UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONJUNTOS ESTACIONARIOS Y LA PROPIEDAD DE BAIRE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
OCTAVIO BERLANGA OSORIO

DIRECTOR
DR. RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UAM IZTAPALAPA

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO DE 2024.

Agradecimientos

Primero agradezco a mi esposa Ana Luisa y a mi hija Emilia quienes han sido de gran apoyo en estos últimos años en mi intento de volverme matemático cuando vengo de una ingeniería.

Agradezco a mi director de tesis Rodrigo que me ha apoyado y ha sido paciente en mi aprendizaje desde que fue mi maestro y ahora en la tesis, en donde fue fundamental en todo momento.

Agradezco a mi tutora Ana por la paciencia y el apoyo que tuvo conmigo en esta transición, y porque creyó en mí desde un principio.

Agradezco a mis padres, en especial a mi madre Norma quien ha sido un baluarte en cualquier etapa de mi vida.

Agradezco a mi abuela Rosita y mi suegro Raúl por el impulso que me han dado.

También agradezco a mi programa de posgrado de la UNAM y a la Facultad de Ciencias por su apoyo en esta fase de maestría. Al igual, agradezco el apoyo económico que me brindó el CONAHCyT, el cual nunca falló.

Índice general

Presentación

En el siglo 19 Georg Cantor definió a los conjuntos bien ordenados como una generalización natural de los conjuntos numerables. Existen conjuntos bien ordenados llamados *números ordinales*, que pueden considerarse «canónicos» en el sentido de que cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal.

En la actualidad una de las formas en las que un estudiante de matemáticas se encuentra por primera vez con los ordinales es en la construcción de *contrajemplos* en un curso de topología. Por ejemplo, la *plancha de Tychonoff*, que es un ejemplo típico de espacio topológico de Tychonoff que no es normal, se puede construir como el producto $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ de intervalos de ordinales, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable y el cual analizaremos en el segundo capítulo.

En este trabajo vamos a estudiar una aplicación no tan conocida de conjuntos de ordinales a la topología, la cual será el resultado más importante de esta tesis. Un conjunto estacionario es un subconjunto de un cardinal que interseca a todos sus cerrados no acotados, estos conjuntos los analizamos a detalle en el segundo capítulo. En el cuarto capítulo mostraremos que usando subconjuntos estacionarios de ω_1 se pueden construir dos espacios metrizables con la propiedad de Baire cuyo producto no es de Baire; la propiedad de Baire la definiremos y empezaremos a estudiar en el tercer capítulo.

La existencia de un producto de dos espacios de Baire que no fuera de Baire fue demostrada por J. C. Oxtoby en 1961, si se asumía la hipótesis del continuo; sin embargo, en 1976 Paul E. Cohen [CO] demostró que no era necesario asumir la hipótesis del continuo para demostrar dicha existencia.

Además de esto, en el último capítulo hablaremos de una propiedad topológica más fuerte que la propiedad de Baire. Dado un espacio, se define un juego en el que de forma alternada dos jugadores, Alicia y Beto, escogen abiertos con ciertas restricciones y al final de una cantidad numerable infinita de pasos se tienen condiciones ganadoras para cada uno de los jugadores; en el caso de que Beto tenga una estrategia ganadora, el espacio se denomina *de Choquet*. Daremos la definición de estos espacios y probaremos algunas propiedades de ellos. En particular, nos interesa que todo espacio de Choquet es de Baire y que el producto arbitrario de espacios de Choquet es de Choquet.

Capítulo 1

Preliminares

Necesitamos varias nociones de teoría conjuntos para esta tesina. La mayoría de estos conceptos los podemos encontrar en [HG]. Se mencionarán algunos aquí por su relevancia para el tema. También necesitaremos preliminares de topología general, los cuales se pueden consultar en [EN] y [KE].

Notación. El símbolo $\lightning$ denotará que se encontró una contradicción.

Sean X un conjunto y $\mathbf{P}$ una propiedad cualquiera en X que empieza con el cuantificador $\forall$, es decir: $\mathbf{P}$: "$\forall x(\mathbf{Q}(x))$". Si el conjunto X es vacío, entonces $\mathbf{P}$ se cumple; de otra forma existiría un elemento de X en donde $\mathbf{P}$ no se cumple, $\lightning$. En este caso, decimos que $\mathbf{P}$ se cumple por vacuidad.

1.0.1. Definición Sea X^n un conjunto. A los elementos $x \in X^n$, conocidos como n-adas, los denotaremos de la siguiente forma:

$$x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle.$$

1.1. Conjuntos ordenados

1.1.1. Definición Sean X un conjunto y $<$ una relación del conjunto X.

a) Al par $\langle X, < \rangle$ le llamaremos **conjunto estrictamente ordenado** si cumple las siguientes propiedades:

   - Para cualquier $x \in X$, $x \not< x$.
   - Dados $x, y, z \in X$ se cumple que si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.

b) Dado un conjunto estrictamente ordenado $\langle X, < \rangle$, decimos que $\langle X, < \rangle$ es un **orden lineal** si se cumple que $x < y$ o $y < x$ para cualesquiera $x, y \in X$.

A cada una de estas propiedades se les conocen como antireflexiva y transitiva respectivamente. Entonces un conjunto con una relación antireflexiva y transitiva le llamaremos conjunto estrictamente ordenado.

1.1.2. Definición Sean X un conjunto y $<$ un orden estricto de X. Definimos otra relación $\leq$ de la siguiente forma:

$$\forall x, y \in X(x \leq y \iff (x < y \vee x = y))$$

Si cambiamos esta relación por la que tenía nuestro orden estricto, el par $\langle X, \leq \rangle$ ahora será un conjunto parcialmente ordenado.

1.1.3. Definición Sean $\langle X, < \rangle$ un conjunto estrictamente ordenado y $A \subset X$,

- Si para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$ entonces diremos que el orden es un **orden lineal**.
- Una **cadena** de X es cualquier subconjunto $C \subset X$ que tiene un orden lineal dado por la relación $\leq$.
- Si $x \in A$ cumple que $x \leq a$ para cualquier $a \in A$ diremos que x es el **elemento mínimo** de A y lo denotamos por $x = \min A$.
- A un $x \in A$ le llamaremos **elemento maximal** de A si para cualquier $a \in A$ con $x \leq a$, sucede que $x = a$.
- Si $x \in X$ cumple que $a \leq x$ para cualquier $a \in A$ diremos que x es una **cota superior** de A.
- Si x es una cota superior de A y se cumple que $x \leq y$ con y cualquier cota superior de A, diremos que x es el **supremo** de A y lo denotamos como $\sup A$.
- Si $x \in X$ cumple que $a < x$ para cualquier $a \in A$ diremos que x es una **cota superior estricta** de A.

1.1.4. Definición Sean $\langle X, < \rangle$ un orden lineal y $A \subset X$. El conjunto A es un **segmento inicial** de X si para cualesquiera $a \in A$ y $x \in X$ tales que $x < a$ implica que $x \in A$.

1.1.5. Definición Sean $\langle X, < \rangle$ un orden lineal y $x \in X$.

- Si existe $y \in X$ tal que $x = \min\{z \in X : y < z\}$, entonces le llamaremos a x **sucesor** inmediato de y
- Si x no es el $\min X$ y no es sucesor de ningún elemento, diremos que x es un elemento **límite**.

1.1.6. Definición Sea $\langle X, <\rangle$ un conjunto estrictamente ordenado. Si para cada $A \subset X$ no vacío existe $\min A$, diremos que $<$ es un **buen orden**.

Es cierto que cualquier conjunto bien ordenado es también un orden lineal. Para ver esto, tomamos cualesquiera dos elementos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Ahora, por el buen orden de X, se cumple que $A = \{x, y\} \subset X$ tiene un mínimo. Por lo tanto, se cumple que $x < y$ o $y < x$, y el orden es lineal.

Algunos ejemplos sencillos de buenos órdenes son:

- El conjunto vacío con el orden vacío $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$.
- El conjunto de los naturales $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.

El primer ejemplo es estrictamente ordenado por vacuidad y cumple ser un buen orden igualmente por vacuidad. El segundo ejemplo es un buen orden por el principio del buen orden de los naturales [HG, teorema 0.13].

1.1.7. Definición Sea X un conjunto. Diremos que X es **numerable** si existe una función $f: X \to \mathbb{N}$ inyectiva.

1.1.8. Definición Una **sucesión numerable** en un conjunto X es una función de la forma $f: \mathbb{N} \to X$. Comúnmente, esta sucesión se identificará con su imagen de la siguiente manera: $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, donde $f(n) = \alpha_n$.

1.1.9. Definición Una sucesión numerable es estrictamente creciente si se cumple que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}(m < n \Rightarrow \alpha_m < \alpha_n).$$

1.1.10. Definición Sean $\langle X, <_1\rangle$ y $\langle Y, <_2\rangle$ dos conjuntos bien ordenados. Diremos que los conjuntos bien ordenados son **isomorfos** si existe $f: X \to Y$ biyectiva con la propiedad:

$$\forall x, y \in X(x <_1 y \iff f(x) <_2 f(y)).$$

El siguiente resultado es conocido como el **teorema de recursión de los naturales**.

1.1.11. Teorema Suponiendo que existe una función $f: X \to X$ y $x \in X$, entonces existe una única función $g: \mathbb{N} \to X$ tal que:

- $g(0) = x$
- $\forall n \in \mathbb{N}\,[g(n+1) = f(g(n))]$

1.2. Axioma de elección

El axioma de elección fue formulado por Ernst Zermelo en 1904 y este ayudó a ordenar muchas ideas en la teoría de conjuntos. Aquí daremos una definición del axioma de elección y algunas equivalencias.

1.2.1. Axioma (Axioma de elección) A cualquier conjunto se le puede dar un buen orden.

1.2.2. Lema (Kuratowski-Zorn) Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $X \neq \emptyset$ y cualquier cadena de X está acotada superiormente, entonces X tiene un elemento maximal.

El axioma de elección y el lema de Kuratowski-Zorn son equivalentes bajo el resto de los axiomas ZF. Para la demostración de esto, consultar [HG, Proposición 7.8]. Gracias a esta equivalencia, podríamos tomar el lema de Kuratowski-Zorn como axioma en vez del de elección, sin embargo, tomaremos el de elección como axioma y el lema de Kuratowski-Zorn como un resultado del axioma de elección.

1.3. Topología

1.3.1. Definición Llamaremos **espacio topológico** al par $\langle X, \tau \rangle$, donde X es un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X que cumplen con las siguientes propiedades:

- $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.
- Si $U_1 \in \tau$ y $U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
- Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

A los elementos de τ los llamaremos **conjuntos abiertos**.

1.3.2. Definición Sean $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $F \subset X$. Diremos que F es cerrado si $(X \setminus F) \in \tau$.

1.3.3. Ejemplos

1. Sea X un conjunto.
    - La **topología discreta** en X es $\tau = \wp(X)$.
    - La **topología antidiscreta** en X es $\tau = \{\emptyset, X\}$.
2. Sea X un conjunto no vacío. Entonces llamaremos a $\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ la **topología cofinita**.

3. Sea $X = \mathbb{R}$. Definimos a la topología como: $U \in \tau$ si y sólo si para cualquier $x \in U$ existe $y \in X$ con $x < y$ tal que $[x, y) \subset U$. Este espacio es conocido como la **recta de Sorgenfrey**.

1.3.4. Definición Sean $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces al conjunto $\{U \cap A \colon U \in \tau\}$ lo llamaremos **topología de subespacio** de A.

1.3.5. Definición Sean $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $A \subset X$.

- La **cerradura** de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in X \colon \forall U \in \tau \, (x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset)\}.$$

- El **interior** de A es el conjunto $A^{\circ} = \{x \in X \colon \exists U \in \tau(x \in U \subset A)\}$.
- El conjunto de **puntos de acumulación** de A es

$$A' = \{x \in X \colon \forall U \in \tau \, (x \in U \implies A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset)\}.$$

- Los elementos de $A \setminus A'$ son los **puntos aislados** de A.

1.3.6. Definición Sean $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subset \tau$. Diremos que $\mathcal{B}$ es **base** de τ si para cualesquiera $x \in X$ y $U \in \tau$, con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

1.3.7. Definición Sean $\langle X, \tau_X \rangle$ y $\langle Y, \tau_Y \rangle$ espacios topológicos. La **topología producto** en $X \times Y$ es la que tiene como base los rectángulos abiertos de la siguiente forma: $\{U \times V \colon U \in \tau_x, V \in \tau_Y\}$.

1.3.8. Definición Sean $\langle X, \tau_X \rangle$ y $\langle Y, \tau_Y \rangle$ espacios topológicos. Le llamaremos la **suma disjunta** de X y Y a $X \oplus Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ y su topología serán todos los $U \subset X \oplus Y$ tales que:

$$\{x \in X \colon \langle x, 0 \rangle \in U\} \in \tau_X \quad \text{y}$$
$$\{y \in Y \colon \langle y, 1 \rangle \in U\} \in \tau_Y.$$

1.3.9. Definición Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Llamaremos al subconjunto A **denso** si $\overline{A} = X$.

1.3.10. Definición Diremos que un espacio topológico X es **separable** si existe $A \subset X$ denso numerable.

1.3.11. Lema Dados X un espacio topológico, $D \subset X$ un denso y $U \in \tau_X$, se cumple que $\overline{D \cap U} = \overline{U}$.

Demostración.

($\subset$) Esta inclusión es inmediata pues $D \cap U \subset U$.

($\supset$) Sea $x \in \overline{U}$, entonces dado $V \in \tau_X$ con $x \in V$, se tiene que $V \cap U \neq \emptyset$. Y como $V \cap U$ es abierto, se cumple que $V \cap U \cap D \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{D \cap U}$. $\square$

1.3.12. Definición Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Diremos que X es **segundo numerable** si τ tiene una base numerable.

1.3.13. Definición Dado un espacio topológico X, llamaremos $\boldsymbol{G_\delta}$ a la intersección numerable de conjuntos abiertos. Es decir,

$$\boldsymbol{G_\delta} = \bigcap \{U_n : U_n \in \tau \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora veamos cómo se pueden relacionar dos espacios topológicos.

1.3.14. Definición Sea $f\colon X \to Y$ una función y $B \subset Y$. A la imagen inversa de B la denotaremos como $\boldsymbol{f^{\leftarrow}(B)}$, es decir, $\boldsymbol{f^{\leftarrow}(B)} = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

1.3.15. Definición Sean $\langle X, \tau \rangle$ y $\langle Y, \tau' \rangle$ dos espacios topológicos. Una función $f\colon X \to Y$ tal que para cualquier $V \in \tau'$, $f^{\leftarrow}(V) \in \tau$; la llamaremos **función continua**.

1.3.16. Ejemplos

1. Sea X un conjunto con la topología discreta. Entonces cualquier función $f\colon X \to Y$, donde Y es cualquier espacio topológico, es continua.
2. Sea Y un conjunto con la topología anti-discreta. Entonces cualquier función $f\colon X \to Y$, donde X es cualquier espacio topológico, es continua.
3. Sea X un conjunto con dos topologías definidas, τ y τ'. Entonces la función identidad $id_X \colon \langle X, \tau \rangle \to \langle X, \tau' \rangle$ es continua si y solo si $\tau \subset \tau'$.

1.3.17. Definición Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua $f\colon X \to Y$ es llamada **homeomorfismo** si f es biyectiva y f^{-1} es continua.

Diremos que dos espacios topológicos X y Y son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos. Y los denotaremos de la siguiente manera: $X \approx Y$.

1.3.18. Definición Sean X y Y dos espacios topológicos. Supongamos que X posee una propiedad como espacio, llamaremos **propiedad topológica** a la propiedad de X si cuando existe un homeomorfismo entre X y Y, entonces Y también posee la misma propiedad.

1.3.19. Definición Llamaremos a un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ **Hausdorff** o $\boldsymbol{T_2}$, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1$, $y \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

1.3.20. Ejemplos

1. Para cualquier conjunto X con la topología discreta, X es T_2.
2. La recta de Sorgenfrey es T_2.
   Sea τ la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sin perdida de generalidad, sea $x < y$. Entonces sean $U = [x, y)$ y $V = [y, y+1)$. Notemos que $U, V \in \tau$, que $x \in U$, $y \in V$ y que $U \cap V = \emptyset$.

1.3.21. Definición Un espacio topológico X es **regular** si para cualesquiera $A \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus A$, existen $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_X$ tales que $A \subset U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si tomamos a un abierto U y un elemento $x \in U$ de un espacio regular X, sabemos que existen $V \in \tau_X$ y $W \in \tau_X$ tales que $x \in V$, $X \setminus U \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. Entonces $V \subset X \setminus W$ y debido a que $X \setminus W$ es cerrado, sucede que $\overline{V} \subset X \setminus W$. De esta forma podemos probar la siguiente proposición.

1.3.22. Proposición Dados un espacio regular X, un abierto $U \subset X$ y cualquier elemento $x \in U$, existe $V \in \tau_X$ tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

1.3.23. Definición Sea X un espacio topológico. Llamaremos a la familia $\mathcal{A}$ **cubierta abierta** de X si $X = \bigcup \mathcal{A}$ y cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto de X.

1.3.24. Definición Un espacio topológico X es **compacto** si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X existe una **subcubierta finita**. Es decir: existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ tiene una cantidad finita de elementos y $\bigcup \mathcal{B} = X$.

1.3.25. Teorema [EN, theorem 3.1.2] Sea X un espacio compacto. Dado un cerrado $A \subset X$, A es compacto.

1.3.26. Definición Una **métrica** en un conjunto X es una función $\delta \colon X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

(I) $\delta(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(II) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

(III) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Al par $\langle X, \delta \rangle$ lo llamaremos **espacio métrico**.

1.3.27. Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^n$ definimos la siguiente métrica:
   $\delta(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle \mathbb{R}^n, \delta \rangle$ es un espacio métrico. Esta métrica es conocida como la **métrica euclideana**.

2. Dado un conjunto X. Definimos a la **métrica discreta** de X de la siguiente manera: $\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

1.3.28. Definición Sea $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico y sean $x \in X$ y $r > 0$. Llamaremos **bola abierta** con centro en x y radio r al siguiente conjunto: $B_\delta(x, r) = \{y \in X \colon \delta(x, y) < r\}$.

1.3.29. Definición Sea $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico. Definimos como $\boldsymbol{\tau_\delta}$ a la colección de $U \subset X$ tales que para cualquier $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\delta(x, \varepsilon) \subset U$.

Es fácil ver que la colección τ_δ de 1.31 define una topología en el espacio y esta topología está definida por la métrica. Por lo tanto, toda métrica define una topología.

El conocido teorema de Heine-Borel nos dice que dado $A \subset \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^n$ con la topología inducida por la métrica euclideana, A es compacto si y solo si A es cerrado y acotado. De esta manera, notamos que el intervalo $[0, 1]$ es compacto y el conjunto $\mathbb{Q}$ no es compacto.

1.3.30. Definición Dados un espacio métrico $\langle X, \delta \rangle$ y $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión numerable en el espacio, diremos que A **converge** a un punto $x \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$, entonces $\delta(x_n, x) < \varepsilon$.

1.3.31. Definición Sean $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico y $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión numerable en X. Llamaremos a A una **sucesión de Cauchy** si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(x_m, x_n) < \varepsilon$ cuando $n \leq m$.

1.3.32. Definición Sea $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico. Llamaremos a este espacio **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X.

1.3.33. Ejemplos

1. Cualquier espacio métrico discreto es completo.
   Sea $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico discreto. Ahora, sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(x_m, x_n) < \varepsilon$ cuando $n \leq m$. Si tomamos a $\varepsilon = 1/2$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(x_m, x_n) < 1/2$ cuando $n \leq m$. Por como se definió la métrica en X, esto nos da que $\delta(x_m, x_n) = 0$ cuando $n \leq m$. Por lo que $x_n = x_m$ para $n \leq m$. Por lo tanto, nuestra sucesión se vuelve constante a partir de un $n \in \mathbb{N}$, lo que nos dice que A es convergente a un punto en X.

2. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica definida en el ejemplo 1.3.27 es completo.
   Para ver esta prueba favor de consultar los ejemplos de 4.3.7 de [EN].

1.3.34. Teorema [EN, theorem 4.3.11] Sea $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico completo. Si $A \subset X$ es cerrado, entonces A es completo.

Veamos que la propiedad de ser completo no es una propiedad topológica. Sean $\Pi^+ = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$, ambos con la métrica definida en 1.3.27. Sabemos que $\mathbb{R}^2$ es completo. Por otro lado, la sucesión $\{\langle 0, \frac{1}{n} \rangle : n \in \mathbb{N}\} \subset \Pi^+$ es una sucesión de Cauchy que no converge a un punto en Π^+. Por lo que Π^+ no es completo. Sin embargo, la función $f : \mathbb{R}^2 \to \Pi^+$ con $f(\langle x, y \rangle) = (\langle x, e^y \rangle)$; con la inversa $f^{-1} : \Pi^+ \to \mathbb{R}^2$ tal que $f^{-1}(\langle x, y \rangle) = (\langle x, ln(y) \rangle)$, es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y Π^+.

1.4. El espacio $D^{\mathbb{N}}$

En teoría de conjuntos, todo objeto tiene que ser un conjunto. En particular, una función también es un conjunto. A continuación damos la definición conjuntista de función y algunas definiciones auxiliares.

1.4.1. Definición Llamaremos **función** a un conjunto f si cumple que:

(I) Todos sus elementos son parejas ordenadas, es decir, f es una relación.

(II) Si $\langle x, y \rangle \in f$ y $\langle x, z \rangle \in f$, entonces $y = z$.

Notación. Si f es función y $\langle x, y \rangle \in f$, entonces $f(x) = y$.

1.4.2. Definición Sea f una función.

- Al conjunto $\mathrm{dom}(f) = \{x : \text{existe } y \text{ con } \langle x, y \rangle \in f\}$ le llamamos **dominio** de f.
- Al conjunto $\mathrm{im}(f) = \{y : \text{existe } x \text{ con } \langle x, y \rangle \in f\}$ le llamamos **imagen** de f.

1.4.3. Definición Para cualesquiera dos conjuntos X y Y definimos

$$Y^X = \{f \text{ es función}\colon \operatorname{dom}(f) = X \text{ e } \operatorname{im}(f) \subset Y\}.$$

Continuamos definiendo un espacio topológico que usaremos en nuestro teorema principal.

1.4.4. Definición Sea D cualquier conjunto con la topología discreta. Consideraremos al conjunto $D^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.

1.4.5. Definición Para todo $n \in \mathbb{N}$, la proyección de $D^{\mathbb{N}}$ a la entrada n es la función $\pi_n \colon D^{\mathbb{N}} \to D$ dada por $\pi_n(f) = f(n)$ para todo $f \in D^{\mathbb{N}}$.

1.4.6. Definición La topología producto en D tiene como base los subconjuntos de la siguiente forma:

$$\pi_{n_0}^{\leftarrow}[U_0] \cap \pi_{n_1}^{\leftarrow}[U_1] \cap \cdots \cap \pi_{n_k}^{\leftarrow}[U_k]$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ y para cada $m \leq k$, $U_m \subset D$.

El producto numerable de espacios métricos es métrico [EN, theorem 4.2.2]. Debido a esto y a que cualquier espacio con la topología discreta es métrico, concluimos que $D^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico.

A continuación, daremos una base más conveniente para el conjunto $D^{\mathbb{N}}$.

1.4.7. Definición Al conjunto de todas las sucesiones finitas en D lo denotaremos como $D^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D^n$.

1.4.8. Definición Para cada $s \in D^{<\mathbb{N}}$, sea $\langle s \rangle = \{f \in D^{\mathbb{N}} \colon s \subset f\}$.

Para ver que los conjuntos $\langle s \rangle$ son abiertos en $D^{\mathbb{N}}$, tomemos a un $s \in D^{<\mathbb{N}}$ y analizamos dos casos que se pueden dar. El primer caso es que $s \in D^0$. Dado que $D^0 = \{\emptyset\}$, tenemos que $s = \emptyset$ por lo que $\langle s \rangle = \{f \in D^{\mathbb{N}} \colon \emptyset \subset f\} = D^{\mathbb{N}}$ el cual es abierto por ser el espacio completo. Para el segundo caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq 0$ y $s \in D^m$. Por lo tanto, $\langle s \rangle = \bigcap_{i<m} \pi_i^{\leftarrow}\{s_i\}$ que es un abierto básico en $D^{\mathbb{N}}$.

1.4.9. Lema El conjunto $\{\langle s \rangle \colon s \in D^{<\mathbb{N}}\}$ es una base para la topología producto de $D^{\mathbb{N}}$.

Demostración. En el párrafo anterior ya probamos que cada conjunto de esta colección es un abierto. Ahora falta probar que cada abierto es unión de conjuntos de esta colección.

Sea $U \subset D^{\mathbb{N}}$ un abierto y $f \in U$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \pi_{n_0}^{\leftarrow}[A_0] \cap \pi_{n_1}^{\leftarrow}[A_1] \cap \cdots \cap \pi_{n_{k-1}}^{\leftarrow}[A_{k-1}] \subset U$ y $A_i \subset D$ para cualquier $i < k$.

Como $f \in \pi_{n_i}^{\leftarrow}[A_i]$ para cualquier $i < k$, tenemos que $f(n_i) \in A_i$ para toda $i < k$. Sean $m = \text{máx}\{n_i \colon i < k\}$ y $s \in D^{m+1}$ tal que $s_j = f(j)$ para toda $j \leq m$. Entonces $s \subset f$ y $f \in \langle s \rangle$.

Ahora sólo falta probar que $\langle s \rangle \subset U$. Sea $g \in \langle s \rangle$, entonces $s \subset g$ y $s_j = g(j)$ para toda $j \leq m$. Si $i < k$ y $j = n_i$, tenemos que $g(n_i) = s_{n_i} = f(n_i) \in A_i$ y $g \in \pi_{n_i}^{\leftarrow}[A_i]$ para toda $i < k$. Por lo tanto $g \in U$ y $\langle s \rangle \subset U$. $\square$

Para terminar, probaremos un lema técnico que usaremos más adelante.

1.4.10. Lema Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \in D^{<\mathbb{N}}$ tal que si $m < n$, entonces $f_m \subsetneq f_n$. Entonces $f = \bigcup\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una función con $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ e $\text{im}(f) \subset D$.

Demostración. Primero veamos que f es función, es decir, que cumple con la definición 1.4.1.

Para comprobar que f es una relación tomemos a un $a \in f$ y comprobemos que a es una pareja ordenada. Como $a \in f$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a \in f_m$ y dado que f_m es función, tenemos que a es una pareja ordenada.

Ahora, dados $\langle x, y \rangle \in f$ y $\langle x, z \rangle \in f$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\langle x, y \rangle \in f_n$ y $\langle x, z \rangle \in f_k$. Sin perdida de generalidad supongamos que $n < k$, entonces $f_n \subsetneq f_k$ y $\langle x, y \rangle \in f_k$. Cómo f_k es función, tenemos $y = z$. Con esta característica de f y que f es una relación, tenemos que f es función.

Probaremos que $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ por doble contención.

($\subset$) Sea $x \in \text{dom}(f)$. Entonces existe y tal que $\langle x, y \rangle \in f$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ con $\langle x, y \rangle \in f_m$. De esta forma tenemos que $x \in \text{dom}(f_m)$ y dado que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{dom}(f_m) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, tenemos que $x < n$. Por lo tanto, $x \in \mathbb{N}$.

($\supset$) Sea $m \in \mathbb{N}$. Tomando otros $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ con $n < k$, tenemos que $f_n \subsetneq f_k$, por lo que $\text{dom}(f_n) \subsetneq \text{dom}(f_k)$. Como son números naturales, sucede que $\text{dom}(f_0) < \text{dom}(f_1) < \ldots < \text{dom}(f_i) < \ldots$. Por lo tanto, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $m < \text{dom}(f_i)$. Entonces $m \in \text{dom}(f_i)$ y $m \in \text{dom}(f)$.

Finalmente probemos que $\text{im}(f) \subset D$. Entonces, sea $y \in \text{im}(f)$. Esto implica que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$ por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x, y \rangle \in f_n$. Y dado que la $\text{im}(f_n) \subset D$, concluimos que $y \in D$. $\square$

Capítulo 2

El ordinal ω_1

2.1. Definición de ω_1 y sus propiedades básicas

Al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, un ejemplo de un conjunto no numerable, le podemos dar un buen orden gracias al axioma de elección. De esta forma podemos encontrar el mínimo segmento inicial en $\mathbb{R}$ que es no numerable.

A continuación daremos una axiomatización de las propiedades de orden de este segmento inicial, el ordinal ω_1.

2.1.1. Definición Dados un conjunto bien ordenado $\langle X, < \rangle$ y $A \subset X$. Si $x \in X$ es tal que cumple que $a < x$ para cualquier $a \in A$, diremos que x es **cota superior estricta** de A.

2.1.2. Axioma Suponemos la existencia de un conjunto bien ordenado $\langle \omega_1, \prec \rangle$, que cumple con las siguientes características:

I. Cualquier conjunto numerable contenido en ω_1 esta acotado estrictamente.

II. Todo segmento inicial propio de ω_1 es numerable.

Notemos algunas de las propiedades de este conjunto ordenado.

2.1.3. Teorema Las siguientes propiedades se cumplen en el conjunto bien ordenado $\langle \omega_1, \prec \rangle$ que definimos en 2.1.2:

a) El conjunto ω_1 no es numerable.

b) Todo elemento $\alpha \in \omega_1$ tiene un sucesor inmediato $\alpha + 1 \in \omega_1$.

c) Existe un segmento inicial de ω_1 isomorfo a los naturales. Sin pérdida de generalidad, tomaremos a este segmento inicial como los naturales, es decir, supondremos que $\mathbb{N} \subset \omega_1$. Denotamos a $\omega = \text{mín}[\omega_1 \setminus \mathbb{N}]$

d) Si $\alpha \in \omega_1$ es límite, entonces existe $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \omega_1$ con las siguientes propiedades:

   1) La sucesión es estrictamente creciente.

   2) El elemento límite α es el supremo de la sucesión.

e) Cualquier sucesión numerable en ω_1 tiene un supremo.

Demostración.

a) Por I tendríamos que existe $\alpha \in \omega_1$, cota superior estricta de ω_1, es decir $\alpha \notin \omega_1$, $\lightning$.

b) Sean $\alpha \in \omega_1$ y $A = \{\alpha_n \colon n \prec \omega\}$ tal que $\alpha_n = \alpha$ para cualquier $n \prec \omega$. Dado que A es un conjunto numerable, sabemos por I que existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha \prec \beta$ por lo que $\beta \in B = \{\gamma \in \omega_1 \colon \alpha \precneqq \gamma\}$. Entonces, por el buen orden tenemos que existe el $\text{mín}\, B$ que es precisamente el sucesor de α, es decir, $\text{mín}\, B = \alpha + 1$.

c) Sean $\theta = \text{mín}\, \omega_1$ y $f \colon \omega_1 \to \omega_1$ la función definida como $f(\beta) = \beta + 1$ para todo $\beta \in \omega_1$; nótese que f esta bien definida por el inciso b). Gracias al teorema de recursión, que se puede encontrar en [HG, teorema 0.2], sabemos que existe una función $g \colon \mathbb{N} \to \omega_1$ tal que $g(0) = \theta$ y $g(n+1) = f(g(n)) = g(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Ahora vamos a demostrar que dados $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$m < n \iff g(m) \prec g(n)$$

   ($\Rightarrow$) Como $m < n$, existe $k \in \mathbb{N}$, con $k \neq 0$, tal que $n = m + k$. Cuando $k = 1$ se cumple que $g(m) \prec g(n)$ porque $g(n) = g(m+1)$ es el sucesor de $g(m)$. Suponemos entonces que $k > 1$ y que $g(m) \prec g(n-1)$, que es nuestra hipótesis de inducción; ahora, como $g(n)$ es el sucesor de $g(n-1)$ obtenemos por transitividad que $g(m) \prec g(n)$ lo cual concluye la inducción sobre k.

   ($\Leftarrow$) Tenemos que $g(m) \prec g(n)$ y hay que probar que $m < n$. Supongamos lo contrario, que $m \not< n$, esto implicaría que $n \leq m$. Entonces, si $m = n$, $g(m) = g(n)$ lo cual es una contradicción y si $n < m$ obtendríamos que $g(n) \prec g(m)$ por el parrafo anterior, que igualmente es una contradicción. Por lo tanto, $m < n$.

   Esto también prueba que g es inyectiva, ya que cualquier función estrictamente creciente es inyectiva. Por lo que tenemos que $\mathbb{N}$ es isomorfo a su imagen en g.

Para concluir con la prueba de este inciso falta demostrar que $g[\mathbb{N}] \subset \omega_1$ es un segmento inicial.

Sean $\beta \in g[\mathbb{N}]$ y $\gamma \in \omega_1$ tales que $\gamma \prec \beta$, veamos que $\gamma \in g[\mathbb{N}]$. Notemos que como β pertenece a la imagen de g, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m) = \beta$. Por otro lado, si $\gamma = \theta$ entonces $g(0) = \gamma$ y γ está en la imagen de g, entonces supongamos que $\gamma \neq \alpha$ y sea $A = \{l \in \mathbb{N} \colon \gamma \prec g(l)\}$.
Dado que $m \in A$ sabemos que existe el $\min A = n$ por el buen orden de los naturales. Observemos que $n \neq 0$ pues $0 \notin A$ por lo que $n = k+1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $g(k) \preccurlyeq \gamma$ y debe ser que $g(k) = \gamma$ pues de otra forma existiría un elemento de ω_1 entre $g(k)$ y su sucesor, $g(k) \prec \gamma \prec g(k+1)$, lo cual es una contradicción a la definición de $g(k+1)$. Por lo tanto $\gamma \in g[\mathbb{N}]$.

Con esto concluimos que $g[\mathbb{N}] \subset \omega_1$ es un segmento inicial isomorfo a los naturales.

d) Sean $\alpha \in \omega_1$ límite y $B = \{\beta \in \omega_1 \colon \beta \prec \alpha\}$. Notemos que B es un segmento inicial de ω_1 y este es propio pues $\alpha \notin B$. Entonces, por II, podemos darle una enumeración a $B = \{\beta_n \colon n \prec \omega\}$.

   Ahora, sea $\alpha_0 = \beta_0$ y recursivamente sean $\alpha_{n+1} = \beta_{k(n)}$ para $n \prec \omega$, donde $k(n) = \min\{k \prec \omega \colon (\alpha_n \prec \beta_k) \wedge (\beta_n \prec \beta_k)\}$ la cual, está bien definida por b). Tomamos entonces a $A = \{\alpha_n \colon n \prec \omega\}$, el cual cumple que $\alpha_n \prec \alpha_{n+1}$ para cualquier $n \prec \omega$, esto por la definición de $k(n)$; por lo que A cumple 1).

   Ahora, dado que $A \subset B$, tenemos que α es una cota superior estricta de A. Si suponemos que existe $\beta \in \omega_1$ una cota superior de A tal que $\beta \prec \alpha$, entonces $\beta \in B$, por lo que existe $m \prec \omega$ tal que $\beta_m = \beta$ y $\beta \prec \alpha_{m+1}$. Esto implica que β no es cota superior de A, $\lightning$. Por lo tanto, $\sup A = \alpha$.

e) Sea $A = \{\alpha_n \colon n \prec \omega\} \subset \omega_1$, por I, existe $\alpha \in \omega_1$ cota superior estricta de A. Ahora, sea $B \subset \omega_1$ el conjunto de cotas superiores de A; como $\alpha \in B$ y por el buen orden de ω_1, existe $\min B = \sup A$.

$\square$

2.1.4. Corolario De c) obtenemos que $0 \in \omega_1$, pues $\mathbb{N}$ es segmento inicial de ω_1 y $0 = \min \mathbb{N}$.

2.1.5. Definición Dado $\alpha \in \omega_1$.

- Los segmentos iniciales de forma $\{\beta \in \omega_1 \colon \beta \prec \alpha\}$ los denotaremos como $\boldsymbol{[0, \alpha)}$.
- Al conjunto de cotas superiores de α lo denotamos como $\boldsymbol{[\alpha, \omega_1)} \subset \omega_1$.
- Al conjunto de cotas superiores estrictas de α lo denotamos como $\boldsymbol{(\alpha, \omega_1)} \subset \omega_1$.

2.1.6. Teorema Cualesquiera dos conjuntos bien ordenados que cumplen las propiedades 2.1.2 de ω_1, son isomorfos.

Demostración. Aplicando un conocido teorema de teoría de conjuntos [HG, teorema 5.15], sabemos cualesquiera dos conjuntos bien ordenados cumplen que; uno es isomorfo a un segmento inicial del otro o, son isomorfos entre sí.

Por lo tanto, por I del axioma 2.1.2 y a) del teorema 2.1.3, solo puede pasar que los conjuntos son isomorfos entre si. □

2.1.7. Corolario Para cualquier $A \subset \omega_1$ no numerable, A es isomorfo a ω_1.

Demostración. Sea $A \subset \omega_1$ tal que A es no numerable. Sabemos que A tiene un buen orden al ser un subconjunto de ω_1.

Primero veamos que A cumple I.

Sea $S \subset A$ un conjunto numerable. Como $S \subset \omega_1$, sabemos por I que existe $\alpha \in \omega_1$ cota superior estricta de S, por lo que $S \subset [0, \alpha)$. El conjunto $[0, \alpha)$ es un segmento inicial propio de ω_1 y por II sabemos que $[0, \alpha)$ es numerable. Ahora, como A es no numerable, se cumple que $A \not\subset [0, \alpha)$. Entonces, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \in A \setminus [0, \alpha)$. Notemos que $\alpha \preccurlyeq \beta$ y $\beta \in A$. Por lo tanto, β es una cota superior estricta de S contenida en A.

Ahora probemos que A cumple II.

Sean $\gamma \in A$ y $B = \{\zeta \in A \colon \zeta \prec \gamma\}$. Notemos que B segmento inicial propio de A y $B = A \cap [0, \gamma)$. Entonces, dado que $[0, \gamma)$ un segmento inicial propio de ω_1, por II tenemos que B es numerable.
De esta forma vemos que A cumple las propiedades 2.1.2 de ω_1 y por el teorema 2.1.6, A es isomorfo a ω_1. □

2.1.8. Corolario Dado $A \subset \omega_1$, A tiene exactamente una de las siguientes características:

- El conjunto A está acotado y es numerable.
- El conjunto A no está acotado y es biyectable con ω_1.

Demostración. Si A es acotado, sea $B \subset \omega_1$ el subconjunto de cotas superiores de A. El conjunto $[0, \min B) \subset \omega_1$ es un segmento inicial propio de ω_1 que contiene a A y por II, A es numerable
Si A es no acotado, significa que A es no numerable y por el corolario 2.1.7, A es isomorfo a ω_1. □

2.2. Conjuntos club y estacionarios

En este sección empezaremos definiendo unos subconjuntos de ω_1 conocidos como clubs para poder definir a los conjuntos estacionarios. Los conjuntos estacionarios y sus propiedades serán fundamentales en el siguiente capítulo. El teorema principal a demostrar en este capítulo es conocido como el lema de Fodor.

2.2.1. Definición Sea $C \subset \omega_1$, llamaremos a C un **club** si tiene las siguientes características:

- Si $A \subset C$ numerable y $A \neq \emptyset$, entonces $\sup A \in C$.
- Para cualquier $\alpha \in \omega_1$, existe $\beta \in C$ tal que $\alpha \prec \beta$.

La primer característica nos dice que los subconjuntos C son cerrados con la topología de orden, la cual no estudiaremos aquí pues su definición sale del tema principal de esta tesis; mientras que la segunda característica nos dice que C no está acotado en ω_1. Y es por esto que estos conjuntos son llamados club "closed unbounded" en inglés).

2.2.2. Ejemplos

a) ω_1 es un club por b) y por e) del teorema 2.1.3.

b) $A = \{\alpha \in \omega_1 \colon \alpha \text{ es límite}\}$ es un club
Sea $B = \{\alpha_m \colon m \prec \omega\} \subset A$, por e) del teorema 2.1.3, existe $\alpha = \sup B$. Si $\alpha \notin A$ existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha = \beta + 1$. Entonces β no es cota superior de B, por lo que existe $n \prec \omega$ tal que $\beta \prec \alpha_n$. Pero $\alpha_n \preccurlyeq \alpha$, así que $\alpha_n \in (\beta, \alpha]$. Entonces $\alpha = \alpha_n \in A$, $\lightning$. De esta forma $\alpha \in A$ y esto prueba que A es cerrado.
Ahora sea $\beta \in \omega$. Consideramos a $\beta_0 = \beta$ y $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ para cada $n \prec \omega$, entonces $\alpha = \sup\{\beta_n \colon n \prec \omega\} \in A$ y $\beta \prec \alpha$. Esto prueba que A es no acotado.

c) El conjunto de sucesores $A = \{\alpha + 1 \colon \alpha \in \omega_1\} \subset \omega_1$ no es club.
Sea $A_\omega = \{n + 1 \colon n \prec \omega\} \subset A$. Como $\sup A_\omega = \omega \notin A$, A no es cerrado.

d) Para cualquier $\alpha \in \omega_1$, $[\alpha, \omega_1)$ es un club.

Sea $\alpha \in \omega_1$. Por e) del teorema 2.1.3 tenemos que si $A \subset [\alpha, \omega_1)$ es numerable y $A \neq \emptyset$, $\sup A \in \omega_1$. Sea $\alpha_0 = \min A$. Como $\alpha \preccurlyeq \alpha_0$ y $\alpha_0 \preccurlyeq \sup A$, tenemos que $\alpha \preccurlyeq \sup A$. Entonces $\sup A \in [\alpha, \omega_1)$ y A es cerrado.
Por otro lado, dado que $\beta \in [\alpha, \omega_1)$, por b) del teorema 2.1.3 sabemos que existe $\beta + 1 \in [\alpha, \omega_1)$. Así, A no es acotado.

e) Dado $f\colon \omega_1 \to \omega_1$, el subconjunto $A = \{\alpha \in \omega_1 \colon f[0,\alpha) \subset [0,\alpha)\}$ es un club.

  - El subconjunto A es cerrado. Dado $B \subset A$ numerable y $B \neq \emptyset$, sea $\beta = \sup B \in \omega_1$. Dado $\alpha \in [0,\beta)$, como $\alpha \prec \beta$, existe $\gamma \in B$ con $\alpha \prec \gamma$. Como $\gamma \in A$, $f[0,\gamma) \subset [0,\gamma)$ y $f(\alpha) \in [0,\gamma)$. Como $\gamma \in B$, $\gamma \preccurlyeq \beta$. Entonces, $f(\alpha) \in [0,\beta)$ y por lo tanto $f[0,\beta) \subset [0,\beta)$.

  - El subconjunto A no es acotado. Sean $\alpha \in \omega_1$ y $\gamma_0 = \alpha + 1$. Dado que $f[0,\gamma_0)$ es numerable, existe $\gamma_1 = \sup f[0,\gamma_0) \in \omega_1$. Por inducción, supongamos que $\gamma_n \in \omega_1$ está definido. Como $f[0,\gamma_n)$ es numerable, podemos definir a $\gamma_{n+1} = \sup f[0,\gamma_n)$. Así, sea $\gamma = \sup\{\gamma_n \colon n \prec \omega\} \in \omega_1$.

    Dado $\beta \in [0,\gamma)$, existe $k \prec \omega$ tal que $\beta \in [0,\gamma_k)$. Como $f(\beta) \in f[0,\gamma_k) \subset [0,\gamma_{k+1}) \subset [0,\gamma)$, tenemos que $\beta \in [0,\gamma)$. Por lo tanto $\gamma \in A$ y $\alpha \prec \gamma_0 \preccurlyeq \gamma$.

f) El conjunto ω no es un club pues está acotado.

2.2.3. Teorema Dada una familia de clubs $\mathcal{A} = \{C_n \colon n \prec \omega\}$ su intersección $\bigcap \mathcal{A}$ también es un club.

Demostración. Sea $A \subset \bigcap \mathcal{A}$ numerable, con $A \neq \emptyset$. Como la $\bigcap \mathcal{A} \subset C_n$ para toda $n \prec \omega$, entonces $\sup A \in C_n$ para toda $n \prec \omega$. Así, el $\sup A \in \bigcap \mathcal{A}$ por lo que $\bigcap \mathcal{A}$ es cerrado.

Ahora, sea $\alpha \in \omega_1$. Vamos a encontrar $\gamma \in \bigcap \mathcal{A}$ tal que $\alpha \prec \gamma$.

Construiremos una sucesión en ω_1 de manera recursiva, para que dicho subconjunto esté contenido en el subconjunto de la cotas superiores de α.
Sea $\alpha_0 = \alpha$. Suponiendo que tenemos definido $\alpha_k \in \omega_1$ para algún $k \prec \omega$, escogemos un $\alpha(n,k) \in C_n \cap [\alpha_k, \omega_1)$ para cada $n \prec \omega$. Ahora sean $A_k = \{\alpha(n,k) \colon n \prec \omega\} \subset \omega_1$ y $\alpha_{k+1} = \sup A_k$. Notemos que α_{k+1} está bien definido por e) del teorema 2.1.3.

Hemos definido $C = \{\alpha_l \colon l \prec \omega\} \subset \omega_1$, una sucesión estrictamente creciente. Entonces, sean $\gamma = \sup C$, el cual está bien definido por e) de 2.1.3.

Veamos que para cada $n \prec \omega$ fija se cumple que el elemento $\gamma = \sup\{\alpha(n,k) \colon k \prec \omega\}$. Sea $B_n = \{\alpha(n,k) \colon k \prec \omega\} \subset C_n$ para cualquier $n \prec \omega$.

Primero, γ es cota superior pues $\alpha(n,k) \prec \alpha_{k+1}$ y $\alpha_{k+1} \preccurlyeq \gamma$ para cada $k \prec \omega$. Segundo, γ es la mínima cota superior pues de lo contrario, existiría $\beta \in \omega_1$ cota superior de B_n tal que $\beta \prec \gamma$. Por lo tanto existe $m \prec \omega$ tal que $\beta \prec \alpha_m$ y como $\alpha_m \prec \alpha(n, m+1)$, β no es cota superior, $\lightning$. Entonces para cada $n \prec \omega$, $\gamma = \sup B_n$, por lo que $\gamma \in C_n$. Así $\alpha \prec \gamma$ y $\gamma \in \bigcap \mathcal{A}$. $\square$

2.2.4. Corolario La intersección de un conjunto $\mathcal{A} = \{C_0, C_1 \dots, C_{n-1}\}$ de clubs para algún $n \prec \omega$, es un club.

Demostración. Sean $\mathcal{A} = \{C_0, C_1 \dots, C_{n-1}\}$ un conjunto de clubs finitos y $B = C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_{n-1} \cap C_m \dots \cap C_m \cap \dots$ donde $C_m = C_{n-1}$ para cualquier $m \prec \omega$. Por el teorema 2.2.3, B es un club y dado que $B \subset \bigcap_{k \prec n} C_k = \bigcap \mathcal{A}$, la intersección $\bigcap \mathcal{A}$ es un club. □

2.2.5. Ejemplos Si $\alpha \in \omega_1$, entonces $B = \{\beta \in \omega_1 \colon \alpha \leq \beta,\ \beta \text{ es límite}\}$ es un club.

El conjunto B de 2.2.5 es la intersección de dos de los clubs que dimos en los ejemplos 2.2.2 b) y 2.2.2 d). Por lo que, por el corolario 2.2.4, este también es un club.

2.2.6. Definición Le diremos a un conjunto $S \subset \omega_1$ **estacionario** si para cualquier club $C \subset \omega_1$ se cumple que $C \cap S \neq \emptyset$.

Gracias al corolario 2.2.4 y a que todo club es distinto del vacío, cualquier club es estacionario.

2.2.7. Teorema Dado $S \subset \omega_1$ un conjunto estacionario, existe una colección $\{S_\alpha \colon \alpha \in \omega_1\}$ de estacionarios ajenos a pares, con $S_\alpha \subset S$, para toda $\alpha \in \omega_1$.

Demostración. La siguiente familia la usaremos para probar nuestro teorema:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \omega_1 \colon S \setminus A \text{ no es estacionario}\}$$

Esta familia tiene las siguientes características:

1. Cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es biyectable con ω_1.
2. La intersección numerable de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$.

Es importante primero notar que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ porque $\omega_1 \in \mathcal{A}$. Si no fuese así tendríamos que $S \setminus \omega_1 = \emptyset$ es estacionario lo cual es falso.

Ahora probaremos 1 y 2.

1. Probaremos esta afirmación por contraposición. Sea $A \subset \omega_1$ tal que A no es biyectable con ω_1. Gracias al corolario 2.1.8, sabemos que existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $A \subset [0, \alpha)$. Dado C cualquier club contenido en ω_1, la intersección $D = C \cap [\alpha, \omega_1)$ es un club por el corolario 2.2.4. Por lo que $S \cap D \neq \emptyset$.
Tomando en cuenta la contención $[\alpha, \omega_1) \subset \omega_1 \setminus A$, tenemos que $S \cap D = S \cap (C \cap [\alpha, \omega_1)) \subset C \cap S \cap (\omega_1 \setminus A) = C \cap (S \setminus A)$. Entonces $C \cap (S \setminus A) \neq \emptyset$. Dado que C es un club arbitrario de ω_1, $S \setminus A$ es estacionario y $A \notin \mathcal{A}$.

2. Sea $\{A_n \colon n \prec \omega\} \subset \mathcal{A}$. Dado $n \prec \omega$, sea C_n un club de ω_1 tal que $C_n \cap (S \setminus A_n) = \emptyset$. Se cumple que $C = \bigcap_{n \prec \omega} C_n$ es un club por el teorema 2.10. Por la construcción de C tenemos que C es ajeno a la unión de los $S \setminus A_n$. Como $\bigcup_{n \prec \omega} S \setminus A_n = S \setminus \bigcap_{n \prec \omega} A_n$ se cumple que $C \cap (S \setminus \bigcap_{n \prec \omega} A_n) = \emptyset$. Por lo tanto $\bigcap_{n \prec \omega} A_n \in \mathcal{A}$.

Continuando con la demostración, definiremos unos subconjuntos de ω_1. Primero, para cada $\gamma \in \omega_1$, sea $f_\gamma \colon [0, \gamma) \to \omega$ inyectiva. Ahora, dados $n \prec \omega$ y $\alpha \in \omega_1$, definimos el siguiente conjunto:

$$A_\alpha^n = \{\gamma \in \omega_1 \colon (\gamma \in (\alpha, \omega_1)) \wedge (f_\gamma(\alpha) = n)\}$$

La colección $\{A_\alpha^n \colon \alpha \in \omega_1 \text{ y } n \prec \omega\}$ se llama **matriz de Ulam**. Ahora probemos que los elementos de $\mathcal{U}$ tienen las siguientes características:

a) Dados $n, \alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $n \prec \omega$ y $\alpha \neq \beta$, la intersección $A_\alpha^n \cap A_\beta^n = \emptyset$.

b) Dado $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \prec \omega} A_\alpha^n$ es numerable.

Suponiendo que no se cumple a), existe $\gamma \in \omega_1$ tal que $f_\gamma(\alpha) = f_\gamma(\beta)$ lo cual, por la inyectividad de f_γ, implica que $\alpha = \beta$, $\lightning$.
Para b) primero notemos que $\omega_1 \setminus (\alpha, \omega_1)$ es numerable pues $\omega_1 \setminus (\alpha, \omega_1) = [0, \alpha] = [0, \alpha + 1)$ el cual es un segmento inicial propio de ω_1. Entonces comprobamos b) demostrando que $\bigcup_{n \prec \omega} A_\alpha^n = (\alpha, \omega_1)$.
$\subset$) Sea $\beta \in (\alpha, \omega_1)$, entonces α esta en el dominio de f_β. Sea $m = f_\beta(\alpha)$, esto implica que $\beta \in A_\alpha^m$.
$\supset$) Cualquier elemento de $\bigcup_{n \prec \omega} A_\alpha^n$ pertenece a (α, ω_1).
Por lo tanto $\bigcup_{n \prec \omega} A_\alpha^n = (\alpha, \omega_1)$.

Si fijamos a $\alpha \in \omega_1$, la intersección $\bigcap_{n \prec \omega} (\omega_1 \setminus A_\alpha^n) = \omega_1 \setminus \bigcup_{n \prec \omega} A_\alpha^n$ es numerable por b), por lo que $\bigcap_{n \prec \omega} (\omega_1 \setminus A_\alpha^n) \notin \mathcal{A}$ por 1). Además, por ser una intersección numerable, podemos decir que existe $k \prec \omega$ tal que $\omega_1 \setminus A_\alpha^k \notin \mathcal{A}$ gracias a 2), lo que implica que $S \cap A_\alpha^k$ es estacionario.

Como el α que fijamos fue arbitrario, tenemos que para cada $\alpha \in \omega_1$ existe un $g(\alpha) \prec \omega$ tal que $S \cap A_\alpha^{g(\alpha)}$ es estacionario. Esto define una función $g \colon \omega_1 \to \omega$. Entonces sea $B_k = \{\alpha \in \omega_1 \colon g(\alpha) = k\}$. Es claro por lo que se dijo al principio de este párrafo que $\bigcup_{k \prec \omega} B_k = \omega_1$.

Por lo tanto, existe $m \prec \omega$ tal que B_m es no numerable y el conjunto $\{S \cap A_\alpha^m \colon \alpha \in B_m\}$ es un conjunto no numerable de estacionarios contenidos en S, todos ajenos entre sí por a).

$\square$

2.2.8. Ejemplos Por el teorema 2.2.7, encontramos una colección de ω_1 estacionarios que no son clubs ya que son ajenos por pares.

La intersección no numerable de clubs puede ser vacía. Por ejemplo la intersección $\bigcap_{\alpha\in\omega_1}[\alpha,\omega_1) = \emptyset$. Sin embargo, podemos definir algo parecido a la intersección no numerable que resulta ser un club.

2.2.9. Definición Sea $\{C_\alpha\colon \alpha\in\omega_1\}$ una colección de clubs de ω_1. La **intersección diagonal** de la colección se define de la siguiente manera:

$$\Delta_{\alpha\in\omega_1}C_\alpha = \{\alpha\in\omega_1\colon \forall\beta\prec\alpha(\alpha\in C_\beta)\}$$

2.2.10. Lema La intersección diagonal de una colección $\{C_\alpha\colon \alpha\in\omega_1\}$ de clubs es un club.

Demostración. Sea $C=\Delta_{\alpha\in\omega_1}C_\alpha$.

1. Primero veamos que C es cerrado. Sea $A\subset C$ numerable y $A\neq\emptyset$. Por e) del teorema 2.1.3, se cumple que $\lambda=\sup A\in\omega_1$. Tenemos que probar que $\lambda\in C$. Entonces, sean $\beta\in[0,\lambda)$ y $B_\beta=A\cap(\beta,\omega_1)$.

Afirmación 1. Para cada $\beta\prec\lambda$, $\sup B_\beta=\lambda$.

Primero notamos que $B_\beta\neq\emptyset$. De no ser así tendríamos que $\emptyset = A\cap(\beta,\omega_1) = A\setminus[0,\beta]$ así que $A\subset[0,\beta]$. Esto implica que β es cota superior de A y como $\beta\prec\lambda$, tenemos una $\lightning$.
Supongamos que existe $\eta\in\omega_1$ tal que η es cota superior de B_β y $\eta\prec\lambda$. Notamos que $A=(A\cap[0,\beta])\cup(A\cap(\beta,\omega_1)) = (A\cap[0,\beta])\cup B_\beta$. Sea $\kappa\in A\cap[0,\beta]$, entonces $\kappa\preccurlyeq\beta$. Como $\beta\prec\eta$, tenemos que $\kappa\prec\eta$. Por lo tanto, η es cota superior de $A\cap[0,\beta]$. Entonces, η seria cota superior de A, $\lightning$. Por lo tanto $\sup B_\beta=\lambda$, lo cual prueba la afirmación 1.

Ahora, sea $\alpha\in B_\beta$. Notemos que $\alpha\in C$, porque $B_\beta\subset A\subset C$, y $\beta\prec\alpha$. Esto implica que $\alpha\in C_\beta$, por lo tanto $B_\beta\subset C_\beta$. Como B_β es numerable y $\sup B_\beta=\lambda$, tenemos que $\lambda\in C_\beta$, pues C_β es un club. Esto ocurre para cualquier $\beta\in[0,\lambda)$, es decir: para todo $\beta\prec\lambda$, $\lambda\in C_\beta$. Entonces $\lambda\in C$. Por lo tanto, C es cerrado.

2. Ahora solo falta probar que C es no acotado. Dado $\gamma\in\omega_1$, hay que encontrar $\nu\in C$ tal que $\gamma\prec\nu$. Construiremos por recursión una sucesión de la siguiente manera.
Sea $\gamma_0=\gamma$. Dado $n\prec\omega$, supondremos por hipótesis de inducción que ya están construidos los γ_i con $i\in[0,n]$. Notemos que $\bigcap\{C_\zeta\colon \zeta\prec\gamma_n\}$ es un club, por el teorema 2.2.3. Entonces podemos tomar a $\gamma_{n+1}\in\bigcap\{C_\zeta\colon\zeta\prec\gamma_n\}$ tal que $\gamma_n\prec\gamma_{n+1}$. Con esto concluimos la construcción de los γ_n.

Afirmación 2. Para cualquier $m\prec\omega$ se cumple que

$$\{\gamma_k\colon m\prec k\}\subset\bigcap\{C_\zeta\colon\zeta\prec\gamma_m\}.$$

Sea $k \succ m$, entonces $m+1 \preccurlyeq k$ y así $m \preccurlyeq k-1$. Notemos que $\gamma_m \preccurlyeq \gamma_{k-1}$ pues la sucesión $\{\gamma_n \colon n \prec \omega\}$ es creciente. Por lo tanto $\bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_{k-1}\} \subset \bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_m\}$ y $\gamma_k \in \bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_{k-1}\}$ por construcción de los γ_n. Y así, $\gamma_k \in \bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_m\}$. Esto prueba la afirmación 2.

Sea $\nu = \sup\{\gamma_n \colon n \prec \omega\}$.

Afirmación 3. Para cualquier $l \prec \omega$, $\nu = \sup\{\gamma_k \colon l \prec k\}$.

Dado que la sucesión es creciente, tenemos que el supremo de la sucesión es igual al supremo de cualquier cola de la sucesión. Lo cual prueba la afirmación 3.

Finalmente comprobemos que dado $\kappa \prec \nu$, $\nu \in C_\kappa$. Como $\kappa \prec \nu$, existe $l \prec \omega$ tal que $\kappa \prec \gamma_l$. Entonces, por la afirmación 2 tenemos que $\{\gamma_k \colon l \prec k\} \subset \bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_l\}$ y como $\kappa \prec \gamma_l$, $\bigcap\{C_\zeta \colon \zeta \prec \gamma_l\} \subset C_\kappa$. Por lo tanto, $\{\gamma_k \colon l \prec k\} \subset C_\kappa$. Ahora, por la afirmación 3, sabemos que $\nu = \sup\{\gamma_k \colon l \prec k\}$ y dado que C_κ es cerrado, $\nu \in C_\kappa$.
De esta forma concluimos que $\gamma \prec \nu$ y que $\nu \in C$. $\square$

2.2.11. Definición Dado $S \subset \omega_1$, una función $f \colon S \to \omega_1$ es **regresiva** si para cualquier $\alpha \in S$ con $\alpha \neq 0$, $f(\alpha) \prec \alpha$.

Finalmente llegamos al teorema más importante sobre los estacionarios para esta tesis, el lema de Fodor.

2.2.12. Teorema (Lema de Fodor) Sean $S \subset \omega_1$ un estacionario y $f \colon S \to \omega_1$ una función regresiva. Entonces existe $\beta \in \omega_1$ tal que $f^{\leftarrow}(\beta)$ es estacionario.

Demostración. Probaremos este teorema por contradicción. Supongamos que para cada $\alpha \in \omega_1$, $A_\alpha = f^{\leftarrow}(\alpha)$ no es estacionario. Entonces existe $C_\alpha \subset \omega_1$ club con $C_\alpha \cap A_\alpha = \emptyset$. Ahora, sea $C = \Delta_{\alpha\in\omega_1} C_\alpha$. Notemos que C es un club por el lema 2.2.10, por lo que $C \cap S \neq \emptyset$. Entonces, sea $\beta \in C \cap S$. Dado que $f(\beta) \prec \beta$, $\beta \in C_{f(\beta)}$. Pero también $\beta \in f^{\leftarrow}(f(\beta)) = A_{f(\beta)}$. Por lo tanto $\beta \in C_{f(\beta)} \cap A_{f(\beta)}$, $\lightning$.

$\square$

Capítulo 3

Espacios de Baire

3.1. Definición y propiedades básicas

Los espacios de Baire son una generalización natural de los espacios métricos completos. También, el teorema de categoría de Baire es usado en varias aplicaciones. Para mayor información, consultar la referencia [KE].

3.1.1. Definición Sea X un espacio topológico. El espacio X es de Baire si para cualquier $\{U_n : n \prec \omega\} \subset X$, donde U_n es un abierto denso de X para toda $n \prec \omega$, $\bigcap\{U_n : n \prec \omega\}$ es denso.

La propiedad de ser un espacio de Baire es una propiedad topológica. A continuación veremos dos ejemplos de espacios de Baire.

En el siguiente teorema usaremos que todo espacio compacto Hausdorff es regular ([EN, teorema 3.1.9]).

3.1.2. Teorema Los espacios compactos Hausdorff son espacios de Baire.

Demostración. Sean X un espacio compacto Hausdorff y $\{U_n : n \prec \omega\} \subset X$ una colección de abiertos densos. Ahora tomemos a un $U \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ y probemos que interseca a $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$.

Por la densidad de U_0, se cumple que $U_0 \cap U \neq \emptyset$ y por la proposición 1.3.22 existe $V_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\overline{V_0} \subset U_0 \cap U$ pues este último también es abierto. De la misma manera, tomando a U_1, tenemos que $U_1 \cap V_0 \neq \emptyset$ y existe $V_1 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap V_0$. Podemos seguir recursivamente hasta obtener una colección de abiertos no vacíos $\{V_n : n \prec \omega\}$ tales que $\overline{V_0} \subset U_0 \cap U$ y $\overline{V_{n+1}} \subset U_{n+1} \cap V_n$ para todo $n \prec \omega$.

Notemos que para cualquier $n \prec \omega$ se cumple que $V_{n+1} \subset V_n$. Cuando una sucesión de conjuntos cumple esta propiedad se les conoce como conjuntos anidados.

Ahora notemos que los elementos de $\mathcal{V} = \{\overline{V_n} : n \prec \omega\}$ están igualmente anidados, por lo que dado $\{n_0, n_1, \ldots, n_k\} \subset \omega$ con $k \prec \omega$, $\bigcap_{i \preccurlyeq k} \overline{V_{n_i}} = \overline{V_m} \neq \emptyset$, donde $m = \text{mín}\{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$. A esta propiedad de la colección $\mathcal{V}$ se le conoce como propiedad de intersección finita. En un espacio compacto, cualquier colección de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía (ver [EN, 3.1.1]), por lo que se cumple que $\bigcap_{n \prec \omega} \overline{V_n} \neq \emptyset$.

Finalmente, como $\bigcap_{n \prec \omega} \overline{V_n} \subset \left(\bigcap_{n \prec \omega} U_n\right) \cap U$ y U era un abierto no vacío arbitrario, concluimos que $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$ es denso y por lo tanto, X un espacio de Baire. $\square$

Antes del siguiente teorema recordamos el siguiente hecho: dado un espacio métrico $\langle X, \delta \rangle$, si $r < s$, sucede que $\overline{B_\delta(x, r)} \subset B_\delta(x, s)$ para cualquier $x \in X$.

3.1.3. Teorema Los espacios métricos completos son de Baire.

Demostración. Sean $\langle X, \delta \rangle$ un espacio métrico completo y $\{U_n : n \prec \omega\} \subset X$ una colección de abiertos densos en topología generada por la métrica. Ahora tomemos a un $U \in \tau_\delta \setminus \emptyset$ y probemos que interseca a $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$ como lo hicimos en la prueba del teorema 3.1.2.

Tomando a U_0, se cumple que $U_0 \cap U \neq \emptyset$, por la densidad de U_0, y que $U_0 \cap U$ es un abierto. Entonces, sean $x_0 \in U_0 \cap U$ y $B_\delta(x_0, r_0) \subset U_0 \cap U$, definimos a $B_0 = B_\delta(x_0, \epsilon_0)$ donde $\epsilon_0 = \text{mín}\{r_0/2, 1/2\}$. Notemos que $\overline{B_0} \subset B_\delta(x_0, r_0)$.

De manera similar, tomando a U_1, tenemos que $U_1 \cap B_0 \in \tau_\delta \setminus \emptyset$. Entonces, sean $x_1 \in U_1 \cap B_0$ y $B_\delta(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B_0$, y definimos a $B_1 = B_\delta(x_1, \epsilon_1)$ donde $\epsilon_1 = \text{mín}\{r_1/2, 1/3\}$.

Siguiendo de manera recursiva, obtenemos una colección de abiertos básicos $\{B_n : n \prec \omega\}$, donde $B_n = B_\delta(x_n, \epsilon_n)$ y $\epsilon_n = \text{mín}\{r_n/2, 1/(n+2)\}$, tales que $\overline{B_0} \subset U_0 \cap U$ y $\overline{B_{n+1}} \subset U_{n+1} \cap B_n$ para todo $n \prec \omega$.

Notemos que $\{x_m : m \prec \omega\}$ es una sucesión numerable en X y probemos que es una sucesión de Cauchy. Así, dado $\epsilon \succ 0$, como $\text{lím}_{i \to \infty} \epsilon_i = 0$, existe $n \prec \omega$ tal que $\epsilon_n \prec \epsilon$. Entonces $B_n \subsetneq B_\delta(x_n, \epsilon)$ y como la subsucesión $\{x_k : n \preccurlyeq k \prec \omega\} \subset B_n$, sucede que $\delta(x_n, x_k) \prec \epsilon$ cuando $n \preccurlyeq k$. Por lo tanto la sucesión $\{x_m : m \prec \omega\}$ es una sucesión de Cauchy y, por la completitud de X, la sucesión converge a un punto $x \in X$.

Como vimos en el párrafo pasado, dado $k \prec \omega$, $\{x_m : k \preccurlyeq m \prec \omega\} \subset B_k$. Por lo que cualquier subsucesión de la sucesión $\{x_m : m \prec \omega\}$ converge a x. Por lo tanto $x \in \overline{B_m}$ para cualquier $m \prec \omega$ y $x \in \bigcap_{n \prec \omega} \overline{B_n} \subset \left(\bigcap_{n \prec \omega} U_n\right) \cap U$; y como U fue un abierto arbitrario, concluimos que $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$ es denso y por lo tanto X es un espacio de Baire. $\square$

El siguiente es un ejemplo de un espacio que no es de Baire.

3.1.4. Ejemplos El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ no es de Baire.

Demostración. Tomemos a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Dado $q \in \mathbb{Q}$, sea $U_q = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$. Como $\mathbb{Q}$ es Hausdorff, los puntos son cerrados así que el conjunto U_q es un abierto en $\mathbb{Q}$.

Para ver que U_q es denso hay que probar que $\overline{U_q} = \mathbb{Q}$. Para esto solo falta probar que $q \in \overline{U_q}$. Sea $V \in \tau_{\mathbb{Q}}$ tal que $q \in V$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset V$. Entonces $(a, b) \cap U_q \neq \emptyset$, que implica $V \cap U_q \neq \emptyset$. Entonces $q \in \overline{U_q}$ y $\overline{U_q} = \mathbb{Q}$.

Ahora, sea $\mathcal{U} = \{U_q : q \in \mathbb{Q}\}$. Como $\mathcal{U}$ es un conjunto numerable de abiertos densos y $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, tenemos que $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire. □

Ahora notemos un par de propiedades de los espacios de Baire.

3.1.5. Lema Sean X un espacio de Baire y $U \subset X$ un abierto. Entonces U es un espacio de Baire.

Demostración. Sea $\{U_n : n \prec \omega\}$ una colección de densos abiertos en U. Notemos que entonces U_n es abierto en X para todo $n \prec \omega$. Ahora, sea $V \subset U$ abierto no vacío en U, tenemos que probar que V interseca a $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$.

Dado $k \prec \omega$, tenemos que $U \subset \overline{U_k}$ y $\overline{U} \subset \overline{U_k}$; por lo que, para cualquier $n \prec \omega$, $U_n \cup (X \setminus \overline{U})$ es denso abierto en X pues $\overline{U} \cup (X \setminus \overline{U}) \subset \overline{U_n} \cup \overline{X \setminus \overline{U}} = \overline{U_n \cup (X \setminus \overline{U})}$. Entonces $\bigcap_{n \prec \omega} (U_n \cup (X \setminus \overline{U})) = \left(\bigcap_{n \prec \omega} U_n\right) \cup (X \setminus \overline{U})$ es denso en X.

Entonces, como V también es abierto en X, tenemos que

$$V \cap \bigcap_{n \prec \omega} (U_n \cup (X \setminus \overline{U})) \neq \emptyset$$

y como $V \subset U$, debe ser que $V \cap \left(\bigcap_{n \prec \omega} U_n\right) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\bigcap_{n \prec \omega} U_n$ es denso en U y U es un espacio de Baire. □

3.1.6. Lema Sea X un espacio topológico. Si existe $A \subset X$ tal que A es denso y de Baire, entonces X es un espacio de Baire.

Demostración. Sea $\{U_n : n \prec \omega\} \subset X$ una colección de abiertos densos.

Para cada $n \prec \omega$ sea $V_n = U_n \cap A$. Estos conjuntos son abiertos en A por definición y son no vacíos por la densidad de A; además, por el lema 1.3.11, son densos en A pues $A \subset \overline{V}_n$ para cualquier $n \prec \omega$. De esta forma, tenemos que $\bigcap_{n \prec \omega} V_n$ es denso en A.

Debido al conocido hecho de que un denso dentro de un denso, es denso en todo el espacio, tenemos que $\bigcap_{n\prec\omega} V_n$ es denso en X; y dado que $\bigcap_{n\prec\omega} V_n \subset \bigcap_{n\prec\omega} U_n$, $\bigcap_{n\prec\omega} U_n$ es denso en X. $\square$

3.1.7. Ejemplos Existe un espacio de Baire X con $F \subset X$ cerrado tal que F no es de Baire.

Demostración. Sean $\Pi^+ = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$ y $F = \{\langle q, 0\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon q \in \mathbb{Q}\}$. Tomemos a $X = \Pi^+ \cup F$. Dado que $\overline{\Pi^+} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$, tenemos que $\Pi^+ \cup F \subset \overline{\Pi^+}$, por lo que Π^+ es denso de X.

Por otro lado, sabemos que $\mathbb{R}^2$ es métrico completo y por el teorema 3.1.3, $\mathbb{R}^2$ es de Baire. Como vimos al final de la sección 1.3, $\mathbb{R}^2 \approx \Pi^+$. Por lo tanto, Π^+ es de Baire.

De esta forma, por el lema 3.1.6 tenemos que X es un espacio de Baire. Además F es un cerrado de X que no es de Baire pues $F \approx \mathbb{Q}$. $\square$

3.2. Productos de espacios de Baire

Existen propiedades que se preservan bajo productos, por ejemplo, la compacidad se preserva bajo productos arbitrarios ([EN, teorema 3.2.4]). Mientras que la propiedad de ser completamente metrizable se preserva bajo productos numerables ([EN, teorema 4.3.12]).

Veamos un caso en el que la propiedad de espacio de Baire se preserva bajo el producto de un par de conjuntos de Baire. Para la prueba del siguiente teorema, usamos la sugerencia que aparece en el ejercicio 3.9.J.(c) de [EN].

Antes de esto notemos algo que usaremos en la prueba. La i-ésima proyección π_i de cualquier producto cartesiano manda abiertos en abiertos. Y esto es cierto porque la i-ésima proyección de cualquier abierto básico del producto es un abierto en la i-ésima entrada, lo cual es cierto por la forma de los abiertos básicos del producto cartesiano.

3.2.1. Teorema Dados dos espacios de Baire X y Y, el espacio $X \times Y$ con la topología producto es de Baire si uno de los dos espacios es segundo numerable.

Demostración. Sea G_n un denso abierto de $X \times Y$ para toda $n \prec \omega$. Dado W un abierto no vacío de $X \times Y$, tenemos que probar que $W \cap \left(\bigcap_{n\prec\omega} G_n\right) \neq \emptyset$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que Y es segundo numerable y sea $\mathcal{B}$ una base numerable de Y.

Afirmación 1. Dados $n \prec \omega$ y $B \in \mathcal{B}$, la proyección $\pi_X[G_n \cap (X \times B)]$ es denso abierto en X.

Que $\pi_X[G_n \cap (X \times B)]$ es abierto se obtiene de que $G_n \cap (X \times B)$ es abierto en $X \times Y$ y de que la proyección en X manda abiertos en abiertos.

Para probar que $\pi_X[G_n \cap (X \times B)]$ es denso, tomemos un $U \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ y probemos que $\pi_X[G_n \cap (X \times B)] \cap U \neq \emptyset$.

Como $U \times B \in \tau_{X\times Y} \setminus \{\emptyset\}$ sucede que $G_n \cap (U \times B) \neq \emptyset$, así que tomamos a un $\langle x, y\rangle \in G_n \cap (U \times B)$. Por lo que $x \in \pi_X[G_n \cap (U \times B)]$ y como $\pi_X[G_n \cap (U \times B)] \subset \pi_X[G_n \cap (X \times B)]$, $x \in \pi_X[G_n \cap (X \times B)] \cap U$. $\square$

Sea $D = \bigcap\{\pi_X[G_n \cap (X \times B)] \colon n \prec \omega, B \in \mathcal{B}\}$. Por la afirmación 1, D es intersección de una cantidad numerable de densos abiertos. Como X es espacio de Baire, D es denso.

Afirmación 2. Dados $x \in D$ y $k \prec \omega$, el conjunto $H_{x,k} = \{y \in Y \colon \langle x, y\rangle \in G_k\}$ es denso abierto de Y.

Primero probemos que $H_{x,k}$ es abierto en Y encontrando un abierto dentro de $H_{x,k}$. Empecemos tomando a un $y \in H_{x,k}$, entonces $\langle x, y\rangle \in G_k$ y dado que G_k es abierto en la topología producto, existe un abierto básico $U \times V$ con $\langle x, y\rangle \in U \times V \subset G_k$. Ahora vamos a probar que $V \subset H_{x,k}$. Sea $z \in V$, entonces $\langle x, z\rangle \in U \times V \subset G_k$ por lo tanto $z \in H_{x,k}$ y $V \subset H_{x,k}$.

Ahora solo falta probar que $H_{x,k}$ es denso en Y. Como lo hemos hecho antes, tomaremos un $V' \in \tau_Y \setminus \emptyset$ y probaremos que $V' \cap H_{x,k} \neq \emptyset$.

Dado que V' es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V'$ y como $x \in \pi_X[G_k \cap (X \times B)]$ tenemos que $x \in \pi_X[G_k \cap (X \times V')]$. Entonces existe $y' \in V$ tal que $\langle x, y'\rangle \in G_k \cap (X \times V')$ por lo que $y' \in H_{x,k}$ y $V' \cap H_{x,k} \neq \emptyset$. $\square$

Para concluir, como W es abierto en $X \times Y$, existen $U \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ y $V \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tales que $W = U \times V$. Como D es denso en X, existe $p \in U \cap D$. Como $\{H_{p,n} \colon n \prec \omega\}$ son densos abiertos en Y y Y es de Baire, existe $q \in V \cap \left(\bigcap_{n\prec\omega} H_{p,n}\right)$. Dado que $\{p\} \times H_{p,n} \subset G_n$ para cualquier $n \prec \omega$, sucede que $\{p\} \times \bigcap_{n\prec\omega} H_{p,n} \subset \bigcap_{n\prec\omega} G_n$. Por lo tanto $\langle p, q\rangle \in W \cap \left(\bigcap_{n\prec\omega} G_n\right)$.

$\square$

Después de analizar un poco a los espacios de Baire, podríamos hacernos la siguiente pregunta, ¿es el producto de dos espacios de Baire también de Baire? La respuesta a esta pregunta es que no, este sera el teorema principal de la tesina.

3.2.2. Teorema (P. E. Cohen) Existen espacios X, Y metrizables de Baire tales que $X \times Y$ no es de Baire.

El teorema de Cohen y su demostración original puede consultarse en [CO].

Notemos que los espacios del teorema 3.2.2 no pueden ser segundo numerables por el teorema 3.2.1 La prueba del teorema 3.2.2 será la conclusión de este capítulo. Nosotros daremos una prueba de Ken Kunnen y William G. Fleissner [FK]. En el articulo [FL] viene un resumen de [FK]. También se consultó la presentación [AA].

Capítulo 4

Dos espacios métricos de Baire cuyo producto no es de Baire

De forma análoga a la definición 1.4.4, definimos a $\mathbb{B} = \omega_1^\omega$ con la topología producto, donde ω_1 es discreto. Para esta parte, definiremos subespacios de $\mathbb{B}$ usando conjuntos estacionarios. Se va a probar que existen dichos subespacios que son espacios de Baire, cuyo producto no es de Baire. Al final de esta sección encontraremos la prueba del teorema 3.2.2, la cual será una consecuencia de un par de proposiciones desarrolladas en esta misma sección.

4.0.1. Definición

a) Si $\phi\colon \omega \to \omega_1$, definimos a $\phi^* = \sup\{\phi(n)\colon n \prec \omega\}$.

b) Si $A \subset \omega_1$, definimos a $A^* = \{\phi \in \mathbb{B}\colon \phi^* \in A\}$.

4.0.2. Ejemplos

- El conjunto $\omega_1^* = \mathbb{B}$. Dado que $\mathbb{B}$ es el conjunto de todas las sucesiones numerables de ω_1, por 2.3.e) obtenemos la igualdad.
- El conjunto $\emptyset^* = \emptyset$. Esto se cumple por vacuidad.

4.0.3. Definición Sea $f \in \omega_1^n$ donde $n \prec \omega$.

- Dado $g \in \omega_1^m$, donde $m \prec \omega$, definimos la **concatenación** de f y g como: $f^\frown g = \langle f_0, \ldots, f_{n-1}, g_0, \ldots, g_{m-1}\rangle \in \omega_1^{n+m} \subset \omega_1^{<\omega}$.

- Para $\phi \in \mathbb{B}$, la **concatenación** de f y ϕ es:

$$f^\frown\phi = \langle f_0, \dots, f_{n-1}, \phi_0, \dots, \phi_k, \dots \rangle \in \mathbb{B}.$$

4.0.4. Lema Si $A \subset \omega_1$ es no acotado, A^* es denso en $\mathbb{B}$.

Demostración. Sea $f = \langle f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \rangle \in \omega_1^{<\omega}$ una sucesión finita de ω_1. Dado que A es no acotado, existe $\alpha \in A$ tal que $\text{máx}\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\} \prec \alpha$. De esta forma, definimos $\phi = f^\frown\langle \alpha, \alpha, \dots \rangle \in \mathbb{B}$. Como $\phi^* = \alpha$, entonces $\phi \in A^* \cap \langle f \rangle$. Por lo tanto A^* es denso en $\mathbb{B}$. $\square$

4.0.5. Proposición Si $A, B \subset \omega_1$ son no acotados y ajenos, $A^* \times B^*$ no es de Baire.

Demostración. Para cada $n \prec \omega$, definimos a:

$$D_n = \{\langle \phi, \psi \rangle \in A^* \times B^* \colon \text{máx}\{\phi(n), \psi(n)\} \prec \text{mín}\{\phi^*, \psi^*\}\}$$

Afirmación 1. D_n es abierto en $A^* \times B^*$.

Sea $\langle \phi, \psi \rangle \in D_n$. Dado que $\text{mín}\{\phi^*, \psi^*\} \preccurlyeq \phi^*$ y $\text{mín}\{\phi^*, \psi^*\} \preccurlyeq \psi^*$ tenemos que existen $k, l \prec \omega$ tales que $\text{máx}\{\phi(n), \psi(n)\} \prec \phi(k)$ y $\text{máx}\{\phi(n), \psi(n)\} \prec \psi(l)$. De esta forma, sean $m = \text{máx}\{n+1, k+1, l+1\}$, $f = \phi\restriction_m$ y $g = \psi\restriction_m$.

Así, $\langle \phi, \psi \rangle \in (\langle f \rangle \cap A^*) \times (\langle g \rangle \cap B^*) = U$ y como U es un abierto en $A^* \times B^*$, solo haría falta probar que $U \subset D_n$ para comprobar que D_n es abierto.

Sea $\langle \theta, \lambda \rangle \in U$, como $\langle \theta, \lambda \rangle \in \langle f \rangle \times \langle g \rangle$, $\langle f \rangle \subset \theta$ y $\langle g \rangle \subset \lambda$. Como $\theta(k) \in \langle f \rangle$ y $\lambda(l) \in \langle g \rangle$, se cumple que $\theta(k) \preccurlyeq \theta^*$ y $\lambda(l) \preccurlyeq \lambda^*$. Dado que $\text{máx}\{\theta(n), \lambda(n)\} \prec \theta(k)$ y $\text{máx}\{\theta(n), \lambda(n)\} \prec \lambda(l)$, obtenemos que $\text{máx}\{\theta(n), \lambda(n)\} \prec \text{mín}\{\theta^*, \lambda^*\}$. Por lo tanto $\langle \theta, \lambda \rangle \in D_n$. $\square$

Afirmación 2. D_n es denso en $A^* \times B^*$.

Para probar que D_n es denso, bastará probar que $U \cap D_n \neq \emptyset$ para cualquier abierto no vacío U. Podemos suponer que $U = (\langle f \rangle \cap A^*) \times (\langle g \rangle \cap B^*)$, donde $f \in \omega_1^m$, $g \in \omega_1^k$ y $m, k \prec \omega$. Entonces, sea $\langle \phi, \psi \rangle \in (\langle f \rangle \cap A^*) \times (\langle g \rangle \cap B^*)$ y tomemos a $p = \text{máx}\{n+1, m\}$ y a $q = \text{máx}\{n+1, k\}$.

Si $X \in \{A, B\}$, definimos a $\xi_X = \text{mín}\{\alpha \in X \colon \text{máx}\{\text{máx}(\phi\restriction_p), \text{máx}(\psi\restriction_q)\} \prec \alpha\}$, que existe ya que X es no acotado. Entonces, sean $\sigma_A = (\phi\restriction_p)^\frown\langle \xi_A, \xi_A, \dots \rangle \in \mathbb{B}$ y $\sigma_B = (\psi\restriction_q)^\frown\langle \xi_B, \xi_B, \dots \rangle \in \mathbb{B}$. Dado que $(\sigma_A)^* = \xi_A$ y $(\sigma_B)^* = \xi_B$, tenemos que $\langle \sigma_A, \sigma_B \rangle \in (U \cap D_n)$ y D_n es denso. $\square$

Ahora supongamos que existe un $\langle \theta, \lambda \rangle \in \bigcap_{n \prec \omega} D_n$.

Notemos que $\theta(n) \preccurlyeq$ máx $\{\theta(n), \lambda(n)\}$ y $\lambda(n) \preccurlyeq$ máx $\{\theta(n), \lambda(n)\}$ para cada $n \prec \omega$. Por lo que $\theta(n) \prec$ mín $\{\theta^*, \lambda^*\}$ y $\lambda(n) \prec$ mín $\{\theta^*, \lambda^*\}$ para toda $n \prec \omega$. Esto implica que $\theta^* \prec$ mín $\{\theta^*, \lambda^*\}$ y $\lambda^* \prec$ mín $\{\theta^*, \lambda^*\}$. Pero como mín $\{\theta^*, \lambda^*\} \preccurlyeq \theta^*$ y mín $\{\theta^*, \lambda^*\} \preccurlyeq \lambda^*$ tenemos que $\theta^* =$ mín $\{\theta^*, \lambda^*\} = \lambda^* \in A \cap B$, $\lightning$. Por lo tanto $A^* \times B^*$ no es de Baire.

□

4.0.6. Definición Sea $D \subset \mathbb{B}$ un denso abierto. Una función $\delta \colon \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$ es **D - compatible** si para cualquier $f \in \omega_1^{<\omega}$ se cumple que $f \subset \delta(f)$ y $\langle \delta(f) \rangle \subset \langle f \rangle \cap D$.

4.0.7. Lema Sea $D \subset \mathbb{B}$ un denso abierto. Existe $\delta \colon \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$ que es D - compatible.

Demostración. Consideremos un elemento $f \in \omega_1^n$ para algún $n \prec \omega$. Sea $U = \langle f \rangle \cap D$, notemos que existe $\phi \in U$ pues D es denso. Además U es abierto pues D y $\langle f \rangle$ son abiertos, por lo que existe $g \in \omega_1^k$ con $k \prec \omega$, tal que $\phi \in \langle g \rangle \subset U$. Notemos que $g = \phi \restriction_k$. Ahora, sean $m =$ máx $\{n, k\}$ y $\delta(f) = \phi \restriction_m$. Entonces $f \subset \delta(f) = \phi \restriction_m$ y $\langle \delta(f) \rangle \subset \langle g \rangle \subset \langle f \rangle \cap D$. □

4.0.8. Definición Sea $\delta \colon \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$. Diremos que un $\gamma \in \omega_1$ es **punto fijo** de δ si $\delta[\gamma^{<\omega}] \subset \gamma^{<\omega}$.

4.0.9. Proposición Para cualquier $\delta \colon \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$, es un club el conjunto

$$C_\delta = \{\alpha \in \omega_1 \colon \alpha \text{ es punto fijo de } \delta\}.$$

Demostración.

- El conjunto C_δ es cerrado. Sea $A \subset C_\delta$ numerable y $A \neq \emptyset$. Sea $\alpha = \sup A \in \omega_1$. Si $\alpha \in A$, $\alpha \in C_\delta$, entonces supongamos que $\alpha \notin A$.

  Sea $f \in \alpha^{<\omega}$. Entonces $f \in \alpha^n$ para algún $n \prec \omega$, por lo que $f = \langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle \in \alpha^n$.

  Así, existe $\beta \in A$ tal que máx $\{f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\} \prec \beta \prec \alpha$. Por lo tanto $f \in \beta^{<\omega}$ y como β es punto fijo de δ, $\delta(f) \in \beta^{<\omega} \subset \alpha^{<\omega}$. Con esto probamos que $\delta[\alpha^{<\omega}] \subset \alpha^{<\omega}$. Por lo tanto $\alpha \in C_\delta$.

- El conjunto C_δ no está acotado en ω_1.

  Dado $\alpha \in \omega_1$, sean $A_\alpha = \{\text{máx}\,(\delta(f)) \colon f \in \alpha^{<\omega}\} \subset \omega_1$ y $h \colon \omega_1 \to \omega_1$ la función tal que $h(\alpha) = \sup\{\text{máx}\,(\delta(f)) \colon f \in \alpha^{<\omega}\} \in \omega_1$. Como $A_\alpha \subset \omega_1$ es numerable, h está bien definida.

Sea $C = \{\alpha \in \omega_1 \colon h[0,\alpha) \subset [0,\alpha)\} \cap \{\alpha \in \omega_1 \colon \alpha \text{ es límite}\}$. Como el subconjunto C es la intersección de conjuntos como los de los ejemplos b y e de 2.2.2, C es un club.

Si comprobamos que $C \subset C_\delta$, probaremos que C_δ no es acotado.

Sea $\zeta \in C$. Para probar que $\zeta \in C_\delta$, se debe cumplir que para cualquier $f \in \zeta^{<\omega}$, $\delta(f) \in \zeta^{<\omega}$. Entonces, sea $m \prec \omega$ con $f \in \zeta^m$. Dado que ζ es límite, tenemos que $\gamma = \text{máx}\,\{f(k) \colon k \prec m\} \prec \zeta$.

Tomemos a $\epsilon = \gamma + 1$. Dado que ζ es límite y $\gamma \prec \zeta$, tenemos que $\epsilon \prec \zeta$ y $f \in \epsilon^{\prec\omega}$.

Notemos que $\text{máx}\,(\delta(f)) \preccurlyeq \sup\{\text{máx}\,\{\delta(g) \colon g \in \epsilon^{<\omega}\}\} = h(\epsilon)$. Dado que $\epsilon \prec \zeta$, tenemos que $h(\epsilon) \prec \zeta$. Por lo tanto $\delta(f) \in \zeta^{<\omega}$ y $\zeta \in C_\delta$.

□

4.0.10. Proposición Dado $A \subset \omega_1$ estacionario, A^* es de Baire.

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{D'_n \colon n \prec \omega\}$ una familia de densos abiertos en A^*.

Vamos a probar que $\bigcap \mathcal{D} \cap U \neq \emptyset$ con U cualquier abierto no vacio en A^*.

Podemos suponer que U es un abierto básico en A^*. Entonces, existe $f \in \omega_1^{<\omega}$ tal que $U = \langle f \rangle \cap A^*$, pues $\langle f \rangle$ es un abierto básico de $\mathbb{B}$. Como $f \in \omega_1^{<\omega}$, existe $m \prec \omega$ tal que $f \in \omega_1^m$.

Para cada $n \prec \omega$ existe D_n un abierto en $\mathbb{B}$ tal que $D'_n = D_n \cap A^*$. Por el lema 4.0.4, tenemos que A^* es denso en $\mathbb{B}$, por lo que D'_n es denso en $\mathbb{B}$. Entonces, como $D'_n \subset D_n$, D_n también es denso en $\mathbb{B}$.

Gracias a que D_n es denso abierto, D_n induce una función $\delta_n \colon \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$ que es D - compatible. Entonces, para cualquier $g \in \omega_1^{<\omega}$, $\langle \delta_n(g) \rangle \subset \langle g \rangle \cap D_n$.

Por otro lado, sean $C_n = \{\alpha \in \omega_1 \colon \alpha \text{ es punto fijo de } \delta_n\}$ para cada $n \prec \omega$ y $C = \bigcap_{n \prec \omega} C_n$. Notemos que C es un club.

Tomemos

$$\gamma \in ([\text{máx}\,\{f(n) \colon n \prec m\} + 1, \omega_1) \cap \{\alpha \in \omega_1 \colon \alpha \text{ es límite}\} \cap C) \cap A.$$

Como γ es límite, existe $G = \{\gamma_n \colon n \prec \omega\} \subset \omega_1$ tal que $\sup G = \gamma$.

Ahora, sea $f_0 = f$. Suponiendo que tenemos $f_k \in \omega_1^{<\omega}$ para algún $k \prec \omega$, definimos de manera inductiva $f_{k+1} = \delta_k(f_k)^\frown \gamma_k$.

Afirmación 1. $f_k \subsetneq f_{k+1}$ para cualquier $k \prec \omega$.

Dado que δ_k es D - compatible, tenemos que $f_k \subset \delta_k(f) \subsetneq f_{k+1}$.

Afirmación 2. $f_k \in \gamma^{<\omega}$ para cualquier $k \prec \omega$.

La función $f_0 = f \in \gamma^{<\omega}$, ya que $\max\{f(n) \colon n \prec m\} \prec \gamma$. Suponiendo que $f_k \in \gamma^{<\omega}$, como γ es punto fijo de δ_k, $\delta_k(f_k) \in \gamma^{<\omega}$. Y, dado que $\gamma_k \prec \gamma$, $f_{k+1} = \delta_k(f_k)^\frown\gamma_k \in \gamma^{<\omega}$.

Sea $\phi = \bigcup_{k\prec\omega} f_k$. De las afirmaciones 1 y 2, y el lema 1.4.10, ϕ es una función tal que el $\operatorname{dom}(\phi) = \omega$ y la $\operatorname{im}(\phi) \subset [0,\gamma)$. Entonces $\phi \in \gamma^{<\omega} \subset \mathbb{B}$.

Primero veamos que $\phi \in \bigcap_{k\prec\omega} D_k \cap \langle f\rangle$.

Sea $k \prec \omega$. Como $\delta_k(f_k) \subset f_{k+1} \subset \phi$, $\phi \in \langle\delta_k(f_k)\rangle$. Puesto que δ_k es D - compatible, $\phi \in D_k$. Si $k = 0$, $f_k = f$. Más aún, como $\phi \in \langle\delta_0(f_0)\rangle$ y δ_0 es D - compatible, tenemos que $\phi \in \langle f\rangle$. Por lo tanto, $\phi \in \bigcap_{k\prec\omega} D_k \cap \langle f\rangle$.

Ahora veamos que $\phi^* = \gamma \in A$ y por lo tanto, $\phi \in A^*$.

Como $\phi \in \gamma^{<\omega}$, tenemos que $\phi^* \preccurlyeq \gamma$. Por otro lado, para cualquier $k \prec \omega$, $\gamma_k \in \operatorname{im}(f_{k+1})$. Por lo que $\gamma_k \in \operatorname{im}(\phi)$ y dado que $\gamma = \sup\{\gamma_k \colon k \prec \omega\}$, $\gamma \preccurlyeq \phi^*$. Entonces $\phi^* = \gamma$.

De esta forma concluimos que $\phi \in \bigcap_{k\prec\omega} D_k \cap \langle f\rangle \cap A^* = \bigcap_{k\prec\omega}(D_k \cap A^*) \cap \langle f\rangle = \bigcap \mathcal{D} \cap U_f$.

$\square$

Estamos listos para demostrar el teorema 3.2.2, el objetivo principal de este trabajo.

Prueba del teorema 3.2.2. Sean A y B estacionarios ajenos de ω_1. Notemos que tanto A^* como B^* son subconjuntos del espacio métrico $\mathbb{B}$, por lo tanto A^* y B^* son espacios métricos. Más aún, por la proposición 4.0.10, A^* y B^* son espacios de Baire. Y finalmente, por la proposición 4.0.5 $A^* \times B^*$ no es de Baire. $\square$

Ahora veamos un ejemplo de un espacio de Baire cuyo producto consigo mismo ya no es espacio de Baire.

4.0.11. Ejemplos Existe un espacio métrico de Baire X tal que X^2 no es de Baire.

Sean X y Y, espacios métricos de Baire tales que $X \times Y$ no es de Baire. Consideramos la suma ajena $X \oplus Y$, que describimos a continuación.

Dado cualquier espacio topológico Z e $i \in \{0,1\}$, la proyección $\pi_0 \colon Z \times \{i\} \to Z$ es un homeomorfismo. Entonces, dado que $X \approx X \times \{0\}$, $Y \approx Y \times \{1\}$ y $(X \times \{0\}) \cap (Y \times \{1\}) = \emptyset$, podemos suponer que $X \cap Y = \emptyset$. De esta manera, podemos definir a $X \oplus Y$ como la unión $X \cup Y$, donde $U \subset X \oplus Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y.

Ahora demostremos que $X \oplus Y$ es de Baire. Sea $\{U_n : n \prec \omega\} \subset X \oplus Y$ una colección de abiertos densos. Dado $n \prec \omega$, $U_n \cap X$ y $U_n \cap Y$ son abiertos densos, por el lema 1.3.11, en X y Y respectivamente. Como X y Y son espacios de Baire, $\bigcap_{n \prec \omega}(U_n \cap X)$ y $\bigcap_{n \prec \omega}(U_n \cap Y)$ son densos en X y Y respectivamente. Por lo tanto, $\bigcap\{U_n : n \prec \omega\}$ es denso en $X \oplus Y$ y $X \oplus Y$ es un espacio de Baire.

Notemos que, dado que X y Y son espacios métricos, la suma ajena $X \oplus Y$ también es un espacio métrico [EN, theorem 4.2.1].

Usando el ejercicio [EN, Exercise 2.3.A], tenemos que:

$$(X \oplus Y) \times (X \oplus Y) = (X \times X) \cup (X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (Y \times Y)$$

entonces $(X \oplus Y)^2$ tiene al menos un subconjunto abierto que no es espacio de Baire y por el lema 3.1.5, $(X \oplus Y)^2$ no es espacio de Baire.

□

Observemos que la existencia de un espacio con las características del ejemplo 4.0.11 nos brinda otro ejemplo de espacio que es de Baire pero no es ni métrico completo ni compacto Haudorff ya que estas dos últimas propiedades se preservan bajo productos numerables.

Capítulo 5

Espacios definidos con juegos

En este capítulo veremos el juego topológico de Choquet, con el cual podremos crear nuevos espacios que también son espacios de Baire y cuyo producto cartesiano mantiene su propiedad. La mayoría del contenido de este capítulo se obtuvo de [KE].

5.1. Espacios de Choquet

5.1.1. Definición Sea X un espacio topológico. El **juego de Choquet** en X, que denotamos como C_X, es un juego de ω turnos donde dos jugadores, que llamaremos Alicia y Beto, deberán escoger subconjuntos de X de la siguiente manera:

- En el turno 0, Alicia debe tomar algún abierto no vacío U_0; después de esto, Beto debe tomar un abierto no vacío $V_0 \subset U_0$.
- En el turno $n+1$, Alicia debe escoger un abierto no vacío $U_{n+1} \subset V_n$; después de esto, Beto debe escoger un abierto no vacío $V_{n+1} \subset U_{n+1}$.

Diremos que Beto gana el juego si se cumple que $\bigcap_{n \prec \omega} V_n \neq \emptyset$, de otra forma el juego lo ganará Alicia.

Notemos que en el juego de Choquet se cumple que $\bigcap_{n \prec \omega} U_n = \bigcap_{n \prec \omega} V_n$. Como $V_n \subset U_n$ para cualquier $n \prec \omega$ se tiene la contención $\bigcap_{n \prec \omega} U_n \supset \bigcap_{n \prec \omega} V_n$. Como $U_{n+1} \subset V_n$, entonces

$$\bigcap_{n \prec \omega} U_n \subset \bigcap_{1 \preccurlyeq n \prec \omega} U_n = \bigcap_{i \prec \omega} U_{i+1} \subset \bigcap_{n \prec \omega} V_n,$$

y obtenemos la otra contención $\bigcap_{n \prec \omega} U_n \subset \bigcap_{n \prec \omega} V_n$.

5.1.2. Definición Sea X un espacio topológico. Usando ideas similares a 1.4.7 y 4.0.3, definimos el **árbol** de jugadas válidas en C_X como

$$T = \{\langle W_0, \dots, W_n \rangle : n \prec \omega, \forall i \preccurlyeq n (W_i \in \tau_X \setminus \emptyset), \forall i \prec n (W_{i+1} \subset W_i)\}.$$

5.1.3. Definición Sean X un espacio topológico y T el árbol de jugadas válidas en C_X. Llamaremos la **n-rama** de T al conjunto $T^n = T \cap \tau_X^n$.

Notemos que la n-rama de T está formada por sus elementos de longitud n. Debido a esto y a que $\tau_X^0 = \{\emptyset\}$, la 0-rama es vacía.

A continuación veremos cómo describir una forma en la que cualquier jugador del juego de Choquet puede asegurar la victoria del juego.

5.1.4. Definición Sean X un espacio topológico, C_X el juego de Choquet y T un árbol de jugadas válidas.

- Diremos que $\sigma_1 \subset T$ es una **estrategia ganadora para Alicia** si:
  a) Existe $U_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\sigma_1 \cap T^1 = \{\langle U_0 \rangle\}$
  b) Dado $n \prec \omega$, si $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma_1 \cap T^{2n+2}$, entonces existe un único $U_{n+1} \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U_{n+1} \rangle \in \sigma_1 \cap T^{2n+3}$.
  c) Dado $n \prec \omega$, si $\langle U_0, V_0, \dots, V_{n-1}, U_n \rangle \in \sigma_1 \cap T^{2n+1}$, entonces se cumple que para cualquier $V_n \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$, $\langle U_0, V_0, \dots, V_{n+1}, U_n, V_n \rangle \in \sigma_1 \cap T^{2n+2}$.
  d) Si suponemos que existen U_n y V_n abiertos no vacíos tales que
  $$\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma_1 \cap T^{2n+2}$$
  para toda $n \prec \omega$, entonces $\bigcap_{n \prec \omega} U_n = \emptyset$.
- Diremos que $\sigma_2 \subset T$ es una **estrategia ganadora para Beto** si:
  a) La intersección $\sigma_2 \cap T^1 = T^1$.
  b) Dado $n \prec \omega$, si $\langle U_0, V_0, \dots, V_{n-1}, U_n \rangle \in \sigma_2 \cap T^{2n+1}$, entonces existe un único $V_n \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\langle U_0, V_0, \dots, V_{n-1}, U_n, V_n \rangle \in \sigma_2 \cap T^{2n+2}$.
  c) Dado $n \prec \omega$, si $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma_2 \cap T^{2n+2}$, entonces se cumple que para cualquier $U_{n+1} \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$, $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U_{n+1} \rangle \in \sigma_2 \cap T^{2n+3}$.
  d) Si suponemos que existen U_n y V_n abiertos no vacíos tales que
  $$\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma_2 \cap T^{2n+2}$$
  para toda $n \prec \omega$, entonces $\bigcap_{n \prec \omega} V_n \neq \emptyset$.

La definición recién dada de estrategia ganadora para el juego de Choquet, está hecha de manera formal; sin embargo, cuando describamos una estrategia ganadora después en este trabajo, lo haremos de una forma intuitiva que nos dará una idea de cómo poder hacerla formalmente.

Cuando un subconjunto del árbol de jugadas válidas en el juego de Choquet cumple con las tres primeras características de una estrategia ganadora para Alicia o Beto, le llamaremos solamente **estrategia** para Alicia o Beto, respectivamente.

Ahora vamos a ver un teorema sobre como el juego de Choquet nos puede ayudar a determinar si un espacio es de Baire. Antes de llegar a este teorema probaremos unos resultados preliminares que nos van a ayudar con la prueba del teorema.

5.1.5. Definición Una familia **celular** en un espacio topológico X es una colección de abiertos $\mathcal{U}$ tales que para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$ con $U \neq V$, implica que $U \cap V = \emptyset$.

5.1.6. Lema Sea X un espacio topológico y $O \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Supongamos que existe una función $\phi\colon \tau_O \setminus \{\emptyset\} \to \tau_O \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\phi(U) \subset U$ para cualquier $U \in \tau_O \setminus \{\emptyset\}$. Entonces existe una familia $\mathcal{V} \subset \tau_O \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\mathcal{U} = \{\phi(V)\colon V \in \mathcal{V}\}$ es celular y $\bigcup \mathcal{U}$ es denso en O.

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de todas las familias $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos de O tales que $\{\phi(V)\colon V \in \mathcal{V}\}$ es celular. La inclusión estricta de conjuntos es antisimétrica y transitiva así que consideraremos el orden parcial de la inclusión (no estricta) en $\mathfrak{C}$.

Usamos el lema de Kuratowski-Zorn para encontrar un elemento maximal de $\mathfrak{C}$. Como $O \in \tau_O \setminus \{\emptyset\}$, sucede que $\{O\} \in \mathfrak{C}$, pues $\{\phi(O)\}$ es celular. Por lo tanto, $\mathfrak{C} \neq \emptyset$.

Ahora tomemos una cadena $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C}$ y probemos que existe una cota superior en $\mathfrak{C}$ para $\mathfrak{F}$. Si $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, tenemos que $\mathcal{F} \subset \bigcup \mathfrak{F}$. Si probamos que $\bigcup \mathfrak{F} \in \mathfrak{C}$, entonces se seguirá que $\bigcup \mathfrak{F}$ es una cota superior de $\mathfrak{F}$.

Para probar que $\bigcup \mathfrak{F} \in \mathfrak{C}$, tomemos a cualesquiera dos elementos $U, V \in \bigcup \mathfrak{F}$ tales que $U \neq V$ y comprobemos que $\phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$. Como $U, V \in \bigcup \mathfrak{F}$, existen $\mathcal{H}, \mathcal{K} \in \mathfrak{F}$ con $U \in \mathcal{H}$ y $V \in \mathcal{K}$, y como $\mathfrak{F}$ tiene un orden lineal sucede que $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ o $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Así que U y V pertenecen a la misma familia en $\mathfrak{F}$, es decir, $\phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$.

Por lo tanto, por el axioma 1.2.2, $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{U} = \{\phi(V)\colon V \in \mathcal{V}\}$ es celular.

Notemos que $\bigcup \mathcal{U}$ es denso en O. De lo contrario, existe un $W \in \tau_O \setminus \emptyset$ que no interseca a algún elemento de $\mathcal{U}$. Como $\phi(W) \subset W$, $\phi(W)$ tampoco interseca a algún elemento de $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{V} \cup \{W\}$ es un elemento de $\mathfrak{C}$ estrictamente mayor que $\mathcal{V}$, lo cual es una contradicción a la maximalidad de $\mathcal{V}$.

Por lo tanto, existe una familia $\mathcal{V} \subset \tau_O \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\mathcal{U} = \{\phi(V) \colon V \in \mathcal{V}\}$ es celular y $\bigcup \mathcal{U}$ es denso en O. $\square$

5.1.7. Lema Sean X un espacio y $\mathcal{U}$ una familia de abiertos no vacíos con $\bigcup \mathcal{U}$ denso. Supongamos que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe una familia $\mathcal{V}_U$ de abiertos no vacíos de U con $\bigcup \mathcal{V}_U$ denso en U. Sea $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_U \colon U \in \mathcal{U}\}$. Entonces el conjunto $\bigcup \mathcal{V}$ es denso en X.

Demostración. Sea $W \subset X$ un abierto no vacío. Entonces, como $\bigcup \mathcal{U}$ es denso, $W \cap \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$ por lo que existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $W \cap U_0 \neq \emptyset$. Dado que $\bigcup \mathcal{V}_{U_0}$ es denso en U_0, tenemos que $W \cap \bigcup \mathcal{V}_{U_0} \neq \emptyset$; y como $\mathcal{V}_{U_0} \subset \mathcal{V}$, se cumple que $W \cap \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$. $\square$

5.1.8. Teorema (Oxtoby) Sea X un espacio topológico. El espacio X es espacio de Baire si y solo si Alicia no tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet.

Demostración.

($\Leftarrow$) Esta implicación se va a probar por contrapuesta. Entonces, supongamos que X no es de Baire y sea $\{D_n \colon n \prec \omega\}$ una colección de abiertos densos en X. Entonces, existe $W \in \tau_X \setminus \emptyset$ tal que $W \cap \bigcap_{n \prec \omega} D_n = \emptyset$. Ahora formemos una estrategia ganadora para Alicia. Alicia elige a su primer abierto como W, es decir, $W = U_0$. Dado $n \prec \omega$, suponemos que Beto eligió un abierto no vacío V_n en el turno n, entonces Alicia escoge el abierto no vacio $U_{n+1} = V_n \cap D_n$. De esta manera tenemos todos los turnos del juego y como $\bigcap_{n \prec \omega} U_n \subset \bigcap_{n \prec \omega} D_n \cap U_0 = \emptyset$, Alicia gana el juego, por lo que formamos una estrategia ganadora para Alicia.

($\Rightarrow$) Supongamos que X es de Baire y sea σ una estrategia de Alicia en el juego de Choquet. Veamos que σ no es una estrategia ganadora seleccionando un $\rho \subset \sigma$ que va tener una jugada donde el inciso d) de la definición de estrategia ganadora de Alicia no se cumple.

Sea U_0 la primer jugada de Alicia. Seleccionamos a ρ recursivamente en cada n-rama de σ y al mismo tiempo construimos una familia celular $\mathcal{U}_n$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_n$ es densa en U_0.

Agregamos a $\langle U_0 \rangle \in \rho$. Sea $\phi_0 \colon \tau_{U_0} \setminus \{\emptyset\} \to \tau_{U_0} \setminus \{\emptyset\}$ la función que determina la segunda jugada de Alicia según la estrategia σ; de manera más formal, $\langle U_0, V, \phi_0(V) \rangle \in \sigma$ para cada abierto no vacío $V \subset U_0$. Por el lema 5.1.6 existe una familia $\mathcal{V}_0$ de abiertos no vacíos de U_0 tal que $\mathcal{U}_0 = \{\phi_0(V) \colon V \in \mathcal{V}_0\}$ es una familia celular y $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en U_0. Para cada $V \in \mathcal{V}_0$, agregamos a $\langle U_0, V \rangle \in \rho$ y $\langle U_0, V, \phi_0(V) \rangle \in \rho$.

Supongamos que $\langle U_0, V_0, \ldots, U_m, V_m, U_{m+1} \rangle \in \rho$ y $U_{m+1} \in \mathcal{U}_m$ para algún $m \prec \omega$. Sea $\phi_{U_{m+1}} \colon \tau_{U_{m+1}} \setminus \{\emptyset\} \to \tau_{U_{m+1}} \setminus \{\emptyset\}$ la función que determina la $m+2$

jugada de Alicia según la estrategia σ; de manera más formal,

$$\langle U_0, V_0, \ldots, U_m, V_m, U_{m+1}, W, \phi_{U_m}(W)\rangle \in \sigma$$

para cada abierto no vacío $W \subset U_{m+1}$. Por el lema 5.1.6 existe una familia $\mathcal{V}(U_{m+1})$ de abiertos no vacíos de U_{m+1} tal que $\{\phi_{U_{m+1}}(W) \colon W \in \mathcal{V}(U_{m+1})\}$ es una familia celular cuya unión es densa en U_{m+1}. Para cada $W \in \mathcal{V}(U_{m+1})$, agregamos a

$$\begin{aligned} &\langle U_0, \ldots, U_m, V_m, U_{m+1}, W\rangle \in \rho \qquad\qquad \text{y} \\ &\langle U_0, \ldots, U_m, V_m, U_{m+1}, W, \phi_{U_{m+1}}(W)\rangle \in \rho. \end{aligned}$$

Finalmente, definimos

$$\mathcal{U}_{m+1} = \{\phi_U(W) \colon W \in \mathcal{V}(U), U \in \mathcal{U}_m\}.$$

Por hipótesis de inducción, $\bigcup \mathcal{U}_m$ es densa en U_0. Por el lema 5.1.7 obtenemos que $\bigcup \mathcal{U}_{m+1}$ es densa en U_0.

Esto concluye la selección de $\rho \subset \sigma$ y la construcción de las familias $\mathcal{U}_m$ con $m \prec \omega$.

Ahora, para cualquier $n \prec \omega$, sea $W_n = \bigcup \mathcal{U}_n$. Por ser una unión de abiertos, W_n es abierto en U_0 para toda $n \prec \omega$. Así, $\{W_n : n \prec \omega\}$ es una colección numerable de abiertos densos en U_0. Como X es un espacio de Baire, es cierto que U_0 es de Baire por el lema 3.1.5. Por lo tanto, $\bigcap_{n \prec \omega} W_n \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{n \prec \omega} W_n$. Como los elementos de $\mathcal{U}_n$ son ajenos para toda $n \prec \omega$, existe una sucesión de abiertos $U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, \ldots$ tal que

- $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle \in \rho$, y
- $x \in U_n \in \mathcal{U}_n$

para cada $n \prec \omega$. Como $\rho \subset \sigma$, σ no es una estrategia ganadora para Alicia. $\square$

5.1.9. Definición Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un **espacio de Choquet** si Beto tiene una estrategia ganadora en C_X.

Si Beto tiene una estrategia ganadora en el juego de Choquet, Alicia no puede tener una estrategia ganadora porque se contrapondría con la de Beto. Entonces, por el teorema 5.1.8, todo espacio de Choquet también es de Baire. Sin embargo, no sucede que todo espacio de Baire también es de Choquet. Esto lo vemos más a detalle en la sección 5.3.

La propiedad de ser un espacio de Choquet, es una propiedad topológica, es decir, se preserva bajo homeomorfismos. No daremos una prueba completa de esta afirmación en esta tesis pero sí un esbozo. Si existen dos espacios topológicos X y Y homeomorfos, con X espacio de Choquet, se puede formar un estrategia ganadora τ en el árbol de jugadas válidas T_Y aplicando el homeomorfismo a la estrategia ganadora $\sigma \subset T_X$ de Beto. Es decir, si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces

$$\tau = \{\langle f[W_0], f[W_1], \dots, f[W_k]\rangle \colon \langle W_0, W_1, \dots, W_k\rangle \in \sigma\} \subset T_Y$$

es una estrategia ganadora para Beto en Y.

5.1.10. Teorema Los espacios compactos Hausdorff son de Choquet.

Demostración. Sea X un espacio compacto Hausdorff. Para probar que X es un espacio de Choquet vamos a formar una estrategia ganadora para Beto en C_X y esto lo vamos a hacer de manera similar a la prueba del teorema 3.1.2.

Sea $U_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ la primer jugada de Alicia en el juego de Choquet. Por la proposición 1.3.22 existe $V_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ con $\overline{V_0} \subset U_0$. Tomaremos a V_0 como la primer jugada de Beto en C_X.

Dado $n \prec \omega$, suponemos que Alicia eligió un abierto no vacío U_n en el turno n, entonces Beto elige un abierto no vacío V_n tal que $\overline{V_n} \subset U_n$. De esta manera completamos todos los turnos del juego de Choquet.

Como la colección $\{\overline{V_n} \colon n \prec \omega\}$ tiene la propiedad de intersección finita y X es compacto, se cumple que $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n} \neq \emptyset$. Por lo que si demostramos que $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\prec\omega} V_n$ demostraríamos que X es espacio de Choquet.

Sabemos que $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_{n+1}} \subset \bigcap_{n\prec\omega} V_n$ pues $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ para cualquier $n \prec \omega$, y como $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_{n+1}}$, se cumple que $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\prec\omega} V_n$ y X es espacio de Choquet. □

5.1.11. Teorema Los espacios métricos completos son de Choquet.

Demostración. Sea $\langle X, \delta\rangle$ un espacio métrico completo. Para probar que X es un espacio de Choquet vamos a formar una estrategia ganadora para Beto en C_X y esto lo vamos a hacer de manera similar a la prueba del teorema 3.1.3.

Sea $U_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ la primer jugada de Alicia en el juego de Choquet. Como vimos en la prueba del teorema 3.1.3, existe una bola abierta $V_0 = B_\delta(x_0, r_0)$, con $0 < r_0$, tal que $\overline{V_0} \subset U_0$. Tomaremos a V_0 como la primer jugada de Beto.

Dado $n \prec \omega$, suponemos que Alicia eligió un abierto no vacío U_n en el turno n, entonces Beto elige una bola abierta no vacía $V_n = B_\delta(x_n, r_n)$, tal que $\overline{V_n} \subset U_n$. De esta manera completamos todos los turnos del juego de Choquet.

Tal y como probamos en la prueba del teorema 3.1.3, la sucesión $\{x_n \colon n \prec \omega\}$ es una sucesión de Cauchy; por la completitud de X, la sucesión converge a un punto $x \in X$. Además, como toda subsucesión $\{x_k \colon n \preccurlyeq k \prec \omega\} \subset V_n$, tenemos que $x \in \bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n}$.

Finalmente, como $\bigcap_{n\prec\omega} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\prec\omega} V_n$, por el mismo argumento del final de la prueba del teorema 5.1.10, tenemos que $x \in \bigcap_{n\prec\omega} V_n$ y X es un espacio de Choquet. $\square$

5.1.12. Proposición Existe un espacio X de Choquet que no es compacto Hausdorff ni homeomorfo a un métrico completo.

Demostración. Sea $X = \Pi^+ \cup F$ como en el ejemplo 3.1.7.

Como vimos en los preliminares, $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo. Entonces, por el teorema 5.1.11, $\mathbb{R}^2$ es un espacio de Choquet. Dado que $\mathbb{R}^2 \approx \Pi^+$, como vimos al final de la sección 1.3 y que la propiedad de ser espacio de Choquet es una propiedad topológica, Π^+ es un espacio de Choquet.

La estrategia ganadora de Beto en C_X consiste en que Beto interprete la primer jugada de Alicia U_0 como la intersección $U_0' = U_0 \cap \Pi^+$ que igual es un abierto en X. La cualidad de U_0' es que también es un abierto en Π^+, donde Beto ya tiene una estrategia ganadora.

De esta forma, sin importar cual abierto escoja Alicia en C_X, Beto tiene una estrategia ganadora llevando el juego de Choquet en X al juego de Choquet en Π^+. Por lo tanto, X es de Choquet.

Notemos que por definición, X es espacio métrico; sea δ una métrica compatible y veamos que no puede ser completa. Primero vamos a notar que $\langle F, \delta \restriction (F \times F)\rangle$ no es métrico completo, para después concluir, por el teorema 1.3.34, que $\langle X, \delta\rangle$ no es métrico completo. Dado que $F \approx \mathbb{Q}$, que $\mathbb{Q}$ no es de Baire por el ejemplo 3.1.4 y que la propiedad de Baire es una propiedad topológica como lo mencionamos en 3.1, F no es un espacio de Baire. Y por el teorema 3.1.3, $\langle F, \delta \restriction (F \times F)\rangle$ no es métrico completo.

Finalmente veamos que X no es compacto Hausdorff. Como notamos en el párrafo anterior, F no es un espacio de Baire. Entonces, por el teorema 3.1.2, F no es compacto Hausdorff. Por lo tanto, por el teorema 1.3.25, X no es compacto.

$\square$

5.2. Productos de espacios de Choquet

Como vimos en la sección 3.2, existen propiedades de espacios topológicos que se preservan bajo productos. Los espacios de Choquet, a diferencia de los espacios de Baire, preservan su propiedad incluso en productos arbitrarios.

En esta sección probaremos que el producto de dos espacios de Choquet, es de Choquet. Mientras que solo haremos un esbozo de la prueba para un producto arbitrario de espacios de Choquet, pues es análoga a la prueba de el producto de dos espacios de Choquet.

5.2.1. Teorema Dados X y Y dos espacios de Choquet, el producto $X \times Y$ es también un espacio de Choquet.

Demostración. Sean X y Y dos espacios de Choquet. También sean $Z = X \times Y$, σ la estrategia ganadora de Beto en C_X y ρ la estrategia ganadora de Beto en C_Y.

Sea $W_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ la primer jugada de Alicia en C_Z. Como W_0 es un abierto no vacío en la topología producto de Z, existe un abierto básico $U_0 \times V_0 \subset W_0$ con $U_0 \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ y $V_0 \in \tau_Y \setminus \{\emptyset\}$. Dado que $\langle U_0 \rangle \in \sigma$ y $\langle V_0 \rangle \in \rho$, existen dos abiertos no vacíos únicos U_1 y V_1, tales que $\langle U_0, U_1 \rangle \in \sigma$ y $\langle V_0, V_1 \rangle \in \rho$. De esta forma, Beto tomará como primer jugada a $W_1 = U_1 \times V_1$ en C_Z.

Dado $n \prec \omega$, suponemos que Alicia eligió un abierto no vacío W_{2n} en su turno n. Como W_{2n} es un abierto no vacío en la topología producto, existe un abierto básico $U_{2n} \times V_{2n} \subset W_{2n}$ con $U_{2n} \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ y $V_{2n} \in \tau_Y \setminus \{\emptyset\}$. Suponiendo que $\langle U_0, U_1, \ldots, U_{2n} \rangle \in \sigma$ y $\langle V_0, V_1, \ldots, V_{2n} \rangle \in \rho$, existen dos abiertos no vacíos únicos U_{2n+1} y V_{2n+1} tales que

$$\langle U_0, U_1, \ldots, U_{2n}, U_{2n+1} \rangle \in \sigma \quad \text{y}$$
$$\langle V_0, V_1, \ldots, V_{2n}, V_{2n+1} \rangle \in \rho.$$

Entonces, la jugada n de Beto en C_Z será $W_{2n+1} = U_{2n+1} \times V_{2n+1}$. De esta forma completamos todos los turnos del juego de Choquet en X.

Como σ y ρ son estrategias ganadoras para Beto en C_X y C_Y respectivamente, sucede que $\bigcap_{n \prec \omega} U_{2n+1} \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n \prec \omega} V_{2n+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcap_{n \prec \omega} W_{2n+1} \neq \emptyset$ y Beto tiene una estrategia ganadora en C_Z. Y así, Z es espacio de Choquet. $\square$

Si tenemos un espacio topológico de un producto arbitrario de espacios de Choquet, podemos encontrar un abierto básico dentro de la primera jugada de Alicia al igual que en la prueba del teorema 5.2.1. La diferencia va a ser que estos abiertos básicos estarán formados por una cantidad finita de abiertos no vacíos distintos del espacio completo y las demás entradas compuestas por los espacios completos. Como todos los espacios que tienen a estos abiertos son espacios de Choquet podremos encontrar una primer jugada dentro de la estrategia ganadora de Beto en cada abierto no vacío distinto del espacio completo.

Las demás jugadas de Beto se definirían de manera analoga a la prueba del teorema 5.2.1, con la diferencia de tener en cuenta lo que se acaba de decir de la primer jugada de Beto. Que este juego formado por Beto es una estrategia ganadora se puede probar de manera análoga al teorema pasado. Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente resultado.

5.2.2. Teorema El producto arbitrario de espacios de Choquet es de Choquet.

5.3. Caracterización de los espacios de Choquet separables metrizables

En esta sección daremos un ejemplo de un subespacio de $\mathbb{R}$ que es espacio de Baire pero no es de Choquet. Para esto, necesitamos analizar propiedades de los espacios de Choquet que son separables y metrizables. Sin embargo, no haremos todas las pruebas ya que muchas de estas requieren de herramientas que se salen del objetivo de la tesis.

5.3.1. Definición Un espacio topológico X es **completamente metrizable** si existe una métrica definida en el espacio que es completa.

5.3.2. Ejemplos

a) Todos los espacios métricos completos son completamente metrizables.

b) El conjunto Π^+ es completamente metrizable. Aunque con la métrica euclideana sucede que Π^+ no es completo, podemos definir una métrica en Π^+ que es completa.

   Como vimos al final de la sección 1.3, Π^+ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Suponiendo que f es el homeomorfismo entre Π^+ y $\mathbb{R}^2$, la función $\delta\colon \Pi^+ \times \Pi^+ \to \mathbb{R}$ con $\delta(\langle x, y\rangle) = |f(x) - f(y)|$, es una métrica completa para para el semiplano superior. Como $\mathbb{R}^2$ es completamente metrizable, podemos deducir que la propiedad de ser completamente metrizable es una propiedad topológica.

c) Los racionales $\mathbb{Q}$ no son completamente metrizables. Como vimos en el ejemplo 3.1.4 $\mathbb{Q}$ no es de Baire. Entonces, como todo espacio completamente metrizable es de Baire, tenemos que $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable.

5.3.3. Definición Sea X un espacio topológico. Si X es completamente metrizable y separable, lo llamaremos espacio **polaco**.

5.3.4. Ejemplos

a) El conjunto $\mathbb{R}^n$, con $n \prec \omega$, es polaco; ya que $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ es denso numerable y $\mathbb{R}^n$ es completamente metrizable.

b) Aunque el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es separable, el conjunto $\mathbb{Q}$ no es polaco pues no es completamente metrizable.

c) El espacio $\mathbb{B}$ del capítulo 4 es completamente metrizable [EN, exercise 4.3.B(c)], sin embargo, $\mathbb{B}$ no es separable.

   Para ver que $\mathbb{B}$ no es separable tomemos cualquier conjunto numerable $F = \{f_n \in \mathbb{B} \colon n \prec \omega\} \subset \mathbb{B}$. Si evaluamos a f_n en 0 para cada $n \prec \omega$, obtenemos un conjunto numerable $\{f_n(0)\colon n \prec \omega\} \subset \omega_1$, por lo que existe

$\alpha \in \omega_1$ tal que $f_n(0) \prec \alpha$ para toda $n \prec \omega$. Ahora, como $s = \langle \alpha \rangle \in \omega_1^1 \subset \omega_1^{<\omega}$, $\langle s \rangle$ es una abierto básico que no interseca a F. Por lo tanto, F no es denso.

Se sabe que los espacios polacos son *universales* para los espacios separable y metrizable, es decir, que para todo espacio separable y metrizable se puede encontrar un espacio polaco que lo contiene de manera densa. La prueba de esto se sale de los objetivos de la tesis, así que sólo citaremos la referencia.

5.3.5. Proposición [KE, proposición 3.3] Sea X un espacio topológico separable y metrizable. Entonces X es subconjunto denso de un polaco.

Nos interesa un tipo de subconjunto de los reales muy particular que definimos a continuación.

5.3.6. Definición El conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de **Bernstein** si siempre que $C \subset \mathbb{R}$ sea un cerrado sin puntos aislados, sucede que $C \cap X \neq \emptyset$ y $C \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$.

Para probar la existencia de los conjuntos de Bernstein se necesitan herramientas de cardinales y de recursión transfinita, las cuales salen del objetivo de esta tesis. Por lo que mencionaremos el teorema de Bernstein que nos habla de la existencia de un conjunto de Bernstein.

5.3.7. Teorema [HG, teorema 7 del apéndice B] El axioma de elección implica que existe un conjunto de Bernstein.

5.3.8. Lema Sean $\{U_n : n \prec \omega\}$ una colección de abiertos densos de $\mathbb{R}$ y $W \subset \mathbb{R}$ un abierto. Existe $C \subset W \cap \bigcap_{n \prec \omega} U_n$ cerrado y sin puntos aislados.

Demostración. La construcción del conjunto C será similar a la construcción típica del conjunto de Cantor que está en la prueba de [HG, proposición 2.14].

Para empezar la construcción de C vamos a construir una colección de intervalos cerrados y acotados $J_s \subset \mathbb{R}$, donde $s \in \{0,1\}^{<\omega}$, los cuales tendrán las siguientes propiedades:

a) La longitud de J_s es menor que 2^{-n} cuando $s \in \{0,1\}^n$ y $n \prec \omega$.

b) Si $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ sucede que $J_{s^\frown 0} \subset J_s$, $J_{s^\frown 1} \subset J_s$ y $J_{s^\frown 0} \cap J_{s^\frown 1} = \emptyset$.

c) El intervalo $J_s \subset U_n$ cuando $s \in \{0,1\}^n$ y $n \prec \omega$.

Ahora, como $U_0 \cap W$ es un abierto no vacío, podemos encontrar un intervalo cerrado $J_\emptyset = [a,b] \subset U_0 \cap W$, con $a < b$, de la misma manera que lo hicimos en la prueba de 3.1.3. Sin perdida de generalidad tendremos que $b - a < 1$.

Dados $n \prec \omega$ y $s \in \{0,1\}^n$, supongamos que tenemos construido a J_s con las propiedades a y c. Como $J_s^\circ \cap U_{n+1}$ es un abierto no vacío, existe $[a_s, b_s] \subset J_s^\circ \cap U_{n+1}$ tal que $b_s - a_s < 2^{-(n+1)}$. Entonces, podemos encontrar dos intervalos cerrados y acotados $J_{s^\frown 0}$ y $J_{s^\frown 1}$ contenidos en $[a_s, b_s]$ que sean ajenos. De esta forma, $J_{s^\frown 0}$ y $J_{s^\frown 1}$ cumplen con los incisos a, b y c.

Para cada $n \prec \omega$ diremos que $C_n = \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} J_s$. Notemos que C_n es una unión finita de 2^n intervalos cerrados, acotados y ajenos a pares. De esta forma, definimos a $C = \bigcap_{n \prec \omega} C_n$. Como para cada $n \prec \omega$, C_n es compacto no vacío y si $n < m$, $C_m \subset C_n$, entonces por la propiedad de intersección finita, C es un compacto no vacío (este argumento es análogo al de la prueba del teorema 3.1.2).

Por el inciso c, $C_n \subset U_n$ para toda $n \prec \omega$. Por lo que $C \subset W \cap \bigcap_{n \prec \omega} U_n$.

Finalmente hace falta probar que el conjunto C no tiene puntos aislados. Para probar esto, tomemos a un elemento $x \in C$ y $O \subset C$ un abierto de C, tales que $x \in O$, y probemos que existe $y \in O$ tal que $x \neq y$.

Como O es abierto en C, existe $V \subset \mathbb{R}$ abierto en $\mathbb{R}$ con $O = C \cap V$. Ahora, dado que V es abierto y $x \in V$, sucede que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset V$ para algún $\epsilon > 0$; y como $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $k \prec \omega$ tal que $2^{-k} < \epsilon$.

Dado que $x \in C$, es cierto que $x \in C_k$, por lo que existe $t \in \{0,1\}^k$ tal que $x \in J_t$. Así, como la longitud de J_t es menor que 2^{-k}, tenemos que $J_t \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Entonces, $J_{t^\frown 0} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$ y $J_{t^\frown 1} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$ y $x \in J_{t^\frown i}$ para algún $i \in \{0,1\}$. De esta forma, es suficiente probar que $C \cap J_{t^\frown(1-i)} \neq \emptyset$.

Sea $D_n = \bigcup\{J_s \colon s \in \{0,1\}^{k+1+n}, s \restriction_{k+1} = t^\frown(1-i)\}$. Notemos que $D_n \subset C_{n+k+1}$ y que D_n es una unión de intervalos cerrados y acotados para toda $n \prec \omega$. Por lo tanto, D_n es compacto no vacío para toda $n \prec \omega$.

Definimos a $D = \bigcap_{n \prec \omega} D_n$ y notemos que, al igual que C, $D \neq \emptyset$ por la propiedad de intersección finita, ya que $D_m \subset D_n$ si $n < m$. Entonces, sea $y \in D$. Como $D \subset D_0 \subset C_{k+1} \subset J_{t^\frown(1-i)}$, $y \in J_{t^\frown(1-i)}$. Además, dado que $C_{k+1} \subset C_l$ para toda $l \prec k+1$, tenemos que $y \in C$. Por lo tanto, $y \in C \cap J_{t^\frown(1-i)}$. Esto prueba que $y \in O$ y $y \neq x$. $\square$

Notemos que un conjunto de Bernstein X es denso en $\mathbb{R}$. Sean $U \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío y $x \in U$. Como U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Ahora, como $[x - (\epsilon/2), x + (\epsilon/2)]$ es un cerrado sin puntos aislados, sucede que $X \cap [x - (\epsilon/2), x + (\epsilon/2)] \neq \emptyset$. Y dado que $[x - (\epsilon/2), x + (\epsilon/2)] \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$, $X \cap U \neq \emptyset$ y X es denso.

5.3.9. Proposición Todo conjunto de Bernstein es de Baire.

Demostración. Sean $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Bernstein y $\{U_n \colon n \prec \omega\} \subset X$ una colección de abiertos densos en X. Sea $W \subset X$ un abierto no vacío en X. Para demostrar que X es de Baire, probemos que $W \cap \bigcap_{n\prec\omega} U_n \neq \emptyset$.

Para cada $n \prec \omega$, sea $V_n \subset \mathbb{R}$ un abierto en $\mathbb{R}$ con $V_n \cap X = U_n$. Como X es denso en $\mathbb{R}$, U_n es denso en $\mathbb{R}$ para cada $n \prec \omega$. Entonces, como $U_n \subset V_n$, V_n es denso en $\mathbb{R}$ para cada $n \prec \omega$.

Sea $V \subset \mathbb{R}$ un abierto en $\mathbb{R}$ con $V \cap X = W$. Como V es abierto en $\mathbb{R}$, existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tales que $(a, b) \subset V$.

Recordemos que $(a, b) \approx \mathbb{R}$ y notemos que $\{(a, b) \cap V_n \colon n \prec \omega\}$ es una colección de densos abiertos en (a, b). Por el lema 5.3.8, existe $C \subset \bigcap_{n\prec\omega}(a, b) \cap V_n$ cerrado sin puntos aislados.

Sea $p \in X \cap C$, entonces $p \in X \cap \left[\bigcap_{n\prec\omega}(a, b) \cap V_n\right]$. Dado que

$$X \cap \left[\bigcap_{n\prec\omega}(a, b) \cap V_n\right] = [X \cap (a, b)] \cap \left[X \cap \bigcap_{n\prec\omega} V_n\right]$$

y $[X \cap (a, b)] \cap \left[X \cap \bigcap_{n\prec\omega} V_n\right] \subset W \cap \bigcap_{n\prec\omega} U_n$, se tiene que $p \in W \cap \bigcap_{n\prec\omega} U_n$. $\square$

5.3.10. Definición Sea X un espacio topológico. Si $A \subset X$ cumple que $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$, diremos que A es **denso en ninguna parte**.

Gracias a las equivalencias $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$ y $X \setminus A^{\circ} = \overline{X \setminus A}$ obtenemos que $X \setminus \overline{A}$ es denso en X si A es denso en ninguna parte.

5.3.11. Ejemplos

a) El conjunto $A = \{1/n \colon n \prec \omega\} \subset \mathbb{R}$ es denso en ninguna parte. Como $\overline{A} = A \cup \{0\}$ y no existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tales que $(a, b) \subset \overline{A}$, entonces $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$.

b) Cualquier conjunto denso no es denso en ninguna parte.

5.3.12. Definición Sea X un espacio topológico. Si $A \subset X$ y $A = \bigcup_{n\prec\omega} A_n$, donde A_n es denso en ninguna parte para toda $n \prec \omega$, diremos que A es **magro** en X. Al complemento de un conjunto magro, le diremos **comagro**.

5.3.13. Ejemplos

a) Todo denso en ninguna parte es magro.

b) El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es magro ya que es la unión numerable de puntos en $\mathbb{R}$ y cada punto en $\mathbb{R}$ es denso en ninguna parte.

c) Un espacio de Baire no es magro.

Sean X un espacio con la propiedad de Baire. Si suponemos que $X = \bigcup_{n \prec \omega} C_n$, donde C_n es denso en ninguna parte para toda $n \prec \omega$, entonces $X \setminus \overline{C_n}$ es denso abierto en X para toda $n \prec \omega$. Ahora, como X es de Baire, tenemos que $\bigcap_{n \prec \omega} X \setminus \overline{C_n}$ es denso en X; sin embargo, el conjunto $\bigcap_{n \prec \omega} X \setminus \overline{C_n} \subset \emptyset$ por lo que $\bigcap_{n \prec \omega} X \setminus \overline{C_n} = \emptyset$, $\lightning$.

Finalmente, necesitaremos la siguiente caracterización de espacios de Choquet como subespacios de los separables metrizables, que también se sale de los objetivos de la tesis.

5.3.14. Teorema [KE, theorem 8.17] Sea X separable y metrizable, y sea Y un polaco tal que $X \subset Y$ es denso. Entonces X es de Choquet si y solo si X es comagro en Y.

5.3.15. Proposición Un conjunto de Bernstein no es un espacio de Choquet.

Demostración. Sea X un conjunto de Bernstein. Se puede deducir de la definición de un conjunto de Bernstein que el complemento $\mathbb{R} \setminus X$ también es un conjunto de Bernstein. Por lo que $\mathbb{R} \setminus X$ es de Baire.

Que $\mathbb{R} \setminus X$ sea de Baire implica que es no magro. Entonces, X es no comagro y por el teorema 5.3.14, X no es de Choquet. □

Finalmente, por las proposiciones 5.3.9 y 5.3.15, podemos concluir lo siguiente, que nos da el ejemplo que buscábamos en esta sección.

5.3.16. Teorema Un conjunto de Bernstein es un espacio de Baire que no es de Choquet.

5.3.17. Corolario Un conjunto de Bernstein es un espacio topológico donde ni Alicia ni Beto tienen una estrategia ganadora para el juego de Choquet.

Bibliografía

[AA] Aurichi, Leandro Fiorini y Asmat Medina, Gabriel Andre, *An absolute barely Baire space*, presentación en Beamer, 5 de diciembre de 2020.

[C] Clontz, Steven, *Applications of Stationary Sets in Set Theoretic Topology.* Tesis de maestría, Auburn University, 2010.

[CO] Cohen, Paul E., *Products of Baire spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), no. 1, 119–124.

[EN] Engelking, Ryszard, *General topology.* Sigma Ser. Pure Math., 6 Heldermann Verlag, Berlin, 1989, viii+529 pp. ISBN: 3-88538-006-4

[FL] Fleissner, William G. *Applications of Stationary Sets in Topology.* En: Surveys in general topology, pp. 163–193, Academic Press, New York-London-Toronto, Ont., 1980.

[FK] Fleissner, W. G. y Kunen, K., *Barely Baire spaces.* Fund. Math. 101 (1978), no. 3, 229–240.

[HG] Hernández Gutiérrez, Rodrigo, *Un curso introductorio de teoría de conjuntos*, libro electrónico, 2022. Disponible en linea. `https://sites.google.com/izt.uam.mx/topological-cat/books`.

[KE] Kechris, Alexander S., *Classical descriptive set theory.* Grad. Texts in Math., 156 Springer-Verlag, New York, 1995, xviii+402 pp. ISBN: 978-0-387-94374-9.

[ST] Stone, A. H., *Non-separable Borel sets.* En: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), pp. 341–342. Academic Press, New York; Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1962