UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES CARDINALES TOPOLÓGICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

FELIPE DE JESÚS PRIETO LARA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. ALEJANDRO RÍOS HERREJÓN

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

1. Datos del alumno:	
Apellido paterno	Prieto
Apellido materno	Lara
Nombre(s)	Felipe de Jesús
Teléfono	(55) 47 89 01 57
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	316324762
2. Datos del tutor:	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Ríos
Apellido materno	Herrejón
3. Datos del sinodal 1:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ángel
Apellido paterno	Tamariz
Apellido materno	Mascarúa
4. Datos del sinodal 2:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Fidel
Apellido paterno	Casarrubias
Apellido materno	Segura
5. Datos del sinodal 3:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza
6. Datos del sinodal 4:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro Darío
Apellido paterno	Rojas
Apellido materno	Sánchez
7. Datos del trabajo escrito:	
Título	Una introducción a las funciones cardinales topológicas
Subtítulo	-
Número de páginas	96
Año	2024

«Te prometo amarte atemporalmente,
sin «para siempres» ni «mientras nos dure»
porque por fin comprendí que, en realidad,
no hay medida de tiempo que me alcance...»

Alejandro Manzanero.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi amada Wendy Jarquín, quien ha sido mi compañera de vida y mi mayor fuente de inspiración. Sin su amor incondicional y su apoyo constante, no habría alcanzado los logros que hoy celebro. Cada paso que he dado en este camino ha estado marcado por su presencia alentadora y su inquebrantable fe en mí. Gracias por ser mi roca y mi motivación más poderosa.

A mis queridos padres y hermanas, les debo todo lo que soy. Su ejemplo de sacrificio, su dedicación incansable y sus valores sólidos han sido los pilares que han guiado mi camino. Gracias por enseñarme el valor del esfuerzo, la perseverancia y el amor incondicional. Cada logro que alcanzo es también un reflejo de su amor y dedicación hacia mí.

Mi más sincero reconocimiento y gratitud al M. en C. Alejandro Ríos Herrejón, mi director de Tesis, por su excepcional dedicación, su orientación experta y su constante estímulo durante este arduo proceso. Su compromiso con mi desarrollo académico ha sido fundamental para el éxito de este trabajo y para mi crecimiento como profesional.

Agradezco de corazón a mis distinguidos sinodales, el Doctor Roberto Pichardo Mendoza, el Doctor Ángel Tamariz Mascarúa, el Doctor Alejandro Darío Rojas Sánchez, por su invaluable contribución y su orientación académica que han enriquecido significativamente este trabajo. Su experiencia y conocimiento han sido una guía invaluable en este proceso.

A mis amigos y profesores, Azif Medrano, Andrea Muñóz, David Aguirre, Isaac Guarneros, Ana Mendez, Kitzia Iriberri, M. en C. Ernesto Alejandro Vázquez Navarro, M. en C. Rafael Rojas Barbachano, Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, Dr. Pavel Ramos Martínez, M. en C. José Adrián Gallardo Quiróz, les agradezco de todo corazón por su apoyo inquebrantable, sus valiosos consejos y su amistad sincera. Su presencia en mi vida ha sido un regalo invaluable que ha hecho más ligero el camino y ha enriquecido mi experiencia académica.

A cada una de estas personas, les extiendo mi más profundo agradecimiento por formar parte de este importante capítulo en mi carrera académica y en mi vida personal.

RESUMEN

Es común que a ciertos espacios topológicos les asociemos otros objetos matemáticos para obtener información de cierta índole. En este trabajo estamos interesados en asignar números cardinales de tal manera que espacios homeomorfos tengan el mismo cardinal asociado. A estos cardinales se les conoce como «funciones cardinales topológicas».

Existen varios libros y artículos que exponen aspectos avanzados de este método. En contraste, nuestra finalidad con el presente trabajo es ofrecer un texto introductorio a esta área de la topología para que toda persona interesada en el tema pueda contar con un escrito que reúne, en nuestra opinión, los pilares fundamentales de la teoría de las funciones cardinales.

En el primer capítulo presentaremos los conceptos y resultados previos referentes a la teoría de conjuntos, la topología general y algunos principios combinatorios con el fin de utilizarlos a lo largo del texto para simplificar la exposición de los capítulos siguientes.

En el capítulo dos introduciremos el concepto de función cardinal topológica. En las primeras secciones presentaremos las funciones cardinales globales (por ejemplo, el peso, la densidad y la celularidad), las funciones cardinales locales (verbigracia, el carácter, el pseudocarácter y la estrechez) y estableceremos muchas relaciones básicas entre ellas. Luego, introduciremos la noción de «número de Šanin» y «número de Šanin débil» para un espacio topológico y mostraremos que estos números cardinales están íntimamente relacionados con la densidad y la celularidad. Este capítulo terminará con un par de diagramas en los que resumiremos gran parte de las relaciones expuestas entre las funciones cardinales globales y la funciones cardinales locales.

En el capítulo tres nos centraremos en el comportamiento de las funciones cardinales en los productos topológicos. Expondremos que, por un lado, ciertas funciones cardinales como el peso, la densidad y el carácter se comportan bien al subir a los productos, mientras que, por otro lado, algunas funciones cardinales como el grado hereditario de Lindelöf, la densidad hereditaria y la estrechez necesitan condiciones adicionales para actuar de la manera esperada. Terminaremos el capítulo con un par de secciones en las que detallaremos

la independencia de un enunciado que denominaremos como «$\mathsf{C}(\omega_1)$» con respecto a los axiomas de ZFC.

Finalmente, en el capítulo cuatro presentaremos diez ejemplos de espacios topológicos y calcularemos las funciones cardinales expuestas en este trabajo con el objetivo de exhibir las técnicas básicas que se pueden emplear para resolver problemas relacionados con esta área.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

El propósito de este capítulo es introducir la terminología y notación que utilizaremos, así como algunos resultados básicos que nos auxiliarán en el desarrollo de este trabajo. Además, en la última sección estableceremos algunos principios combinatorios que emplearemos constantemente en los capítulos siguientes.

1.1 Teoría de conjuntos

Nuestro libro base de teoría de conjuntos será [10]. Cualquier concepto de índole conjuntista que no sea definido explícitamente aquí deberá entenderse como indica dicho escrito.

El símbolo ω representará simultáneamente al primer ordinal infinito y al primer cardinal infinito. Diremos que un conjunto es *numerable* si es finito o está en correspondencia biyectiva con ω. Además, ω_1 será a la vez el primer ordinal no numerable y el primer cardinal no numerable.

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ a los conjuntos de los números naturales positivos, de los números enteros, de los números racionales y de los números reales, respectivamente. También, utilizaremos el símbolo $\mathfrak{c}$ para hablar de la cardinalidad del conjunto $\mathbb{R}$, es decir, $\mathfrak{c} = 2^\omega$.

Si κ es un número cardinal, κ^+ será el primer cardinal estrictamente mayor que κ. Diremos que κ es un *cardinal sucesor* si existe un cardinal λ con $\kappa = \lambda^+$. Adicionalmente, la sucesión de cardinales $\{\beth_n(\kappa) : n < \omega\}$ estará definida recursivamente como sigue: $\beth_0(\kappa) := \kappa$ y $\beth_{n+1}(\kappa) := 2^{\beth_n(\kappa)}$, siempre que $n < \omega$.

La *cofinalidad* de un cardinal κ, denotada mediante $\mathrm{cf}(\kappa)$, será el mínimo ordinal α para el cual existe una función $f : \alpha \to \kappa$ tal que para toda $\xi < \kappa$, existe $\eta < \alpha$ con $\xi \leqslant f(\eta)$. Con esta notación, un cardinal infinito κ será llamado *regular* si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Por ejemplo, ω es un cardinal regular y todo cardinal sucesor de un cardinal infinito también lo es.

Dado un conjunto E, los símbolos $P(E)$ y $|E|$ denotarán, respectivamente, el conjunto potencia y la cardinalidad de E. Similarmente, E^2 representará el producto cartesiano $E \times E$. Además, si κ es un número cardinal, utilizaremos los símbolos $[E]^{\leqslant \kappa}$, $[E]^{<\kappa}$ y $[E]^{\kappa}$ para hablar, correspondientemente, de los conjuntos

$$\{A \subseteq E \,:\, |A| \leqslant \kappa\}, \quad \{A \subseteq E \,:\, |A| < \kappa\} \quad \text{y} \quad [E]^{\leqslant \kappa} \setminus [E]^{<\kappa}.$$

Fijemos una familia $\mathscr{A} \subseteq P(E)$. Dado $x \in \bigcup \mathscr{A}$, el símbolo $\mathscr{A}(x)$ denotará la colección $\{A \in \mathscr{A} \,:\, x \in A\}$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una *cubierta* de E si sucede que $E = \bigcup \mathscr{A}$. Además, una cubierta $\mathscr{A}$ será llamada *minimal* si para cualquier $A \in \mathscr{A}$ se satisface que la colección $\mathscr{A} \setminus \{A\}$ no es cubierta de E.

Si $x \in E$, $B \subseteq E$ y $\mathscr{A}$ es una cubierta de E, el *orden de x con respecto a $\mathscr{A}$* será el cardinal $\operatorname{ord}(x, \mathscr{A}) := |\mathscr{A}(x)|$. También, las *estrellas de x y B con respecto a $\mathscr{A}$* serán los conjuntos $\operatorname{st}(x, \mathscr{A}) := \bigcup \mathscr{A}(x)$ y $\operatorname{st}(B, \mathscr{A}) := \bigcup \{\operatorname{st}(x, \mathscr{A}) \,:\, x \in B\}$, respectivamente. Con esta notación, observemos que $\operatorname{st}(B, \mathscr{A}) = \bigcup \{A \in \mathscr{A} \,:\, B \cap A \neq \emptyset\}$.

Una cubierta $\mathscr{A}$ de E es *separante* si para cualquier $x \in E$ se satisface la relación $\bigcap \mathscr{A}(x) = \{x\}$. Notemos que $\mathscr{A}$ es una cubierta separante de E si y sólo si para cualesquiera $x, y \in E$ distintos existe $A \in \mathscr{A}$ con $x \in A$ y $y \notin A$.

Por otro lado, una familia de conjuntos $\mathscr{A}$ será llamada un Δ-*sistema* si existe un conjunto r de tal manera que, para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$, la condición $A \neq B$ implica que $A \cap B = r$. En este caso, nos referiremos a r como la *raíz* del sistema.

Finalmente, $e : \mathscr{A} \to \bigcup \mathscr{A}$ será nombrada una *función de elección* si para cualquier conjunto $A \in \mathscr{A}$ se verifica que $e(A)$ es un elemento de A. De este modo, el Axioma de Elección es el enunciado: «Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos admite una función de elección».

Un *conjunto parcialmente ordenado* será una pareja $(P, \leqslant)$, donde P es un conjunto y $\leqslant$ es una relación binaria en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por ejemplo, cualquier conjunto equipado con la contención directa es un conjunto parcialmente ordenado.

Fijemos un subconjunto Q de un conjunto parcialmente ordenado P. Diremos que

$x \in P$ es una *cota superior de* Q si $y \leqslant x$ para todo $y \in Q$. Por otra parte, $x \in P$ será llamado un *elemento maximal de* P si no existe $y \in P$ distinto de x tal que $x \leqslant y$.

Por último, una *cadena* en un conjunto parcialmente ordenado será un subconjunto formado por elementos que son comparables dos a dos.

1.2 Topología general

El texto de topología general que utilizaremos como referencia será [2]. Todo concepto de carácter topológico que no sea definido explícitamente aquí deberá entenderse como indica ese texto.

A lo largo de este trabajo y a menos que se indique lo contrario, X siempre será un espacio topológico no vacío. Además, denotaremos por τ_X a la colección de subconjuntos abiertos de X. Similarmente, utilizaremos los símbolos τ_X^* y τ_X^+ para hablar, respectivamente, de las colecciones $\{X \setminus U : U \in \tau_X\}$ y $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$.

Diremos que X es un espacio T_3 si tiene la propiedad de Hausdorff y es regular. De manera semejante, diremos que X es T_4 si es un espacio de Hausdorff y es normal.

Si Y es un subespacio de X y A es un subconjunto de Y, emplearemos los símbolos $\operatorname{cl}_Y A$ y $\operatorname{cl}_X A$ para hablar de la cerradura de A en los espacios Y y X, respectivamente. Cuando no haya riesgo de confusión escribiremos $\overline{A}$ en vez de $\operatorname{cl}_X A$. Análogamente, denotaremos por $\operatorname{int}_Y A$ y $\operatorname{int}_X A$ al interior de A en los espacios Y y X, correspondientemente, y omitiremos el subíndice si no hay ambigüedad.

Un subconjunto U de X será un *abierto regular* si $U = \operatorname{int} \overline{U}$. Denotaremos por $\mathsf{RO}(X)$ a la colección $\{U \in \tau_X : U = \operatorname{int} \overline{U}\}$. Además, diremos que X es *semirregular* si $\mathsf{RO}(X)$ es una base para su topología. Por ejemplo, todos los espacios regulares son semirregulares.

Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$. Diremos que x es un *punto de acumulación* (respectivamente, *punto de acumulación completo*) de A si para cada $U \in \tau_X(x)$ se satisface que $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (resp., $|U \cap A| = |A|$). Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A lo denotaremos por A'.

Diremos que un subconjunto D de X es *discreto* si D es un espacio discreto con la topología que hereda de X. De esta forma, D es discreto si y sólo si para cada $x \in D$ existe $U \in \tau_X$ con $U \cap D = \{x\}$.

Para un cardinal κ denotaremos por $D(\kappa)$ al conjunto κ equipado con la topología discreta. Además, si κ es infinito, el *cubo de Cantor de peso* κ, denotado por $D(2)^\kappa$, será el espacio que se obtiene al tomar el producto de κ-copias del espacio $D(2)$. También, utilizaremos el símbolo $\beta\omega$ para hablar de la *compactación de Stone-Čech* del espacio $D(\omega)$.

Por otro lado, la *recta de Sorgenfrey*, $\mathbb{S}$, será el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología generada por la base $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a < b\}$. Finalmente, la *doble flecha de Alexandroff-Urysohn*, $\mathbb{A}$, será el conjunto $[0, 1] \times \{0, 1\}$ equipado con la topología inducida por el orden lexicográfico.

Fijemos un espacio topológico X. Diremos que X es *segundo numerable* si admite una base numerable. Por otro lado, X será llamado *separable* si posee un subconjunto denso y numerable. Cuando toda cubierta abierta de X admita una subcubierta numerable, diremos que X es un *espacio de Lindelöf*. Además, diremos que X es *hereditariamente separable* si cada subespacio de éste es separable. Similarmente, X será *hereditariamente Lindelöf* si todos sus subespacios tienen la propiedad de Lindelöf.

Una colección ajena por pares formada por subconjuntos abiertos y no vacíos de un espacio topológico X será llamada una *familia celular* en X. Diremos que X satisface la *condición de la cadena contable* (abreviado regularmente como *ccc*) si todas las familias celulares en X son numerables.

Demostraremos a continuación algunos resultados sencillos para familiarizarnos con estos conceptos.

Lema 1.1. *Un espacio X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si para cualquier $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$ existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$ de tal modo que $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$.*

Demostración. Si X es hereditariamente Lindelöf y $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$, entonces $Y := \bigcup \mathscr{U}$ es un espacio de Lindelöf y $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de Y, lo cual implica la existencia de $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$ con $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$.

Por otra parte, cuando X no es hereditariamente Lindelöf, existen un subespacio Y de X y una cubierta $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$ de Y tal que, para toda $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$, no es cierto que $Y \subseteq \bigcup \mathscr{V}$. Por lo tanto, no existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$ que satisfaga la igualdad $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$. $\square$

Lema 1.2. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Todo espacio topológico segundo numerable es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf.*

2. *Cualquier espacio separable tiene la* ccc.

Demostración. Comencemos por verificar el inciso (1). Fijemos un espacio segundo numerable X, un subespacio no vacío Y de X y una base numerable $\mathscr{B}$ de X. Nuestro objetivo es ver que Y es separable. En primer lugar, observemos que la colección $\mathscr{C} := \{B \cap Y : B \in \mathscr{B} \ \wedge \ B \cap Y \neq \emptyset\}$ satisface las relaciones $1 \leqslant |\mathscr{C}| \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant \omega$. De esta manera, $\mathscr{C}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y, por ende, existe una función de elección $e : \mathscr{C} \to \bigcup \mathscr{C}$.

Afirmación. $D := \operatorname{img}(e)$ es un subconjunto denso y numerable de Y.

Notemos primero que las condiciones $\bigcup \mathscr{C} \subseteq Y$ y $|D| \leqslant |\mathscr{C}| \leqslant \omega$ implican que D es un subconjunto numerable de Y. Ahora, si $V \in \tau_Y^+$ y $y \in V$, entonces existe $U \in \tau_X$ tal que $V = U \cap Y$. Luego, como $y \in U$, existe $B \in \mathscr{B}$ de tal modo que $y \in B \subseteq U$. De esta manera, $y \in B \cap Y$ y así, $e(B \cap Y) \in V \cap D$. Por lo tanto, Y es un espacio separable.

En segundo lugar, con el lema 1.1 en mente fijemos $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$. Para cada $x \in \bigcup \mathscr{U}$ sean $U_x \in \mathscr{U}$ y $B_x \in \mathscr{B}$ tales que $x \in B_x \subseteq U_x$. Además, para cada conjunto B_x fijemos $U(B_x) \in \mathscr{U}$ con $B_x \subseteq U(B_x)$. Resulta que si $\mathscr{V} := \{U(B_x) : x \in X\}$, entonces $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant \omega}$ y $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$; en consecuencia, X es hereditariamente Lindelöf.

Continuemos con el inciso (2). Fijemos un espacio separable X y un subconjunto denso D de X con $|D| \leqslant \omega$. De este modo, si $\mathscr{U}$ es una familia celular en X, entonces la colección $\mathscr{V} := \{U \cap D : U \in \mathscr{U}\}$ admite una función de elección $e : \mathscr{V} \to \bigcup \mathscr{V}$. Ahora, como $\mathscr{U}$ es una familia celular, sucede que elementos distintos de $\mathscr{U}$ producen conjuntos ajenos al intersectarlos con D; en particular, $|\mathscr{U}| \leqslant |\mathscr{V}|$. Además, como $\bigcup \mathscr{V} \subseteq D$ y $\mathscr{V}$ es ajena por pares, $e[\mathscr{V}] \subseteq D$ y e es inyectiva. En virtud de lo anterior concluimos que $|\mathscr{U}| \leqslant |\mathscr{V}| \leqslant |D| \leqslant \omega$. □

En general, puede suceder que los espacios topológicos únicamente posean familias celulares finitas, sin embargo, en el caso de los espacios de Hausdorff infinitos, demostraremos que siempre podemos encontrar familias celulares infinitas.

Proposición 1.3. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si Y es un espacio de Hausdorff infinito, entonces existen $y \in Y$ y $V \in \tau_Y(y)$ de tal modo que $Y \setminus \overline{V}$ es infinito.*

2. *Todo espacio de Hausdorff infinito admite una familia celular infinita.*

Demostración. Para verificar el inciso (1) fijemos $y \in Y$. En primer lugar, si existe $V \in \tau_Y(y)$ con $Y \setminus \overline{V}$ infinito, entonces y y V tienen las características que necesitamos. En caso contrario, la propiedad de Hausdorff permite hallar $U \in \tau_Y(y)$ con $Y \setminus \overline{U} \neq \emptyset$. De este modo, $Y \setminus \overline{U}$ es finito y, por ende, discreto. Tomemos $y_0 \in Y \setminus \overline{U}$ y definamos $V := \{y_0\}$. Así, como $Y \setminus \overline{U}$ es un subconjunto abierto del espacio de Hausdorff Y, tenemos que V es un subconjunto abierto de Y. Por último, notemos que las igualdades $Y \setminus \overline{V} = Y \setminus V = Y \setminus \{y_0\}$ garantizan que $Y \setminus \overline{V}$ es infinito.

Para la prueba del inciso (2) fijemos un espacio de Hausdorff infinito X.

Afirmación. Existen colecciones $\{x_n : n < \omega\} \subseteq X$ y $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau_X$ de tal modo que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $n < \omega$.

(1) $x_n \in U_n \subseteq X \setminus \bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k$.

(2) $X \setminus \bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k$ es infinito.

Por recursión, supongamos que para algún $n < \omega$ hemos construido los conjuntos $\{x_k : k < n\} \subseteq X$ y $\{U_k : k < n\} \subseteq \tau_X$ con las propiedades (1) y (2). Definamos $Y := X \setminus \bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k$ y notemos que el inciso (2) de la recursión garantiza que Y es infinito y T_2. Ahora, por el inciso (1) de esta proposición, existen $x_n \in Y$ y $U_n \in \tau_Y(x_n)$ tales que $|Y \setminus \mathrm{cl}_Y U_n| \geqslant \omega$; en especial, como $Y \in \tau_X$, también $U_n \in \tau_X$. Finalmente, las relaciones

$$\begin{aligned} Y \setminus \mathrm{cl}_Y U_n &= Y \setminus (Y \cap \mathrm{cl}_X U_n) = Y \setminus \mathrm{cl}_X U_n \\ &= \Big(X \setminus \textstyle\bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k\Big) \setminus \mathrm{cl}_X U_n = X \setminus \textstyle\bigcup_{k<n+1} \mathrm{cl}_X U_k, \end{aligned}$$

muestran que, en efecto, $x_n \in U_n \subseteq X \setminus \bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k$ y $X \setminus \bigcup_{k<n+1} \mathrm{cl}_X U_k$ es infinito.

La Afirmación provee de una familia $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau_X^+$ tal que, para cualesquiera $m < n < \omega$, se satisfacen las inclusiones $U_n \subseteq X \setminus \bigcup_{k<n} \mathrm{cl}_X U_k \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U_m \subseteq X \setminus U_m$. De esta manera, $\{U_n : n < \omega\}$ es una familia celular infinita en X. □

Lema 1.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio topológico X.*

1. *X es ccc.*

2. *Para cada familia $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tau_X^+$ existen $\alpha < \beta < \omega_1$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.*

Demostración. Para verificar que (1) implica (2), supongamos que hay $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tau_X^+$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ para cualesquiera $\alpha < \beta < \omega_1$. De este modo, $\left|\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}\right| = \omega_1$ y, por ende, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular que no es numerable.

Continuemos ahora con (2) implica (1) y supongamos que X no cumple la condición de la cadena contable. Entonces, si $\mathscr{U}$ es una familia celular no numerable en X, podemos extraer un subconjunto $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \in [\mathscr{U}]^{\omega_1}$ enumerado fielmente (esto es, sin repeticiones). De inmediato, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un subconjunto de τ_X^+ que satisface la propiedad $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$. □

La recta de Sorgenfrey y la doble flecha de Alexandroff-Urysohn han demostrado ser ejemplos importantes de espacios topológicos con el pasar los años. En este trabajo los estudiaremos a través de sus funciones cardinales topológicas. Para finalizar este apartado del texto estableceremos algunas propiedades básicas y conexiones estrechas entre los espacios $\mathbb{A}$ y $\mathbb{S}$.

Proposición 1.5. *El espacio $\mathbb{S}$ es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Empecemos por verificar que $\mathbb{S}$ es hereditariamente separable.

Afirmación. Para cada subconjunto A de $\mathbb{S}$ se satisface que $\left|\mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \mathrm{cl}_{\mathbb{S}} A\right| \leqslant \omega$.

Sean A un subconjunto de $\mathbb{S}$ y $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \mathrm{cl}_{\mathbb{S}} A$. La relación $x \notin \mathrm{cl}_{\mathbb{S}} A$ produce $U \in \tau_{\mathbb{S}}(x)$ tal que $U \cap A = \emptyset$. Consideremos a $n_x := \min\left\{n < \omega : [x, x + 2^{-n}) \subseteq U\right\}$ y $b_x := x + 2^{-n_x}$. Es claro que $[x, b_x)$ es un elemento de $\tau_{\mathbb{S}}(x)$ con $[x, b_x) \cap A = \emptyset$. Lo que sigue es demostrar que $[x, b_x) \cap [y, b_y) = \emptyset$, siempre que $x, y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \mathrm{cl}_{\mathbb{S}} A$ son distintos.

En efecto, si $x, y \in \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A$ cumplen $x \neq y$ y resulta que $[x, b_x) \cap [y, b_y) \neq \emptyset$, entonces hay $z \in [x, b_x) \cap [y, b_y)$. Observemos que si $x < y$, entonces $x < y \leqslant z < b_x$ y, por lo tanto, obtenemos la contradicción $\emptyset \neq (x, b_x) \cap A \subseteq [x, b_x) \cap A = \emptyset$. Similarmente, la condición $y < x$ implica el absurdo $[y, b_y) \cap A \neq \emptyset$.

De este modo, $\big\{[x, b_x) : x \in \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A\big\}$ es una familia celular en el espacio separable $\mathbb{S}$. Luego, como el primer inciso del lema 1.2 garantiza que todo espacio separable tiene la ccc, inferimos que $\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A$ es numerable.

Ahora fijemos $Y \subseteq \mathbb{S}$ y comprobemos que Y es separable. En vista de que $\mathbb{R}$ es segundo numerable, el lema 1.2 indica que Y, visto como subespacio de $\mathbb{R}$, es un espacio separable y, por ende, existe $A_0 \in [Y]^{\leqslant\omega}$ tal que $Y = Y \cap \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A_0$.

Afirmación. $A := A_0 \cup \big(Y \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0\big)$ es un subconjunto denso y numerable del subespacio Y de $\mathbb{S}$.

Notemos primero que

$$A = A_0 \cup \Big(Y \cap (\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A_0 \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0)\Big) = Y \cap \Big(A_0 \cup (\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} A_0 \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0)\Big).$$

En virtud de la Afirmación y de la elección de A_0, obtenemos que $A \in [Y]^{\leqslant\omega}$. Además, las relaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}_Y A &= \operatorname{cl}_Y \Big(A_0 \cup (Y \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0)\Big) = \operatorname{cl}_Y A_0 \cup \operatorname{cl}_Y (Y \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0) \\ &= (Y \cap \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0) \cup \Big(Y \cap \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} (Y \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0)\Big) = Y \cap \Big(\operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0 \cup \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} (Y \setminus \operatorname{cl}_{\mathbb{S}} A_0)\Big) = Y,\end{aligned}$$

garantizan que A es denso en Y. Esto muestra que Y es un espacio separable y, por ende, concluye la prueba de que $\mathbb{S}$ es hereditariamente separable.

Concentrémonos ahora en argumentar que $\mathbb{S}$ es hereditariamente Lindelöf. Con el lema 1.1 en mente, tomemos una colección $\mathscr{U} \subseteq \tau_{\mathbb{S}}$. De este modo, al considerar la familia $\{\operatorname{int}_{\mathbb{R}} U : U \in \mathscr{U}\}$, el lema 1.1 y el lema 1.2(1) producen $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \mathscr{U}$ tal que

$$\bigcup\{\operatorname{int}_{\mathbb{R}} U : U \in \mathscr{U}\} = \bigcup\{\operatorname{int}_{\mathbb{R}} U_n : n < \omega\}.$$

Definamos $A := (\bigcup \mathscr{U}) \setminus \bigcup\{\operatorname{int}_{\mathbb{R}} U \,:\, U \in \mathscr{U}\}$ y observemos que las relaciones

$$\bigcup\{\operatorname{int}_{\mathbb{R}} U_n \,:\, n < \omega\} \subseteq \bigcup\{\operatorname{int}_{\mathbb{S}} U_n \,:\, n < \omega\} = \bigcup\{U_n \,:\, n < \omega\},$$

implican que $(\bigcup \mathscr{U}) \setminus \bigcup\{U_n \,:\, n < \omega\}$ está contenido en A.

Afirmación. A es numerable.

Para cada $x \in A$ existen $U_x \in \mathscr{U}$ y $\varepsilon_x > 0$ con $[x, x + \varepsilon_x) \subseteq U_x$. Así, como $(x, x + \varepsilon_x) \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{R}} U_x$, deducimos que $(x, x + \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$. Mostraremos a continuación que para cualesquiera $x, y \in A$ distintos se satisface que $(x, x+\varepsilon_x)$ y $(y, y+\varepsilon_y)$ son ajenos. Efectivamente, si $x, y \in A$ cumplen $x \neq y$ y sucede que $(x, x+\varepsilon_x) \cap (y, y+\varepsilon_y) \neq \emptyset$, existe $z \in (x, x+\varepsilon_x) \cap (y, y+\varepsilon_y)$. Ahora, si $x < y$, entonces $x < y < z < x + \varepsilon_x$ y, por lo tanto, $(x, x+\varepsilon_x) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Del mismo modo, a partir de la condición $y < x$ inferimos la contradicción $(y, y+\varepsilon_y) \cap A \neq \emptyset$.

De esta forma, $\{(x, x+\varepsilon_x) \,:\, x \in A\}$ es una familia celular en el espacio separable $\mathbb{R}$ y, por ende, el lema 1.2(2) garantiza que A es numerable. Así, la familia $\mathscr{V} := \{U_n \,:\, n < \omega\} \cup \{U_x \,:\, x \in A\}$ es un elemento de $[\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$ y $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$. Finalmente, el lema 1.1 permite concluir que $\mathbb{S}$ es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Proposición 1.6. *Si $i < 2$, entonces $\mathbb{S}$ es homeomorfo al subespacio $(0,1) \times \{i\}$ de $\mathbb{A}$.*

Demostración. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y suprayectiva. Claramente, la función $g : (0,1) \times \{1\} \to \mathbb{S}$ definida como $g(\langle x, 1\rangle) := f(x)$ es biyectiva. Además, como para cualesquiera $0 < a < b < 1$ se satisface la igualdad $g[[a,b) \times \{1\}] = [f(a), f(b))$, deducimos que g es abierta y continua; en consecuencia, $(0,1) \times \{1\}$ y $\mathbb{S}$ son homeomorfos. Un argumento similar muestra que la asignación $\langle x, 0\rangle \mapsto -f(x)$ es un homeomorfismo entre $(0,1) \times \{0\}$ y $\mathbb{S}$. $\square$

Proposición 1.7. *$\mathbb{A}$ es un espacio hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Consideremos los subespacios

$$X_0 := (0,1) \times \{0\}, \quad X_1 := (0,1) \times \{1\} \quad \text{y} \quad X_2 := \{\langle i, j\rangle : i < 2 \ \wedge\ j < 2\}.$$

Evidentemente, $\mathbb{A}$ se puede recuperar como la unión ajena de la familia $\{X_k : k < 3\}$. Además, las proposiciones 1.5 y 1.6 combinadas con el hecho de que X_2 es finito garantizan que, para cualquier $k < 3$, el espacio X_k es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf. Emplearemos estos hechos para demostrar que $\mathbb{A}$ también posee estas características.

Comencemos por argumentar que $\mathbb{A}$ es hereditariamente separable. Si A es un subconjunto de $\mathbb{A}$ y para toda $k < 3$ utilizamos que X_k es hereditariamente separable para hallar $D_k \in [A \cap X_k]^{\leqslant\omega}$ con D_k denso en $A \cap X_k$, entonces un argumento rutinario muestra que $D := \bigcup\{D_k : k < 3\}$ es un subconjunto denso y numerable del espacio A. En suma, todos los subespacios de $\mathbb{A}$ son separables.

Para terminar demostremos que $\mathbb{A}$ es hereditariamente Lindelöf. Con el lema 1.2 presente, fijemos $\mathscr{U} \subseteq \tau_{\mathbb{A}}$ y definamos $\mathscr{U}_k := \{U \cap X_k : U \in \mathscr{U}\}$ para cada $k < 3$. Como para toda $k < 3$ se satisface la inclusión $\mathscr{U}_k \subseteq \tau_{X_k}$ y X_k es hereditariamente Lindelöf, el lema 1.2 produce una colección $\mathscr{V}_k \in [\mathscr{U}_k]^{\leqslant\omega}$ de tal forma que $\bigcup \mathscr{U}_k = \bigcup \mathscr{V}_k$.

Ahora, para cualesquiera $k < 3$ y $V \in \mathscr{V}_k$ sea $U(V) \in \mathscr{U}$ con $U(V) \cap X_k = V$. Con esta notación, es claro que $\mathscr{V} := \{U(V) : k < 3 \ \wedge \ V \in \mathscr{V}_k\}$ es un elemento de $[\mathscr{U}]^{\leqslant\omega}$. Finalmente, con el objetivo de probar la relación $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{V}$, tomemos $x \in \bigcup \mathscr{U}$ y $k < 3$ tal que $x \in X_k$. De este modo, x es un elemento de $\bigcup \mathscr{U}_k$ y, por lo tanto, la igualdad $\bigcup \mathscr{U}_k = \bigcup \mathscr{V}_k$ implica la existencia de $V \in \mathscr{V}_k$ con $x \in V$. Así, $x \in U(V)$, lo cual muestra que $x \in \bigcup \mathscr{V}$. En consecuencia, cada subespacio de $\mathbb{A}$ tiene la propiedad de Lindelöf. $\square$

En los ejemplos 4.7 y 4.9 expondremos más propiedades de los espacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{A}$ relacionadas con sus funciones cardinales topológicas.

1.3 Principios combinatorios

En esta sección probaremos algunos resultados de combinatoria de conjuntos que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores. El primer resultado que presentaremos es conocido como el Lema del Δ-sistema.

Lema 1.8. *Sea κ un cardinal regular y no numerable. Si $\mathscr{A}$ es una familia de cardinalidad κ formada por conjuntos finitos, entonces $\mathscr{A}$ admite un Δ-sistema de cardinalidad κ.*

Demostración. Primero, como $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa > \omega$ y $|\mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}| = \kappa$, existen $1 \leqslant n < \omega$ y $\mathscr{D} \in [\mathscr{A}]^\kappa$ con $|D| = n$ para cualquier $D \in \mathscr{D}$. Probaremos mediante inducción sobre n que existe un Δ-sistema de cardinalidad κ contenido en $\mathscr{D}$. Si $n = 1$, entonces $\mathscr{D}$ es un Δ-sistema con raíz vacía. Ahora supongamos que el resultado es válido para n y consideremos los siguientes dos casos.

Caso 1. Existe $x \in \bigcup \mathscr{A}$ con $|\mathscr{D}(x)| = \kappa$.

En estas condiciones, la familia $\mathscr{E} := \{A \setminus \{x\} \,:\, A \in \mathscr{D}(x)\}$ tiene cardinalidad κ y todos sus elementos son de tamaño n. Por la hipótesis de inducción, existe un Δ-sistema $\mathscr{F} \in [\mathscr{E}]^\kappa$ con alguna raíz r. De este modo, la colección $\{F \cup \{x\} \,:\, F \in \mathscr{F}\}$ pertenece a $[\mathscr{D}]^\kappa$ y es un Δ-sistema con raíz $r \cup \{x\}$.

Caso 2. Para cada $x \in \bigcup \mathscr{A}$ sucede que $|\mathscr{D}(x)| < \kappa$.

Si $S \in [\bigcup \mathscr{A}]^{<\kappa}$, la familia $\{A \in \mathscr{D} \,:\, A \cap S \neq \emptyset\} = \bigcup \{\mathscr{D}(x) \,:\, x \in S\}$ tiene cardinalidad menor a κ por la regularidad de éste; en especial, hay $A \in \mathscr{D}$ con $A \cap S = \emptyset$. Así, es posible construir recursivamente $\{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\} \subseteq \mathscr{D}$ tal que $A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right) = \emptyset$, siempre que $\alpha < \kappa$. En consecuencia, $\{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}$ es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$. □

Corolario 1.9. *Si κ es un cardinal regular no numerable y $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una colección de conjuntos finitos, entonces existen un conjunto r y $J \in [\kappa]^\kappa$ tales que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$, la condición $\alpha \neq \beta$ implica que $A_\alpha \cap A_\beta = r$.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1. $|\{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}| < \kappa$.

La regularidad de κ garantiza que la función $f : \kappa \to \{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}$ dada por $f(\alpha) := A_\alpha$ tiene una fibra de tamaño κ; es decir, existe $\gamma < \kappa$ tal que $\left|f^{-1}\{A_\gamma\}\right| = \kappa$. Por esta razón, $J := f^{-1}\{A_\gamma\}$ y $r := A_\gamma$ cumplen las propiedades deseadas.

Caso 2. $|\{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}| = \kappa$.

Por el lema 1.8 existen $\mathscr{A} \in [\{A_\alpha \,:\, \alpha < \kappa\}]^\kappa$ y un conjunto r tales que, para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$, la condición $A \neq B$ implica que $A \cap B = r$. Claramente, $I := \{\alpha < \kappa \,:\, A_\alpha \in \mathscr{A}\}$ verifica la igualdad $\mathscr{A} = \{A_\alpha \,:\, \alpha \in I\}$. Lo que sigue es definir una relación de equivalencia $\sim$ en I mediante la regla: $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $A_\alpha = A_\beta$. Fijemos una función de elección $e : I/_{\sim} \to I$ y sea $J := e[I/_{\sim}]$. En estas circunstancias, un argumento rutinario muestra que $\mathscr{A} = \{A_\alpha \,:\, \alpha \in J\}$ y $J \in [\kappa]^\kappa$. Más aún, para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$ distintos se verifica que $A_\alpha \neq A_\beta$ y, por ende, que $A_\alpha \cap A_\beta = r$. $\square$

El siguiente principio combinatorio tuvo origen en un resultado topológico. En 1962, Miščenko demostró que si X es un espacio compacto de Hausdorff con una base punto-numerable, entonces X es segundo numerable (véase la proposición 2.18 más adelante). En 1968, Filippov generalizó el resultado de Miščenko al demostrar que un espacio de Hausdorff es metrizable si y sólo si es un p-espacio paracompacto con una base punto-numerable. En su prueba utilizó el siguiente principio combinatorio que abstrajo de la demostración de Miščenko y ahora es conocido como el Lema de Miščenko.

Lema 1.10. *Sean κ un cardinal infinito y E un conjunto. Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de E tal que* $\operatorname{ord}(x, \mathscr{A}) \leqslant \kappa$ *para cualquier $x \in E$, entonces*

$$\left|\{\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} \,:\, \mathscr{B} \text{ es una cubierta minimal finita de } E\}\right| \leqslant \kappa.$$

Demostración. Definamos $\mathbb{B} := \{\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} \,:\, \mathscr{B}$ es una cubierta minimal finita de $E\}$, supongamos por contrapuesta $|\mathbb{B}| > \kappa$ y sea $\{\mathscr{B}_\alpha \,:\, \alpha < \kappa^+\}$ un subconjunto de $\mathbb{B}$ enumerado fielmente. Por el corolario 1.9, existen $J \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ y un conjunto r con $\mathscr{B}_\alpha \cap \mathscr{B}_\beta = r$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos. Luego, como no sucede que $\mathscr{B}_\alpha = r$ para toda $\alpha \in J$, existe $\beta \in J$ con la propiedad de que $r \subsetneq \mathscr{B}_\beta$. Así, la minimalidad de $\mathscr{B}_\beta$ garantiza que r no es cubierta para E y, por consiguiente, existe $x \in E \setminus \bigcup r$. Finalmente, para cada $\alpha \in J$ fijemos $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ con $x \in B_\alpha$ y notemos que si $\alpha, \beta \in J$ son distintos, entonces $B_\alpha \neq B_\beta$ pues $x \notin \bigcup r = \bigcup(\mathscr{B}_\alpha \cap \mathscr{B}_\beta)$ y $x \in B_\alpha \cap B_\beta$. De esta manera, x es un elemento de E con

$$\kappa < \kappa^+ = \left|\{B_\alpha \,:\, \alpha \in J\}\right| \leqslant \left|\{A \in \mathscr{A} \,:\, x \in A\}\right| = \operatorname{ord}(x, \mathscr{A}).$$

$\square$

Teorema 1.11. *Fijemos un cardinal infinito κ, un conjunto E y un subconjunto* $\{V(x, \alpha) :$

$x \in E \ \wedge \ \alpha < \kappa\}$ de $P(E)$ que satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $x \in E$ y $\alpha < \kappa$.

1. *$x \in V(x, \alpha)$.*
2. *Si $y \in E$ es distinto de x, entonces existe $\beta < \kappa$ tal que $y \notin V(x, \beta)$.*
3. *Para cada $A \subseteq E$ existe $B \in [A]^{\leqslant \kappa}$ tal que $A \subseteq \bigcup\{V(y, \alpha) : y \in B\}$.*

En estas circunstancias, $|E| \leqslant 2^{\kappa}$.

Demostración. Dividiremos el argumento en dos afirmaciones.

Afirmación 1. Existen colecciones $\{E_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$, $\{\mathscr{E}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$, $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ y $\{\mathscr{W}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de tal modo que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $\alpha < \kappa^+$.

(1_α) $|E_\alpha| \leqslant 2^\kappa$, $|\mathscr{E}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$, $|\mathscr{V}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$ y $|\mathscr{W}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$.

(2_α) Para cada $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\alpha &:= \left[\bigcup\{E_\beta : \beta < \alpha\}\right]^{\leqslant \kappa}, \\
\mathscr{V}_\alpha &:= \left\{\bigcup\left\{V(x, \gamma) : \gamma < \kappa \ \wedge \ x \in B_\gamma\right\} : \{B_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \mathscr{E}_\alpha\right\} \text{ y} \\
\mathscr{W}_\alpha &:= \left\{E \setminus V : E \setminus V \neq \emptyset \ \wedge \ V \in \mathscr{V}_\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

(3_α) Si $V \in \mathscr{V}_\alpha$ es tal que $E \setminus V \in \mathscr{W}_\alpha$, entonces $E_\alpha \setminus V \neq \emptyset$.

Procederemos por recursión transfinita sobre $\alpha < \kappa^+$. Para el paso base es suficiente definir $E_0 := \emptyset$, $\mathscr{E}_0 := \emptyset$, $\mathscr{V}_0 := \emptyset$ y $\mathscr{W}_0 := \emptyset$. Ahora, supongamos que para alguna $0 < \alpha < \kappa^+$ hemos construido las familias $\{E_\beta : \beta < \alpha\}$, $\{\mathscr{E}_\beta : \beta < \alpha\}$, $\{\mathscr{V}_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{\mathscr{W}_\beta : \beta < \alpha\}$ de tal forma que las condiciones (1_β), (2_β) y (3_β) son satisfechas para cada $\beta < \alpha$.

En vista de que $\alpha > 0$, podemos definir directamente a $\mathscr{E}_\alpha$, $\mathscr{V}_\alpha$ y $\mathscr{W}_\alpha$ como se indica en el inciso (2_α). Adicionalmente, como todos los elementos de la colección $\{E_\beta : \beta < \alpha\}$ tienen tamaño a lo sumo 2^κ, argumentos rutinarios de aritmética cardinal muestran que $|\mathscr{E}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$, $|\mathscr{V}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$ y $|\mathscr{W}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$. Finalmente, sea $e : \mathscr{W}_\alpha \to \bigcup \mathscr{W}_\alpha$ una función de elección y definamos $E_\alpha := \operatorname{img}(e)$. En estas circunstancias, es claro que E_α tiene las propiedades requeridas en los incisos (1_α) y (3_α).

Afirmación 2. $F := \bigcup\{E_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ satisface las relaciones $|F| \leqslant 2^\kappa$ y $F = E$.

En vista de que los elementos de la familia $\{E_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ tienen cardinalidad a lo sumo 2^κ, se cumple la relación $|F| \leqslant 2^\kappa$. Para la segunda parte de la Afirmación 2 supongamos, en busca de una contradicción, que existe un punto $y \in E \setminus F$. Para cada $\gamma < \kappa$ sea $A_\gamma := \{x \in F : y \notin V(x,\gamma)\}$ y utilicemos el inciso (3) para hallar $B_\gamma \in [A_\gamma]^{\leqslant\kappa}$ tal que $A_\gamma \subseteq \bigcup\{V(x,\gamma) : x \in B_\gamma\}$. Consideremos los conjuntos

$$V := \bigcup\{V(x,\gamma) : \gamma < \kappa \ \wedge \ x \in B_\gamma\} \quad \text{y} \quad B := \bigcup\{B_\gamma : \gamma < \kappa\}.$$

Por un lado, para toda $x \in F$ el inciso (2) y la relación $y \notin F$ implican la existencia de $\gamma < \kappa$ tal que $y \notin V(x,\gamma)$. De este modo, $x \in A_\gamma \subseteq V$ y, por ende, $F \subseteq V$. Por otro lado, la inclusión $B \subseteq F$ implica que, para cada $x \in B$, existe $\alpha(x) < \kappa^+$ con $x \in E_{\alpha(x)}$. Así, la relación $|B| \leqslant \kappa$ garantiza que el ordinal $\alpha := \sup\{\alpha(x) : x \in B\} + 1$ es menor a κ^+ y verifica la contención $B \subseteq \bigcup\{E_\beta : \beta < \alpha\}$; en especial, $\{B_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \mathscr{E}_\alpha$. Esto último combinado con la pertenencia $y \in E \setminus V$ implica que $V \in \mathscr{V}_\alpha$ y $E \setminus V \in \mathscr{W}_\alpha$. Finalmente, la condición (3_α) constata que $F \setminus V \neq \emptyset$, una contradicción a la relación $F \subseteq V$. $\square$

El último resultado del presente capítulo es conocido como el Teorema de Erdős-Rado.

Teorema 1.12. *Sean κ un cardinal infinito y E un conjunto. Si $|E| > 2^\kappa$ y $[E]^2 = \bigcup\{P_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces existen $\alpha < \kappa$ y $F \subseteq E$ tales que $|F| > \kappa$ y $[F]^2 \subseteq P_\alpha$.*

Demostración. Para cualesquiera $x \in E$ y $\alpha < \kappa$ definamos $V(x,\alpha) := \{x\} \cup \{y \in E : x \neq y \ \wedge \ \{x,y\} \notin P_\alpha\}$. Claramente, $x \in V(x,\alpha)$ siempre que $x \in E$ y $\alpha < \kappa$. Además, si $y \in E$ es distinto de x, la condición $\{x,y\} \in [E]^2$ implica la existencia de $\beta < \kappa$ tal que $\{x,y\} \in P_\beta$, es decir, $y \notin V(x,\beta)$. De este modo, como $|E| > 2^\kappa$, el teorema 1.11 garantiza que existen $A \subseteq E$ y $\gamma < \kappa$ tales que $A \not\subseteq \bigcup\{V(x,\gamma) : x \in B\}$ para todo $B \in [A]^{\leqslant\kappa}$; en consecuencia, $|A| > \kappa$. Luego, es posible construir recursivamente una colección $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq A$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup\{V(x_\beta,\gamma) : \beta < \alpha\}$ para cada $\alpha < \kappa^+$. En estas circunstancias, se satisfacen las relaciones $|\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}| > \kappa$ y $[\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}]^2 \subseteq P_\gamma$. $\square$

CAPÍTULO 2: FUNCIONES CARDINALES TOPOLÓGICAS

Una *función cardinal topológica* es una asignación φ que relaciona a cada elemento de una clase específica de espacios topológicos con un número cardinal de tal manera que, si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

2.1 Funciones cardinales globales

Nuestra primera función cardinal topológica es la *cardinalidad*, la cual relaciona a cada espacio X con el único número cardinal $|X|$ que es equipotente con él. Por otro lado, el *peso* de un espacio X es el número cardinal

$$w(X) := \text{mín}\left\{|\mathscr{B}| \,:\, \mathscr{B} \text{ es una base para } X\right\}.$$

Con esta notación, los espacios segundo numerables son precisamente aquellos que satisfacen la relación $w(X) \leqslant \omega$.

Una característica interesante que tienen estas funciones cardinales es que, en general, no existe una relación de orden que siempre se tenga entre la cardinalidad y el peso. Por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$ equipada con la topología euclidiana usual es un espacio no numerable que tiene por base a la colección numerable $\{(a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{Q} \;\wedge\; a < b\}$; en consecuencia, $w(\mathbb{R}) < |\mathbb{R}|$. Por otro lado, como $\{(a,b) \cap \mathbb{Q} \,:\, a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$ es una base para $\mathbb{Q}$ visto como subespacio de $\mathbb{R}$, se cumple la igualdad $w(\mathbb{Q}) = |\mathbb{Q}|$. Con respecto a la relación $|X| < w(X)$, en el siguiente ejemplo presentamos un espacio numerable X que no es segundo numerable.

Ejemplo 2.1. (Espacio de Arens-Fort) Sean $X := \{(0,0)\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ y $C_m := \{(m,n) : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. El espacio de Arens-Fort se obtiene al equipar a X con la topología

$$\tau_X := \Big\{U \subseteq X : (0,0) \notin U \;\vee\; \big((0,0) \in U \;\wedge\; \exists m_0 \in \mathbb{N}\; \forall m \geqslant m_0 \;\; (|C_m \setminus U| < \omega)\big)\Big\}.$$

Observemos que X es numerable y para cualquier $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se cumple que $\{(m,n)\} \in \tau_X$. Para comprobar que X no es segundo numerable, supongamos que $\mathscr{B}$ es un subconjunto numerable de τ_X y sea $\{B_i : i < \omega\}$ una enumeración del conjunto $\{B \in \mathscr{B} : (0,0) \in B\}$.

En estas circunstancias, como para cada $i < \omega$ se cumple que $(0,0) \in B_i$ y $B_i \in \tau_X$, un argumento recursivo produce una sucesión estrictamente creciente $\{m_i : i < \omega\} \subseteq \mathbb{N}$ de tal forma que, para cualesquiera $i < \omega$ y $m \geqslant m_i$, se satisface que $|C_m \setminus B_i| < \omega$. Finalmente, si para cada $i < \omega$ tomamos $n_i \in \mathbb{N}$ con $(m_i, n_i) \in C_{m_i} \cap B_i$, resulta que el conjunto

$$U := \{(0,0)\} \cup \bigcup \{C_m : m \notin \{m_i : i < \omega\}\} \cup \bigcup \{C_{m_i} \setminus \{(m_i, n_i)\} : i < \omega\}$$

satisface que $(0,0) \in U$, $U \in \tau_X$ y $B_i \nsubseteq U$ para cualquier $i < \omega$. En consecuencia, $\mathscr{B}$ no es una base para X y, por lo tanto, X no es segundo numerable.

Sin embargo, al imponer ciertas restricciones sobre el espacio X sí es posible garantizar una relación de orden entre los cardinales $|X|$ y $w(X)$ (véase el corolario 2.38). Además, como veremos en la proposición 2.2, también es posible relacionar a $w(X)$ con $2^{|X|}$ y a $|X|$ con $2^{w(X)}$.

Una función cardinal topológica que siempre domina al peso y en espacios T_0 domina a la cardinalidad es $o(X) := |\tau_X|$. Las relaciones básicas entre los cardinales $|X|$, $w(X)$ y $o(X)$ se pueden encontrar en el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualquier espacio X.*

1. $w(X) \leqslant o(X) \leqslant 2^{|X|}$.

2. *Si X es un espacio T_0, entonces $|X| \leqslant 2^{w(X)}$ y $|X| \leqslant o(X)$.*

Demostración. Primero, como τ_X es una base para X y $\tau_X \subseteq P(X)$, se satisfacen las relaciones $w(X) \leqslant o(X)$ y $o(X) \leqslant 2^{|X|}$. Por otra parte, si X es un espacio T_0 y $\mathscr{B}$ es una base para X con $|\mathscr{B}| = w(X)$, entonces las funciones $X \to P(\mathscr{B})$ y $X \to \tau_X$ definidas, respectivamente, mediante $x \mapsto \mathscr{B}(x)$ y $x \mapsto \operatorname{int}(X \setminus \{x\})$ son inyectivas. De este modo, $|X| \leqslant 2^{w(X)}$ y $|X| \leqslant o(X)$. □

La *densidad* de un espacio X es el número cardinal

$$d(X) := \text{mín}\left\{|D| \,:\, D \text{ es un subconjunto denso de } X\right\}.$$

Por lo tanto, X es un espacio separable si y sólo si $d(X) \leqslant \omega$.

Observación 2.1. Si X es un espacio infinito y T_1, entonces $d(X) \geqslant \omega$ porque cualquier subconjunto finito de X es cerrado.

En virtud de que X es un subconjunto denso de sí mismo, se cumple la desigualdad $d(X) \leqslant |X|$. Además, si $\mathscr{B} \subseteq \tau_X^+$ es una base para X con $|\mathscr{B}| = w(X)$ y $e : \mathscr{B} \to \bigcup \mathscr{B}$ es una función de elección, sucede que $D := \operatorname{img}(e)$ es un subconjunto denso de X, lo cual demuestra que $d(X) \leqslant w(X)$. En suma, siempre se satisface la relación $d(X) \leqslant \text{mín}\left\{|X|, w(X)\right\}$.

La brecha entre d y los cardinales definidos en los párrafos previos se puede hacer arbitrariamente grande, incluso en presencia del axioma de separación T_1 (véase el ejemplo 4.4). Sin embargo, en el caso de los espacios T_2, sí es posible acotar superiormente a los cardinales $|X|$, $w(X)$ y $o(X)$ con potencias adecuadas de $d(X)$.

Proposición 2.3. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|X| \leqslant \beth_2(d(X))$ y $w(X) \leqslant o(X) \leqslant \beth_3(d(X))$. En especial, cuando X es separable, $|X| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$ y $o(X) \leqslant \beth_2(\mathfrak{c})$.*

Demostración. Para la primera desigualdad, sea D un subconjunto denso de X con $|D| = d(X)$. Notemos que si $x, y \in X$ son distintos, entonces existen $U, V \in \tau_X$ con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; en particular, $U \cap D$ es un subconjunto de D con $x \in \overline{U \cap D}$ y $y \notin \overline{U \cap D}$. De este modo, la función $X \to P(P(D))$ definida como $x \mapsto \{A \subseteq D \,:\, x \in \overline{A}\}$ es inyectiva y, por ende, $|X| \leqslant \beth_2(d(X))$. Únicamente resta observar que las relaciones $w(X) \leqslant o(X) \leqslant \beth_3\left(d(X)\right)$ se desprenden a partir de la desigualdad $|X| \leqslant \beth_2\left(d(X)\right)$ y de la proposición 2.2(1). $\square$

Conviene resaltar que para espacios T_2 las cotas de la proposición 2.3 son óptimas porque Juhász y Kunen demostraron en [9] que para todo cardinal infinito κ, existe un espacio de Hausdorff X_κ que satisface las relaciones $d(X_\kappa) = \kappa$, $|X_\kappa| = \beth_2(\kappa)$ y $w(X_\kappa) = o(X_\kappa) = \beth_3(\kappa)$.

Para un espacio X denotaremos por $\rho(X)$ al número cardinal $|\mathsf{RO}(X)|$. El siguiente resultado establece una conexión entre los cardinales $\rho(X)$ y $d(X)$.

Proposición 2.4. *Para cualquier espacio topológico X se tiene que $\rho(X) \leqslant 2^{d(X)}$. En particular, si X es semirregular, entonces $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso de X con $|D| = d(X)$. Para cualquier $U \in \mathsf{RO}(X)$, la densidad de D garantiza que $\overline{U \cap D} = \overline{U}$; en especial, $\operatorname{int} \overline{U \cap D} = U$. De esta manera, se satisface la inclusión $\mathsf{RO}(X) \subseteq \{\operatorname{int} \overline{V} : V \subseteq D\}$, que implica $\rho(X) \leqslant 2^{d(X)}$. Finalmente, si X es un espacio semirregular, entonces $w(X) \leqslant \rho(X)$ y, por lo tanto, $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$. $\square$

La *celularidad* de un espacio X es el número cardinal

$$c(X) := \sup \{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \text{ es una familia celular en } X\}.$$

De este modo, X es un espacio ccc si y sólo si $c(X) \leqslant \omega$.

Observación 2.2. Si X es un espacio de Hausdorff infinito, entonces $c(X) \geqslant \omega$ por la proposición 1.3(2).

El siguiente resultado será de gran utilidad más adelante.

Proposición 2.5. *Si X es un espacio topológico y $\mathscr{V} \subseteq \tau_X$, entonces existe $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{\leqslant c(X)}$ tal que $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{W}}$.*

Demostración. Consideremos la colección $\mathscr{U} := \{U \in \tau_X^+ : \exists V \in \mathscr{V} (U \subseteq V)\}$ y empleemos el Lema de Kuratowski-Zorn para encontrar $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ con las siguientes propiedades: $\mathscr{U}'$ es ajena por pares y, si $\mathscr{U}''$ es una familia ajena por pares con $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}'' \subseteq \mathscr{U}$, entonces $\mathscr{U}' = \mathscr{U}''$. Utilizaremos a $\mathscr{U}'$ para construir la colección $\mathscr{W}$.

Si suponemos que hay $x \in \bigcup \mathscr{V} \setminus \overline{\bigcup \mathscr{U}'}$, entonces existen $V \in \mathscr{V}(x)$ y $W \in \tau_X(x)$ con $W \cap \bigcup \mathscr{U}' = \emptyset$. Luego, al definir $U := V \cap W$ y $\mathscr{U}'' := \mathscr{U}' \cup \{U\}$, se satisface que $\mathscr{U}''$ es una familia ajena por pares con $\mathscr{U}' \subsetneq \mathscr{U}'' \subseteq \mathscr{U}$, una contradicción. Este argumento demuestra la inclusión $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{U}'}$. Por último, si para cada $U \in \mathscr{U}'$ tomamos $V(U) \in \mathscr{V}$ tal que $U \subseteq V(U)$, entonces $\mathscr{W} := \{V(U) : U \in \mathscr{U}'\}$ verifica las relaciones $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{\leqslant c(X)}$ y $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{W}}$. $\square$

La *amplitud* de un espacio X es el número cardinal

$$s(X) := \sup\{|D| : D \text{ es un subespacio discreto de } X\}.$$

Diremos que X tiene *amplitud numerable* cuando $s(X) \leqslant \omega$. Como veremos a continuación, el cardinal $c(X)$ siempre queda por debajo de $d(X)$ y $s(X)$ simultáneamente.

Proposición 2.6. *Si X es un espacio topológico, entonces $c(X) \leqslant$ mín$\{d(X), s(X)\}$.*

Demostración. Sean $\mathscr{U}$ una familia celular en X y D un subconjunto denso de X con $|D| = d(X)$. Si $e : \mathscr{U} \to \bigcup\{U \cap D : U \in \mathscr{U}\}$ es una función de elección, entonces $\operatorname{img}(e)$ tiene las siguientes características: $|\mathscr{U}| = |\operatorname{img}(e)|$, $\operatorname{img}(e) \subseteq D$ y $\operatorname{img}(e)$ es un subespacio discreto de X. De este modo, se satisfacen las relaciones $|\mathscr{U}| \leqslant d(X)$ y $|\mathscr{U}| \leqslant s(X)$; en consecuencia, $c(X) \leqslant \text{mín}\,\{d(X), s(X)\}$. $\square$

El *grado de Lindelöf* de un espacio X es el número cardinal

$$L(X) := \text{mín}\left\{\kappa \geqslant 1 : \forall \mathscr{U} \subseteq \tau_X \left(X = \bigcup \mathscr{U} \to \exists \mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\kappa} \left(X = \bigcup \mathscr{V}\right)\right)\right\}.$$

Por ejemplo, los espacios con la propiedad de Lindelöf son exactamente aquellos que verifican la relación $L(X) \leqslant \omega$.

No es díficil comprobar que $c(\mathbb{R}) = d(\mathbb{R}) = s(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}) = \omega$. Por otro lado, el cubo de Cantor $D(2)^{\mathfrak{c}^+}$ satisface las relaciones $L\left(D(2)^{\mathfrak{c}^+}\right) < d\left(D(2)^{\mathfrak{c}^+}\right) < s\left(D(2)^{\mathfrak{c}^+}\right)$ (véase el ejemplo 4.6). Además, el plano de Sorgenfrey y el residuo $\beta\omega \setminus \omega$ cumplen que $d(\mathbb{S}^2) < L(\mathbb{S}^2)$ y $L\left(\beta\omega \setminus \omega\right) < c\left(\beta\omega \setminus \omega\right)$ (véanse el ejemplo 4.8 y [12, Theorem 3.22, p. 77]). Finalmente, con respecto al problema de encontrar espacios X y Y tales que $s(X) < d(X)$ y $s(Y) < L(Y)$, haremos algunos comentarios más adelante una vez que se hayan presentado las funciones cardinales hd y hL.

El párrafo anterior constata que, salvo la desigualdad expuesta en la proposición 2.6, no existe una relación de orden que siempre se satisfaga entre elementos distintos de la colección $\{c, d, s, L\}$. Sin embargo, al considerar espacios con axiomas de separación adecuados, sí es posible demostrar que la densidad y la amplitud no difieren en más de una potencia; específicamente, $s(X) \leqslant 2^{d(X)}$ para X semirregular, y $d(X) \leqslant 2^{s(X)}$ para X Hausdorff.

La primera relación se sigue de la proposición 2.4, mientras que un fortalecimiento de la segunda se puede encontrar en [5, Theorem 5.2, p. 23].

A diferencia de la densidad y la amplitud para espacios de Hausdorff, la celularidad y el grado de Lindelöf se pueden alejar mucho de la cardinalidad del espacio; por ejemplo, si κ es un número cardinal infinito, entonces el cubo $D(2)^\kappa$ es un espacio compacto de Hausdorff y ccc de cardinalidad 2^κ (véase el ejemplo 4.6). No obstante, al combinar a c y L con la función cardinal χ (véase la sección 2.2) es posible demostrar que si X es un espacio T_2 y $\phi \in \{c, L\}$, entonces $|X| \leqslant 2^{\phi(X)\cdot\chi(X)}$ (véanse los teoremas 4.5 y 4.7 de [5]).

La *extensión* de un espacio X es el número cardinal

$$e(X) := \sup\{|D| : D \text{ es un subespacio cerrado y discreto de } X\}.$$

Diremos que X tiene *extensión numerable* cuando $e(X) \leqslant \omega$.

Observación 2.3. Si X es un espacio infinito y T_1, entonces para cualquier subconjunto finito A de X se satisface que A es un subespacio cerrado y discreto de X; en consecuencia, $e(X) \geqslant \omega$.

El siguiente resultado muestra que $e(X)$ siempre se encuentra dominado por $s(X)$ y $L(X)$ simultáneamente.

Proposición 2.7. *Si X es un espacio topológico, entonces $e(X) \leqslant$ mín $\{s(X), L(X)\}$.*

Demostración. Si D es un subespacio cerrado y discreto de X, es claro que $|D| \leqslant s(X)$. Además, como para cada $x \in D$ existe $U_x \in \tau_X(x)$ con $U_x \cap D = \{x\}$, la familia $\{U_x : x \in D\} \cup \{X \setminus D\}$ es una cubierta abierta de X que no admite subcubiertas propias. De este modo, $|D| \leqslant L(X)$ y, por lo tanto, $e(X) \leqslant$ mín $\{s(X), L(X)\}$. □

Si denotamos por $[0, \omega_1)$ al número ordinal ω_1 equipado con la topología del orden, entonces un argumento rutinario muestra que el espacio $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto y T_2, que $\{\{\alpha + 1\} : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular y que $\{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta abierta de $[0, \omega_1)$ sin subcubiertas numerables. Por estas razones, $e([0, \omega_1)) = \omega$ y $c([0, \omega_1)) = s([0, \omega_1)) = L([0, \omega_1)) = \omega_1$. Por otra parte, el espacio producto $D(\omega)^\mathfrak{c}$ es separable por el teorema 3.21 que veremos más adelante, y $D(\mathfrak{c})$ se encaja de forma cerrada en $D(\omega)^{\mathfrak{c}}$ (véase [8]); en consecuencia, $d\left(D(\omega)^{\mathfrak{c}}\right) = \omega$ y $e\left(D(\omega)^{\mathfrak{c}}\right) \geqslant \mathfrak{c}$.

El párrafo anterior muestra que las desigualdades de la proposición 2.7 pueden ser estrictas. Adicionalmente, no existe una relación de orden que siempre se satisfaga entre e y las funciones cardinales c y d. Por otro lado, no es difícil demostrar que para cualquier espacio X la condición $e(X) \leqslant \kappa$ es equivalente a que todo elemento de $P(X) \setminus [X]^{\leqslant\kappa}$ tenga un punto de acumulación. De esta manera, $e(X) \leqslant \omega$ si y sólo si X es ω_1-compacto (es decir, cualquier subconjunto no numerable de X tiene un punto de acumulación).

Existe una relación sutil entre la densidad y la cardinalidad de los subespacios cerrados y discretos de los espacios normales. En la década de los 30, F. B. Jones demostró que los subespacios cerrados y discretos de un espacio normal y separable tienen cardinalidad menor a $\mathfrak{c}$. Este resultado se puede emplear, por ejemplo, para demostrar que el espacio separable $\mathbb{S}^2$ no es normal porque contiene un subespacio cerrado y discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase el ejemplo 4.8). En vista de este precedente, al siguiente resultado se le conoce como el Lema de Jones.

Proposición 2.8. *Si X es normal y D es un subespacio cerrado y discreto de X, entonces $2^{|D|} \leqslant 2^{d(X)}$. En especial, cuando X es separable, todos los subespacios cerrados y discretos de X tienen cardinalidad menor a $\mathfrak{c}$. Además, si $\mathfrak{c} < 2^{\omega_1}$, entonces X no puede tener subespacios cerrados y discretos de cardinalidad ω_1.*

Demostración. Dividiremos el argumento en un par de afirmaciones.

Afirmación 1. Para cada $F \subseteq D$ existe $U_F \in \tau_X$ con $F \subseteq U_F$ y $\overline{U_F} \cap (D \setminus F) = \emptyset$.

Si F es un subconjunto de D, entonces F y $D \setminus F$ son cerrados en D. Luego, como D es un subespacio cerrado de X, deducimos que F y $D \setminus F$ son cerrados ajenos en X, lo cual permite utilizar la normalidad de X para hallar $U_F, U'_F \in \tau_X$ tales que $F \subseteq U_F$, $D \setminus F \subseteq U'_F$ y $U_F \cap U'_F = \emptyset$. Claramente U_F satisface las condiciones deseadas.

Ahora, sea E un subconjunto denso de X con $|E| = d(X)$ y definamos $V_F := U_F \cap E$ para cada $F \subseteq D$.

Afirmación 2. $V_F \neq V_G$, siempre que $F, G \subseteq D$ son distintos.

Cuando $F, G \subseteq D$ son tales que $V_F = V_G$, la densidad de E garantiza la relación $\overline{U_F} = \overline{U_G}$. De esta manera, la Afirmación 1 asegura que $\overline{U_F} \cap (D \setminus G) = \emptyset = \overline{U_G} \cap (D \setminus F)$. Así, las inclusiones $F \subseteq U_F$ y $G \subseteq U_G$ implican la igualdad $F = G$.

Finalmente, la Afirmación 2 garantiza que la asignación $P(D) \to P(E)$ definida mediante $F \mapsto V_F$ es inyectiva. Por esta razón, $2^{|D|} \leqslant 2^{|E|} \leqslant 2^{d(X)}$. Los enunciados que faltan por demostrar en el presente resultado son consecuencias de la relación $|D| < 2^{|D|}$. $\square$

En vista de la proposición 2.8 es natural preguntar si $2^{e(X)} \leqslant 2^{d(X)}$, siempre que X es un espacio normal. Al respecto de esta cuestión van Douwen demostró que si no hay cardinales débilmente inaccesibles (véase [10, Definition 10.39, p. 34]), entonces cualquier espacio normal X satisface la relación $2^{e(X)} \leqslant 2^{d(X)}$. La prueba de este hecho se puede consultar en [1].

Una función cardinal φ es *monótona* si para cualquier espacio X se satisface que $\varphi(Y) \leqslant \varphi(X)$, siempre que Y es un subespacio de X.

Proposición 2.9. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *La cardinalidad, el peso y la amplitud son monótonas.*
2. *La densidad es mónotona con respecto a los subconjuntos abiertos.*
3. *La celularidad es monótona con respecto a los subconjuntos abiertos y a los subconjuntos densos.*
4. *El grado de Lindelöf y la extensión son monótonos con respecto a los subconjuntos cerrados.*

Demostración. Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$, $U \in \tau_X$, $F \in \tau_X^*$ y D un subconjunto denso de X. Para demostrar (1) es claro que $|Y| \leqslant |X|$. Además, como todo subespacio discreto de Y también es un subespacio discreto de X, obtenemos que $s(Y) \leqslant s(X)$. Por último, si $\mathscr{B}$ es una base para X, entonces $\{B \cap Y : B \in \mathscr{B}\}$ es una base para Y; en especial, $w(Y) \leqslant w(X)$.

Para verificar (2) basta con observar que, como $U \in \tau_X$ y D es denso en X, $D \cap U$ es un subconjunto denso de U; en consecuencia, $d(U) \leqslant d(X)$.

Con el inciso (3) en mente notemos que, como cualquier familia celular en U es una familia celular en X, se satisface la relación $c(U) \leqslant c(X)$. Por otra parte, si $\mathscr{V} \subseteq \tau_D$ es una familia celular, para cada $V \in \mathscr{V}$ existe $U_V \in \tau_X$ con $V = U_V \cap D$. De este modo, $\{U_V : V \in \mathscr{V}\}$ es una familia celular en X que es equipotente con $\mathscr{V}$, lo cual implica la desigualdad $c(D) \leqslant c(X)$.

Por último, para el inciso (4), fijemos una cubierta $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$ para F y notemos que $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta para X. De este modo, existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant L(X)}$ tal que $\mathscr{V} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta para X; en especial, $\mathscr{V}$ es una cubierta para F. Por otro lado, cualquier subespacio cerrado y discreto de F es cerrado y discreto en X. En suma, $L(F) \leqslant L(X)$ y $e(F) \leqslant e(X)$. $\square$

Los incisos (2)–(4) de la proposición 2.9 sugieren que dichas funciones cardinales no son monótonas en general. A continuación veremos que esta sospecha es correcta.

Por ejemplo, el espacio $\beta\omega$ es separable y el subespacio $\beta\omega \setminus \omega$ admite una familia celular no numerable (véase [12, Theorem 3.22, p. 77]), lo cual muestra que la densidad y la celularidad no son monótonas.

Por otra parte, $[0, \omega_1]$ es un espacio compacto (por ende, Lindelöf), mientras que el subespacio $\{\alpha + 1 : \alpha < \omega_1\}$ es abierto, discreto y no numerable; en particular, el ejemplo 4.2 garantiza que este último no tiene la propiedad de Lindelöf. Por esta razón, el grado de Lindelöf no es monótono.

Finalmente, en los ejemplos 4.8 y 4.10 veremos que $e(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{c}$ y $e(\mathbb{A}^2) = \omega$. Luego, como $\mathbb{S}^2$ se encaja en $\mathbb{A}^2$ (véase la proposición 1.6), resulta que la extensión no es monótona.

Para cada función cardinal φ podemos introducir una versión monótona de la misma mediante la siguiente regla

$$h\varphi(X) := \sup\{\varphi(Y) : Y \subseteq X\}.$$

Es fácil ver que, cuando φ es una función cardinal monótona, $\varphi = h\varphi$. Por otra parte, las versiones hereditarias de funciones cardinales que no son monótonas no siempre producen funciones cardinales nuevas como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Si X es un espacio topológico, entonces $hc(X) = s(X) = he(X)$.*

Demostración. Las proposiciones 2.6, 2.7 y 2.9(1) implican que si Y es un subespacio de X, entonces $\max\{c(Y), e(Y)\} \leqslant s(Y)$ y $s(Y) \leqslant s(X)$. Así, $\max\{hc(X), he(X)\} \leqslant s(X)$. Por otra parte, si D es un subespacio discreto de X, entonces D es un subespacio cerrado y discreto de sí mismo, y la familia $\{\{x\} : x \in D\}$ es celular en D. En consecuencia, $|D| \leqslant \min\{c(D), e(D)\}$ y, por ende, $s(X) \leqslant \min\{hc(X), he(X)\}$. □

Sin embargo, con este proceso sí obtenemos dos funciones cardinales sobresalientes, a saber, la densidad hereditaria, hd, y el grado de Lindelöf hereditario, hL. Si X es un espacio topológico, las condiciones $hd(X) \leqslant \omega$ y $hL(X) \leqslant \omega$ equivalen, respectivamente, a que X sea hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf. Cabe mencionar que estos últimos conceptos juntos no implican que el espacio en cuestión sea segundo numerable; por ejemplo, la recta de Sorgenfrey es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf, pero no admite bases numerables (véase el ejemplo 4.7).

Proposición 2.11. *Para cualquier espacio topológico X, $\max\{d(X), s(X)\} \leqslant hd(X)$ y $\max\{s(X), L(X)\} \leqslant hL(X)$.*

Demostración. Claramente, $d(X) \leqslant hd(X)$ y $L(X) \leqslant hL(X)$. Además, si Y es un subespacio de X, de las proposiciones 2.6 y 2.7 se desprenden las relaciones $c(Y) \leqslant d(Y) \leqslant hd(X)$ y $e(Y) \leqslant L(Y) \leqslant hL(X)$. De esta manera, la proposición 2.10 implica la desigualdad $s(X) \leqslant \min\{hd(X), hL(X)\}$. □

La pregunta de cómo se comparan los cardinales $hd(X)$ y $hL(X)$ ha sido el hilo conductor de muchos trabajos de investigación. Por ejemplo, Hajnal y Juhász demostraron en [4] el siguiente resultado: para cualquier cardinal infinito κ, existen espacios de Hausdorff X_κ y Y_κ de tal modo que $hL(X_\kappa) \leqslant \kappa < d(X_\kappa) \leqslant hd(X_\kappa)$ y $hd(Y_\kappa) \leqslant \kappa < L(Y_\kappa) \leqslant hL(Y_\kappa)$.

El caso $\kappa = \omega$ en el resultado previo garantiza la existencia de una pareja espacios de Hausdorff de tal forma que uno es hereditariamente Lindelöf no separable, mientras que el otro es hereditariamente separable no Lindelöf. Una pregunta natural planteada por la comunidad matemática fue si se podían producir espacios T_3 que cumplieran las mismas características. A los espacios que satisfacen estas propiedades se les conocen, respectivamente, como *L-espacios* y *S-espacios.*

Desde la década de los 60 se realizó mucho trabajo con el objetivo de encontrar espacios topológicos con estas cualidades. Por ejemplo, una línea de investigación condujo a tratar de atacar esta pregunta por medio de dos funciones cardinales topológicas que mostraron estar íntimamente relacionadas con este problema. Estas funciones cardinales son conocidas como la altura, $h(X)$, y la anchura, $z(X)$, de un espacio topológico X (véanse [4] y la definición 3.7 más adelante).

Finalmente, gracias al trabajo de Rudin y Todorčević, hoy sabemos que la existencia de S-espacios es independiente de ZFC. No obstante, a pesar de que había la sospecha de que algo similar sucedería con los L-espacios, Moore construyó en [11] el primer ejemplo en ZFC de un L-espacio.

De regreso a nuestra exposición, las funciones cardinales $hd(X)$ y $hL(X)$ son útiles para acotar a $o(X)$.

Proposición 2.12. *Para cualquier espacio X, $o(X) \leqslant \text{mín}\{|X|^{hd(X)}, w(X)^{hL(X)}\}$.*

Demostración. Si $F \in \tau_X^*$, la condición $d(F) \leqslant hd(X)$ implica la existencia de D, un subconjunto denso de F, con $|D| \leqslant hd(X)$; en especial, $F = \mathrm{cl}_X D$. Así, todo elemento de τ_X^* pertenece a la colección $\{\mathrm{cl}_X D : D \in [X]^{\leqslant hd(X)}\}$ y, por lo tanto, $o(X) \leqslant |X|^{hd(X)}$. Por otra parte, si $\mathscr{B}$ es una base para X con $|\mathscr{B}| = w(X)$, entonces cualquier miembro de τ_X se puede expresar como la unión de algún elemento de $[\mathscr{B}]^{\leqslant hL(X)}$. De esta forma, $o(X) \leqslant w(X)^{hL(X)}$. □

Una *red* para un espacio topológico X es una colección $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X que satisface la siguiente propiedad: para cualesquiera $U \in \tau_X$ y $x \in U$ existe $N \in \mathscr{N}$ con $x \in N \subseteq U$. El *peso red* de X se define como el número cardinal

$$nw(X) := \text{mín}\{|\mathscr{N}| : \mathscr{N} \text{ es una red para } X\}.$$

Diremos que X tiene *peso red numerable* cuando $nw(X) \leqslant \omega$. En el siguiente resultado recopilamos las propiedades básicas de nw.

Proposición 2.13. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualquier espacio X.*

1. *nw es monótona.*

2. *$\text{máx}\{hd(X), hL(X)\} \leqslant nw(X) \leqslant \text{mín}\{w(X), |X|\}$.*

3. *$o(X) \leqslant 2^{nw(X)}$.*

4. *Cuando X es T_0, $|X| \leqslant 2^{nw(X)}$.*

Demostración. Sean Y un subespacio de X y $\mathscr{N}$ una red para X con $|\mathscr{N}| = nw(X)$ y $\emptyset \notin \mathscr{N}$. Primero, como $\{N \cap Y : N \in \mathscr{N}\}$ es una red para Y, cualquier base es una red y $\{\{x\} : x \in X\}$ es una red para X, se satisfacen las relaciones $nw(Y) \leqslant nw(X) \leqslant \text{mín}\{w(X), |X|\}$, las cuales prueban el inciso (1) y la segunda parte del inciso (2).

Ahora, en vista del inciso (1), para demostrar la primera desigualdad de (2) es suficiente ver que $\text{máx}\{d(X), L(X)\} \leqslant nw(X)$. Por un lado, si $e : \mathscr{N} \to \bigcup \mathscr{N}$ es una función de elección y $D := \text{img}(e)$, entonces D es un subconjunto denso de X y $d(X) \leqslant |D| \leqslant |\mathscr{N}| = nw(X)$. Por otro lado, si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X, para cada $N \in \mathscr{N}$ definimos $\mathscr{U}(N) := \{U \in \mathscr{U} : N \subseteq U\}$ y $\mathscr{N}^* := \{N \in \mathscr{N} : \mathscr{U}(N) \neq \emptyset\}$. Luego, si $e : \mathscr{N}^* \to \bigcup_{N \in \mathscr{N}^*} \mathscr{U}(N)$ es una función de elección y $\mathscr{V} := \text{img}(e)$, entonces $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ y $|\mathscr{V}| \leqslant |\mathscr{N}^*| \leqslant |\mathscr{N}| = nw(X)$. Por último, dado $x \in X$, existen $U \in \mathscr{U}$ y $N \in \mathscr{N}$ con $x \in N \subseteq U$; en especial, $N \in \mathscr{N}^*$ y $x \in e(N)$, lo cual implica que $x \in \bigcup \mathscr{V}$. En suma, $L(X) \leqslant nw(X)$.

Finalmente, el inciso (3) es consecuencia de que la función $\tau_X \to P(\mathscr{N})$ definida mediante $U \mapsto \{N \in \mathscr{N} : N \subseteq U\}$ es inyectiva, mientras que el inciso (4) se deduce a partir de una combinación de (3) con la proposición 2.2(2). $\square$

Una *π-base* para un espacio topológico X es una colección $\mathscr{V} \subseteq \tau_X^+$ tal que si $U \in \tau_X^+$, entonces existe $V \in \mathscr{V}$ con $V \subseteq U$. El *π-peso* de X se define como el número cardinal

$$\pi w(X) := \text{mín}\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ es una } \pi\text{-base para } X\}.$$

Diremos que X tiene *π-peso numerable* cuando $\pi w(X) \leqslant \omega$. Las relaciones básicas de πw con algunas funciones cardinales definidas anteriormente se encuentran en el siguiente resultado.

Proposición 2.14. *Las siguientes relaciones son ciertas para cualquier espacio X.*

1. $d(X) \leqslant \pi w(X) \leqslant w(X) \leqslant 2^{nw(X)}$.

2. *Para X semirregular,* $nw(X) \leqslant 2^{\pi w(X)}$.

Demostración. El argumento para la desigualdad $d(X) \leqslant \pi w(X)$ es similar al expuesto en la proposición 2.13 para la relación $d(X) \leqslant nw(X)$. Por otro lado, si $\mathscr{B} \subseteq \tau_X^+$ es una base para X, entonces $\mathscr{B}$ también es una π-base para X; por esta razón, $\pi w(X) \leqslant w(X)$. Además, de las proposiciones 2.2 y 2.13(3), se sigue que $w(X) \leqslant 2^{nw(X)}$. Finalmente, si X es semirregular, una combinación de las proposiciones 2.4 y 2.13(2) con el inciso (1) del presente resultado implica las desigualdades $nw(X) \leqslant w(X) \leqslant 2^{d(X)} \leqslant 2^{\pi w(X)}$. □

Es conveniente resaltar que el π-peso no es monótono pues $\pi w\left(\beta\omega\right) \leqslant \omega$ porque $\{\{n\} : n < \omega\}$ es una π-base para $\beta\omega$, mientras que $\pi w\left(\beta\omega \setminus \omega\right) > \omega$ porque el residuo $\beta\omega \setminus \omega$ admite una familia celular no numerable (véase [12, Theorem 3.22, p. 77]).

El *peso separante* de un espacio topológico X que posee una cubierta abierta separante es el número cardinal

$$sw(X) := \text{mín}\left\{|\mathscr{U}| \, : \, \mathscr{U} \text{ es una cubierta abierta separante de } X\right\}.$$

Proposición 2.15. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualquier espacio X.*

1. *X admite una cubierta abierta separante si y sólo si X es T_1.*

Por el inciso anterior, para fines de los siguientes incisos asumiremos que X es T_1.

2. $sw(X) \leqslant$ *mín*$\{w(X), |X|\}$ *y* $|X| \leqslant 2^{sw(X)}$.

3. *Si X tiene la propiedad de Hausdorff, entonces* $sw(X) \leqslant$ *mín*$\{\rho(X), nw(X)\}$.

Demostración. Para el inciso (1), si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta separante de X y $x, y \in X$ son distintos, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$; en consecuencia, X es T_1. Para la implicación restante notemos que si X es T_1 y $\mathscr{B}$ es una base para X, entonces $\mathscr{B}$ y $\{X \setminus \{x\} : x \in X\}$ son cubiertas abiertas separantes.

Observemos que el argumento anterior muestra además que $sw(X) \leqslant \min\{w(X),|X|\}$. Ahora, si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta separante de X con $|\mathscr{U}| = sw(X)$, entonces la función $X \to P(\mathscr{U})$ dada por $x \mapsto \mathscr{U}(x)$ es inyectiva y, por ende, $|X| \leqslant 2^{sw(X)}$. Esto concluye la demostración del inciso (2).

Para el inciso (3), supongamos que X es T_2 y veamos primero que $\mathsf{RO}(X)$ es una cubierta abierta separante de X. Si $x, y \in X$ son distintos, entonces existen $U, V \in \tau_X$ ajenos con $x \in U$ y $y \in V$. En este caso, $x \in \operatorname{int} \overline{U}$ y $y \notin \operatorname{int} \overline{U}$. Luego, como $\operatorname{int} \overline{U} \in \mathsf{RO}(X)$, concluimos que $\mathsf{RO}(X)$ es una cubierta abierta separante de X; en especial, $sw(X) \leqslant \rho(X)$.

Para terminar, fijemos una red $\mathscr{N}$ para X con $|\mathscr{N}| = nw(X)$ y consideremos la familia $\mathscr{U} := \{X \setminus \overline{N} : N \in \mathscr{N}\}$. Ahora, si $x, y \in X$ son distintos, existen $U, V \in \tau_X$ y $N \in \mathscr{N}$ tales que $x \in U$, $y \in N \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De inmediato, $x \in X \setminus \overline{N}$ y $y \notin X \setminus \overline{N}$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta separante de X con $|\mathscr{U}| \leqslant nw(X)$; en particular, $sw(X) \leqslant nw(X)$. □

Si X es un espacio T_1, el *peso punto-separante* de X, denotado por $psw(X)$, es el número cardinal

$$\min\Big\{\kappa \geqslant 1 : X \text{ tiene una cubierta abierta separante } \mathscr{U} \text{ tal que } \forall x \in X \left(\operatorname{ord}(x, \mathscr{U}) \leqslant \kappa\right)\Big\}.$$

Diremos que X tiene *peso punto-separante numerable* cuando $psw(X) \leqslant \omega$.

Observemos que si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta separante de un espacio topológico X, entonces cada $x \in X$ verifica la relación $\operatorname{ord}(x, \mathscr{U}) \leqslant |\mathscr{U}|$; en consecuencia, $psw(X) \leqslant sw(X)$.

También, no es difícil comprobar que una base σ-localmente finita en un espacio T_1 es una cubierta abierta separante punto-numerable. En consecuencia, el Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov (véase [2, 4.4.7, p. 282]) garantiza que todo espacio metrizable X satisface la relación $psw(X) \leqslant \omega$.

Por otra parte, resulta que psw caracteriza cuándo un espacio es discreto en términos de su relación con el cardinal ω:

Lema 2.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio X que es T_1.*

1. $psw(X) < \omega$.

2. X *es discreto.*

3. $psw(X) = 1$.

Demostración. Claramente, (3) implica (1). Además, (2) implica (3) porque la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta separante de X con orden igual a 1 en cada punto del espacio. Finalmente, para la implicación de (1) a (2) notemos que si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta separante de X con $\operatorname{ord}(x, \mathscr{U}) \leqslant psw(X) < \omega$, entonces para cada $x \in X$ se satisface que $\{x\} = \bigcap \mathscr{U}(x)$. De esta manera, como $|\mathscr{U}(x)| = \operatorname{ord}(x, \mathscr{U})$ es finito, se infiere que x es un punto aislado de X. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que, salvo una excepción, todas las funciones cardinales de tipo peso que hemos presentado coinciden en el ámbito de los espacios compactos de Hausdorff infinitos. Para ello necesitamos un lema auxiliar que probaremos a continuación.

Lema 2.17. *Si existe una cubierta abierta finita $\mathscr{U}$ de un espacio X, entonces existe una cubierta minimal $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$.*

Demostración. La prueba será por inducción sobre la cardinalidad de la familia $\mathscr{U}$. Para el caso base notemos que la condición $|\mathscr{U}| = 1$ implica que $\mathscr{U}$ es minimal. Supongamos entonces que el resultado vale para n y sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X con $|\mathscr{U}| = n + 1$. Ahora, si para cada $U \in \mathscr{U}$ se tiene que $\mathscr{U} \setminus \{U\}$ no es una cubierta para X, entonces $\mathscr{U}$ es minimal. En caso contrario, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $\mathscr{U} \setminus \{U\}$ es cubierta para X y, por ende, la relación $|\mathscr{U} \setminus \{U\}| = n$ y la hipótesis de inducción generan una cubierta minimal $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U} \setminus \{U\} \subseteq \mathscr{U}$. $\square$

Para el próximo resultado conviene tener presente que si X es un espacio compacto, infinito y T_2, entonces $psw(X) \geqslant \omega$ por el lema 2.16.

Proposición 2.18. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff infinito, entonces $psw(X) = sw(X) = nw(X) = w(X)$.*

Demostración. En virtud de las relaciones $psw(X) \leqslant sw(X) \leqslant nw(X) \leqslant w(X)$ (véanse las proposiciones 2.13(2) y 2.15(3)), únicamente necesitamos argumentar las desigualdades $w(X) \leqslant nw(X)$ y $nw(X) \leqslant psw(X)$. Para ver que $w(X) \leqslant nw(X)$, sea $\mathscr{N}$ una red para X con $|\mathscr{N}| = nw(X)$. Consideremos la colección

$$\mathscr{N}' := \Big\{(N, M) \in \mathscr{N}^2 \,:\, \exists U, V \in \tau_X \left(N \subseteq U \,\wedge\, M \subseteq V \,\wedge\, U \cap V = \emptyset\right)\Big\}$$

y para cada $(N, M) \in \mathscr{N}'$ fijemos $(U_N, U_M) \in \tau_X^2$ de tal forma que $N \subseteq U_N$, $M \subseteq U_M$ y $U_M \cap U_N = \emptyset$. Además, definamos $\mathscr{V} := \{U_N \,:\, (N, M) \in \mathscr{N}'\} \cup \{U_M \,:\, (N, M) \in \mathscr{N}'\}$.

Afirmación 1. La familia $\mathscr{V}$ es un elemento de $[\tau_X]^{\leqslant nw(X)}$ de tal modo que si $x, y \in X$ son distintos, entonces existen $V_x, V_y \in \mathscr{V}$ con $x \in V_x$, $y \in V_y$ y $V_x \cap V_y = \emptyset$.

En vista de que $|\mathscr{N}'| \leqslant nw(X)$, se satisface la relación $\mathscr{V} \in [\tau_X]^{\leqslant nw(X)}$. Ahora, si $x, y \in X$ son puntos distintos, la propiedad de Hausdorff garantiza la existencia de $U_x, U_y \in \tau_X$ con $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$. Luego, si $N_x, N_y \in \mathscr{N}$ son tales que $x \in N_x \subseteq U_x$ y $y \in N_y \subseteq U_y$, se verifica la pertenencia $(N_x, N_y) \in \mathscr{N}'$ y, por ende, $V_x := U_{N_x}$ y $V_y := U_{N_y}$ son elementos de $\mathscr{V}$ que constatan las relaciones $x \in V_x$, $y \in V_y$ y $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Observemos que en virtud de la Afirmación 1, para cualquier $x \in X$ se satisface la igualdad $\{x\} = \bigcap\{\overline{V} \,:\, V \in \mathscr{V}(x)\}$.

Afirmación 2. La colección $\mathscr{B} := \{\bigcap \mathscr{U} \,:\, \mathscr{U} \in [\mathscr{V}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es una base para X con $|\mathscr{B}| \leqslant nw(X)$.

Por un lado, la relación $|\mathscr{V}| \leqslant nw(X)$ implica que $|\mathscr{B}| \leqslant nw(X)$. Por otro lado, si $x \in X$ y $U \in \tau_X$ cumplen $x \in U$, la igualdad $\{x\} = \bigcap\{\overline{V} \,:\, V \in \mathscr{V}(x)\}$ y la compacidad de X implican la existencia de $\mathscr{U} \in [\mathscr{V}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $x \in \bigcap \mathscr{U} \subseteq U$ (véase [2, Corollary 3.1.5, p. 124]). En consecuencia, $\mathscr{B}$ es una base para X y así, $w(X) \leqslant nw(X)$.

Ahora, para ver que $nw(X) \leqslant psw(X)$, fijemos una cubierta abierta separante $\mathscr{V}$ de X de tal modo que $\emptyset \notin \mathscr{V}$ y $\operatorname{ord}(x, \mathscr{V}) \leqslant psw(X)$ para cada $x \in X$. Mostraremos primero que $|\mathscr{V}| \leqslant psw(X)$. Empleemos el lema 1.10 para enumerar, posiblemente con repeticiones, a la colección de cubiertas minimales finitas de X contenidas en $\mathscr{V}$ como $\{\mathscr{V}_\alpha \,:\, \alpha < psw(X)\}$.

Observe que dicha colección es no vacía en virtud de la compacidad de X y del lema 2.17.

Nuestro próximo objetivo es demostrar la inclusión $\mathscr{V} \subseteq \bigcup\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < psw(X)\}$. Si $V \in \mathscr{V}$ y $x \in V$, para cada $y \in X \setminus V$ fijamos $V_y \in \mathscr{V}$ tal que $y \in V_y$ y $x \notin V_y$. Luego, por la compacidad de X y el lema 2.17 existe $F \in [X \setminus V]^{<\omega}$ tal que $\{V_y : y \in F\} \cup \{V\}$ es una cubierta abierta minimal finita de X contenida en $\mathscr{V}$; en consecuencia, existe $\alpha < psw(X)$ con $\mathscr{V}_\alpha = \{V_y : y \in Y\} \cup \{V\}$. El argumento previo demuestra que $\mathscr{V} \subseteq \bigcup\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < psw(X)\}$; en particular, $|\mathscr{V}| \leqslant psw(X)$.

Finalmente, probaremos que la familia $\mathscr{N} := \{X \setminus \bigcup\mathscr{W} : \mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{<\omega}\}$ es una red para X con $|\mathscr{N}| \leqslant psw(X)$. Primero, la desigualdad $|\mathscr{V}| \leqslant psw(X)$ implica la relación $|\mathscr{N}| \leqslant psw(X)$. Por otra parte, si $U \in \tau_X^+$ y $x \in U$, un razonamiento similar al expuesto en el párrafo anterior produce $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{<\omega}$ con $x \notin \bigcup\mathscr{W}$ y $X = U \cup \bigcup\mathscr{W}$. En estas circunstancias se satisfacen las relaciones $x \in X \setminus \bigcup\mathscr{W} \subseteq U$, lo cual implica que $\mathscr{N}$ es una red para X. $\square$

Una combinación de la proposición 2.18 con el Teorema de Metrización de Urysohn implica el siguiente corolario.

Corolario 2.19. *Todo espacio compacto con la propiedad de Hausdorff y una cubierta abierta separante punto-numerable admite una base numerable y, por ende, es metrizable.*

Para un espacio topológico X, utilizamos el símbolo Δ_X para referirnos a la *diagonal* de X, es decir, Δ_X es el conjunto $\{(x,x) : x \in X\}$. Evidentemente, Δ_X es un subconjunto del cuadrado X^2.

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico. Una colección de cubiertas abiertas $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una *familia diagonal* si se verifica la igualdad $\{x\} = \bigcap\{\mathrm{st}(x, \mathscr{V}_a) : \alpha < \kappa\}$ para cada $x \in X$.

Nuestro siguiente resultado justifica relativamente el término «familia diagonal».

Proposición 2.21. *Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio X.*

1. *Existe una familia diagonal $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$.*

2. *Existe una colección $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_{X^2}$ tal que $\Delta_X = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.*

Demostración. Para ver que (1) implica (2), supongamos que X admite una familia diagonal $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y consideremos el conjunto $U_\alpha := \bigcup\{V^2 : V \in \mathscr{V}_\alpha\}$ para cada $\alpha < \kappa$. Con el objetivo de verificar la igualdad $\Delta_X = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, fijemos $x \in X$ y $\alpha < \kappa$. Dado que $\mathscr{V}_\alpha$ es una cubierta de X, existe $V \in \mathscr{V}_\alpha(x)$ y así, $(x,x) \in V^2 \subseteq U_\alpha$. Por otra parte, si $(x,y) \in \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, para cada $\alpha < \kappa$ existe $V_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$ tal que $(x,y) \in V_\alpha^2$; en especial, $y \in \operatorname{st}(x, \mathscr{V}_a)$ y, por ende, $y \in \bigcap\{\operatorname{st}(x, \mathscr{V}_\alpha) : \alpha < \kappa\} = \{x\}$. Por lo tanto, $\Delta_X = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Para constatar que (1) se sigue de (2), supongamos que hay $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_{X^2}$ con $\Delta_X = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para $x \in X$ y $\alpha < \kappa$, fijemos $V(x,\alpha) \in \tau_X$ de tal modo que $(x,x) \in V(x,\alpha)^2 \subseteq U_\alpha$ y definamos $\mathscr{V}_\alpha := \{V(x,\alpha) : x \in X\}$. Para ver que la colección $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia diagonal, tomemos $x, y \in X$ con $y \in \bigcap\{\operatorname{st}(x, \mathscr{V}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ y notemos que, para cada $\alpha < \kappa$, hay $z_\alpha \in X$ con $\{x,y\} \subseteq V(z_\alpha, \alpha)$. De inmediato, $(x,y) \in \bigcap\{V(z_\alpha,\alpha)^2 : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} = \Delta_X$, es decir, $x = y$. □

Proposición 2.22. *Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si X admite una familia diagonal.*

Demostración. Por un lado, si X es T_1 entonces X^2 también lo es y, por ende, $\{X^2 \setminus \{x\} : x \in X^2 \setminus \Delta_X\}$ es un subconjunto de τ_{X^2} con $\Delta_X = \bigcap\{X^2 \setminus \{x\} : x \in X^2 \setminus \Delta_X\}$. Por otro lado, si $\mathscr{U} \subseteq \tau_{X^2}$ satisface la igualdad $\Delta_X = \bigcap \mathscr{U}$ y $x, y \in X$ son puntos distintos, entonces hay $U \in \mathscr{U}$ tal que $(x,y) \notin U$. Adicionalmente, la condición $(x,x) \in U$ implica la existencia de $V, W \in \tau_X$ con $(x,x) \in V \times W \subseteq U$. Así, $W \in \tau_X$ cumple $x \in W$ y $y \notin W$. En suma, X es T_1. □

Como en el caso del peso separante y del peso punto-separante, el grado diagonal únicamente está definido cuando el espacio en cuestión es T_1 (véase la proposición 2.22); en específico, si X es un espacio T_1, el *grado diagonal* de X es el número cardinal

$$
\begin{aligned}
\Delta(X) &:= \min\{\kappa \geqslant 1 : X \text{ admite una familia diagonal } \{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}\} \\
&= \min\left\{\kappa \geqslant 1 : \exists\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_{X^2}\left(\Delta_X = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

En particular, observemos que si X es un espacio metrizable, entonces $\Delta(X) \leqslant \omega$ porque en los espacios metrizables todos los subconjuntos cerrados son de tipo G_δ (véase [2, Corollary 4.1.12, p. 254]).

También, si X es T_1 y $|X| < 3$, es sencillo comprobar que $\Delta(X) = |X|$. Por otro lado, si $|X| \geqslant 3$ y para cualquier $x \in X$ se define $\mathscr{V}_x := \{X \setminus \{y\} : y \in X \setminus \{x\}\}$, entonces un argumento rutinario muestra que $\{\mathscr{V}_x : x \in X\}$ es una familia diagonal, lo cual implica que $\Delta(X) \leqslant |X|$.

Además, de manera similar a *psw* (véase el lema 2.16), resulta que Δ también caracteriza cuándo un espacio es discreto en términos de su relación con el cardinal ω:

Lema 2.23. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio X que es T_1.*

1. $\Delta(X) < \omega$.

2. *X es discreto.*

3. $\Delta(X) = 1$.

Demostración. Claramente, (3) implica (1). Además, (2) implica (3) porque $\Delta_X = \bigcap\{\Delta_X\}$. Finalmente, para la implicación de (1) a (2) observemos que si $\Delta(X) < \omega$, $\{\mathscr{V}_k : k < \Delta(X)\}$ es una familia diagonal y $x \in X$, entonces la relación $\{x\} = \bigcap\{\mathrm{st}\,(x, \mathscr{V}_k) : k < \Delta(X)\}$ garantiza que x es un punto aislado de X. $\square$

Por otra parte, si X es un conjunto y τ y σ son topologías T_1 en X tales que $\tau \subseteq \sigma$, entonces una cubierta abierta separante de (X, τ) y una familia diagonal en (X, τ) son, respectivamente, una cubierta abierta separante de (X, σ) y una familia diagonal en (X, σ). Este hecho es prácticamente la demostración de nuestro siguiente resultado.

Proposición 2.24. *Sean X un conjunto y $\phi \in \{sw, \Delta\}$. Si τ y σ son topologías T_1 en X con $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\phi(X, \sigma) \leqslant \phi(X, \tau)$.*

Una consecuencia de la proposición 2.24 es que *sw* está acotado en términos de la cardinalidad del espacio cuando éste es infinito. Para esto necesitamos primero una definición auxiliar.

Definición 2.25. Si κ es un cardinal infinito, el *logaritmo* de κ es el número cardinal $\log(\kappa) := \text{mín}\{\lambda \geqslant \omega : \kappa \leqslant 2^{\lambda}\}$.

Por ejemplo, cualquier número cardinal κ con $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$ satisface que $\log(\kappa) = \omega$, mientras que $\log(\mathfrak{c}^{+}) \geqslant \omega_1$.

Sean X un conjunto y τ_{cof} la topología cofinita en X. Un argumento rutinario muestra que si τ es una topología T_1 en X, entonces se cumplen las relaciones $\tau_{cof} \subseteq \tau \subseteq P(X)$. Además, en los ejemplos 4.2 y 4.4 demostraremos que si X es infinito, entonces $sw(X, P(X)) = \log(|X|)$ y $sw(X, \tau_{cof}) = |X|$. El siguiente resultado se obtiene al combinar estos hechos con la proposición 2.24.

Corolario 2.26. *Si X es un espacio infinito y T_1, entonces* $\log(|X|) \leqslant sw(X) \leqslant |X|$.

De vuelta al grado diagonal, la relación $\Delta(X) \leqslant |X|$ se puede mejorar si X es un espacio T_3:

Proposición 2.27. $\Delta(X) \leqslant nw(X)$, *siempre que X es un espacio T_3.*

Demostración. Claramente el resultado es válido cuando $\Delta(X) = 1$. Supongamos entonces que $\Delta(X) > 1$ y empleemos el lema 2.23 para garantizar que $\Delta(X) \geqslant \omega$. Lo que sigue es fijar una red $\mathscr{N}$ para X con $|\mathscr{N}| = nw(X)$ y comprobar que $\{\overline{N} : N \in \mathscr{N}\}$ también es una red. En efecto, si $U \in \tau_X$ y $x \in X$ cumplen $x \in U$, entonces por regularidad existe $V \in \tau_X$ con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Luego, si $N \in \mathscr{N}$ satisface $x \in N \subseteq V$, se constata que $x \in \overline{N} \subseteq U$.

Ahora, para cada $p \in X^2 \setminus \Delta_X$ hay $U_p, V_p \in \tau_X$ con $p \in U_p \times V_p \subseteq X^2 \setminus \Delta_X$ y, por ende, existen $N_p, M_p \in \mathscr{N}$ con $p \in \overline{N_p} \times \overline{M_p} \subseteq U_p \times V_p \subseteq X^2 \setminus \Delta_X$. Luego, $\overline{N_p} \times \overline{M_p} \in \tau^{*}_{X^2}$ y $X^2 \setminus \Delta_X = \bigcup\{\overline{N_p} \times \overline{M_p} : p \in X^2 \setminus \Delta_X\}$. Finalmente, $\Delta_X = \bigcap\{X^2 \setminus (\overline{N_p} \times \overline{M_p}) : p \in X^2 \setminus \Delta_X\}$ implica que $\Delta(X) \leqslant \left|\{\overline{N_p} \times \overline{M_p} : p \in X^2 \setminus \Delta_X\}\right| \leqslant nw(X) \cdot nw(X)$; en consecuencia, la relación $\Delta(X) \geqslant \omega$ garantiza que $nw(X) \geqslant \omega$ y, por extensión, que $\Delta(X) \leqslant nw(X)$. $\square$

También es posible demostrar que al combinar al grado diagonal con el grado de Lindelöf se obtiene una cota superior para el peso punto-separante.

Proposición 2.28. *Si X es un espacio T_1, se satisface que* $psw(X) \leqslant \Delta(X) \cdot L(X)$.

Demostración. Sea $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \Delta(X)\}$ una familia diagonal y para cada $\alpha < \Delta(X)$ fijemos $\mathscr{U}_\alpha \in [\mathscr{V}_\alpha]^{\leqslant L(X)}$ con $\bigcup \mathscr{U}_\alpha = X$. Claramente, $\mathscr{U} := \bigcup\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha < \Delta(X)\}$ es una cubierta abierta de X. Además, $\mathscr{U}$ es separante puesto que si $x, y \in X$ satisfacen $y \in \bigcap \mathscr{U}(x)$, entonces para toda $\alpha < \Delta(X)$ hay $U_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$ con $x \in U_\alpha$; en especial, $U_\alpha \in \mathscr{U}(x)$ y así, $y \in U_\alpha$. Luego, las relaciones $y \in \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \Delta(X)\} \subseteq \bigcap\{\mathrm{st}\,(x, \mathscr{U}_\alpha) : \alpha < \Delta(X)\} \subseteq \bigcap\{\mathrm{st}\,(x, \mathscr{V}_\alpha) : \alpha < \Delta(X)\}$ aseguran la igualdad $y = x$. Por último, $\mathrm{ord}\,(x, \mathscr{U}) \leqslant |\mathscr{U}| = |\bigcup\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha < \Delta(X)\}| \leqslant \Delta(X) \cdot \sup\{|\mathscr{U}_\alpha| : \alpha < \Delta(X)\} \leqslant \Delta(X) \cdot L(X)$ y, por lo tanto, $psw(X) \leqslant \Delta(X) \cdot L(X)$. □

Corolario 2.29. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff infinito, entonces $\Delta(X) = w(X)$.*

Demostración. Una combinación de las proposiciones 2.18, 2.27 y 2.28 con la compacidad de X garantiza las relaciones $w(X) = psw(X) \leqslant \Delta(X) \cdot L(X) = \Delta(X) \leqslant nw(X) = w(X)$; en suma, $\Delta(X) = w(X)$. □

El *grado de Lindelöf débil* de un espacio X es el número cardinal

$$wL(X) := \text{mín}\left\{\kappa \geqslant 1 \,:\, \forall \mathscr{U} \subseteq \tau_X \left(X = \bigcup \mathscr{U} \to \exists \mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\kappa} \left(\overline{\bigcup \mathscr{V}} = X\right)\right)\right\}.$$

Diremos que X es *débilmente Lindelöf* cuando $wL(X) \leqslant \omega$. Nuestro siguiente resultado conecta a wL con c, L y s.

Proposición 2.30. *Las siguientes relaciones son ciertas para cualquier espacio X.*

1. $wL(X) \leqslant \text{mín}\,\{c(X), L(X)\}$.

2. $hwL(X) = s(X)$.

Demostración. Claramente, $wL(X) \leqslant L(X)$. Además, la proposición 2.5 asegura que si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant c(X)}$ con $X = \overline{\bigcup \mathscr{V}}$. Por lo tanto, $wL(X) \leqslant c(X)$.

Con el inciso (2) en mente, notemos que la desigualdad $wL(X) \leqslant c(X)$ junto con la proposición 2.10 implican la relación $hwL(X) \leqslant s(X)$. Para finalizar observemos que si D

es un subespacio discreto de X, entonces $|D| = s(D) \leqslant wL(D)$ porque la cubierta abierta $\{\{x\} : x \in D\}$ no tiene subcolecciones propias con unión densa en D. Así, $s(D) \leqslant hwL(X)$ y, por ende, la proposición 2.9(1) garantiza que $s(X) \leqslant hwL(X)$. $\square$

Para finalizar esta sección mostraremos que en el ámbito de los espacios regulares el hecho de que wL es finito implica que L coincide con wL.

Proposición 2.31. *Si X es un espacio regular y $wL(X) < \omega$, entonces $wL(X) = L(X)$.*

Demostración. En virtud de la proposición 2.30(1), sólo necesitamos probar que $L(X) \leqslant wL(X)$. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$ sean $U_x \in \mathscr{U}$ con $x \in U_x$ y $V_x \in \tau_X$ con $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Luego, para la cubierta $\{V_x : x \in X\}$ existe $S \in [X]^{\leqslant wL(X)}$ con $X = \overline{\bigcup\{V_x : x \in S\}}$. De esta manera, como S es finito resulta que $X = \overline{\bigcup\{V_x : x \in S\}} = \bigcup\{\overline{V_x} : x \in S\} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in S\}$. Por lo tanto, $\{U_x : x \in S\}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$ de tamaño a lo sumo $wL(X)$; en consecuencia, $L(X) \leqslant wL(X)$. $\square$

2.2 Funciones cardinales locales

Todas las funciones cardinales definidas hasta ahora se basan en una propiedad topológica global del espacio correspondiente. A continuación presentaremos funciones cardinales determinadas mediante propiedades topológicas locales.

Sean X un espacio topológico, $\mathscr{B}, \mathscr{V} \subseteq \tau_X^+$ y $x \in X$. Diremos que $\mathscr{B}$ es una *π-base local para X en x* si para cada $U \in \tau_X(x)$ existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq U$. Si además $\mathscr{B}(x) = \mathscr{B}$, entonces diremos que $\mathscr{B}$ es una *base local para X en x*. Por otra parte, cuando $\bigcap \mathscr{V} = \{x\}$, diremos que $\mathscr{V}$ es una *pseudobase local para X en x*. Finalmente, $\mathscr{V}$ será una *pseudobase para X* si para cada $x \in X$ la colección $\mathscr{V}(x)$ es una pseudobase local para X en x.

Nuestro primer resultado de esta sección es que la existencia de una pseudobase es equivalente a que el espacio en cuestión sea T_1.

Proposición 2.32. *Un espacio X tiene una pseudobase si y sólo si X es T_1.*

Demostración. Si $\mathscr{V}$ es una pseudobase para X y $x, y \in X$ son distintos, la condición $y \notin \bigcap \mathscr{V}(x)$ produce un elemento V de $\mathscr{V}(x)$ con $y \notin V$; en particular, X es T_1. Por otra parte, cuando X es T_1, se puede comprobar sin dificultad que τ_X^+ es una pseudobase para X. $\square$

En contraste con lo establecido en la proposición 2.32, el carácter, el π-carácter y la estrechez siempre están bien definidas independientemente de la separación del espacio.

Las funciones cardinales locales que presentaremos se establecerán a partir de los siguientes números cardinales:

$$\begin{aligned}
\chi(x, X) &:= \text{mín}\left\{|\mathscr{B}| \,:\, \mathscr{B} \text{ es una base local para } X \text{ en } x\right\};\\
\pi\chi(x, X) &:= \text{mín}\left\{|\mathscr{B}| \,:\, \mathscr{B} \text{ es una } \pi\text{-base local para } X \text{ en } x\right\};\\
\psi(x, X) &:= \text{mín}\left\{|\mathscr{V}| \,:\, \mathscr{V} \text{ es una pseudobase local para } X \text{ en } x\right\} \text{ y}\\
t(x, X) &:= \text{mín}\left\{\kappa \geqslant 1 \,:\, \forall A \subseteq X \left(x \in \overline{A} \to \exists B \in [A]^{\leqslant\kappa}\left(x \in \overline{B}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

El *carácter*, el *π-carácter*, el *pseudocarácter* y la *estrechez* de X se definen, correspondientemente, como los números cardinales:

$$\begin{aligned}
\chi(X) &:= \sup\left\{\chi(x, X) \,:\, x \in X\right\};\\
\pi\chi(X) &:= \sup\left\{\pi\chi(x, X) \,:\, x \in X\right\};\\
\psi(X) &:= \sup\left\{\psi(x, X) \,:\, x \in X\right\} \text{ y}\\
t(X) &:= \sup\left\{t(x, X) \,:\, x \in X\right\}.
\end{aligned}$$

De esta manera, X es un espacio primero numerable si y sólo si $\chi(X) \leqslant \omega$. Además, diremos que X tiene *π-carácter numerable* si $\pi\chi(X) \leqslant \omega$, *pseudocarácter numerable* si $\psi(X) \leqslant \omega$ y *estrechez numerable* si $t(X) \leqslant \omega$.

Lo primero que haremos será demostrar que, de manera similar a psw y Δ (véanse los lemas 2.16 y 2.23), las funciones χ, $\pi\chi$, ψ y t caracterizan cuándo un espacio es discreto en términos de su relación con el cardinal ω:

Lema 2.33. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio X que es T_1 y $\phi \in \{\chi, \pi\chi, \psi, t\}$.*

1. *$\phi(X) < \omega$.*

2. *X es discreto.*

3. $\phi(X) = 1$.

Demostración. Claramente, (3) implica (1). Además, (2) implica (3) porque si X es discreto, entonces para cualquier $x \in X$ se satisface que $\{\{x\}\}$ es una base, una π-base y una pseudobase local para X en x. También, si $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, entonces $x \in A$ porque $\overline{A} = A$ y, por ende, $\{x\}$ es un subconjunto de A con $x \in \overline{\{x\}}$.

Para ver que (1) implica (2) supongamos que $\phi \in \{\chi, \psi\}$ cumple $\phi(X) < \omega$. Resulta para cada $x \in X$ existe una colección finita $\mathscr{B}_x \subseteq \tau_X$ con $\{x\} = \bigcap \mathscr{B}_x$; en consecuencia, x es un punto aislado de X.

Por otra parte, si $t(X) < \omega$, $x \in X$ y $A \subseteq X$ cumplen $x \in \overline{A}$, entonces hay $B \in [A]^{<\omega}$ con $x \in \overline{B}$ y $\overline{B} = B$, lo cual implica que $x \in A$, es decir, todos los subconjuntos de X son cerrados.

Para terminar supongamos que $\pi\chi(X) < \omega$. Sean $x \in X$ y $\mathscr{B}$ una π-base local finita para X en x. Nuestro primer objetivo es demostrar que $x \in \bigcup \mathscr{B}$. Efectivamente, si $e : \mathscr{B} \to \bigcup \mathscr{B}$ es una función de elección, entonces $x \in \overline{\operatorname{img}(e)}$ porque si $U \in \tau_X(x)$, entonces hay $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq U$ y, por ende, $e(B) \in \operatorname{img}(e) \cap U$. Así, como $\operatorname{img}(e)$ es un conjunto finito en un espacio T_1, resulta que $x \in \operatorname{img}(e)$; en particular, $x \in \bigcup \mathscr{B}$.

Finalmente, sean $e : \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x) \to \bigcup (\mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x))$ una función de elección y

$$U := \bigcap \mathscr{B}(x) \cap \bigcap \{X \setminus \{e(B)\} : B \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x)\}.$$

Claramente, $U \in \tau_X$ y $x \in U$. Por otra parte, si $y \in X$ es distinto de x, entonces $U \setminus \{y\} \in \tau_X(x)$ y, por consiguiente, existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq U \setminus \{y\}$. Luego, la contención $B \subseteq U$ implica la relación $B \in \mathscr{B}(x)$ porque si $B \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x)$, entonces $e(B) \in B \subseteq U \subseteq X \setminus \{e(B)\}$, un absurdo. De esta manera, B es un elemento de $\mathscr{B}(x)$ y $y \notin B$, lo cual garantiza que $y \notin U$. Este argumento demuestra que $\{x\}$ coincide con el abierto U, es decir, x es un punto aislado de X. $\square$

Las relaciones elementales que privan entre las funciones cardinales locales se pueden hallar en la siguiente proposición.

Proposición 2.34. *Si X es un espacio topológico T_1, Y es un subconjunto de X, $x \in X$ y*

$y \in Y$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. $\chi(y, Y) \leqslant \chi(y, X)$, $\psi(y, Y) \leqslant \psi(y, X)$ *y* $t(y, Y) \leqslant t(y, X)$.

2. $\chi(Y) \leqslant \chi(X)$, $\psi(Y) \leqslant \psi(X)$ *y* $t(Y) \leqslant t(X)$*; es decir, las funciones* χ, ψ *y* t *son monótonas.*

3. $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$, $t(x, X) \leqslant \chi(x, X)$ *y* $\pi\chi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$.

4. $\text{máx}\{\psi(X), t(X), h\pi\chi(X)\} \leqslant \chi(X)$.

Demostración. En vista de que los incisos (2) y (4) se siguen, respectivamente, de los incisos (1) y (3), basta con exponer la prueba para estos últimos. Para (1) notemos que si $\mathscr{B}$ es una base local y $\mathscr{V}$ una pseudobase local para X en y, entonces las colecciones $\{B \cap Y : B \in \mathscr{B}\}$ y $\{V \cap Y : V \in \mathscr{V}\}$ son, respectivamente, una base local y una pseudobase local para Y en y. Por lo tanto, $\chi(y, Y) \leqslant \chi(y, X)$ y $\psi(y, Y) \leqslant \psi(y, X)$. Por otra parte, si $A \subseteq Y$ cumple que $y \in \text{cl}_Y A = Y \cap \text{cl}_X A$, entonces hay $B \in [A]^{\leqslant t(y,X)}$ con $y \in \text{cl}_X B$. De inmediato, $y \in \text{cl}_Y B$ y así, $t(y, Y) \leqslant t(y, X)$.

Con respecto a (3) observemos que, como X es T_1, cualquier base local en x también es una pseudobase local en x; en especial, $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$. Por otro lado, la desigualdad $\pi\chi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$ es consecuencia de que toda base local en x es una π-base local en x. Para concluir, fijemos una base local $\mathscr{B}$ para X en x con $|\mathscr{B}| = \chi(x, X)$ y un subconjunto A de X con $x \in \overline{A}$. Así, si $e : \mathscr{B} \to \bigcup\{B \cap A : B \in \mathscr{B}\}$ es una función de elección, entonces $B := \text{img}(e)$ es un miembro de $[A]^{\leqslant\chi(x,X)}$ tal que $x \in \overline{B}$. Finalmente, $t(x, X) \leqslant \chi(x, X)$. □

En el ejemplo 4.3 veremos que las funciones cardinales ψ y χ pueden diferir de las funciones t y $\pi\chi$ tanto como se desee.

Las interacciones básicas entre las funciones cardinales locales y las funciones cardinales globales se pueden encontrar en el siguiente resultado.

Proposición 2.35. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualquier espacio X.*

1. $\chi(X) \leqslant w(X) \leqslant \chi(X) \cdot |X|$.

2. $\pi\chi(X) \leqslant \pi w(X)$.

3. $\pi w(X) = d(X) \cdot \pi\chi(X)$*.*

4. $t(X) \leqslant hd(X)$*.*

5. $t(X) \leqslant h\pi\chi(X)$*.*

6. Cuando X *es* T_1*,* $\psi(X) \leqslant$ *mín* $\{psw(X), \Delta(X)\}$*.*

7. Si X *tiene la propiedad de Hausdorff, entonces* $\psi(X) \leqslant hL(X)$*.*

Demostración. Para (1) observemos que si $\mathscr{B}$ es una base para X con $|\mathscr{B}| = w(X)$ y $x \in X$, entonces $\mathscr{B}(x)$ es una base local para X en x. De inmediato, $\chi(x, X) \leqslant |\mathscr{B}|$ y, por ende, $\chi(X) \leqslant w(X)$. Ahora, si para cada $x \in X$, $\mathscr{B}_x$ es una base local para X en x con $|\mathscr{B}_x| \leqslant \chi(X)$, entonces $\mathscr{B} := \bigcup\{\mathscr{B}_x : x \in X\}$ es una base para X y $|\mathscr{B}| \leqslant \chi(X) \cdot |X|$. En consecuencia, $w(X) \leqslant \chi(X) \cdot |X|$.

El inciso (2) se sigue de que toda π-base para X resulta ser una π-base local en cada uno de sus puntos.

Para (3) notemos primero que la desigualdad $d(X) \cdot \pi\chi(X) \leqslant \pi w(X)$ se deduce a partir de la proposición 2.14(1) y del inciso (2) del presente resultado. Por otra parte, si D es un subconjunto denso de X con $|D| = d(X)$ y para cada $x \in D$ fijamos una π-base local $\mathscr{B}_x$ para X en x con $|\mathscr{B}_x| \leqslant \pi\chi(X)$, entonces la colección $\mathscr{B} := \bigcup\{\mathscr{B}_x : x \in D\}$ es una π-base para X con $|\mathscr{B}| \leqslant d(X) \cdot \pi\chi(X)$.

Con los incisos (4) y (5) en mente, fijemos $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$. Observemos que si D es un subconjunto denso de A con $|D| \leqslant hd(X)$, entonces $x \in \overline{D}$ y, por ende, $t(x, X) \leqslant hd(X)$. Ahora, sea $\mathscr{B}$ una π-base local para $\overline{A}$ en x con $|\mathscr{B}| \leqslant h\pi\chi(X)$. En estas condiciones, si $\mathscr{B}' := \{B \cap A : B \in \mathscr{B}\}$, $e : \mathscr{B}' \to \bigcup \mathscr{B}'$ es una función de elección y $B := \operatorname{img}(e)$, entonces se satisfacen las pertenencias $B \in [A]^{\leqslant h\pi\chi(X)}$ y $x \in \overline{B}$.

El inciso (6) es consecuencia de que si $\mathscr{V}$ es una cubierta abierta separante para X tal que, para cada $x \in X$, $\operatorname{ord}(x, \mathscr{V}) \leqslant psw(X)$, y $\{\mathscr{V}_\alpha : \alpha < \Delta(X)\}$ es una familia diagonal, entonces las colecciones $\mathscr{V}(x)$ y $\{\operatorname{st}(x, \mathscr{V}_\alpha) : \alpha < \Delta(X)\}$ son pseudobases locales para X en x. En suma, $\psi(X) \leqslant \text{mín}\,\{psw(X), \Delta(X)\}$.

Finalmente, para el inciso (7) fijemos $x \in X$. La propiedad de Hausdorff garantiza que para cada $y \in X \setminus \{x\}$ existen $U_y, V_y \in \tau_X$ con $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Así, la colección

$\{V_y : y \in X \setminus \{x\}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus \{x\}$ y, por ende, hay $Y \in [X \setminus \{x\}]^{\leqslant hL(X)}$ tal que $\bigcup\{V_y : y \in Y\} = X \setminus \{x\}$. Para concluir, notemos que las relaciones

$$\bigcap\{U_y : y \in Y\} \cap (X \setminus \{x\}) \subseteq \bigcap\{U_y : y \in Y\} \cap \Big(\bigcup\{V_y : y \in Y\}\Big) = \emptyset$$

aseguran la igualdad $\bigcap\{U_y : y \in Y\} = \{x\}$. De este modo, $\{U_y : y \in Y\}$ es una pseudobase local para X en x con $|\{U_y : y \in Y\}| \leqslant hL(X)$ y, por lo tanto, $\psi(X) \leqslant hL(X)$. □

La proposición 2.9(3) y nuestro próximo resultado constatan que algunas de las funciones cardinales globales y locales que hemos expuesto hasta el momento tienen un comportamiento especial con respecto a los subconjuntos densos.

Proposición 2.36. *Los siguientes enunciados son ciertos para un espacio topológico X, un subconjunto denso D de X y $x \in D$.*

1. $d(X) \leqslant d(D) \leqslant d(X) \cdot t(X)$.

2. $\pi w(D) \leqslant \pi w(X)$ *y* $\pi\chi(x, D) \leqslant \pi\chi(x, X)$.

3. *Cuando X es regular,* $\pi w(D) = \pi w(X)$, $\pi\chi(x, D) = \pi\chi(x, X)$ *y* $\chi(D) = \chi(X)$.

Demostración. Para el inciso (1) notemos que, como cualquier subconjunto denso de D también es denso en X, resulta que $d(X) \leqslant d(D)$. Por otro lado, si E es un subconjunto denso de X con $|E| = d(X)$, entonces para cada $y \in E$ hay $F_y \in [D]^{\leqslant t(X)}$ que satisface la pertenencia $y \in \overline{F_y}$. Luego, $F := \bigcup\{F_y : y \in E\}$ es un subconjunto denso de D con $|F| \leqslant d(X) \cdot t(X)$. Por lo tanto, $d(D) \leqslant d(X) \cdot t(X)$.

En virtud de que las demostraciones de las relaciones de los incisos (2) y (3) son similares entre sí, únicamente expondremos el argumento para $\pi\chi$.

Con el comentario anterior en mente, el inciso (2) es consecuencia de que si $\mathscr{B}$ es una π-base local para X en x, entonces la colección $\{B \cap D : B \in \mathscr{B}\}$ es una π-base local para D en x; en especial, $\pi\chi(x, D) \leqslant \pi\chi(x, X)$.

Por último, para el inciso (3), asumamos que X es un espacio regular, fijemos una π-base local $\mathscr{B}$ para D en x y, para cada $B \in \mathscr{B}$, sea $U_B \in \tau_X$ con $U_B \cap D = B$. Veamos que la colección $\{U_B : B \in \mathscr{B}\}$ es una π-base local para X en x. Si $U \in \tau_X(x)$ entonces, como X es regular, hay $V \in \tau_X$ con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. De este modo, $V \cap D \in \tau_D(x)$ y así, existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq V \cap D$. Finalmente, la densidad de D en X implica que $U_B \subseteq \overline{U_B} = \overline{B} \subseteq \overline{V} \subseteq U$; en consecuencia, $\pi\chi(x, X) \leqslant \pi\chi(x, D)$. □

Finalizamos la presente sección con un par de resultados que muestran la repercusión que tiene la compacidad local de un espacio de Hausdorff con respecto a la interacción entre el carácter y el pseudocarácter.

Proposición 2.37. *Si X es un espacio localmente compacto con la propiedad de Hausdorff y $x \in X$, entonces $\psi(x, X) = \chi(x, X)$. En especial, $\psi(X) = \chi(X)$.*

Demostración. En virtud de la proposición 2.34(3) es suficiente probar la desigualdad $\chi(x, X) \leqslant \psi(x, X)$. Ahora, cuando $\psi(x, X) < \omega$, x es un punto aislado y así, $\chi(x, X) = 1$. Por otra parte, si $\psi(x, X) \geqslant \omega$, fijamos una pseudobase local $\mathscr{U}$ para X en x tal que $|\mathscr{U}| = \psi(x, X)$. El siguiente enunciado es la piedra angular de nuestra demostración.

Afirmación. Existe una colección $\mathscr{V} \subseteq \tau_X$ con las siguientes características:

1. $|\mathscr{V}| \leqslant \psi(x, X)$;

2. $\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\}$ es una familia de subespacios compactos de X y

3. $\bigcap \mathscr{V} = \{x\} = \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\}$.

Empleemos que X es localmente compacto para fijar K, un subconjunto compacto de X, con $x \in \operatorname{int} K$. Para cada $U \in \mathscr{U}$, utilicemos que $x \in U \cap \operatorname{int} K$ combinado con la regularidad de X para hallar $V(U) \in \tau_X$ con $x \in V(U) \subseteq \overline{V(U)} \subseteq U \cap \operatorname{int} K$. Definamos $\mathscr{V} := \{V(U) : U \in \mathscr{U}\}$ y observemos que $\{x\} \subseteq \bigcap \mathscr{V} \subseteq \bigcap\{\overline{V(U)} : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \bigcap \mathscr{U} = \{x\}$; en consecuencia, el inciso (3) es cierto. Ahora, como $\mathscr{V}$ es una pseudobase local para X en x y la función $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ definida mediante $U \mapsto V(U)$ es suprayectiva, deducimos que $|\mathscr{V}| \leqslant \psi(x, X)$. Finalmente, como para cada $V \in \mathscr{V}$ se tiene que $\overline{V} \subseteq K$, el inciso (2) también se verifica.

Para terminar veamos que la familia $\mathscr{B} := \{\bigcap \mathscr{W} : \mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es una base local para X en x. Claramente, $\mathscr{B} \subseteq \tau_X$. También, como $|[\mathscr{V}]^{\leqslant\omega}| = |\mathscr{V}|$ porque $\mathscr{V}$ es pseudobase local para X en x y $\psi(x, X) \geqslant \omega$, se satisfacen las relaciones $|\mathscr{B}| \leqslant |[\mathscr{V}]^{<\omega}| = |\mathscr{V}| \leqslant \psi(x, X)$. Además, si $U \in \tau_X(x)$, en vista de que $\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\}$ es una familia de subconjuntos compactos de X tal que $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\} \subseteq U$, [2, Corollary 3.1.5, p. 124] garantiza la existencia de $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $x \in \bigcap \mathscr{W} \subseteq U$. En consecuencia, $\chi(x, X) \leqslant \psi(x, X)$.

□

Corolario 2.38. *Si X es un espacio finito o primero numerable o localmente compacto y T_2, entonces $w(X) \leqslant |X|$.*

Demostración. Cuando X es un espacio finito resulta que $\{\bigcap \tau_X(x) : x \in X\}$ es una base para X; en consecuencia, $w(X) \leqslant |X|$. Por otra parte, si X es infinito y primero numerable, entonces la relación $w(X) \leqslant |X|$ se infiere de la proposición 2.35(1). Finalmente, si X es infinito, localmente compacto y T_2, entonces las proposiciones 2.35(1), 2.35(6) y 2.37 implican que

$$w(X) \leqslant \chi(X) \cdot |X| = \psi(X) \cdot |X| \leqslant \Delta(X) \cdot |X| \leqslant |X|.$$

□

2.3 El número de Šanin

En esta sección definiremos las últimas funciones cardinales topológicas de este trabajo. Además, introduciremos los conceptos de calibre y precalibre para un espacio topológico y recopilaremos algunas características básicas que serán imprescindibles más adelante.

Una familia de conjuntos $\mathscr{A}$ es *centrada* si para cualquier $\mathscr{B} \in [\mathscr{A}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ se satisface que $\bigcap \mathscr{B} \neq \emptyset$. Por ejemplo, con esta terminología, un espacio topológico es compacto si y sólo si cualquier familia centrada formada por subconjuntos cerrados tiene intersección no vacía.

Definición 2.39. Sean X un espacio topológico y κ un número cardinal infinito.

1. κ es un *precalibre* para X si y sólo si para cualquier conjunto I con $|I| = \kappa$ y cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\kappa$ tal que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada.

2. κ es un *calibre* para X si y sólo si para cualquier conjunto I con $|I| = \kappa$ y cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\kappa$ con $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$.

Observemos que en los conceptos anteriores podemos prescindir del conjunto I y establecerlos únicamente en términos de κ. En otras palabras, si X es un espacio topológico y κ es un número cardinal, entonces κ es un precalibre (resp., calibre) para X si y sólo si para cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$).

Adicionalmente, notemos que si X es un espacio de Hausdorff infinito, entonces la proposición 1.3(2) garantiza que X admite una familia celular infinita y, por ende, no puede tener precalibre ω.

A continuación presentamos una equivalencia de estas nociones para cardinales regulares que no emplea índices.

Lema 2.40. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal regular, entonces κ es un precalibre (resp., calibre) para X si y sólo si para cualquier familia $\mathscr{U} \in [\tau_X^+]^\kappa$ existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^\kappa$ tal que $\mathscr{V}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap \mathscr{V} \neq \emptyset$).*

Demostración. La implicación directa es evidente y no necesita regularidad pues es suficiente enumerar sin repeticiones a un elemento $\mathscr{U}$ de $[\tau_X^+]^\kappa$. Para verificar la implicación restante fijemos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$.

Cuando $\left|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}\right| < \kappa$, la regularidad de κ genera $\beta < \kappa$ tal que $J := \{\alpha < \kappa : U_\alpha = U_\beta\}$ pertenece a $[\kappa]^\kappa$. En este caso sucede que $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$. Por otra parte, si $\left|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}\right| = \kappa$, un argumento similar al expuesto en el Caso 2 del lema 1.8 produce $I \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{U_\alpha : \alpha \in I\} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $U_\alpha \neq U_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in I$ son distintos. Finalmente, si $\mathscr{V} \in \left[\{U_\alpha : \alpha \in I\}\right]^\kappa$ es una familia centrada (resp., $\bigcap \mathscr{V} \neq \emptyset$) y $J := \{\alpha \in I : U_\alpha \in \mathscr{V}\}$, entonces $J \in [I]^\kappa$ y $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$). $\square$

Corolario 2.41. *Si κ es un cardinal regular y $o(X) < \kappa$, entonces κ es calibre para X.*

De este resultado se deduce que todos los cardinales regulares son calibres para cualquier espacio topológico finito.

Cuando X es un espacio topológico, el *número de Šanin débil* y el *número de Šanin* son, respectivamente, los cardinales

$$w\check{s}(X) := \text{mín}\left\{\kappa \geqslant \omega \,:\, \kappa^+ \text{ es un precalibre para } X\right\} \text{ y}$$
$$\check{s}(X) := \text{mín}\left\{\kappa \geqslant \omega \,:\, \kappa^+ \text{ es un calibre para } X\right\}.$$

Conviene resaltar que, en contraste con las funciones que definimos en las secciones anteriores, $\check{s}$ y $w\check{s}$ son infinitas por definición. Además, es claro que cualquier espacio topológico X verifica la desigualdad $w\check{s}(X) \leqslant \check{s}(X)$. Los siguientes resultados tienen el propósito de establecer algunas propiedades elementales de los cardinales $w\check{s}(X)$ y $\check{s}(X)$.

Proposición 2.42. *Si D es un subconjunto denso de X y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Cuando κ es un precalibre (resp., calibre) para D, κ es un precalibre (resp., calibre) para X.*

2. *Si κ es un precalibre para X, entonces κ es un precalibre para D.*

En especial, $w\check{s}(X) = w\check{s}(D)$ y $\check{s}(X) \leqslant \check{s}(D)$.

Demostración. Para el inciso (1), supongamos que κ es un precalibre (resp., calibre) para D y fijemos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$. De inmediato, $\{U_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_D^+$ y así, si $J \in [\kappa]^\kappa$ es tal que $\{U_\alpha \cap D : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{U_\alpha \cap D : \alpha \in J\} \neq \emptyset$), entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$).

Con el inciso (2) en mente, supongamos que κ es un precalibre para X y fijemos $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_D^+$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $U_\alpha \in \tau_X^+$ con $V_\alpha = U_\alpha \cap D$. Luego, si $J \in [\kappa]^\kappa$ satisface que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada, entonces $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es centrada también. □

La ausencia de calibres en el inciso (2) de la proposición 2.42 sugiere que el resultado correspondiente no es válido. Una combinación del lema 2.47 y la proposición 2.48 que veremos más adelante constata este hecho.

Proposición 2.43. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal regular. Si $\kappa > d(X)$, entonces κ es un calibre para X. En particular, $\check{s}(X) \leqslant d(X) + \omega$.*

Demostración. Fijemos un subconjunto denso D de X con $|D| = d(X)$ y una colección $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$. Si $e : \kappa \to \bigcup\{U_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$ es una función de elección, entonces como $|\operatorname{img}(e)| < \kappa$, la regularidad de κ produce $\beta < \kappa$ con $|e^{-1}\{e(\beta)\}| = \kappa$. De inmediato, $\{U_\alpha : \alpha \in e^{-1}\{e(\beta)\}\}$ satisface que $e(\beta) \in \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in e^{-1}\{e(\beta)\}\}$. $\square$

Proposición 2.44. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Si κ es un precalibre para X, entonces cualquier familia celular en X tiene cardinalidad menor a κ. En especial, $c(X) + \omega \leqslant w\check{s}(X)$.*

Demostración. Observemos que si $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$ es una familia celular en X, entonces para cualquier $\lambda \leqslant |\mathscr{U}|$ y $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^\lambda$ se verifica que $\mathscr{V}$ no es una familia centrada; en especial, la condición $\kappa \leqslant |\mathscr{U}|$ implica que κ no es un precalibre para X. $\square$

Proposición 2.45. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff y κ es un cardinal infinito, entonces κ es un precalibre para X si y sólo si κ es un calibre para X. En particular, $w\check{s}(X) = \check{s}(X)$.*

Demostración. La implicación recíproca es clara. Para la implicación directa supongamos que κ es un precalibre para X y fijemos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$. De este modo, la regularidad de X asegura que para cada $\alpha < \kappa$ existe $V_\alpha \in \tau_X^+$ con $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$. Finalmente, la hipótesis produce $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada y, por ende, la compacidad de X garantiza que $\emptyset \neq \bigcap\{\overline{V_\alpha} : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

Una consecuencia de las proposiciones 2.43 y 2.44 es que si X es un espacio topológico, entonces se satisfacen las relaciones $c(X) \leqslant w\check{s}(X) \leqslant \check{s}(X) \leqslant d(X)$. Ahora, un caso particular de lo que expondremos en el ejemplo 4.6 garantiza que $\check{s}\Big(D(2)^{\mathfrak{c}^+}\Big) < d\Big(D(2)^{\mathfrak{c}^+}\Big)$. Por otra parte, para ver que la relación $w\check{s}(X) \leqslant \check{s}(X)$ puede ser estricta necesitamos primero una definición adicional.

Definición 2.46. Si κ y λ son cardinales infinitos con $\kappa \leqslant \lambda$, le llamaremos Σ-*producto generalizado* al conjunto

$$\Sigma_\kappa(\lambda) := \Big\{x \in D(2)^\lambda \,:\, \big|\{\alpha < \lambda \,:\, x(\alpha) \neq 0\}\big| \leqslant \kappa\Big\}$$

equipado con la topología que hereda como subespacio de $D(2)^\lambda$.

Para fines del siguiente par de resultados denotaremos por $\pi_\alpha : D(2)^\lambda \to D(2)$ a la α-ésima proyección para cualquier cardinal infinito λ y cualquier $\alpha < \lambda$.

Lema 2.47. *Si κ y λ son cardinales infinitos, entonces $\Sigma_\kappa(\lambda)$ es un subconjunto denso de $D(2)^\lambda$.*

Demostración. Sea $F \in [\lambda]^{<\omega}$ y para cada $\alpha \in F$ tomemos $U_\alpha \in \tau^+_{D(2)}$. Si para toda $\alpha \in F$ elegimos $x_\alpha \in U_\alpha$, entonces es claro que el punto $x := \{(\alpha, x_\alpha) \,:\, \alpha \in F\} \cup ((\lambda \setminus F) \times \{0\})$ pertenece a la intersección $\Sigma_\kappa(\lambda) \cap (\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha])$. En otras palabras, cualquier elemento de la base canónica para $D(2)^\lambda$ tiene intersección no vacía con $\Sigma_\kappa(\lambda)$; en consecuencia, $\Sigma_\kappa(\lambda)$ es denso en $D(2)^\lambda$. $\square$

Más adelante, en el corolario 3.30, veremos que todos los cubos de Cantor satisfacen que todos los cardinales regulares no numerables son calibres de ellos. Utilizaremos este hecho en el siguiente resultado.

Proposición 2.48. *Si κ es un número cardinal, entonces $\Sigma_\kappa(\kappa^+)$ tiene precalibre κ pero no calibre κ.*

Demostración. Observemos primero que, como $D(2)^{\kappa^+}$ tiene calibre κ^+, una combinación de la proposición 2.42(2) y el lema 2.47 garantiza que κ^+ es un precalibre para $\Sigma_\kappa(\kappa^+)$. Por otra parte, para ver que κ no es un calibre para $\Sigma_\kappa(\kappa^+)$, notemos que el lema 2.47 asegura que la familia $\{\Sigma_\kappa(\kappa^+) \cap \pi_\alpha^{-1}\{1\} \,:\, \alpha < \kappa^+\}$ es un miembro de $[\tau_{\Sigma_\kappa(\kappa^+)}]^{\kappa^+}$. Por último, si $J \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ y $x \in \bigcap\{\Sigma_\kappa(\kappa^+) \cap \pi_\alpha^{-1}\{1\} \,:\, \alpha \in J\}$, entonces $x \in \Sigma_\kappa(\kappa^+)$ y $|\{\alpha < \kappa^+ \,:\, x(\alpha) \neq 0\}| = \kappa^+$, una contradicción. $\square$

Corolario 2.49. *El espacio $\Sigma_\omega(\omega_1)$ tiene precalibre ω_1 pero no calibre ω_1; en consecuencia,*

$$w\check{s}\left(\Sigma_\omega\left(\omega_1\right)\right) < \check{s}\left(\Sigma_\omega\left(\omega_1\right)\right).$$

En contraste con los resultados anteriores, no es posible determinar en ZFC, en el caso $c(X) = \omega$, si la desigualdad $c(X) \leqslant w\check{s}(X)$ es estricta o no (véase el teorema 3.38 más adelante).

Cerramos esta sección con un resultado de preservación bajo imágenes continuas que utilizaremos en el próximo capítulo.

Lema 2.50. *Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre espacios topológicos, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *$c(Y) \leqslant c(X)$ y $d(Y) \leqslant d(X)$.*
2. *Si κ es un precalibre (resp., calibre) para X, entonces κ también lo es para Y. En especial, $w\check{s}(Y) \leqslant w\check{s}(X)$ y $\check{s}(Y) \leqslant \check{s}(X)$.*
3. *Si además f es abierta, entonces $\pi w(Y) \leqslant \pi w(X)$ y $\pi\chi(Y) \leqslant \pi\chi(X)$.*

Demostración. Para el inciso (1) comencemos por observar que si D es un subconjunto denso de X, entonces $f[D]$ es un subconjunto denso de Y con $|f[D]| \leqslant |D|$; en especial, $d(Y) \leqslant d(X)$. Por otra parte, si $\mathscr{U}$ es una familia celular en Y entonces, como f es continua y suprayectiva, $\{f^{-1}[U] : U \in \mathscr{U}\}$ es una familia celular en X equipotente con $\mathscr{U}$. Así, $|\mathscr{U}| = |\{f^{-1}[U] : U \in \mathscr{U}\}| \leqslant c(X)$ y, por ende, $c(Y) \leqslant c(X)$.

El inciso (2) es porque si κ es precalibre (resp., calibre) para X y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y^+$, entonces $\{f^{-1}[U_\alpha] : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ y así, hay $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{f^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{f^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in J\} \neq \emptyset$); en particular, la colección $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in J\} \neq \emptyset$).

Para terminar, por la similitud de los argumentos que justifican el inciso (3), expondremos únicamente el resultado para $\pi\chi$. Sean $y \in Y$ y $x \in X$ con $f(x) = y$. Fijemos una π-base local $\mathscr{B}$ para X en x con $|\mathscr{B}| \leqslant \pi\chi(X)$. Observemos que, como f es una función abierta, $\{f[B] : B \in \mathscr{B}\}$ es un subconjunto de τ_Y^+ cuya cardinalidad es a lo sumo $\pi\chi(X)$.

Finalmente, para verificar que la colección previa es una π-base local para Y en y, notemos que si $V \in \tau_Y(y)$, entonces por continuidad existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq f^{-1}[V]$, lo cual implica la contención $f[B] \subseteq V$. $\square$

2.4 Interacciones entre funciones cardinales

Esta breve sección está dedicada a resumir en un par de diagramas las relaciones principales entre las funciones cardinales topológicas que presentamos en este capítulo, con la excepción de $\check{s}$ y $w\check{s}$ por la naturaleza infinita de éstas. Tengamos presente que si κ y λ son números cardinales, entonces la relación $\kappa \to \lambda$ representa la desigualdad $\kappa \geqslant \lambda$. También, conviene mencionar que todas las relaciones involucradas en el primer diagrama son válidas para cualquier espacio topológico.

$$
\begin{tikzcd}
 & & o(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & w(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & {|X|} \arrow[dl] & \\
\pi w(X) \arrow[dd] & & nw(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & hd(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & hL(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
d(X) \arrow[dr] & & s(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & L(X) \arrow[dl] \arrow[ddll, bend left] \\
 & c(X) \arrow[dr] & & e(X) & \\
 & & wL(X) & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: Primer diagrama.

Finalmente, algunas de las relaciones del segundo diagrama únicamente tienen sentido cuando el espacio topológico tiene cierto grado de separación, cuestión que resolveremos al indicar en cada flecha el axioma de separación respectivo que se debe añadir.

$$
\begin{tikzcd}
\pi\chi(X) & \pi w(X) \arrow[l] & h\pi w(X) \arrow[l] \arrow[dll] & & w(X) \arrow[ll] \arrow[dlll] \arrow[ddll] \arrow[dd, "+T_1"'] & \rho(X) \arrow[l, "+\text{semireg}"'] \arrow[ddl, "+T_2"] \\
h\pi\chi(X) \arrow[u] \arrow[d] & \chi(X) \arrow[l] \arrow[dddd] & & & & {|X|} \arrow[dl, "+T_1"] \arrow[dddd, "+T_1"] \\
t(X) & & nw(X) \arrow[rr, "+T_2"'] \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[dddrrr, "+T_3"] & & sw(X) \arrow[ddl, "+T_1"'] & \\
hd(X) \arrow[u] & & hL(X) \arrow[ddl, "+T_2"] & & & \\
 & & & psw(X) \arrow[dll, "+T_1"] & & \\
 & \psi(X) & & & & \Delta(X) \arrow[llll, "+T_1"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.2: Segundo diagrama.

En este apartado del texto estudiaremos las funciones cardinales topológicas definidas en el capítulo anterior centrándonos en los productos topológicos infinitos. Estableceremos a continuación cierta notación que permitirá simplificar la presentación y demostración de los resultados que expondremos en las siguientes tres secciones.

De ahora en adelante, a menos que se diga explícitamente lo contrario, la letra griega λ será un número cardinal infinito. Además, la colección $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ será una familia de espacios topológicos no indiscretos. El símbolo X representará el producto topológico de la familia $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ será la α-ésima proyección para cada $\alpha < \lambda$. Finalmente, si ϕ es una función cardinal y $S \subseteq \lambda$, entonces $\phi_S(X) := \sup\{\phi(X_\alpha) : \alpha \in S\}$.

3.1 Primeros resultados

El *espacio de Sierpiński* es el espacio topológico $\mathbb{F} := (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\})$. A la potencia $\mathbb{F}^\lambda$ se le conoce como el *cubo de Alexandroff de peso* λ. Lo primero que haremos será reunir hechos básicos acerca de las funciones cardinales de los espacios $\mathbb{F}^\lambda$ y $D(2)^\lambda$.

Para toda $\alpha < \lambda$ sean $\sigma_\alpha : \mathbb{F}^\lambda \to \mathbb{F}$ y $\rho_\alpha : D(2)^\lambda \to D(2)$ las proyecciones canónicas correspondientes. Además, para cada $\alpha < \lambda$ definamos la función $z_\alpha : \lambda \to \{0,1\}$ mediante la regla $z_\alpha := \{(\alpha, 0)\} \cup ((\lambda \setminus \{\alpha\}) \times \{1\})$. Notemos que $\{z_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tiene cardinalidad λ porque $z_\alpha \neq z_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \lambda$.

Lema 3.1. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si* $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, \pi w, h\pi w, \pi\chi, h\pi\chi, t, \chi\}$, *entonces* $\phi\left(\mathbb{F}^\lambda\right) = \lambda = \phi\left(D(2)^\lambda\right)$.

2. *Cuando* $\phi \in \{sw, psw, \Delta, \psi\}$ *se satisface que* $\phi\left(D(2)^\lambda\right) = \lambda$.

3. $d\left(\mathbb{F}^\lambda\right) = 1$.

Demostración. Para el inciso (1) notemos que, como $s \leqslant \min\{hd, hL\} \leqslant \max\{hd, hL\} \leqslant nw \leqslant w$, $\pi\chi \leqslant \pi w \leqslant w$, $t \leqslant h\pi\chi \leqslant h\pi w \leqslant w$ y $t \leqslant \chi \leqslant w$ (véanse las figuras 2.1 y 2.2), es suficiente ver que si $Y \in \{\mathbb{F}^\lambda, D(2)^\lambda\}$ y $\phi \in \{s, \pi\chi, t\}$, entonces $w(Y) \leqslant \lambda \leqslant \phi(Y)$. En vista de que los argumentos para $\mathbb{F}^\lambda$ y $D(2)^\lambda$ son similares, únicamente expondremos los detalles concernientes al espacio $\mathbb{F}^\lambda$. Para los siguientes párrafos, Y será el espacio $\mathbb{F}^\lambda$.

Consideremos la subbase canónica $\mathscr{S} := \{\sigma_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha < \lambda\} \cup \{Y\}$ para el espacio Y. Claramente, $|\mathscr{S}| \leqslant \lambda$. Además, si denotamos por $\mathscr{B}$ a la colección $\{\bigcap \mathscr{A} : \mathscr{A} \in [\mathscr{S}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$, entonces $\mathscr{B}$ es la base canónica para Y y se cumple la relación $|\mathscr{B}| \leqslant \lambda$; en particular, $w(Y) \leqslant \lambda$.

Para ver que $s(Y) \geqslant \lambda$ basta con observar que $\{z_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subespacio discreto de Y porque si $\alpha < \lambda$, entonces $\{z_\alpha\} = \sigma_\alpha^{-1}\{0\} \cap \{z_\beta : \beta < \lambda\}$.

Con la relación $t(Y) \geqslant \lambda$ en mente, denotaremos por $\overline{0} : \lambda \to \{0,1\}$ a la función constante cero y demostraremos que $t(\overline{0}, Y) \geqslant \lambda$. Mostremos primero que si $A := \{y \in Y : |\{\alpha < \lambda : y(\alpha) = 0\}| < \omega\}$, entonces $\overline{0} \in \overline{A}$. Efectivamente, si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\} \subseteq \tau_{\mathbb{F}}^+$, la función $y := \{(\alpha, 0) : \alpha \in F\} \cup \big((\lambda \setminus F) \times \{1\}\big)$ pertenece a la intersección $A \cap \bigcap_{\alpha \in F} \sigma_\alpha^{-1}[U_\alpha]$.

Ahora veamos que no existe $B \in [A]^{<\lambda}$ con $\overline{0} \in \overline{B}$. Sean $B \in [A]^{<\lambda}$, $\kappa := |B|$ y $\{y_\xi : \xi < \kappa\}$ una enumeración sin repeticiones de B. Si para toda $\xi < \kappa$ denotamos por S_ξ al conjunto $\{\alpha < \lambda : y_\xi(\alpha) = 0\}$, entonces $|S_\xi| < \omega$ y, por ende, $|\bigcup_{\xi<\kappa} S_\xi| < \lambda$. Para concluir, fijemos $\beta \in \lambda \setminus \bigcup_{\xi<\kappa} S_\xi$ y notemos que $\sigma_\beta^{-1}\{0\}$ es un elemento de $\tau_Y(\overline{0})$ que satisface la igualdad $B \cap \sigma_\beta^{-1}\{0\} = \emptyset$; en consecuencia, $\overline{0} \notin \overline{B}$.

Para finalizar con el inciso (1) argumentaremos que $\pi\chi(\overline{0}, Y) \geqslant \lambda$. Sea $\mathscr{B}$ una π-base local para Y en $\overline{0}$ y para cada $\alpha < \lambda$ fijemos $B_\alpha \in \mathscr{B}$ con $B_\alpha \subseteq \sigma_\alpha^{-1}\{0\}$. Además, para toda $B \in \mathscr{B}$ definamos $I_B := \{\alpha < \lambda : B_\alpha = B\}$. Demostraremos primero que $|I_B| < \omega$ para cualquier $B \in \mathscr{B}$. Fijemos $B \in \mathscr{B}$, $x \in B$, $F \in [\lambda]^{<\omega}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\} \subseteq \tau_{\mathbb{F}}^+$ con $x \in \bigcap_{\alpha \in F} \sigma_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq B$. Luego, si $|I_B| \geqslant \omega$ y $\beta \in I_B \setminus F$, la función $y := \{(\alpha, x(\alpha)) : \alpha \in F\} \cup ((\lambda \setminus F) \times \{1\})$ es un elemento de B y $y(\beta) = 1$. No obstante, las condiciones $B_\beta = B$ y $B_\beta \subseteq \sigma_\beta^{-1}\{0\}$ implican que $y(\beta) = 0$, una contradicción.

Por último, si $|\mathscr{B}| < \lambda$, entonces $|\bigcup\{I_B : B \in \mathscr{B}\}| < \lambda$ y, por consiguiente, existe $\alpha \in \lambda \setminus \bigcup\{I_B : B \in \mathscr{B}\}$; es decir, $B_\alpha \notin \mathscr{B}$, lo cual es absurdo. En suma, $\pi\chi(\overline{0}, Y) \geqslant \lambda$.

Continuemos con el inciso (2). En virtud de las relaciones $\psi \leqslant psw \leqslant sw \leqslant w$ para espacios T_1, y $w = \Delta$ para espacios compactos de Hausdorff infinitos (véanse el corolario 2.29

y la figura 2.2), es suficiente mostrar que $\psi(\overline{0}, D(2)^\lambda) \geqslant \lambda$ pues, por el inciso (1) del presente resultado, se satisface la igualdad $w(D(2)^\lambda) = \lambda$.

Sean $\mathscr{V}$ un subconjunto de $\tau_{D(2)^\lambda}(\overline{0})$ con $|\mathscr{V}| < \lambda$, $\kappa := |\mathscr{V}|$ y $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración fiel de $\mathscr{V}$. Para cada $\alpha < \kappa$ sean $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega}$ y $\{U(\alpha, \beta) : \beta \in F_\alpha\} \subseteq \tau^+_{D(2)}$ con $\overline{0} \in \bigcap_{\beta \in F_\alpha} \rho_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)] \subseteq V_\alpha$. Luego, la relación $|\bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha| < \lambda$ produce $\beta \in \lambda \setminus \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$ y, por ende, $x := \{(\beta, 1)\} \cup ((\lambda \setminus \{\beta\}) \times \{0\})$ es un elemento de $\bigcap\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \setminus \{\overline{0}\}$. Por esta razón, $\mathscr{V}$ no es una pseudobase local para $D(2)^\lambda$ en $\overline{0}$. En conclusión, $\psi(\overline{0}, D(2)^\lambda) \geqslant \lambda$.

Finalmente, el inciso (3) es cierto porque si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\} \subseteq \tau^+_{\mathbb{F}}$, entonces $\overline{0} \in \bigcap_{\alpha \in F} \sigma_\alpha^{-1}[U_\alpha]$; es decir, $\{\overline{0}\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{F}^\lambda$. □

Lema 3.2. *El espacio $D(\lambda)^{2^\lambda}$ tiene densidad a lo sumo λ.*

Demostración. Sean $Y := D(2)^\lambda$, $Z := D(\lambda)^Y$, $\mathscr{B}$ una base para Y de cardinalidad λ (véase el lema 3.1(1)), $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una enumeración fiel de $\mathscr{B}$, $\mathbb{B} := \{\mathscr{C} \in [\mathscr{B}]^{<\omega} : \mathscr{C}$ es ajena por pares$\}$ y $\mathscr{F}$ la colección de funciones definida mediante la siguiente fórmula: $f \in \mathscr{F}$ si y sólo si existe $\mathscr{C} \in \mathbb{B}$ de tal modo que f es una función de $\mathscr{C}$ en $D(\lambda)$. En virtud de las relaciones $\{\{(B_\alpha, \alpha)\} : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathscr{F}$ y $\mathscr{F} \subseteq [\mathscr{B} \times D(\lambda)]^{<\omega}$ se satisface que $|\mathscr{F}| = \lambda$. Sea $\{f_\xi : \xi < \lambda\}$ una enumeración sin repeticiones de la familia $\mathscr{F}$.

Ahora, para cada $\xi < \lambda$ definamos $g_\xi : Y \to D(\lambda)$ como

$$g_\xi(y) := \begin{cases} f_\xi(B), & \text{si existe } B \in \operatorname{dom}(f_\xi) \text{ con } y \in B, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que g_ξ en efecto determina una función porque el dominio de f_ξ es una colección ajena por pares.

Claramente, $D := \{g_\xi : \xi < \lambda\}$. Únicamente resta argumentar que D es denso en Z. Sean $F \in [Y]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_y : y \in F\} \subseteq \tau^+_{D(\lambda)}$. En virtud de que Y es un espacio de Hausdorff, existe una colección de ordinales $\{\alpha(y) : y \in F\}$ de tal manera que, si $y, z \in F$ son distintos, entonces $y \in B_{\alpha(y)}$ y $B_{\alpha(y)} \cap B_{\alpha(z)} = \emptyset$. En particular, $\mathscr{C} := \{B_{\alpha(y)} : y \in F\}$ es un elemento de la colección $\mathbb{B}$.

Luego, si para cada $y \in F$ denotamos por $\eta_y : Z \to D(\lambda)$ a la proyección canónica, y tomamos un punto $x \in \bigcap_{y \in F} \eta_y^{-1}[U_y]$, entonces la función $f : \mathscr{C} \to D(\lambda)$ establecida por $f(B_{\alpha(y)}) := x(y)$ es un elemento de $\mathscr{F}$. De este modo, si $\xi < \lambda$ cumple $f = f_\xi$, resulta que $g_\xi \in D \cap \bigcap_{y \in F} \eta_y^{-1}[U_y]$. En consecuencia, D tiene intersección no vacía con cualquier elemento de la base canónica para Z y así, D es un subconjunto denso de Z. $\square$

Para el siguiente resultado se recomienda tener familiaridad con la definición 2.25.

Corolario 3.3. *La densidad de $D(2)^\lambda$ coincide con* $\log(\lambda)$.

Demostración. Primero, una combinación de la proposición 2.4 con el lema 3.1(1) garantiza que $\lambda = w(D(2)^\lambda) \leqslant 2^{d(D(2)^\lambda)}$; en consecuencia, $\log(\lambda) \leqslant d(D(2)^\lambda)$.

Para verificar la desigualdad restante definamos $\kappa := \log(\lambda)$ y $\mu := 2^\kappa$. Consideremos la función $f : D(\kappa) \to D(2)$ dada por $f := \{(0,0)\} \cup ((\lambda \setminus \{0\}) \times \{1\})$. Si $g : D(\kappa)^\lambda \to D(2)^\lambda$ está determinada, para cualesquiera $x \in D(\kappa)^\lambda$ y $\alpha < \lambda$, mediante $g(x)(\alpha) := f(x(\alpha))$, entonces un razonamiento simple muestra que g es una función continua y suprayectiva. Por otra parte, la proyección natural $D(\kappa)^\mu \to D(\kappa)^\lambda$ dada por $x \mapsto x\restriction_\lambda$ es continua y suprayectiva también. Así, los lemas 2.50(1) y 3.2 garantizan las relaciones $d(D(2)^\lambda) \leqslant d(D(\kappa)^\lambda) \leqslant d(D(\kappa)^\mu) \leqslant \kappa$; en consecuencia, $d(D(2)^\lambda) \leqslant \log(\lambda)$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es calcular $\phi(X)$ para la mayoría de las funciones cardinales que presentamos en el capítulo anterior. Lo primero que necesitamos hacer es resaltar la utilidad de nuestras suposiciones iniciales para conectar a X con $\mathbb{F}^\lambda$ y $D(2)^\lambda$.

Lema 3.4. *El espacio X contiene una copia topológica de $\mathbb{F}^\lambda$ o de $D(2)^\lambda$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$J := \left\{\alpha < \lambda : \exists x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha \left(x_\alpha \in X_\alpha \setminus \overline{\{y_\alpha\}} \ \wedge \ y_\alpha \in X_\alpha \setminus \overline{\{x_\alpha\}}\right)\right\}.$$

Si $|J| = \lambda$, entonces para cada $\alpha \in J$ tomamos $x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha$ con $x_\alpha \in X_\alpha \setminus \overline{\{y_\alpha\}}$ y $y_\alpha \in X_\alpha \setminus \overline{\{x_\alpha\}}$. Así, el subespacio $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ de X_α es homeomorfo a $D(2)$; en consecuencia, $D(2)^\lambda$ se encaja en X. Por otra parte, cuando $|J| < \lambda$ resulta que $|\lambda \setminus J| = \lambda$. Luego, para cada $\alpha \in \lambda \setminus J$ empleemos que X_α no es indiscreto para encontrar $x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha$ con

$x_\alpha \in X_\alpha \setminus \overline{\{y_\alpha\}}$. De esta manera, el subespacio $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ de X_α es homeomorfo a $\mathbb{F}$, lo cual implica que $\mathbb{F}^\lambda$ se encaja en X. $\square$

Lema 3.5. *Para cualquier $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, \pi w, h\pi w, \pi\chi, h\pi\chi, t, \chi\}$ se satisface la relación $\phi(X) \geqslant \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$. Además, si cada X_α es un espacio T_1 y $\phi \in \{sw, psw, \Delta, \psi\}$, entonces $\phi(X) \geqslant \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$*

Demostración. Fijemos primero $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, h\pi w, h\pi\chi, t, \chi\}$ y observemos que ϕ es una función cardinal monótona. Por un lado, como $\mathbb{F}^\lambda$ se encaja en X o $D(2)^\lambda$ se encaja en X por el lema 3.4, resulta que $\phi(X) \geqslant \lambda$ por el lema 3.1. Por otro lado, como X contiene una copia topológica de cada X_α, se satisface la relación $\phi(X) \geqslant \phi_\lambda(X)$. En consecuencia, $\phi(X) \geqslant \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$. Un argumento similar funciona cuando $\phi \in \{sw, psw, \Delta, \psi\}$ y cada X_α es un espacio T_1.

Ahora, si $\phi \in \{\pi w, \pi\chi\}$, como cada proyección π_α es continua, abierta y suprayectiva, el lema 2.50(3) implica que $\phi(X) \geqslant \phi_\lambda(X)$. Por otra parte, para ver que $\phi(X) \geqslant \lambda$ basta demostrar que $\pi\chi(X) \geqslant \lambda$. Para cada $\alpha < \lambda$ sea U_α un subconjunto abierto, no vacío y propio de X_α. Además, sean $x \in \prod_{\alpha<\lambda} U_\alpha$ y $\mathscr{B}$ una π-base local para X en x. Luego, para toda $\alpha < \lambda$ existe $B_\alpha \in \mathscr{B}$ con $B_\alpha \subseteq \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$. Así, para cualquier $B \in \mathscr{B}$ resulta que $I_B := \{\alpha < \lambda : B_\alpha = B\}$ es un conjunto finito, lo cual implica que $|\mathscr{B}| \geqslant \lambda$; en consecuencia, $\pi\chi(X) \geqslant \lambda$. $\square$

Proposición 3.6. *Los siguientes enunciados se verifican.*

1. *$\phi(X) = \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$, siempre que $\phi \in \{w, nw, \pi w, h\pi w, \pi\chi, h\pi\chi, \chi\}$.*

2. *Si cada X_α es un espacio T_1 y $\phi \in \{sw, psw, \Delta, \psi\}$, entonces $\phi(X) = \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$.*

Demostración. Por el lema 3.5 es suficiente verificar la desigualdad $\phi(X) \leqslant \lambda \cdot \phi_\lambda(X)$ en cada inciso.

Para demostrar el inciso (1) fijemos $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi\chi, \chi\}$. Por la semejanza en los argumentos, expondremos únicamente la prueba para w. Para cada $\alpha < \lambda$ fijemos una base $\mathscr{B}_\alpha$ para X_α con $|\mathscr{B}_\alpha| = w(X_\alpha)$ y mostremos que la colección $\mathscr{B} := \{\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha] : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \forall\alpha \in F\,(B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha)\}$ es una base para X con $|\mathscr{B}| \leqslant \lambda \cdot w_\lambda(X)$.

Claramente, $\mathscr{B}$ es una familia formada por subconjuntos abiertos de X. Ahora, si $U \in \tau_X$, $x \in U$, $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y para cada $\alpha \in F$ existe $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ de tal forma que $x \in \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$, entonces para cada $\alpha \in F$ existe $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ con $x(\alpha) \in B_\alpha \subseteq U_\alpha$. De esta manera, $B := \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha]$ es un elemento de $\mathscr{B}$ que satisface $x \in B \subseteq U$. En consecuencia, $\mathscr{B}$ es una base para X.

Para comprobar que $\mathscr{B}$ tiene cardinalidad a lo sumo $\lambda \cdot w_\lambda(X)$, denotemos por $\mathscr{C}_\alpha$ a la colección $\{\pi_\alpha^{-1}[B_\alpha] : B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha\}$ para cualquier $\alpha < \lambda$. Observemos además que si $\alpha < \lambda$, entonces la asignación $\mathscr{B}_\alpha \to \mathscr{C}_\alpha$ determinada mediante $B_\alpha \mapsto \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha]$ es una función biyectiva. Sea $\mathscr{C} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathscr{C}_\alpha$ y definamos a $\mathscr{D}$ como la colección de intersecciones finitas formadas por elementos de $\mathscr{C}$. En estas circunstancias, como $\mathscr{B}$ es un subconjunto de $\mathscr{D}$, obtenemos las relaciones $|\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{D}| \leqslant \left|[\mathscr{C}]^{<\omega}\right|$. Si $\mathscr{C}$ es un conjunto finito, entonces es evidente que $\left|[\mathscr{C}]^{<\omega}\right| \leqslant \lambda \cdot w_\lambda(X)$. Por otra parte, cuando $\mathscr{C}$ es infinito,

$$\left|[\mathscr{C}]^{<\omega}\right| = |\mathscr{C}| \leqslant \lambda \cdot \sup\left\{|\mathscr{C}_\alpha| : \alpha < \lambda\right\} = \lambda \cdot \sup\left\{|\mathscr{B}_\alpha| : \alpha < \lambda\right\} \leqslant \lambda \cdot w_\lambda(X).$$

En cualquier caso, $|\mathscr{B}| \leqslant \lambda \cdot w_\lambda(X)$.

En segundo lugar, como los argumentos para $\phi \in \{h\pi w, h\pi\chi\}$ son similares, presentaremos los detalles exclusivamente para $h\pi\chi$. Con esta idea en mente es suficiente demostrar que si Y es un subespacio de X y $y \in Y$, entonces $\pi\chi(y, Y) \leqslant \lambda \cdot h\pi\chi_\lambda(X)$.

Para cada $\alpha < \lambda$, sean $\rho_\alpha := \pi_\alpha \restriction_Y$, $Y_\alpha := \rho_\alpha[Y]$ y fijemos $\mathscr{B}_\alpha$, una π-base local para Y_α en $y(\alpha)$, con $|\mathscr{B}_\alpha| \leqslant \pi\chi(Y_\alpha)$. Claramente, la familia $\mathscr{B} := \{\bigcap_{\alpha \in F} \rho_\alpha^{-1}[B_\alpha] : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \forall \alpha \in F\, (B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha)\}$ es una π-base local para Y en y con $|\mathscr{B}| \leqslant \lambda \cdot h\pi\chi_\lambda(X)$; en consecuencia, $\pi\chi(y, Y) \leqslant \lambda \cdot h\pi\chi_\lambda(X)$ y, por ende, $h\pi\chi(X) \leqslant \lambda \cdot h\pi\chi_\lambda(X)$.

Para el inciso (2) supongamos que todos los X_α son espacios T_1. Para cada $\alpha < \lambda$ fijemos una cubierta abierta separante $\mathscr{U}_\alpha$ de X_α con $|\mathscr{U}_\alpha| = sw(X_\alpha)$. Luego, la familia $\mathscr{U} := \{\pi_\alpha^{-1}[U] : \alpha < \lambda \ \wedge \ U \in \mathscr{U}_\alpha\}$ es una cubierta abierta para X. Además, como para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que la asignación $\mathscr{U}_\alpha \to \{\pi_\alpha^{-1}[U] : U \in \mathscr{U}_\alpha\}$ definida como $U \mapsto \pi_\alpha^{-1}[U]$ es una función biyectiva, se satisfacen las relaciones

$$|\mathscr{U}| = \left|\bigcup_{\alpha<\lambda} \left\{\pi_\alpha^{-1}[U] : U \in \mathscr{U}_\alpha\right\}\right| \leqslant \lambda \cdot \sup\left\{|\mathscr{U}_\alpha| : \alpha < \lambda\right\} \leqslant \lambda \cdot sw_\lambda(X).$$

Ahora, con el fin de mostrar que $\mathscr{U}$ es separante, tomemos $x, y \in X$ con $y \in \bigcap \mathscr{U}(x)$. Para ver que $x = y$ es suficiente demostrar que $x(\alpha) = y(\alpha)$, siempre que $\alpha < \lambda$. Para lograr lo anterior basta con argumentar que $y(\alpha) \in \bigcap \mathscr{U}_\alpha(x(\alpha))$ para cada $\alpha < \lambda$. Sean $\alpha < \lambda$ y $U \in \mathscr{U}_\alpha(x(\alpha))$. Así, la pertenencia $\pi_\alpha^{-1}[U] \in \mathscr{U}(x)$ implica que $y \in \pi_\alpha^{-1}[U]$ y, por ende, $y(\alpha) \in U$. En consecuencia, $sw(X) \leqslant \lambda \cdot sw_\lambda(X)$.

Si en el párrafo anterior sustituimos la restricción $|\mathscr{U}_\alpha| = sw(X_\alpha)$ por $\operatorname{ord}(x, X_\alpha) \leqslant psw(X_\alpha)$, siempre que $\alpha < \lambda$ y $x \in X_\alpha$, entonces para cualquier $x \in X$ se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(x, \mathscr{U}) = |\mathscr{U}(x)| &= \left|\{\pi_\alpha^{-1}[U] \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, U \in \mathscr{U}_\alpha(x(\alpha))\}\right| \\ &\leqslant \lambda \cdot \sup\{psw(X_\alpha) \,:\, \alpha < \lambda\} = \lambda \cdot psw_\lambda(X).\end{aligned}$$

Por esta razón, $psw(X) \leqslant \lambda \cdot psw_\lambda(X)$.

Con respecto a la función Δ, si para cada $\alpha < \lambda$ fijamos una familia diagonal $\{\mathscr{V}(\alpha, \beta) : \beta < \Delta(X_\alpha)\}$ y definimos, para cada $\beta < \Delta(X_\alpha)$, $\mathscr{U}(\alpha, \beta) := \{\pi_\alpha^{-1}[V] \,:\, V \in \mathscr{V}(\alpha, \beta)\}$, entonces $\{\mathscr{U}(\alpha, \beta) \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, \beta < \Delta(X_\alpha)\}$ es una colección de cubiertas abiertas para X con $|\{\mathscr{U}(\alpha, \beta) \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, \beta < \Delta(X_\alpha)\}| \leqslant \lambda \cdot \Delta_\lambda(X)$. Ahora, si $x, y \in X$ cumplen que $y \in \bigcap\{\operatorname{st}(x, \mathscr{U}(\alpha, \beta)) \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, \beta < \Delta(X_\alpha)\}$, entonces un argumento similar al expuesto en la primera parte de este inciso, muestra que $x = y$. Esto demuestra que la colección $\{\mathscr{U}(\alpha, \beta) \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, \beta < \Delta(X_\alpha)\}$ es una familia diagonal y así, $\Delta(X) \leqslant \lambda \cdot \Delta_\lambda(X)$.

Finalmente, si para cada $\alpha < \lambda$ la colección $\{V(\alpha, \beta) \,:\, \beta < \psi(X_\alpha)\}$ es una pseudobase para X_α, entonces razonamientos semejantes a los que hemos presentado hasta el momento muestran que la familia $\mathscr{V} := \{\pi_\alpha^{-1}[V(\alpha, \beta)] \,:\, \alpha < \lambda \,\wedge\, \beta < \psi(X_\alpha)\}$ es una pseudobase para X con $|\mathscr{V}| \leqslant \lambda \cdot \psi_\lambda(X)$. En suma, $\psi(X) \leqslant \lambda \cdot \psi_\lambda(X)$. $\square$

Las funciones hd y hL no continúan el patrón que hemos observado hasta ahora, pero sí es posible establecer cotas superiores para ellas. Para verificar este hecho es necesario demostrar primero una equivalencia de las funciones hd y hL en términos de ciertos subespacios especiales. Recordemos que si Y es un conjunto, $y \in Y$ y $<$ es una relación de orden en Y, entonces el *segmento inical determinado por y* es el conjunto $(\leftarrow, y) := \{z \in Y \,:\, z < y\}$.

Definición 3.7. Un espacio topológico Y es *separado-derecho* (resp., *separado-izquierdo*) si admite un buen orden de tal modo que sus segmentos iniciales son elementos de τ_Y (resp., τ_Y^*). La *altura* y la *anchura* de Y son, respectivamente, los números cardinales

$$h(Y) := \sup\{|Z| \,:\, Z \text{ es un subespacio separado-derecho de } X\} \text{ y}$$
$$z(Y) := \sup\{|Z| \,:\, Z \text{ es un subespacio separado-izquierdo de } X\}.$$

Utilizaremos el siguiente hecho constantemente en lo que resta de la sección.

Lema 3.8. *Si Z es un subespacio separado-derecho (resp., separado-izquierdo) de un espacio Y y κ es un número cardinal con $\kappa \leqslant |Z|$, entonces existe $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq Z$ enumerado sin repeticiones y de tal modo que si $\alpha < \kappa$, entonces $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto (resp., cerrado) de $\{y_\beta : \beta < \kappa\}$. En estas circunstancias, $(\leftarrow, y_\alpha)$, el segmento inicial determinado por y_α en $\{y_\beta : \beta < \kappa\}$, es la colección $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$.*

Demostración. Puesto que Z es un conjunto bien ordenado, existe un número ordinal γ que es isomorfo a Z. De inmediato, podemos fijar una enumeración fiel $\{y_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de Z con la propiedad de que si $\alpha < \gamma$, entonces $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto (resp., cerrado) de Z. Ahora, como $\kappa \leqslant \gamma$, la colección $\{y_\beta : \beta < \kappa\}$ es un subespacio de Z tal que si $\alpha < \kappa$, entonces $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto (resp., cerrado) de $\{y_\beta : \beta < \kappa\}$. Finalmente, para cualquier $\alpha < \kappa$ se satisface que el segmento inicial determinado por y_α coincide con la colección $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$. $\square$

El próximo resultado auxiliar revela una conexión fundamental entre las funciones hd, hL, z y h.

Lema 3.9. *Los siguientes enunciados son ciertos para un espacio Y y un cardinal infinito κ.*

1. *$hd(Y) \leqslant \kappa$ si y sólo si $z(Y) \leqslant \kappa$.*

2. *$hL(Y) \leqslant \kappa$ si y sólo si $h(Y) \leqslant \kappa$.*

Demostración. Constataremos estos hechos en una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. Si $hd(Y) \geqslant \kappa^+$, entonces $z(Y) \geqslant \kappa^+$.

Fijemos un subespacio Z de Y con $d(Z) \geqslant \kappa^+$.

Afirmación 1.1 Existe una sucesión $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq Z$ tal que, para cualquier $\alpha < \kappa^+$, $y_\alpha \in Z \setminus \mathrm{cl}_Z\{y_\beta : \beta < \alpha\}$.

Por recursión transfinita sobre $\alpha < \kappa^+$. Supongamos que para alguna $\alpha < \kappa^+$ hemos definido una sucesión $\{y_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq Z$ que satisface la condición deseada. Entonces, como $d(Z) \geqslant \kappa^+$, $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ no es un subconjunto denso de Z y, por ende, existe $y_\alpha \in Z \setminus \mathrm{cl}_Z\{y_\beta : \beta < \alpha\}$.

De este modo, $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es un subespacio de Y de tipo de orden κ^+. Únicamente resta observar que $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es separado-izquierdo en virtud de que si $\alpha < \kappa^+$, entonces

$$\{y_\beta : \beta < \alpha\} = \{y_\beta : \beta < \kappa^+\} \cap \mathrm{cl}_Z\{y_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Esto garantiza que $z(Y) \geqslant \kappa^+$.

Afirmación 2. Cuando $z(Y) \geqslant \kappa^+$, también $hd(Y) \geqslant \kappa^+$.

Por la desigualdad $z(Y) \geqslant \kappa^+$, podemos emplear el lema 3.8 para fijar un subespacio $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de Y de tal modo que para cualquier $\alpha < \kappa^+$, $(\leftarrow, y_\alpha) = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio cerrado de $\{y_\beta : \beta < \kappa^+\}$. Ahora, si D es un subconjunto denso de $Z := \{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ y consideramos una función de elección

$$e : \kappa^+ \longrightarrow \bigcup \left\{ D \cap (Z \setminus (\leftarrow, y_\alpha)) : \alpha < \kappa^+ \right\},$$

entonces $\mathrm{img}(e)$ es un conjunto cofinal de $\{y_\beta : \beta < \kappa^+\}$ y, por lo tanto, la regularidad de κ^+ asegura que $|\operatorname{img}(e)| = \kappa^+$. En consecuencia, $|D| \geqslant \kappa^+$ y, por ende, $hd(Y) \geqslant \kappa^+$.

Afirmación 3. $h(Y) \geqslant \kappa^+$, siempre que $hL(Y) \geqslant \kappa^+$.

Sea Z un subespacio de Y con $L(Z) \geqslant \kappa^+$ y fijemos una cubierta $\mathscr{U} \subseteq \tau_Y$ de Z con la propiedad de que, para cualquier $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{\leqslant\kappa}$, $\mathscr{V}$ no cubre a Z.

Afirmación 3.1. Existen sucesiones $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq Z$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathscr{U}$ tales que, para cada $\alpha < \kappa^+$, $y_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$.

Por recursión transfinita sobre $\alpha < \kappa^+$. Supongamos que para alguna $\alpha < \kappa^+$ hemos construido sucesiones $\{y_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq Z$ y $\{U_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathscr{U}$ con las propiedades requeridas. Resulta que, como $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ no cubre a Y, existen un punto $y_\alpha \in Y \setminus \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ y $U_\alpha \in \mathscr{U}$ con $y_\alpha \in U_\alpha$. Es inmediato que $\{y_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ y $\{U_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ satisfacen las condiciones deseadas.

De esta forma, $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es un subespacio de Y de tipo de orden κ^+. Solamente hay que notar que $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es separado-derecho debido a que si $\alpha < \kappa^+$, entonces

$$\{y_\beta : \beta < \alpha\} = \{y_\beta : \beta < \kappa^+\} \cap \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Esto muestra que $h(Y) \geqslant \kappa^+$.

Afirmación 4. Si $h(Y) \geqslant \kappa^+$, entonces $hL(Y) \geqslant \kappa^+$.

La condición $h(Y) \geqslant \kappa^+$ permite utilizar el lema 3.8 para fijar un subespacio $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de Y de tal forma que, para cualquier $\alpha < \kappa^+$, $(\leftarrow, y_\alpha) = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto de $\{y_\beta : \beta < \kappa^+\}$. Ahora, si $J \in [\kappa^+]^{\leqslant\kappa}$ notemos que

$$\left|\bigcup\{(\leftarrow, y_\alpha) : \alpha \in J\}\right| \leqslant |J| \cdot \sup\left\{|(\leftarrow, y_\alpha)| : \alpha \in J\right\} \leqslant \kappa < \kappa^+.$$

De esta manera, $\{(\leftarrow, y_\alpha) : \alpha < \kappa^+\}$ es una cubierta abierta de $\{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ sin subcubiertas de tamaño a lo sumo κ. En conclusión, $hL(Y) \geqslant \kappa^+$. $\square$

A partir de este momento, para cada subconjunto no vacío S de λ, X_S denotará al producto $\prod\{X_\alpha : \alpha \in S\}$. Observemos en particular que, con esta notación, X_λ es simplemente el espacio X. Además, utilizaremos el símbolo π_S para hablar de la función $X \to X_S$ determinada mediante la regla $x \mapsto x\restriction_S$. Notemos que si $S = \{\alpha\}$, entonces π_S coincide con la función π_α.

Lema 3.10. *Si S es un subconjunto no vacío de λ, entonces $\pi_S : X \to X_S$ es una función continua, abierta y suprayectiva.*

Demostración. Primero, para cada $\alpha \in S$ denotemos por $\rho_\alpha : X_S \to X_\alpha$ a la α-ésima proyección canónica. Para verificar la continuidad de π_S es suficiente argumentar que la función $\rho_\alpha \circ \pi_S : X \to X_\alpha$ es continua, siempre que $\alpha \in S$. En virtud de que para cada $\alpha \in S$ se satisface la igualdad $\rho_\alpha \circ \pi_S = \pi_\alpha$, concluimos que π_S es, en efecto, una función continua.

Ahora, la suprayectividad de π_S se deduce de que, si $x \in X_S$ y para cada $\alpha \in \lambda \setminus S$ fijamos $y_\alpha \in X_\alpha$, entonces $y := x \cup \{(\alpha, y_\alpha) : \alpha \in \lambda \setminus S\}$ pertenece a X y cumple que $\pi_S(y) = x$.

Por último, observemos que si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y para cada $\alpha \in F$ tomamos un elemento $V_\alpha \in \tau^+_{X_\alpha}$, entonces un argumento rutinario muestra que

$$\pi_S \left[\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1} [V_\alpha] \right] = \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{\alpha \in S \cap F} \rho_\alpha^{-1} [V_\alpha], & \text{si } S \cap F \neq \emptyset, \\ X_S, & \text{si } S \cap F = \emptyset. \end{cases}$$

Así, cualquier miembro de la base canónica para X tiene imagen abierta en X_S. □

Con estos antecedentes podemos continuar con el estudio las funciones hd y hL en los productos topológicos. En el lema 3.5 obtuvimos una cota inferior para $\phi(X)$ cuando $\phi \in \{hd, hL\}$, a saber, el número $\lambda \cdot \phi_\lambda(X)$. Nuestro siguiente par de resultados tienen como objetivo establecer cotas superiores para $\phi(X)$.

Teorema 3.11. *Si $\phi \in \{hd, hL\}$ y λ es un número cardinal positivo (no necesariamente infinito), entonces $\phi(X) \leqslant \lambda \cdot 2^{\phi_\lambda(X)+\omega}$.*

Demostración. Por la similitud en las pruebas, únicamente expondremos la demostración para hL. Sea $\kappa := hL_\lambda(X) + \omega$ y consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $\lambda \leqslant \kappa$.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $hL(X) > 2^\kappa$. Sea $\mu := (2^\kappa)^+$ y empleemos los lemas 3.8 y 3.9 para fijar un subespacio $Y := \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$ de X de tal forma que, para cada $\alpha < \mu$, $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto de Y. Para cada $\alpha < \mu$, fijemos $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U(\alpha, \gamma) : \gamma \in F_\alpha\}$, donde $U(\alpha, \gamma) \in \tau_{X_\gamma}$ siempre que $\gamma \in F_\alpha$, tales que, si $U_\alpha := \bigcap_{\gamma \in F_\alpha} \pi_\gamma^{-1}[U(\alpha, \gamma)]$, entonces $x_\alpha \in U_\alpha \cap Y \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha + 1\}$.

A partir del párrafo anterior se puede ver que si $\alpha < \beta < \mu$, entonces existe $\gamma(\alpha, \beta) \in F_\alpha$

tal que $\pi_{\gamma(\alpha,\beta)}(x_\beta) \notin U\left(\alpha, \gamma(\alpha,\beta)\right)$. Convengamos que la pertenencia $\{\alpha,\beta\} \in [\mu]^2$ indica implícitamente la relación $\alpha < \beta$, y para cada $\gamma < \kappa$ definamos

$$P_\gamma := \begin{cases} \left\{\{\alpha,\beta\} \in [\mu]^2 \,:\, \gamma(\alpha,\beta) = \gamma\right\}, & \text{si } \gamma < \lambda, \\ \emptyset, & \text{si } \lambda \leqslant \gamma < \kappa. \end{cases}$$

En estas circunstancias se satisface que $[\mu]^2 = \bigcup\{P_\gamma \,:\, \gamma < \kappa\}$. Así, el teorema 1.12 garantiza la existencia de $\gamma < \kappa$ y $J \subseteq \mu$ con $|J| > \kappa$ y $[J]^2 \subseteq P_\gamma$. Observemos que $\gamma < \lambda$ y consideremos el subespacio $Z := \{\pi_\gamma(x_\alpha) \,:\, \alpha \in J\}$ de X_γ.

Afirmación 1.1. Z es un subespacio separado-derecho de X_γ de cardinalidad mayor a κ.

Para ver que $|Z| > \kappa$ es suficiente comprobar que si $\alpha, \beta \in J$ son distintos, entonces $\pi_\gamma(x_\alpha) \neq \pi_\gamma(x_\beta)$. Si suponemos sin perder generalidad que $\alpha < \beta$, la condición $\{\alpha,\beta\} \in [J]^2$ implica la pertenencia $\{\alpha,\beta\} \in P_\gamma$ y garantiza la igualdad $\gamma(\alpha,\beta) = \gamma$. De esta manera, $\pi_\gamma(x_\beta) \notin U(\alpha,\gamma)$, mientras que $\pi_\gamma(x_\alpha) \in U(\alpha,\gamma)$; en especial, $\pi_\gamma(x_\alpha) \neq \pi_\gamma(x_\beta)$.

Una consecuencia del párrafo anterior es que si definimos para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$, $\pi_\gamma(x_\alpha) < \pi_\gamma(x_\beta)$ si y sólo si $\alpha < \beta$, entonces Z es un conjunto bien ordenado. Ahora, con el objetivo de comprobar que Z es separado-derecho, fijemos $\beta \in J$ y demostremos que $(\leftarrow, \pi_\gamma(x_\beta)) = \{\pi_\gamma(x_\alpha) \,:\, \alpha \in J \ \wedge\ \alpha < \beta\}$ es un subespacio abierto de Z.

Sea $\alpha \in J$ con $\alpha < \beta$. Notemos primero que, como $U_\alpha \in \tau_X$ y π_γ es una función abierta, se satisface que $\pi_\gamma[U_\alpha]$ es un subconjunto abierto de X_γ y, por ende, $\pi_\gamma[U_\alpha] \cap Z \in \tau_Z$ y $\pi_\gamma(x_\alpha) \in \pi_\gamma[U_\alpha] \cap Z$. Por otra parte, si $z \in \pi_\gamma[U_\alpha] \cap Z$, entonces existen $x \in U_\alpha$ y $\delta \in J$ de tal manera que $\pi_\gamma(x) = z = \pi_\gamma(x_\delta)$. Si sucediera que $\beta \leqslant \delta$, entonces tendríamos la pertenencia $\{\alpha,\delta\} \in P_\gamma$, la cual implicaría que $\pi_\gamma(x_\delta) \notin U(\alpha,\gamma)$; no obstante, como $x \in U_\alpha$, $\pi_\gamma(x_\delta) = \pi_\gamma(x) \in U(\alpha,\gamma)$, un absurdo. Lo anterior garantiza que $\delta < \beta$ y, por lo tanto, que $z \in (\leftarrow, \pi_\gamma(x_\beta))$. En suma, $\pi_\gamma(x_\alpha) \in \pi_\gamma[U_\alpha] \cap Z \subseteq (\leftarrow, \pi_\gamma(x_\beta))$.

Para finalizar este caso basta con observar que lo establecido en la Afirmación 1.1 contradice la desigualdad $hL(X_\gamma) \leqslant \kappa$ (véase el lema 3.9(2)).

Caso 2. $\lambda > \kappa$.

En busca de un absurdo, supongamos que $\mu := (\lambda \cdot 2^\kappa)^+$ es número cardinal para el cual existe un subespacio $\{x_\alpha : \alpha < \mu\}$ de X enumerado fielmente y de tal modo que, si $Y := \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$, entonces $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subespacio abierto de Y, siempre que $\alpha < \mu$. Además, para cada $\alpha < \mu$ sean $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U(\alpha,\gamma) : \gamma \in F_\alpha\}$, donde $U(\alpha,\gamma) \in \tau_{X_\gamma}$ si $\gamma \in F_\alpha$, tales que, cuando $U_\alpha := \bigcap_{\gamma \in F_\alpha} \pi_\gamma^{-1}[U(\alpha,\gamma)]$, entonces $x_\alpha \in U_\alpha \cap Y \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha + 1\}$.

Ahora, las relaciones $\operatorname{cf}(\mu) = \mu > \lambda$ implican que la función $\mu \to [\lambda]^{<\omega}$ definida como $\alpha \mapsto F_\alpha$ tiene una fibra de cardinalidad μ. Supongamos, sin perder generalidad, que existe $F \in [\lambda]^{<\omega}$ con $F_\alpha = F$, siempre que $\alpha < \mu$. Lo que sigue es considerar al subespacio $Z := \{\pi_F(x_\alpha) : \alpha < \mu\}$ de X_F y demostrar el siguiente enunciado.

Afirmación 2.1. Z es un subespacio separado-derecho de X_F de cardinalidad μ.

Comencemos por observar que si $\pi_F(x_\alpha) = \pi_F(x_\beta)$, entonces se satisfacen las pertenencias $x_\alpha \in U_\beta \cap Y$ y $x_\beta \in U_\alpha \cap Y$. De esta manera, obtenemos las relaciones $x_\alpha \in \{x_\gamma : \gamma < \beta + 1\}$ y $x_\beta \in \{x_\gamma : \gamma < \alpha + 1\}$, que a su vez garantizan que $\alpha < \beta + 1$ y $\beta < \alpha + 1$; es decir, $\alpha = \beta$. El argumento anterior ratifica que la asignación $Y \to Z$ determinada como $x_\alpha \mapsto \pi_F(x_\alpha)$ es una biyección. En consecuencia, $|Z| = \mu$.

La inyectividad de la función del párrafo previo garantiza que si definimos $\pi_F(x_\alpha) < \pi_F(x_\beta)$ si y sólo si $\alpha < \beta$, entonces Z es un conjunto bien ordenado. Para ver que Z es separado-derecho, fijemos $\beta < \mu$ y argumentemos que $(\leftarrow, \pi_F(x_\beta)) = \{\pi_F(x_\alpha) : \alpha < \beta\}$ es un subespacio abierto de Z.

Si $\alpha < \beta$, como $U_\alpha \in \tau_X$ y el lema 3.10 asegura que π_F es una función abierta, se cumple que $\pi_F[U_\alpha]$ es un subconjunto abierto de X_F y, por lo tanto, $\pi_F[U_\alpha] \cap Z \in \tau_Z$ y $\pi_F(x_\alpha) \in \pi_F[U_\alpha] \cap Z$. Por otro lado, si $z \in \pi_F[U_\alpha] \cap Z$, entonces existen $x \in U_\alpha$ y $\gamma < \mu$ de tal modo que $\pi_F(x) = z = \pi_F(x_\gamma)$. Así, como $x \in U_\alpha$, deducimos que $x_\gamma \in U_\alpha \cap Y$ y, por ende, $\gamma < \alpha + 1$, lo cual implica que $z \in (\leftarrow, \pi_F(x_\beta))$. En conclusión, $\pi_F(x_\alpha) \in \pi_F[U_\alpha] \cap Z \subseteq (\leftarrow, \pi_F(x_\beta))$.

No obstante, como lo expuesto en el Caso 1 certifica que

$$hL\left(X_F\right) \leqslant |F| \cdot 2^{\sup\{hL(X_\alpha) : \alpha \in F\} + \omega} \leqslant 2^\kappa < \mu,$$

la Afirmación 2.1 y el lema 3.9(2) producen el absurdo deseado. $\square$

Un camino alternativo para determinar la conducta de las funciones hd y hL en los productos topológicos, en consonancia con el teorema 3.11, es en términos de su comportamiento en cada subproducto finito. El siguiente resultado es debido a Zenor.

Teorema 3.12. *Si* $\phi \in \{hd, hL\}$*,* κ *es un número cardinal con* $\lambda \leqslant \kappa$*, y para cualquier* $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ *se satisface que* $\phi(X_F) \leqslant \kappa$*, entonces* $\phi(X) \leqslant \kappa$*.*

Demostración. Fijemos un subespacio Y de X. Verifiquemos primero el resultado para hL. Sea $\mathscr{U} \subseteq \tau_X$ una cubierta para Y y para cada $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ consideremos la colección $\mathscr{U}_F := \{V \in \tau_{X_F} : \exists U \in \mathscr{U}(\pi_F^{-1}[V] \subseteq U)\}$. En estas condiciones, para cualquier $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ la hipótesis $hL(X_F) \leqslant \kappa$ produce $\mathscr{V}_F \in [\mathscr{U}_F]^{\leqslant\kappa}$ con $\bigcup \mathscr{U}_F = \bigcup \mathscr{V}_F$.

Afirmación. Si $\mathscr{V} := \{\pi_F^{-1}[V] : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \ \wedge \ V \in \mathscr{V}_F\}$, entonces $\mathscr{V}$ cubre a Y y $|\mathscr{V}| \leqslant \kappa$.

Claramente, $|\mathscr{V}| \leqslant |[\lambda]^{<\omega}| \cdot \sup\{|\mathscr{V}_F| : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\} \leqslant \lambda \cdot \kappa = \kappa$. Ahora, para ver que $Y \subseteq \bigcup \mathscr{V}$, fijemos $y \in Y$ y sea $U \in \mathscr{U}$ con $y \in U$. Luego, existe $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que para cada $\alpha \in F$ hay $V_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ con $y \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \subseteq U$. Un argumento rutinario muestra que si $V := \pi_F[\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]]$, entonces $V \in \tau_{X_F}$ y $y \in \pi_F^{-1}[V] \subseteq U$ (véase el lema 3.10). En consecuencia, $V \in \mathscr{U}_F$ y, por esta razón, $\pi_F(y) \in \bigcup \mathscr{U}_F$. De inmediato, como $\bigcup \mathscr{U}_F = \bigcup \mathscr{V}_F$, existe $W \in \mathscr{V}_F$ tal que $y \in \pi_F^{-1}[W]$ y así, $y \in \bigcup \mathscr{V}$.

Por otro lado notemos que para cualesquiera $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $V \in \mathscr{V}_F$, la inclusión $\mathscr{V}_F \subseteq \mathscr{U}_F$ permite fijar $U(V,F) \in \mathscr{U}$ con $\pi_F^{-1}[V] \subseteq U(V,F)$. De esta manera, si $\mathscr{W} := \{U(V,F) : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \ \wedge \ V \in \mathscr{V}_F\}$, entonces $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{U}$, $Y \subseteq \bigcup \mathscr{V} \subseteq \bigcup \mathscr{W}$ y

$$|\mathscr{W}| \leqslant \left|[\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\right| \cdot \sup\left\{|\mathscr{V}_F| : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\right\} \leqslant \kappa.$$

En consecuencia, $\mathscr{W}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$ con $|\mathscr{W}| \leqslant \kappa$. De este modo, $hL(X) \leqslant \kappa$.

Continuemos con el argumento para hd. Para cada $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, la condición $hd(X_F) \leqslant \kappa$ implica la existencia de un subconjunto denso E_F de $\pi_F[Y]$ con $|E_F| \leqslant \kappa$. Luego, si para toda $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ la función $e_F : E_F \to \bigcup\{\pi_F^{-1}\{z\} \cap Y : z \in E_F\}$ es de elección, entonces cada $D_F := \operatorname{img}(e_F)$ es un subconjunto de Y con $|D_F| \leqslant \kappa$.

Afirmación. $D := \bigcup\{D_F : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es un subconjunto denso de Y y $|D| \leqslant \kappa$.

Evidentemente, $|D| \leqslant |[\lambda]^{<\omega}| \cdot \sup\{|D_F| \, : \, F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\} \leqslant \lambda \cdot \kappa = \kappa$. Para ver que D es denso en Y, fijemos $V \in \tau_Y^+$ y $U \in \tau_X^+$ con $V = U \cap Y$. Notemos que si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y para cada $\alpha \in F$ tomamos $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}^+$ con $\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$, entonces $W := \pi_F[\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]]$ verifica las relaciones $W \in \tau_{X_F}$ y $\pi_F^{-1}[W] \subseteq U$ (véase el lema 3.10). Luego, como $W \in \tau_{X_F}$, sucede que $W \cap Y \in \tau_{\pi_F[Y]}^+$ y así, la densidad de E_F genera un punto $z \in W \cap E_F$; en consecuencia, las relaciones $\pi_F^{-1}\{z\} \cap Y \subseteq \pi_F^{-1}[W] \cap Y \subseteq U \cap Y = V$ garantizan que $e_F(z) \in V \cap D$. Finalmente, $hd(X) \leqslant \kappa$. $\square$

El cálculo de la amplitud en productos topológicos es más complicado. Posiblemente el mejor resultado en este sentido es debido a Hajnal y a Juhász:

Teorema 3.13. *Si cada X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\lambda \cdot s_\lambda(X) \leqslant s(X) \leqslant hd(X) \leqslant \lambda \cdot \sup\{2^{s(X_\alpha)} \, : \, \alpha < \lambda\} \leqslant \lambda \cdot 2^{s_\lambda(X)}$.*

La primera y segunda desigualdad son consecuencia, respectivamente, del lema 3.5 y la proposición 2.11. Además, la última relación es evidente. No obstante, los detalles de la tercera desigualdad exceden el alcance de este trabajo, pero le sugerimos al lector interesado consultar la demostración expuesta en [6, 5.8, p. 109].

Con respecto a la extensión y el grado de Lindelöf, en los ejemplos 4.7 y 4.8 demostraremos que $e(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{c}$, mientras que $hL(\mathbb{S}) = \omega$. Este hecho elemental es un indicador de que el comportamiento de la extensión y el grado de Lindelöf en productos topológicos no es tan sencillo de predecir.

Una conjetura razonable, en virtud del párrafo anterior, podría ser que $\mathfrak{c}$ siempre es una cota superior para el grado de Lindelöf del producto de dos espacios de Lindelöf. No obstante, Juhász expone en [7, Theorem 3.3, p. 81] que, bajo CH, existen dos espacios de Hausdorff, Lindelöf y cero-dimensionales, X^0 y X^1, de tal forma que $L(X^0 \times X^1) = \mathfrak{c}^+$. Más aún, él menciona en [7, Remark 3.4, p. 82] que la única cota conocida para $L(X \times Y)$, con X y Y espacios de Lindelöf, es el primer cardinal fuertemente compacto.

Para concluir esta sección introduciremos un nuevo concepto y demostraremos tres resultados referentes a la estrechez en los productos topológicos.

Definición 3.14. Sean κ un número cardinal y A un subconjunto de un espacio topológico Y. Diremos que A es *κ-cerrado* si para cualquier $B \in [A]^{\leqslant \kappa}$ se verifica la contención $\overline{B} \subseteq A$.

Es inmediato que si Y es un espacio topológico, entonces cualquier elemento de τ_Y^* es κ-cerrado en Y. Además, la colección formada por los subconjuntos κ-cerrados de Y es cerrada bajo intersecciones finitas. Emplearemos estos hechos básicos para demostrar algunos resultados auxiliares que utilizaremos en la prueba de la última proposición de esta sección.

Lema 3.15. *Si Y es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito, entonces $t(Y) \leqslant \kappa$ si y solo si cualquier subconjunto κ-cerrado de Y es cerrado.*

Demostración. Si $t(Y) \leqslant \kappa$, $A \subseteq Y$ es un conjunto κ-cerrado y $y \in \overline{A}$, observemos que la condición $t(y, Y) \leqslant \kappa$ produce $B \in [A]^{\leqslant\kappa}$ tal que $y \in \overline{B} \subseteq A$. En consecuencia, A es cerrado.

Supongamos ahora que $t(Y) > \kappa$. Esta relación produce $y \in Y$ con $t(y, Y) > \kappa$ y, por ende, hay $A \subseteq Y$ tal que $y \in \overline{A}$ y $y \notin \overline{B}$ para cualquier $B \in [A]^{\leqslant\kappa}$; en particular, si $C := \bigcup\{\overline{B} : B \in [A]^{\leqslant\kappa}\}$, entonces $y \in \overline{C} \setminus C$. Por otra parte, si $D \in [C]^{\leqslant\kappa}$ y para cada $z \in D$ fijamos $B_z \in [A]^{\leqslant\kappa}$ con $z \in \overline{B_z}$, entonces la relaciones $D \subseteq \bigcup_{z\in D} \overline{B_z} \subseteq \overline{\bigcup_{z\in D} B_z}$ garantizan que $E := \bigcup_{z\in D} B_z$ es un elemento de $[A]^{\leqslant\kappa}$ con $\overline{D} \subseteq \overline{E}$. Además, como $E \in [A]^{\leqslant\kappa}$, $\overline{E}$ es un uniendo de C, lo cual implica que $\overline{E} \subseteq C$. En conclusión, C es un subconjunto κ-cerrado de Y que no es cerrado. $\square$

Lema 3.16. *Si Y y Z son espacios topológicos, κ es un número cardinal, A es un subconjunto κ-cerrado de Y y $f : Y \to Z$ es una función cerrada, entonces $f[A]$ es un subconjunto κ-cerrado de Z.*

Demostración. Sean B un subconjunto de $f[A]$ con $|B| \leqslant \kappa$, $e : B \to \bigcup\{f^{-1}\{z\} \cap A : z \in B\}$ una función de elección y $C := \operatorname{img}(e)$. Observemos que C es un elemento de $[A]^{\leqslant\kappa}$ con $f[C] = B$. De esta manera, como A es κ-cerrado se satisface que $\operatorname{cl}_Y C \subseteq A$ y, por ende, el hecho de que f es una función cerrada implica las relaciones $\operatorname{cl}_Z B = \operatorname{cl}_Z f[C] \subseteq f[\operatorname{cl}_Y C] \subseteq f[A]$. En suma, $f[A]$ es κ-cerrado. $\square$

Una parte del Teorema de Kuratowski (véase [2, Theorem 3.1.16, p. 126]) establece que si Z es un espacio compacto de Hausdorff, entonces para cualquier espacio topológico Y se satisface que la proyección canónica $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ es una función cerrada. Emplearemos estos hechos en nuestro siguiente lema.

Lema 3.17. *Si Y es un espacio T_1 y Z es un espacio compacto de Hausdorff, entonces $t(Y \times Z) \leqslant t(Y) \cdot t(Z)$.*

Demostración. Sea $\kappa := t(Y) \cdot t(Z)$. Si $\kappa < \omega$, entonces $t(Y) < \omega$ y $t(Z) < \omega$, lo cual implica que Y y Z son espacios discretos por el lema 2.33. Por esta razón, $Y \times Z$ es un espacio discreto y, por ende, el lema 2.33 constata que $t(Y \times Z) = 1 \leqslant \kappa$. Supongamos entonces que $\kappa \geqslant \omega$ y notemos que por el lema 3.15, es suficiente verificar que cualquier subconjunto κ-cerrado de $Y \times Z$ es cerrado.

Con esta idea en mente, fijemos un conjunto κ-cerrado $A \subseteq Y \times Z$ y un punto $(y, z) \in \overline{A}$. Observemos que, como $\{y\} \times Z$ es un conjunto cerrado en $Y \times Z$, se satisface que $A \cap (\{y\} \times Z)$ es un subconjunto κ-cerrado de $Y \times Z$. De esta manera, como $\{y\} \times Z$ es homeomorfo a Z, $t(\{y\} \times Z) \leqslant \kappa$ y, por ende, $A \cap (\{y\} \times Z)$ es cerrado en $\{y\} \times Z$ (véase el lema 3.15). Consideremos el conjunto $B := \pi_Z[A \cap (\{y\} \times Z)]$ y comprobemos que $z \in B$.

Supongamos en busca de una contradicción que $z \notin B$. Primero, como el Teorema de Kuratowski asegura que la función $\pi_Z : \{y\} \times Z \to Z$ es cerrada, B es cerrado en Z; en consecuencia, la relación $z \notin B$ y la regularidad de Z implican la existencia de $V \in \tau_Z(z)$ con $B \cap \operatorname{cl}_Z V = \emptyset$. En estas circunstancias, como $Y \times \operatorname{cl}_Z V$ es una vecindad de (y, z), la pertenencia $(y, z) \in \overline{A}$ implica que $(y, z) \in \overline{(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A}$.

Ahora, observemos que por el Teorema de Kuratowski y la compacidad de Z se constata que la proyección $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ es cerrada. Además, $(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A$ es κ-cerrado en $Y \times Z$ pues $Y \times \operatorname{cl}_Z V$ es cerrado y A es κ-cerrado. De este modo, el lema 3.16 garantiza que $C := \pi_Y[(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A]$ es un subconjunto κ-cerrado de Y y así, la desiguadad $t(Y) \leqslant \kappa$ implica que C es cerrado en Y (véase el lema 3.15).

Finalmente, notemos que la pertenencia $(y, z) \in \overline{(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A}$ y la continuidad de π_Y producen las relaciones

$$y \in \pi_Y\left[\overline{(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A}\right] \subseteq \operatorname{cl}_Y \pi_Y\left[(Y \times \operatorname{cl}_Z V) \cap A\right] = C.$$

Para terminar, la relación $y \in C$ genera $w \in \operatorname{cl}_Z V$ con $(y, w) \in A$; en especial, (y, w) es un elemento de $A \cap (\{y\} \times Z)$ y, por ende, $w \in B \cap \operatorname{cl}_Z V$, el absurdo deseado.

En conclusión, $z \in B$, lo cual implica que $(y, z) \in A$ y completa la prueba de que A es cerrado en $Y \times Z$. Por esta razón, el lema 3.15 certifica que $t(Y \times Z) \leqslant \kappa$. $\square$

Corolario 3.18. *Si* $1 \leqslant n < \omega$ *y* $\{Y_k : k < n\}$ *es una familia de espacios compactos de Hausdorff, entonces*

$$t\left(\prod_{k<n} Y_k\right) \leqslant \prod_{k<n} t(Y_k).$$

Finalizamos esta sección al mostrar que en el caso de los espacios compactos T_2, la estrechez se comporta de manera idéntica a las funciones cardinales de la proposición 3.6.

Teorema 3.19. *Si* $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *es una familia de espacios compactos de Hausdorff, entonces* $t(X) = \lambda \cdot t_\lambda(X)$.

Demostración. En virtud del lema 3.5 es suficiente comprobar que $t(X) \leqslant \lambda \cdot t_\lambda(X)$. Con el lema 3.15 en mente, sean $\kappa := \lambda \cdot t_\lambda(X)$, A un subconjunto κ-cerrado de X y $x \in \overline{A}$. Fijemos $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y notemos que, como $|F| < \omega$, el corolario 3.18 implica que

$$t(X_F) \leqslant \prod_{\alpha \in F} t(X_\alpha) \leqslant \lambda \cdot \prod_{\alpha \in F} t(X_\alpha) \leqslant \lambda \cdot \sup\{t(X_\alpha) : \alpha \in F\} \leqslant \kappa.$$

Además, como X es compacto y X_F es T_2, la función continua $\pi_F : X \to X_F$ es cerrada (véase el lema 3.10). De inmediato, por el lema 3.16 se cumple que $\pi_F[A]$ es un subconjunto κ-cerrado de X_F y, por ende, $\pi_F[A]$ es cerrado en X_F pues $t(X_F) \leqslant \kappa$ (véase el lema 3.15). En consecuencia, como π_F es continua, la pertenencia $x \in \overline{A}$ implica las relaciones

$$\pi_F(x) \in \pi_F\left[\overline{A}\right] \subseteq \operatorname{cl}_{X_F} \pi_F[A] = \pi_F[A]$$

y, por lo tanto, existe $x_F \in A$ con $\pi_F(x_F) = \pi_F(x)$.

Ahora, consideremos la colección $B := \{x_F : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$. Notemos que B es un elemento de $[A]^{\leqslant\kappa}$ y, puesto que A es κ-cerrado, $\overline{B} \subseteq A$. Para constatar que $x \in \overline{B}$, observemos que si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ son tales que $x \in \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$, donde $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ siempre que $\alpha \in F$, entonces $x_F \in \left(\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]\right) \cap B$. De esta manera $x \in \overline{B}$, lo cual implica la pertenencia $x \in A$ y concluye el argumento de que A es cerrado. Finalmente, $t(X) \leqslant \lambda \cdot t_\lambda(X)$. $\square$

3.2 El Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery

La densidad en productos topológicos tiene un comportamiento interesante en el sentido de que, bajo condiciones mínimas de separación, el patrón que observamos en las funciones de la proposición 3.6 y el teorema 3.19 no se preserva pero tampoco se aleja mucho de la fórmula esperada.

Proposición 3.20. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $d_\lambda(X) \leqslant d(X) \leqslant \log(\lambda) \cdot d_\lambda(X)$.
2. *Si además cada X_α contiene dos abiertos ajenos y no vacíos, entonces $d(X) \geqslant \log(\lambda)$; en especial, $d(X) = \log(\lambda) \cdot d_\lambda(X)$.*

Demostración. Para el inciso (1) notemos primero que, como para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que la proyección $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es continua y suprayectiva, el lema 2.50(1) garantiza que $d(X_\alpha) \leqslant d(X)$; en consecuencia, $d_\lambda(X) \leqslant d(X)$.

Para comprobar la segunda desigualdad, definamos $\kappa := \log(\lambda) \cdot d_\lambda(X)$ y para cada $\alpha < \lambda$ sea D_α un subconjunto denso de X_α con $|D_\alpha| \leqslant \kappa$. Claramente, $D := \prod_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ es un subconjunto denso de X. Además, si para toda $\alpha < \lambda$ fijamos una función suprayectiva $f_\alpha : D(\kappa) \to D_\alpha$, entonces un argumento rutinario muestra que la función $f : D(\kappa)^\lambda \to D$ definida, para cualesquiera $x \in D(\kappa)^\lambda$ y $\alpha < \lambda$, mediante $f(x)(\alpha) := f_\alpha\left(x(\alpha)\right)$ es continua y suprayectiva. Por otra parte, la desigualdad $\log(\lambda) \leqslant \kappa$ implica que $\lambda \leqslant 2^\kappa$ y, por ende, la proyección natural $D(\kappa)^{2^\kappa} \to D(\kappa)^\lambda$ dada por $x \mapsto x\restriction_\lambda$ es continua y suprayectiva. Finalmente, una combinación de la proposición 2.36(1) con los lemas 2.50(1) y 3.2 constata las relaciones $d(X) \leqslant d(D) \leqslant d\Big(D(\kappa)^\lambda\Big) \leqslant d\Big(D(\kappa)^{2^\kappa}\Big) \leqslant \kappa$.

Para verificar el inciso (2) fijemos, para cada $\alpha < \lambda$, $U(\alpha, 0), U(\alpha, 1) \in \tau^+_{X_\alpha}$ con $U(\alpha, 0) \cap U(\alpha, 1) = \emptyset$. Definamos una colección de funciones $\mathscr{F}$ mediante la siguiente fórmula: $f \in \mathscr{F}$ si y sólo si existe $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de tal modo que f es una función de F en $D(2)$.

Adicionalmente, para toda $f \in \mathscr{F}$ definamos

$$G_f := \bigcap \Big\{ \pi_\alpha^{-1} \left[U(\alpha, f(\alpha)) \right] \, : \, \alpha \in \mathrm{dom}(f) \Big\}.$$

Observemos que si $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $f : F \to D(2)$, entonces $G_f \in \tau_X^+$.

Ahora, sea D un subconjunto denso de X y fijemos una función de elección $e : \mathscr{F} \to \bigcup\{D \cap G_f \, : \, f \in \mathscr{F}\}$. Además, para toda $y \in D$ definamos

$$g_y := \Big\{ (\alpha, 0) \, : \, \alpha < \lambda \, \wedge \, y(\alpha) \in U(\alpha, 0) \Big\} \cup \left\{ (\alpha, 1) \, : \, \alpha < \lambda \, \wedge \, y(\alpha) \notin U(\alpha, 0) \right\}.$$

El siguiente enunciado prácticamente concluye nuestra prueba.

Afirmación. $E := \{g_y \, : \, y \in D\}$ es un subconjunto denso de $D(2)^\lambda$ con $|E| \leqslant |D|$.

Claramente, $E \subseteq D(2)^\lambda$ y $|E| \leqslant |D|$. Para el argumento de la densidad conviene observar primero que si $f \in \mathscr{F}$ y $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ entonces, como $e(f) \in G_f$, resulta que $e(f)(\alpha) \in U(\alpha, f(\alpha))$ y, por lo tanto, las condiciones $e(f) \in D$ y $U(\alpha, 0) \cap U(\alpha, 1) = \emptyset$ implican que $(\alpha, f(\alpha)) \in g_{e(f)}$; en particular, se satisface la inclusión $f \subseteq g_{e(f)}$.

Con esta observación disponible, estamos en posición para verificar que E es denso en $D(2)^\lambda$. Sean $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, $\{U_\alpha \, : \, \alpha \in F\} \subseteq \tau_{D(2)}^+$ y $U := \bigcap_{\alpha \in F} \rho_\alpha^{-1}[U_\alpha]$. De inmediato, si $f : F \to D(2)$ es una función tal que $f(\alpha) \in U_\alpha$, siempre que $\alpha \in F$, entonces la contención $f \subseteq g_{e(f)}$ asegura la pertenencia $g_{e(f)} \in U \cap E$.

Finalmente, como E es denso en $D(2)^\lambda$ y $d\Big(D(2)^\lambda\Big) = \log(\lambda)$ (véase el corolario 3.3), tenemos que $\log(\lambda) \leqslant |E| \leqslant |D|$. En conclusión, cualquier subconjunto denso de X tiene cardinalidad al menos $\log(\lambda)$ y, por ende, $\log(\lambda) \leqslant d(X)$. $\square$

En la década de los 40, Hewitt, Marczewski y Pondiczery establecieron de manera independiente el siguiente resultado que en la actualidad se conoce como el Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery. Observemos que en el contexto del presente trabajo, este resultado es una consecuencia de la proposición 3.20 pues es suficiente notar que la desigualdad $\lambda \leqslant 2^\kappa$ implica que $\log(\lambda) \leqslant \kappa$.

Teorema 3.21. *Si κ es un número cardinal con $\lambda \leqslant 2^\kappa$, y para cada X_α se satisface* *que $d\left(X_\alpha\right) \leqslant \kappa$, entonces $d(X) \leqslant \kappa$. En particular, el producto de a lo sumo $\mathfrak{c}$ espacios separables es separable.*

Con respecto al teorema anterior, surgen algunas preguntas naturales que mencionaremos a continuación. Por ejemplo, ¿será cierto el recíproco del teorema 3.21?. Comprobaremos en nuestro siguiente resultado que, cuando cada X_α tiene cierto grado de separación, la respuesta a esta cuestión es afirmativa.

Teorema 3.22. *Si κ es un número cardinal y cada X_α admite dos abiertos ajenos y no vacíos, entonces $d(X) \leqslant \kappa$ si y sólo si $\lambda \leqslant 2^\kappa$ y $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, siempre que $\alpha < \lambda$.*

Demostración. La implicación recíproca del presente resultado es el teorema 3.21. Para la implicación directa notemos que si $d(X) \leqslant \kappa$, entonces $\log(\lambda) \cdot d_\lambda(X) \leqslant \kappa$ (véase la proposición 3.20(2)). De esta manera, se satisfacen las desigualdades $\log(\lambda) \leqslant \kappa$ y $d_\lambda(X) \leqslant \kappa$. Por esta razón, $\lambda \leqslant 2^\kappa$ y, para cada $\alpha < \lambda$, $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$. $\square$

Una pregunta más es si será posible obtener una variante del teorema 3.21 para hd en el siguiente sentido: si κ es un número cardinal, $\lambda \leqslant 2^\kappa$ y para cada X_α se satisface que $hd\left(X_\alpha\right) \leqslant \kappa$, entonces $hd(X) \leqslant \kappa$. Contestaremos esta cuestión de forma negativa más adelante al mostrar que $hd(\mathbb{S}) = \omega$ y $hd(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{c}$ (véanse los ejemplos 4.7 y 4.8).

Cerramos esta sección con un corolario del teorema 3.21 que es útil para acotar a la celularidad del espacio X.

Corolario 3.23. *Si κ es un número cardinal y para cada X_α se satisface que $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, entonces $c(X) \leqslant \kappa$. En especial, cualquier producto de espacios separables tiene celularidad numerable.*

Demostración. En busca de una contradicción, supongamos que existe una familia celular $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ en X. Para cada $\alpha < \kappa^+$ sean $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U(\alpha,\gamma) : \gamma \in F_\alpha\}$, donde $U(\alpha,\gamma) \in \tau^+_{X_\gamma}$ para toda $\gamma \in F_\alpha$, tales que $V_\alpha := \bigcap_{\gamma\in F_\alpha} \pi_\gamma^{-1}[U(\alpha,\gamma)] \subseteq U_\alpha$. Observemos que la colección $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular formada por abiertos canónicos de X. Luego, si $F := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} F_\alpha$, sucede que $|F| \leqslant \kappa^+ \leqslant 2^\kappa$ y $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, siempre que $\alpha \in F$. Por estas razones, el teorema 3.21 asegura que $d(X_F) \leqslant \kappa$; en particular, la proposición 2.6 garantiza que $c(X_F) \leqslant \kappa$.

En virtud de la relación $c(X_F) \leqslant \kappa$, si constatamos que $\{\pi_F[V_\alpha] : \alpha < \kappa^+\}$ es celular, obtendríamos el absurdo deseado y, por ende, concluiríamos nuestra demostración. Establecemos nuestro objetivo en el siguiente enunciado.

Afirmación. La colección $\{\pi_F[V_\alpha] : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular en X_F.

Sean $\alpha, \beta < \kappa^+$ con $y \in \pi_F[V_\alpha] \cap \pi_F[V_\beta]$. Un argumento rutinario muestra que, con la notación del lema 3.10, las igualdades $\pi_F[V_\alpha] = \bigcap_{\gamma \in F_\alpha} \rho_\gamma^{-1}[U(\alpha, \gamma)]$ y $\pi_F[V_\beta] = \bigcap_{\delta \in F_\beta} \rho_\delta^{-1}[U(\beta, \delta)]$ son ciertas. De inmediato, para cualesquiera $\gamma \in F_\alpha$ y $\delta \in F_\beta$ se cumple que $y(\gamma) \in U(\alpha, \gamma)$ y $y(\delta) \in U(\beta, \delta)$. Luego, dado que π_F es suprayectiva, existe $x \in X$ con $\pi_F(x) = y$. De este modo, $x \in V_\alpha \cap V_\beta \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ y así, como $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular, deducimos que $\alpha = \beta$. En suma, si $\alpha < \beta < \kappa^+$, entonces $\pi_F[V_\alpha] \cap \pi_F[V_\beta] = \emptyset$. $\square$

3.3 Condiciones de cadena en productos topológicos

En esta sección estudiaremos el comportamiento de la celularidad, los calibres y los precalibres en los productos topológicos. Para comenzar presentamos el siguiente lema que especifica una manera de calcular la celularidad del espacio X en términos de la celularidad de sus subproductos finitos.

Lema 3.24. *Si existe $\alpha < \lambda$ con $c(X_\alpha) \geqslant \omega$, entonces*

$$c(X) = \sup \left\{ c(X_F) : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}.$$

Demostración. Una combinación de los lemas 2.50(1) y 3.10 garantiza que $\omega \leqslant c(X_\alpha) \leqslant \sup\{c(X_F) : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\} \leqslant c(X)$.

Para verificar la desigualdad restante, supongamos que κ es un número cardinal infinito con $c(X) > \kappa$ y veamos que existe $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $c(X_F) > \kappa$. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ una familia celular en X de tal modo que, para cada $\alpha < \kappa^+$, hay $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U(\alpha, \beta) : \beta \in F_\alpha\}$, donde $U(\alpha, \beta) \in \tau_{X_\beta}$ siempre que $\beta \in F_\alpha$, con $U_\alpha = \bigcap_{\beta \in F_\alpha} \pi_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)]$. Luego, como κ^+ es un cardinal regular no numerable y $\{F_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia de conjuntos finitos, el corolario 1.9 produce $F \in [\lambda]^{<\omega}$ y $J \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ tales que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$ distintos, $F_\alpha \cap F_\beta = F$.

Ahora, si $F = \emptyset$ y $\alpha, \beta \in J$ son distintos, entonces $F_\alpha \cap F_\beta = \emptyset$ y, por ende, al fijar $x_\gamma \in U(\alpha, \gamma)$, $x_\delta \in U(\beta, \delta)$ y $x_\eta \in X_\eta$ para $\gamma \in F_\alpha$, $\delta \in F_\beta$ y $\eta \in \lambda \setminus (F_\alpha \cup F_\beta)$ tenemos que

$$x := \{(\gamma, x_\gamma) : \gamma \in F_\alpha\} \cup \{(\delta, x_\delta) : \delta \in F_\beta\} \cup \{(\eta, x_\eta) : \eta \in \lambda \setminus (F_\alpha \cup F_\beta)\}$$

es un elemento de $U_\alpha \cap U_\beta$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $F \neq \emptyset$ y así, un argumento similar al expuesto en la Afirmación del corolario 3.23 muestra que $\{\pi_F[U_\alpha] : \alpha \in J\}$ es una familia celular en X_F; en consecuencia, $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $c(X_F) > \kappa$. $\square$

El siguente resultado es debido a Kurepa.

Teorema 3.25. *Si para cualquier $\alpha < \lambda$ se satisface que $c(X_\alpha) \geqslant \omega$, entonces $c(X) \leqslant 2^{c_\lambda(X)}$. En especial, cualquier producto de espacios con celularidad infinita numerable tiene celularidad a lo sumo $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Por el lema 3.24, es suficiente verificar la desigualdad correspondiente para cada X_F con $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Sean $F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\kappa := \max\{c(X_\alpha) : \alpha \in F\}$. Supongamos en busca de una contradicción que $2^\kappa < c(X_F)$. Sean $\mu := (2^\kappa)^+$ y $\{U_\alpha : \alpha < \mu\}$ una familia celular en X_F formada por abiertos canónicos. Para cada $\alpha < \mu$ existe $\{U(\alpha, \beta) : \beta \in F\}$, donde $U(\alpha, \beta) \in \tau^+_{X_\beta}$ siempre que $\beta \in F$, con la propiedad de que $U_\alpha = \prod_{\beta \in F} U(\alpha, \beta)$.

Ahora, para toda $\gamma \in F$ definamos $P_\gamma := \{\{\alpha, \beta\} \in [\mu]^2 : U(\alpha, \gamma) \cap U(\beta, \gamma) = \emptyset\}$. En virtud de que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular, es claro que $[\mu]^2 = \bigcup\{P_\gamma : \gamma \in F\}$. Así, por el teorema 1.12 hay $\gamma \in F$ y $J \subseteq \mu$ con $|J| > \kappa$ y $[J]^2 \subseteq P_\gamma$. Por lo tanto, $\{U(\alpha, \gamma) : \alpha \in J\}$ es una familia celular en X_γ y, por ende, $c(X_\gamma) > \kappa$, el absurdo deseado. $\square$

A continuación veremos algunos resultados al respecto de calibres y precalibres en productos topológicos. Además, demostraremos que los números de Šanin de cada factor determinan completamente los números de Šanin del espacio producto.

Los siguientes enunciados están escritos de tal modo que sea posible obtener resultados para precalibres y calibres simultáneamente. Sin embargo, las demostraciones de estas afirmaciones las haremos únicamente para las versiones que hablan de precalibres con la promesa de que, al aplicar ligeras variantes a los argumentos que expondremos, se pueden obtener la conclusiones correspondientes para calibres.

En virtud de que cada π_α es una función continua y suprayectiva, una consecuencia inmediata del lema 2.50(2) es el siguiente resultado.

Proposición 3.26. *Si κ es un precalibre (resp., calibre) para X, entonces κ es un precalibre (resp., calibre) para cada X_α.*

Este resultado indica que, necesariamente, los posibles precalibres y calibres para un producto topológico son aquellos cardinales que satisfacen la propiedad correspondiente para cada uno de los factores. Los siguientes resultados tienen como objetivo demostrar que en el ámbito de los cardinales regulares no numerables, esta última condición también es suficiente.

Lema 3.27. *Si $\lambda < \omega$ y κ es un precalibre (resp., calibre) para cada X_α, entonces κ es un precalibre (resp., calibre) para X.*

Demostración. El resultado en general se sigue del caso para dos factores por inducción matemática; por esta razón, haremos la demostración únicamente para $\lambda = 2$. Sea $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^+_{X_0 \times X_1}$ y para cada $\alpha < \kappa$ fijemos $U_\alpha \in \tau^+_{X_0}$ y $V_\alpha \in \tau^+_{X_1}$ con $U_\alpha \times V_\alpha \subseteq W_\alpha$. Como κ es precalibre para X_0, existe $I \in [\kappa]^\kappa$ tal que la familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es centrada. Similarmente, como κ es un precalibre para X_1, existe $J \in [I]^\kappa$ con $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia centrada. De esta manera, J es un elemento de $[\kappa]^\kappa$ y satisface que la colección $\{W_\alpha : \alpha \in J\}$ es centrada. □

El siguiente resultado fue demostrado por Šanin.

Teorema 3.28. *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si κ es un precalibre (resp., calibre) para cada X_α, entonces κ es un precalibre (resp., calibre) para X.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ^+_X. Para cada $\alpha < \kappa$ fijemos $F_\alpha \in [\lambda]^{<\omega}$ y $\{U(\alpha, \beta) : \beta \in F_\alpha\}$, en donde $U(\alpha, \beta) \in \tau^+_{X_\beta}$ siempre que $\beta \in F_\alpha$, con $\bigcap_{\beta \in F_\alpha} \pi_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)] \subseteq U_\alpha$. Además, supongamos sin perder generalidad que $\bigcap_{\alpha<\kappa} F_\alpha \neq \emptyset$. Por el corolario 1.9 existen $F \in [\lambda]^{<\omega}$ e $I \in [\kappa]^\kappa$ tales que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, la condición $\alpha \neq \beta$ implica que $F_\alpha \cap F_\beta = F$. Nótese que F es un conjunto finito y no vacío.

El lema 3.27 garantiza que el espacio producto X_F tiene precalibre κ. De este modo, si para cada $\beta \in F$ la función $\rho_\beta : X_F \to X_\beta$ denota la β-ésima proyección, la familia $\{\bigcap_{\beta\in F} \rho_\beta^{-1}[U(\alpha,\beta)] : \alpha \in I\}$ es una colección de abiertos no vacíos en X_F. Sea $J \in [I]^\kappa$ de tal manera que $\{\bigcap_{\beta\in F} \rho_\beta^{-1}[U(\alpha,\beta)] : \alpha \in J\}$ es una familia centrada. Para ver que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada, sean $K \in [J]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $y \in \bigcap\{\bigcap_{\beta\in F} \rho_\beta^{-1}[U(\alpha,\beta)] : \alpha \in K\}$. Por último, si para cualesquiera $\alpha \in K$, $\beta \in F_\alpha \setminus F$ y $\gamma \in \lambda \setminus \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in K\}$, fijamos $x(\alpha,\beta) \in U(\alpha,\beta)$ y $x(\gamma) \in X_\gamma$, entonces un argumento rutinario muestra que

$$x := y \cup \big\{(\beta, x(\alpha,\beta)) : \alpha \in K \ \wedge \ \beta \in F_\alpha \setminus F\big\} \cup \big\{(\gamma, x(\gamma)) : \gamma \in \lambda \setminus \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in K\}\big\}$$

es un elemento bien definido de X que además pertenece a $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in K\}$. $\square$

Corolario 3.29. *Si κ es un número cardinal y para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que $w\check{s}(X_\alpha) = \kappa$ (resp., $\check{s}(X_\alpha) = \kappa$), entonces $w\check{s}(X) = \kappa$ (resp., $\check{s}(X) = \kappa$).*

En vista de que cualquier cardinal regular no numerable es calibre para $D(2)$ por el corolario 2.41, el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 3.30. *Si κ es un cardinal regular no numerable, entonces $D(2)^\lambda$ tiene calibre κ.*

3.4 $\mathsf{C}(\omega_1)$ es independiente de ZFC

Los axiomas de Zermelo-Fraenkel, en conjunto con el Axioma de Elección, son considerados pilares fundamentales de la matemática moderna. Sin embargo, a lo largo del tiempo se han descubierto enunciados que no se pueden probar ni refutar empleando dichos axiomas. Este tipo de afirmaciones se conocen como «enunciados independientes». La existencia de esta clase de enunciados muestra que, a pesar de la solidez y la utilidad de los axiomas de ZFC, existen ciertos problemas que escapan de su alcance y se requieren extensiones o modificaciones de los mismos para ser resueltos. En esta sección examinaremos el enunciado $\mathsf{C}(\omega_1)$ con el objetivo de verificar que éste es un ejemplo de un enunciado independiente.

Definición 3.31. Si κ es un cardinal infinito, utilizaremos el símbolo $\mathsf{C}(\kappa)$ para abreviar el enunciado: «el producto de espacios con celularidad menor a κ tiene celularidad menor a κ».

Observemos que en virtud del lema 3.24, $\mathsf{C}(\kappa)$ es equivalente a que si X y Y son tales que $\omega \leqslant \min\{c(X), c(Y)\} \leqslant \max\{c(X), c(Y)\} < \kappa$, entonces $c(X \times Y) < \kappa$. De este modo, el enunciado «el producto de espacios topológicos ccc es ccc» es simplemente $\mathsf{C}(\omega_1)$.

Lo que sigue es establecer cierta terminología de órdenes parciales para conectar el enunciado $\mathsf{C}(\omega_1)$ con el Axioma de Martin para ω_1.

Sea $(P, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $p, q \in P$ son *compatibles* si existe $r \in P$ de tal modo que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. En caso contrario diremos que son *incompatibles*.

Un subconjunto A de P será una *anticadena* si para cualesquiera $p, q \in A$ distintos se satisface que p y q son incompatibles. Diremos que P satisface la *condición de la cadena contable* (abreviado comúnmente como *ccc*) si todas las anticadenas de P son numerables.

Diremos que un subconjunto D de P es *denso* si para cualquier $p \in P$ existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

Un subconjunto no vacío F de P será un *filtro* en P si los elementos de F son compatibles por pares y, para cualesquiera $p \in F$ y $q \in P$, la condición $p \leqslant q$ implica que $q \in F$.

Si $\mathscr{D}$ es una familia formada por subconjuntos de P y F es un filtro en P, diremos que F es *$\mathscr{D}$-genérico* si F tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathscr{D}$.

Definición 3.32. El *Axioma de Martin* para un cardinal infinito κ, abreviado como $\mathsf{MA}(\kappa)$, establece lo siguiente: «Si $(P, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que satisface la ccc, y $\mathscr{D}$ es una familia formada por a lo sumo κ subconjuntos densos de P, entonces P admite un filtro $\mathscr{D}$-genérico».

Nuestro objetivo es demostrar que el enunciado $\mathsf{C}(\omega_1)$ (véase la definición 3.31) se deduce a partir de $\mathsf{MA}(\omega_1)$. El siguiente resultado es la piedra angular de la presente sección.

Lema 3.33. *Si X es un espacio topológico ccc, κ es un cardinal regular no numerable, y $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X$ es una colección decreciente, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}$ para cualquier $\beta > \alpha$.*

Demostración. En busca de una contradicción supongamos que para cada $\alpha < \kappa$ existe $\alpha < \beta < \kappa$ con $\overline{V_\beta} \subsetneq \overline{V_\alpha}$. De esta manera, para cada $\alpha < \kappa$ podemos definir a $\beta(\alpha) :=$

$\text{mín}\{\beta < \kappa : \alpha < \beta \ \wedge \ V_\alpha \setminus \overline{V_\beta} \neq \emptyset\}$. Ahora, definamos recursivamente una colección $\{\lambda_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como sigue: $\lambda_0 := 0$ y $\lambda_\alpha := \sup\{\beta(\lambda_\alpha) : \gamma < \alpha\} + 1$ para $0 < \alpha < \kappa$. Observemos que $\{\lambda_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \kappa$ por la regularidad de κ.

El absurdo deseado lo obtendremos cuando probemos que $\mathscr{V} := \{V_{\lambda_\alpha} \setminus \overline{V_{\beta(\lambda_\alpha)}} : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular no numerable en X. Claramente, $\mathscr{V}$ es una familia formada por subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Además, si $\alpha < \gamma < \kappa$, sucede que $\beta(\lambda_\alpha) \in \{\beta(\lambda_\delta) : \delta < \gamma\}$ y, por ende, $\beta(\lambda_\alpha) < \lambda_\gamma$, lo cual implica que $V_{\lambda_\gamma} \subseteq \overline{V_{\beta(\lambda_\alpha)}}$; en especial, se verifica la igualdad

$$\left(V_{\lambda_\alpha} \setminus \overline{V_{\beta(\lambda_\alpha)}}\right) \cap \left(V_{\lambda_\gamma} \setminus \overline{V_{\beta(\lambda_\gamma)}}\right) = \emptyset.$$

Esto contradice el hecho de que X es un espacio ccc. □

Teorema 3.34. *Si X es un espacio topológico ccc, κ es un cardinal regular no numerable y $\mathsf{MA}(\kappa)$ es cierto, entonces κ es un precalibre para X. En especial, $\mathsf{MA}(\omega_1)$ implica que $w\check{s}(X) = \omega$.*

Demostración. Para comprobar que κ es un precalibre para X, el lema 2.40 indica que es suficiente mostrar que si $\mathscr{U} \subseteq \tau_X^+$ tiene cardinalidad κ, entonces existe $\mathscr{W}$ contenida en $\mathscr{U}$ de cardinalidad κ tal que $\mathscr{W}$ es una familia centrada.

Sea $\mathscr{U}$ un elemento de $[\tau_X^+]^\kappa$. Fijemos una enumeración sin repeticiones $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de $\mathscr{U}$ y definamos $V_\alpha := \bigcup\{U_\beta : \beta > \alpha\}$ para cada $\alpha < \kappa$. Es claro que $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia decreciente y, por ende, existe el mínimo número ordinal $\alpha < \kappa$ tal que $\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}$ para cada $\beta > \alpha$ (véase el lema 3.33). Luego, sea $\mathscr{P} := \tau_{V_\alpha}^+$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{P}, \subseteq)$. En virtud de que todas las anticadenas en $\mathscr{P}$ son familias celulares en V_α y $c(V_\alpha) \leqslant \omega$ (véase la proposición 2.9(3)), deducimos que todas las anticadenas en $\mathscr{P}$ son numerables. En suma, $\mathscr{P}$ tiene la ccc.

Ahora, definamos para $\alpha \leqslant \beta < \kappa$ el conjunto $D_\beta := \{U \in \mathscr{P} : \exists\, \gamma > \beta\, (U \subseteq U_\gamma)\}$. Si $\alpha \leqslant \beta < \kappa$ y $V \in \mathscr{P}$, entonces como $V \in \tau_{V_\alpha}^+$ y $\overline{V_\alpha} = \overline{V_\beta}$, inferimos que $V \cap V_\beta \neq \emptyset$. Por esta razón, existe $\gamma > \beta$ tal que $V \cap U_\gamma \neq \emptyset$ y así, si hacemos $U := V \cap U_\gamma$, se comprueba que $U \in D_\beta$ y $U \subseteq V$. Esto demuestra que todos los D_β son subconjuntos densos de $\mathscr{P}$.

Empleemos $\mathsf{MA}(\kappa)$ para encontrar un filtro $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$ que sea $\{D_\beta : \alpha \leqslant \beta < \kappa\}$-

genérico y definamos $\mathscr{W} := \mathscr{F} \cap \mathscr{U}$. Observemos que $\mathscr{W}$ es una familia centrada en virtud de que $\mathscr{F}$ lo es. Ahora, con el objetivo de verificar que $|\mathscr{W}| = \kappa$, es suficiente comprobar que $\{\gamma < \kappa : U_\gamma \in \mathscr{W}\}$ es un conjunto cofinal en κ.

Si $\alpha < \beta < \kappa$, la genericidad de $\mathscr{F}$ garantiza la existencia de $U \in \mathscr{F} \cap D_\beta$; en consecuencia, existe $\beta < \gamma < \kappa$ con $U \subseteq U_\gamma$. Finalmente, como $\mathscr{F}$ es un filtro en $\mathscr{P}$, obtenemos la pertenencia $U_\gamma \in \mathscr{W}$. $\square$

El siguiente corolario se obtiene a partir de una combinación de la proposición 2.45 con el teorema 3.34.

Corolario 3.35. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff ccc, κ es un cardinal regular no numerable y $\mathsf{MA}(\kappa)$ es cierto, entonces κ es un calibre para X.*

Por otra parte, una combinación del lema 3.27 con el teorema 3.34 prueba el siguiente corolario.

Corolario 3.36. *Si κ es un cardinal regular no numerable, X y Y son espacios topológicos ccc y $\mathsf{MA}(\kappa)$ es cierto, entonces $X \times Y$ tiene precalibre κ.*

Finalmente, el corolario 3.36 y la igualdad $\omega_1 = \omega^+$ permiten obtener un corolario más.

Corolario 3.37. *Si X y Y son espacios topológicos ccc y $\mathsf{MA}(\omega_1)$ es cierto, entonces $X \times Y$ es ccc. En otras palabras, $\mathsf{MA}(\omega_1)$ implica $\mathsf{C}(\omega_1)$.*

Una pregunta natural que surge a partir de los resultados previos es si es necesario un axioma adicional para demostrar que $\mathsf{C}(\omega_1)$ es cierto, o bien, si este enunciado se puede deducir a partir de argumentos que estén dentro del alcance de ZFC. Laver demostró que, bajo CH, existen un par de conjuntos parcialmente ordenados ccc cuyo producto directo ya no es ccc. Un fortalecimiento de este resultado establecido por Galvin garantiza que CH implica la existencia de un par espacios compactos de Hausdorff, cero-dimensionales, extremadamente disconexos y ccc de tal modo que su producto no es ccc. En virtud de que la demostración de este teorema excede el alcance de este trabajo, únicamente mencionamos que todos los detalles de la prueba pueden consultarse en [3].

El material expuesto en esta sección y los hechos comentados en el párrafo anterior tienen al menos dos consecuencias notables: primero, el enunciado $\mathsf{C}(\omega_1)$ es independiente de ZFC; y segundo, como el producto de espacios con precalibre ω_1 satisface la ccc, deducimos que si CH es cierta, entonces existe un espacio ccc que no tiene precalibre ω_1. En otras palabras, CH implica que la desigualdad $w\check{s}(X) \geqslant c(X)$ puede ser estricta en el caso numerable.

En suma, los resultados de esta sección convergen en el siguiente teorema.

Teorema 3.38. *Los siguientes enunciados se verifican.*

1. $[\mathsf{MA}(\omega_1)]$ *Si X tiene celularidad numerable, entonces $w\check{s}(X) = \omega$.*

2. $[\mathsf{CH}]$ *Existe un espacio X con celularidad numerable y $w\check{s}(X) > \omega$.*

CAPÍTULO 4: EJEMPLOS FUNDAMENTALES

En el presente capítulo emplearemos los resultados de los primeros tres capítulos junto con los diagramas 2.1 y 2.2 para calcular varias funciones cardinales de algunos espacios topológicos conocidos.

Ejemplo 4.1. Si X es un espacio T_1 y segundo numerable entonces, para cualquier

$$\phi \in \{w, nw, hd, hL, d, s, L, wL, c, e, \pi w, h\pi w, sw, psw, \check{s}, w\check{s}, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\},$$

se satisface que $\phi(X) \leqslant \omega$. Además, cuando X es regular, $\Delta(X) \leqslant \omega$.

Demostración. La condición $w(X) \leqslant \omega$ implica que todas las funciones cardinales involucradas en este ejemplo se colapsan a ω. Finalmente, si X es regular entonces la proposición 2.27 garantiza que $\Delta(X) \leqslant w$. □

Ejemplo 4.2. Si κ es un cardinal infinito, las siguientes relaciones se verifican para $D(\kappa)$, el espacio discreto de cardinalidad κ.

1. $\phi(D(\kappa)) = \kappa$, para $\phi \in \{w, nw, hd, hL, d, s, L, wL, c, e, \pi w, h\pi w, \check{s}, w\check{s}\}$.

2. $\phi(D(\kappa)) = 1$, cuando $\phi \in \{psw, \Delta, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$.

3. $sw(D(\kappa)) = \log(\kappa)$.

Demostración. Para el inciso (1) es suficiente argumentar que $\kappa \leqslant wL(D(\kappa))$, $w(D(\kappa)) \leqslant \kappa$ y $e(D(\kappa)) \geqslant \kappa$.

En primer lugar, consideremos a $\mathscr{U} := \{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ y observemos que si $\lambda < \kappa$ es un número cardinal y $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\lambda}$, entonces $\overline{\bigcup \mathscr{V}} = \bigcup \mathscr{V} \subsetneq \bigcup \mathscr{U}$. De este modo, $\kappa \leqslant wL(D(\kappa))$. Por otro lado, como $\mathscr{U}$ es una base para $D(\kappa)$ de cardinalidad κ, $w(D(\kappa)) \leqslant \kappa$. Finalmente, dado que $D(\kappa)$ es un subespacio cerrado y discreto de $D(\kappa)$, $e(D(\kappa)) \geqslant \kappa$.

El inciso (2) es consecuencia de los lemas 2.16, 2.23 y 2.33, y de que para cualquier subespacio Y de $D(\kappa)$ y cualquier $\alpha \in Y$ se cumple que $\{\{\alpha\}\}$ es una π-base local para Y en α.

Para el inciso (3) notemos que la proposición 2.15(2) indica que $|D(\kappa)| \leqslant 2^{sw(D(\kappa))}$; así, $\log(\kappa) \leqslant sw(D(\kappa))$. Ahora, como $|D(\kappa)| \leqslant 2^{\log(\kappa)}$, para cada $x \in D(\kappa)$ existe una función $f_x : \log(\kappa) \to 2$ de tal forma que $f_x \neq f_y$ siempre que $x, y \in D(\kappa)$ son distintos. Luego, para cada $\alpha < \log(\kappa)$ e $i < 2$ definamos $A(\alpha, i) := \{x \in D(\kappa) : f_x(\alpha) = i\}$ y sea $\mathscr{U} := \{A(\alpha, i) : \alpha < \log(\kappa) \wedge i < 2\}$. Es claro que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de $D(\kappa)$. Para comprobar que es separante, fijemos $x, y \in D(\kappa)$ distintos y $\alpha < \log(\kappa)$ con $f_x(\alpha) \neq f_y(\alpha)$. Resulta que $U := A(\alpha, f_x(\alpha))$ es un elemento de $\mathscr{U}$ que satisface las relaciones $x \in U$ y $y \notin U$. Finalmente, $sw(D(\kappa)) \leqslant |\mathscr{U}| \leqslant \log(\kappa)$. □

Observación 4.1. Todos los espacios X que vienen a continuación son infinitos, T_1 y no discretos salvo el ejemplo 4.5. De esta manera, las observaciones 2.1 y 2.3, el lema 2.33, la definición de $\check{s}$ y $w\check{s}$, y las relaciones presentes en los diagramas 2.1 y 2.2 garantizan que si

$$\phi \in \{w, nw, hd, hL, d, s, L, e, \pi w, h\pi w, \check{s}, w\check{s}, sw, psw, \Delta, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\},$$

entonces $\phi(X) \geqslant \omega$. Además, como todos los espacios son T_3 salvo los ejemplos 4.4 y 4.5, la observación 2.2 y la proposición 2.31 aseguran que si $\phi \in \{wL, c\}$, entonces $\phi(X) \geqslant \omega$.

Ejemplo 4.3. Las siguientes igualdades son ciertas para $\alpha D(\kappa)$, la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad $\kappa \geqslant \omega$.

1. $\phi(\alpha D(\kappa)) = \kappa$, para cada $\phi \in \{w, nw, hd, hL, d, s, c, \pi w, h\pi w, sw, psw, \Delta, \check{s}, w\check{s}, \chi, \psi\}$.
2. $\phi(\alpha D(\kappa)) = \omega$, siempre que $\phi \in \{L, wL, e, \pi\chi, h\pi\chi, t\}$.

Demostración. Recordemos que $\alpha D(\kappa) = \kappa \cup \{\kappa\}$ está equipado con la topología

$$\tau_{\alpha D(\kappa)} := \tau_{D(\kappa)} \cup \left\{ U \subseteq \alpha D(\kappa) : \kappa \in U \ \wedge \ D(\kappa) \setminus U \in [D(\kappa)]^{<\omega} \right\}.$$

Para el inciso (1) basta comprobar que $c(\alpha D(\kappa)) \geqslant \kappa$, $w(\alpha D(\kappa)) \leqslant \kappa$ y $\psi(\alpha D(\kappa)) \geqslant \kappa$. Como la familia $\{\{\beta\} : \beta < \kappa\}$ es una familia celular en $\alpha D(\kappa)$, tenemos que $c(\alpha D(\kappa)) \geqslant \kappa$.

Por otro lado, en virtud de que $\alpha D(\kappa)$ es un espacio compacto y T_2, el corolario 2.38 garantiza que $w(\alpha D(\kappa)) \leqslant \kappa$.

Ahora, veamos que si $\mathscr{V}$ es una pseudobase local para $\alpha D(\kappa)$ en κ, entonces $\mathscr{V}$ tiene al menos κ elementos. Emplearemos la siguiente afirmación para mostrar este hecho.

Afirmación. Existen colecciones $\{\alpha_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq \kappa$ y $\{V_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq \mathscr{V}$ de tal modo que $\{\alpha_\beta : \beta < \kappa\}$ es estrictamente creciente y, para cualquier $\beta < \kappa$, $\alpha_\beta \notin V_\beta$, $(\alpha_\beta, \kappa] \subseteq V_\beta$ y $\sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\} < \kappa$.

Procederemos mediante recursión transfinita sobre κ. Supongamos que para algún $\gamma < \kappa$ existen $\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\}$ y $\{V_\beta : \beta < \gamma\}$ con las condiciones deseadas. Ahora, como $\delta := \sup\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\} < \kappa$ y $\bigcap \mathscr{V} = \{\kappa\}$, existe $V_\gamma \in \mathscr{V}$ con $\delta + 1 \notin V_\gamma$. En estas circunstancias, si $\alpha_\gamma := \sup\{\eta < \kappa : \eta \notin V_\gamma\}$, entonces $\alpha_\gamma \notin V_\gamma$; $(\alpha_\gamma, \kappa] \subseteq V_\gamma$; para cada $\beta < \gamma$ se satisface que $\alpha_\beta \leqslant \delta < \delta + 1 \leqslant \alpha_\gamma$ y $\sup\{\alpha_\beta : \beta < \gamma + 1\} = \alpha_\gamma < \kappa$. Esto termina la recursión.

Por último, observemos que si $\beta < \gamma < \kappa$, entonces $\alpha_\gamma \in V_\beta \setminus V_\gamma$. Así, $\kappa = |\{V_\beta : \beta < \kappa\}| \leqslant |\mathscr{V}|$ y, por ende, obtenemos las relaciones $\psi(\alpha D(\kappa)) \geqslant \psi(\kappa, \alpha D(\kappa)) \geqslant \kappa$.

Para el inciso (2) es suficiente verificar que $L(\alpha D(\kappa)) \leqslant \omega$ y $h\pi\chi(\alpha D(\kappa)) \leqslant \omega$. La primera desigualdad es cierta porque $\alpha D(\kappa)$ es compacto. Para la segunda desigualdad fijemos $Y \subseteq \alpha D(\kappa)$ y $y \in Y$. Es evidente que si $y \in D(\kappa)$, entonces $\{\{y\}\}$ es una π-base local para Y en y. Supongamos que $y = \kappa$ y observemos que, cuando Y es finito, y es un punto aislado. Por otra parte, cuando Y es infinito, tomamos $Z \in [Y \setminus \{\kappa\}]^\omega$ y notamos que $\{\{z\} : z \in Z\}$ es una π-base local para Y en y. En cualquier caso, $\pi\chi(y, Y) \leqslant \omega$ y así, $\pi\chi(Y) \leqslant \omega$. Finalmente, $h\pi\chi(\alpha D(\kappa)) \leqslant \omega$. $\square$

Sean X un espacio topológico, $\mathscr{N}$ una familia infinita de subconjuntos de X y $\mathscr{S}$ una subbase para X. Si para cualesquiera $x \in X$ y $S \in \mathscr{S}$ existe $N \in \mathscr{N}$ con $x \in N \subseteq S$, entonces $nw(X) \leqslant |\mathscr{N}|$. En efecto, un argumento rutinario muestra que $\mathscr{M} := \{\bigcap \mathscr{F} : \mathscr{F} \in [\mathscr{N}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es una red para X con $|\mathscr{M}| \leqslant |\mathscr{N}|$. Utilizaremos este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Si κ es un cardinal infinito y denotamos por X al espacio cofinito de cardinalidad κ, entonces las siguientes relaciones son ciertas.

1. $\phi(X) = \kappa$, si $\phi \in \{w, sw, \chi, \pi w, h\pi w, psw, \Delta, \pi\chi, h\pi\chi, \psi\}$.

2. $\phi(X) = \omega$, para $\phi \in \{hd, hL, d, s, L, e, \check{s}, w\check{s}, t\}$.

3. $\phi(X) = 1$, cuando $\phi \in \{c, wL\}$.

4. $nw(X) = \log(\kappa)$

Demostración. Para el inciso (1) es suficiente ver que las desigualdades $\psi(X) \geqslant \kappa$, $\pi\chi(X) \geqslant \kappa$ y $w(X) \leqslant \kappa$ son ciertas. Veamos que $\psi(x, X) \geqslant \kappa$ y $\pi\chi(x, X) \geqslant \kappa$ para cada $x \in X$.

Comencemos por observar que si $\lambda < \kappa$, $\mathscr{V} \in [\tau_X^+]^\lambda$ y $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una enumeración fiel de $\mathscr{V}$, entonces $\mathscr{V}$ no es una pseudobase local para X en x. En efecto, como $\mathscr{V} \subseteq \tau_X^+$, para cada $\alpha < \lambda$ existe $F_\alpha \in [X]^{<\omega}$ con $V_\alpha = X \setminus F_\alpha$. Luego, $\left|\bigcup\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}\right| < \kappa$ y así existe $y \in X \setminus \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcap \mathscr{V}$ con $x \neq y$. En consecuencia, toda pseudobase local para X en x tiene cardinalidad mayor o igual a κ, es decir, $\psi(x, X) \geqslant \kappa$.

Con el objetivo de comprobar que $\pi\chi(x, X) \geqslant \kappa$, notemos primero que si $\mathscr{B} \subseteq \tau_X^+$ es finito y $y \in \bigcap \mathscr{B}$ es distinto de x, entonces $X \setminus \{y\} \in \tau_X(x)$ y no existe $B \in \mathscr{B}$ con $B \subseteq X \setminus \{y\}$. Ahora, supongamos en busca de una contradicción que $\mathscr{B}$ es una π-base local para X en x tal que si $\lambda := |\mathscr{B}|$, entonces $\omega \leqslant \lambda < \kappa$. Sea $\{x_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ un subconjunto enumerado sin repeticiones de $X \setminus \{x\}$ y para cada $\alpha < \lambda^+$ fijemos $B_\alpha \in \mathscr{B}$ con $B_\alpha \subseteq X \setminus \{x_\alpha\}$. La regularidad de λ^+ garantiza que para la función $f : \lambda^+ \to \mathscr{B}$ determinada mediante $f(\alpha) := B_\alpha$ existe $B \in \mathscr{B}$ con $|f^{-1}\{B\}| = \lambda^+$. Así, para toda $\alpha \in f^{-1}\{B\}$ se satisface que $B \subseteq X \setminus \{x_\alpha\}$ y, por ende, $B \subseteq \bigcap\{X \setminus \{x_\alpha\} : \alpha \in f^{-1}\{B\}\}$, lo cual implica que el conjunto finito $X \setminus B$ contiene al conjunto infinito $\{x_\alpha : \alpha \in f^{-1}\{B\}\}$, el absurdo deseado. En suma, $\pi\chi(x, X) \geqslant \kappa$.

Finalmente, notemos que las desigualdades

$$w(X) \leqslant o(X) = \left|\{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}\right| = \left|[X]^{<\omega}\right| = \left|[\kappa]^{<\omega}\right| = \kappa$$

concluyen la demostración del inciso (1).

Para verificar el inciso (2) basta con ver que X es un espacio hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf. En vista de que todo subespacio de X es cofinito, basta argumentar que X es un espacio separable con la propiedad de Lindelöf. Este hecho es consecuencia de que todo espacio cofinito es compacto y cualquier conjunto infinito numerable es denso en X.

Para el inciso (3) es suficiente recordar la proposición 2.30(1) y notar que cualesquiera dos abiertos no vacíos en X tienen intersección no vacía (es decir, X es un espacio hiperconexo); en consecuencia, $1 \leqslant wL(X) \leqslant c(X) \leqslant 1$.

Para el inciso (4) observemos que por la proposición 2.13(4) se satisface que $\kappa \leqslant 2^{nw(X)}$ y así, $\log(\kappa) \leqslant nw(X)$. Ahora, como $|X| \leqslant 2^{\log(\kappa)}$, para cada $x \in X$ existe una función $f_x : \log(\kappa) \to 2$ de tal forma que $f_x \neq f_y$ siempre que $x, y \in X$ son distintos. Para cada $\alpha < \log(\kappa)$ e $i < 2$ definimos $A(\alpha, i) := \{x \in X : f_x(\alpha) = i\}$ y $\mathscr{N} := \{A(\alpha, i) : \alpha < \log(\kappa) \wedge i < \kappa\}$. Veamos que si $\mathscr{S}$ es la subbase canónica, es decir, $\mathscr{S} := \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$, entonces $\mathscr{N}$ y $\mathscr{S}$ satisfacen las hipótesis de la observación previa a este ejemplo. Fijemos $x \in X$ y $S \in \mathscr{S}$ con $x \in S$. Notemos que si $\{y\} = X \setminus S$, entonces existe $\alpha < \log(\kappa)$ con $f_y(\alpha) \neq f_x(\alpha)$ y así, $x \in A(\alpha, f_x(\alpha)) \subseteq S$. En conclusión, $nw(X) \leqslant \log(\kappa)$. $\square$

Ejemplo 4.5. Si $\mathbb{F}$ es el espacio de Sierpiński y $\kappa \geqslant \omega$, entonces los siguientes enunciados se verifican para $\mathbb{F}^\kappa$, el cubo de Alexandroff de peso κ.

1. $\phi(\mathbb{F}^\kappa) = \kappa$, para $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, \pi w, h\pi w, \pi\chi, h\pi\chi, t, \chi\}$.

2. $\phi(\mathbb{F}^\kappa) = \omega$, donde $\phi \in \{\check{s}, w\check{s}\}$.

3. $\phi(\mathbb{F}^\kappa) = 1$, si $\phi \in \{c, d, e, L, wL\}$.

Demostración. Nuestro inciso (1) es el inciso correspondiente del lema 3.1. El inciso (2) es porque, como $\mathbb{F}^\kappa$ tiene calibre ω_1 por ser separable (véase la proposición 2.43), se satisface que $w\check{s}(\mathbb{F}^\kappa) = \omega = \check{s}(\mathbb{F}^\kappa)$. Además, como $d \geqslant c \geqslant wL$ y en el inciso (3) del lema 3.1 demostramos que $d(\mathbb{F}^\kappa) = 1$, nuestro inciso (3) también se verifica para $\phi \in \{c, d, wL\}$. Lo que falta del inciso (3) es porque $L \geqslant e$ y si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{F}^\kappa$, entonces para la función constante $\overline{1}$ existe $U \in \mathscr{U}$ con $\overline{1} \in U$, lo cual implica que $U = \mathbb{F}^\kappa$ y, por ende, que $\{U\}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$ de cardinalidad 1. $\square$

Ejemplo 4.6. Los siguientes enunciados son ciertos para $D(2)^\kappa$, el cubo de Cantor de peso $\kappa \geqslant \omega$.

1. $\phi(D(2)^\kappa) = \kappa$, cuando $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, \pi w, h\pi w, sw, psw, \Delta, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$.

2. $\phi(D(2)^\kappa) = \omega$, donde $\phi \in \{L, wL, c, e, \check{s}, w\check{s}\}$.

3. $d(D(2)^\kappa) = \log(\kappa)$.

Demostración. En virtud de la proposición 2.18, el corolario 2.29, los incisos (1) y (2) del lema 3.1, del corolario 3.3 y de la compacidad de $D(2)^\kappa$, es suficiente observar que $\check{s}(D(2)^\kappa) = \omega$ porque ω_1 es un calibre para $D(2)^\kappa$ en virtud del corolario 3.30. $\square$

Ejemplo 4.7. Si denotamos por $\mathbb{S}$ a la recta de Sorgenfrey, las siguientes relaciones se verifican.

1. $\phi(\mathbb{S}) = \mathfrak{c}$, siempre que $\phi \in \{w, nw\}$.

2. $\phi(\mathbb{S}) = \omega$, para cualquier $\phi \in \{hd, hL, d, s, L, c, e, \pi w, h\pi w, sw, psw, \Delta, \check{s}, w\check{s}, \chi, \pi\chi,$ $h\pi\chi, \psi, t\}$.

Demostración. Nuestra primera observación es que para cualquier $x \in \mathbb{S}$ se satisface que la colección $\{[x, x+2^{-n}) : n < \omega\}$ es una base local numerable para $\mathbb{S}$ en x. Por esta razón, para toda $\phi \in \{\chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$ se cumple que $\phi(\mathbb{S}) \leqslant \omega$.

Para el inciso (1) comencemos por verificar que $\mathfrak{c} \leqslant nw(\mathbb{S})$. Sea $\mathscr{N}$ una red para $\mathbb{S}$ y para cada $x \in \mathbb{S}$ fijemos un elemento $N_x \in \mathscr{N}$ con $x \in N_x \subseteq [x, x+1)$. Así, la condición $x = \min N_x$ implica que para $x, y \in \mathbb{S}$, puntos distintos, $N_x \neq N_y$. En suma, $\mathfrak{c} \leqslant |\mathscr{N}|$. Por otra parte, dado que $\mathbb{S}$ es un espacio primero numerable, el corolario 2.38 constata que $w(\mathbb{S}) \leqslant |\mathbb{S}| = \mathfrak{c}$. De inmediato, $\mathfrak{c} \leqslant nw(\mathbb{S}) \leqslant w(\mathbb{S}) \leqslant \mathfrak{c}$.

Notemos ahora que en virtud de la proposición 1.5 y de la primero numerabilidad de $\mathbb{S}$, para el inciso (2) es suficiente verificar que $\phi(\mathbb{S}) \leqslant \omega$ cuando $\phi \in \{h\pi w, sw, \Delta\}$. En primer término, a partir de las proposición 2.35(3) y las relaciones $hd(\mathbb{S}) \leqslant \omega$ y $h\pi\chi(\mathbb{S}) \leqslant \omega$ se deduce que, para cualquier subespacio Y de $\mathbb{S}$,

$$\pi w(Y) = d(Y) \cdot \pi\chi(Y) \leqslant \omega.$$

En consecuencia, $h\pi w(\mathbb{S}) \leqslant \omega$.

Por último, si $\tau_{\mathbb{R}}$ denota a la topología usual para la recta real, una combinación de la proposición 2.24, la contención $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \tau_{\mathbb{S}}$ y el ejemplo 4.1 muestra que, para cada $\phi \in \{\Delta, sw\}$, se verifican las relaciones $\phi(\mathbb{S}) = \phi(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{S}}) \leqslant \phi(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) = \omega$. $\square$

Para lo que viene conviene tener presente los siguientes hechos: si x es un elemento de un espacio X, y es un elemento de un espacio Y, $\mathscr{B}_x$ es una base local para X en x y $\mathscr{B}_y$ es una base local para Y en y, entonces $\mathscr{B} := \{B_x \times B_y : B_x \in \mathscr{B}_x \ \wedge \ B_y \in \mathscr{B}_y\}$ es una base local para $X \times Y$ en (x, y) con $|\mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{B}_x| \cdot |\mathscr{B}_y|$; en consecuencia, $\chi(X \times Y) \leqslant \chi(X) \cdot \chi(Y)$ y, por ende, si X y Y son primero numerables, entonces $X \times Y$ es primero numerable.

Por otra parte, si D es un subconjunto denso de X y E es un subconjunto denso de Y, entonces $D \times E$ es un subconjunto denso de $X \times Y$ con $|D \times E| \leqslant |D| \cdot |E|$. Por lo tanto, $d(X \times Y) \leqslant d(X) \cdot d(Y)$ y así, si X y Y son separables, $X \times Y$ es separable.

Ejemplo 4.8. El plano de Sorgenfrey $\mathbb{S}^2$ posee las siguientes características.

1. $\phi(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{c}$, donde $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, L, e, h\pi w\}$.

2. $\phi(\mathbb{S}^2) = \omega$, para $\phi \in \{d, wL, c, \pi w, sw, psw, \Delta, \check{s}, w\check{s}, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$.

Demostración. Empecemos por notar que el espacio $\mathbb{S}^2$ es primero numerable porque $\mathbb{S}$ es primero numerable. Por lo tanto, $\phi(\mathbb{S}^2) \leqslant \omega$ siempre que $\phi \in \{\chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$.

Ahora, para el inciso (1) basta verificar que $\mathfrak{c} \leqslant \text{mín}\{e(\mathbb{S}^2), h\pi w(\mathbb{S}^2)\}$ y $w(\mathbb{S}^2) \leqslant \mathfrak{c}$. La desigualdad $\mathfrak{c} \leqslant e(\mathbb{S}^2)$ se deduce a partir del siguiente enunciado.

Afirmación. $W := \{(x, -x) : x \in \mathbb{S}\}$ es cerrado y discreto en $\mathbb{S}^2$.

Primero, como para toda $x \in \mathbb{S}$ se satisface que $W \cap ([x, x+1) \times [-x, -x+1)) = \{(x, -x)\}$, resulta que W es un subespacio discreto de $\mathbb{S}^2$. Por otra parte, si $(a, b) \in \mathbb{S}^2 \setminus W$ contemplamos dos casos: si $a + b > 0$, entonces $[a, a+1) \times [b, b+1) \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus W$. Por otra parte, cuando $a + b < 0$ sucede que $[a, \frac{a-b}{2}) \times [b, \frac{b-a}{2}) \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus W$. En cualquier caso, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{S}^2$ con $(a, b) \in U \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus W$; es decir, W es cerrado en $\mathbb{S}^2$.

Por otro lado, como $\mathbb{S}^2$ es un espacio primero numerable, el corolario 2.38 muestra que $w(\mathbb{S}^2) \leqslant |\mathbb{S}^2| = \mathfrak{c}$. Para concluir observe que, como W es un espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, se satisfacen las relaciones $h\pi w(\mathbb{S}^2) \geqslant \pi w(W) = \mathfrak{c}$.

Para el inciso (2) es suficiente argumentar que para cada $\phi \in \{d, \pi w, sw, \Delta\}$ se verifica la desigualdad $\phi(\mathbb{S}^2) \leqslant \omega$. Un argumento similar al expuesto en el ejemplo 4.7 muestra que si $\phi \in \{sw, \Delta\}$, entonces $\phi(\mathbb{S}^2) \leqslant \omega$. Ahora, $\mathbb{S}^2$ es un espacio separable porque $\mathbb{S}$ lo es (véase el ejemplo 4.7). Finalmente, la proposición 2.35(3) garantiza que $\pi w(\mathbb{S}^2) = d(\mathbb{S}^2) \cdot \pi\chi(\mathbb{S}^2) \leqslant d(\mathbb{S}^2) \cdot \chi(\mathbb{S}^2) = \omega$. $\square$

Ejemplo 4.9. Si $\mathbb{A}$ es la doble flecha de Alexandroff-Urysohn, los siguientes enunciados son ciertos.

1. $\phi(\mathbb{A}) = \mathfrak{c}$, siempre que $\phi \in \{w, nw, sw, psw, \Delta\}$.

2. $\phi(\mathbb{A}) = \omega$, si $\phi \in \{hd, hL, d, s, L, wL, c, e, \pi w, h\pi w, \check{s}, w\check{s}, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$

Demostración. Una vez más, lo primero que hacemos es observar que para cada $i < 2$ resulta que $\langle i, i\rangle$ es aislado en $\mathbb{A}$. Además, si $0 \leqslant x < 1$, $0 < y \leqslant 1$, $n_x < \omega$ y $m_y < \omega$ satisfacen que $x + 2^{-n_x} < 1$ y $0 < y - 2^{-m_y}$, entonces un argumento rutinario muestra que las colecciones

$$\mathscr{B}(\langle x, 1\rangle) := \left\{ (\langle x, 0\rangle, \rightarrow) \cap \Big(\leftarrow, \langle x + 2^{-n}, 0\rangle\Big) : n \geqslant n_x \right\} \text{ y}$$
$$\mathscr{B}(\langle y, 0\rangle) := \left\{ \Big(\langle y - 2^{-m}, 1\rangle, \rightarrow\Big) \cap (\leftarrow, \langle y, 1\rangle) : m \geqslant m_y \right\}$$

son bases locales para $\mathbb{A}$ en $\langle x, 1\rangle$ y $\langle y, 0\rangle$, respectivamente. De esta manera, $\mathbb{A}$ es un espacio primero numerable y, por ende, para cualquier $\phi \in \{\chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$ se comprueba que $\phi(\mathbb{A}) \leqslant \omega$.

Ahora notemos que, como $\mathbb{A}$ es un espacio compacto de Hausdorff (véase, [2, 3.10.C(b), p. 212]), para demostrar las relaciones del inciso (1) es suficiente ver que $w(\mathbb{A}) = \mathfrak{c}$ (véanse las proposiciones 2.18 y 2.29). Por un lado, la proposición 1.6 junto con la proposición 2.9(1) y el ejemplo 4.7 aseguran que $\mathfrak{c} = w(\mathbb{S}) = w([0,1] \times \{0\}) \leqslant w(\mathbb{A})$. Por otro lado, como $\mathbb{A}$ es un espacio primero numerable, el corolario 2.38 garantiza que $w(\mathbb{A}) \leqslant |\mathbb{A}| = \mathfrak{c}$.

Para el inciso (2) observemos que, como $\mathbb{A}$ es un espacio primero numerable, en virtud de que $\mathbb{A}$ es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf por la proposición 1.7, es suficiente argumentar que $h\pi w(\mathbb{A}) \leqslant \omega$. Con la idea anterior en mente, fijemos un subespacio Y de $\mathbb{A}$, definamos $Z := Y \cap \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ y sea $\mathscr{B}$ la unión de $\{\{z\} : z \in Z\}$ con la familia

$$\Big\{Y \cap \Big(\big(\langle p,i\rangle, \to\big) \cap \big(\leftarrow, \langle q,j\rangle\big)\Big) : p,q \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \ \wedge \ p < q \ \wedge \ 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 1\Big\}.$$

En estas condiciones, es claro que $\mathscr{B}$ es una π-base numerable para Y; en consecuencia, $h\pi w(\mathbb{A}) \leqslant \omega$. □

Ejemplo 4.10. El cuadrado $\mathbb{A}^2$ tiene las siguientes propiedades.

1. $\phi(\mathbb{A}^2) = \mathfrak{c}$, donde $\phi \in \{w, nw, hd, hL, s, h\pi w, sw, psw, \Delta\}$.

2. $\phi(\mathbb{A}^2) \leqslant \omega$, siempre que $\phi \in \{d, L, wL, c, e, \pi w, \check{s}, w\check{s}, \chi, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, t\}$.

Demostración. Comencemos por notar que $\mathbb{A}^2$ es un espacio primero numerable, compacto, T_2 y tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ porque $\mathbb{A}$ tiene ambas propiedades (véase el ejemplo 4.9). Una combinación de la proposición 2.18, el corolario 2.29 y el corolario 2.38 garantiza que para el inciso (1) basta comprobar que $\mathfrak{c} \leqslant \text{mín}\{s(\mathbb{A}^2), h\pi w(\mathbb{A}^2)\}$. Ahora, como $\mathbb{S}^2$ se encaja en $\mathbb{A}^2$ por la proposición 1.6, $\mathbb{A}$ admite un subespacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y, por ende, $\mathfrak{c} \leqslant s(\mathbb{A}^2)$. Asimismo, el ejemplo 4.8 junto con la monotonía de $h\pi w$ implican que $\mathfrak{c} = h\pi w(\mathbb{S}^2) \leqslant h\pi w(\mathbb{A}^2)$.

Puesto que $\mathbb{A}^2$ es un espacio primero numerable y compacto, para el inciso (2) es suficiente verificar que $\pi w(\mathbb{A}^2) \leqslant \omega$. Con este objetivo en mente notemos que $\mathbb{A}^2$ es un espacio separable puesto que $\mathbb{A}$ lo es (véase el ejemplo 4.9). De esta manera, la proposición 2.35(3) garantiza que $\pi w(\mathbb{A}^2) = d(\mathbb{A}^2) \cdot \pi\chi(\mathbb{A}^2) \leqslant \omega$. □

BIBLIOGRAFÍA

[1] E. K. van Douwen, *Jone's Lemma and inaccesible cardinals*, General topology and modern analysis, Academic press, New York, pp. 399–403, 1981.

[2] R. Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics, Heldermann, vol. 6, 1989.

[3] F. Galvin, *Chain conditions and products*, Fundam. Math., **108(1)** (1980), 33–48.

[4] A. Hajnal., I. Juhász, *On hereditarily α-Lindelöf and α-separable spaces*, Ann. Univ. Sei. Budapest Eötvös Sect. Math., **11** (1968), 115–124.

[5] R. Hodel, *Cardinal functions* I, Handbook of set-theoretic topology, (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), Elsevier, pp. 1–61, 1984.

[6] I. Júhasz, *Cardinal functions in topology - Ten years later*, Math. Centre Tracts, vol. 123, 1980.

[7] I. Júhasz, *Cardinal functions* II, Handbook of set-theoretic topology, (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), Elsevier, pp. 63–109, 1984.

[8] I. Júhasz, *On closed discrete subspace of product spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., **17** (1969), 219–223.

[9] I. Juhász, K. Kunen, *On the weight of Hausdorff spaces*, Gen. Topol. Appl., **3** (1973), 47–49.

[10] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in logic and the fundations of mathematics, North-Holland publishing co., vol. 102, 1980.

[11] J. T. Moore, *A Solution to the L-space problem*, J. Am. Math. Soc., **19(3)** (2006), 717–736.

[12] R. C. Walker, *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, 1974.