar método de paro de acuerdo a criterios establecidos.

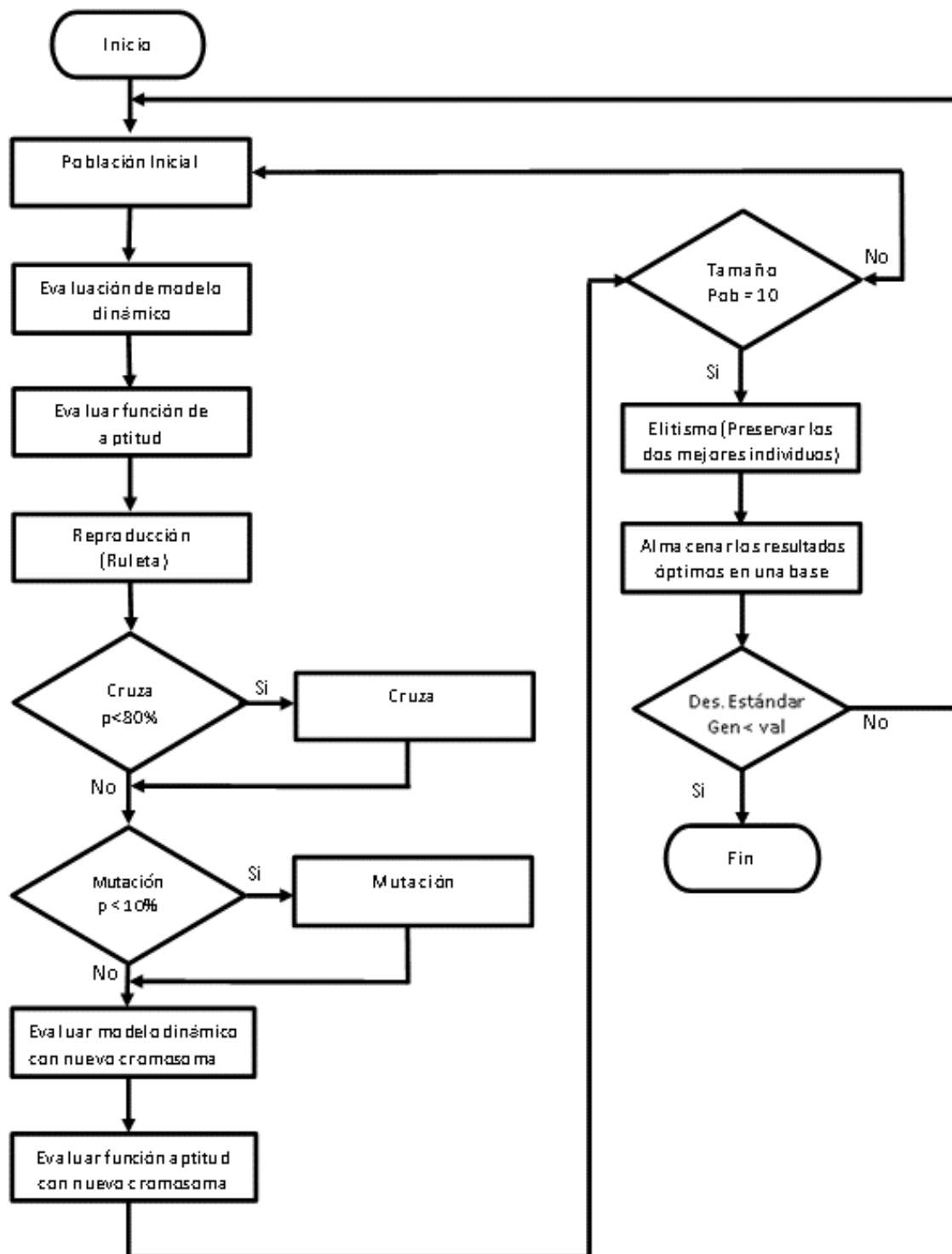


Fig. 6.7. Diagrama de flujo propuesto para AG.

## 6.4. Resultados de la simulación

### 6.4.1. Algoritmo genético - resultados en el sistema de coordenadas rotado $CS_1(X'Y'Z')$ .

El objetivo principal de este estudio es aplicar el algoritmo genético propuesto para minimizar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la lavadora a través del proceso de optimización del sistema de suspensión, el algoritmo genético se evalúa mediante el uso de la función de aptitud definida por un delta de desplazamiento, velocidad y aceleración, asegurando este delta, las vibraciones de la lavadora se considerarán mínimas. La Tabla 3 presenta los parámetros iniciales para el algoritmo genético:

Tabla 3. Parámetros iniciales de AG.

Número de generaciones	Tamaño de población	Probabilidad de cruce	Probabilidad de mutación	Elitismo	Longitud de vector
10000	10	0.8	0.1	0.2	14

El presente trabajo toma como diseño de suspensión inicial los valores obtenidos de la optimización que considera la síntesis dinámica. La Figura 6.8 es la representación gráfica del comportamiento de la función de aptitud con respecto al número de generaciones. El primer valor en la parte superior izquierda representa el valor de la función de aptitud para la línea de base o resultados de síntesis dinámica. Los próximos pasos significan cuántas generaciones mantienen constante el valor de la aptitud en cada una, cada paso muestra los valores mínimos para cada generación.

El valor mínimo de la función de aptitud física permanece constante entre la 5143<sup>a</sup> generación y hasta la generación 10000, lo que significa que el algoritmo alcanza un rendimiento estable. Cada generación en este gráfico representa un cambio en el proceso de optimización, el menor valor de la función de aptitud mejora el proceso de optimización. Por lo tanto, todos los gráficos se construyeron teniendo en cuenta estas generaciones debido a que garantizan los mejores resultados.

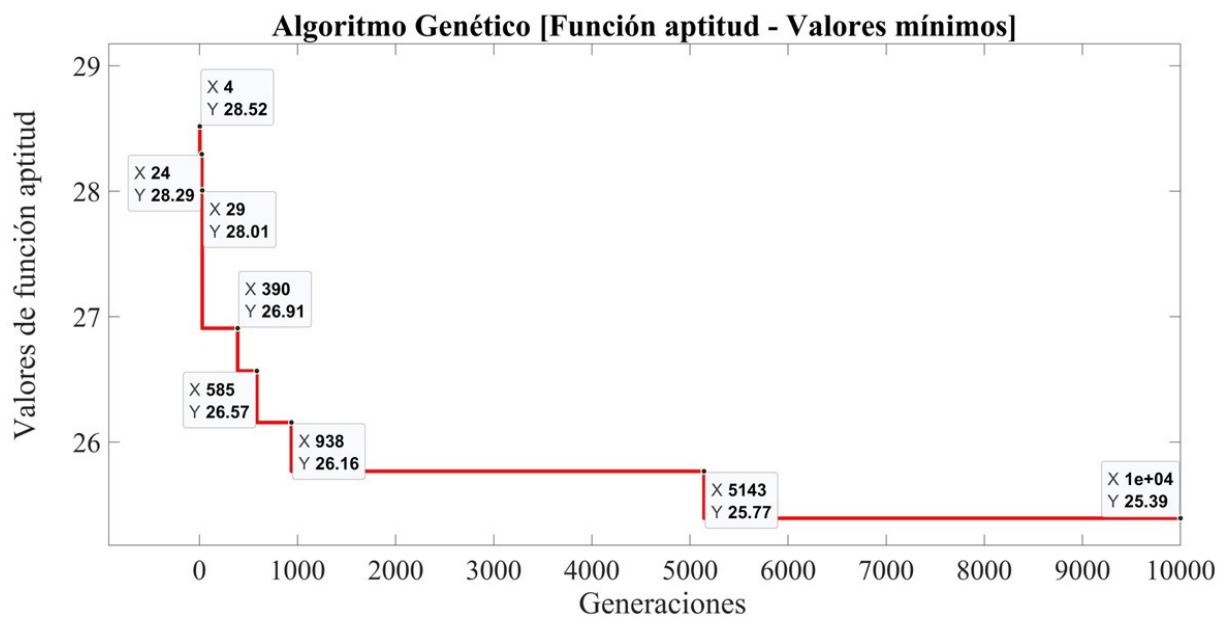


Fig. 6.8. Valores mínimos de función aptitud vs generaciones.

El primer término de la función de aptitud representa el comportamiento de estado estable de todas las respuestas cinemáticas. Este estado representa una cantidad continua y periódica de desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de gravedad de la lavadora, mientras que el estado transitorio muestra algunas perturbaciones iniciales y variaciones a lo largo del tiempo, como se muestra para el diseño de referencia en la Fig. 6.5. Los gráficos contienen dos ejes  $Y$ , el eje  $Y$  principal se refiere al desplazamiento del centro de gravedad y el eje  $Y$  secundario se refiere a la velocidad de giro. El estado no estacionario termina cuando la velocidad de giro alcanza una velocidad en la que los desplazamientos son estables.

Los diagramas de Bounding Box de desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de gravedad de la lavadora se construyeron considerando los datos de estado estacionario para diferentes generaciones, como se muestra en la Fig. 6.9. Estas bounding box encierran los datos de respuesta cinemática en el espacio característico donde el mayor de los vectores apuntan a direcciones paralelas para un nuevo sistema de coordenadas  $CS_1(X'Y'Z')$ .



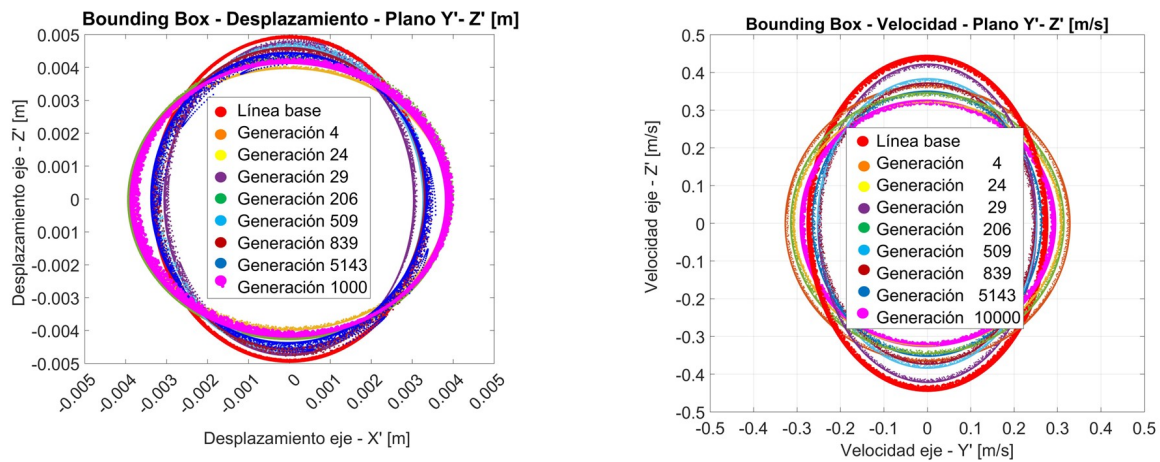


Fig. 6.9a. Bounding box de desplazamiento de CG. Fig. 6.9b. Bounding box de velocidad de CG.

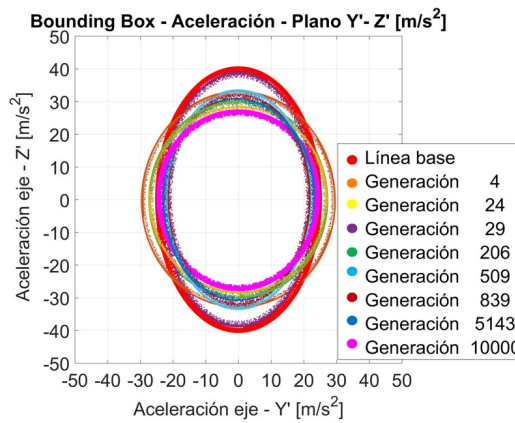


Fig. 6.9c. Bounding box de aceleración de CG.

Los resultados del AG y el bounding box muestran el proceso de minimización del volumen a través de las generaciones Fig. 6.9 específicamente para cada paso representado por el gráfico de convergencia Fig. 6.8. El volumen generado por los desplazamientos para la última generación (color magenta) parece más pequeño que la línea base (color rojo). Cuando se realiza una inspección visual, queda claro por el esquema de color que el volumen de la velocidad y la aceleración de la última generación se reducen debido a la optimización de AG. Cuanto menor sea el volumen, mejor será el rendimiento cinemático de la lavadora.

Para medir la mejora durante el proceso de optimización, la relación de volumen de desplazamiento de vibración ( $VDVR$ ) se define entre la línea base y la  $i$ -ésima generación de la siguiente manera:

$$VDVR = \frac{Vol_{Disp}^{Baseline}}{Vol_{Disp}^{Gen,i-th}} \quad (6.2)$$

donde  $Vol_{Disp} = c_x c_y c_z$  representa el volumen generado por los movimientos del centro de gravedad.

De manera similar, la velocidad de vibración y la relación de volumen de aceleración de vibración ( $VVVR$  y  $VAVR$ ) se definen:

$$VVVR = \frac{Vol_{Vel}^{Baseline}}{Vol_{Vel}^{Gen,i-th}} \quad (6.3)$$

$$VAVR = \frac{Vol_{Acc}^{Baseline}}{Vol_{Acc}^{Gen,i-th}} \quad (6.4)$$

La Tabla 4, describe la mejora en porcentaje considerando como referencia el volumen de línea de base de cada respuesta cinemática y cada generación del AG. La última generación alcanzó el 90% de mejora, lo que significa que su volumen de desplazamiento es un 90% menor que el volumen de referencia. La relación de volumen de velocidad de vibración ( $VVVR$ ) para la última generación es de 0.62, esto representa el 38% de contracción de volumen con respecto a la línea de base. El último gráfico de este análisis representa la relación de volumen de aceleración de vibración  $VAVR$ , que muestra un pico alto en la generación 29 de 1.48 [ $m^3 s^{-6}/m^3 s^{-6}$ ] en es decir, un 48% más de volumen que la línea de base, pero la última generación tiene un 56% de reducción de volumen. Es importante decir que la optimización del AG no garantiza un resultado de optimización global, pero puede converger a una solución subóptima.

Tabla 4. Porcentaje de mejora respecto a la reducción de volumen.

Generaciones	Rigidez	Amortiguamiento	Volumen de desplazamiento	Volumen de velocidad	Volumen de desplazamiento	VDVR Razón de Volumen de desplazamiento	VDVR Razón de volumen de velocidad	VDVR Razón de volumen de aceleración
	[Nm <sup>-1</sup> ]	[Nsm <sup>-1</sup> ]	[m <sup>3</sup> ]	[m <sup>3</sup> s <sup>-3</sup> ]	[m <sup>3</sup> s <sup>-6</sup> ]			
<b>Baseline</b>	697	1100	0.001423	0.001411	1655.25			
<i>Generación 4</i>	12000	810	0.000200	0.001408	1273.27	86%	0%	23%
<i>Generación 24</i>	7800	870	0.000006	0.000793	762.87	100%	44%	54%
<i>Generación 29</i>	5350	840	0.000213	0.001957	2456.67	85%	-39%	-48%
<i>Generación 26</i>	5350	840	0.000005	0.001614	1800.29	100%	-14%	-9%
<i>Generación 509</i>	8500	900	0.000337	0.000997	953.61	76%	29%	42%
<i>Generación 839</i>	5000	900	0.000020	0.001781	863.41	99%	-26%	48%
<i>Generación 5143</i>	10950	900	0.000096	0.001675	1733.06	93%	-19%	-5%
<b>Generación 10000</b>	9550	840	0.000144	0.000876	727.49	90%	38%	56%

La función de aptitud tiene un argumento más que debe evaluarse para conocer las capacidades del AG. El argumento mide cuantitativamente el movimiento del centro de gravedad de la lavadora en un estado transitorio. El siguiente método se utiliza para evaluar esta característica midiendo la distancia de un punto desde el origen:

$$d(0, P) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Luego, se calcula cada distancia para cada generación, y se normalizan tomando como

referencia la línea base como se ilustra en la Fig. 6.10.

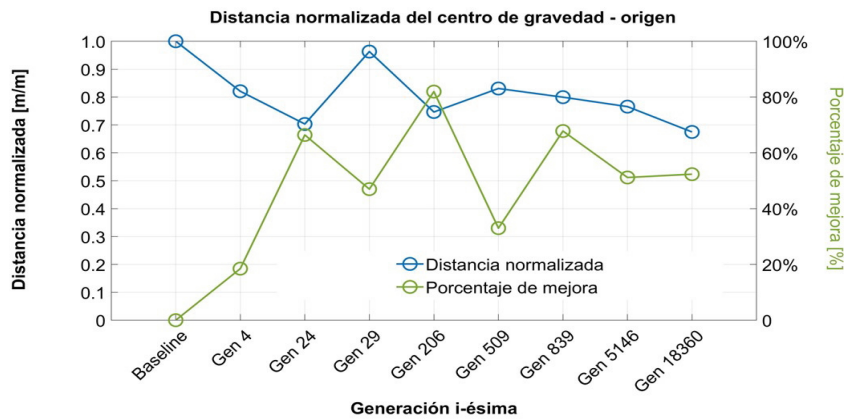


Fig. 6.10. Distancia normalizada del centro de gravedad al origen.

En el gráfico de distancia normalizada, los valores por debajo de 1 significan que la i-ésima generación es mejor que la línea de base. La última generación muestra que hay un 52 % menos de movimiento con respecto a la línea de base.

Finalmente, el período requerido para alcanzar la velocidad de centrifugado final es importante desde el punto de vista del consumo energético. Como se observó a través del proceso de optimización, el tiempo varía para cada generación. El gráfico a continuación (Fig. 6.11) muestra el tiempo final a través de cada generación. Cuanto menos tiempo se necesite, menos consumo de energía.

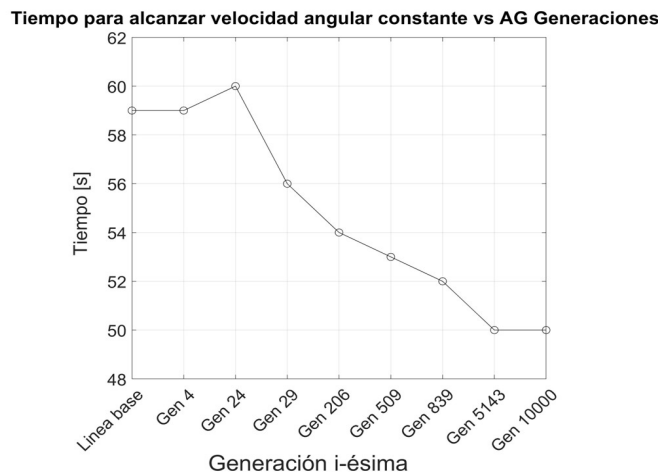


Fig. 6.11. Tiempo mínimo necesario para alcanzar la velocidad constante por cada generación.

### 6.4.2. Algoritmo genético - resultados en el sistema de coordenadas no rotado $CS_0(XYZ)$ .

Para volver al sistema de coordenadas original  $CS_0(XYZ)$  y centrarse en el rendimiento real, es importante determinar los desplazamientos de traslación y rotación de la lavadora en los estados transitorio y estable. El conocimiento de estos desplazamientos se utiliza para definir el volumen del espacio de trabajo y sus restricciones geométricas. Para comparar el rendimiento real entre la última generación y la línea de base, los diagramas de Bode se utilizan para derivar la mejora GA en las respuestas cinemáticas del centro de gravedad. La magnitud de pico a pico y la relación con la velocidad de rotación se muestran en los diagramas de Bode, Fig. 6.12.

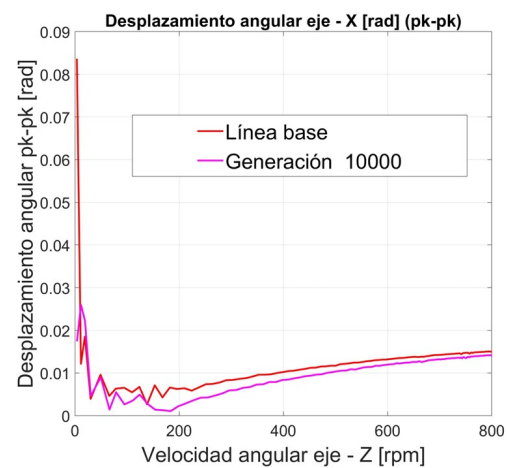
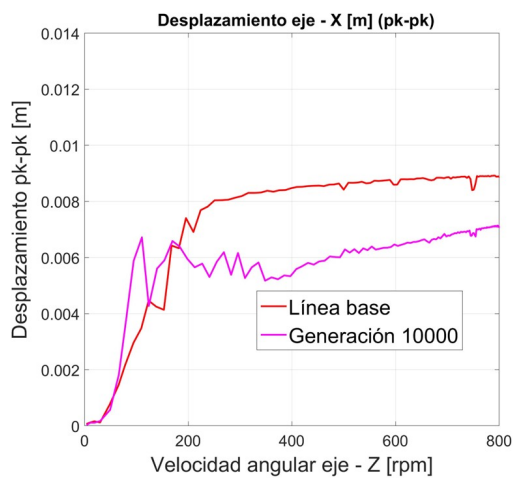


Fig. 6.12a. Desplazamiento en X pk-pk [m]. Fig. 6.12d. Desplazamiento angular en X pk-pk [rad].

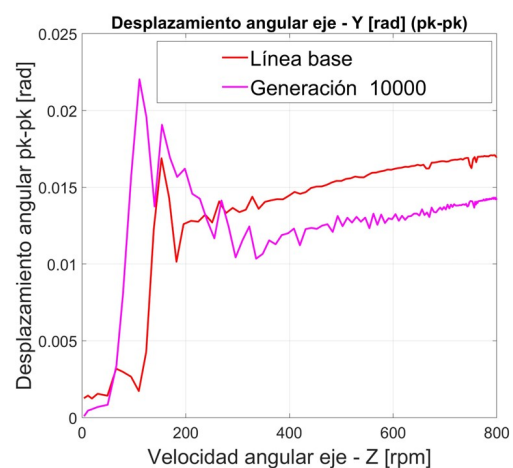
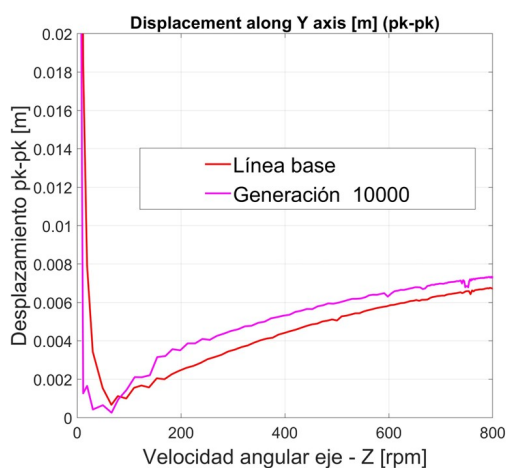


Fig. 6.12b. Desplazamiento en Y pk-pk [m]. Fig. 6.12e. Desplazamiento angular en Y pk-pk [rad].

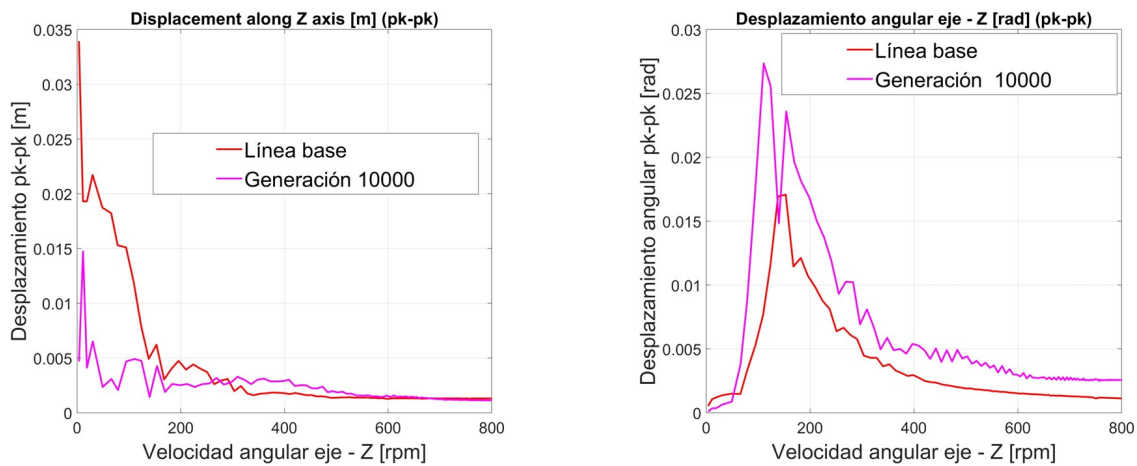


Fig. 6.12c. Desplazamiento en Z pk-pk [m]. Fig. 6.12f. Desplazamiento angular en Z pk-pk [rad].

Fig.6.12. Diagramas de Bode - Última generación vs línea base.

Los diagramas en la parte superior de la Fig. 6.12 muestran el desplazamiento transitorio y en estado estacionario para el desplazamiento traslacional y angular del centro de gravedad. Normalmente se produce un gran desplazamiento durante el estado transitorio (bajas rpm), lo que significa que el sistema cruza una frecuencia natural. Una vez que el sistema cruza esta frecuencia, el sistema intenta alcanzar la región estable donde los desplazamientos son mínimos.

Cuanto menor sea el desplazamiento, mejor será la optimización del volumen del espacio de trabajo. En la Fig. 6.12a, el desplazamiento a lo largo del eje X indica que la línea de base tiene amplitudes más bajas entre 100 rpm y 200 rpm en comparación con la última generación; sin embargo, la última generación tiene la amplitud más pequeña por encima de 400 rpm. Los desplazamientos a lo largo del eje Y (Fig. 6.12b) muestran que la última generación tiene el mismo comportamiento que la línea base. Con respecto al desplazamiento a lo largo del eje Z presentado en la Fig. 6.14c, la última generación muestra amplitudes más pequeñas en el estado de transición. Sin embargo, en el estado estacionario, los desplazamientos son similares a los de la línea de base.

Al describir el desplazamiento angular en las figuras 6.12d, 6.12e y 6.12f, dos fenómenos se presentan particularmente. Estos movimientos son de cabeceo y oscilación que ocurren durante la aceleración o el proceso transitorio. Los movimientos de cabeceo y oscilación están representados por altas amplitudes en la Fig. 6.12d y la Fig. 6.12e, respectivamente. Los movimientos de cabeceo alrededor del eje X son menores, especialmente en la última generación, pero el balanceo alrededor del eje Y es evidente a 110 rpm y 160 rpm; no obstante, estos desplazamientos angulares en estado estacionario son más pequeños que los valores iniciales. Las oscilaciones alrededor del eje Z ocurren a 110 rpm y 160 rpm para la última

generación, mientras que la línea de base ocurre solo a 150 rpm y se representa en la Fig. 6.12f.

Tal como se definió la relación de volumen, se establece un nuevo concepto como volumen del espacio de trabajo y, básicamente, esta definición comprende el volumen creado por todos los desplazamientos del centro de gravedad en todas las direcciones de los ejes.

$$WVR = \frac{W_{Vol}_{Disp}^{Baseline}}{W_{Vol}_{Disp}^{Gen,i-th}} \tag{6.5}$$

Además del volumen del espacio de trabajo, otro factor crucial para mostrar la mejora de GA es el nivel de vibración del centro de gravedad. El valor (Brüel & Kjaer) RMS (raíz cuadrada media) es generalmente el más útil porque está directamente relacionado con el contenido de energía del perfil de vibración y, por lo tanto, con la capacidad destructiva de la vibración. Los valores de vibración RMS generales y el volumen del espacio de trabajo se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Volumen de trabajo y valores de RMS de los datos en el  $CS_0(XYZ)$ .

	Relación de volumen de espacio de trabajo [m <sup>3</sup> m <sup>-3</sup> ]	Volumen de espacio de trabajo [m <sup>3</sup> ]	RMS razón			RMS		
			[m s <sup>-2</sup> ]			% [m s <sup>-2</sup> ]		
			x-eje	y-eje	z-eje	x-eje	y-eje	z-eje
Baseline	1		1	1	1			
Generación 1000	0.44	56%	0.70	0.93	0.77	30%	7%	23%

El volumen del espacio de trabajo para la última generación es 56% menor que la línea de base, por lo tanto, la excursión del centro de gravedad se ha limitado, además el nivel de vibraciones para las tres direcciones es menor que la línea de base, la mejora porcentual va del 7% al 30%.

### 6.4.3. Algoritmo genético y los efectos sobre las variables de diseño

Los efectos del algoritmo genético sobre las variables de diseño, como son las localizaciones geométricas de los componentes de la suspensión en el plano  $X - Y$  y plano  $Y - Z$  son mostrados en la Fig. 6.13.

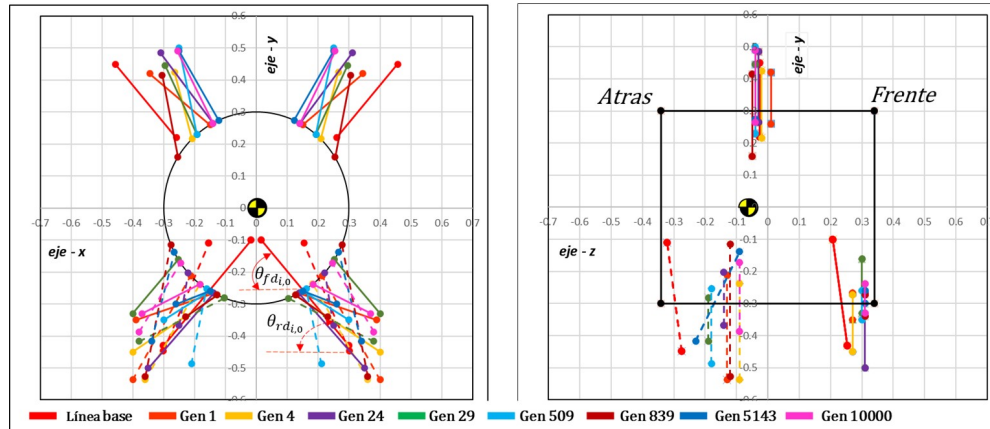


Fig. 6.13. Posición de resortes, amortiguadores frontales y posteriores durante la evolución del algoritmo genético.

Líneas continuas y líneas punteadas son usadas para diferenciar las posiciones de los amortiguadores frontales y posteriores respectivamente.

Se realiza un análisis de descomposición de cada variable, considerando la generación representada por el valor mínimo de la función de aptitud del gráfico de la Fig. 6.8.

### Ángulo de ataque, resorte y amortiguadores frontales y posteriores ( $\theta_{si,0}$ , $\theta_{fdi,0}$ , $\theta_{rdi,0}$ )

Dos posiciones en los ejes  $X$  y  $Y$  definen el ángulo de ataque del resorte y el amortiguador delantero y trasero. Como se observa en el gráfico siguiente, el ángulo del resorte tiene una tendencia a aumentar a medida que aumentan las generaciones. Un mayor ángulo de resorte montado permite una mayor coincidencia entre el centro de rigidez y el centro de gravedad (Drach et al., 2021). Por el contrario, la dirección del ángulo del amortiguador delantero mostró una tendencia a amplitudes de ángulo más bajas; El ángulo del amortiguador trasero muestra grandes variaciones en las primeras generaciones. Sin embargo, a partir de la generación 509, la tendencia es alcanzar amplitudes de ángulos menores. El GA no es concluyente sobre la amplitud del ángulo posterior, como se muestra en la Fig. 6.14.

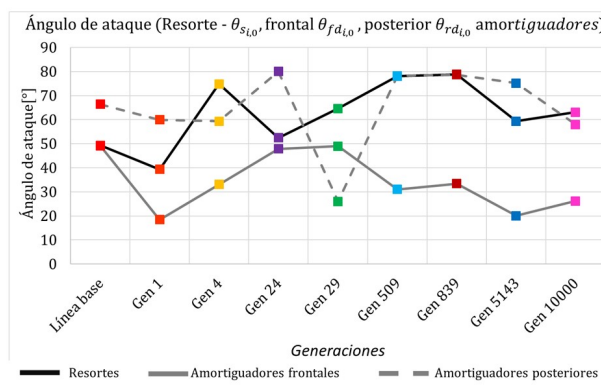


Fig. 6.14. Ángulo de ataque de resorte, amortiguadores durante la evolución del AG.

Posiciones de los resortes y amortiguadores frontal y posterior

$$\left( x_{s_{i,0}}, y_{s_{i,0}}, z_{s_{i,0}}, x_{fd_{i,0}}, y_{fd_{i,0}}, z_{fd_{i,0}}, x_{rd_{i,0}}, y_{rd_{i,0}}, z_{rd_{i,0}} \right)$$

Entre las tres posiciones del resorte,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , la posición  $Z$  muestra cambios mínimos a lo largo del proceso de optimización, lo que significa que el AG encontró esta como la posición óptima principalmente porque el centro de rigidez del sistema de soportes elásticos coincide con el centro de gravedad del sistema (Drach et al., 2021). Al mismo tiempo, las posiciones  $X$  y  $Y$  exponen fluctuaciones pero con tendencia a acercarse al centro de gravedad (Fig. 6.13 y Fig. 6.15a). A través del proceso de optimización, se presentan oscilaciones entre el centro de rigidez y el centro de gravedad (líneas azules); sin embargo, la última generación (líneas magenta) muestra que la rigidez coincide con el centro de gravedad, como se muestra en la Fig. 6.16.

Figura 6.15b. muestra que las tres posiciones del amortiguador delantero se estabilizan a medida que evoluciona el GA, las posiciones  $X - Y$  se alejan del centro de gravedad y redefinen el ángulo frontal montado a magnitudes más bajas, y la posición  $Z$  se mueve hacia el final de la tina (Fig. 6.13).

En cuanto a las posiciones del amortiguador trasero, la posición  $Z$  es la variable más afectada. Además, las posiciones  $X - Y$  presentan ligeras variaciones reflejadas en la magnitud del ángulo de ataque del amortiguador trasero; estos efectos se pueden ver en la Fig. 6.15c.

La posición  $X$  del resorte y la posición  $Z$  del amortiguador trasero son las que más han cambiado a través de las generaciones; el AG ha alineado la posición horizontal del resorte para estar cerca del centro de gravedad de la lavadora.

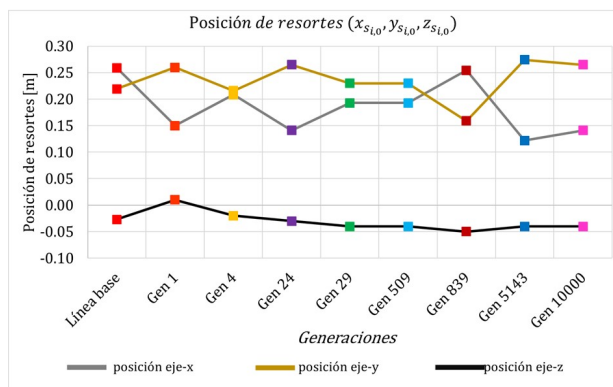


Fig. 6.15a. Posición en X, Y, Z de resortes.

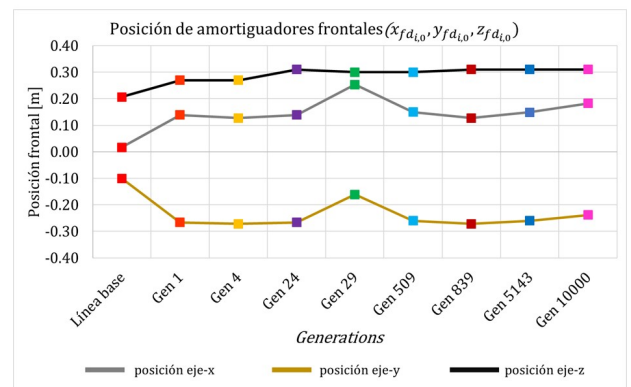


Fig. 6.15b. Posición de amortiguadores frontales.



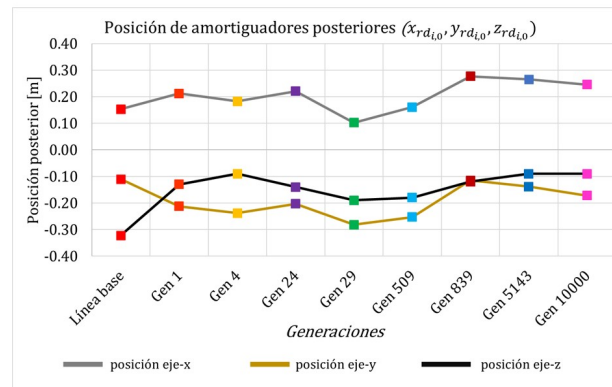


Fig. 6.15c. Posición de amortiguadores posteriores.

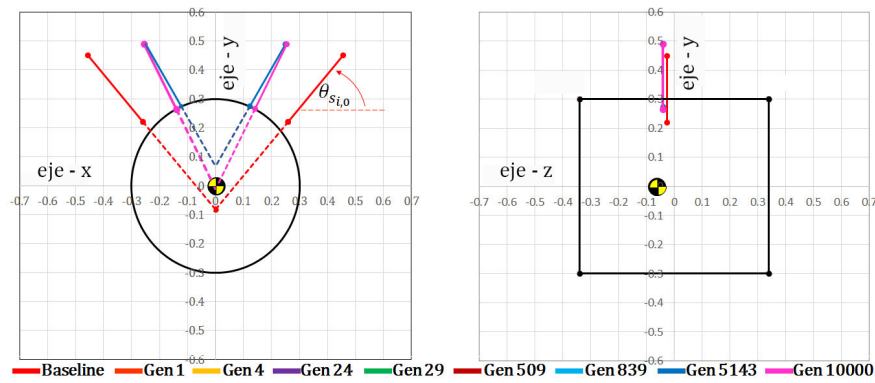


Fig. 6.16. Centro de rigidez de resorte a través de la evolución del AG.

### Rigidez de resorte y coeficiente de amortiguamiento ( $k, c$ )

El AG no define claramente la rigidez del resorte debido a la fluctuación (Fig. 6.16a); pero para el coeficiente de amortiguamiento si lo es. Esta variable mostró estabilización a partir de la 4ta generación y tuvo baja variación entre las generaciones. Claramente, el AG señala la importancia de amortiguar las fuerzas para reducir la vibración (Yalçın y Erol, 2015). Esta baja variación indica que el AG encontró y optimizó el valor del amortiguamiento, como se muestra en la Fig. 6.16b.

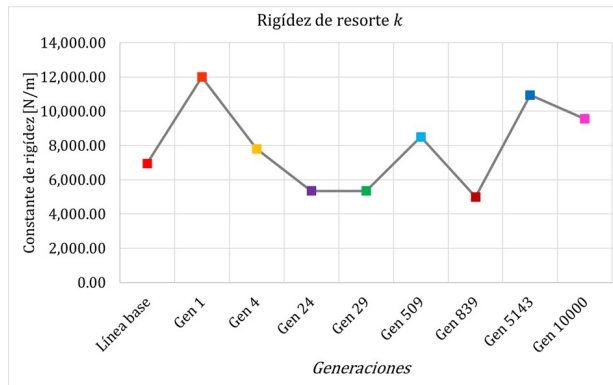


Fig. 6.16a. Rigidez del resorte a través . del AG.

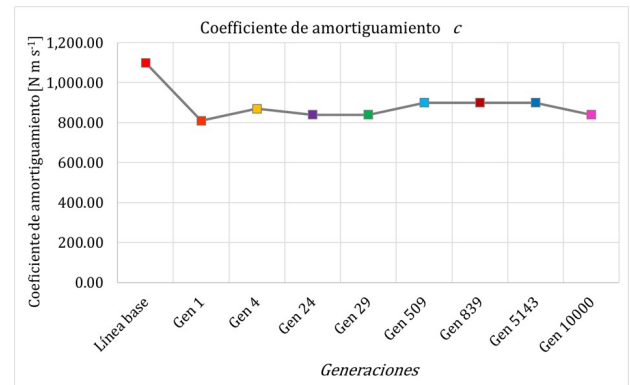


Fig. 6.16b. Coeficiente de amortiguamiento a través del AG.

# Capítulo 7

## Conclusiones

El comportamiento dinámico de la suspensión actual de una lavadora de carga frontal no solo compete a las propiedades físicas de los elementos como resorte y/o amortiguadores, son parte importante que definen el desempeño pero no describen el 100 % de su función. La posición de los elementos como resortes y amortiguadores ya sea en tierra o sobre ensambles contribuye a mejorar o degradar los desplazamientos y aceleraciones lineales o angulares de la lavadora. Todas estas características ayudaron a definir las variables de diseño para entender el comportamiento dinámico.

El modelo dinámico de 7 GDL integra las variables de diseño en un modelo que representa el comportamiento dinámico de la suspensión. Aplicando optimización a este modelo se genera una suspensión cuyo desempeño es significativamente mejor que el de la original.

La simulación de multicuerpos rígidos por medio del software Altair Motion permite verificar rápidamente los resultados del modelado dinámico.

La reducción de masa de los contrapesos disminuye los costos de componente; no obstante, incrementa las vibraciones del sistema. Como se aprecia en el capítulo 4, el decremento de masa permitió el aumento hasta en un 40 % la vibración generada en estado estable.

Por facilidad en la modelación geométrica y para demostrar que el modelo dinámico puede ser una herramienta muy útil en etapas tempranas de diseño se decidió cambiar las propiedades de los ensambles iniciales por propiedades de cilindros conservando la masa de los ensambles originales. Formas geométricas conocidas fueron empleadas y permitieron obtener rápidamente propiedades inerciales. Se conservaron las ubicaciones originales de los resortes y amortiguadores de la suspensión.

El uso de la optimización gráfica junto con la síntesis dinámica fue una herramienta básica pero muy poderosa para encontrar valores óptimos de cada variable de diseño que permitieron

mejorar el desempeño de la suspensión hasta un 10%. La creación de gráficas que describen el comportamiento cinemático de la suspensión como una función de cada variable de diseño permite al usuario final o ingeniero de diseño tener un panorama más amplio del grado de contribución de cada variable en la respuesta final. La selección de cada variable de diseño está en función de lo que se esté buscando mejorar en el rendimiento de la suspensión.

Un hallazgo importante fue encontrado durante este proceso de optimización, la velocidad angular final resultante de la solución del modelo analítico es afectada por cada una de las variables de diseño, especialmente el coeficiente de amortiguamiento, siendo necesario variar este valor para mantener la velocidad angular en un valor establecido, abriendo la oportunidad de una futura investigación en la inclusión de un par variable en el modelo dinámico analítico. Otro descubrimiento que afecta en menor forma pero es importante notar es la longitud del resorte, esta característica no explorada durante la presente investigación modifica también la velocidad angular final resultante.

Se presentó un proceso de optimización usando algoritmos genéticos y considerando la ecuación dinámica de movimiento de 7 GDL. El algoritmo genético se formuló para lograr la optimización, y junto con la función de aptitud que utilizó la técnica de "Bounding Box" se definió para minimizar su valor. El uso de la matriz de covarianza para orientar los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de gravedad de la lavadora a un nuevo sistema de coordenadas ayudó a encontrar el volumen mínimo generado por estos vectores.

Esta optimización presentó funciones multi-objetivo de forma que la optimización resultante contempló todos los aspectos cinemáticos de la suspensión. El volumen del movimiento del centro de gravedad de la lavadora generado por la optimización es 56% menor que el modelo original, por lo tanto se puede incrementar las dimensiones de ciertos componentes como tina o canasta logrando así mayor capacidad volumétrica de la lavadora.

Los niveles de vibración RMS se mejoraron en un 30% -  $X$ , 7% -  $Y$ , 23% -  $Z$ .

Se redujo el tiempo en 10% para lograr la máxima velocidad deseada de 1000 rpm.

Los resultados mostraron que las variables de diseño se estabilizan cuando se alcanzan las últimas generaciones. Estas variables de diseño están relacionadas con el resorte y el ángulo de ataque del amortiguador delantero. Se observó un caso particular para la posición  $X$  del resorte y la posición  $Z$  del amortiguador trasero; ambas variables se acercaron lo más posible a la posición estática del centro de gravedad; por el contrario, la posición  $Z$  del amortiguador delantero se ubicó en un extremo de la tina.

Las variables que tienden a una estabilidad en el algoritmo genético y en conjunto son significativas a mejorar el desempeño de la suspensión son: posición de resorte en dirección  $X$ , ángulo de ataque de resortes y amortiguadores frontales, posición de amortiguadores frontales y posteriores en la dirección  $Z$ , así como el coeficiente de amortiguamiento. El AG no fue

concluyente para definir si la rigidez del resorte es una variable significativa al desempeño de la suspensión.

Se emplearon diagrama de Bode para ver el rendimiento de cada generación  $i$ -ésima. El desplazamiento a lo largo de los ejes X, Y y Z definió el volumen del espacio de trabajo. El volumen mínimo es el mejor rendimiento de desplazamiento. El resultado de la optimización señala que el mejor resultado podría ser la generación 206 sin embargo, se realizó un análisis de aceleración y velocidad de vibración profunda para decidir qué generación fue la mejor. Se aplicó la técnica Root Mean Square para definir los niveles de vibración.

Finalmente, esta investigación define una nueva idea para optimizar las variables del sistema (por ejemplo, la suspensión de una lavadora) a partir del estado de movimiento (posición, velocidad y aceleración) utilizando una nube de datos que tiene en cuenta los estados transitorios y estables.

## Contribuciones

- 1.- Modelo dinámico analítico capaz de modelar 6 GDL y 1 GDL relacionado a la velocidad angular final del sistema.
- 2.- Identificación de parámetros que ayudan a mejorar el diseño y desempeño de una suspensión de lavadora.
- 3.- Metodología de optimización utilizando síntesis dinámica para una suspensión de lavadora.
- 4.- Proceso de diseño y optimización propuesta utilizando "Bounding Box.<sup>en</sup> Algoritmos Genéticos para una suspensión de lavadora.

## Futuras investigaciones y recomendaciones

- 1.- Inclusión de par variable en el modelo analítico de suspensión.
- 2.- Inclusión de características geométricas de resorte en modelo dinámico.
- 3.- Investigar relación de masa-inercia y su efecto en la velocidad de giro.
- 3.- Optimización de matriz de inercia de ensambles para mejorar desempeño de suspensión a través del uso del modelo dinámico.
- 4.- Incluir grados de libertad entre ensambles canasta y tina para analizar efectos de cabeceo.
- 5.- Creación de modelo dinámico capaz de incluir elementos no lineales como amortiguadores free-stroke, sellos entre ensamble-tina y marco de lavadora.
- 6.- Efectos de longitudes de resortes.
- 7.- Relación masa-inercia de contrapeso y su efecto sobre la velocidad de giro.

# Bibliografía

Agnani, A., Cannella, F., Martarelli, M., Merloni, G., (2008), Dynamic Characterization of a Washing Machines: Numerical Multi-Body Analysis and Experimental Validation, Mechanical Department, Università Politecnica delle Marche. Conference Proceeding of the Society for Experimental Mechanics Series, Ancona Italy.

Arora, J.S., (2012), Introduction to Optimum Design, 3rd ed. Oxford: Academic Press.

Bae, S., Lee, J.M., Kang, J.S., Yun, J.R., (2002) Dynamic analysis of a un automatic washing machine with a hydraulic balancer, School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University, Journal of Sound and Vibration October 2002.

Bagepalli, B.S., (1987), Dynamic Modelling of washing Machine Suspension Systems,” ASME 11th Biannual Conference of Mechanical Vibrations and Noise, Massachusetts, September 27–30 1987, pp. 13–18.

Belloli, M., Cheli, F., Resta, F., Tosi, Alessandro, (2005), Analisis teorico sperimentale per la messa a punto di un modelo di una macchin lavatrice, Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, Italia.

Boyras, P., Gündüz, M. (2013) Dynamic modeling of a horizontal washing machine and optimization of vibration characteristics using Genetic Algorithms, Journal of Mechatronics, 23(6), pp. 581-593, ISSN 0957-4158. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2013.05.006>.

Brüel & Kjaer, Measuring vibration: The complete Guide.

<https://www.bksv.com/en/knowledge/blog/vibration/measuring-vibration>

Buśkiewicz, J., Pittner, G. (2016) Reduction in vibration of a washing machine by means of a disengaging damper, Journal of Mechatronics, 33, pp. 121-135, ISSN 0957-4158.

<https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2015.11.002>.

Cavazzuti, M., (2013), Optimization Methods: From Theory to Design, Springer, Italy.

Conrad, D.C., (1994) On the fundamentals of automatic washing machine design based upon dynamic constraints, Ph.D. Thesis, Purdue University.

Conrad, D.C., Soedel, W., (1995), On the Problem of Oscillatory Walk of Automatic Washing Machines, *Journal of Sound and Vibration*, 188(3), pp. 301-314.

<https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0595>.

Department of Energy, (2021) Energy Conservation Program: Establishment of New Product Classes for Residential Clothes Washers and Consumer Clothes Dryers, [www.energy.gov](http://www.energy.gov)

Drach I, Goroshko A, Dwornicka R (2021), Design Principles of Horizontal Drum Machines with Low Vibration. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 15(2), pp.258-268. <https://doi.org/10.12913/22998624/13644>

Gen, M., Cheng. R., (2000), *Genetic Algorithm and Engineering Optimization*, Wiley, New York.

Goldberg, D.E., (1989), *Genetic Algorithms in search optimization and machine learning*, Alabama: Addison-Wesley Publishing Company, INC. Goldstein, H., (1980), *Classical Mechanics*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, MA.

Greenwood, D.T., (1988), D.T., *Principles of Dynamics*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Gyung-Hun, N., Wan-Suk, Y., Bo-Sun, C., Dong-Woo, K., Jae-Cheol, L., (2006), Matching of multibody dynamic simulation and experiment of a drum-type washing machine, Department of Mechanical and Design Engineering, Pusan National University, Division of Washing Machine LG Electronics, *Proceeding of ACMD06*.

Hai-Wei, C., Qiu-Ju, Z. (2009) Stability analyses of a vertical axis automatic washing machine without balancer, *Journal of Sound and Vibration*, 329(11), pp. 2177-2192, ISSN 0022-460X, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.12.012>.

Hai-Wei, C., Qiu-Ju, Z., (2011), Study on steady-state response of a vertical axis automatic washing machine with a hydraulic balancer using a new approach and a method for getting a smaller deflection angle, School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, *Journal of Sound and Vibration*.

Hai-Wei, C., Qiu-Ju, Z., Xiao-Qing, W., (2015), Stability and dynamic analyses of a horizontal axis washing machine with a ball balancer. *Mech. Mach. Theory* 2015, 87, 131–149.

Han, D. Y., Hong, K.S., Jeon, S.M., Chang, J.W., (2000), Device for attenuation vibration of drum type washing machine and method for controlling vibration, LG Electronics, Patent No. EP 1092801 B1.

Hassanat, A., Almohamadi, K., Alkafaween, E., Abunawas, E., Hammouri, A., Surya Prasath, V.B., (2019), Choosing Mutation and Crossover Ratios for Genetic Algorithms—A Review with a New Dynamic Approach. *Information* 2019, 10, 390.

<https://doi.org/10.3390/info10120390>

Hee-Tae, L., Weui-Bong, J., Keun-Joo, K., (2010) Dynamic modeling and analysis of drum-type washing machine, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 11, pp. 407–417. <https://doi.org/10.1007/s12541-010-0047-7>.

Cho, J.G., Park, S.J., Yoo, S.K., (2007), Balance weight in drum type washing machine and manufacturing method, LG Electronics, US Patent No. 7155942B2.

Jolliffe, I. T., (2002) *Principal Component Analysis*, 1st ed. New York: Springer.

Jonsson, J., (2003), Low-speed prebalancing for washing machines, SKF Autobalance System AB, US Patent No US6,578,225 B2.

Johnson, R.C., (1961), *Optimization design of Mechanical Elements*, Wiley and Sons, New York.

Koizumi, T., Tsujiuchi, N., Matsumoto, S., (2008) Noise Prediction of a Washing Machine considering panel vibration, Department of Engineering, Doshisha University, Hirasawa, Y., SANYIO Electric Co. Ltd, Japón.

Koizumi, T., Tsujiuchi, N.; Nishimura, Y.; Yamaoka, N., (2006), Modeling and Vibration Analysis of a Drum type Washing Machine. In *Proceedings of the 24th Modal Analysis Conference, IMAC XXIV*, St. Louis, MO, USA, 30 January–2 February 2006; Society for Experimental Mechanics, Inc.: Bethel, CT, USA, 2006; pp. 1587–1594.

Lung-Wen, T., (1999) , *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley-Interscience, ed. 1999.

Marsh, C., Taylor, S., Milliken, P., (2006), *Developing an understanding of washing machine dynamics*, Fisher and Payker.

Martin-Villalba, C., Urqui, A., Dormido, S., (2007), Implementation in Modelica of a Virtual-lab for testing washing machine designs, Departamento de Informatica y Automatica, UNED. European and modelling conference January 2007.



Mathematica (2011), Wolfram Computations meets knowledge.

MoionView, Altair.

Nygards, T., (2011), Washing Machine Design Optimization Based on Dynamic Modeling, Department of Applied Mechanics, Ph.D. Thesis, Chalmers University.

Nygards, T., Sandgren, J., (2006), Vibration control of washing machine with magnetorheological dampers, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, The 8TH International Conference on Motion and Vibration Control (MOVIC 2006).

Nygards, T., Berbyuk, V.,(2007), Dynamics of washing machines: MBS modeling and Experimental Validation, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Journal Multibody Dynamics 2007, ECOMAS Thematic Conference.

Nygards, T., Berbyuk, V., (2011), Multibody modelling and vibration dynamics analysis of washing machines, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Journal Multibody System Dynamics, <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-011-9292-5>.

Oligeo, L.P., Ismail, M.F., Renshaw, A.A., Ryan, K.F., (1994), Simulation of the dynamic behavior of GE appliances new generation vertical axis Washer, Appliance technologies, Mechanical analysis, 1994.

Ortega, M., (2008), Caracterización, Evaluación, Simulación, Optimización y Diseño de una suspensión de lavadora, Ph.D. Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.

Öztürk, M.E., Erol, H., (2010), On the dynamics of a washing machine with flexible components, Noise Control Engineering Journal, Volume 58, Number 6, 1 November 2010 , pp. 572-590(19).

Papadopoulos, E., Papadimitriou, I., (2001) Modeling, design and control of a portable washing machine during the spinning cycle, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings (Cat. No.01TH8556), 2, pp. 899-904.

doi: 10.1109/AIM.2001.936786.

Papalambros, P.Y., Wilde, D.J., (1988) Principles of Optimal Design, Modeling and Computation, New York.

Park, J., Jeong, S., Yoo, H., (2021), Dynamic Modeling of a Front-Loading Type Washing Machine and Model Reliability Investigation. Machines 2021, 9, pp. 289.

<https://doi.org/10.3390/machines9110289>.

Rao, S.S. (2009), *Engineering Optimization Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 4TH Edition, New Jersey.

Rovira, R.S., Curcoll, I.R., Romeva, C.R., (2004), Soft-mount washer extractor with unbalance compensator system, Patent No. 6783675.

Ryan, K.F., (2000), Horizontal axis clothes washing machine with balance rings, General Electric Company, US Patent No US6, 158, 257.

Sánchez-Tabuenca, B. et al., (2020), Washing Machine Dynamic Model to Prevent Tub Collision during Transient State. *Journal of Sensors (Basel)*.;20(22):6636. doi: 10.3390/s20226636. PMID: 33228133; PMCID: PMC7699337.

Sergio, A., Duarte, J., Relvas, C., Moreira, R., Freire, R., Ferreria, J.L., y Simoes, J.A., (2005), The design of a washing machine prototype, *Journal of Materials and Design*, Vol 24, pp 331 -338, 2003. User's manual for automatic washing machine, LG Electronics, Korea.

Sherwood, A.A., (1968), The Dynamic Synthesis of a Mechanism with Time-Dependent Output, *Journal of Mechanism*, Volume 3, Issue 1, Pages 35-40, [https://doi.org/10.1016/0022-2569\(68\)90028-1](https://doi.org/10.1016/0022-2569(68)90028-1).

Sowards, B., (1972), Spring-damper suspension system analysis for horizontal axis washing machines, Student Project Report-Department of Mechanical Engineering, The University of Michigan and Whirlpool Corporation.

Spong, M.W., Vidyasagar, M., (1989) , *Robot Dynamics and control*" John Wiley & Sons, ed. 1989, pp 129-133.

Stejskal, V., Valasek, M., (1996), *Kinematics and Dynamics of machinery*, Marcel Dekker, Inc. New York.

Türkay, O.S., Sümer, I.T. and Tuğcu, A.K., (1992) Modeling and Dynamic Analysis of the Suspension System of a Front-Loaded Washing Machine. In: *ASME 18th Design Automation Conference: Volume 2 — Geometric Modeling, Mechanisms, and Mechanical Systems Analysis*. Scottsdale, Arizona, USA. September 13–16, pp. 383-390. ASME. <https://doi.org/10.1115/DETC1992-0188>.

Türkay, O.S, Kiray, B., Tuğcu, A.K., Sumer, I.T., (1995), Formulation and Implementation of Parametric Optimization of a Washing Machine Suspension System, Department of Mechanical Engineering, Bogazici University, Istanbul Turkey, *Mechanical Systems and Signal Processing* 1995.

Yalçın B, Erol H (2015) Semiactive Vibration Control for Horizontal Axis Washing Machine. *Shock and Vibration*, vol. 2015, Article ID 692570, 10 pages. <https://doi.org/10.1155/2015/692570>

Wagner, F., Pfeiffer, P., Lehrstuhl, B., (1999), Dynamics of washing machines: Mechanical Model and Simulation, Technische Universität München, ASME Design Engineering Technical Conferences, Sep 1999.

Wan-Suk, Y., Jeong-Han, L., Jin-Hong, P.; Sung-Woon, J., Bo-Sun, C., Gyung-Hun, N., (2009), Damper model used in a drum-type washing machine, School of Mechanical Engineering, Pusan National University, Busan Korea; Washing Machine Division, Digital Appliance Company, LG Electronics, Gyeongman, Korea. The First Japan-Korea International Joint Symposium on Dynamics and Control. August 4-6 2009, Sapporo, Japan.