



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA  
CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA**

**EFFECTOS DISIPATIVOS Y ELÁSTICOS DE MEMBRANAS  
FLEXO-ELÉCTRICAS INMERSAS EN FLUIDOS NO  
NEWTONIANOS.**

**T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
I N G E N I E R A Q U Í M I C A  
P R E S E N T A :  
ALONDRA GUADALUPE OLVERA GÓMEZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**ASESOR DE TESIS:**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA**

**ASESOR DE TESIS:**

**M.C. e I.M. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES**



CIUDAD DE MÉXICO

ABRIL 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR**

### **P R E S E N T E**

Comunico a usted que la alumna Olvera Gómez Alondra Guadalupe con número de cuenta 419240710 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado fecha en el mes de abril de 2024 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

|             |   |
|-------------|---|
| Presidente: | I.Q. Dominga Ortiz Bautista                 |
| Vocal:      | Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)      |
| Secretario: | Dr. Fausto Calderas García                  |
| Suplente:   | M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres |
| Suplente:   | Dra. Guadalupe Salinas Juárez               |

El título de la tesis que se presenta es: “Efectos disipativos y elásticos de membranas flexo-eléctricas inmersas en fluidos no Newtonianos”

|                       |   |
|-----------------------|---|
| Opción de Titulación: | Tesis convencional                          |
| Director de tesis:    | Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia          |
| Asesor de tesis:      | Dr. Fausto Calderas García                  |
| Asesor de tesis:      | M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez |

## A G R A D E C I M I E N T O S

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático y Simulación computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovar y Mejorar la educación (PAPIME) de la UNAM <<PE106224>> << Material didáctico para la asignatura de transferencia de Masa Usando COMSOL MULTIPHYSICS Y WOLFRAM MATHEMATICA>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la Unidad de Bioingeniería UI-FESZ-110323.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LUI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, agradezco el sin fin de gratas experiencias y el permitirme conocer a mis grandes profesores y amigos, hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo personal y profesional.
- A mi asesor, Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, quien es un modelo a seguir, tanto por su rigor científico como por su calidad humana, agradezco su apoyo, paciencia y empeño para compartir sus conocimientos indispensables para la culminación del presente trabajo.

## DEDICATORIA

**D**edicado a mis padres por su confianza e inquebrantable creencia en mis capacidades, siempre les estaré agradecida por todo su apoyo, amor y esfuerzo constante. Su compañía es vital en cada etapa de mi vida. Mis logros son suyos.

A mis hermanos, por siempre estar e impulsarme de manera singular. Son un pilar fuerte en mi existencia.

A mi tío Alejandro G. R. y a mi prima Diana G. O., quienes siempre me han brindado su afecto y protección como si fueran mis hermanos mayores. Su apoyo y confianza incondicional es invaluable.

A mi abuelita Alicia R. y a mi padrino Roberto G., viven en mí. No hay ningún lugar al que pueda ir en el que no estén conmigo.

A mi familia Olvera, mi familia Gómez, especialmente primos, por su grata compañía y los momentos de alegría que me brindan, sin duda fundamentales en este proceso.

A Román, mi camarada, quién compartió cada paso de este camino conmigo y me impulsó cada día a ser mejor.

A Atena, creadora de incontables instantes de felicidad, cuyos bigotes leales han sido testigos de cada esfuerzo y logro en esta tesis.

Finalmente, pero no menos importante, a mis amigos, mi segunda familia, por el cariño sincero, las risas compartidas, los sabios consejos y el trabajo en equipo... Por muchos logros más.

# C O N T E N I D O

|  |           |
|--|-----------|
| RESUMEN.....   | 9         |
| <b>CAPITULO 1 ESTADO DEL ARTE .....</b>                              | <b>10</b> |
| 1.1 INTRODUCCIÓN .....   | 11        |
| 1.2 ANTECEDENTES.....  | 12        |
| 1.2.1 Membranas flexo-eléctricas .....                               | 12        |
| 1.2.2 Campo Eléctrico.....   | 13        |
| 1.3 HIPÓTESIS .....  | 14        |
| 1.4 OBJETIVOS.....   | 14        |
| 1.4.1 General. ....  | 14        |
| 1.4.2 Particulares.....  | 15        |
| 1.5 DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL .....                                  | 15        |
| <b>CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO.....</b>                                 | <b>17</b> |
| 2.1 MODELOS VISCOELÁSTICOS LINEALES .....                            | 18        |
| 2.1.1 Modelo de Maxwell. ....  | 18        |
| 2.2 ECUACIONES BÁSICAS PARA EL MODELADO MATEMÁTICO. ....             | 19        |
| 2.2.1 Ecuación de Continuidad y Transporte. ....                     | 19        |
| 2.2.2 Ecuación Constitutiva Reológica. ....                          | 19        |
| 2.2.3 Ecuación de Flujo Combinado de Poiseuille y Gravitacional..... | 20        |
| 2.3 FISIOLOGÍA DEL OÍDO.....   | 22        |
| 2.3.1 Funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE).....     | 23        |
| <b>CAPÍTULO 3 PROBLEMA FÍSICO .....</b>                              | <b>24</b> |
| 3.1 RAZONAMIENTO.....  | 25        |
| 3.2 ECUACIONES TEÓRICAS.....   | 25        |
| 3.2.1 Fluido newtoniano.....   | 26        |
| 3.2.2 Fluido no newtoniano.....                                      | 26        |
| <b>CAPÍTULO 4 MODELADO MATEMÁTICO .....</b>                          | <b>27</b> |
| 4.1 ANÁLISIS DEL SISTEMA FÍSICO .....                                | 28        |
| 4.1.1 Condiciones del sistema. ....                                  | 28        |
| 4.2 PROBLEMA FÍSICO Y ECUACIONES .....                               | 29        |
| 4.3 SERIES DE FOURIER .....  | 31        |
| 4.3.1 Condiciones del sistema. ....                                  | 31        |

|   |  |           |
|---|--|-----------|
| 4.3.2   | Flujo volumétrico.....   | 31        |
| 4.4   | FLUJO DE POISEUILLE.....   | 33        |
| 4.4.1   | Condiciones del sistema.....                                     | 33        |
| 4.4.2   | Desarrollo matemático del sistema.....                           | 33        |
| 4.5   | SERIES DE BESSEL.....  | 35        |
| <b>CAPÍTULO 5 SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b> |  | <b>39</b> |
| 5.1   | RESONANCIA EN FLUIDOS NEWTONIANOS .....                          | 40        |
| 5.2   | RESONANCIA EN FLUIDOS VISCOELÁSTICOS .....                       | 42        |
| 5.3   | EFEECTO DE LA VISCOSIDAD EN LAS MEMBRANAS FLEXO-ELÉCTRICAS ..... | 45        |
| <b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES .....</b>                        |  | <b>49</b> |
| 6.1   | APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO.....                                  | 50        |
| 6.2   | TRABAJO FUTURO.....  | 52        |
| <b>GLOSARIO.....</b>  |  | <b>53</b> |
| <b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>                                   |  | <b>55</b> |

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

|  |    |
|--|----|
| Figura 1. Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación.. .....   | 9  |
| Figura 2. Ilustra el efecto del campo eléctrico en las células ciliadas externas y su deformación por efecto del campo eléctrico. ....                             | 13 |
| Figura 3. Representación esquemática de las direcciones de flujo en coordenadas cartesianas. El líquido newtoniano es deformado continua e irreversiblemente. .... | 20 |
| Figura 4. Representación esquemática del sistema físico.. .....  | 28 |
| Figura 5. Esquema del sistema estudiado para el cálculo del Flujo de Poiseuille.....   | 33 |
| Figura 6. Ilustra la respuesta real e imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para el caso Newtoniano.....                  | 40 |
| Figura 7. Ilustra la parte real de transferencia compleja vs frecuencia para un fluido viscoelástico en función del número de Deborah. ....                        | 42 |
| Figura 8. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.....                     | 43 |
| Figura 9. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número de Deborah.....   | 44 |
| Figura 10. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número de Deborah de la Membrana $De_M$ . ....                    | 47 |

## N O M E N C L A T U R A

### Variables dimensionales

|            |                                       |
|------------|---------------------------------------|
| $G_0$      | Módulo elástico de corte [Pa]         |
| $L$        | Longitud [m]                          |
| $[Vx]$     | Componente del vector velocidad [m/s] |
| $Q$        | Flujo volumétrico [m <sup>3</sup> /s] |
| $\mu$      | Viscosidad newtoniana [Pa·s]          |
| $a$        | Radio del modelo [m]                  |
| $\nabla P$ | Gradiente de presión [Pa]             |
| $t$        | Tiempo [s]                            |

### Vectores y tensores

|              |   |
|--------------|---|
| $\sigma$     | Tensor de esfuerzos viscosos [Pa]               |
| $v$          | Vector de velocidad [m/s]                       |
| $g$          | Aceleración de la gravedad [m/s <sup>2</sup> ]  |
| $\nabla V^T$ | Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s] |
| $\nabla V$   | Tensor gradiente de velocidad [1/s]             |
| $D$          | Tensor rapidez de deformación [1/s]             |
| $T$          | Tensor de esfuerzos totales [1/Pa]              |
| $f_B$        | Fuerzas de bulto en el sistema [Pa]             |
| $p$          | Escalar asociado a la presión [Pa]              |

### Letras griegas

|             |                                     |
|-------------|-------------------------------------|
| $\lambda_0$ | Tiempo de relajación de Maxwell [s] |
| $\eta_L$    | Viscosidad de Fase L [Pa·s]         |
| $O \Phi$    | Función fluidez compleja [1]        |
| $\rho$      | Densidad [rad/s]                    |

### Variables adimensionales

|            |                                    |
|------------|------------------------------------|
| $\gamma_E$ | Deformación elástica [1]           |
| $\gamma_V$ | Deformación viscosa [1]            |
| $I$        | Matriz unitaria [1]                |
| $T$        | Transpuesta del tensor [1]         |
| $r$        | Coordenada radial adimensional [1] |
| $\omega$   | Parámetro de frecuencia [1]        |
| $\varphi$  | Fluidez adimensional [1]           |
| $\theta$   | Coordenada angular [1]             |

### Operadores Matemáticos

|                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| $\nabla$                          | Operador nabla [1/m]           |
| $\frac{\partial}{\partial \dots}$ | Derivada parcial [1/m]         |
| $\nabla \cdot$                    | Operador divergencia [1/m]     |
| $\frac{D}{Dt}$                    | Derivada material [1/m]        |
| $\frac{\nabla}{\sigma}$           | Derivada codeformacional [1/m] |
| $\pi$                             | Constante Pi [1]               |

## RESUMEN

En este trabajo se estudia una membrana viscoelástica que disipa energía cuando está inmersa en fluidos newtonianos o no newtonianos. Esta membrana crea oscilaciones en el flujo volumétrico y este, a su vez, induce orientación y cambios en la curvatura. La primera aproximación dentro de esta investigación es observar el efecto provocado por la disipación y la parte elástica de la membrana sobre la potencia disipada, es decir, la función de transferencia compleja, a partir de una ecuación constitutiva que describe la viscosidad y la elasticidad de una membrana orientada por el esfuerzo de una fuerza externa, en este caso, el campo eléctrico, dado por el gradiente negativo de un potencial eléctrico. Posteriormente, se utilizan los recursos de programación-simulación de Wolfram Mathematica para obtener una representación visual del comportamiento del sistema a distintos valores de frecuencia.

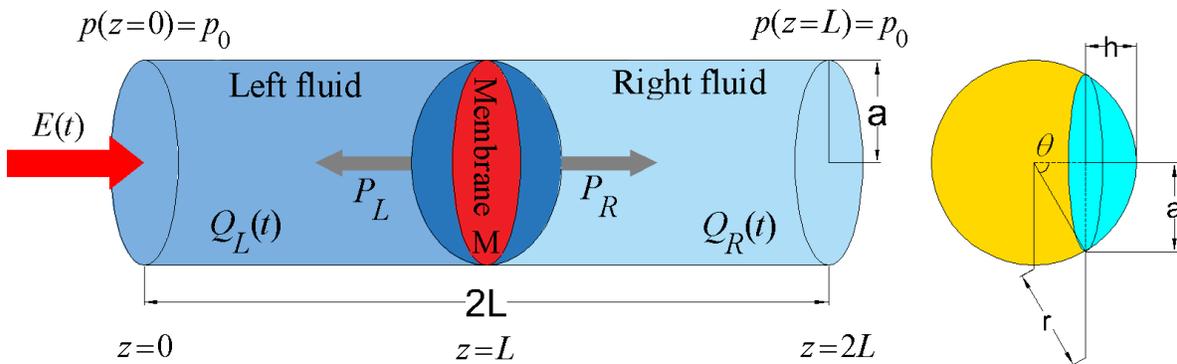


Figura 1. Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación. El campo eléctrico producido por los fenómenos electrofisiológicos del cuerpo humano induce que la membrana se deforme hacia arriba y hacia abajo y forma un domo esférico, como el que se observa en el sistema. Los flujos volumétricos  $Q_1 = Q_2$  y son generados por el movimiento de las fases líquidas viscoelásticas en el medio.

**Palabras clave:** Ecuación de continuidad, Flexo-electricidad, Fluido newtoniano, Fluido no-newtoniano, Flujo de Poiseuille, Función de transferencia compleja, Mecanismos disipativos, Membranas flexo-eléctricas, Modelo de Maxwell, Transformada de Fourier.

# **CAPITULO 1**

## **ESTADO DEL ARTE**

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Los fluidos complejos son sistemas que presentan las siete propiedades básicas de la reología como son: (I) Adelgazamiento al corte, (II) Engrosamiento al corte, (III) Tixotropía, (IV) Reopexía, (V) Primera diferencia de esfuerzos normales (VI) Segunda diferencia de esfuerzos normales y (VII) Flujo bandeado (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). Los cristales líquidos son sistemas que presentan características de fluido complejos y estructurados y que presentan alineamiento y orientación por efecto del corte (**Khadem y Rey 2019a, 2019b, 2021**). Uno de los sistemas que puede ser tratado mediante las teorías de los cristales líquidos, son las membranas biológicas (**Abou-Dakka et al. 2012**).

Las células ciliadas (CCE), ubicadas en el oído interno, desempeñan un papel crucial en la amplificación de la información sonora que transita a través del sistema auditivo externo e interno (**Ramírez-Torres et al., 2024**). La flexo-electricidad, aplicada a las membranas biológicas mediante un campo eléctrico impuesto, induce una flexión que las CCE utilizan para potenciar el sonido que se desplaza desde el oído externo al medio a través del complejo sistema auditivo (**Wang et al., 2022, 2023; Herrera-Valencia y Rey, 2023**). Además, la flexo-electricidad en las membranas timpánicas, resultado del acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica, es esencial para la fisiología auditiva (**Herrera-Valencia y Rey 2014**). En este proyecto-tesis se pretende incorporar los siguientes puntos importantes:

- a. Modelo electro-reológico que describe el sistema de tres fases termodinámico consistente en dos líquidos viscoelásticos y una membrana sólida flexo-eléctrica.
- b. Proponer una variante del modelo **Herrera-Valencia/Rey (Herrera-Valencia y Rey 2023)** para incorporar la viscosidad de la membrana. Esta, podría ser una medida de la resistencia que presenta al cambio de curvatura por efecto de la fuerza motriz (campo eléctrico). El modelo, nuevo se puede expresar mediante la siguiente ecuación analítica de relajación:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = G \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (1)$$

En la Ec. (1)  $\lambda_M$  [s] es un tiempo de relajación de la membrana,  $G$  [Pa] es el módulo elástico de corte y  $\partial V_z / \partial r$  [ $s^{-1}$ ].

## 1.2 ANTECEDENTES

### 1.2.1 Membranas flexo-eléctricas

Remontándonos a **Bird et al. (1987)**, se abordó el desafío de calcular la permeabilidad dinámica de sistemas compuestos por fases sólidas flexo-eléctricas inmersas en fases líquidas viscoelásticas tipo Maxwell. Este estudio pionero sentó las bases para comprender la interacción entre las propiedades eléctricas y mecánicas en materiales complejos.

Posteriormente, con los trabajos de **Harden et al. (2010)**, se reportó un avance significativo en la comprensión de la flexo-electricidad, con coeficientes flexo-eléctricos alcanzando valores de hasta 35 nC/m en cristales líquidos tipo banana, lo que representa un salto cualitativo en la aplicación de estos materiales en transductores mecánico-eléctricos.

Avanzando en la línea del tiempo, **Abou-Dakka et al. (2012)** y **Herrera-Valencia y Rey (2014)**, exploraron el potencial de las membranas flexo-eléctricas como sensores biológicos, destacando su relevancia en el campo de la materia suave. Esta línea de investigación ha demostrado como la flexo-electricidad en materia suave puede complementar y extender las aplicaciones tradicionales de los materiales piezoeléctricos, que típicamente acoplan la deformación con la polarización en materiales más rígidos como cristales y cerámicos. En este mismo año, se subrayó la importancia de la respuesta dinámica del sistema, influenciada por variables como la amplitud y la frecuencia de las curvas resonantes para el funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE). La relevancia de este hallazgo radica en su aplicación potencial en el diseño de dispositivos biomiméticos y sistemas de detección de sonido.

Continuando con **Herrera-Valencia y Rey (2014)**, se exploró el espacio material definido por la inercia, la viscosidad y la elasticidad de la membrana, lo que permite una clasificación y caracterización detallada de la respuesta en frecuencia del sistema eléctrico-mecánico. Este enfoque metodológico proporciona una herramienta valiosa para el análisis de sistemas complejos donde la interacción entre diferentes propiedades físicas es fundamental.

En el año 2018, Herrera-Valencia y Rey, examinaron el modelo reológico lineal y su contribución al entendimiento de los motores biológicos, como las células ciliadas externas. Se puso especial énfasis en la deformación de la membrana como un factor crítico en la entrega

de energía mecánica, a través de la electro-motilidad y su transformación en energía dependiente de la frecuencia. Este trabajo amplía nuestra comprensión de como las fuerzas mecánicas y eléctricas interactúan en sistemas biológicos y su importancia en la transducción de señales. **(Herrera-Valencia y Rey, 2018)**.

Finalmente, en 2023, Herrera-Valencia y Rey avanzaron en el análisis de cómo los procesos biológicos dependen de la inercia de las fases viscoelásticas y la interacción entre la elasticidad de la membrana y los líquidos electro-reológicos. Este estudio reciente destaca la complejidad de los sistemas y biológicos y la necesidad de un enfoque multidisciplinario para descifrar los mecanismos subyacentes que regulan la función de estructuras tan especializadas como las CCE. **(Herrera-Valencia y Rey, 2023)**.

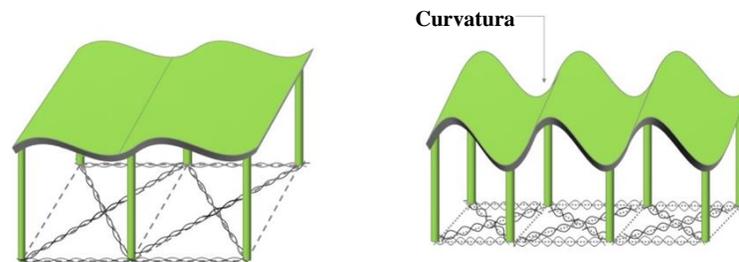


Figura 2. Ilustra el efecto del campo eléctrico en las células ciliadas externas y su deformación por efecto del campo eléctrico.

### 1.2.2 Campo Eléctrico.

Para introducir la influencia del campo eléctrico en células ciliadas **Raventós (2015)**, realizo un estudio en donde se detalla cómo los campos eléctricos pueden inducir oscilaciones en la membrana celular, lo que resulta en la activación de mecanismos de transducción de señales. Este fenómeno es crucial para entender la bioelectricidad y su influencia en la función celular. **(Raventós, 2015)**.

**Herrera-Valencia et al. en 2019**, avanzaron en este campo con el estudio de los efectos mecano-eléctricos y flexo-eléctricos inducidos por el campo eléctrico **E** en membranas elásticas. Estas oscilaciones son capaces de desplazar las fases viscoelásticas, permitiendo la conversión de energía eléctrica a mecánica. Profundizando más en el tema, en los años 2014-2023 se han enfocado en la comprensión de estos fenómenos, resaltando la importancia de la integración de los efectos flexo-eléctricos y mecánicos en la funcionalidad de las células ciliadas. Los aspectos cruciales de esta conversión son:

1. La potencia liberada en el contacto de las fases viscoelásticas debido a la imposición de un campo eléctrico.
2. La energía elástica almacenada en la membrana, que es un componente crítico para la funcionalidad del sistema.
3. Las propiedades de las curvas resonantes, que incluyen la frecuencia de resonancia, el máximo valor en curvas resonantes y la anchura de estas, fundamentales para la caracterización y el diseño de dispositivos basados en estos principios.

Estos avances proporcionan una base teórica sólida para futuras investigaciones y abren nuevas vías para el desarrollo de tecnologías emergentes en el campo de ingeniería biomédica y los materiales avanzados (**Herrera-Valencia y Rey, 2023, 2018, 2014**).

### 1.3 HIPÓTESIS

Si el efecto de introducir una componente oscilatoria en el campo eléctrico modifica el flujo volumétrico, entonces este será cuantificado a través de la función de transferencia compleja, y de los mecanismos: (I) inerciales, (II) solvente y (III) viscoelásticos.

### 1.4 OBJETIVOS

#### 1.4.1 General.

**G:** Estudiar la respuesta dinámica, disipativa y oscilatoria de una membrana flexo-eléctrica inmersa en fases newtonianas y no newtonianas en una geometría cilíndrica de radio  $r=a$  y longitud  $z=L$ .

### **1.4.2 Particulares.**

**P.1.** Mediante primeros principios, obtener un modelo lineal que describa la disipación viscosa de la membrana flexo-eléctrica, inmersa en fases newtonianas y no newtonianas en función de las propiedades materiales.

**P.2.** Aplicar la transformada integral de Fourier con el fin de obtener una expresión analítica para la función de transferencia compleja, en donde la variable de entrada es el campo eléctrico y la de salida es el flujo volumétrico.

**P.3.** Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones, obtener números adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

**P.4.** Calcular la parte real, imaginaria y norma de la función de transferencia en función de las propiedades materiales y geométricas en el sistema.

**P.5.** Deducir las condiciones materiales y de operabilidad para que el dispositivo muestre las curvas resonantes típicas y se comprendan o al menos se explique el complejo comportamiento de la amplificación acústica humana.

## **1.5 DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL**

Este documento está organizado de la siguiente manera:

### **Sección 1.**

Introducción al problema y los antecedentes de la permeabilidad dinámica en fluidos newtonianos y no newtonianos, en geometrías inelásticas y elásticas.

### **Sección 2.**

Marco teórico donde se presentan los elementos básicos esenciales para entender esta investigación: (i) Flujo de Poiseuille en un tubo y (ii) Flujo de Poiseuille en una corona circular.

### **Sección 3.**

Problema físico y el modelo constitutivo empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo.

#### **Sección 4.**

Modelado matemático y obtención de la función de transferencia del sistema de estudio.

#### **Sección 5.**

Predicciones variando los grupos adimensionales correspondientes y aplicación al sistema biológico de estudio.

#### **Sección 6.**

Conclusiones y trabajo futuro.

# **CAPÍTULO 2**

## **MARCO TEÓRICO**

## 2.1 MODELOS VISCOELÁSTICOS LINEALES

### 2.1.1 Modelo de Maxwell.

Este modelo describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal, combina la deformación presente en el sólido de Hooke y la deformación del fluido newtoniano, por lo tanto, la deformación total es:

$$\gamma = \gamma_V + \gamma_E \quad (2.1)$$

La deformación viscosa expresada mediante la ecuación de fluido newtoniano y la del sólido de Hooke, toma la siguiente forma:

$$\sigma = G_0 \gamma_E \quad (2.2)$$

Donde:

$G_0$ : Módulo elástico de corte.

$\gamma_E$ : Deformación elástica.

Para obtener el modelo constitutivo de Maxwell se debe tomar la derivada temporal de la ecuación de deformación total (Ec. 2.1) y a su vez combinarla con las ecuaciones del fluido newtoniano y del sólido de Hooke:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 D \quad (2.3)$$

Donde:

$\lambda_0$ : Tiempo de relajación de Maxwell.

Cuando el tiempo de relajación tiene valor cero el sistema se reduce al comportamiento de un fluido newtoniano, mientras que, si presenta una rapidez de deformación baja, el sistema puede ser integrado con respecto a dicho valor (tiempo de deformación) y la ecuación se reduce al sólido de Hooke.

Es importante recordar que las propiedades materiales que intervienen en este modelo pueden ser calculadas mediante pruebas de flujo oscilatorio y de flujo en estado estacionario (Calderas et. al, 2009; Bird, et. al, 1987).

## 2.2 ECUACIONES BÁSICAS PARA EL MODELADO MATEMÁTICO.

### 2.2.1 Ecuación de Continuidad y Transporte.

La dinámica no lineal de la membrana está determinada por ecuaciones de continuidad, transporte y un balance de fuerzas en la membrana. La primera de las ecuaciones que se describe es la ecuación de continuidad en el sistema de estudio:

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L \mathbf{V}) = 0 \quad (2.4)$$

Para la fase viscoelástica se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{V}) = 0 \quad (2.5)$$

La ecuación de movimiento puede ser descrita para cada fase de la siguiente forma:

$$\rho_R \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_R + \rho_R \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, para la fase L:

$$\rho_L \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L + \rho_L \mathbf{g} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Ecuación Constitutiva Reológica.

La reología y el flujo son descritos a través de la ecuación constitutiva reológica de Maxwell, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_L \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta_L \mathbf{D} \quad (2.8)$$

Y

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_R \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta_R \mathbf{D} \quad (2.9)$$

La derivada codeformacional tiene la forma:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - \left\{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} \quad (2.10)$$

En donde la derivada material del tensor de esfuerzos toma la forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \quad (2.11)$$

Al sumar las expresiones obtenidas, tenemos la siguiente expresión analítica:

$$(\rho_L + \rho_R) \left( \frac{DV}{Dt} \right) = -(\nabla p_R + \nabla p_L) + \nabla \cdot (\sigma_R + \sigma_L) + (\rho_R + \rho_L)g \quad (2.12)$$

Al suponer la presencia de flujo cortante en la Ec. 2.15 se presenta la simplificación:

$$V \cdot \nabla V = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento (Ec. 2.15) toma la forma:

$$(\rho_L + \rho_R) \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -(\nabla p_R + \nabla p_L) + \nabla \cdot (\sigma_R + \sigma_L) + (\rho_R + \rho_L)g \quad (2.13)$$

En donde el gradiente de presión en la interfase se puede expresar como la suma de las contribuciones de la fase viscoelástica R y la L, respectivamente:

$$\nabla p_{(t)} = (\nabla p_{(t)})_R + (\nabla p_{(t)})_L = \frac{\nabla p_{(t)}}{L} \quad (2.14)$$

### 2.2.3 Ecuación de Flujo Combinado de Poiseuille y Gravitacional.

Para el desarrollo de la ecuación de flujo combinado de Poiseuille y Gravitacional se debe tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) Flujo incompresible:

En donde:

$$\rho = \rho_{cte}$$

- b) Se trata de un fluido newtoniano  
 c) Se encuentra en estado estacionario  
 d) No presenta cambios de temperatura, es decir, un fluido isotérmico.  
 e) La dirección de su flujo es en un solo sentido (unidireccional) (véase Figura 3), por lo tanto:

$$V = [V_x, V_y, V_z] = [0, 0, V_z]$$

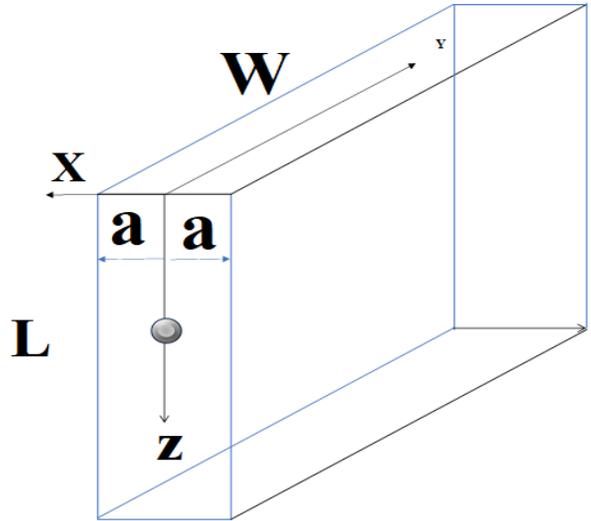


Figura 3. Representación esquemática de las direcciones de flujo en coordenadas cartesianas. El líquido newtoniano es deformado continua e irreversiblemente.

f) La divergencia de la velocidad es nula:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 ;$$

Por lo tanto, la velocidad en zeta no es función de esta, es decir:

$$V_z \neq f(z)$$

Cabe recalcar que la velocidad no depende del eje y, o z, ni del tiempo por ello se dice que:

$$V_z \approx V_z(x)$$

De la función inicial:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$

La derivada material es aproximadamente igual a cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\approx -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \mathbf{0} &\approx -\left( \frac{dp}{dz} \right) + \mu \left( \frac{d^2 V_z}{dx^2} \right) + \rho \mathbf{g}_x \end{aligned} \quad (2.15)$$

Al reacomodar términos se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dV_z}{dx} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} (p - \rho g_z) \quad (2.16)$$

Si se incluye el término de presión modificada:

$$P = p - \rho g_z$$

Y al sustituir la Ec. (2.16) en la Ec. (2.15):

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dV_z}{dx} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (2.17)$$

Al resolver la Ec. (2.17) para  $V_z$ , se obtiene:

$$V_z = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dP}{dz} \right) \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (2.18)$$

Para resolver la Ec. (2.18) se toman en cuenta las siguientes condiciones de frontera para encontrar las constantes ( $c_1$  y  $c_2$ ):

$$C.1. \quad V_z(x, +B) = V_0$$

$$C.2. \quad V_z(x, -B) = 0$$

Al resolver, obtenemos los siguientes valores para las constantes:

$$c_2 = \frac{V_0}{2} - \left(\frac{dP}{dz}\right) \left(\frac{B^2}{2\mu}\right) \quad (2.19)$$

$$c_1 = \frac{V_0}{2B} \quad (2.20)$$

Al sustituir las Ec. (2.20) y (2.19) en (2.18):

$$V_z = \left(\frac{dP}{dz}\right) \frac{1}{2\mu} (x^2 - B^2) + \frac{V_0}{2} \left(\frac{x}{B} + 1\right) \quad (2.21)$$

Para encontrar el flujo másico se utiliza la ecuación:

$$Q = \int_0^w \int_{x=-B}^{x=B} V_z(x) dx dy \quad (2.22)$$

Resolviendo:

$$Q = \left[ V_0 B - \frac{2B^3}{3\mu} \left(\frac{dP}{dz}\right) \right] w \quad (2.23)$$

### 2.3 FISIOLÓGÍA DEL OÍDO.

La generación de sensaciones auditivas en el ser humano es un proceso completo que consta de tres etapas básicas:

1. Captación y procesamiento mecánico de las ondas sonoras.
2. Conversión de la señal acústica (mecánica) en impulsos nerviosos y transmisión de dichos impulsos hasta los centros sensoriales del cerebro.
3. Procesamiento neural de la información codificada en forma de impulsos nerviosos.

Dentro de estas etapas se pueden distinguir dos regiones del sistema auditivo: la región periférica y la región central. La función de la región periférica es conservar el carácter original de las ondas mecánicas para convertirlas en señales electroquímicas, mientras que la función de la región central es transformar estas señales electroquímicas en sensaciones (Sachs et.al, 2009; Messini et. al, 2002; Brownell et al., 2001; Oghalai et. al, 2000; Thornton & Abbas, 1980; Ehrenstein & Iwasa, 1996).

### **2.3.1 Funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE).**

El funcionamiento de las células ciliadas externas es muy complejo ya que estas poseen una capacidad única de contracción-expansión la cual es la base de la electromotilidad (**Abou-Dakka et al, 2012; Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018, Ramírez-Torres et al, 2024**). A continuación, se describe de forma general el proceso de activación de dicho concepto:

- a) El estímulo eléctrico viaja a través de la escala vestibular en forma de vibraciones mecánicas, excitando la membrana basilar, la cual vibra a una frecuencia de resonancia que se acopla con la frecuencia de las vibraciones mecánicas produciendo el efecto de resonancia. (**Abou-Dakka et al, 2012**).
- b) La membrana basilar oscila hacia arriba y abajo permitiendo que estas vibraciones muevan las células ciliadas externas, dándole cierto grado de inclinación a los estereocilios que se encuentran en su polo apical, dando lugar a la transducción mecano-eléctrica. (**Herrera-Valencia y Rey 2014**).
- c) El efecto mecano-eléctrico abre los canales que permiten el paso de fluido rico en iones potasio (endolinfático), este fluido a su vez modifica el potencial eléctrico de la célula ciliada, lo cual resulta en una contracción de la membrana plasmática. (**Ramírez-Torres et al, 2024**).
- d) Finalmente, al regresar a su potencial de equilibrio la célula expande su membrana plasmática; estos cambios de curvatura inducen un flujo volumétrico debido a una potencia de energía liberada, la cual es una medida indirecta de la transducción electromecánica. (**Herrera-Valencia et al, 2023, 2024**).

# **CAPÍTULO 3**

## **PROBLEMA FÍSICO**

### 3.1 RAZONAMIENTO

En este capítulo se presenta la discusión entre el sistema físico y el modelado matemático de las ecuaciones de transporte. Para este caso, se utilizarán las ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos newtonianos y no newtonianos, en las cuales se involucra la relación del gradiente de velocidad y el esfuerzo de corte, así como la ecuación de continuidad para un sistema sin reacción química. Posteriormente, al obtener la expresión del gradiente de velocidad, y, por consiguiente, el tensor de rapidez de deformación, se introducirán las series de Fourier para obtener la velocidad en términos de la variable radial y la frecuencia, ya que de esta forma se torna posible introducir esta información dentro de las Series de Bessel con el fin de calcular la ecuación que exprese el flujo volumétrico.

### 3.2 ECUACIONES TEÓRICAS.

En esta sección, se presentan las ecuaciones más importantes en el sistema.

La primera de ellas es la **ecuación de continuidad**, la cual es un balance de masa sin reacción química.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (3.1)$$

La ecuación de movimiento para el sistema, o bien, la **segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo**:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_B \quad (3.2)$$

Donde:

$\mathbf{V}$ : Vector velocidad.

$\mathbf{T}$ : Tensor de esfuerzos totales.

$\mathbf{f}_B$ : Fuerzas de bulto en el sistema.

Para un mejor entendimiento, el **tensor de esfuerzos totales** toma la forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

Donde:

$\mathbf{I}$ : Matriz unitaria.

$p$ : Escalar asociado a la presión en el sistema.

$\boldsymbol{\sigma}$ : Tensor de esfuerzos viscosos y viscoelástico.

### 3.2.1 Fluido newtoniano.

Se define la ecuación del fluido básico en fenómenos de transporte y reología, fluido newtoniano, ya que su comportamiento es fiel a la ley de Newton (Bird et al, 1987), donde el esfuerzo de corte es proporcional al gradiente de velocidad de corte:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.4)$$

Y

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (3.5)$$

Donde:

$\boldsymbol{\sigma}$ : Tensor de esfuerzos viscosos (Pa).

$\mu$ : Viscosidad newtoniana (Pa·s).

$\mathbf{D}$ : Tensor de rapidez de deformación.

$\nabla\mathbf{V}$ : Gradiente de velocidad.

$T$ : Transpuesta del tensor (Matriz 3x3).

### 3.2.2 Fluido no newtoniano.

En los fluidos no newtonianos, la rapidez de deformación no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación (Bird et. al., 1987), por lo cual, la viscosidad no es constante y va a depender de la rapidez con la que se aplique la deformación de la muestra, la temperatura, la presión, concentración, pH, entre otras variables (Bird et. al., 1987). Las ecuaciones involucradas en este tipo de fluido son las siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(II_D)\mathbf{D} \quad (3.6)$$

Y

$$\eta(II_D) = \sqrt{2(D:D)} \quad (3.7)$$

# **CAPÍTULO 4**

## **MODELADO MATEMÁTICO**

## 4.1 ANÁLISIS DEL SISTEMA FÍSICO

A continuación, se describen las características del sistema físico (ver Figura 4) estudiado para realizar el cálculo de la permeabilidad dinámica de un fluido viscoelástico lineal mediante la transformada de Fourier.

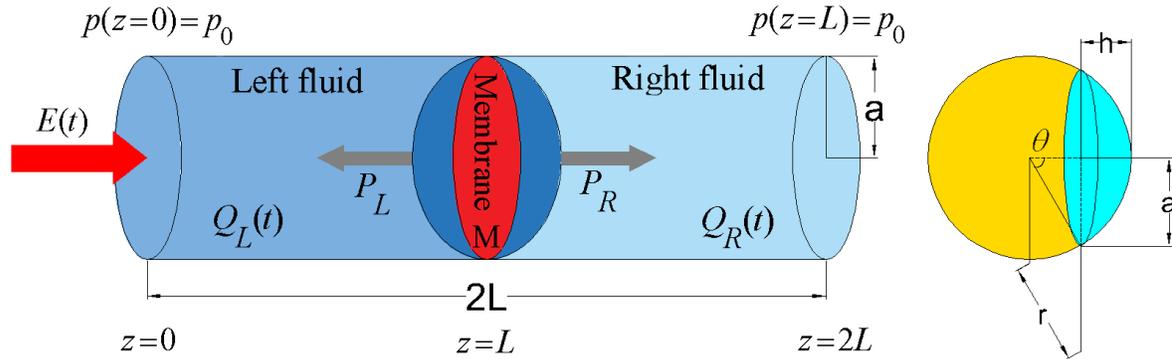


Figura 4. Representación esquemática del sistema físico. El campo eléctrico entra por la parte izquierda del sistema y activa la membrana con el fin de que oscile a través de las dos fases líquidas. El flujo derecho e izquierdo es el mismo y la membrana perturba las fases líquidas viscoelásticas.

### 4.1.1 Condiciones del sistema.

- Líquido newtoniano.
- Líquido incompresible: La densidad no depende de la posición ni del tiempo.
- Proceso en estado estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo, i.e. (presión pulsátil).
- El fluido se deforma de manera continua e irreversible debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial.
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ( $a \ll L$ ) se encuentra en posición horizontal.
- Existe simetría angular, es decir:

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

## 4.2 PROBLEMA FÍSICO Y ECUACIONES

De las ecuaciones teóricas, antes mencionadas, se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}_B \quad (4.2)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (4.3)$$

La ecuación constitutiva que se empleara para los datos del fluido es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 \quad (4.4)$$

Y cada una de las ecuaciones constitutivas, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = 2\eta_1 \mathbf{D} \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = 2\eta_2 \mathbf{D} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = G \left( 1 + \lambda_B \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) 2\mathbf{D} \quad (4.7)$$

Al combinar las Ecs. (4.3-4.6) se obtiene una expresión para el modelo constitutivo que será punto de partida en los cálculos de este sistema:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2O_\eta(D_t)\mathbf{D} \quad (4.8)$$

Al sustituir y realizar el arreglo de las Ecs. (4.1-4.7), se obtiene el siguiente modelo lineal, el cual es una variante del modelo de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + O_\eta(D_t) \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (4.9)$$

Asumiendo que el sistema cuenta con un flujo cortante simple, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (4.10)$$

Por lo que la Ec. (4.9) se simplifica a lo siguiente:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) = -\nabla p + O_\eta(D_t) \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (4.11)$$

Si asumimos que los mecanismos gravitacionales son despreciables con respecto a la inercia y mecanismos superficiales, se tiene los siguiente:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{O}_\eta(D_t)\nabla^2} (-\nabla p) \quad (4.12)$$

Entonces, se tiene la siguiente expresión para la permeabilidad dinámica del sistema:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\rho \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{O}_\eta(D_t)\nabla^2} \quad (4.13)$$

Suponiendo que la velocidad del fluido es la coordenada axial “z”, la dirección del gradiente de velocidad es en la coordenada radial r y el  $\theta$  es el eje neutro o de la vorticidad. Por lo tanto, el vector velocidad se representa como:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, V_z(r,t)) \quad (4.14)$$

El gradiente de velocidad se representa de forma matricial, tal que:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Por lo que, al obtener la transpuesta del gradiente de velocidad la nueva forma matricial es:

$$\nabla \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Al obtener el gradiente de velocidad y su transpuesta, se puede calcular el tensor rapidez de deformación de la siguiente forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \quad (4.17)$$

Obteniendo como resultado:

$$2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Posteriormente, se sustituyen las Ecs. (4.14-4.16) en la Ec. (4.12):

$$K = \frac{1}{\rho \frac{\partial}{\partial t} - O_\eta(D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}} \quad (4.19)$$

Al realizar la multiplicación del vectorial por el vector unitario la Ec. (4.11) toma la forma:

$$V_z = V \cdot e_z = \frac{1}{\rho \frac{\partial}{\partial t} - O_\eta(D_t) V^2} (-\nabla p \cdot e_z) = \frac{1}{\rho \frac{\partial}{\partial t} - O_\eta(D_t) V^2} (-\nabla z p) \quad (4.20)$$

### 4.3 SERIES DE FOURIER

Para resolver la Ec. (4.19) se supone que las funciones son continuas y de clase  $C^1$  en un dominio abierto de  $R^2$ , por lo que la transformada de Fourier toma la forma:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.21)$$

Al aplicar la transformada integral (Ec. 4.20) sobre las ecuaciones involucradas en la Ec. (4.19) se deduce una expresión analítica para la velocidad en términos de la variable radial “r” y la frecuencia.

#### 4.3.1 Condiciones del sistema.

En este punto se utilizarán las siguientes condiciones de frontera obteniendo lo siguiente:

$$V_z(r=a,t) = 0 \quad (4.22)$$

Y la velocidad axial debe ser finita en  $r=0$ , por lo que:

$$V_z(r=0,t) = \textit{finita} \quad (4.23)$$

#### 4.3.2 Flujo volumétrico.

El flujo volumétrico en el sistema se puede calcular mediante la integral de superficie en el espacio de Fourier.

$$Q(\omega) = \int_S V \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,\omega) r dr d\theta \quad (4.24)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 \int_0^1 V_z(r, \omega) r dr \quad (4.25)$$

A partir de la Ec. (4.20), se construye la permeabilidad dinámica en el sistema o función de transferencia compleja, dando lugar a:

$$\frac{Q_V(\omega)}{Q_N(\omega)} = T(\omega) = \text{Re}[T(\omega)] + i\text{Im}[T(\omega)] \quad (4.26)$$

Donde:

$T(\omega)$ : Función de transferencia compleja.

$Q_V$ : Flujo viscoelástico.

$Q_N$ : Flujo newtoniano.

La función de transferencia compleja tiene la siguiente estructura matemática:

$$Q_N(\omega) = \frac{\pi R^3}{4} \varphi_0 \sigma_w(\omega) \quad (4.27)$$

Por lo tanto:

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = 8i^2 \frac{O \Phi(i\omega)/\varphi_0}{(R\beta(\omega))^2} \left( 1 - 2 \frac{J_1(R\beta(\omega)/R\beta(\omega))}{J_0(R\beta(\omega))} \right) \quad (4.28)$$

Donde:

$O \Phi$ : Función fluidez compleja dependiente de la frecuencia.

$\beta$ : Inverso de la longitud característica (Funciones de Bessel).

El parámetro  $\beta$  proporciona la información reológica asociada a los procesos viscoelásticos en el sistema.

#### 4.4 FLUJO DE POISEUILLE

Se considera la Figura 5 como la representación esquemática del flujo de Poiseuille utilizado en este caso de estudio:

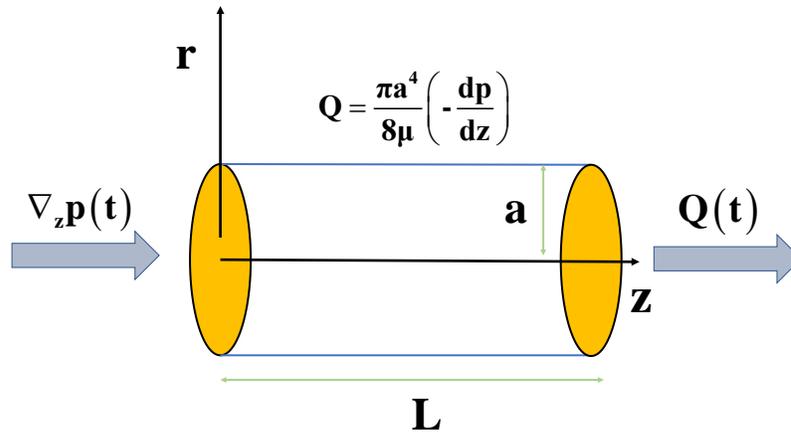


Figura 5. Esquema del sistema estudiado para el cálculo del Flujo de Poiseuille.

##### 4.4.1 Condiciones del sistema.

- Flujo incompresible, por lo tanto:  $\rho = \text{constante}$ , no depende de la posición ni del tiempo.
- Fluido Newtoniano.
- Proceso en estado estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo.
- No presenta cambios de temperatura, es decir, el sistema es isotérmico.
- Su flujo es unidireccional (véase Figura 5), se presenta lo siguiente:

$$\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z] = [0, 0, V_z]$$

- La parte central de la membrana presenta un movimiento vertical (Arriba hacia abajo y viceversa).

##### 4.4.2 Desarrollo matemático del sistema.

La máxima relación de flujos está dada por:

$$Q = Q(\nabla_z P) \quad (4.29)$$

La fuerza motriz se representa con la siguiente expresión matemática:

$$\nabla_z P = \frac{dP}{dz} \quad (4.30)$$

El comportamiento de fluido Newtoniano se expresa:

$$\sigma_{zr} = \mu \frac{dV_z}{dr} \quad (4.31)$$

El flujo viscoelástico de Maxwell utiliza la siguiente ecuación:

$$\sigma_{zr} + \lambda_0 \frac{d\sigma_{zr}}{dt} = \mu \frac{dV_z}{dr} \quad (4.32)$$

Por lo tanto, el flujo se determina mediante:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} (\nabla_z P) \quad (4.33)$$

La velocidad está dada por la derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \quad (4.34)$$

Si la derivada material es cero, el valor de la densidad toma el valor de cero, matemáticamente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{y} \quad \rho(\nabla \cdot v) = 0; \quad \text{respectivamente.}$$

Sin embargo, en este caso de estudio, la densidad adopta un valor distinto a cero, lo que conlleva a que:

$$\rho \neq 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot v = 0 \quad (4.35)$$

Donde el gradiente de velocidad se representa como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rV_r) + \frac{1}{r} \left( \frac{dV_\theta}{d\theta} \right) + \frac{dV_z}{dz} \quad (4.36)$$

Tal como se mencionó en las condiciones del sistema, el movimiento es unidireccional, por lo que la velocidad en el eje z no depende de la función en z, tal que:

$$V_z \neq f(z)$$

Por lo que, al presentarse una geometría cilíndrica:

$$V_z \approx V_z(r)$$

Al analizar la derivada material, se deduce que:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Dv}{Dt} \approx 0 \\ \rho g \approx 0 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Al saber que la velocidad es aproximadamente cero y se presenta en una distancia larga, se desprecia la fuerza de la densidad en la dirección g. Por lo que la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (4.38)$$

Al resolver la integral para la velocidad en z, se obtiene:

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (4.39)$$

Se presentan las siguientes condiciones de frontera para encontrar las constantes del resultado de la integral anterior:

$$\text{C.F. 1. } V_z(r = a) = 0$$

$$\text{C.F. 2. } V_z(r = 0) = \textit{finita}; \quad \left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

Al resolver, los valores de las constantes son:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} a^2$$

Sustituyendo  $c_1$  y  $c_2$ :

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - a^2) \quad (4.40)$$

Una vez encontrada la expresión para la velocidad en el eje z, se obtiene el flujo volumétrico con la ecuación:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) * r \, dr \, d\theta \quad (4.41)$$

Al resolver la doble integral, finalmente obtenemos la expresión para el flujo volumétrico:

$$Q = -\frac{a^4}{8\mu} \pi \left( \frac{dp}{dz} \right) \quad (4.42)$$

#### 4.5 SERIES DE BESSEL

Para comenzar esta sección, en donde se utilizarán las series de Bessel, tenemos la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho g g \quad (4.43)$$

Al desarrollar la ecuación (4.43), obtenemos:

$$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}(t) + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \right) \quad (4.44)$$

Se utiliza el cambio al espacio de Fourier, en donde se involucra el parámetro de frecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow i\omega \quad V_z(r, t) = \mathcal{V}_z(r, \omega) \quad (4.45)$$

Donde:

$\omega$ : Parámetro de frecuencia

$$P(t) \rightarrow P(\omega) \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \rightarrow \rho i \omega \mathcal{V}_z(r, \omega) \quad (4.46)$$

Por lo tanto, al sustituir las Ecs. (4.46 y 4.45) en la Ec. (.43):

$$\rho i \omega \mathcal{V}_z(r, \omega) = -\frac{\partial P}{\partial z}(\omega) + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\partial r} \right) \quad (4.47)$$

Al reacomodar y asignarle el valor de  $i^2$  a -1:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \frac{i^3 \rho \omega}{\mu} \mathcal{V}_z(r, \omega) \quad (4.48)$$

Para entender las siguientes ecuaciones, es necesario cambiar los términos obtenidos a términos de operador fluidez. Cuando la viscosidad " $\mu$ " tiende a infinito, la fluidez " $\varphi$ " tiende a cero. Y cuando la fluidez " $\varphi$ " tiende a infinito, la viscosidad " $\mu$ " tiende a cero, se representa como:

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \infty & \varphi &\rightarrow 0 \\ \varphi &\rightarrow \infty & \mu &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la viscosidad es inversamente proporcional a la fluidez:

$$\varphi = \frac{1}{\mu}$$

Entonces el operador fluidez es igual a:

$$O_\varphi(i\omega) = \frac{1}{O_\mu(i\omega)} \quad (4.49)$$

Al sustituir la expresión de la viscosidad en términos de fluidez en la Ec. (4.48), se usan los siguientes operadores:

$$O_\varphi(i\omega) \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \quad (4.50)$$

Por lo tanto:

$$O_\varphi(i\omega) \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \frac{i^3 \rho \omega}{\mu} \mathcal{V}_z(r, \omega) \quad (4.51)$$

Para reducir términos, se insertan los siguientes conceptos:

$$A = O_\varphi(i\omega) \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \quad ; \quad \beta^2 = \frac{i^3 \rho \omega}{\mu}$$

Por lo que:

$$A = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \beta^2 \mathcal{V}_z(r, \omega) \quad (4.52)$$

Si se supone que  $A = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\partial r} \right) + \beta^2 \mathcal{V}_z(r, \omega) = 0 \quad (4.53)$$

Con el fin de seguir el objetivo de reducción de términos se agrega el operador  $\beta$  como  $\frac{\beta}{\beta}$  en donde hay “r”:

$$\beta^2 r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\beta^2 \partial r^2} + \beta r \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\beta \partial r} + (r^2 \beta^2 - 0) \mathcal{V}_z(r, \omega) = 0 \quad (4.54)$$

De la misma forma, si  $\beta r = x$  entonces:

$$x^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\beta^2 \partial r^2} + x \frac{\partial \mathcal{V}_z(r, \omega)}{\beta \partial r} + (x^2 - 0) \mathcal{V}_z(r, \omega) = 0 \quad (4.55)$$

Reescribiendo la Ec. (4.55) en términos de función, se tiene que:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (4.56)$$

Una vez obtenida la forma de la función, se puede aplicar la serie de Bessel de la siguiente forma:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (4.57)$$

Dado que:

$$\mathcal{V}_{General} = \mathcal{V}_{Homogenea} + \mathcal{V}_{Particular}$$

La solución de la parte homogénea toma la forma:

$$\mathcal{V}_{Hz}(r, \omega) = C_1 J_0(\beta, r) + C_2 Y_0(\beta, r) \quad (4.58)$$

Mientras que la solución de la parte particular es:

$$O_\varphi(i\omega) \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \beta^2 C = 0 + \beta^2 C \quad (4.59)$$

De acuerdo con la Ec. (4.59), el valor de la constante C es:

$$C = \frac{O_\varphi(i\omega) \frac{\partial P}{\partial z}(\omega)}{\beta^2} \quad (4.60)$$

Si el valor de C se expresa en términos de velocidad:

$$\mathbf{v}_{Pz}(\mathbf{r}, \omega) = C \text{ entonces } \mathbf{v}_{Pz}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{O_{\varphi}(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \quad (4.61)$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\mathbf{v}_{GZ} = \mathbf{v}_{HZ} + \mathbf{v}_{PZ} = C_1 J_0(\beta, r) + C_2 Y_0(\beta, r) + \frac{O_{\varphi}(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \quad (4.62)$$

Al proponer las siguientes condiciones de frontera para encontrar  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\mathbf{v}_{GZ}(r = a) = 0 \quad \mathbf{v}_{GZ}(r = 0) = \textit{finita}$$

Se obtiene que:

$$C_1 = -\frac{O_{\varphi}(i\omega)}{\beta^2 J_0(\beta, a)} \frac{\partial P}{\partial z}(\omega); \quad C_2 = 0$$

Y al sustituir en la Ec. (4.62):

$$\mathbf{v}_{GZ} = \frac{O_{\varphi}(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \left[ 1 - \frac{J_0(\beta, r)}{J_0(\beta, a)} \right] \quad (4.63)$$

Una vez determinada la ecuación para el cálculo de la velocidad en z, se saca el flujo volumétrico mediante la ecuación:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 V_z(r) * r \, dr \, d\theta \quad (4.64)$$

Al resolver la doble integral, se observa que el flujo volumétrico se expresa como:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8} \frac{8O_{\varphi}(i\omega)}{(\beta)^2} \left( -\frac{\partial P}{\partial z}(\omega) \right) i^2 \left[ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right] \quad (4.65)$$

Recordando que:  $i^2 = -1$

# **CAPÍTULO 5**

## **SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

## 5.1 RESONANCIA EN FLUIDOS NEWTONIANOS

### FLUIDO NEWTONIANO

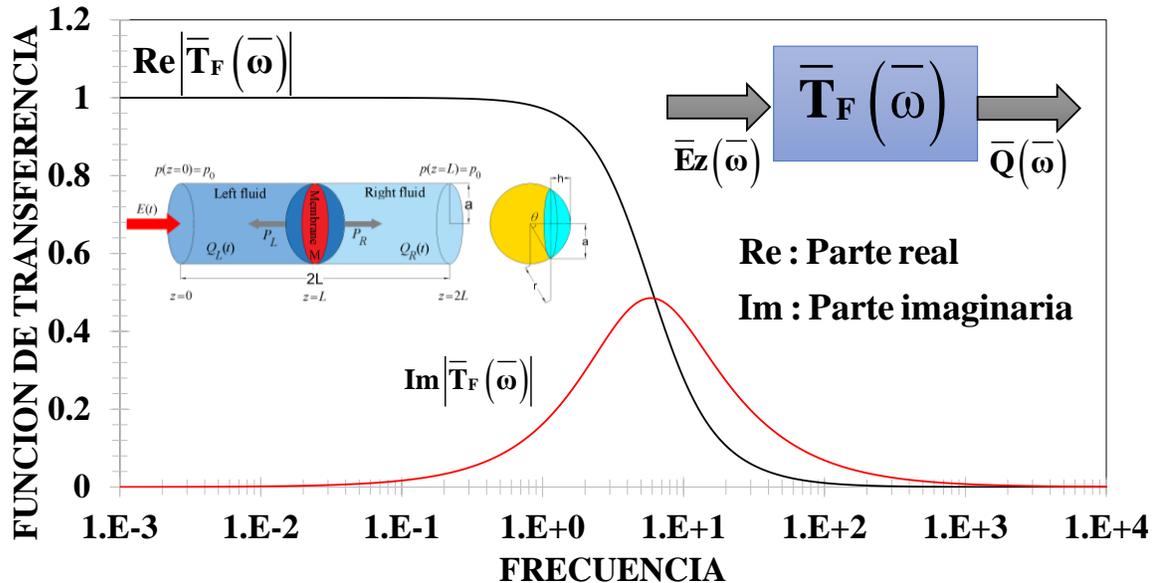


Figura 6. Ilustra la respuesta real e imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para el caso Newtoniano.

En la Figura 6 se muestran las simulaciones realizadas en el programa de Mathematica licencia UNAM de la función de transferencia compleja para un líquido newtoniano.

A frecuencias bajas, la parte real de la función de transferencia compleja (FTC) muestra un comportamiento constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono decreciente hasta un segundo valor crítico, donde la FTC despliega una segunda meseta, en la que es independiente de la frecuencia. Este tipo de comportamientos son muy comunes en los procesos de relajación; por lo tanto, la parte real para el fluido newtoniano se puede modelar mediante mecanismos de relajación asociados a la variable de entrada (campo eléctrico) y variables de salida (flujo volumétrico). Por otra parte, la parte imaginaria muestra un comportamiento resonante tipo campana de Gauss, donde a bajas y moderadas frecuencias el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo, el cual está dominado por un acoplamiento entre los mecanismos inerciales y viscosos del sistema. A una frecuencia mayor a la resonante, el sistema experimenta un comportamiento monótono decreciente y relaja hasta una segunda meseta que tiende asintóticamente a cero. Físicamente, la parte imaginaria de estas funciones de transferencia está asociada a los procesos

disipativos por efecto de la fricción entre las capas del fluido. Por último, la norma de la función de transferencia es la magnitud de la raíz cuadrada del cuadrado de los componentes (partes real e imaginaria) y esta nos da una medida de qué mecanismo domina la función de transferencia. En este caso, el mecanismo dominante es el proceso de relajación porque es muy parecido a la parte real de la función de transferencia compleja. A continuación, mencionamos los puntos más importantes de este sistema:

a. El fluido newtoniano no presenta ningún mecanismo de tipo resonante y esto se debe analizar a través de la norma de la función de transferencia compleja.

b. La resonancia de la parte imaginaria del fluido newtoniano es un efecto asociado a la disipación; por lo tanto, no se considera que exista resonancia debido a que no hay elasticidad en el sistema.

c. Para que un sistema presente resonancia debe existir energía almacenada y, por lo tanto, elasticidad para que se recupere el sistema. En este punto, el fluido viscoelástico contendrá la física necesaria para describir una resonancia principal seguida de un tren de picos secundarios.

En particular, en este trabajo de tesis, se analiza la viscoelasticidad de la membrana, es decir, no solo la de los líquidos viscoelásticos sino también la disipación asociada al cambio en la curvatura. En la siguiente sección, analizaremos el fluido de Maxwell, pero a través del número de Deborah y de las propiedades materiales asociadas a este sistema.

## 5.2 RESONANCIA EN FLUIDOS VISCOELÁSTICOS

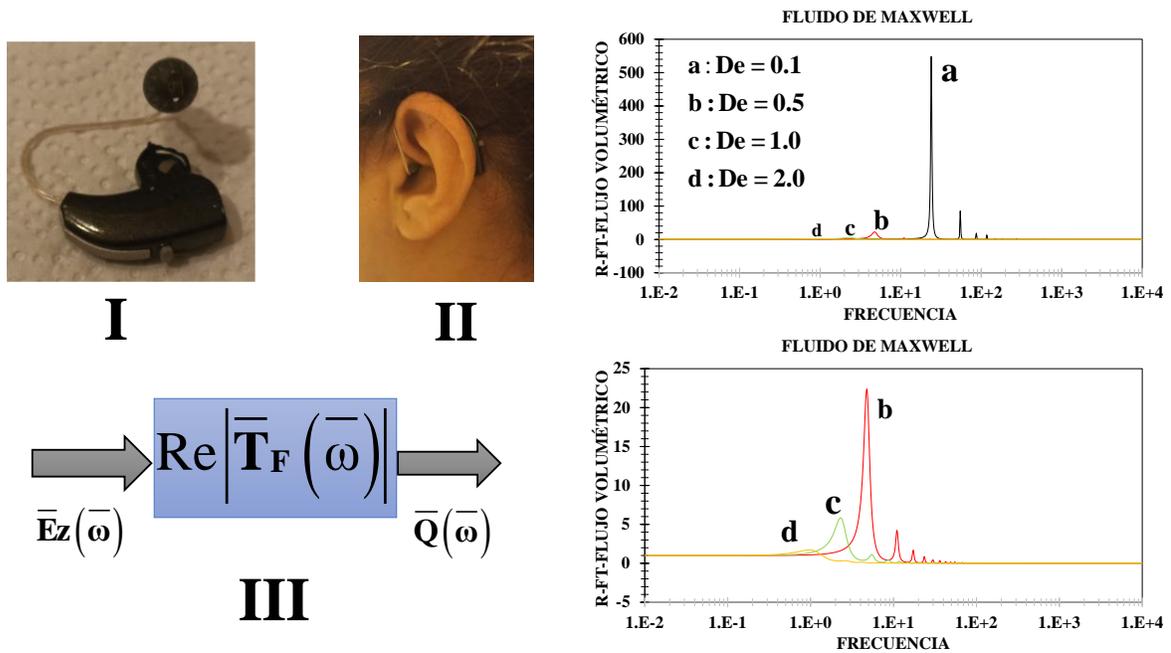


Figura 7. Ilustra la parte real de transferencia compleja vs frecuencia para un fluido viscoelástico en función del número de Deborah.

La Figura 7 muestra la respuesta de la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. Se observa que, en todos los casos, el sistema presenta una resonancia dominante seguida de un tren de resonancias.

Es claro que, al aumentar el número de Deborah, el fluido presenta una disminución drástica en el máximo de la resonancia dominante. Esto se debe, principalmente, a que la parte elástica del material aumenta en comparación de las fuerzas inerciales. Nótese, que el efecto de los mecanismos elásticos induce que la resonancia dominante se obtenga a menores valores en la frecuencia, por lo que la elasticidad juega un papel negativo en el contexto del flujo resonante.

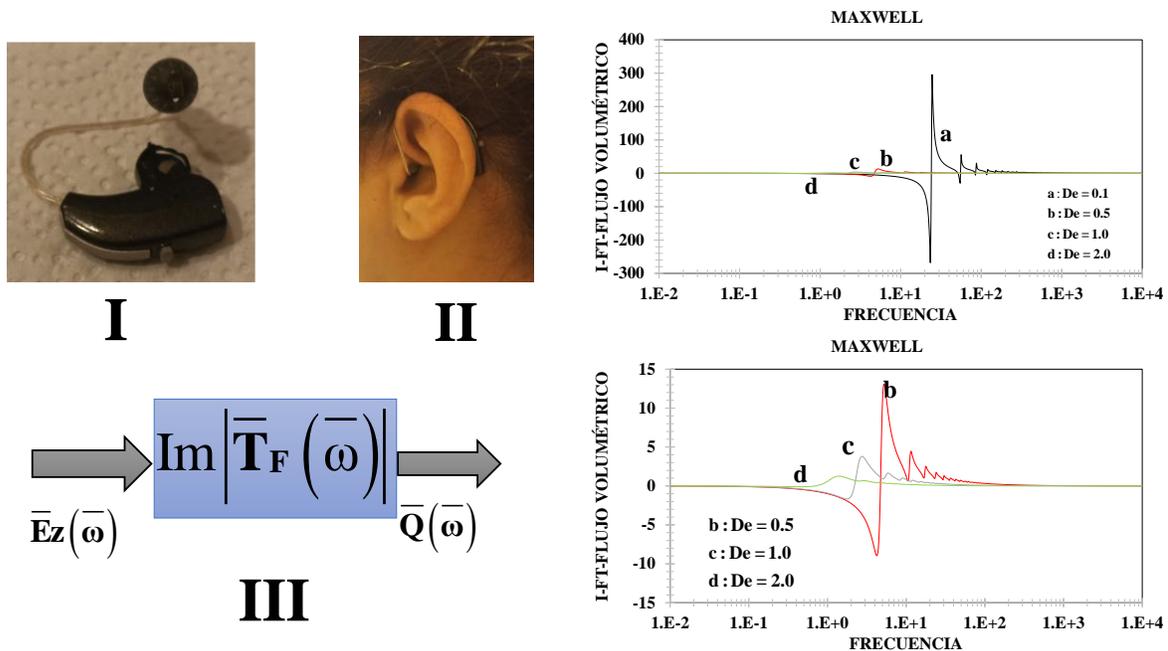


Figura 8. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.

En la Figura 8 se observa que el sistema presenta las clásicas curvas discontinuas tipo dientes de sierra.

Es importante resaltar que, como en la Figura 8, el efecto de la elasticidad del material disminuye la respuesta anti-resonante de la función de transferencia compleja. Nótese, que la parte imaginaria de estos sistemas siempre presenta resonancias; sin embargo, el fluido newtoniano solamente muestra un pico aislado como se observa en la Figura 7. Al incorporar la elasticidad, se observa que el fluido presenta varias curvas resonantes, lo que indica que la contribución del sólido de Hooke induce la respuesta resonante del material.

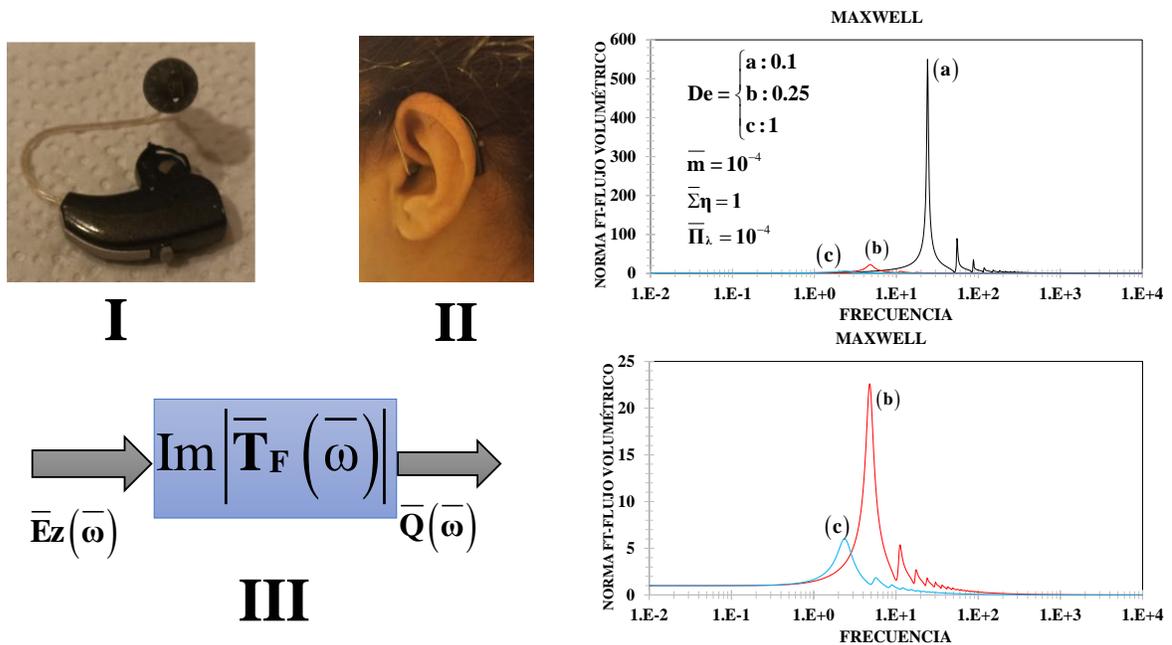


Figura 9. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número de Deborah.

En la Figura 9, se representa la norma de la función de transferencia vs frecuencia para el modelo viscoelástico de Maxwell en función del número de Deborah.

En la simulación realizada, se destaca una resonancia dominante que se manifiesta claramente en la gráfica, seguida por una serie de picos de menor magnitud a medida que la frecuencia incrementa. Este fenómeno es particularmente notable, ya que, al incrementar el número de Deborah, que representa la influencia de los mecanismos elásticos en comparación con los tiempos característicos del flujo, se observa una disminución significativa en el valor máximo alcanzado por la norma de la función de transferencia compleja. Dicho comportamiento es coherente con las observaciones previas y el análisis matemático detallado en la Figura 8.

Es crucial resaltar que el comportamiento negativo observado en las simulaciones anteriores se asocia intrínsecamente con la elasticidad del material estudiado. Físicamente, este efecto puede interpretarse como un contraflujo, el cual podría ser el resultado de las oscilaciones en el gradiente de presión o en la variación del campo eléctrico aplicado.

### 5.3 EFECTO DE LA VISCOSIDAD EN LAS MEMBRANAS FLEXO-ELÉCTRICAS

En esta sección se presenta el efecto de la viscosidad de la membrana en el modelo propuesto. La ecuación básica que se utiliza es un modelo basado en el de Hooke. i.e. de la forma:

$$\sigma_{zx} = G\gamma \quad (5.1)$$

Al calcular la derivada temporal de la ecuación de Hooke, se tiene la siguiente expresión analítica, por lo que:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = G \frac{\partial \gamma}{\partial t} = G \dot{\gamma} \quad (5.2)$$

Este modelo fue utilizado por Herrera-Valencia y Rey (2018; 2023). La contribución primaria de este trabajo es suponer la resistencia de la membrana al cambio de curvatura por lo que se modifica el modelo anterior, a la siguiente propuesta:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = G \dot{\gamma} = G \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} \quad (5.3)$$

Por lo que, en esta contribución la membrana es flexo-viscoelástica y la ecuación constitutiva que describe este fenómeno, es un modelo matemático que tiene la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = G \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma}} \quad (5.4)$$

En forma adimensional, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = G \left( 1 + De_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} = \frac{k}{1-k} \left( 1 + De_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} \quad (5.5)$$

Es decir, al introducir el efecto de la viscosidad de la membrana, y utilizar las variables adimensionales previamente establecidas, y aplicando el formalismo de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zx}(\omega) = \frac{k}{1-k} \frac{1 + De_M \cdot (i\omega)}{i\omega} \dot{\gamma}(\omega) \quad (5.6)$$

La viscosidad compleja, tiene la forma:

$$\eta(\omega) = \frac{\sigma_{zx}(\omega)}{\gamma(\omega)} = \frac{k}{1-k} \frac{1 + De_M \cdot (i\omega)}{i\omega} \quad (5.7)$$

El módulo complejo tiene la forma:

$$G(\omega) = \eta(\omega) i\omega \quad (5.8)$$

Por lo que, para esta propuesta tiene la forma:

$$\boxed{G(\omega) = \frac{k}{1-k} (1 + De_M \cdot (i\omega))} \quad (5.9)$$

En la ecuación anterior,  $k$  es la elasticidad de la membrana definida anteriormente. El número de Deborah  $De_M$ , se define como el cociente de dos tiempos característicos.

$$De_M = \frac{\lambda_M}{\Sigma_\lambda} = \frac{\text{Tiempo de relajación membrana}}{\text{Tiempo total viscoelástico}}$$

En particular, cuando  $De_M = 0$ , se replican los resultados obtenidos por otros investigadores (Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia et al. 2014, 2018, 2023). Las aportaciones de este trabajo se ven empataadas en la Figura 10. Es claro, que se tiene los siguientes puntos:

- a. El efecto de la viscosidad en la membrana es negativo, es decir la viscosidad en este contexto, disminuye la respuesta dinámica del sistema.
- b. El efecto de los mecanismos de relajación de la membrana con respecto a los mecanismos viscoelásticos de bulto, son cuantificados a través del número de Deborah.
- c. El efecto de la resonancia en estos sistemas se debe exclusivamente a los siguientes mecanismos acoplados:

C.1 Asimetría en las fases viscoelásticas  $\Pi_\lambda \ll 1$ , i.e.,  $\Pi_\lambda = 10^{-4}$

C.2 Viscosidad de bulto alta (Máxima disipación viscoelástica),  $\Sigma_\lambda \ll 1$ , i.e.,  $\Sigma_\lambda = 10^{-4}$

C.3 Membrana deformable  $k \ll 1$

C.4 El número de Deborah debe ser muy pequeño en comparación con el tiempo total viscoelástico del fluido.

## MEMBRANA VISCOELÁSTICA

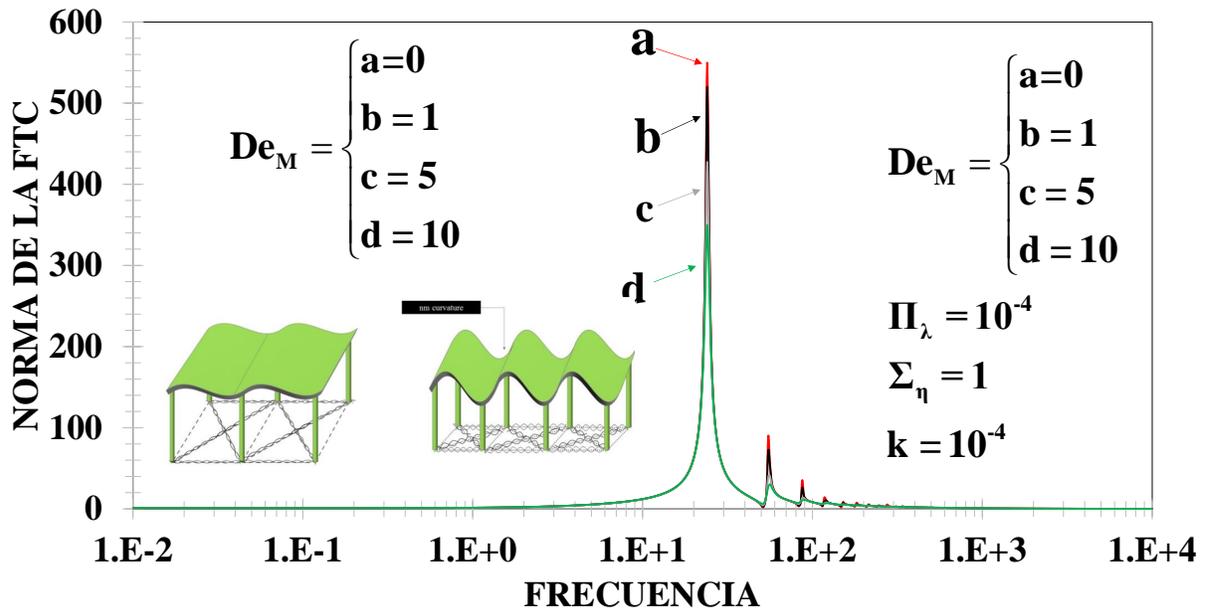


Figura 10. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número de Deborah de la Membrana  $De_M$ . Los otros números adimensionales son los mismo que en la Figura 9.

La Figura 10 exhibe de manera gráfica la correlación entre la norma de la función de transferencia y la frecuencia dentro del contexto de un modelo viscoelástico de Maxwell, poniendo especial énfasis en el papel que juega el número de Deborah de la membrana. La simulación despliega un panorama donde, a pesar de que los demás grupos adimensionales se mantienen constantes tal como se presenta en la Figura 9, el comportamiento del sistema es uniformemente consistente en todos los escenarios analizados. En el extremo inferior del espectro de frecuencias, el sistema parece ser insensible, evidenciando una ausencia de respuesta dinámica notable. No obstante, al incrementar la frecuencia hasta cierto umbral, se desencadena un fenómeno resonante distintivo en una frecuencia crítica específica. Tras superar este punto crítico, la respuesta del sistema se atenúa de forma monótona, lo cual es seguido por una serie de curvas secundarias de menor intensidad. Estas últimas son generadas por las funciones de Bessel, cuyas características oscilatorias son las responsables de instigar el mencionado efecto resonante.

El número de Deborah asociado a la membrana tiene una influencia directa y bidimensional sobre el fenómeno de la resonancia:

- a. Regula la intensidad del pico máximo observado en las curvas resonantes, actuando como un dial que ajusta la amplitud de la respuesta del sistema.

- b. Determina desde una perspectiva matemática el valor del pico máximo, lo cual es una consecuencia directa de las propiedades combinadas de la membrana, que incluyen aspectos inerciales, viscoelásticos y visco-elasto-flexoeléctricos.

# **CAPÍTULO 6**

## **CONCLUSIONES**

## 6.1 APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO.

En este trabajo se estudió una membrana viscoelástica que disipa y almacena energía cuando está inmersa en fluidos no newtonianos. La membrana está sujeta a la mitad de un capilar horizontal de longitud  $2L$ . La mitad del capilar ( $0 \leq z < L$ ) está inmerso con un fluido viscoelástico de Maxwell y en la otra mitad ( $L < z < 2L$ ) se encuentra el otro fluido. Cuando se aplica un campo eléctrico, la membrana se activa y empieza a oscilar de derecha a izquierda. La membrana transfiere el momento a los fluidos viscoelásticos y debido a las características de estos, la membrana disipa energía por efecto de la fricción. Un hecho importante, es que el cambio de la curvatura  $H$ , se visualiza por medio de un casquete esférico que se visualiza en la Figura 1. Si el casquete esférico se dibuja hacia la derecha, la curvatura es positiva, si es hacia la izquierda es negativo  $H < 0$  y si  $H = 0$ , el radio de curvatura es infinito. Los objetivos primarios de este proyecto fueron los siguientes:

- a. Obtener una expresión analítica para describir el efecto del campo eléctrico y el flujo volumétrico en función de las propiedades del sistema.
- b. Proponer una modificación al modelo Herrera-Valencia /Rey con el fin de incluir los efectos viscosos y elásticos en la membrana.
- c. Obtener un número adimensional que cuantifique los procesos de relajación del sistema.
- d. Analizar el efecto de incorporar los mecanismos viscosos en la resonancia del sistema y cuantificar desde un punto de vista biológico su efecto.

Para resolver los puntos (a-d) se utilizó el balance de masa sin reacción química, la ecuación de movimiento en su forma Lagrangiana (Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo), y el modelo reológico constitutivo propuesto en este trabajo. Este modelo se basa en un sistema mecánico en paralelo conformado por elementos de Maxwell (viscoelásticos) y la membrana como un elemento visco-plástico. Este modelo mejora el propuesto por Herrera/Valencia-Rey incorporando la viscosidad del sólido. Este término, se puede atribuir a una resistencia que presenta la membrana al cambio de curvatura, siendo que su estado inicial es el de curvatura cero.

El modelo reológico es válido para bajas deformaciones, es decir no presenta primera ni segunda diferencia de esfuerzos normales. Por lo que, se puede reformular la ecuación de Navier-Stokes

con el fin de incluir los mecanismos viscoelásticos. La ecuación resultante contiene un operador viscosidad o fluidez que depende de la derivada parcial temporal y las propiedades materiales del sistema, como son: (I) Tiempos de relajación, (II) Tiempos de retardo, (III) Tiempos geométricos, (IV) Viscosidades y (V) Módulo de corte.

Suponiendo flujo cortante simple, i.e., el campo de velocidades depende de las variables temporales  $t$  y de la coordenada radial  $r$ , se obtiene una ecuación diferencial parcial que describe los cambios espaciales y temporales en función de la fuerza motriz asociada al campo eléctrico. El modelo, satisface dos condiciones de frontera: (I) La velocidad en el centro es finita y (II) la velocidad en la pared es cero. La ecuación resultante se resuelve mediante las técnicas de la transformada de Fourier con el fin de pasar el espacio del tiempo a las frecuencias. El resultado es una ecuación diferencial de Bessel no homogénea que se resuelve en términos de las funciones especiales de la física matemática conocidas como funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero, la cual contiene dos constantes que deben de ser determinadas con las condiciones de frontera. Una vez que se sustituyen las condiciones de frontera en la ecuación general y se determinan los valores de  $C_1$  y  $C_2$ , se tiene el perfil de velocidades en función del operador fluidez y una función no homogénea que depende de un parámetro  $\beta$ . Ese parámetro es el inverso de una longitud característica que depende de la inercia, propiedades viscoelásticas a través de la fluidez y en forma adimensional del número de Deborah.

Al integrar el perfil de velocidades sobre una sección transversal de área, se obtiene una expresión para el flujo volumétrico en función de la fuerza motriz asociada al campo eléctrico. Mediante arreglos matemáticos, obtenemos que el flujo viscoelástico se puede expresar como el producto de una amplitud Newtoniana, una función de transferencia que depende de las propiedades reológica del sistema y del campo eléctrico complejo, i.e.,

$$Q_v(t, \omega_0) = Q_N T(\beta, \omega_0) E(t, \omega_0)$$

La función de transferencia  $T(\beta, \omega_0)$  encapsula toda la física del sistema y depende de dos números adimensionales principales: (I)  $De$  y (II)  $De_M$ . El Deborah de la membrana depende de un cociente de dos tiempos característicos asociados a los mecanismos de relajación de la membrana y los viscoelásticos de los fluidos.

Un hecho importante, es que al tomar en cuenta la viscosidad de esta, la resonancia del sistema decrece por lo que, este hecho implicaría que la resistencia que presenta el sólido flexo-eléctrico al cambio de curvatura, tiene un efecto negativo en el contexto de la resonancia y amplificación del sonido. La pregunta que nos formulamos aquí, ¿Puede haber una patología que induzca una disminución de la resonancia o aumente la viscosidad de la membrana lo cual cause una mayor resistencia a formar una curvatura?, Es importante resaltar que una medida de esta resistencia es el Deborah y que este puede depender de la concentración, del pH, y otras propiedades materiales. En este momento, bajo esta investigación original de licenciatura, es una pregunta abierta que debe ser contestada mediante más simulaciones y datos in vitro e in vivo de estas células.

## **6.2 TRABAJO FUTURO.**

Al realizar la investigación de la respuesta dinámica, disipativa y oscilatoria de las membranas flexoeléctricas en distintos entornos, se formularon expresiones teóricas que constituyen la base para el progreso biotecnológico, enfocado en el desarrollo de soluciones auditivas innovadoras para personas con pérdida auditiva. Por lo tanto, en la línea natural de esta investigación se encuentran, pero no limitándose a, los siguientes puntos:

- a) Estudios experimentales a nivel laboratorio de los mecanismos de disipación y respuesta de las membranas que integran el sistema auditivo con el fin de contrastar los resultados teóricos.
- b) Simulaciones computacionales que permitan: evaluar los resultados de los estudios experimentales, desarrollar modelos virtuales de aplicación y posteriormente, proporcionar bases para la creación de prototipos para la solución del problema principal, dentro de los cuales se podrían incluir implantes cocleares mejorados, audífonos avanzados, dispositivos de asistencia auditiva no invasivos, etc.

Finalmente, este proyecto representa una búsqueda constante de conocimientos centrados en las áreas de fenómenos de transporte y reología de fluidos que proporcionen nueva información con el fin de apoyar a la solución de problemáticas presentadas en la rama de bio-ingeniería.

# GLOSARIO

|  |   |
|--|---|
| <b><i>Deformación:</i></b>             | Cambio de posición con respecto a otra.   |
| <b><i>Ecuación Constitutiva:</i></b>   | Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, esfuerzo, deformación). |
| <b><i>Ecuación de continuidad:</i></b> | Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia de un sistema físico.                  |
| <b><i>Ecuación de movimiento:</i></b>  | Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.   |
| <b><i>Esfuerzo en pared:</i></b>       | Dirección de fuerza aplicada y evaluada en el límite del sistema (pared).                                     |
| <b><i>Estado estacionario:</i></b>     | Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.                                   |
| <b><i>Fluido:</i></b>                  | Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversible.                 |
| <b><i>Flujo cortante:</i></b>          | Flujo que aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.                |
| <b><i>Flujo homogéneo:</i></b>         | Es el flujo en el cual su posición no representa afectación en las propiedades del sistema.                   |
| <b><i>Fluido incompresible:</i></b>    | Fluido que tiene una densidad constante.  |
| <b><i>Fluido newtoniano:</i></b>       | Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.                                 |
| <b><i>Fluido no-newtoniano:</i></b>    | La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.  |
| <b><i>Flujo oscilante:</i></b>         | Flujo originado por una oscilación de un plato de forma periódica.  |
| <b><i>Flujo pulsátil:</i></b>          | Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.        |
| <b><i>Fluido viscoelástico:</i></b>    | Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.   |
| <b><i>Flujo volumétrico:</i></b>       | Volumen por unidad de tiempo.   |
| <b><i>Frecuencia:</i></b>              | Frecuencia de movimiento, puede ser expresada en proporción al cambio de dirección o ángulo.                  |

|   |   |
|---|---|
| <b><i>Función estocástica:</i></b>            | Función probabilística que evoluciona en el tiempo.   |
| <b><i>Modelo constitutivo de Maxwell:</i></b> | Ecuación constitutiva que describe el comportamiento reológico de fluencia, relajación y recuperación de sistemas con comportamiento viscoelástico. |
| <b><i>Rapidez de deformación:</i></b>         | Rapidez con la que se deforma un sistema.   |
| <b><i>Tensor de esfuerzo:</i></b>             | Matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en la cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.                                |
| <b><i>Tiempo de relajación:</i></b>           | Tiempo necesario para el sistema con el fin de alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo de esfuerzo.                                  |
| <b><i>Tiempo de retardo:</i></b>              | Tiempo que necesita el sistema para llegar a un equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo cortante.  |
| <b><i>Velocidad promedio:</i></b>             | Velocidad axial promediada a través del área de flujo.  |
| <b><i>Viscoelasticidad lineal:</i></b>        | Región a bajas deformaciones, en esta zona el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas constantes.   |
| <b><i>Viscoelasticidad no lineal:</i></b>     | Región a bajas deformaciones, en esta zona el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas variables.  |
| <b><i>Viscosidad:</i></b>                     | Medida de la resistencia a fluir de un sistema.   |

# **BIBLIOGRAFÍA**

Abou-Dakka M, Herrera-Valencia EE, Rey AD (2012) Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J Non-Newton Fluid Mech* **185-186**:1–17.

Byron Bird R, Armstrong RC, Hassager O (1987) Dynamics of polymeric liquids, vol 1. *Fluid Mechanics, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc.

Aguilar-Gutierrez OF, Rey AD (2014) Chiral graded structures in biological plywoods and in the beetle cuticle. *Coll. Interf. Sci. Comm.* **3**: 18-22.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Soriano-Correa C, Ramírez-Torres LA, Hernández-Abad VJ, Calderas F (2023) Study of the electroosmotic flow of a structured fluid with a new generalized rheological model. *Rheol Acta* **63**: 3-32.

[5] Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano-Correa C, Nuñez-Ramírez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). *Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana*. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2023) Fluctuating Flexoelectric Membranes in Asymmetric Viscoelastic Media: Power Spectrum through Mechanical Network and Transfer Function Models. *Symmetry*. **15**:1-36.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2018) Electrorheological model based on liquid crystals membranes with applications to outer hair cells. *Fluids* **3**:1-30.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014) Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil Trans Soc A* **372**:20130369.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Medina-Torres L, Nuñez Ramírez DM, Hernandez Abad VJ, Calderas F, Manero O (2019) New simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid. *Phys Fluids* **31**: 063104-1/17.

Khadem SA, Rey AD (2019a). Theoretical platform for liquid-crystalline selfassembly of collagen-based biomaterials, *Frontiers in Physics* **7**:1-15

Khadem SA, Rey AD (2019b) Thermodynamic modelling of acidic collagenous solutions: from free energy contributions to phase diagrams. *Soft Matt.* **15**: 1833.

Khadem SA, Rey AD (2021) Nucleation and growth of cholesteric collagen tactoids: A time-series statistical analysis based on integration of direct numerical simulation (dns) and long short-term memory recurrent neural network (lstm-rnn). *J. Coll. Inter. Sci.* **582**: 859.

Ramírez-Torres LA, Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Soriano-Correa C, Hernández-Abad VJ, Calderas F (2024) Non-linear electro-rheological model of membrane immersed in Tanner-Power law fluids applied to outer hair cells: Shear-thinning mechanisms, *Phys. Fluids* **36**: 033111.

Ramírez-Torres LA, Medina-Torres L, Calderas F, Núñez-Ramírez DM, Manero O (2023) Rheology and Hydrodynamics of Iron Ore Mineral Pulps during a Bioleaching Process in a Continuous Stirred-Tank Reactor. *Chem. Eng. Tech.* **46**: 670.

Rey AD, Servio P, Herrera-Valencia, EE (2014) Stress-sensor device based on flexoelectric liquid crystalline membranes, *ChemPhysChem* **15**:1405-1412.

Wang Z, Servio P, Rey AD (2022) Wrinkling pattern formation with periodic nematic orientation: From egg cartons to corrugated surfaces. *Phys. Rev. E* **105**: 034702.

Wang Z, Servio P, Rey AD (2023) Pattern formation, structure, and functionalities of wrinkled liquid crystal surfaces: A soft matter biomimicry platform. *Front Soft Matter* **3**: 1