UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teorema de Selección de Michael con aplicaciones a la Teoría de Juegos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

Juan Diego Luna Valencia

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Natalia Jonard Perez

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2024

Jurado asignado:

Propietaria.	Dra. Judith Campos Cordero.
Propietario.	Dr. Pierre Michel Bayard.
Propietaria Tutora.	Dra. Natalia Jonard Perez.
Suplente.	Dr. Sergio Iván López Ortega.
Suplente.	Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a mi abuela Manuela, por siempre motivarme y confiar en mí. A mis padres y hermanos, por su apoyo y cariño. A mi sobrina Irina, por todos los momentos divertidos que hemos vivido y convertirse en alguien tan importante para mí. A mis amigas Diana y Nidia, por llenar de momentos divertidos y memorables la carrera, sin ustedes no habría sido lo mismo. Agradezco al Sistema de Becas para Estudiantes Indígenas y Afrodescendientes, por el apoyo otorgado durante mi educación medio superior y superior. Agradezco a la Dra. Natalia, por la dedicación e inspiración brindada durante las clases que tomé con ella y por todo el apoyo y paciencia durante la realización de la tesis. A cada uno de los sinodales, por sus valiosos aportes para mejorar el trabajo escrito.

ÍNDICE GENERAL

1. Preliminares **3**

1.1. Convexidad 4

1.2. Paracompacidad 12

1.3. Teorema del punto fijo de Brouwer 16

1.4. Redes 20

2. Teorema de selección de Michael **25**

2.1. Funciones multivaluadas 25

2.2. Preservación de la semicontinuidad 35

2.3. Selecciones y teorema de selección de Michael 43

2.4. Teorema del punto fijo de Kakutani 49

3. Juegos y Teorema de Nash **55**

3.1. Juegos no cooperativos 56

3.2. Ejemplos de juegos 58

3.3. Equilibrio de Nash 62

3.4. Estrategias mixtas 70

INTRODUCCIÓN

John Forbes Nash (o simplemente John Nash) es uno de los nombres más conocidos en el mundo de las matemáticas modernas, ya sea por sus aportaciones, los reconocimientos y premios que le fueron entregados (entre ellos el premio Nobel y el premio Abel) o por su vida (llevada al cine). Hablando sólo de su trabajo como matemático, una de sus aportaciones más importante es su trabajo en el campo de la teoría de juegos, particularmente por la definición de cierto tipo de equilibrio (el cual posteriormente llevaría su nombre) en juegos no cooperativos; la definición de estrategias mixtas en dicho tipo de juegos; y por establecer las condiciones bajo las que se puede asegurar la existencia de puntos de equilibrio en juegos no cooperativos.

Dada la relevancia que el trabajo de Nash tuvo en el campo de la teoría de juegos y por su aplicación en diversos campos de estudio, sobre todo en economía, en 1994 fue galardonado con el premio Nobel en dicha disciplina.

Como sucede muchas veces con grandes resultados matemáticos, implícitamente cargan consigo años de desarrollo de otras ramas matemáticas. El teorema de Nash es uno de esos casos, pues el desarrollo de la topología, funciones multivaluadas, selecciones continuas y puntos fijos, por mencionar algunas, forman parte intrínseca del trabajo de Nash.

Por lo anterior, el presente trabajo de tesis tiene la intención de presentar un seguimiento de los conceptos y resultados que son piezas esenciales para llegar a comprender la demostración del teorema de Nash. El seguimiento realizado mostrará cómo el resultado al que llegó John Nash en 1950 puede verse como un teorema de existencia de puntos fijos y he de ahí que la teoría sobre este tópico es de especial importancia cuando se quiere llegar a la demostración del teorema.

El presente trabajo se divide en tres capítulos. El primero contempla el desarrollo de los conceptos y resultados claves que son requeridos para los capítulos 2 y 3. Se revisarán los conceptos de convexidad, paracompacidad, redes y se presentará el teorema del punto fijo de Brouwer, así como algunas de sus generalizaciones. El teorema del punto fijo que Brouwer asegura la existencia de puntos fijos en funciones continuas de la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^n$ en sí misma. Sin embargo, veremos que por medio de homeomorfismos es posible extender el resultado para conjuntos compactos y convexos.

En el segundo capítulo se presentará la teoría sobre funciones multivaluadas, también llamadas correspondencias, y los conceptos que extienden la idea de continuidad en este tipo de funciones. Se presentará la prueba para el teorema de selección de Michael, mismo que será usado para la demostración del teorema del punto fijo de Kakutani, el cual es de hecho otra generalización del teorema del punto fijo de Brouwer. Además, se probará el resultado conocido como teorema del máximo de Berge, que junto con el teorema del punto fijo de Kakutani serán usados en el capítulo 3 para la demostración del teorema de Nash.

El tercer capítulo estará enfocado en dar una breve introducción a los juegos no cooperativos, presentar ejemplos, introducir lo que en teoría de juegos se define como equilibrios de Nash y presentar las condiciones en las que se puede asegurar la existencia de al menos un punto de equilibrio de este tipo, es decir, el teorema de Nash. A continuación, se presentará la demostración de este importante resultado, en la cual se podrá apreciar cómo un punto de equilibrio de Nash es un punto fijo para ciertas funciones multivaluadas, construidas a partir de la definición de equilibrio. Además, se presentarán algunos ejemplos populares en la teoría de juegos.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

A continuación, y en lo que resta del capítulo, presentaremos algunas notaciones, convenciones, definiciones y resultados que son necesarios para el desarrollo de los capítulos restantes.

El intervalo y subconjunto de la recta real $[0,1]$ será denotado por I.

Un espacio métrico topológico, es aquel espacio topológico inducido por una métrica, mientras que un espacio metrizable será aquel espacio topológico en que existe una métrica que induce la topología. Cuando se hable de espacios topológicos[1] (X,τ) se asumirá la existencia de una topología τ y se escribirá sólo X.

Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico es compacto si cualquier recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito, donde un recubrimiento C será una familia de abiertos, cuya unión contiene al conjunto A, mientras que un subrecubrimiento será un subconjunto de C, que a su vez es un recubrimiento de A.

Una vecindad para algún elemento de un espacio topológico será un conjunto abierto que contiene a dicho elemento.

Un espacio topológico será T_2 o Hausdorff si cumple que, para cualesquiera dos elementos distintos, existen dos abiertos disjuntos que contienen a cada uno, respectivamente.

Se usarán resultados básicos[2] relacionados con los espacios métricos y en particular con el espacio métrico $\mathbb{R}^n$, resaltando el **Teorema de Heine-Borel** (*Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ será compacto si y sólo si es cerrado y acotado*) y el **Teorema de Weierstrass** (*Si A es un conjunto compacto en un espacio topológico y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existen x_1 y x_2 en A tales que*

[1]Para consulta de la teoría sobre espacios topológicos se usó como referencia [3], [6] y [15].

[2]Para consulta de la teoría de espacios métricos y $\mathbb{R}^n$ se han tomado como referencia [7] y [3].

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ *para cualquier* x *en* A). Cuando se hable de $\mathbb{R}^n$ y cuando no se detalle de manera explícita, la métrica asociada será la métrica euclidiana.

Cuando se hable de espacios lineales[3] se supondrá que se encuentran definidos con respecto al campo de los números reales. Cuando a un espacio lineal se le asocia una topología Hausdorff τ tal que las operaciones de suma interna ($+ : X \times X \to X$ con $+(x, y) = x + y$) y producto por escalar ($\cdot : X \times \mathbb{R} \to X$ con $\cdot(\lambda, y) = \lambda \cdot y$) son continuas, entonces se dice que el par (X, τ) es un espacio topológico lineal.

1.1. Convexidad

Comenzaremos con el concepto de conjuntos convexos que, de manera simple, podría definirse como aquel conjunto que contiene el segmento de recta que une a cualquier par de puntos dentro del conjunto.

Definición 1.1.1. *Sea L un espacio topológico lineal y A un subconjunto de L. Entonces, A es convexo si para cualesquiera x, y en A y para todo α en I, se tiene que $\alpha x + (1 - \alpha)y$ es elemento de A.*

A las combinaciones lineales de elementos de un espacio lineal se les llama combinaciones convexas si cumplen que todos los escalares son no negativos y que la suma de ellos es igual a 1.

Definición 1.1.2. *Sea L un espacio topológico lineal y A un subconjunto de L. Se define al casco convexo de A, denotado por Conv(A), como el conjunto convexo más pequeño que contiene a A, es decir, es tal que, si un conjunto convexo B contiene a A, entonces se cumple que Conv(A) se queda contenido en B.*

$$Conv(A) := \bigcap \{B \mid B \text{ es convexo y } A \subseteq B\}.$$

El casco convexo está bien definido y siempre existe, pues el espacio lineal L es convexo y contiene a A, asegurando así que la familia $\{B \mid B$ es convexo y $A \subseteq B\}$ es no vacía.

Como la intersección de subconjuntos convexos es convexa, se sigue que $Conv(A)$ es convexo.

Veremos a continuación que el casco convexo de un conjunto puede ser caracterizado como la colección de todas las combinaciones convexas de elementos del

[3] En [12] se hace una diferencia entre espacios lineales y espacios vectoriales, sin embargo, para este trabajo, ambos conceptos se entenderán como sinónimos que definen la estructura algebraica usual.

conjunto. Para ello se define, para todo natural n, el conjunto $Conv_n(A)$ de la siguiente manera:

$$Conv_n(A) = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ con } \lambda_i \in I,\ x_i \in A \text{ e } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Además, se define el conjunto $Conv_\infty(A)$ como

$$Conv_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Conv_n(A).$$

Los primeros conjuntos son combinaciones convexas de a lo más n elementos de A, mientras que $Conv_\infty(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A.

Lema 1.1.3. *Sea L un espacio topológico lineal y A un subconjunto de L. Entonces, se cumple la siguiente igualdad*

$$Conv(A) = Conv_\infty(A)$$

Demostración. Para probar la primera contención notemos que $Conv_\infty(A)$ es un conjunto convexo, pues si tomamos dos de sus elementos x e y, así como un real α en I, se tiene que existen subconjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de A, así como conjuntos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ de elementos de I, tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$. Entonces,

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha)\beta_i y_i,$$

además,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha)\beta_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \alpha(1) + (1-\alpha)(1) = 1,$$

por lo tanto, $\alpha x + (1-\alpha)y$ es un elemento de $Conv_{n+m}(A)$ y en consecuencia es un elemento de $Conv_\infty(A)$. Ahora, como $A \subseteq Conv_\infty(A)$, se concluye que $Conv(A) \subseteq Conv_\infty(A)$.

Probaremos la segunda contención usando inducción para probar que, para todo natural n, el conjunto $Conv_n(A)$ se queda contenido en $Conv(A)$.

Se sigue fácilmente que $Conv_1(A) = A \subseteq Conv(A)$. Supongamos que $Conv_n(A) \subseteq Conv(A)$, para n mayor o igual que 1 y probemos que $Conv_{n+1}(A) \subseteq Conv(A)$.

Sea x un elemento de $Conv_{n+1}(A)$, entonces cumple que

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \text{ con } \lambda_i \in I \text{ para toda } 1 \leq i \leq n+1, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \ y \ x_i \in A.$$

Si algún α_i es igual a cero, entonces se cumple que x es elemento de $Conv_n(A)$ y por lo tanto, x es elemento de $Conv(A)$. Entonces, supongamos que $\lambda_i \neq 0$ para toda $1 \leq i \leq n+1$ y definamos el valor α de la siguiente manera:

$$\alpha := 1 / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Notemos que $\alpha\lambda_i$ está en I para toda $i \leq n$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i = 1$. Entonces, $y := \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i x_i$ se puede escribir como una combinación convexa de n elementos de A y, por lo tanto, y es elemento de $Conv_n(A)$.

Como $Conv_n(A) \subseteq Conv(A)$, se sigue que x_{n+1} e y están en $Conv(A)$, más aún se tiene que x se puede escribir como una combinación convexa de dos elementos en A, de la siguiente manera:

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Se concluye que x es elemento de $Conv(A)$, demostrando así la segunda contención.

$\square$

Definición 1.1.4. *Sea L un espacio topológico lineal. Un subconjunto finito A de L es llamado afínmente independiente en L si, para todo x en A, el conjunto*

$$A_x := \{z - x \mid z \in A \backslash \{x\}\}$$

es linealmente independiente.

Si A es un subconjunto arbitrario de L, A será afínmente independiente en L si todo subconjunto finito de A es afínmente independiente en X.

A es afínmente dependiente si no es afínmente independiente.

De la definición anterior notemos que, si L es un espacio topológico lineal de dimensión finita n, entonces la cardinalidad de todo subconjunto afínmente dependiente será a lo más $n + 1$.

En el siguiente resultado se puede observar que los conjuntos afínmente independientes pueden ser caracterizados por medio de combinaciones lineales afines, donde una combinación lineal afín o simplemente una combinación afín será aquella combinación lineal de elementos de un espacio lineal cuyos coeficientes serán números reales y cuya suma sea igual a 1.

Proposición 1.1.5. *Sea L es un espacio topológico lineal. Entonces, un subconjunto no vacío A de L, es afínmente independiente si y sólo si para todo $B \subseteq A$, distinto del vacío y finito (digamos $|B| = n$) y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$, se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \ \textit{y} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \ \textit{implica que} \ \lambda = 0,$$

donde $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Demostración. Para la primera implicación tomamos $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ subconjunto de A, finito y distinto del vacío y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \ \textit{y} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Si tomamos $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq k} \lambda_i (b_i - b_k) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - b_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) b_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como B es afínmente independiente en L, el conjunto $B_{b_k} = \{b_i - b_k \mid i \leq n \text{ y } i \neq k\}$ es linealmente independiente, entonces para toda $i \neq k$, $\lambda_i = 0$, pero como $\sum_{n}^{i=1} \lambda_i = 0$, se sigue que $\lambda_k = 0$ y, por lo tanto, $\lambda = 0$.

Para probar la otra implicación, debemos probar que para cualquier $1 \leq k \leq n$ el conjunto B_{b_k} es linealmente independiente. Para ello tomemos una combinación lineal de elementos de B_{b_k} igual a cero y probaremos que esta combinación es la trivial.

Sea λ en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ y

$$\sum_{i \neq k} \lambda_i (b_i - b_k) = 0.$$

Si desarrollamos y definimos $\lambda_k := -\sum_{i \neq k} \lambda_i$, se sigue que

$$0 = \sum_{i \neq k} \lambda_i (b_i - b_k) = \sum_{i \neq k} \lambda_i b_i - \sum_{i \neq k} \lambda_i b_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i b_i + \left(-\sum_{i \neq k} \lambda_i \right) b_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

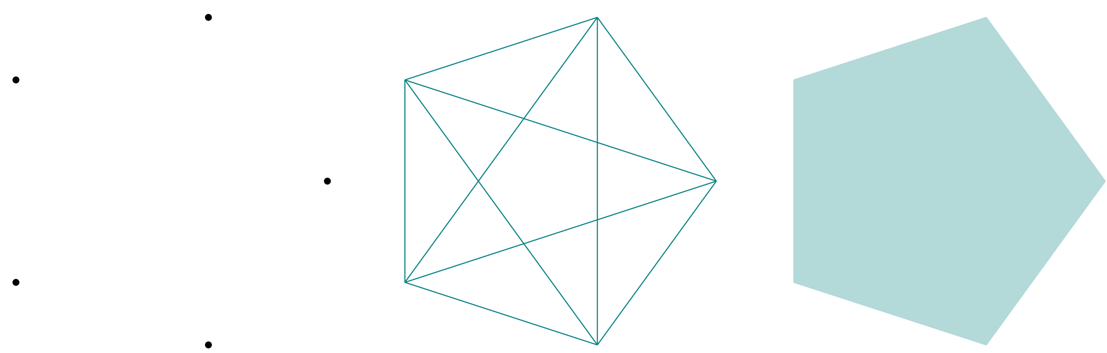
Además, notemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i \neq k} \lambda_i - \sum_{i \neq k} \lambda_i = 0,$$

lo cual implica que $\lambda_i = 0$ para toda $i \leq n$. Así se concluye que B_{b_k} es linealmente independiente y B es afínmente independiente.

$\square$

Ahora, con apoyo de la caracterización de los conjuntos afínmente independientes, se verá un importante resultado que muestra una característica muy útil del casco convexo de un subconjunto de un espacio lineal de dimensión finita. Dicho resultado fue demostrado por el matemático Ernst Steinitz como una generalización del teorema presentado por Constantin Carathéodory, quien lo formuló originalmente para espacios topológicos lineales y para subconjuntos compactos.



(a) $Conv_1(A) = A$ (b) $Conv_2(A)$ (c) $Conv_3(A) = Conv(A)$

Figura 1.1

Teorema 1.1.6 (Carathéodory). *Sea L un espacio topológico lineal de dimensión n, A un subconjunto de L y x un elemento del casco convexo de A. Entonces, x se escribe como una combinación convexa de a lo más $n+1$ elementos de A.*

Demostración. Sea x en $Conv(A)$, entonces por el Lema 1.1.3 existe un subconjunto finito T de A tal que x se puede escribir como una combinación convexa de elementos de T. Más aún, existe un subconjunto T_x de A, el cual es el conjunto más pequeño con dicha propiedad.

Sea $N = |T_x|$ y $T_x = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$, entonces existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i \text{ con } \lambda_i > 0 \text{ para toda } i \leq N \text{ y } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1.$$

Probaremos el teorema por contradicción. Supongamos que $N > n+1$. Entonces, T_x es afínmente dependiente y por la Proposición 1.1.5 existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0,$$

pero $\alpha_j \neq 0$ para algún $1 \leq j \leq N$.

Como $\alpha \neq 0$ y $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$, el conjunto $S := \{i \mid \alpha_i > 0 \text{ con } 1 \leq i \leq N\}$ es no vacío.

Definimos $\theta := \min\{\lambda_i/\alpha_i \mid i \in S\}$ y $C := \{i \mid \lambda_i - \theta\alpha_i = 0 \text{ con } 1 \leq i \leq N\}$. Notemos que el conjunto C es no vacío.

Observemos que para cualquier i en $\{1, \ldots, N\}$, $\lambda_i - \theta\alpha_i \geq 0$, pues

1. Si $\alpha_i = 0$, entonces $\lambda_i - \theta\alpha_i = \lambda_i > 0$.
2. Si $\alpha_i > 0$, se llega a que $\lambda_i/\alpha_i \geq \theta$ y, si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por el número negativo $-\alpha_i$ y sumamos λ_i en ambos lados, se concluye que $\lambda_i - \theta\alpha_i \geq \lambda_i - (\lambda_i/\alpha_i)\alpha_i = 0$.
3. Si $\alpha_i < 0$, se sigue que $-\theta\alpha_i > 0 > -\lambda_i$, ya que tanto θ como λ_i son positivos, entonces se puede concluir que $\lambda_i - \theta\alpha_i > 0$.

Por la construcción de θ y C se puede observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \notin C} (\lambda_i - \theta\alpha_i) &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \theta\,(\alpha_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \theta \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \\
&= 1 - \theta(0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \notin C} (\lambda_i - \theta\alpha_i) y_i &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \theta\alpha_i) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i - \theta \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Resumiendo lo anterior, hemos escrito a x como combinación convexa de $N - |C|$ elementos, pero $N - |C| < N$, lo cual es una contradicción, pues N es la cardinalidad mínima con dicha propiedad.

□

Definición 1.1.7. *Sea U subconjunto convexo de un espacio topológico lineal L y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es cuasicóncava en U si para toda $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $U_a := \{x \in U \mid f(x) \geq a\}$ es convexo.*

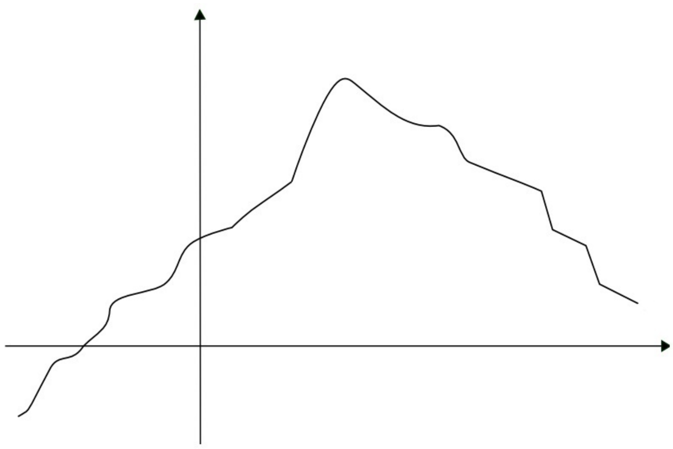


Figura 1.2: Función cuasicóncava

Proposición 1.1.8. *Sea U subconjunto convexo de un espacio topológico lineal L y $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es cuasicóncava en U si y sólo si para cualesquiera $x_1,\ x_2$ en U y λ en I se cumple que*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \text{mín}\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Demostración. Supongamos que f es cuasicóncava. Entonces, si tomamos un par de elementos x_1, x_2 en U y definimos $a := \text{mín}\{f(x_1), f(x_2)\}$, se sigue de inmediato que $\{x_1,\ x_2\} \subseteq U_a = \{x \in U \mid f(x) \geq a\}$. De tal manera que, al ser U_a convexo, se tiene que para toda λ en $[0,1]$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ se queda dentro de U_a, pero esto último implica que, para toda λ en I, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq a = \text{mín}\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Para la siguiente implicación tomemos $a \in \mathbb{R}$ y probemos que U_a es un conjunto convexo.

Si U_a es vacío, se cumple trivialmente que U_a es convexo. Entonces, supongamos que U_a es distinto del vacío y tomemos $x_1,\ x_2$ en U_a y λ en I. Se ha de probar que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ es elemento de U_a, lo cual es equivalente a probar que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq a$.

Como $x_1,\ x_2$ son elementos de U_a, se sigue que $\text{mín}\{f(x_1), f(x_2)\} \geq a$. Además, por la hipótesis se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \text{mín}\{f(x_1), f(x_2)\} \geq a.$$

Por lo tanto, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ está en U_a y se concluye que U_a es convexo.

□

Ejemplo 1.1.9. *Sea f una función lineal en un espacio lineal X, entonces f es cuasicóncava.*

Demostración. Probaremos que, para todo x e y en X y toda α en I, se cumple la siguiente desigualdad

$$\text{mín}\{f(x), f(y)\} \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Como f es lineal, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\text{mín}\{f(x), f(y)\} \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x) = \text{mín}\{f(x), f(y)\}$. Entonces, $f(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, con lo cual se cumple la desigualdad.

□

Ejemplo 1.1.10. *Si una función f es cóncava, será también cuasicóncava.*

Demostración. Recordemos que una función cóncava es aquella que para cualquier elemento α en I y para cualesquiera dos elementos x e y en su dominio, se cumple que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Como se vio en el ejemplo anterior, se cumple que $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\}$ para cualesquiera dos elementos x e y en el dominio de f y para cualquier elemento α en I. Como consecuencia se tiene que $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\}$ y por lo tanto, f es cuasicóncava.

$\square$

1.2. Paracompacidad

Se iniciará esta sección probando una caracterización de los conjuntos compactos en términos de la llamada propiedad de intersección finita.

Definición 1.2.1. *Si $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ es una familia de conjuntos, se dirá que $\mathcal{F}$ cuenta con la propiedad de intersección finita si para cualquier subfamilia, no vacía y finita de $\mathcal{F}$, la intersección de todos sus elementos es distinta del vacío.*

Teorema 1.2.2. *X es un espacio topológico compacto si y sólo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita cumple además que la intersección de todos sus elementos es distinta del vacío.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y tomemos una familia de conjuntos cerrados de X, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, con la propiedad de intersección finita. Si tomamos la familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, esta será una colección de subconjuntos abiertos de X. Ahora, supongamos que la intersección de los elementos de $\mathcal{F}$ es igual al vacío, es decir,

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha = \emptyset.$$

Notemos que U es una cubierta abierta de X, pues

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \right) = X.$$

Entonces, existe una subcubierta finita $\{X \setminus F_{\alpha_1}, \ldots, X \setminus F_{\alpha_n}\}$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_{\alpha_i})$, o equivalentemente, $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{F}$ es una familia con la propiedad de intersección finita. Así pues, podemos concluir que $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$.

La siguiente parte se realizará también por contradicción. Supongamos que existe un cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X tal que no cuenta con ninguna subcubierta finita. Entonces, para cualquier subfamilia finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\mathcal{U}$, se cumple que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) \neq \emptyset.$$

Así, la familia $\mathcal{L} = \{X \setminus U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita y por hipótesis también cumple que $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset$. Así, podemos notar lo siguiente:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset.$$

Lo anterior contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ sea una cubierta de X y, por lo tanto, podemos concluir que X es compacto.

$\square$

A continuación, se definirá el concepto de paracompacidad, introducido en 1944 por el matemático francés Jean Dieudonné y que resulta ser una generalización del concepto de compacidad para espacios Hausdorff.

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos de X. $\mathcal{U}$ es localmente finita si para todo punto x en X, existe una vecindad V de x, tal que V interseca una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.*

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de X. Se dice que $\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$, o bien, que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, si para todo V en $\mathcal{V}$, existe U en $\mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.*

Definición 1.2.5. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Se dice que X es paracompacto si toda cubierta abierta posee un refinamiento localmente finito.*

Como ya se mencionó, la noción de paracompacidad es una generalización de la noción de compacidad, pues si una cubierta abierta cuenta con una subcubierta finita, esta es en particular un refinamiento localmente finito, por lo cual un espacio compacto Hausdorff será siempre paracompacto. Sin embargo, el recíproco no se puede asegurar. Por ejemplo, si X es un espacio topológico de cardinalidad infinita dotado con la topología discreta, entonces X será paracompacto, pues la colección de conjuntos unitarios de cada elemento en X será un refinamiento localmente finito para cualquier cubierta abierta, pero no será compacto, ya que la colección de conjuntos unitarios de cada elemento en X será una cubierta abierta que no cuenta con una subcubierta finita.

Uno de los ejemplos más importantes de espacios paracompactos es cualquier espacio metrizable, como lo establece el teorema de Stone que a continuación se enuncia y cuya prueba puede verse en [15, Teorema 3.22] o en [3, Teorema 20.9].

Teorema 1.2.6 (Stone). *Si X es un espacio metrizable, entonces X es un espacio paracompacto.*

Definición 1.2.7. *Sea X es un espacio topológico y $\mathscr{F}$ es una familia de funciones continuas de X a I. Se dirá que $\mathscr{F}$ es una partición de la unidad en X si para todo x en X existe una vecindad U_x de x y un subconjunto finito $\mathscr{F}_x$ de $\mathscr{F}$ que cumple lo siguiente:*

1. $\sum\limits_{f \in \mathscr{F}_x} f(y) = 1$ *para toda y en U_x*

2. *f(y)=0 para toda f en $\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_x$ y toda y en U_x*

Lema 1.2.8. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una partición de la unidad en X. Entonces, $\mathcal{U}(\mathscr{F}) := \{f^{-1}((0,1])|\ f \text{ está en } \mathscr{F}\}$ es una cubierta abierta localmente finita.*

Demostración. $\mathcal{U}(\mathscr{F})$ está compuesto por conjuntos abiertos, pues cada f en $\mathscr{F}$ es continua y el intervalo (0,1] es abierto en [0,1].

Ahora, probemos que $\mathcal{U}(\mathscr{F})$ cubre a X. Para ello tomamos x en X y observemos que, por ser partición de la unidad, existe una vecindad U_x de x y un subconjunto finito $\mathscr{F}_x$ de $\mathscr{F}$ tal que $\sum\limits_{f \in \mathscr{F}_x} f(y) = 1$, lo cual implica que existe f en $\mathscr{F}_x$ tal que $f(x) \neq 0$. Se concluye que $\mathcal{U}(\mathscr{F})$ es una cubierta para X.

La cubierta $\mathcal{U}(\mathscr{F})$ es localmente finita, pues si tomamos x arbitrario, existen U_x y $\mathscr{F}_x$ como se define anteriormente, de donde $f^{-1}((0,1]) \cap U_x \neq \emptyset$ para todo f en $\mathscr{F}_x$ y $f^{-1}((0,1]) \cap U_x = \emptyset$ para todo f que no está en $\mathscr{F}_x$, es decir U_x interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}(\mathscr{F})$, pues $\mathscr{F}_x$ es finito, y $f^{-1}((0,1]) \cap U_x = \emptyset$ para toda f que no esté en $\mathscr{F}_x$.

□

Definición 1.2.9. *Sea $\mathscr{F}$ una partición de la unidad en un espacio topológico X y $\mathcal{V}$ una cubierta. Se dice que $\mathscr{F}$ está subordinada a $\mathcal{V}$ si la cubierta $\mathcal{U}(\mathscr{F})$ refina a $\mathcal{V}$.*

A continuación, veremos una forma de construir particiones de la unidad en espacios metrizables a partir de cubiertas abiertas localmente finitas que, además, cumplen con ser subordinadas a la cubierta que les da origen.

Si se tiene una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U}$ para un espacio topológico metrizable X, con métrica acotada admisible d, es decir, una métrica que induce la topología en X, a cada U en $\mathcal{U}$ se asocia una función llamada la **K-función** y definida de la siguiente manera:

$$K_U(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{\sum\limits_{V \in \mathcal{U}} d(x, X \setminus V)}.$$

La familia $\mathscr{K} = \{K_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ será la familia de las K-funciones respecto a la cubierta $\mathcal{U}$. Notemos que las K-funciones están bien definidas, pues la suma en el denominador cuenta con al menos un término mayor a cero, pero a lo más una cantidad finita de ellos. Además, la imagen de las K-funciones son subconjuntos de I.

Lema 1.2.10. *Sea X un espacio topológico metrizable, d una métrica acotada admisible y $\mathcal{U}$ una cubierta localmente finita.*

La familia $\mathscr{K}$ de las K-funciones, respecto a la cubierta $\mathcal{U}$, es una partición de la unidad y además está subordinada a $\mathcal{U}$.

Demostración. Probaremos primero que cada K_U en $\mathscr{K}$, es continua. Para ello tomamos x en X y usando el hecho de que $\mathcal{U}$ es localmente finita, podemos asegurar la existencia de una vecindad W de x tal que el conjunto

$$\mathcal{A} := \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap W \neq \emptyset\}$$

es finito, digamos de cardinalidad n, es decir, $\mathcal{A} = \{U_1, \ldots, U_n\}$.

Si definimos a P_U como la restricción de K_U sobre W, es decir $K_U\mid_W$, entonces se tiene que, para todo z en W,

$$P_U(z) = \frac{d(z, X \setminus U)}{\sum\limits_{V \epsilon \mathcal{A}} d(z, X \setminus V)} = \frac{d(z, X \setminus U)}{\sum\limits_{i=1}^{n} d(z, X \setminus U_i)}.$$

Como la distancia de un punto a un conjunto es continua y $\mathcal{A}$ es finito,

$$\sum_{i=1}^{n} d(z, X \setminus U_i)$$

es una suma de funciones continuas, por lo tanto, P_U es continua.

Gracias a que W es una vecindad de x, podemos concluir que K_U es continua en x.

Para x, tomamos la subfamilia finita $\mathscr{K}_x$ de $\mathscr{K}$ tal que $\mathscr{K}_x = \{K_U \mid U \text{ está en } \mathcal{A}\}$. Notemos que para toda y en W, se tiene que

$$\sum_{K_U \in \mathscr{K}_x} K_U(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d(y, X \setminus U_j)}{\sum_{i=1}^{n} d(y, X \setminus U_i)} \right) = \frac{\sum_{j=1}^{n} d(y, X \setminus U_j)}{\sum_{i=1}^{n} d(y, X \setminus U_i)} = 1.$$

Además, si y está en W y K_U no es parte de $\mathscr{K}_x$, en particular y no es elemento de U, entonces $K_U(y) = 0$. Por lo tanto, la familia de las K-funciones es una partición de la unidad.

Por último, notemos que por la manera en que están construidas las K-funciones, la cubierta $\mathcal{U}(\mathscr{K})$ resulta ser la misma $\mathcal{U}$, por lo tanto, $\mathscr{K}$ está subordinada a $\mathcal{U}$.

$\square$

Teorema 1.2.11. *Sea X un espacio topológico metrizable*[4]*, d una métrica admisible para X. Entonces, para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$, existe una partición de la unidad $\mathscr{F}$ subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Notemos que, si $\mathscr{F}$ está subordinada a una subcubierta, lo estará también a la cubierta principal. Por ello y por el Teorema de Stone 1.2.6, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}$ es localmente finita.

Sea $\mathscr{F} = \{K_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, la familia de las K-funciones respecto a $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es localmente finita, por el Lema 1.2.10 podemos concluir que $\mathscr{F}$ es una partición de la unidad en X que además está subordinada a $\mathcal{U}$, como se quería probar.

$\square$

1.3. Teorema del punto fijo de Brouwer

Si tenemos una función $f : X \to Y$ entre espacios arbitrarios X e Y, se dice que x_0 es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$. En ese caso, se dice que f admite un punto fijo.

El estudio de las condiciones que deben cumplir las funciones y los espacios para asegurar la existencia de puntos fijos ha llevado a varios resultados que en conjunto son conocidos como teoremas de punto fijo, siendo uno de ellos el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, el cual cuenta con varias maneras en que puede ser demostrado. Sin duda una de las más elegantes se presenta en [12] en donde

[4]El teorema puede extenderse para cualquier espacio topológico paracompacto, gracias al Lema de Urysohn, el cual asegura la existencia de funciones con características que engloban a las de las K-funciones. Eso puede verse en [15].

se emplean conceptos de topología algebraica, mientras que en [2] se presenta una demostración basada en propiedades combinatorias de las subdivisiones de un simplejo.

Teorema 1.3.1 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer). *Sea $\overline{B(0,1)}$ la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ una función continua. Entonces f admite un punto fijo.*

Corolario 1.3.2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Si A es homeomorfo a $\overline{B(0,1)}$ y $f : A \to A$ es una función continua. Entonces f admite un punto fijo.*

Demostración. Sea g un homeomorfismo entre $\overline{B(0,1)}$ y A.

Definimos la función $h : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ de la siguiente manera: $h(x) := g^{-1}(f(g(x)))$. Notemos que h es continua, pues g^{-1}, f y g son funciones continuas. Usamos el teorema del punto fijo de Brouwer para asegurar la existencia de un punto fijo x_0 en $\overline{B(0,1)}$ de h. Entonces, este punto cumple que

$$h(x_0) = g^{-1}(f(g(x_0))) = x_0$$

Si aplicamos la función g en la igualdad anterior, tenemos que $f(g(x_0)) = g(x_0)$, lo cual nos dice que $g(x_0)$ es un punto fijo de f.

$\square$

Lema 1.3.3. *Toda bola cerrada $\overline{B(x,r)}$ en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\overline{B(0,1)}$.*

Demostración. Definimos la función $f : \overline{B(0,1)} \longrightarrow \overline{B(0,r)}$ por $f(z) = rz$.

Notemos que f es un homeomorfismo entre $\overline{B(0,1)}$ y la bola cerrada, centrada en el origen y de radio r.

Por otra parte, si definimos la función $g : \overline{B(0,r)} \longrightarrow \overline{B(x,r)}$ como $g(z) = z+x$, esta resulta ser un homeomorfismo entre $\overline{B(0,r)}$ y $\overline{B(x,r)}$. Así, la función $g \circ f$ es un homeomorfismo entre $\overline{B(0,1)}$ y $\overline{B(x,r)}$.

$\square$

Lema 1.3.4. *Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y x en $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe un único elemento $y \in A$ tal que $d(x,y) = \min\{d(x,z)\}_{z\in A}$, donde d es la métrica inducida por la norma euclidiana.*

Demostración. Tomamos la función $f : A \to \mathbb{R}$, definida por $f(z) = d(x,z)$. Notemos que f es continua y A es compacto, entonces existe un y en A tal que $d(x,y) = \min\{d(x,z)\}_{z\in A}$.

Ahora, probemos que y es único. Lo haremos por contradicción, supongamos que existe y' en A distinto de y tal que $d(x,y) = d(x,y') = \min\{d(x,z)\}_{z\in A} =: \alpha$.

Por la convexidad de A, $\frac{y-y'}{2}$ se encuentra en A y, por lo tanto, $d(x, \frac{y-y'}{2}) \geq \alpha$. Además, como A es subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se cumple la ley del paralelogramo, teniendo con ello lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(x-y, x-y')^2 &= \|(x-y)-(x-y')\|^2 \\ &= 2(\|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2) - \|(x-y)+(x-y')\|^2 \\ &= 2(d(x,y)^2 + d(x,y')^2) - \left\| 2\left(x - \frac{y-y'}{2} \right) \right\|^2 \\ &= 2(\alpha^2+\alpha^2) - 4\left\| \left(x - \frac{y-y'}{2} \right) \right\|^2 \\ &= 4\alpha^2 - 4d\left(x, \frac{y+y'}{2} \right)^2 \\ &\leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, podemos concluir que $x-y = x-y'$, lo cual implica que $y = y'$ y, por lo tanto, y es único.

□

Proposición 1.3.5. *Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to A$ una función continua. Entonces, f tiene un punto fijo.*

Demostración. Como A es compacto en $\mathbb{R}^n$, en particular es acotado y, por ende, existe $r > 0$ tal que la bola cerrada de radio r centrada en el origen contiene a A.

Tomamos la función $g : \overline{B(0,r)} \to A$ definida por $g(x) := z$ donde

$$z \in \{y \in A \mid d(x,y) = \min\{d(x,z)\}_{z \in A}\}.$$

Por el Lema 1.3.4, g está bien definida.

Sea x en $\overline{B(0,r)}$ y z en A. Entonces, para todo t en I, $z_t := tz + (1-t)g(x)$ es un elemento de A. Además, por la definición de g, se cumple que

$$\begin{aligned} \langle x - g(x), x - g(x) \rangle &= \|x - g(x)\|^2 \\ &\leq \|x - z_t\|^2 \\ &= \|x - (tz + (1-t)g(x))\|^2 \\ &= \|x - g(x) - t(z - g(x))\|^2 \\ &= \langle x - g(x) - t(z-g(x)), x - g(x) - t(z - g(x)) \rangle. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle x-g(x), x-g(x)\rangle - t\langle x-g(x), z-g(x)\rangle - t\langle z-g(x), x-g(x)\rangle \\ &+ t^2\langle z-g(x), z-g(x)\rangle - \langle x-g(x), x-g(x)\rangle \\ &= t^2\|z-g(x)\|^2 - 2t\langle x-g(x), z-g(x)\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq t\|z-g(x)\|^2 - 2\langle x-g(x), z-g(x)\rangle.$$

Ahora, si t es igual a 0, se cumple que $\langle x-g(x), z-g(x)\rangle \leq 0$.

Para probar que g es continua, tomamos dos elementos distintos y y w en $\overline{B(0,r)}$. Como $g(y)$ y $g(w)$ son elementos de A y por la desigualdad anterior, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\langle y-g(y), g(w)-g(y)\rangle \leq 0$$

$$\langle w-g(w), g(y)-g(w)\rangle \leq 0.$$

Lo cual implica que

$$\langle y-g(y), g(y)-g(w)\rangle \geq 0$$

$$\langle g(w)-w, g(y)-g(w)\rangle \geq 0.$$

Sumando ambas desigualdades, tenemos que

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle y-g(y), g(y)-g(w)\rangle + \langle g(w)-w, g(y)-g(w)\rangle \\ &= \langle y, g(y)-g(y)\rangle - \langle g(y), g(y)-g(w)\rangle + \langle g(w), g(y)-g(w)\rangle \\ &\quad + \langle -w, g(y)-g(w)\rangle \\ &= \langle y-w, g(y)-g(w)\rangle - \langle g(y)-g(w), g(y)-g(w)\rangle.\end{aligned}$$

Es así que

$$\langle y-w, g(y)-g(w)\rangle \geq \langle g(y)-g(w), g(y)-g(w)\rangle = \|g(y)-g(w)\|^2.$$

Usando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\|y-w\|\cdot\|g(y)-g(w)\| \geq \langle y-w, g(y)-g(w)\rangle = \|g(y)-g(w)\|^2.$$

Por lo tanto, $\|y-w\| \geq \|g(y)-g(w)\|$. Concluyendo con ello que g es Lipschitz y, por ende, es continua.

Luego, la composición $f \circ g : \overline{B(0,r)} \to A$ es continua, pues f y g lo son. Además, la podemos considerar como una función de $\overline{B(0,r)}$ en sí misma, debido a que A está contenida en $\overline{B(0,r)}$.

Usando el Corolario 1.3.2 y el Lema 1.3.3, para la función $f \circ g$ existe un punto fijo x_0 en $\overline{B(0,r)}$, esto es $f(g(x_0)) = x_0$. Además, como la imagen de $f \circ g$ está dentro de A, x_0 está en A.

Por la forma en que está definida g y dado que x_0 está en A, se tiene que $g(x_0) = x_0$, lo cual implica que $f(x_0) = x_0$.

$\square$

1.4. Redes

De manera formal, una sucesión en un conjunto X es una función del conjunto de los naturales a X. A partir de la noción de sucesiones es posible hacer una generalización en espacios topológicos, para ello es necesario recuperar o bien generalizar el papel que juegan los números naturales, es decir, indexar.

Definición 1.4.1. *Sea A un conjunto y $\preceq$ una relación en A. Se dice que $\preceq$ es una dirección en A si cumple lo siguiente.*

1. *Para cualquier x en A, $x \preceq x$ (Propiedad reflexiva).*
2. *Para cualesquiera x, y, z en A tales que $x \preceq y$ e $y \preceq z$, se cumple que $x \preceq z$ (Propiedad transitiva).*
3. *Para cualesquiera x, y en A existe z en A tal que $x \preceq z$ e $y \preceq z$.*

Al par $(A, \preceq)$ se le llama conjunto dirigido, pero por convención omitiremos la relación y diremos que el conjunto A es un conjunto dirigido, en donde implícitamente se tiene una dirección.

Si $\preceq$ es una dirección, usaremos la notación $x \prec y$ si $x \preceq y$, pero $x \neq y$. Con la misma lógica, podemos definir $x \succeq y$ si $y \preceq x$, y $x \succ y$ si $y \prec x$.

Al dotar a un conjunto con una dirección, se puede generalizar el papel que juegan los naturales. De la definición se puede observar que dos elementos de un conjunto dirigido no necesariamente están relacionados por la dirección.

Ejemplo 1.4.2. *El conjunto de los números naturales donde la dirección la da el orden usual* $(\leq)$*, es decir* $(\mathbb{N}, \leq)$ *es un conjunto dirigido.*

Ejemplo 1.4.3. *El sistema de vecindades $\mathcal{N}_x$ de un punto x en un espacio topológico es un conjunto dirigido, donde la dirección $\preceq$ está definida por $U \preceq V$ siempre y cuando $U \subseteq V$.*

Éste conjunto dirigido es muy importante y útil, como se puede observar en algunos de los siguientes resultados.

Definición 1.4.4. *Sean X un conjunto y A un conjunto dirigido. Se define como red a cualquier función $x : A \to X$. Si α es un elemento de A, al elemento $x(\alpha)$ se le denota como x_α.*

Una red es denotada por $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Notemos que, en particular, las sucesiones son redes definidas en el conjunto dirigido de los números naturales.

El siguiente paso será introducir la definición de convergencia de una red, para ello se generalizará la idea de convergencia de sucesiones, es decir, que eventualmente los elementos de la red se quedan tan cerca de un punto como se quiera.

Definición 1.4.5. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en un espacio topológico X. Diremos que la red converge a un punto x^* si para cualquier vecindad V de x^*, existe α_0 tal que x_α es elemento de V para todo $\alpha \succeq \alpha_0$.*

De manera similar a lo que ocurre con las sucesiones, una red tiene a lo más un límite si se encuentra definida en un espacio topológico Hausdorff.

Teorema 1.4.6. *Sea A un conjunto de un espacio topológico. Entonces, un elemento x estará en la cerradura de A si y sólo si x es el límite de una red contenida en A.*

Demostración. Tomamos un elemento x de la cerradura de A. Luego, notemos que, si V es una vecindad de x, entonces existe un elemento x_V en la intersección de V y A, de tal manera que si tomamos la red $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$, donde $\mathcal{N}_x$ es el sistema de vecindades de x dirigidas por el orden definido en el Ejemplo 1.4.3, se sigue que la red está contenida en A y x es un punto límite.

Luego, para probar la segunda implicación, notemos que si una red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ contenida en A converge a un punto x, entonces para toda vecindad V de x, la intersección de V y A es distinta del vacío (ya que hay un elemento de la red en V) y, por lo tanto, x es un punto de la cerradura de A.

□

Del teorema anterior se obtiene el siguiente corolario que da una caracterización de los conjuntos cerrados en relación con la convergencia de las redes.

Corolario 1.4.7. *Si A es un subconjunto de un espacio topológico, entonces A será un conjunto cerrado si y sólo si toda red convergente y contenida en A tiene sus límites en A.*

Siguiendo con las generalizaciones de los conceptos que envuelven a las sucesiones, se define lo que es una subred, la cual es una generalización de las subsucesiones.

Definición 1.4.8. *Sea X un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red. Una red $(y_\beta)_{\beta \in B}$ será subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ si existe una función $f : B \to A$ que cumple lo siguiente:*

1. *$y_\beta = x_{f(\beta)}$ para todo $\beta \in B$*

2. *Para cada $\alpha_0 \in A$ existe algún $\beta_0 \in B$ tal que $f(\beta) \succeq \alpha_0$ para toda $\beta \succeq \beta_0$.*

Definición 1.4.9. *Sea X un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en X. Se dice que la red aglomera o tiene un punto de aglomeración en x si y sólo si para cada vecindad U de x y cada α_0 en A, existe algún $\alpha \succeq \alpha_0$ tal que x_α es elemento de U.*

Se dice entonces que la red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ es cofinal en cada vecindad de x.

Teorema 1.4.10. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en un espacio topológico X. Un punto x es punto de aglomeración si y sólo si la red tiene una subred convergente en x.*

Demostración. Sea x un punto de aglomeración de la red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Definimos el conjunto S de la siguiente manera

$$S := \{(\alpha, U) \mid \alpha \in A \text{ } y \text{ } U \text{ } una \text{ } vecindad \text{ } de \text{ } x \text{ } tal \text{ } que \text{ } x_\alpha \in U\},$$

para este conjunto se define una dirección como $(\alpha_1, U_1) \leq (\alpha_2, U_2)$ si y sólo si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $U_2 \subseteq U_1$.

Definimos la red $(y_{(\alpha,U)})_{(\alpha,U) \in S}$ por $y_{(\alpha,U)} := x_{f((\alpha,U))}$ y donde la función $f : S \to A$ está dada por $f(\alpha, U) = \alpha$.

Ahora, veamos que la red definida es de hecho una subred. En efecto, si tenemos $\alpha \in A$, podemos tomar (α, U) para algún U arbitrario fijo, el cual cumple que si $(\alpha', U') \geq (\alpha, U)$, entonces en particular $\alpha' \geq \alpha$, lo cual es igual a que $f((\alpha', U')) \geq \alpha$.

Probemos ahora que la subred converge a x. Para ello tomamos una vecindad U de x. Por hipótesis existe α tal que x_α está en U. Así (α, U) cumple que si $(\alpha', U') \geq (\alpha, U)$, entonces $x_{\alpha'}$ está en U, ya que $x_{\alpha'}$ está en U' y $U' \subseteq U$.

Por lo tanto, se puede concluir que la subred generada por f converge a x.

Para demostrar la segunda implicación, supongamos que $f : B \to A$ define una subred $(y_\beta)_{\beta \in B}$, convergente a x. Tomamos α en A y V una vecindad de x.

Como la subred converge en x, existe β_0 tal que $x_{f(\beta)}$ está en V, para cualquier $\beta \succeq \beta_0$.

Por ser (y_β) una subred, existe β_1 tal que $f(\beta) \succeq \alpha$, para cualquier $\beta \succeq \beta_1$.

Ahora, por la propiedad de la dirección, podemos tomar β_2 tal que $\beta_2 \succeq \beta_0$ y $\beta_2 \succeq \beta_1$, teniendo así que $f(\beta_2) \succeq \alpha$ y $x_{f(\beta_2)}$ está en V. Por lo tanto, x es un punto de aglomeración.

□

Teorema 1.4.11. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y sólo si toda red en X tiene una subred convergente en X.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y probemos la primera implicación por contradicción. Para ello supongamos que existe una red $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ que no tiene ninguna subred convergente.

Usando el resultado previo, podemos asegurar que la red $(x_\alpha)_\alpha$ no tiene ningún punto de aglomeración, lo cual significa que para cada x en X podemos encontrar una vecindad, U_x, de x y un α_x tal que y_α no está en U_x para todo $\alpha \geq \alpha_x$. Luego, usando el hecho que X es compacto, podemos asegurar la existencia de $x_1, \ldots, x_n$ en X tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Tomemos ahora cualquier α tal que $\alpha \geq \alpha_{x_1}, \ldots, \alpha_{x_n}$, entonces x_α no es elemento de X, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que toda red en X tiene una subred convergente y probemos que X es compacto. Para ello tomemos una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in A}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita, esto es, $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$ para cada $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq A$. A continuación, mostraremos que $\bigcap_{i \in A} F_i \neq \emptyset$. Para ello definiremos el conjunto

$$\Lambda = \{\{i_1, \ldots, i_n\} \mid i_1, \ldots, i_n \in A \ y \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos un orden en Λ de la siguiente manera: $\lambda_1 := \{i_1, \ldots, i_k\} \leq \lambda_2 := \{j_1, \ldots, j_n\}$ si y sólo si $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_n\}$. Claramente $\leq$ es una dirección.

Dado que la familia $\mathcal{F}$ posee la propiedad de intersección finita se satisface que, para toda $\lambda = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \Lambda$, podemos encontrar un elemento $x_\lambda \in F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$. Si usamos la hipótesis, la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tiene una subred convergente, digamos $(x_{\lambda_m})_{\lambda_m \in \Lambda}$. Lo cual nos asegura la existencia de un elemento x en X tal que la subred converge a x.

Ahora, mostraremos que dicho punto x es elemento de F_i para cada $i \in A$. Para lo cual fijamos F_i, esto implica la existencia de m_0 tal que $\lambda_{m_0} \geq \{i\}$. De tal manera que $\{i\} \subseteq \lambda_m$ para todo $\lambda_m \geq \lambda_{m_0}$, lo cual implica que $x_{\lambda_m} \in F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} \subseteq F_i$, para todo $\lambda_m = \{i_1, \ldots, i_n\} \geq \lambda_{m_0}$.

Por otro lado, como la subred converge a x y F_i es un conjunto cerrado, se sigue del Corolario 1.4.7 que x es elemento de F_i. Por último, notemos que por el teorema 1.2.2 se sigue que X es compacto.

□

CAPÍTULO 2

TEOREMA DE SELECCIÓN DE MICHAEL

En este capítulo se definirán las funciones multivaluadas y la noción de continuidad en éstas. También se presentarán resultados que dan muestra de sus propiedades y como una de sus aplicaciones relevantes (que será usada en la demostración del Teorema de Nash) se presentará la demostración del Teorema del Máximo de Berge. Se introducirá la idea de selecciones de una función multivaluada y se probará el Teorema de Selección de Michael, el cual da condiciones para asegurar la existencia de selecciones continuas. Posteriormente y equipados de este último teorema, se probará el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, el cual se trata de una generalización a funciones multivaluadas del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

La teoría y pruebas presentes en el capítulo fueron estructuradas tomando como referencia y basado en las publicaciones [3],[12], [7] y [2]. En particular, la prueba del Teorema del Punto Fijo de Brouwer y el Teorema de Berge siguen la ruta seguida en [7], [3] y [2], mientras que la demostración del Teorema de Selección de Michael sigue el camino presentado en [12].

2.1. Funciones multivaluadas

Cuando se estudian las funciones, un ejemplo clásico de lo que no es una función se presenta al intentar construir en $\mathbb{R}^2$ una función a partir de la ecuación de la circunferencia, $y^2 + x^2 = r^2$, pues la relación resultante, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, no cumple que los elementos del dominio estén relacionados con un único elemento. Lo anterior lleva a tener que elegir un único signo de la raíz para poder construir una función, con la consecuencia de limitarse a la mitad de la circunferencia. Éste es un ejemplo de que en ocasiones es necesario contar con la posibilidad de relacionar a un elemento con más de un elemento, por ello se introduce la noción de función multivaluada, que precisamente llega a cubrir la restricción binaria de las funciones.

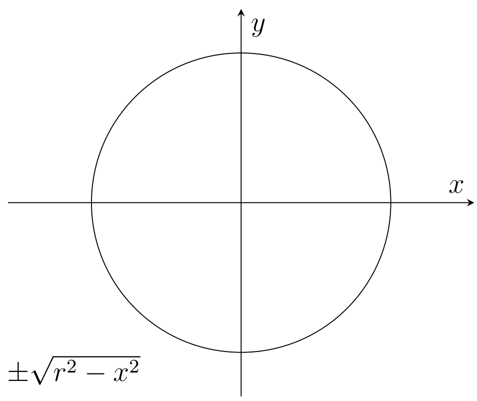


Figura 2.1: Gráfica de la circunferencia de radio r

Una función multivaluada puede entenderse como una función cuyo codominio corresponde al conjunto potencia de algún otro conjunto.

Las funciones multivaluadas también son llamadas correspondencias, como alusión a la correspondencia que envía una persona o dirección de correo. En este trabajo se tomará el nombre de funciones multivaluadas y cuando se hable de funciones, se entenderá que se trata de una relación binaria en el sentido usual.

Definición 2.1.1. *Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función multivaluada o correspondencia F de X a Y es una función de X al conjunto potencia de Y sin el vacío. Es decir, $F : X \longrightarrow \mathscr{P}(Y) \setminus \emptyset$.*

Escribimos $F : X \Rightarrow Y$, para distinguir una función multivaluada.

Si $F : X \Rightarrow Y$ es una función multivaluada, X es el dominio de F y Y es el rango o codominio. La imagen de un subconjunto A de X sobre F se define como el conjunto

$$F(A) := \{y \in Y \mid \ y \in F(x) \text{ para } x \text{ en } A\} = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Es claro que una función de X a Y puede verse como una función multivaluada, la cual a cada punto de X se le relaciona con un conjunto de cardinalidad 1 de Y.

Ejemplo 2.1.2. *Si X e Y son espacios topológicos, y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, se define la función multivaluada $F : Y \Rightarrow X$ en cada $y \in Y$ por*

$$F(y) := f^{-1}(y).$$

Es decir, esta función multivaluada envía a cada elemento de Y a su preimagen bajo la función f.

Ejemplo 2.1.3. $F : [0,1] \rightrightarrows [0,1]$ *definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } x \in [0,1/3] \\ [1/3,2/3] & \text{si } x \in (1/3,2/3] \\ [0,1] & \text{si } x \in (2/3,1] \end{cases}$$

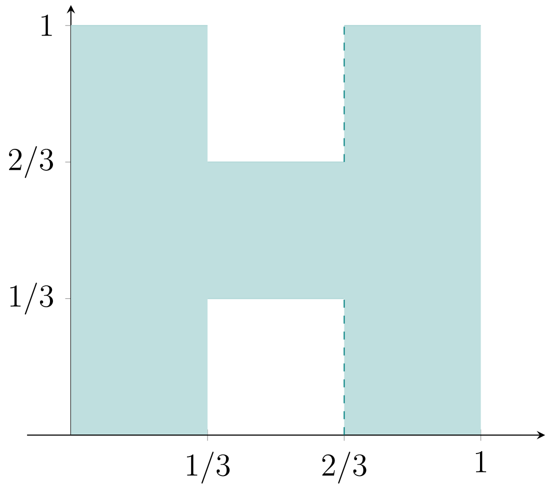


Figura 2.2

Cuando la imagen de todo elemento del dominio de una función multivaluada es un conjunto cerrado, abierto, compacto o convexo, se dice que la función multivaluada es de valores cerrados, abiertos, compactos o convexos, respectivamente.

Al intentar extender la noción de imagen inversa de una función multivaluada se llega a que existen al menos dos maneras claras en que podría hacerse. Veremos más delante que debido a ello se pueden llegar a más de una manera de extender la noción de continuidad en funciones multivaluadas, una por cada tipo de imagen inversa.

Definición 2.1.4. *Sean X e Y espacios topológicos y $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada. Se definen los siguientes dos conjuntos:*

1. *La **inversa superior** de un subconjunto B de Y sobre F es el conjunto*

$$F^u(B) := \{x \in X \mid F(x) \subseteq B\}.$$

2. *La **inversa inferior** de un subconjunto B de Y sobre F es el conjunto*

$$F^l(B) := \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Es claro que cuando se trata de una función multivaluada inducida por una función, la inversa superior y la inversa inferior coinciden y son igual a la imagen inversa ya conocida.

Se verá a continuación la extensión de la noción de continuidad para funciones multivaluadas. Al ser una función también una función multivaluada no es de extrañar que las definiciones sobre continuidad para funciones multivaluadas guarden relación con las nociones de continuidad para funciones, pues al particularizar dichas definiciones sobre estas últimas, se llegue a las definiciones conocidas para funciones. Pensándolas como generalizaciones se puede partir de la idea de que funciones continuas son aquellas que devuelven conjuntos abiertos a conjuntos abiertos, es decir, una función continua es aquella cuya imagen inversa de un conjunto abierto resulta ser también un abierto. Sin embargo, como ya se vio en la definición anterior, existen dos nociones de imagen inversa y cada una de ellas induce una noción de continuidad, que por no ser únicas son llamadas *semicontinuidad* [1].

A continuación se presentan las definiciones de semicontinuidad para funciones multivaluadas y en los siguientes resultados se podrá observar la caracterización de éstas en relación con las imágenes inversas.

Definición 2.1.5. *Sean X e Y dos espacios topológicos, $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada y x en X.*

1. *F es **superiormente semicontinua** en x si para cualquier abierto U en Y que contiene a $F(x)$, existe una vecindad V de x la cual cumple que $F(V) \subseteq U$.*
   F es superiormente semicontinua si es superiormente semicontinua en cada elemento de X.

2. *F es **inferiormente semicontinua** en x si para cualquier abierto O en Y tal que $F(x) \cap O \neq \emptyset$, existe una vecindad W de x la cual cumple que para todo x' en W, $F(x') \cap O \neq \emptyset$.*
   F es inferiormente semicontinua si es inferiormente semicontinua en cada elemento de X.

[1] Existen nociones de semicontinuidad para funciones [3], que no deben confundirse las nociones de semicontinuidad para funciones multivaluadas.

3. *F es **continua** en x si es superiormente semicontinua e inferiormente semicontinua en x.*
   F es continua si es continua en cada elemento de F.

Ejemplo 2.1.6. *Si tomamos la función multivaluada $F : [0,1] \Rightarrow [0,1]$ definida por*

$$F(x) = [0, x].$$

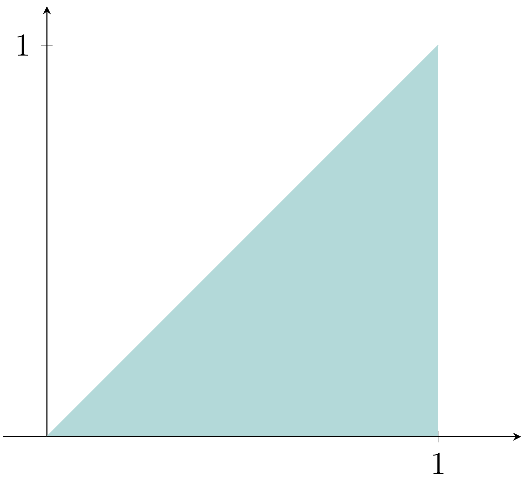


Figura 2.3

Entonces, F es continua.

Ejemplo 2.1.7. *La función definida en el Ejemplo 2.1.3 no es inferiormente semicontinua en 1/3, pero sí en el resto de los puntos. No es superiormente semicontinua en 2/3, pero sí en el resto de los puntos.*

Como ya observamos, cuando vemos a una función como una función multivaluada, la inversa superior y la inferior son la misma. Si una función es continua, vista como una función multivaluada, será tanto inferior como superiormente semicontinua, lo cual muestra que dichas nociones son generalizaciones de la continuidad para funciones.

Proposición 2.1.8. *Sean X e Y espacios topológicos y $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada. Entonces, F es superiormente semicontinua si y sólo si para todo conjunto abierto U de Y, el conjunto $F^u(U)$ es un conjunto abierto en X.*

Demostración. Para la primera parte tomamos un abierto U en Y y x en $F^u(U)$, es decir, $F(x)$ está contenido en U. Como F es superiormente semicontinua, existe una vecindad V de x, la cual cumple que $F(V) \subseteq U$, pero esto implica que todo punto en V se queda dentro de $F^u(U)$, por lo que $F^u(U)$ es abierto en X.

Para la segunda implicación tomamos x en X y U un abierto que contiene a $F(x)$, entonces x está en $F^u(U)$, el cual es abierto, y en particular cumple que $F^u(U) \subseteq F^u(U)$ y, por lo tanto, $F(F^u(U))$ se queda contenida en U, probando así que F es superiormente semicontinua.

□

Proposición 2.1.9. *Sean X e Y espacios topológicos y $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada. Entonces, F es inferiormente semicontinua si y sólo si para todo conjunto abierto U de Y, el conjunto $F^l(U)$ es abierto en X.*

Demostración. Para probar la primera implicación tomamos un abierto U en Y y x en $F^l(U)$, esto es $F(x) \cap U \neq \emptyset$. Como F es inferiormente semicontinua y U es abierto, existe una vecindad V de x tal que para cada x' en V se tiene que $F(x') \cap U \neq \emptyset$, entonces V se queda contenido en $F^l(U)$ y, por lo tanto, $F^l(U)$ es abierto en X.

Tomamos ahora x en X y U un abierto en Y tal que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, luego x es elemento de $F^l(U)$ el cual es abierto en X y, además, por definición, cumple que para cada x' en $F^l(U)$, $F(x') \cap U \neq \emptyset$, teniendo así que F es inferiormente semicontinua.

□

Las siguientes proposiciones dan caracterizaciones secuenciales de la semicontinuidad superior e inferior en funciones multivaluadas entre espacios topológicos metrizables. En el caso de la semicontinuidad superior, dicha caracterización solo se garantiza para funciones multivaluadas con valores compactos. Por otro lado, la caracterización de la semicontinuidad inferior es general.

Proposición 2.1.10. *Sean X e Y espacios metrizables, $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada de valores compactos.*

Entonces, F es superiormente semicontinua si y sólo si para todo x en X y para cualesquiera sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converjan en x y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $y_n \in F(x_n)$ para toda n en los naturales, existe una subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a un punto en $F(x)$.

Demostración. Para la primera implicación suponemos que F es superiormente semicontinua. Tomamos x en X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que y_n está en $F(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Lo probaremos por contradicción. Supongamos que ninguna subsucesión converge a ningún punto en $F(x)$. En particular $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ningún punto de $F(x)$, lo cual implica que para todo z en $F(x)$ hay una vecindad U_z de z y un natural n_z tal que para toda $m > n_z$ se tiene que y_m no está en U_z.
Dado que $F(x)$ es compacto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_p$ en $F(x)$ tal que

$$F(x) \subseteq U := \bigcup_{i=1}^{p} U_{z_i}.$$

Sea $n_0 := \text{máx}\{n_{z_1}, n_{z_2}, \ldots, n_{z_p}\}$, la cual satisface que para todo $m > n_0$ se tiene que y_m no está en U.

Por otro lado, al ser F superiormente semicontinua en x, se sigue en $F^u(U)$ es un abierto y una vecindad de x y, por lo tanto, existe m_0 tal que x_n es elemento de $F^u(U)$ para cada n mayor que m_0. Tomando un natural n_1, mayor que m_0 y n_0 a la vez, tenemos que x_{n_1} es elemento de $F^u(U)$ y, por lo tanto, $F(x_{n_1})$ se queda contenido en U, pero como y_{n_1} es elemento de $F(x_{n_1})$, se tiene además que y_{n_1} es elemento de U, lo cual es una contradicción.

Para la otra implicación, supongamos que F no es superiormente semicontinua en x, entonces existe un abierto O que contiene a $F(x)$ y tal que la imagen bajo F de toda vecindad de x no se queda contenida en O. En particular para toda n en los naturales se cumple que

$$F(B(x, 1/n)) \nsubseteq O.$$

Entonces, se pueden construir sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que x_n es elemento de $B(x, 1/n)$ y y_n es elemento de $F(x_n) \setminus O$. Luego, claramente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y, además, y_n no puede tener ninguna subsucesión convergente a ningún elemento de O y, por lo tanto, tampoco a ningún elemento de $F(x)$, pues la sucesión se queda contenida en $Y \setminus O$, el cual es cerrado, llegando así a una contradicción.

$\square$

Proposición 2.1.11. *Sean X e Y espacios topológicos metrizables y $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada. Entonces, F es inferiormente semicontinua en x si y sólo si dado x en X, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x y para toda y en $F(x)$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y, tal que y_n está en $F(x_n)$, para todo natural $n \in \mathbb{N}$,*

Demostración. Sea x en X, y en Y y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a x.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $B(y, 1/k)$, la bola de radio $1/k$ y con centro en y. Como F es inferiormente semicontinua en x, existe un número real positivo δ_k tal que $F(z) \cap B(y, 1/k) \neq \emptyset$ para todo z en $B(x, \delta_k)$, .

Por otro lado, ya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, para todo δ_k existe un natural n_k tal que x_p está en $B(x,\delta_k)$, para toda natural $p \geq n_k$. Lo cual implica a su vez que $F(x_p)\cap B(y,1/k) \neq \emptyset$.

Con lo anterior, podemos construir la sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

1. Para $m < n_1$, tomamos un elemento arbitrario y_m en $F(x_m)$.

2. Cuando $m = n_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, tomamos un elemento y_m en $B(y,1/k)\cap F(x_{n_k})$.

3. Para cada m tal que $n_k < m < n_{k+1}$, con $k \in \mathbb{N}$, tomamos un elemento y_m en $B(y,1/k)\cap F(x_m)$.

De la construcción de la sucesión, es claro que $y_m \in F(x_m)$ para toda natural m. Veamos ahora que la sucesión converge a y. Para ello tomamos un número real positivo ε, y podemos asegurar la existencia de un natural k tal que $\varepsilon \geq 1/k$. Notemos que, para todo natural $m \geq n_k$, y_m está en $B(y,1/k)$, asegurando así la siguiente desigualdad $d(y_m,y) < 1/k \leq \varepsilon$, y con ello la convergencia a y.

Para la segunda implicación, lo haremos por contradicción. Entonces, existe un abierto O en Y el cual cumple que $O\cap F(x) \neq \emptyset$ y es tal que para toda vecindad V de x, existe un x_V en V el cual cumple que $F(x_V)\cap O = \emptyset$. En particular, para toda $n \in \mathbb{N}$ habrá un x_n en $B(x,1/n)$ tal que $F(x_n)\cap O = \emptyset$.

Si tomamos y un elemento de $O\cap F(x)$, por hipótesis existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que y_n está en $F(x_n)$ y que converge a y, pero como y está en O y este último es abierto, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que y_N está en O, lo cual es una contradicción, pues $F(x_N)\cap O = \emptyset$.

□

Dicho de otro modo, la proposición anterior nos dice que una función multivaluada inferiormente semicontinua es aquella en la que todo elemento y en la imagen de x puede verse como el límite de una sucesión de elementos que se encuentran respectivamente en la imagen de una sucesión de elementos que convergen a x.

Las proposiciones anteriores nos dan caracterizaciones para funciones multivaluadas entre espacios metrizables, pero las siguientes proposiciones dan caracterizaciones, por medio de redes, para funciones multivaluadas entre espacios topológicos arbitrarios.

Teorema 2.1.12. *Sean X e Y espacios topológicos, $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada. Entonces, F es inferiormente semicontinua si y sólo si dado x en X, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red de X que converge a x y cada abierto W en Y tal que $F(x)\cap W \neq \emptyset$, existe α_0 con la propiedad de que para todo $\alpha > \alpha_0$, $F(x_\alpha)\cap W \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que F es inferiormente semicontinua. Tomamos $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, una red convergente a x y un abierto en $W \subseteq Y$, tal que $F(x)\cap W \neq \emptyset$. Al ser F inferiormente semicontinua, se sigue que $F^l(W)$ es abierto en X y además es una vecindad de x. Luego, al ser la red convergente a x, existe un α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$ se cumple que x_α está en $F^l(W)$, es decir, $F(x_\alpha)\cap W \neq \emptyset$.

Para demostrar la segunda parte, lo haremos por contradicción. Entonces, supongamos que existe W un abierto en Y tal que el conjunto $F^l(W)$ no es abierto en X. Es decir, existe x en $F^l(W)$ el cual no es punto interior de $F^l(W)$, lo cual significa que no existe vecindad de x que se quede contenida en $F^l(W)$.

Tomamos $\mathcal{N}_x$, el conjunto dirigido de todas las vecindades de x, el cual será dirigido por inclusión. Entonces, de lo anterior se tiene que para cada V en $\mathcal{N}_x$, existe x_V en V tal que x_V no está en $F^l(W)$, de tal forma se construye la red $(x_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$, la cual converge a x. Notemos que $F(x)\cap W \neq \emptyset$, pues x está en $F^l(W)$, teniendo así las condiciones de la hipótesis para asegurar la existencia de V_0, tal que para todo $V \geq V_0$ se cumple que $F(x_V)\cap W \neq \emptyset$, o visto de otra forma, significa que x_V está en $F^l(W)$, lo cual es una contradicción a la forma en que se construyó la red.

□

Teorema 2.1.13. *X e Y espacios topológicos y $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada. Entonces, F es superiormente semicontinua si y sólo si dado x en X, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red de X que converge a x y W un abierto en Y tal que $F(x)\subseteq W$, existe α_0 con la propiedad de que para todo $\alpha > \alpha_0$, $F(x_\alpha)\subseteq W$.*

Demostración. Supongamos que F es superiormente semicontinua. Sean $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, una red convergente a x y W un abierto en Y tal que $F(x)\subseteq W$. Por hipótesis $F^u(W)$ es abierto en X y además es una vecindad de x. Luego, al ser la red convergente a x, existe un α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$ se cumple que x_α está en $F^u(W)$, es decir, $F(x_\alpha)\subseteq W$.

Para demostrar la segunda parte, lo haremos por contradicción. Supongamos que existe W un abierto en Y tal que el conjunto $F^u(W)$ no es abierto en X. Entonces, existe $x \in F^u(W)$ el cual no es punto interior de $F^u(W)$, lo cual significa que no existe vecindad de x que se quede contenida en $F^u(W)$.

Tomamos $\mathcal{N}_x$, el conjunto dirigido de todas las vecindades de x, el cual será dirigido por inclusión. Se sigue que para cada V en $\mathcal{N}_x$, existe x_V en V tal que x_V no está en $F^u(W)$. De tal forma se construye la red $(x_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$ la cual converge a x. Notemos que $F(x)\subseteq W$, pues x está en $F^u(W)$, teniendo así las condiciones de la hipótesis para asegurar la existencia de V_0, tal que para todo $V \geq V_0$ se cumple que $F(x_V)\subseteq W$, o visto de otra forma significa que x_V está en $F^u(W)$, lo cual es una contradicción a la forma en que se construyó la red.

□

Definición 2.1.14. *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada entre espacios topológicos X e Y. Se define la* ***gráfica*** *de F, denotado por $Gr(F)$, como el subconjunto del espacio $X \times Y$ definido de la siguiente manera:*

$$Gr(F) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Si la gráfica es de F es un conjunto cerrado en $X \times Y$, se dirá que F tiene gráfica cerrada.

Veremos con los siguientes resultados que la propiedad de tener gráfica cerrada está relacionada con que la función multivaluada sea superiormente semicontinua.

Lema 2.1.15. *Si X es un espacio topológico Hausdorff, A un subconjunto compacto de X y x un elemento que no está en A. Entonces, existen abiertos disjuntos U y V tales que x es elemento de U y A un subconjunto de V.*

Demostración. Como X es Hausdorff, para cada y en A existen abiertos disjuntos U_y y V_y, tales que son vecindades de x e y, respectivamente. El conjunto $\{V_y\}_{y \in A}$ es una cubierta abierta de A y al ser éste un conjunto compacto, existen $y_1, \ldots, y_n$ tal que $\{V_y\}_{i=1}^n$ es una subcubierta finita. Definimos ahora los conjuntos abiertos

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \text{ y } V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

Notemos que A está contenido en V. Resta probar que, U y V son disjuntos, para ello supongamos que existe z en la intersección de U y V, por ende, z es un elemento de V_{y_k} para algún natural k menor o igual a n, pero además es un elemento de U_{y_k}, lo cual es una contradicción.

□

Proposición 2.1.16. *Sean X e Y espacios topológicos y $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada. Si Y es Hausdorff y F es superiormente semicontinua de valores compactos, entonces F tiene gráfica cerrada.*

Demostración. Demostraremos que el complemento de $Gr(F)$ es abierto. Sea (x, y) en $X \times Y \setminus Gr(F)$, es decir, y no está en $F(x)$. Al ser $F(x)$ compacto y Y Hausdorff, por el Lema 2.1.15, existen abiertos disjuntos V y W tales que y está en V y $F(x)$ se queda contenido en W. Luego, como F es superiormente semicontinua, la inversa superior $F^u(W)$ es abierto en X, por lo tanto, el conjunto $F^u(W) \times V$ es abierto en $X \times Y$ y contiene a (x, y). Más aún, $(F^u(W) \times V) \cap Gr(F) = \emptyset$, es decir, $F^u(W)$ es una vecindad de (x, y) contenida en $X \times Y \setminus Gr(F)$, concluyendo así que $Gr(F)$ es un conjunto cerrado.

□

Proposición 2.1.17. *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada entre espacios topológicos X e Y. Si Y es compacto y F tiene gráfica cerrada, entonces F es superiormente semicontinua.*

Demostración. Lo demostraremos por contrapositiva. Supongamos que F no es superiormente semicontinua, entonces existe un abierto W en Y para el cual $F^u(W)$ no es abierto en X. Por consiguiente, existe x en $F^u(W)$ tal que para toda vecindad V de x, habrá un x_V en V que no esté en $F^u(W)$, lo cual asegura a su vez la existencia de un elemento y_V en $F(x_V)$ que no está en W.

Si tomamos como conjunto dirigido a $\mathcal{N}_x$, el conjunto de todas las vecindades de x dirigidas por inclusión, $(y_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$ es una red en $Y\backslash V$. Dado que, Y es compacto, existe una subred de $(y_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$ la cual converge a un punto y en Y. Más aún y está en $Y \setminus W$ por ser un conjunto cerrado. Luego, y no está en $F(x)$, pues no está en W. Entonces, logramos encontrar una red $(x_V, y_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$ en $Gr(F)$ que tiene una subred convergente a un punto (x, y) el cual no está en $Gr(F)$, lo cual es una contradicción al hecho de que la gráfica de F sea cerrada. Se concluye así que F es superiormente semicontinua.

□

De las dos proposiciones anteriores se sigue el siguiente resultado que da una equivalencia entre funciones multivaluadas superiormente semicontinuas y funciones con gráfica cerrada, bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.1.18. *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada con valores cerrados entre espacios topológicos X e Y, con Y un espacio compacto Hausdorff. Entonces, F es superiormente semicontinua si y sólo si F tiene gráfica cerrada.*

Demostración. Si F es superiormente semicontinua y de valores cerrados, entonces es de valores compactos, ya que todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es también compacto. Más aún, F tiene gráfica cerrada debido a que Y es Hausdorff y se dan las condiciones de la Proposición 2.1.16.

Por otro lado, si F tiene gráfica cerrada, al ser Y compacto se sigue de la Proposición 2.1.17 que F es superiormente semicontinua.

□

Como todo espacio métrico es Hausdorff, podemos asegurar que toda función multivaluada con codominio métrico y compacto será superiormente semicontinua y con valores cerrados si y sólo si tiene gráfica cerrada.

2.2. Preservación de la semicontinuidad

En los siguientes resultados veremos la preservación de la semicontinuidad en funciones multivaluadas construidas a partir de operar sobre otras funciones multivaluadas. Probaremos que la clausura y producto de funciones multivaluadas dan como resultado funciones que preservan las propiedades de semicontinuidad. Además, se probarán algunos resultados sobre la preservación de la semicontinuidad en funciones multivaluadas que se definen a partir de otras funciones multivaluadas.

Para cualquier función multivaluada F entre espacios X y Y, se puede definir de manera natural la función multivaluada $\overline{F} : X \Rightarrow Y$ con valores cerrados, en donde a cada x en X le corresponde la cerradura de $F(x)$. A $\overline{F}$ la llamaremos la cerradura de F.

Proposición 2.2.1. *Sean X e Y espacios topológicos y $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada. Entonces, la cerradura de F es inferiormente semicontinua si y sólo si F es inferiormente semicontinua*[2].

Demostración. Notemos que para toda x en X y para todo abierto W en Y, $\overline{F}(x) \cap W \neq \emptyset$ si y sólo si $F(x) \cap W \neq \emptyset$.

De lo anterior se sigue que $\overline{F}^l(W) = F^l(W)$ y gracias a la por la Proposición 2.1.9, se tiene lo deseado.

□

Si se tiene una colección finita de funciones multivaluadas $\{F_i : X_i \Rightarrow Y_i\}_{i=1}^n$ entre espacios topológicos, se puede operar sobre ellos para definir una función multivaluada F conocido como el producto de las funciones multivaluadas, la cual estará definida entre los espacios producto $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$ y $Y := \prod_{i=1}^{n} Y_i$, y es tal que para cualquier elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ en X se define por

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i).$$

A continuación, veremos que el producto de funciones multivaluadas superiormente semicontinuas también es una función superiormente semicontinua, pero antes demostraremos un lema que facilitará la demostración.

Lema 2.2.2. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios topológicos, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ el producto topológico de dichos espacios, $\{U_i\}_{i=1}^n$ una colección de conjuntos compactos con U_i*

[2]La proposición equivalente para la cerradura de funciones multivaluadas superiormente semicontinuas no se cumple, a menos que el codominio sea un espacio topológico normal [3, Lema 17.22].

contenido en X_i, respectivamente y V un conjunto abierto en X tal que $\prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq V$. Entonces, existe un conjunto abierto básico de X, $W := \prod_{i=1}^{n} W_i$, donde W_i es abierto en X_i, tal que $\prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq W \subseteq V$.

Demostración. Lo haremos por inducción sobre n.

Supongamos que $n = 2$ y tomamos conjuntos compactos U_1 en X_1 y U_2 en X_2, V un abierto en X tal que $U_1 \times U_2 \subseteq V$.

Para V existe una familia de abiertos básicos $\{G_\alpha \times J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $X_1 \times X_2$ tal que

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \times J_\alpha.$$

Dicha familia es una cubierta abierta de $U_1 \times U_2$ y como este último es compacto, existe una subcubierta $\{G_i \times J_i\}_{i=1}^{n}$ finita que, cumple

$$U_1 \times U_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i \times J_i \subseteq V.$$

Para cada x en U_1 tomamos

$$G_x = \bigcap_{x \in G_i} G_i$$

la cual es una vecindad de x. De igual manera para y en U_2 tomamos la vecindad

$$J_y = \bigcap_{y \in J_i} J_i.$$

Ahora, si (x, y) está en $U_1 \times U_2$ existirá un $G_m \times J_m$ en $\{G_i \times J_i\}_{i=1}^{n}$ que lo contiene, esto nos dice que x está en G_m y y está en J_m, por lo tanto, podemos asegurar que, si (x', y') es un elemento de $G_x \times J_y$ se sigue que x' está en G_m y de igual manera y' está en J_m, teniendo así que

$$G_x \times J_y \subseteq G_m \times J_m.$$

Definimos ahora

$$W_1 := \bigcup_{x \epsilon U_1} G_x \;\text{ y }\; W_2 := \bigcup_{y \epsilon U_2} J_y,$$

ambos abiertos en X_1 y X_2, respectivamente y $W := W_1 \times W_2$.
Se tiene que W es un abierto básico de $X_1 \times X_2$ y además cumple que

$$U_1 \times U_2 \subseteq W \subseteq \bigcup_{i=1} G_i \times J_i \subseteq V.$$

Si suponemos cierto para el n, podemos tomar

$$Y = \prod_{i=1}^{n} X_i \quad \text{y} \quad X_{n+1},$$

lo cual nos lleva al caso para $n = 2$, teniendo así que la afirmación es validad para cualquier n en los naturales.

□

Teorema 2.2.3. *Sean $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ espacios topológicos y para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F_i\colon X_i \Rightarrow Y_i$ funciones multivaluadas superiormente semicontinuas y de valores compactos. Si se definen los espacios productos X y Y de la siguiente manera:*

$$X := \prod_{i=1}^{n} X_i \text{ y } Y := \prod_{i=1}^{n} Y_i,$$

entonces la función multivaluada $F : X \Rightarrow Y$, definida como el producto de las funciones multivaluadas $F_1, \ldots, F_n$, es superiormente semicontinua y de valores compactos.

Demostración. Sean x en X y V un abierto en Y tal que $F(x) \subseteq V$. Notemos que $F(x)$ es compacto por ser el producto finito de compactos. Por el lema anterior, existe un abierto U en X de la forma

$$U = \prod_{i=1}^{n} U_i$$

con U_i abierto en X_i, tal que $F(x) \subseteq U \subseteq V$.

Para $i = 1, \ldots, n$ tomamos $F^u(U_i)$, la inversa superior de U_i sobre F_i, dichos conjuntos son abiertos, pues F_i es superiormente semicontinua. Si tomamos un elemento x' en

$$W = \prod_{i=1}^{n} F^s(U_i)$$

el cual es una vecindad de X, tenemos así que

$$F(x') = \prod_{i=1}^{n} F_i(x')$$

se queda contenido en U y por consecuencia en V. Teniendo así que $F(W) \subseteq V$, por lo tanto, F es superiormente semicontinua.

Por último, F es de valores compactos, pues cada F_i es de valores compactos. $\square$

Los siguientes dos lemas dan muestra de la preservación de la semicontinuidad inferior en funciones multivaluadas entre espacios metrizables, cuando éstas están definidas a partir de una función multivaluada inferiormente semicontinua.

Lema 2.2.4. *Sean X e Y espacios topológicos con Y metrizable, $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada inferiormente semicontinua, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, d una métrica admisible para Y y r un número real tal que $d(f(x), F(x)) < r$ para todo x en X. Entonces, la función multivaluada $G : X \rightrightarrows Y$ definida por*

$$G(x) := F(x) \cap B(f(x), r)$$

es inferiormente semicontinua.

Demostración. Sea U un abierto en Y y x en $G^l(U)$. Como x está en $G^l(U)$, existe y en $G(x) \cap U$ y podemos definir $\varepsilon := r - d(f(x), y)$.

Como y está en $B(f(x), r)) \cap U$, el cual es abierto, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$B(y, \delta) \subseteq B(f(x), r) \cap U.$$

Como y está en $F(x) \cap B(y, \delta/2)$ y F es inferiormente semicontinua podemos definir una vecindad de x de la siguiente manera:

$$V_0 = F^l(B(y, \delta/2)).$$

Por otro lado, f es continua y podemos definir otra vecindad de x de la siguiente manera:

$$V_1 = f^{-1}(B(f(x), \delta/2)).$$

Tomamos $V := V_0 \cap V_1$ que también es vecindad de x y mostraremos que V está contenida en $G^l(U)$.

Sea x' en V, mostraremos que $G(x') \cap U \neq \emptyset$. Como x' está en V_0 existe y' en $F(x') \cap B(y, \delta/2)$, pues x' está en V_0. Más aún y' está en U. Además, $f(x')$ está en $B(f(x), \delta/2)$, pues x' está en V_1.

Luego, y' está en $B(f(x'), r))$, pues

$$\begin{aligned}
d(y', f(x')) &\leqslant d(y', y) + d(y, f(x)) + d(f(x), f(x')) \\
&< \delta/2 + r - \varepsilon + \delta/2 \\
&< \delta/2 + r - \delta + \delta/2 \\
&= r
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior y' se encuentra en $(F(x') \cap B(f(x'), r)) \cap U = G^l(x') \cap U$ y, por lo tanto, V está contenida en $G^l(U)$, como se quería probar. Recapitulando, llegamos a que, para cualquier x en $G^l(U)$ existe una vecindad de x que se queda contenido en $G^l(U)$, por lo tanto, podemos concluir que $G^l(U)$ es abierto y en consecuencia G es inferiormente semicontinua.

Se concluye que $V \subseteq G^l(U)$. Entonces, $G^l(U)$ es abierto en X y por la Proposición 2.1.9, G es inferiormente semicontinua.

□

Lema 2.2.5. *Sean X e Y espacios topológicos metrizables, $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada, d una métrica admisible para X y ε un número real positivo. Entonces, la función multivaluada $G : X \Rightarrow Y$ definida por*

$$G(x) := F(B(x, \varepsilon)) = \bigcup_{x' \epsilon B(x,\varepsilon)} F(x')$$

es inferiormente semicontinua.

Demostración. Sea V un abierto en Y y x en $G^l(V)$.
Como x está en $G^l(V)$, existe x_0 en $B(x, \varepsilon)$ tal que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Tomamos α un real tal que $0 < \alpha < \varepsilon - d(x_0, x)$.
Sea y en $B(x, \alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leqslant d(y, x) + d(x_0, x) \\ &< \alpha + d(x_0, x) \\ &< \varepsilon - d(x_0, x) + d(x_0, x) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Consecuentemente x_0 está en $B(y, \varepsilon)$, además $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto, $G(y) \cap V \neq \emptyset$. Se concluye que $B(x, \alpha) \subseteq G^l(V)$ y por consecuencia, $G^l(V)$ es abierto y G es inferiormente semicontinua.

□

Si a la imagen de cada elemento bajo una función multivaluada, le asociamos su casco convexo, obtenemos una función multivaluada que preserva la semicontinuidad inferior.

Teorema 2.2.6. *Sean X, Y espacios topológicos lineales normados de dimensión n y $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada inferiormente semicontinua. Entonces, la función multivaluada $G : X \Rightarrow Y$ definida por*

$$G(x) := Conv(F(x))$$

es inferiormente semicontinua y de valores convexos.

Demostración. Claramente G es una función de valores convexos, así que basta probar que es inferiormente semicontinua.

Por la Proposición 2.1.12 basta demostrar que para cualquier x en X y cualquier abierto V en Y tal que $F(x) \cap V \neq \emptyset$, si $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una red en X que converge a x, entonces existe un α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$, se tiene que $G(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$.

Sea y en $G(x) \cap V$, por el Teorema de Carathéodory existen $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ en $F(x)$ tal que

$$y \in Conv(\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}).$$

En consecuencia, se puede escribir a y como una combinación lineal convexa de $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$, es decir,

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i$$

donde para toda i, λ_i está en el intervalo $[0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Dado que y está en V, el cual es abierto, existe r un número real positivo tal que

$$B(y, r) \subseteq V.$$

Como F es inferiormente semicontinua y y_i está dentro de $F(x) \cap B(y_i, r)$ para cada $i = 1, \ldots, n+1$, existe α_i en A tal que para $\alpha > \alpha_i$, $F(x_\alpha) \cap B(y_i, r) \neq \emptyset$. Por ende, existe $y_{(i,\alpha)}$ en $F(x_\alpha) \cap B(y_i, r)$.

Tomamos $\alpha_0 = \max\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Entonces, para $\alpha > \alpha_0$, el elemento

$$y_\alpha := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_{(i,\alpha)}$$

se queda dentro de $G(x_\alpha)$. Mas aún, y_α está en V, pues $B(y, r) \subseteq V$ y

$$\begin{aligned}
\|y_\alpha - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_{(i,\alpha)} - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (y_{(i,\alpha)} - y_i) \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \|(y_{(i,\alpha)} - y_i\| \\
&< \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i r \\
&= r \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \\
&= r.
\end{aligned}$$

Se concluye que para toda $\alpha > \alpha_0$, $G(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ y, por lo tanto, G es inferiormente semicontinua.

$\square$

Uno de los recursos para la prueba del Teorema de Nash, será el teorema conocido como Teorema del Máximo de Berge.

Teorema 2.2.7 (Teorema del máximo de Berge). *Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada continua y de valores compactos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define la función multivaluada $G : X \rightrightarrows Y$ como*

$$G(x) = \{y \in F(x) |\ f(x, y) \geq f(x, y') \text{ para todo } y' \text{ en } F(x)\}$$

y $g : X \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = f(x, y) \text{ para algún } y \text{ en } G(x)$$

Entonces, G es de valores compactos y superiormente semicontinua y g es continua.

Demostración. Por el Teorema de Weierstrass podemos asegurar que $G(x)$ es distinto del vacío, por lo cual G está bien definida.

Probemos ahora que, para x en X, $G(x)$ es cerrado. Tomamos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $G(x)$, la cual converge a un punto y en $F(x)$, pues $F(x)$ es cerrado.

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $G(x)$, $f(x, y_n) \geq f(x, y_0)$ para toda n natural y todo y_0 en $F(x)$. Tomando el límite cuando n tiende a infinito y usando el hecho de que f es continua, tenemos

$$f(x, y) = f(x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x, y_n) \geq f(x, y_0) \text{ para toda } x_0 \text{ en } F(x).$$

Se concluye que y está en $G(x)$, por lo tanto, $G(x)$ es cerrado.

Claramente $G(x)$ es compacto, pues es un conjunto cerrado dentro de $F(x)$ el cual es compacto.

Para probar que G es superiormente semicontinua usaremos la caracterización secuencial presentada en la Proposición 2.1.10.

Sea x en X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que para toda n en los naturales y_n está en $G(x_n)$. Se tiene que, para toda n en lo naturales, y_n está en $F(x_n)$ y como $F(x_n)$ es compacto, se asegura la existencia de una subsucesión $(y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún punto y en $F(x)$.

Probemos ahora que y está en $G(x)$, para ello usamos que F es inferiormente semicontinua, lo cual implica que, para toda y' en $F(x)$, existe una subsucesión

$(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y convergente a y' tal que, para toda n en los naturales, y'_n está en $F(x_n)$. Como y_n está en $G(x)$ y f es continua,

$$f(x_{n_m}, y_{n_m}) > f(x_{n_m}, y'_{n_m}) \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando m tiende a infinito tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}, y_{n_m}) &= f(\lim_{m\to\infty} x_{n_m}, \lim_{m\to\infty} y_{n_m}) \\
&= f(x,y) \\
&\geq f(x,y') \\
&= f(\lim_{m\to\infty} x_{n_m}, \lim_{m\to\infty} y'_{n_m}) \\
&= \lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}, y'_{n_m}).
\end{aligned}$$

Como la desigualdad anterior es válida para toda y' en $F(x)$, se concluye que y está en $G(x)$. Por lo tanto, G es superiormente semicontinua.

Por último, demostraremos que g es continua. Para ello tomamos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x en X.
Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe y_n en $G(x_n)$ tal que $g(x_n) = f(x_n, y_n)$. Como G es superiormente semicontinua existe una subsucesión de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto y en $G(x)$.

Como G es inferiormente semicontinua, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe y'_n en $G(x_n)$ tal que la sucesión $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y.

Así $g(x_n) = f(x_n, y'_n)$ converge a $g(x) = f(x,y)$. Por lo tanto, la función g es continua.

□

2.3. Selecciones y teorema de selección de Michael

Para cada elemento en el dominio de una función multivaluada es posible elegir o seleccionar un único elemento en su imagen, de tal manera que se podría construir una función conocida como selección. De manera formal, una selección se detalla en la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Sea $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada. Una selección de F es una función $f : X \to Y$ tal que, para todo x en X, f(x) está en F(x).*

Una selección puede ser arbitraria y ser o no ser continua. Como consecuencia, es de interés saber en qué condiciones es posible obtener una selección continua.

Para dar un primer tratamiento de la existencia de selecciones continuas, veremos antes un resultado que, si bien no asegura lo buscado, sí asegura la existencia de una aproximación de selección continua para funciones multivaluadas definidas entre un espacio topológico lineal normado y un espacio topológico metrizable. Decimos que es una aproximación de selección, pues puede que algunos elementos de la función en cuestión no se encuentren dentro de su imagen, pero sí muy cerca de ella.

Lema 2.3.2. *Sea L un espacio topológico lineal normado, X un espacio topológico metrizable y $F : X \Rightarrow L$ una función multivaluada inferiormente semicontinua tal que, para toda x en X, $F(x)$ es convexa.*
Entonces, para toda $r > 0$ existe una función continua $f : X \to L$ tal que, para toda x en X, $d(f(x), F(x)) < r$.

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{B(y, r) |\ y \in L\}$. Por el Lema 1.2.11 existe una partición de la unidad $\mathscr{P}$ en X que está subordinada a $F^l(\mathscr{B}) = \{F^l(B) |\ B \in \mathscr{B}\}$.

Así, para toda p en $\mathscr{P}$ existe b_p en L tal que

$$p^{-1}((0, 1]) \subseteq F^l(B(b_p, r)).$$

Se define $f : X \to L$ como

$$f(x) := \sum_{p \in \mathscr{P}} p(x) b_p.$$

Usando que $\mathscr{P}$ es una partición de la unidad, podemos asegurar que para toda x en X existe U_x vecindad de x y un subconjunto finito $G(x)$ de $\mathscr{P}$ tal que

$$U_x \cap p^{-1}((0, 1]) \neq \emptyset \text{ si y sólo si } p \text{ está en } G(x).$$

Fijando x en X. Observamos que la restricción de f en U_x está dada por

$$f(y) = \sum_{p \in G(x)} p(y) b_p$$

la cual es una función continua en y, ya que $G(x)$ es finito. Así, f está bien definida y es continua en X.

Sea $\mathscr{G}(x) := \{p \in \mathscr{P} |\ p(x) \neq 0\}$, para todo p en $\mathscr{G}(x)$ se tiene que x está en $p^{-1}((0, 1]) \subseteq F^l(B(b_p, r))$ y, por lo tanto, $F(x) \cap B(b_p, r) \neq 0$.

Tomamos y_p en $F(x) \cap B(b_p, r)$. Notemos que

$$f(x) = \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) b_p \ y \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) = 1,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\left\| f(x) - \sum_{p \epsilon \mathscr{G}(x)} p(x) y_p \right\| &= \left\| \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) b_p - \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) y_p \right\| \\ &= \left\| \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x)(b_p - y_p) \right\| \\ &= \sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) \|b_p - y_p\| \\ &= \|b_p - y_p\| \\ &< r\end{aligned}$$

Ya que $f(x)$ es convexo y $\sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) = 1$, se tiene que $\sum_{p \in \mathscr{G}(x)} p(x) y_p$ está en $F(x)$ y como consecuencia se tiene que $d(f(x), F(x)) < r$.

□

Los siguientes lemas serán utilizados para la demostración del Teorema de Selección de Michael.

Lema 2.3.3. *Sean X, Y espacios metrizables, d una métrica admisible para Y y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con $f_n : X \to Y$ una función continua para toda n, tal que $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe para todo x en X. Entonces, la función $f : X \to Y$ puntualmente definida por $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ es continua.*

Además, si f_n es acotada para toda n en los naturales, entonces f también es acotada y la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Demostración. Aseguramos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N en los naturales tal que para todo x en X y $m \geq N$ $d(f(x), f_m(x)) < \varepsilon$. Al ser $(f_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe N en los naturales tal que $d(f_n, f_m) < \epsilon/2$ para cualesquiera $n, m > N$.

Sea x en X, se tiene que $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ para cualesquiera $n, m > N$ y como $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, se tiene que, para todo $m > N$,

$$d(f(x), f_m(x)) = \lim_{n \to \infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Concluimos que $(f_n)_{n \epsilon N}$ converge uniformemente a f en $C(X, Y)$.

Probemos ahora que f es continua. Sea x en X y $\varepsilon > 0$, por la afirmación existe N en los naturales tal que $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/3$ para toda $m > N$. Como f_N es continua en X, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f_N(x), f_N(y)) < \varepsilon/3$.

Tomando z en X tal que $d(x,z) < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(z)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(z)) \\ &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(z)) + d(f_N(z), f(z)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo anterior se concluye que f es continua en X.

Suponemos ahora que f_n es acotada respecto a la métrica d para toda n en los naturales. Nos queda demostrar que $diam(f(X)) < \infty$.

Primero notemos que existe M en los naturales tal que para todo x en X $d(f(x), f_n(x)) < 1$ si $n \geq M$.

Tomamos x, y en X, entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_M(x)) + d(f_M(x), f(y)) \\ &\leq d(f(x), f_M(x)) + d(f_M(x), f_M(y)) + d(f_M(y), f(y)) \\ &< 2 + diam(f_M(X)). \end{aligned}$$

Como f_M es acotada respecto a d, $d(f(x), f(y)) < \infty$ y, por lo tanto, $diam(f(X)) < \infty$.

Usando la primera afirmación, se concluye que $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ es acotada respecto a d.

□

Lema 2.3.4. *Sean X, Y espacios metrizables, $F : X \Rightarrow Y$ una función multivaluada inferiormente semicontinua, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Y$ una selección continua para la función multivaluada $F\mid_A$: $A \Rightarrow Y$. Entonces, la función multivaluada G definida de la siguiente manera es inferiormente semicontinua.*

$$G(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & \text{si } x \in A \\ F(x) & \text{si } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Demostración. Afirmamos que, para todo abierto U, $f^{-1}(U) \subseteq F^l(U)$. En efecto, si x está en $f^{-1}(U)$, se tiene que $f(x) \in U$. Además, $f(x)$ está en $F(x) \cap U$, ya que $f(x)$ está en $F(x)$. Por lo tanto, x está en $F^l(U)$.

Por ser f continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en A, por lo cual $f^{-1}(U) = A \cap V$ para algún abierto V en X.

Como $f^{-1}(U)$ está contenido en $F^l(U)$ y este es abierto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que V está contenido en $F^l(U)$, pues de no ser así, se puede tomar $V' := V \cap F^l(U)$ la cual es abierta y sigue cumpliendo que $f^l(U) = A \cap V'$. De tal forma llegamos a que

$$G^l(U) = V \cup (F^l(U) \setminus A)$$

la cual es una unión de abiertos y, por lo tanto, $G^l(U)$ es abierto y G es inferiormente semicontinua.

$\square$

En 1956, el matemático estadounidense Ernest Michael, publicó en [11] el Teorema que lleva su nombre y que da condiciones para asegurar la existencia de selecciones continuas.

Teorema 2.3.5 (**Selección de Michael**). *Sea L un espacio topológico lineal normado, X un espacio metrizable y sea $F : X \Rightarrow L$ una función multivaluada inferiormente semicontinua de valores convexos tal que, para toda x en X, $F(x)$ es completo con respecto a la norma de L. Entonces, para todo subconjunto cerrado A de X y para toda selección continua $f : A \to L$ de la función multivaluada $F|_A$: $A \Rightarrow L$, existe una selección continua $g : X \to L$ de F, la cual extiende a f.*

Demostración. Comenzamos para el caso cuando $A = \emptyset$. Por inducción se puede construir una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X a L tal que

1. $d(f_n, f_{n+1}) < 2^{-(n-1)}$
2. $d(f_n(x), F(x)) < 2^{-n}$ para toda x en X.

Para $n = 1$ y $r = 2^{-1}$ aplicamos el Lema 2.3.2 para encontrar $f_1 : X \to L$ con la propiedad de que $d(f_1(x), F(x)) < 2^{-1}$ para toda x en X. Supongamos que f_n está bien definida, entonces se define $F_n : X \Rightarrow L$ por

$$F_n(x) = \overline{F(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n})}.$$

Entonces, F_n es inferiormente semicontinua por el Lema 2.2.4 y la Proposición 2.2.1.

Usando nuevamente el Lema 2.3.2 se puede encontrar $f_{n+1} : X \to L$ tal que

$$d(f_{n+1}(x), F_n(x)) < 2^{-(n+1)} \textit{ para toda } x \textit{ en } X.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \overline{F(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n})} \\ &\subseteq \overline{F(x)} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$d(f_{n+1}(x), F(x)) \leq d(f_{n+1}(x), F_n(x)) \leq 2^{-n}.$$

Teniendo así que f_{n+1} cumple con la propiedad 2. Luego, para toda x en X, existe z en $F_n(x)$ tal que $d(f_{n+1}(x), z) < 2^{-(n+1)}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(f_{n+1}(x), f_n(x)) &\leq d(f_{n+1}(x), z) + d(z, f_n(x)) \\ &\leq 2^{-(n+1)} + 2^{-n} \\ &= 3 \cdot 2^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(f_{n+1}, f_n) &\leq 3 \cdot 2^{-(n+1)} \\ &< 4 \cdot 2^{-(n+1)} \\ &= 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Así, podemos concluir que f_{n+1} es la función buscada.

Afirmamos que, para todo x en X, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y está dentro de $F(x)$. Tomando x en X. Por 2 podemos asegurar que para toda n en lo naturales existe a_n en $F(x)$ tal que $d(f_n(x), a_n) < 2^{-n}$. Consecuentemente, por 1 se tiene que

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+1}) &\leq d(a_n, f_n(x)) + d(f_n(x), f_{n+1}(x)) + d(f_{n+1}(x), a_{n+1}) \\ &< 2^{-n} + 2^{-(n-1)} + 2^{-(n+1)} \\ &< 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Así se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como $F(x)$ es completo, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe.

Como $d(f_n(x), a_n) < 2^{-n}$ para toda n en los naturales, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

también existe, y es igual a a. Ya que a está en $F(x)$, se tiene que $f(x)$ está en $F(x)$.

Por la Proposición 2.3.3 concluimos que f es continua y es la selección requerida.

Si $A \neq \emptyset$, entonces podemos definir la función

$$G(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & \text{si } x \in A \\ F(x) & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Por el Lema 2.3.4, G es una función multivaluada e inferiormente semicontinua que además es de valores convexos y completos respecto a la norma en L. Volviendo así al caso cuando $A = \emptyset$, con lo cual podemos asegurar la existencia de la una selección continua para G que además extiende f.

□

2.4. Teorema del punto fijo de Kakutani

Para una función multivaluada $F : X \rightrightarrows Y$, un punto fijo de F será un punto x_0 en X tal que x_0 está en $F(x_0)$.

Para la demostración del Teorema de Kakutani, el cual como ya se ha mencionado anteriormente, es una generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, utilizaremos precisamente este último teorema como apoyo, además del Teorema de Selección de Michael y un lema que a continuación demostraremos.

Antes de enunciar el lema, aclaramos una notación que será usada. Si tenemos un conjunto A en un espacio métrico y un número real δ, el conjunto $B(A, \delta)$, al cual llamaremos la bola de radio δ y centro en el conjunto A, se define por

$$B(A, \delta) := \bigcup_{x \in A} B(x, \delta).$$

Lema 2.4.1. *Sean X, Y espacios topológicos metrizables con X compacto e Y un subconjunto compacto y convexo de un espacio lineal normado y de dimensión finita L. Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada de valores convexos y con gráfica cerrada. Entonces, para todo $\beta > 0$ existe una función multivaluada $G : X \rightrightarrows Y$ inferiormente semicontinua de valores convexos tal que $Gr(G) \subseteq B(Gr(F), \beta)$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.5 y el Teorema 2.2.6, la función multivaluada $G_\varepsilon(x) = Conv(F(B(x, \varepsilon)))$ es inferiormente semicontinua y de valores convexos.

Fijamos $\beta > 0$. Afirmamos que para alguna $\varepsilon > 0$ la función G_ε es la función buscada. Para demostrarlo supondremos lo contrario, es decir, para toda $\varepsilon > 0$, $Gr(G_\varepsilon) \nsubseteq B(Gr(F), \beta)$. En particular para toda natural n, $Gr(G_{1/n}) \nsubseteq B(Gr(F), \beta)$. Así, es posible encontrar una sucesión $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que (x_n, y_n) está en $Gr(G_{1/n})$, pero (x_n, y_n) no está en $B(Gr(F), \beta)$, es decir, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$d((x_n, y_n), Gr(F)) \geq \beta.$$

Como (x_n, y_n) está en $Gr(G_{1/n})$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y_n está en $G_{1/n}(x_n)$. Además, por el Teorema de Carathéodory, existe una colección de números reales positivos $\lambda_{(1,n)}, \lambda_{(2,n)}, \ldots, \lambda_{(m+1,n)}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} = 1$$

y un conjunto $\{y_{(1,n)}, y_{(2,n)}, \ldots, y_{(m+1,n)}\}$ contenido en $F(B(x_n, 1/n))$ tal que

$$y_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} y_{(i,n)}.$$

Más aún, existe $x'_{(i,n)}$ en $B(x_n, 1/n)$ tal que $y_{(i,n)}$ está en $F(x'_{(i,n)})$.

Como X, Y y $[0,1]$ son espacios métricos compactos, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las sucesiones definidas anteriormente convergen cuando $n \to \infty$, es decir,

- $x_n \to x \in X$
- $y_n \to y \in Y$
- $\lambda_{(i,n)} \to \lambda_i \in [0,1]$ *para toda* $1 \leq i \leq m+1$
- $y_{(i,n)} \to y_i \in Y$ *para toda* $1 \leq i \leq m+1$
- $x'_{(i,n)} \to x'_i \in X$ *para toda* $1 \leq i \leq m+1$.

Si fijamos i, al cumplirse que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(x'_{(i,n)}, x_n) < 1/n$, se tiene que $x = x'_i$.

Luego, para toda $n \in \mathbb{N}$, $(x'_{(i,n)}, y_{(i,n)})$ está en $Gr(F)$ y usando que la gráfica es cerrada, se llega a que (x, y_i) está en $Gr(F)$, esto es y_i está en $F(x)$.

Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{m+1} \lim_{n\to\infty} \lambda_{(i,n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} y_{(i,n)} \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \lim_{n\to\infty} \lambda_{(i,n)} \lim_{n\to\infty} y_{(i,n)} \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i \\ &= y.\end{aligned}$$

Como $F(x)$ es convexo, (x, y) está en $Gr(F)$. Por otro lado, cuando n tiende a infinito, (x_n, y_n) tiende a (x, y). Es decir, para β existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $d((x_n, y_n), (x, y)) < \beta$.

Mas aún, tenemos que $d((x_n, y_n), Gr(F)) \leq d((x_n, y_n), (x, y))$ lo cual implica que $d((x_n, y_n), Gr(F)) < \beta$, lo cual es una contradicción, pues, para todo natural n,

$$d((x_n, y_n), Gr(F)) \geq \beta.$$

$\square$

En el lema anterior podemos pedir que la función G sea cerrada, lo cual se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. *Sean X, Y espacios topológicos metrizables con X compacto e Y compacto y convexo. Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una función multivaluada de valores convexos y con gráfica cerrada. Entonces, para todo $\beta > 0$ existe una función multivaluada $G : X \rightrightarrows Y$ inferiormente semicontinua de valores cerrados y convexos tal que $Gr(G) \subseteq B(Gr(F), \beta)$.*

Demostración. Por el Lema 2.4.1, para $\beta/4$ existe una función multivaluada $G : X \rightrightarrows Y$ inferiormente semicontinua con valores convexos tal que

$$Gr(G) \subseteq B(Gr(F), \beta/4).$$

Se define la función multivaluada $\overline{G} : X \rightrightarrows Y$ como la cerradura de la función multivaluada G, es decir, $\overline{G}(x) = \overline{G_(x)}$. Por el Lema 2.2.1, $\overline{G}$ es inferiormente semicontinua y además toma valores convexos.

Probemos ahora que $Gr(\overline{G}) \subseteq B(Gr(F), \beta)$. Para ello tomamos (x, y) en $Gr(\overline{G})$, esto es y está en $\overline{G}(x)$. Luego, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $G(x)$, la cual converge a y. Así la sucesión $(x, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se queda contenida en $Gr(G)$ y converge a (x, y). Por ende, para $\beta/4$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ $d((x, y), (x, y_n)) < \beta/4$. En particular $d((x, y), (x, y_N)) < \beta/4$.

Además, (x, y_N) está en $Gr(G)$, el cual está contenido en $B(Gr(F), \beta/4)$, entonces existe (x', y') en $Gr(F)$ tal que $d((x, y_N), (x', y')) < \beta/4$.
Por último,

$$\begin{aligned}
d((x, y), Gr(F)) &\leq d((x, y), (x', y')) \\
&\leq d((x, y), (x, y_N)) + d((x', y'), (x, y_N)) \\
&< \beta/4 + \beta/4 \\
&= \beta/2 \\
&< \beta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (x, y) está en $B(Gr(F), \beta)$.

$\square$

Teniendo estos últimos resultados, el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, más el teorema de selección de Michael, la demostración del Teorema del Punto Fijo de Kakutani está a nuestro alcance.

Teorema 2.4.3 (Teorema del punto fijo de Kakutani). *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ distinto del vacío, compacto y convexo, $F : X \rightrightarrows X$ una función multivaluada de valores convexos y con gráfica cerrada. Entonces, F tiene un punto fijo, es decir, existe x en X tal que x está en $F(x)$.*

Demostración. Tomando F como en la hipótesis. Por el Corolario 2.4.2, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una función multivaluada $G_n : X \rightrightarrows X$ inferiormente semicontinua con valores convexos y cerrados tal que $Gr(G_n) \subseteq B(Gr(F), 1/n)$.

Por el Teorema de Selección de Michael existe f_n una selección continua para G_n. Entonces, $(x, f_n(x))$ está en $Gr(G_n)$. Así

$$d((x, f_n(x)), Gr(F)) < 1/n \text{ para toda } x \text{ en } X. \tag{2.1}$$

Por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, para toda $n \in \mathbb{N}$, f_n cuenta con un punto fijo x_n. Luego la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en X, el cual es compacto. Así, existe $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente en X.

Sea $x' = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x_{n_m}) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x'.$$

Dado que la distancia a un conjunto es una función continua en $X \times X$ y por la desigualdad 2.1,

$$d((x', x'), Gr(F)) = 0.$$

Usando que $G(F)$ es cerrado, se tiene que (x', x') está en $Gr(F)$, es decir, x' está en $F(x')$.

$\square$

Ejemplo 2.4.4. *Definimos la función mutivaluada $F : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$ de la siguiente manera:*

$$F(x) = [2/3 - x, 1 - x].$$

F cumple las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Kakutani, asegurando así la existencia de al menos un punto fijo.

Notemos también que si $x' \in [0,1]$ *es un punto fijo para* F, *entonces debe de ser parte del intervalo* $[2/3 - x', 1 - x']$. *Equivalentemente,* x' *debe de satisfacer la desigualdad*

$$2/3 - x' \leq x' \leq 1 - x'.$$

Resolviendo la desigualdad se llega a que los puntos fijos para F *son los elementos del intervalo* $[1/3, 1/2]$.

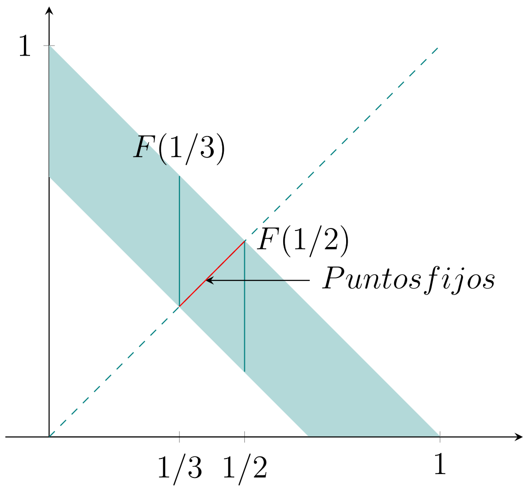


Figura 2.4

CAPÍTULO 3

JUEGOS Y TEOREMA DE NASH

La teoría de juegos surge, al igual que muchas áreas de la ciencia, por la búsqueda de soluciones a problemas o fenómenos de la vida cotidiana a través de una estructuración lógica. Un primer acercamiento a la motivación de la teoría de juegos y a los problemas que intenta dar solución, tal vez también la más obvia, es por medio de la idea tradicional o empírica que se tiene de los juegos competitivos.

Partiendo de juegos competitivos, resalta precisamente el elemento de competitividad, pues cada participante buscará obtener el mayor beneficio posible, beneficio que por cierto ha de poder ser cuantificado claramente, en contraste con los juegos no competitivos. Los beneficios pueden ser de carácter monetario, en cuyo caso la cuantificación es clara. Por otra parte, en los juegos en donde se busca la satisfacción personal a través de la victoria, ésta puede ser cuantificada numéricamente con un valor positivo (1 generalmente) y la derrota con un valor negativo y en la misma proporción que la victoria (generalmente -1).

La competitividad llevaría a otra de las características de los juegos de interés: la cantidad mínima de participantes, pues al haber competitividad se requiere al menos 2 participantes o jugadores que lo hagan posible, aunque cabe señalar que los juegos diseñados para un único participante (llamados juegos unipersonales), también son objeto de estudio de la teoría de juegos, pero para fines de motivación se dejarán de lado.

En los juegos competitivos debe haber interacción entre jugadores de tal manera que las acciones de cada jugador repercuten en el beneficio del resto de los participantes, pues de no ser así, se perdería la competitividad y podría tratarse de un juego unipersonal.

Cada participante, siguiendo las reglas del juego, buscará obtener el mayor beneficio, decidiendo las acciones que considere adecuadas para ello y esperando que las acciones de sus competidores le favorezcan. Es importante resaltar que las reglas del juego hacen posible conocer y describir las acciones por las que pueden optar los jugadores.

Por todo lo anterior, se podría decir que los elementos básicos de un juego competitivo son: el conjunto de posibles acciones de cada jugador (determinadas por las reglas del juego), los participantes (al menos dos para tener competitividad) y el beneficio que brinda el juego a cada jugador (cuantificable y determinado a partir de las acciones de todos los participantes), aunque existen otras características que podrían incluirse, llevando a clasificaciones de juegos con sus respectivas estructuras y tratamientos. Por ejemplo, un juego puede ser no cooperativo, en cuyo caso los jugadores buscan su beneficio individual y actúan de forma egoísta, o puede ser cooperativo al existir alianzas entre jugadores; puede ser simultáneo, donde los jugadores eligen al mismo tiempo su acción, o secuencial, en donde los jugadores eligen su acción bajo un orden establecido; pueden ser juegos con información completa, en donde las posibles acciones y las posibles recompensas de cada jugador es de conocimiento del resto de participantes, no así de la acción que toma cada jugador; puede ser extensivo, en donde los jugadores deberán tomar más de una decisión a lo largo del juego, o de una sola acción, en cuyo caso el juego termina después de que cada jugador haya realizado una única acción. Además, los juegos secuenciales pueden ser de información perfecta o imperfecta dependiendo de la información que cada jugador tenga sobre la acción realizada por sus competidores.

Retomando los elementos básicos de los juegos competitivos, es posible avanzar más allá de la idea convencional de juego e incluir a cualquier interacción entre más de 2 participantes (llamase individuo, empresa, grupos sociales, grupo político, etc.) que por medio de sus acciones buscan maximizar su beneficio, mismo que es determinado a partir de las acciones conjuntas de los participantes. Así, juegos como el ajedrez, damas y el póker son objeto de estudio de la teoría de juegos, pero también situaciones políticas y económicas, y de hecho son éstas las que dieron origen formal y han impulsado la teoría de juegos.

3.1. Juegos no cooperativos

Para fines de presentar el teorema de Nash en los términos originales, el presente trabajo se enfocará en presentar la estructura matemática de juegos simultáneos, no cooperativos, de una sola acción, también llamados representación normal de juegos no cooperativos o juegos rectangulares siguiendo. Como se verá a continuación, la definición formal de un juego se basa en los elementos básicos antes descritos: jugadores, acciones y beneficios.

La teoría y notaciones de la teoría de juegos que usaremos aquí están basados en las publicaciones [7], [9], [13] y [16].

Definición 3.1.1. *Un **juego rectangular**, es una colección finita de conjuntos y funciones* $\mathscr{G} := \{(X_1, \pi_1), \ldots, (X_n, \pi_n)\} = \{(X_i, \pi_i)\}_{i=1}^n$*, donde* X_i *es un conjunto arbitrario no vacío, llamado espacio o conjunto de acciones o estrategias puras del jugador* i*, y* π_i*, llamada la función de recompensa del jugador* i*, es cualquier función entre el espacio producto de los conjuntos de acción y el conjunto de los números reales, es decir,* $\pi_i : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$.

Al espacio de acciones conjuntas de todos los jugadores menos el espacio de acción del jugador i*, se le denotará como*

$$X_{-i} := \prod_{j \neq i} X_j.$$

Por otro lado, un elemento de este conjunto se le denotará como x_{-i} *y es tal que* $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *donde cada* x_j *está en* X_j*.*

Para cada elemento x_{-i} *se define la función* $\pi_{x_{-i}}$ *como una función entre el espacio de acción del jugador* i *y el conjunto de los reales y es tal que*

$$\pi_{x_{-i}}(x_i) := \pi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

De la definición anterior se resalta el hecho de que los espacios de estrategias son llamadas “puras”, debido a que, como se verá más adelante, se pueden definir otro tipo de estrategias a partir de éstas.

Si un juego rectangular cumple que cada espacio de acción es un conjunto finito, se dice que el juego rectangular es finito.

Definición 3.1.2. *Para un juego rectangular* $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)\}_{i=1}^n$ *y para cada jugador* i*, se define la función de mejor respuesta* b_i*, como una función multivaluada entre el espacio* X_{-i} *y* X_i *tal que*

$$b_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \mid \pi_{x_{-i}}(x_i) \geq \pi_{x_{-i}}(x_i^*) \ \forall \ x_i^* \in X_i\}.$$

Una manera de interpretar la función de mejor respuesta es como el conjunto de acciones que podría elegir un jugador, una vez concluido el juego y conociendo las estrategias de sus oponentes, para maximizar su beneficio bajo el supuesto de que se le diera la oportunidad de cambiar su estrategia, mientras se mantienen intactas las estrategias de sus oponentes.

3.2. Ejemplos de juegos

A continuación, se presentan algunos ejemplos de juegos rectangulares que dan muestra de cómo, mediante la modelación adecuada, situaciones reales y juegos populares pueden ser presentadas como modelos matemáticos bajo la teoría de juegos.

Los ejemplos que a continuación se muestran, siguen la estructura de las siguientes publicaciones: [7] para el dilema del prisionero y [9] para el resto de los ejemplos.

1. **Piedra, papel o tijeras.**

El juego clásico de piedra papel o tijeras se puede representar como un juego rectangular de 2 jugadores $\mathscr{G} = \{(X_1, \pi_1), (X_2, \pi_2)\}$, en donde el espacio de estrategias $X_1 = X_2 = \{piedra, papel, tijera\}$ será idéntico para ambos jugadores, y las funciones de ganancia de cada jugador se definen siguiendo las reglas usuales del juego, es decir, tijera vence a papel, papel vence a piedra, piedra vence a tijeras y existe un empate cuando ambos jugadores eligen la misma estrategia. Si ganar lo identificamos con el número 1, perder con el número -1 y el empate con recompensa 0, la función de recompensa de cada jugador estará dado de la siguiente manera:

$$\pi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 \\ -1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \{(tijera, piedra), (piedra, papel), (papel, tijera)\} \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \{(tijera, papel), (piedra, tijera), (papel, piedra)\} \end{cases}$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 \\ -1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \{(tijera, papel), (piedra, tijera), (papel, piedra)\} \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \{(tijera, piedra), (piedra, papel), (papel, tijera)\} \end{cases}$$

Y la función de mejor respuesta b_i para el jugador i, con i en $\{1, 2\}$, es:

$$b_i(x_i) = \begin{cases} \{piedra\} & \text{si } x_i = tijera \\ \{papel\} & \text{si } x_i = piedra \\ \{tijera\} & \text{si } x_i = papel \end{cases}$$

2. **Dilema del prisionero**

El juego conocido como el dilema del prisionero [14] fue nombrado y formalizado por el matemático Albert W. Tucker en una conferencia en la universidad de Stanford y que se basa en un experimento ideado por los matemáticos Melvin Dresher y Merill M. Flood. La historia y las condiciones del juego han ido modificándose a lo largo del tiempo, aún así, la esencia y conflicto intrínseco siguen siendo el mismo. En este trabajo se tomarán las reglas y contexto planteados en [7].

El contexto y reglas del juego son los siguientes: dos sospechosos de un crimen son detenidos por la policía, son encerrados en celdas distintas en las que no tienen posibilidad de comunicarse. El fiscal, quien está seguro de la culpabilidad de los sospechosos, sólo cuenta con las pruebas para sentenciarlos por un cargo menor (usando una frase coloquial, podría decirse que el fiscal no tiene pruebas, pero tampoco dudas) les propone el mismo trato a ambos prisioneros: si uno decide confesar y el otro no, quien confiesa será liberado por cooperar con la justicia, por otro lado, quien no confiesa será condenado a 6 años de prisión; si ambos confiesan, ambos recibirán una sentencia de 5 años; por último, si ambos deciden no confesar, al no existir pruebas suficientes sólo se les podrá imputar el crimen menor cuya sentencia es de 1 año de prisión.

La situación anterior se puede expresar como un juego rectangular de 2 jugadores $\mathscr{G} = \{(X_1, \pi_1), (X_2, \pi_2)\}$ donde $X_1 = X_2 = \{\textit{no confesar}, \ \textit{confesar}\}$ y

$$\pi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -5 & \text{si } x_1 = \textit{confesar} \text{ y } x_2 = \textit{confesar} \\ -1 & \text{si } x_1 = \textit{no confesar} \text{ y } x_2 = \textit{no confesar} \\ 0 & \text{si } x_1 = \textit{confesar} \text{ y } x_2 = \textit{no confesar} \\ -6 & \text{si } x_1 = \textit{no confesar} \text{ y } x_2 = \textit{confesar} \end{cases}$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -5 & \text{si } x_1 = \textit{confesar} \text{ y } x_2 = \textit{confesar} \\ -1 & \text{si } x_1 = \textit{no confesar} \text{ y } x_2 = \textit{no confesar} \\ -6 & \text{si } x_1 = \textit{confesar} \text{ y } x_2 = \textit{no confesar} \\ 0 & \text{si } x_1 = \textit{no confesar} \text{ y } x_2 = \textit{confesar} \end{cases}$$

Y la función de mejor respuesta b_i para el jugador i, con i en $\{1, 2\}$, es:

$$b_i(x_i) = \begin{cases} \{\textit{confesar}\} & \text{si } x_i = \textit{no confesar} \\ \{\textit{confesar}\} & \text{si } x_i = \textit{confesar} \end{cases}$$

3. **Duopolio de Cournot**

Inspirado por la competencia en la producción del mercado de agua mineral embotellada, el matemático y economista Antoine Augustin Cournot presenta en 1838 su trabajo [5], en la que se destaca su modelo de duopolio, basado en los siguientes supuestos:

1. Dos empresas compiten por la producción de un producto homogéneo, es decir, su decisión será la cantidad del bien a producir y no hay diferencias entre el bien producido por las empresas.

2. Ambas empresas actúan de manera independiente, es decir, no existe cooperación.

3. El precio del producto se determina en función de la cantidad producida por ambas empresas.

4. Cada empresa cuenta con una capacidad de producción, es decir, su producción es limitada.

5. La producción implica un costo que está en función de la cantidad a producir.

6. Ambas empresas buscarán maximizar sus ganancias.

Dados los supuestos anteriores, el modelo que permite ver la situación como un juego rectangular de 2 jugadores, es el siguiente:

$$\mathscr{G} := \{([0,\alpha_1],\pi_1),([0,\alpha_2],\pi_2),$$

en donde α_1, α_2 son números reales positivos y representan la capacidad de producción del jugador 1 y 2, respectivamente; la función de recompensa o utilidad para la empresa i está dado por

$$\pi_i(x_1,x_2) := x_i f(x_1+x_2) - c_i(x_i),$$

donde la función $f : [0,\alpha_1+\alpha_2] \to \mathbb{R}$ es una función decreciente y determina el precio de mercado del producto, de acuerdo con la producción del mercado; y la función creciente $c_i : [0,\alpha_i] \to \mathbb{R}_+$ mide el costo de producción de la empresa i.

4.-**Duopolio lineal de Bertrand**

Después de la publicación del Modelo de Duopolio de Cournot, el matemático Joseph Bertrand publica su trabajo [1] donde critica el modelo de Cournot y considera que las empresas compiten en precios y no en nivel de producción, como lo propuso Cournot. Los supuestos o reglas que permiten modelar el duopolio propuesto por Bertrand son los siguientes:

1. Los productos que ofertan ambas empresas son idénticos, es decir, no hay algún incentivo, distinto del precio, por el cual preferir el producto de una empresa.

2. El costo de producción para ambas empresas es el mismo.
3. Los consumidores tienen a su alcance ambas ofertas.
4. Las ventas que genera cada empresa están en función de los precios determinadas por ambas empresas.

Dad $\alpha > 0$, se define el juego $\mathscr{G} := \{([0,\alpha], \pi_i)_{i=1,2}\}$, donde

$$\pi_i(x_i, x_2) := x_i D_i(x_i, x_2) - cD_i(x_1, x_2).$$

En este modelo, las empresas compiten en precios, es decir, el espacio de acción de cada empresa será el precio al cual ofertarán su producto. La constante c representa el costo de producción por unidad, la función D_i es la función de demanda, la cual refleja la cantidad de clientes interesados en dicho producto y α es el precio máximo al que pueden ofertar el producto.

5.-**Tragedia de los bienes comunes**

En 1968 Garret Hardin presenta un artículo [10] en la revista *Science*, en donde retoma y nombra a un escenario concebido originalmente por el matemático William Forster Lloyd; el escenario en cuestión plantea de manera general la explotación de un bien común al que tiene acceso un grupo de individuos. De manera particular, Hardin plantea lo siguiente: un grupo de pastores cuenta con una propiedad comunal en donde pueden llevar a pastar la cantidad de ovejas que decidan y crean conveniente; la propiedad comunal cuenta con un límite de ovejas que pueden ser pastadas a la vez; ir incrementando el número de ovejas reduce la calidad de alimentación de todas las ovejas de manera proporcional; el beneficio total que obtiene cada pastor es creciente respecto a la unidad de ovejas.

Con el fin de modelar la tragedia de los bienes comunes como un juego rectangular $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)\}_{i=1}^n$, supongamos que n es el número de pastores que tienen acceso a la propiedad comunal y ninguno de ellos se quedará sin pastar una oveja. Tomamos M como el número máximo de ovejas que pueden ser pastadas a la vez y suponemos que el espacio de elección es continuo, es decir, pueden elegir fracciones de ovejas a pastar, así el espacio de elección X_i del jugador i será el intervalo $[0, M]$. Tomamos una función g decreciente, la cual determina la ganancia bruta por unidad de oveja y está en función del total de ovejas llevadas a pastar. Además, consideramos el valor c como el costo o daño que se incurre por agregar una oveja al campo. Entonces, la función de recompensa del jugador i será:

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i g\big(\sum_{j=1}^{n} x_j\big) - cx_i.$$

3.3. Equilibrio de Nash

Retomando el ejemplo del dilema del prisionero, una pregunta natural sería ¿cuál es la mejor decisión para cada jugador? Una primera respuesta podría ser aquella estrategia conjunta en que se obtenga el mejor resultado posible, es decir, la estrategia que maximice la suma de las recompensas[1]. Es fácil ver que dicho punto es aquel en que ambos prisioneros no confiesan, ambos reciben una sentencia de 1 año de prisión y además no causaría conflictos o rencores entre jugadores. Sin embargo, si se opta por no confesar, apelando a la lealtad de su compañero de crimen, se corre el riesgo de que la lealtad no sea tan fuerte para no verse tentado por la posibilidad de libertad, dejando así al otro jugador con la sentencia máxima y arrepentimiento por su decisión. Entonces, para llegar a un punto de equilibrio social se requiere de una cooperación, que no es posible en el juego, por lo que se corre el riesgo de caer en un desenlace contraproducente. Optar por este punto dependerá de condiciones como la confianza que se tenga en el oponente y que no entran dentro de la estructura matemática del juego rectangular.

Dentro de la búsqueda de las mejores estrategias para tomar en un juego, John Nash plantea una respuesta por medio de estrategias colectivas a las que llama *puntos de equilibrio*, posteriormente bautizadas como *puntos de equilibrio de Nash.*

Definición 3.3.1. *Sea $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^n\}$ un juego rectangular. Se dice que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es un equilibrio de Nash si para todo i=1,…,n*

$$\pi_i((x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)) > \pi_i((x_1, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n)) \text{ para todo } x_i^* \text{ en } X_i.$$

Escrito en términos de funciones de mejor respuesta, x será un equilibrio de Nash si para cada i=1,…,n, se tiene que x_i es elemento de $b_i(x_{-i})$.

Un equilibrio de Nash se dice que es simétrico si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Por otro lado, al conjunto de todos los equilibrios de Nash se le denota como EN($\mathscr{G}$), el cual podría ser igual al vacío.

Entonces, un equilibrio de Nash si bien no asegura la recompensa máxima posible para cada jugador, sí asegura una recompensa en la que ninguno toma ventaja sobre otro. También podría decirse que un equilibrio de Nash es aquel conjunto de estrategias bajo la cual, una vez finalizado el juego, ninguno de los jugadores se arrepiente de la estrategia elegida, ya que de tener la posibilidad de cambiarla, no obtendría una mejor recompensa.

[1]El punto descrito es conocido como punto de equilibrio social, bajo el cual se espera que no existan diferencias significativas en las ganancias que puedan originar conflictos.

Definición 3.3.2. *Un juego rectangular* $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^n\}$ *se dice que es* ***regular*** *si toda* X_i *es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio euclidiano, toda* π_i *es continua y toda* $\pi_{x_{-i}}$ *es cuasicóncava para cada* x_{-i} *en* X_{-i}*.*

En el siguiente resultado veremos que en cualquier juego regular se puede asegurar la existencia de algún punto de equilibrio de Nash.

Teorema 3.3.3. *Si* $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^n\}$ *es un juego regular, entonces* $EN(\mathscr{G})$ *es distinto del vacío.*

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$ tomamos b_i, la función de mejor respuesta y definimos la función multivaluada $b : X \rightrightarrows X$ como

$$b(x) := b_1(x_{-1}) \times b_2(x_{-2}) \times \cdots \times b_n(x_{-n}).$$

Gracias a que cada espacio de acción es compacto y por el teorema de Weierstrass, la función multivaluada b está bien definida. Luego notemos que si x está en $b(x)$, entonces para toda i en $\{1, \ldots, n\}$, x_i está en $b_i(x_{-i})$ y, por lo tanto, x es un punto de equilibrio de Nash. Entonces, para completar la prueba, basta probar que el teorema del punto fijo de Kakutani es válido en b .

Primero notemos que X es convexo y compacto, ya que, para toda i en $\{1, \ldots, n\}$, X_i es compacto y convexo.

Veamos ahora que b es de valores convexos, es decir, si tomamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en X, así como dos elementos $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ en $b(x)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $\lambda y + (1 - \lambda)z$ es también un elemento de $b(x)$. Para ello demostraremos primero que cada componente $\lambda y_i + (1-\lambda)z_i$ es elemento de $b_i(x_{-i})$.

Usando el hecho de que y_i y z_i son mejores respuestas para la estrategia x_i, es decir, ambos son elementos de $b_i(x_{-i})$, se sigue que $\pi_{x_{-i}}(y_i) = \pi_{x_{-i}}(z_i)$ y maximizan la función $\pi_{x_{-i}}$, recordando que la función $\pi_{x_{-i}}$ es tal que, $\pi_{x_{-i}}(x_i) = \pi_i(x_{-i}, x_i')$ para toda $x_i' \in X_i$. Tomando ahora que $\pi_{x_{-i}}$ es cuasicóncava, se tiene que,

$$\pi_{x_{-i}}(\lambda y_i + (1 - \lambda)z_i) \geq \pi_{x_{-i}}(y_i).$$

Pero, $\pi_{x_{-i}}(y_i)$ es máximo, entonces $\pi_{x_{-i}}(\lambda y_i + (1 - \lambda)z_i) = \pi_{x_{-i}}(y_i)$ y como consecuencia, se tiene que $\lambda y_i + (1-\lambda)z_i$ es una mejor respuesta para x_i y está en $b_i(x_{-i})$. Como lo anterior es válido para toda i en $\{1, \ldots, n\}$, se concluye que $\lambda y + (1-\lambda)z$ está en $b(x)$ y, por lo tanto, b es de valores convexos.

Probaremos ahora que b es superiormente semicontinua y para ello probaremos primero que para toda i en $\{1, \ldots, n\}$, b_i es superiormente semicontinua. Definimos las funciones multivaluadas $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$ como

$$F_i(x_{-i}) = X_i.$$

Notemos que F_i es superiormente semicontinua, pues si U es un abierto en X_i, la imagen inversa superior es tal que

$$F_i^u(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } U \neq X_i \\ X_{-i} & \text{si } U = X_i. \end{cases}$$

Además, F_i es inferiormente semicontinua, pues si U es un abierto en X_i, la imagen inversa inferior es tal que

$$F_i^l(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } U = \emptyset \\ X_{-i} & \text{si } U \neq \emptyset. \end{cases}$$

Por lo tanto, F_i es continua. Más aún, F_i es de valores compactos, ya que cada X_i es compacto.

Entonces, tenemos una función multivaluada $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$ continua y de valores compactos, una función continua $\pi_i : X_{-i} \times X_i \to \mathbb{R}$ y además b_i cumple que

$$b_i(x_{-i}) = \{x_i \ \in F(x_{-i}) \mid \pi_i(x_{-i}, x_i) \geq \pi_i(x_{-i}, x_i^*) \ \ \forall\ x_i^* \in F(x_i)\},$$

por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema del Máximo de Berge 2.2.7, concluyendo así que b_i es superiormente semicontinua y de valores compactos y, por el Teorema 2.2.3, se sigue que b es superiormente semicontinua y de valores compactos. Luego, por el Teorema 2.1.18 se cumple que b es de gráfica cerrada. Por último, notemos que se tienen las condiciones del Teorema del Punto Fijo de Kakutani 2.4.3, teniendo con ello que b admite un punto fijo.

□

A partir de los juegos antes presentados, se realizarán análisis para buscar los puntos de equilibrio de Nash.

1.-**Piedra, papel o tijera**

El juego de piedra papel o tijera no es regular, ya que el espacio de estrategias de los jugadores no es compacto y convexo, lo que impide asegurar la existencia de un punto de equilibrio de Nash, y de hecho, veremos que el juego no cuenta con equilibrios de Nash. Para hacerlo notar podemos resumir los resultados finales en dos posibles escenarios: el primero en que ambos jugadores elijan la misma estrategia, dándose un empate con recompensa 0 para ambos, y el segundo cuando eligen estrategias distintas, dándose un ganador y un perdedor. Bajo el primer escenario y manteniendo la estrategia del ponente, se podría cambiar la estrategia de tal manera que se gane el juego. Mientras que, bajo el segundo escenario, si se mantiene la estrategia del jugador ganador, el jugador que haya perdido podría cambiar su estrategia de tal manera que empate o gane, mejorando así su recompensa.

2.-**Dilema del prisionero**

El dilema del prisionero no cumple las hipótesis del Teorema, ya que el espacio de estrategia de los jugadores no es compacto y convexo, lo que impide asegurar la existencia de un punto de equilibrio de Nash, sin embargo veremos que sí cuenta con uno. Con el fin de identificarlo, analizaremos los casos posibles en busca de un punto de equilibrio de Nash.

Caso 1. Ambos jugadores deciden no confesar.

En este caso, ambos jugadores obtienen una sentencia de un año de cárcel (recompensa -1). Sin embargo, si la decisión del contrincante permanece sin alterarse, podrían cambiar su decisión a una confesión, mejorando así su recompensa, es decir,

$$\pi_1(no\ confesar,\ no\ confesar) = -1 < \pi_1(confesar,\ no\ confesar) = 0$$

$$\pi_2(no\ confesar,\ no\ confesar) = -1 < \pi_2(\ no\ confesar,\ confesar) = 0.$$

Caso 2. Uno de los jugadores confiesa mientras que el otro no lo hace.

El jugador que confiesa será liberado, alcanzando la recompensa máxima posible en el juego (recompensa 0), mientras que el jugador que no lo hace recibe la recompensa mínima posible en el juego (recompensa -6). Esta estrategia conjunta no es un equilibrio de Nash, pues el jugador que no confiesa podría mejorar su recompensa si decide confesar, sabiendo que su oponente ya lo hizo, teniendo así una recompensa de -5, en lugar de -6. Lo anterior se expresa de la siguiente manera para ambos jugadores.

$$\pi_1(no\ confesar,\ confesar) = -6 < \pi_1(confesar,\ confesar) = -5$$

$$\pi_2(confesar,\ no\ confesar) = -6 < \pi_2(confesar,\ confesar) = -5.$$

Caso 3. Ambos jugadores deciden confesar.

Notemos que este caso resulta un equilibrio de Nash, pues ambos jugadores reciben recompensa igual a -5 y si uno de ellos pudiera cambiar su estrategia, manteniendo la del oponente intacta, sería contraproducente, pues su recompensa sería menor a lo que ya había obtenido. Escrito en términos de las funciones de recompensa tenemos que

$$\pi_1(confesar,\ confesar) = -5 > \pi_1(no\ confesar,\ confesar) = -6$$

$$\pi_2(confesar,\ confesar) = -5 > \pi_2(confesar,\ no\ confesar) = -6.$$

No habiendo otros casos posibles podemos concluir que el único equilibrio de Nash en el dilema del prisionero es aquel en que ambos jugadores confiesan, tal como también puede observarse de las funciones de mejor respuesta.

3.-**Duopolio de Cournot**

Para ejemplificar los puntos de equilibrio, definiremos el duopolio de Cournot de la siguiente manera: los costos de producción serán constantes e iguales para ambos jugadores, las funciones de precio serán iguales a $f(x_1, x_2) = d - (x_1 + x_2)$, teniendo así que las funciones de recompensa de los jugadores son:

$$\pi_1(x_1, x_2) = x_1(d - x_1 - x_2) - x_1 c$$
$$\pi_1(x_1, x_2) = x_2(d - x_1 - x_2) - x_2 c.$$

Entonces, un punto de equilibrio de Nash debe de cumplir con las condiciones de primer orden, es decir,

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = d - 2x_1 - x_2 - c = 0$$
$$\frac{d\pi_2}{dx_2} = d - 2x_2 - x_1 - c = 0.$$

Equivalentemente, un punto de equilibrio de Nash (x_1, x_2) será un punto fijo para la función multivaluada $b : X_1 \times X_2 \Rightarrow X_1 \times X_2$ definida por $b(x_1, x_2) = b_1(x_2) \times b_2(x_1)$ donde las funciones b_1 y b_2 son las funciones de mejor respuesta y quedan definidas como:

$$b_1(x_2) = \{x_1 \mid d - 2x_1 - x_2 - c = 0\}$$
$$b_2(x_1) = \{x_2 \mid d - 2x_2 - x_1 - c = 0\}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se llega a que existe un único punto de equilibrio de Nash, que además es simétrico, $x_2 = x_1 = \frac{d-c}{2}$.

En su momento Cournot identificó los puntos de equilibrio[2] de Nash en su modelo, adelantándose más de un siglo a la definición general dada por Nash.

4.-**Duopolio de Bertrand**

Existe un supuesto adicional que se puede hacer sobre el duopolio de Bertrand y es la existencia o no de diferencias entre los productos que producen los competidores, pues de no haber diferencia, el competidor con el precio más bajo se lleva

[2]En muchas publicaciones es común ver que junto con el modelo de Cournot se mencione los puntos de equilibrio de Nash bajo el nombre de equilibrio de Cournot.

el mercado completo, mientras que el mercado es repartido entre ambos cuando existe una igualdad en los precios. Por otro lado, cuando los productos son distintos, existen otros factores que un consumidor considera a la hora de elegir a quién comprar.

La experiencia nos dice que un supuesto más cercano a la realidad es aquel en que los productos son iguales, debido en parte a que los consumidores además del producto por sí mismo, buscan experiencias al momento de comprar. Por ello se analizará el segundo caso para buscar los puntos de equilibrio.

Supongamos que las funciones de producción de cada jugador serán los siguientes:

$$f_1(x_1, x_2) = a - x_1 + bx_2$$
$$f_2(x_1, x_2) = a - x_2 + bx_1.$$

En donde a y b son dos números naturales positivos. Se tiene entonces que las funciones de recompensa estarán dadas de la siguiente manera:

$$\pi_1(x_1, x_2) = (a - x_1 + bx_2)(x_1 - c)$$
$$\pi_2(x_1, x_2) = (a - x_2 + bx_1)(x_2 - c).$$

Entonces, para encontrar los puntos de equilibrio de Nash, se ha de resolver el sistema de ecuaciones dado por las condiciones de primer orden sobre las funciones de recompensa, es decir,

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = a - 2x_1 + bx_2 + c = 0$$
$$\frac{d\pi_2}{dx_2} = a - 2x_2 + bx_1 + c = 0.$$

Equivalentemente, un punto de equilibrio de Nash (x_1, x_2) será un punto fijo para la función multivaluada $b : X_1 \times X_2 \rightrightarrows X_1 \times X_2$ definida por $b(x_1, x_2) = b_1(x_2) \times b_2(x_1)$ donde las funciones b_1 y b_2 son las funciones de mejor respuesta y quedan definidas como:

$$b_1(x_2) = \{x_1 \mid a - 2x_2 + bx_1 + c = 0\}$$
$$b_2(x_1) = \{x_2 \mid a - 2x_2 + bx_1 + c = 0\}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene que el punto de equilibrio[3] de Nash en el duopolio de Bertrand es tal que $x_1 = x_2 = \frac{a+c}{2-b}$.

[3] Al igual que sucede con los puntos de equilibrio de Nash en el modelo de Cournot, es común ver que ciertos autores y publicaciones llamen puntos de equilibrio de Bertrand a los puntos de equilibrio de Nash dentro del modelo de Bertrand.

Para no dejarlo de lado, notemos que al suponer productos idénticos para ambos jugadores, el único punto de equilibrio de Nash es cuando ambos jugadores asignan el precio igual al costo c, pues de otro modo los casos podrían simplificarse en dos: el primero en que ambos asignen precios iguales y mayores a c, sin embargo en este caso ambos jugadores tienen el incentivo de bajar ligeramente el precio y así hacerse del mercado completo; mientras que en el caso de precios diferentes, quien tenga el precio más alto tendrá el incentivo de igualar el precio de su contrincante o bien estar ligeramente por debajo (siempre que no sea menor que c) para así mejorar su recompensa.

5.-**Tragedia de los bienes comunes**

El análisis de los puntos de equilibrio de Nash en el juego de la tragedia de los bienes comunes se realizará sin dar funciones explicitas, con el fin de evidenciar la característica que le da nombre al juego. Se supondrá que la función de utilidad bruta g, es continua y con primera y segunda derivada menor a 0, lo cual tiene sentido suponer, pues el modelo establece que la función es decreciente.

Notemos que el juego es regular y, por lo tanto, podemos asegurar que existe al menos un punto de equilibrio.

Recordemos que la función de recompensa de cada jugador está dada por

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i g\big(\sum_{j=1}^{n} x_j\big) - cx_i.$$

Obtenemos la derivada de las funciones de recompensa para cada jugador.

$$\frac{d\pi_i(x)}{dx_i} = g\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + x_i g'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - c.$$

Entonces, si $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ es un punto de equilibrio de Nash, se cumple para cada jugador que

$$g\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right) + x_i^* g'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right) - c = 0.$$

Si sumamos sobre todos los jugadores, se llega a que

$$ng\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^* g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) - nc = 0,$$

o equivalentemente

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* g'(\sum_{i=1}^{n} x_i^*)}{n} - c = 0. \tag{3.1}$$

Por otro lado, un punto óptimo social es aquel punto $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ que maximiza la suma de las ganancias de los jugadores, es decir,

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^o - c\sum_{i=1}^{n} x_i^o \geq g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ para todo } x \in X$$

y como consecuencia ha de cumplir la condición de primer orden

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^o g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) - c = 0. \tag{3.2}$$

Ahora, probemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^* > \sum_{i=1}^{n} x_i^o$. Para ello supongamos lo contrario, es decir, $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^o$, entonces se cumple que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{n} < \sum_{i=1}^{n} x_i^o. \tag{3.3}$$

Luego, como la función g es decreciente, se cumple que

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) \leq g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right). \tag{3.4}$$

Recordemos ahora que g' y g'' son negativas, entonces podemos asegurar la siguiente desigualdad

$$g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) \leq g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) < 0. \tag{3.5}$$

Si se toman las desigualdades (3.3) y (3.5), se tiene que

$$g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^o < \frac{g'(\sum_{i=1}^{n} x_i^*)\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{n}. \tag{3.6}$$

Ahora, si sumamos (3.4) y (3.6), y restamos el costo c, llegamos a que

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^o g'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^o\right) - c < g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* g'(\sum_{i=1}^{n} x_i^*)}{n} - c,$$

lo cual es una contradicción, ya que por (3.1) y (3.2), ambas expresiones son iguales a cero. Podemos concluir que la suma sobre los componentes del punto de equilibrio de Nash es mayor que la suma sobre los componentes del punto óptimo social. Así pues, cuando se decide de manera racional y buscando el beneficio individual (punto de equilibrio de Nash) se llega a una sobrexplotación de los bienes comunes que podrían ocasionar la erosión del suelo, la falta de alimento para el ganado y probablemente la muerte de éste. He de ahí el adjetivo de "tragedia" dado al juego.

Visto en términos descritos por Hardin[4], un pastor racional verá viable ir aumentando la cantidad de ovejas a pastar, pues el costo de hacerlo es repartido entre todos, mientras que el beneficio neto por incluir otra oveja será sólo para él. Sin embargo, si todos los pastores son racionales y piensan de la misma manera, provocarán una sobrexplotación.

3.4. Estrategias mixtas

En los juegos vistos previamente, los jugadores eligen entre sus opciones la estrategia que prefieren por razones que a ellos los mueva, pero a continuación, se presentarán otro tipo de estrategias, conocidas como estrategias mixtas, bajo las cuales los jugadores no deciden la estrategia que usarán en el juego *per se*, sino una manera en cómo dicha estrategia será elegida, es decir, asignando probabilidades a cada una de sus estrategias.

Antes de definir las estrategias mixtas, revisaremos el concepto de medida de probabilidad.

Una medida de probabilidad[5] para la σ-álgebra[6] $\mathcal{S}$, de un conjunto A, será una medida que cumpla:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ y $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. $\mathbb{P}(B) \geq 0$ para cualquier elemento B de la σ-álgebra.

3. $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$ para cualquier colección de elementos numerables y disjuntos.

A la terna $(A, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ se le conoce como un espacio de probabilidad.

[4]Hardin menciona que la tragedia de los bienes comunes es ejemplo de una situación en que no se cumple la teoría de la "mano invisible" de Adam Smith, bajo la cual se teoriza que los individuos toman decisiones que terminan beneficiando al resto, aun cuando sus decisiones son tomadas de manera egoísta.

[5]Para consulta de los conceptos de la teoría de probabilidad se tomó como referencia [4].

[6]Si A es un conjunto, una colección de subconjuntos de A, será una σ-álgebra si satisface las siguientes 3 propiedades: el vacío es uno de sus elementos, 2) es cerrado bajo complementos y 3) es cerrado bajo uniones numerables.

Definición 3.4.1. *Sea $\{X_i, \pi_i\}_{i=1}^n$ un juego rectangular con espacios de acción. Una estrategia mixta p_i para el jugador i es una medida de probabilidad μ_i en X_i.*

Cuando el juego rectangular es finito, es decir, el espacio de acción de cada jugador es finito de cardinalidad m_i, entonces una estrategia mixta μ_i puede ser representada como un elemento de $\mathbb{R}^{m_i}$ de la forma $(\mu_i(x_{i1}), \ldots, \mu_i(x_{im_i}))$, en donde cada entrada del vector es la probabilidad asociada a la acción x_{ij}. En este sentido, el conjunto de todas las posibles estrategias mixtas, al cual se denotará como S_i, puede ser definido de la siguiente manera:

$$S_i = \{(s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid s_{ij} \geq 0 \textit{ para todo } 1 \leq j \leq m_i \textit{ y } \sum_{j=1}^{m_i} s_{ij} = 1\}.$$

Al producto cartesiano de los espacios de estrategias mixtas se le denota como S y puede verse como un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, donde $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Ha de notarse que si una estrategia mixta s_i es tal que $s_{ij} = 1$ para alguna $1 \leq j \leq m_i$, entonces s_i es una estrategia pura.

Existen múltiples interpretaciones que pueden darse a las estrategias mixtas como pueden verse con mayor detalle en [9], [16] y [13], entre ellas destaca la idea de que las estrategias mixtas miden la frecuencia en que se estará usando cada estrategia pura, bajo el supuesto de que un juego se realice más de una vez. Otra forma de pensar las estrategias mixtas es cuando en ciertos juegos cobra sentido suponer que los jugadores pueden construir una estrategia por medio de repartir su decisión en cada una de las estrategias puras, teniendo así que la estrategia mixta representa la proporción otorgada a cada estrategia pura, por ejemplo, cuando el juego se trata de inversionistas que tienen que elegir la manera en que repartirán su capital en los distintos instrumentos de inversión.

A partir de un juego rectangular y los espacios de estrategias mixtas es posible construir otro juego rectangular, conocido como **extensión mixta** de un juego rectangular, cuyos espacios de acción serán los espacios de estrategias mixtas y las función de recompensa de cada jugador se definirá como el valor ponderado o esperanza de las estrategias mixtas de todos los jugadores, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 3.4.2. *Sea $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^N\}$ un juego rectangular finito y S el producto de espacios de estrategias mixtas, se define para el jugador i la función de ganancia en estrategias mixtas $R_i : S \to \mathbb{R}$ como*

$$R_i(s) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X} s_{1x_1} \cdots s_{nx_n} \pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dado que la extensión mixta de un juego rectangular finito es a su vez un juego rectangular, las definiciones y conjuntos anteriores se extienden a éstos. En particular si $\mathscr{G}$ es un juego rectangular finito, un equilibrio de Nash en estrategias mixtas será un equilibrio de Nash en su extensión mixta, es decir, será un elemento $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ de S tal que $R_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n) > R_i(s_1, \ldots, s_i*, \ldots, s_n)$, para todo jugador y cada s_i* en S_i. En términos de las funciones de mejor respuesta, s será un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego $\mathscr{G}$, si s_i es elemento de $b_i(s_i)$ para toda s_i, donde b_i es la función de mejor respuesta para el juego de extensión mixta de $\mathscr{G}$.

Veamos a continuación un resultado que será de utilidad para probar el Teorema de Nash en estrategias mixtas.

Lema 3.4.3. *Sea $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^n\}$ un juego rectangular finito tal que $|X_i| = m_i$ y $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Entonces, el producto de espacios de estrategias mixtas S, es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Para probar la compacidad de S, basta ver que es acotado y cerrado. Si s es un elemento de S, entonces cada componente s_i consta de elementos en $\mathbb{R}^{m_i}$ de componentes no negativos cuya suma es 1. Entonces,

$$S_i \subseteq \{(s_1, s_2, \ldots, s_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid 0 \leq s_j \leq 1 \ \forall \ j\},$$

el cual es acotado. Así, el conjunto S es acotado.

Para probar que S es cerrado tomaremos una sucesión

$$(x_l)_{l\in\mathbb{N}} = ((x_{1_l})_{l\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}})$$

en S, la cual converge a $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ahora, probaremos que x está dentro de S, para lo cual basta probar que cada x_i es una estrategia mixta para el jugador i.

Primero notemos que, para cada i, j, l, el elemento de la sucesión x_{ij_l} cumple que

$$0 \leq x_{ij_l} \leq 1,$$

lo cual nos lleva a que $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

Además, notemos que, para cada x_{i_l}, se cumple que $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij_l} = 1$, teniendo así que

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij_l} = \lim_{l\to\infty} 1 = 1.$$

También se tiene que

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij_l} = \sum_{j=1}^{m_i} \lim_{l\to\infty} x_{ij_l} = \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij},$$

por lo tanto, $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij_l} = 1$ y como consecuencia se tiene que x está en S.

Resta probar que S es convexo. Para ello tomamos x, y en S y probaremos que $\alpha x + (1-\alpha)y$ es elemento de S para cualquier α en I. Lo anterior es equivalente a demostrar que cada componente $\alpha x_i + (1-\alpha)y_i$ está en S_i. Se sigue que $\alpha, (1-\alpha), x_{ij}, y_{ij} \geq 0$, entonces $\alpha x_{ij} + (1-\alpha)y_{ij} \geq 0$. Por otro lado, notemos lo siguiente

$$\alpha x_{ij} + (1-\alpha)y_{ij} \leq \alpha + (1-\alpha) = 1,$$

por lo tanto,

$$0 \leq \alpha x_{ij} + (1-\alpha)y_{ij} \leq 1.$$

Por último, haciendo algunos cálculos obtenemos lo siguiente

$$\sum_{j=1}^{m_i}[x_{ij} + (1-\alpha)y_{ij}] = \alpha \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Podemos concluir así que $\alpha x_i + (1-\alpha)y_i$ está en S_i y, por ende, S es convexo.

□

John Nash introdujo el concepto de equilibrio de Nash y demostró que cualquier juego rectangular finito, siempre tendrá un punto de equilibrio en estrategias mixtas. Notemos que el Teorema 3.1.1[7] resulta ser más general que el presentado por Nash en su momento y de hecho partiremos de éste para probar el resultado original al que llegó Nash.

Teorema 3.4.4 **(Nash).** *Si* $\mathscr{G} = \{(X_i, \pi_i)_{i=1}^n\}$ *es un juego rectangular finito, entonces existe un punto de equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Demostración. El objetivo será probar que el juego de extensión mixta de $\mathscr{G}$ es regular y así poder usar el Teorema 3.3.3. Sabemos que el espacio de estrategias mixtas de cada jugador es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y por el Lema 3.4.3 sabemos que es compacto y convexo. Ahora bien, notemos que la función de utilidad R_i es una función multilineal y, por lo tanto, es continua. Luego, la función R_i restringida a X_i es una función lineal y por el Ejemplo 1.1.9, es una función cuasicóncava. Por todo lo anterior, el juego de extensión mixta es un juego regular y por el Teorema 3.3.3 se asegura la existencia de un punto de equilibrio.

□

[7]Nash en su tesis doctoral [8] prueba directamente que un juego rectangular cuenta con al menos un punto de equilibrio en estrategias mixtas. Sin embargo, de su demostración se puede llegar de manera natural a definir los juegos regulares y la generalización del teorema a estos últimos.

Como lo vimos anteriormente, el juego de piedra papel o tijera no cuenta con equilibrios de Nash en estrategias puras. Sin embargo, por el teorema anterior podemos asegurar que existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego. Para ello obtengamos las funciones de recompensa del juego de extensión mixta haciendo un ligero ajuste al espacio de estrategias puras de los jugadores con el fin de simplificar la notación, así *piedra*=1, *papel*=2 y *tijera*=3.

$$\begin{aligned} R_1(s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23}) &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} s_{1i} s_{2j} \pi_1(i, j) \\ &= -s_{11}s_{22} + s_{11}s_{23} + s_{12}s_{21} - s_{12}s_{23} - s_{13}s_{21} + s_{13}s_{22}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $s_{13} = 1 - (s_{11} + s_{12})$ y $s_{23} = 1 - (s_{21} + s_{22})$, se sigue que

$$\begin{aligned} R_1(s_1, s_2) &= -s_{11}s_{22} + s_{11} - s_{11}s_{21} - s_{11}s_{22} + s_{12}s_{21} - s_{12} + s_{12}s_{21} \\ &\quad + s_{12}s_{22} - s_{21} + s_{11}s_{21} + s_{12}s_{21} + s_{22} - s_{11}s_{22} + s_{12}s_{22} \\ &= 3s_{12}s_{21} - 3s_{11}s_{22} + s_{11} + s_{22} - s_{12} - s_{21}. \end{aligned}$$

Por la simetría de los resultados del juego, se tiene que la función de recompensa en la extensión mixta para el jugador 2 es

$$R_2(s_1, s_2) = 3s_{11}s_{22} - 3s_{12}s_{21} - s_{11} - s_{22} + s_{12} + s_{21}.$$

Entonces, un punto de equilibrio de Nash debe cumplir las condiciones de primer orden en las derivas parciales de R_1 y R_2, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial s_{11}} &= -3s_{22} + 1 = 0 \\ \frac{\partial R_1}{\partial s_{12}} &= 3s_{21} - 1 = 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial s_{21}} &= -3s_{12} + 1 = 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial s_{22}} &= 3s_{11} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Y eso sucede sólo cuando $s_{22} = s_{21} = s_{12} = s_{11} = 1/3$ y, por lo tanto, también $s_{13} = s_{23} = 1/3$. Así, el único equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego piedra, papel o tijeras es cuando se asigna una distribución uniforme al espacio de estrategias puras. De lo anterior podríamos concluir que, cuando se juega más de una vez el juego, es conveniente elegir de igual manera cada una de las tres estrategias disponibles.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. Bertrand, "Théorie Mathématique de la Richesse Sociale," *Journal des Savants*, 1883.

[2] K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press, 1985.

[3] K. C. Border y C. D. Aliprantis, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer, 2006.

[4] K. L. Chung, *A Course in Probability Theory*. Academic Press, 1970.

[5] A. Cournot, *Reserches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. The Macmillan Company, 1838.

[6] J. Dugundji, *Topology*. Allyn y Bacon, Inc., 1966.

[7] O. Efe A., *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press, 2007.

[8] J. Forbes Nash, "Non-cooperative games," Tesis doct., Faculty of Princeton University, 1950.

[9] R. Gibbons, *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press, 1992.

[10] G. Hardin, "Tragedy of the commons," *Science, Vol. 162*, 1968.

[11] E. Michael, "Continuous selections. I," *The Annals of Mathematics*, 1956.

[12] J. van Mill, *Infinite Dimensional Topology, Prerequisities and Introduction*. Elsevier Science Publisher B.V., 1989.

[13] M. J. Osborne, *A Course in Game Theory*. The MIT Press, 1994.

[14] W. Poundstone, *Prisoner's Dilemma*. Anchor books, 1992.

[15] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[16] P. Zapata Lilo, *Economía, Política y otros Juegos. Una introducción a los Juegos no Cooperativos*. Prensas de Ciencias, 2007.