



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESPACIOS CLASIFICANTES DE GRUPOS DISCRETOS PARA LA FAMILIA DE
SUBGRUPOS VIRTUALMENTE ABELIANOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
PORFIRIO LEANDRO LEÓN ÁLVAREZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. LUIS JORGE SÁNCHEZ SALDAÑA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DRA. RITA JIMÉNEZ ROLLAND, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD
OAXACA
DR. JOSÉ MARÍA CANTARERO LÓPEZ, CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS, A.C.

CIUDAD DE MÉXICO, A 19 MARZO DE 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Con profundo cariño y gratitud, dedico esta tesis a mi esposa, Gloria Ocampo Morales, cuyo apoyo incondicional y motivación constante fueron pilares fundamentales a lo largo de mi doctorado.

Extiendo esta dedicatoria a mis padres, Reyna Álvarez Moreno y Aureliano León Reyes, cuya confianza inquebrantable y apoyo inagotable han sido mi guía y fortaleza.

Asimismo, dedico este trabajo a mis hermanos, quienes han sido un soporte constante y una fuente de ánimo en cada paso de este viaje.

Agradecimientos

En este camino que he recorrido en mi formación académica, muchas personas han sido fundamentales. Es por ello que deseo expresar mi más sincero agradecimiento a:

- A mi asesor el Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña por guiarme en mis primeros pasos en la investigación en matemáticas, además de darme consejos oportunos y acertados.
- A la Dra. Rita Jiménez Rolland por apoyarme en mi formación y estar al pendiente de mis avances del doctorado. Además de sus correcciones y sugerencias sobre este escrito.
- Al Dr. José María Cantarero López por aceptar ser parte de mi comité tutor y por dar seguimiento a mis avances de doctorado.
- Al Dr. José Luis Cisneros Molina por leer, revisar, sus valiosos comentarios y correcciones sobre esta tesis.
- Al Dr. Daniel Juan Pineda por sus comentarios, sugerencias y correcciones sobre este escrito.
- Al Dr. Noé Bárcenas Torres por sus comentarios, sugerencias y correcciones sobre este escrito.

Quiero agradecer también al Dr. Jesús Hernández Hernández por sus enriquecedoras discusiones sobre temas vinculados a mi investigación. Un especial reconocimiento a Carlos Pérez Estrada, con quien tuve la oportunidad de debatir sobre temas de la teoría geométrica de grupos.

Quiero agradecer a las siguientes instancias por el apoyo recibido: al Consejo Nacional de Humanidades y Tecnología (CONAHCyT) por brindarme una beca para realizar mis estudios de doctorado con número de CVU 848892, a la DGAPA-UNAM PAPIIT IA106923 por otorgarme una beca para la obtención del grado y por apoyarme parcialmente en los viáticos para visitas académicas, a CONAHCyT CF 2019-217392 por apoyarme parcialmente en los viáticos para visitas académicas. Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por brindarme un espacio propicio para realizar mis estudios de doctorado.

También agradezco a mi hermano Humberto por ayudarme a crear algunos dibujos para la tesis y para algunos artículos, y por discutir algunas cuestiones de matemáticas.

Finalmente, quiero agradecer a la Facultad de Ciencias de la UNAM por brindarme la oportunidad de desarrollar y fortalecer mis habilidades docentes desempeñándome como ayudante de profesor.

Índice general

Resumen	1
Introducción	1
1. Dimensión cohomológica y geométrica para familias	7
1.1. La categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon	7
1.1.1. Familias de subgrupos	7
1.1.2. La categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon	8
1.1.3. Dimensión cohomológica para familias	9
1.1.4. Dimensión cohomológica vía resoluciones proyectivas	10
1.1.5. Homología y cohomología de Bredon	10
1.2. Espacios clasificantes para familias	11
1.2.1. G -CW-complejos	11
1.2.2. Complejo de cadenas inducido por un G -CW-complejo	12
1.2.3. Espacios clasificantes para familias	13
1.3. El teorema de Eilenberg-Ganea para familias	14
1.3.1. Dimensión cohomológica vía cohomología	15
1.4. Construcciones de coproductos amalgamados	16
1.4.1. La construcción de Lück-Weiermann	16
1.4.2. Sucesión de Mayer-Vietoris	18
1.4.3. Espacio clasificante para la unión de dos familias	18
1.4.4. Familias anidadas	18
1.4.5. Variantes de la construcción de Lück-Weiermann	18
2. \mathcal{F}_k-dimensión de grupos fundamentales de gráficas de grupos	22
2.1. Básicos de teoría de Bass-Serre	22

2.2.	Grupos actuando en árboles	25
2.3.	Grupos virtualmente abelianos actuado en árboles	27
2.4.	La \mathcal{F}_k -dimensión de grupos fundamentales de gráfica de grupos	29
3.	\mathcal{F}_k-dimensión geométrica de RAAGs, grupos de trenzas y gráficas de grupos abelianos	32
3.1.	\mathcal{F}_k -dimensión de grupos virtualmente abelianos	34
3.2.	La \mathcal{F}_k -dimensión de grupos de trenzas	42
3.3.	La \mathcal{F}_k -dimensión de RAAGs y sus grupos de automorfismos exteriores . . .	42
3.4.	La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de gráficas de grupos abelianos finitamente generados.	46
4.	Dimensión virtualmente cíclica de grupos polilibres	47
4.0.1.	Básicos de grupos normalmente polilibres	48
4.0.2.	Dimensión geométrica de grupos polilibres	49
4.0.3.	Dimensión virtualmente cíclica de grupos polilibres	50
5.	La \mathcal{F}_k-dimensión geométrica de grupos de 3-variedades orientables	55
5.1.	Básicos de 3-variedades	57
5.2.	El caso hiperbólico	60
5.3.	Caso Seifert fibrado	62
5.3.1.	3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base mala o aesférica . .	62
5.3.2.	3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base hiperbólica	62
5.3.3.	3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base plana	64
5.4.	El caso Sol	72
5.5.	Resumen de los cálculos de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de las piezas JSJ .	75
5.6.	Demostración de los teoremas principales	76
5.6.1.	La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de una 3-variedad prima	77
5.6.2.	La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de una 3-variedad orientable	78

Resumen

En el presente escrito se presentan algunos artículos desarrollados durante el doctorado. Dado un grupo G y un entero $n \geq 0$, consideramos la familia \mathcal{F}_n de todos los subgrupos virtualmente abelianos de G de rango a lo mas n . En esta tesis estudiamos los espacios clasificantes para la familia \mathcal{F}_n para diversas colecciones de grupos como a continuación se describe:

- Se expone un trabajo realizado en colaboración con el Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña [44], en concreto, para todo $n \geq 2$, se calcula explícitamente la dimensión mínima para el espacio clasificante para la familia \mathcal{F}_n para grupos fundamentales de 3-variedades orientables, cerradas y conexas.
- También se presentan resultados obtenidos por el autor en [43], a saber, se demuestra que para cada $n \geq 2$, la cohomología de Bredon, con respecto de la familia \mathcal{F}_n , de un grupo abeliano libre con Rango $k > n$ no es trivial en la dimensión $k + n$; esto responde una pregunta de Corob Cook, Moreno, Nucinkis y Pasini [17, Question 2.7]. Como una aplicación, se calcula explícitamente la dimensión mínima de un espacio clasificante para la familia \mathcal{F}_n para grupos de trenzas, grupos de Artin de ángulo recto y gráficas de grupos cuyos grupos vértices son grupos abelianos finitamente generados, para todo $n \geq 2$.
- Finalmente, también se muestra un trabajo realizado en colaboración con la Dra. Rita Jiménez Rolland [33], en el cual damos una cota superior para la dimensión virtualmente cíclica de grupos polilibres. Como una aplicación mostramos que los grupos de Artin pares de tipo FC y grupos de trenzas de superficies admiten espacios clasificantes respecto de la familia \mathcal{F}_1 de dimensión finita.

Introducción

Fijemos un grupo G discreto. Un modelo X para el *espacio clasificante* BG es un complejo CW cuyo grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es G y todos sus grupos de homotopía superiores son triviales. Definimos la *dimensión geométrica* $\text{gd}(G)$ como el mínimo entero n tal que existe un modelo para BG de dimensión n , y si tal n no existe entonces la dimensión geométrica es infinita.

El espacio clasificante BG es importante porque por ejemplo, clasifica G -haces principales, ver [54]. Un modelo concreto de BG nos permite calcular la cohomología y homología de G . Estas son algunas razones del porque el espacio clasificante y la dimensión geométrica han sido estudiado ampliamente.

La dimensión geométrica tiene su contraparte algebraica, la *dimensión cohomológica* $\text{cd}(G)$, la cual en la categoría de $\mathbb{Z}G$ -módulos se puede definir como el mínimo entero n tal que existe una resolución proyectiva P_\bullet del módulo trivial \mathbb{Z} de longitud n , y si tal n no existe entonces la dimensión cohomológica es infinita. Sean G un grupo virtualmente libre de torsión y H un subgrupo de índice finito de G libre de torsión, definimos la *dimensión cohomológica virtual*, $\text{vcd}(G)$, como la dimensión cohomológica de H . Un resultado de Serre muestra que esta definición no depende del subgrupo (ver por ejemplo [13, Chapter VIII.11.]).

La dimensión cohomológica y geométrica están relacionados mediante las siguientes desigualdades

$$\text{cd}(G) \leq \text{gd}(G) \leq \max\{3, \text{cd}(G)\},$$

ver por ejemplo [13, Proposition 2.2 y Theorem 7.1]. Una pregunta abierta, conocida como la conjetura de Eilenberg-Ganea es la siguiente: ¿si $\text{cd}(G) = 2$ entonces $\text{gd}(G) = 2$?

Dado un modelo X para BG tenemos que G actúa libremente en el cubriente universal \tilde{X} de X , es decir, los grupos de isotropía son triviales, y además \tilde{X} es contráctil. Esta observación permite considerar la noción de espacios clasificantes para familias como una generalización del espacio clasificante.

Sea G un grupo, una colección de subgrupos \mathcal{F} de G es una *familia* si es no vacía, es cerrado bajo conjugación y tomar subgrupos. Fijemos un grupo G y una familia \mathcal{F} de subgrupos de G . Un G -CW-complejo X es un modelo para el *espacio clasificante* $E_{\mathcal{F}}G$, si cualquier grupo de isotropía de X pertenece a la familia \mathcal{F} y el conjunto de puntos fijos X^H es contráctil siempre que H pertenezca a \mathcal{F} . Se puede demostrar que siempre existe un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$, más aún cualesquiera dos modelos son G -homotópicamente equivalentes.

Históricamente, los espacios clasificantes para familias tomaron relevancia, especialmente para las familias F_{IN} y V_{CYC} , que consisten de todos los subgrupos finitos y todos los subgrupos virtualmente cíclicos de G , respectivamente. Esta relevancia se debe a que estos espacios aparecen en los enunciados de las conjeturas de isomorfismo de Farrell-Jones y Baum-Connes (ver, por ejemplo, [50]). Los espacios clasificantes surgen en otros contextos. Se pueden usar para definir la cohomología relativa de Adamson (ver por ejemplo [3, Corollary 4.27]). Se pueden utilizar para calcular la complejidad topológica de un grupo (ver por ejemplo [45]). Por las razones anteriores es importante construir modelos para $E_{\mathcal{F}}G$ concretos y minimales en el sentido de dimensión y/o del número de células.

Similar al caso clásico se puede definir la dimensión cohomológica para familias. En 1967 Glen E. Bredon introduce la categoría de módulos de Bredon en [11] [12].

Dado un grupo G y \mathcal{F} una familia de subgrupos de G . La *categoría de órbitas* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ es la categoría cuyos objetos son G -espacios homogéneos G/H con $H \in \mathcal{F}$ y los morfismos son G -funciones. La *categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon* es la categoría cuyos objetos son funtores contravariantes $M: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ de la categoría de órbitas a la categoría de grupos abelianos, y los morfismos son transformaciones naturales $f: M \rightarrow N$. Esta es una categoría abeliana con suficientes proyectivos. El \mathcal{F} -módulo de Bredon constante $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ está definido en objetos como $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}(G/H) = \mathbb{Z}$ y en morfismos como $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}(\varphi) = id_{\mathbb{Z}}$.

Lo anterior nos permite definir la dimensión cohomológica con respecto a una familia \mathcal{F} , denotada por $cd_{\mathcal{F}}(G)$, en términos de resoluciones proyectivas del módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$. Wolfgang Lück y David Meintrup demuestran en [49, Theorem 0.1] que el Teorema de Eilenberg-Ganea se generaliza para familias. Como una consecuencia tenemos que

$$cd_{\mathcal{F}}(G) \leq gd_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, cd_{\mathcal{F}}(G)\}.$$

Existen contraejemplos para la conjetura de Eilenberg-Ganea para familias. Por ejemplo, para la familia de subgrupos finitos Noel Brady, Ian J. Leary y Brita E. A. Nucinkis demuestran en [10] que existe un grupo de Coxeter de ángulo recto W tal que $cd_{F_{IN}}(W) = 2$ y $gd_{F_{IN}}(W) = 3$. Para otros ejemplos ver [62].

Uno puede generalizar naturalmente las familias F_{IN} y V_{CYC} como sigue. Sea $n \geq 0$ un número natural fijo. Se dice que un grupo es *virtualmente* \mathbb{Z}^n si contiene un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z}^n . Definimos la familia

$$\mathcal{F}_n = \{H \leq G \mid H \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}^n \text{ para algún } 0 \leq r \leq n\}.$$

Notemos que las familias F_{IN} y V_{CYC} coinciden con las familias \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 respectivamente.

Los espacios clasificantes $E_{\mathcal{F}_n}G$ han sido estudiados recientemente por varios autores, por ejemplo:

- En [17] en el 2018 se demostró que para un grupo abeliano libre de rango n se tiene que $gd_{\mathcal{F}_k}(G) \leq n + k$.
- En [56] en el 2019 se generalizó el resultado anterior a grupos poli- \mathbb{Z} .

- En [46, Proposición A.] en el 2018 se demostró que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\mathbb{Z}^n) = n + 2$ para todo $n > 2$.
- En [61] en el 2021 se demostró el siguiente teorema.

Teorema. *Sea G un grupo que actúa propiamente mediante isometrías semisimples en un espacio $\text{CAT}(0)$ propio de dimensión topológica n . Supongamos además que G satisface la condición (C). Entonces, para todo $0 \leq r \leq n$, se tiene que*

$$\text{cd}_{\mathcal{F}_r}(G) \leq n + r + 1.$$

Además se generalizó el resultado de [17] para grupos virtualmente abelianos.

- Sea S una superficie orientable, compacta y conexa, posiblemente con un número finito de punturas. Denotemos por $\text{Mcg}(S)$ el mapping class group de S . En [34] en el 2023 se demostró el siguiente teorema.

Teorema. *Sea S una superficie orientable, compacta y conexa, posiblemente con un número finito de punturas. Supongamos que S tiene característica de Euler negativa. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_n}(\text{Mcg}(S)) \leq \text{vcd}(\text{Mcg}(S)) + n.$$

Otros trabajos que también estudiaron estas familias \mathcal{F}_n son [30, 62].

El objetivo principal de esta tesis es estudiar espacios clasificantes para las familias \mathcal{F}_n , para grupos fundamentales de 3-variedades orientables, RAAGs, grupos de trenzas, grupos polilibrados, y algunos grupos fundamentales de gráficas de grupos.

La distribución de este escrito está ordenado como sigue:

Capítulo 1: Se introduce la categoría de módulos de Bredon, la cual es una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Lo anterior nos permite definir la dimensión cohomológica para familias en términos de resoluciones proyectivas. Posteriormente se introduce los espacios clasificantes para familias y algunas construcciones de coproductos amalgamados (push-outs) de espacios clasificantes los cuales se utilizarán en los capítulos posteriores.

Capítulo 2: En este capítulo se introducen las nociones básicas de la teoría de Bass-Serre, tales como gráficas de grupos, el grupo fundamental de una gráfica de grupos, el árbol de Bass-Serre. En particular se demuestra el siguiente teorema que se utilizará en los capítulos 3 y 5.

Teorema (L.A.-Sánchez Saldaña, 2022). *Sea Y un gráfica de grupos con grupo fundamental G finitamente generado y árbol de Bass-Serre T . Supongamos que la acción de G en T es acilíndrica. Entonces, para todo $k \geq 1$ tenemos:*

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\}$$

Capítulo 3: Corob Cook, Moreno, Nucinkis y Pasini en [17] demuestran que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\mathbb{Z}^n) \leq n+k$ para todo $0 \leq k < n$, ellos preguntan si esta cota superior es óptima en [17, Question 2.7]. En [43] respondí afirmativamente esta pregunta. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en dicho trabajo:

Teorema (L.A., 2023). *Sea $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n$. Sea G un grupo virtualmente \mathbb{Z}^n . Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = n + k$.*

Como una aplicación del teorema anterior se calcula explícitamente la \mathcal{F}_n -dimensión geométrica de grupos de trenzas, grupos de Artin de ángulo recto y gráficas de grupos con grupos vértices virtualmente abelianos, para todo $n \geq 1$.

Teorema (L.A., 2023). *Sea $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n - 1$ y G o bien el grupo de trenzas completo B_n o el grupo de trenzas puro P_n . Entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{vcd}(G) + k = n + k - 1.$$

Teorema (L.A., 2023). *Sea A_Γ un grupo de Artin de ángulo recto. Entonces para $0 \leq k < \text{cd}(A_\Gamma)$ se cumple $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) = \dim(S_\Gamma) + k = \text{cd}(A_\Gamma) + k$.*

Capítulo 4: En colaboración con la Dra. Rita Jiménez Rolland en [33] dimos una cota superior para la dimensión virtualmente cíclica de un grupo polilibre. En este capítulo se presentan dichos resultados:

Teorema (L.A.-Jiménez Rolland, 2023). *Sea G un grupo normalmente polilibre de longitud $n \in \mathbb{N}$.*

- a) *La dimensión geométrica $\text{gd}(G) = \text{gd}_{\mathcal{F}_0}(G)$ esta acotado superiormente por n . Además, si G es normalmente poli-f.g.-libre, entonces $\text{gd}(G) = n$.*
- b) *Si G es normalmente polilibre, entonces la dimensión virtualmente cíclica satisface la siguiente desigualdad*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) \leq 3(n - 1) + 2.$$

El argumento utilizado para demostrar el teorema es por inducción sobre la longitud del grupo polilibre. Además se necesitó demostrar el siguiente resultado.

Teorema (L.A.-Jiménez Rolland, 2023). *Sea G un grupo tal que $\text{gd}_{\mathcal{F}_0}(G) = 1$, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) \leq 2$. Además, si G es no virtualmente cíclico y tiene un elemento de orden infinito, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) = 2$.*

Como una aplicación del teorema anterior se obtiene que para un grupo virtualmente libre no virtualmente cíclico G se satisface $\text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) = 2$, esto nos permitió demostrar lo siguiente.

Proposición (L.A.-Jiménez Rolland, 2023). *Considere una sucesión exacta corta de grupos*

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

tal que F es un grupo libre. Entonces

a) La dimensión geométrica satisface $\text{gd}(G) \leq 2$, y se da la igualdad si el grupo G no es libre.

b) La dimensión geométrica virtualmente cíclica satisface $2 \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) \leq 3$.

Capítulo 5: En el 2019 en [35] se calculó explícitamente la dimensión geométrica de grupos de 3-variedades orientables con respecto de la familia \mathcal{F}_1 . Como una generalización natural, calculamos en trabajo conjunto con el Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña la dimensión geométrica de grupos de 3-variedades con respecto de las familias \mathcal{F}_k para todo $k \geq 2$ [44]. En este capítulo se presenta dichos resultados obtenidos:

Teorema (L.A.-Sánchez Saldaña, 2022). *Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_r las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(P_i, x_i)$. Entonces, para todo $k \geq 2$,*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \\ 2 & \text{si } r \geq 2, G_i \in \mathcal{F}_k \text{ para todo } 1 \leq i \leq r, \\ & \text{y } G \text{ es no virtualmente cíclico,} \\ \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además

- $G_i \in \mathcal{F}_2$ si y sólo si P_i es modelada en \mathbb{S}^3 o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ o $P_i = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.
- $G_i \in \mathcal{F}_3$ si y sólo si $G_i \in \mathcal{F}_2$ o G_i es modelada en \mathbb{E}^3 .

Dada la descomposición prima de una 3-variedad M , el teorema anterior nos dice que para conocer explícitamente la dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$ del grupo fundamental de una 3-variedad, necesitamos calcular la dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}$ de las piezas primas de M . La dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}$ del grupo fundamental de una 3-variedad prima es la siguiente.

Teorema (L.A.-Sánchez Saldaña, 2022). *Sea M una 3-variedad prima conexa, cerrada y orientada. Sean N_1, N_2, \dots, N_r las piezas de la descomposición JSJ de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(N_i, x_i)$. Si $k \geq 2$, entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } M \text{ es modelada en Sol,} \\ \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este teorema nos dice que para conocer explícitamente la dimensión geométrica del grupo fundamental de una pieza prima, necesitamos calcular la dimensión geométrica de las piezas de su descomposición JSJ. Estas dimensiones geométricas se calculan explícitamente en el capítulo y se listan en la siguiente tabla.

Tipo de variedad N	$\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\pi_1(N, x_0))$	$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\pi_1(N, x_0))$ con $k \geq 3$
Hiperbólica con frontera vacía	3	3
Hiperbólica con frontera no vacía	3	3
Seifert fibrado con base orbidad B que es o bien mala o modelada en \mathbb{S}^2	0	0
Seifert fibrado con base orbidad B modelada en \mathbb{H}^2 , y frontera vacía o no vacía	2	2
Seifert fibrado modelada en \mathbb{E}^3 con frontera no vacía y base orbidad B modelada en \mathbb{E}^2	5	0
Seifert fibrado modelada en Nil con frontera vacía y base orbidad B modelada en \mathbb{E}^2	3	3
Seifert fibrado con frontera no vacía y base orbidad B modelada en \mathbb{E}^2	0	0

Tabla 1: \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de las piezas JSJ.

En conclusión, esta tesis contribuyó al estudio de los espacios clasificantes $E_{\mathcal{F}_k}G$ para algunas colecciones de grupos. En el cálculo de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos fundamentales de 3-variedades se utilizó el Teorema de descomposición prima y JSJ, así como la geometrización de Thurston. Varias de las herramientas utilizadas tienen su análogo para 3-variedades no orientables y 3-orbitadas orientables, por lo que se podría calcular la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica utilizando la misma estrategia, este será un trabajo a futuro, de particular importancia es construir modelos explícitos para $E_{\mathcal{F}_0}G$ y $E_{\mathcal{F}_1}G$ ya que potencialmente se podrían usar para calcular la K-teoría topológica y K-teoría algebraica respectivamente.

En el el cálculo de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de \mathbb{Z}^n se utilizó que \mathbb{Z}^n es abeliano, y que todo subgrupo esta contenido en uno maximal, por lo que estas técnicas no podrían usarse para un grupo poli- \mathbb{Z} en general.

Capítulo 1

Dimensión cohomológica y geométrica para familias

1.1. La categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon

El objetivo de esta sección es definir la categoría abeliana de \mathcal{F} -módulos de Bredon, la cual es una categoría abeliana con suficientes proyectivos, y como una consecuencia podemos hacer álgebra homológica.

1.1.1. Familias de subgrupos

Definición 1.1.1. Sea G un grupo. Decimos que una colección \mathcal{F} de subgrupos de G es una familia si es no vacía, es cerrada bajo conjugación y tomar subgrupos.

Ejemplos 1.1.2. Dado un grupo G podemos definir las siguientes familias de subgrupos de G :

- 1) La familia Tr que consiste sólo del subgrupo trivial $\{1\}$.
- 2) La familia F_{IN} que consiste de todos los subgrupos finitos de G .
- 3) La familia V_{CYC} que consiste de todos los subgrupos virtualmente cíclicos de G .
- 4) La familia A_{LL} que consiste de todos los subgrupos de G .
- 5) Un grupo se dice que es virtualmente \mathbb{Z}^n si contiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^n de índice finito. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos la familia

$$\mathcal{F}_n = \{H \leq G \mid H \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}^r \text{ para algún } 0 \leq r \leq n\}.$$

Notemos que las familias F_{IN} y V_{CYC} coinciden con las familias \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 respectivamente.

- 6) Sean \mathcal{F} una familia de subgrupos de G y H un subgrupo de G . Definimos la familia $\mathcal{F} \cap H$ como la colección de todos los subgrupos de H que pertenecen a \mathcal{F} .

1.1.2. La categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon

Definición 1.1.3 (Categoría de órbitas). *Sea \mathcal{F} una familia de subgrupos de G . Entonces la categoría de órbitas $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ es la siguiente categoría pequeña. Los objetos de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ son G -espacios homogéneos G/H con $H \in \mathcal{F}$ y los morfismos de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ son G -funciones.*

Vamos a denotar el conjunto de todas las G -funciones de G/H en G/K por $[G/H, G/K]_G$.

El material de esta sección es obtenido de [26, Chapter 1.] **En el resto de este capítulo fijamos un grupo G y una familia \mathcal{F} de G .**

Definición 1.1.4 (Categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon). *Definimos la categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon, como la categoría que tiene por objetos funtores contravariantes $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ de la categoría de órbitas $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ a la categoría de grupos abelianos Ab , y tiene como morfismos transformaciones naturales.*

Un objeto de la categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon lo llamaremos \mathcal{F} -módulo de Bredon o $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ -módulo.

Sean M y N dos \mathcal{F} -módulos de Bredon. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ es una transformación natural del funtor M al funtor N . El morfismo f es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo si para todo $H \in \mathcal{F}$ el morfismo $f_{G/H}: M(G/H) \rightarrow N(G/H)$ es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo respectivamente.

Ejemplos 1.1.5. *Ejemplos de módulos de Bredon:*

- Sea A un grupo abeliano, el \mathcal{F} -módulo constante $A_{\mathcal{F}}$ es el funtor constante $A_{\mathcal{F}}: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ dado por: $A_{\mathcal{F}}(G/H) = A$ y $A(\psi) = id$ para cualquier objeto G/H y morfismo ψ .
- Sea K un subgrupo fijo de G . Construimos el \mathcal{F} -módulo de Bredon $\mathbb{Z}[?, G/K]_G$ como sigue: dado un objeto G/H de la categoría de órbitas $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$ le asignamos el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}[G/H, G/K]_G$ con base $[G/H, G/K]_G$. Si $\varphi: G/H \rightarrow G/L$ es un morfismo de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}G$, entonces $\varphi: \mathbb{Z}[G/L, G/K]_G \rightarrow \mathbb{Z}[G/H, G/K]_G$ es el único homomorfismo de grupos abelianos que envía cada elemento de la base $f \in \mathbb{Z}[G/L, G/K]_G$ a $f \circ \varphi \in \mathbb{Z}[G/H, G/K]_G$.

Cuando \mathcal{F} es la familia trivial, se puede demostrar que la categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon es equivalente a la categoría de $\mathbb{Z}G$ -módulos, ver por ejemplo [26, pág. 13].

\mathcal{F} -Módulos de Bredon libres

Definición 1.1.6. *Un \mathcal{F} -conjunto $\Delta = (\Delta, \varphi)$ es un par que consiste de un conjunto Δ y una función $\varphi: \Delta \rightarrow \mathcal{F}$. Para $H \in \mathcal{F}$ denotamos por Δ_H la pre-imagen $\varphi^{-1}(\{H\})$ y es llamado el H -componente del \mathcal{F} -conjunto Δ . Un morfismo $f: (\Delta, \varphi) \rightarrow (\Delta', \varphi')$ de \mathcal{F} -conjuntos es una función $f: \Delta \rightarrow \Delta'$ de conjuntos tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta' \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi' \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

Definición 1.1.7. Sea M un \mathcal{F} -módulo de Bredon. Un \mathcal{F} -conjunto (Δ, φ) es una base para M si:

a) Para todo $H \in \mathcal{F}$, $\Delta_H \subset M(G/H)$;

b) $\bigoplus_{x \in \Delta} \mathbb{Z}[?, G/\varphi(x)]_G = M$.

Definición 1.1.8. Decimos que un \mathcal{F} -módulo de Bredon es libre si tiene una base.

Teorema 1.1.9. Todos los \mathcal{F} -módulos de Bredon libres son de la forma

$$\bigoplus_{x \in \Delta} \mathbb{Z}[?, G/\varphi(x)]_G$$

donde $\Delta = (\Delta, \varphi)$ es un \mathcal{F} -conjunto.

Demostración. Ver [26, Proposición 1.18]. □

1.1.3. Dimensión cohomológica para familias

Igual que el caso clásico vamos a definir la dimensión cohomológica para familias en términos de resoluciones proyectivas.

Resoluciones proyectivas

Definición 1.1.10. Un \mathcal{F} -módulo de Bredon P es proyectivo si, para cualquier epimorfismo $g: M \rightarrow N$ y cualquier morfismo $f: P \rightarrow N$ existe un morfismo $s: P \rightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow s & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0. \end{array}$$

Proposición 1.1.11. Todo \mathcal{F} -módulo de Bredon libre es proyectivo.

Demostración. Un \mathcal{F} -módulo de Bredon P es proyectivo si y sólo si existe un \mathcal{F} -módulo de Bredon Q tal que $P \oplus Q$ es libre [26, Proposición 1.23.]. Se sigue que todo \mathcal{F} -módulo Bredon libre es proyectivo. □

Definición 1.1.12. Sea M un \mathcal{F} -módulo de Bredon. Una resolución proyectiva P_\bullet de M es una sucesión $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{F} -módulos proyectivos y morfismos $\{d_n: P_n \rightarrow P_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\ker(d_n) = \text{im}(d_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Representamos esta resolución como

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0.$$

Teorema 1.1.13. Todo \mathcal{F} -módulo de Bredon tiene una resolución proyectiva.

Demostración. Ver [26, pág. 11, parrafo 4]. \square

Definición 1.1.14. Sean M un \mathcal{F} -módulo de Bredon y P_\bullet una resolución proyectiva de M . Definimos la longitud de P_\bullet como el mínimo entero n tal que, para todo $m > n$, $P_m = 0$. Si tal n existe, si no P_\bullet tiene longitud infinita.

1.1.4. Dimensión cohomológica vía resoluciones proyectivas

Vamos a estar interesados en resoluciones proyectivas del siguiente \mathcal{F} -módulo de Bredon.

Definición 1.1.15. Definimos el \mathcal{F} -módulo de Bredon constante $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ definido en objetos por $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}(G/H) = \mathbb{Z}$ y en morfismos por $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}(\varphi) = id_{\mathbb{Z}}$.

Definición 1.1.16 (Dimensión cohomológica para familias). Sea G un grupo y \mathcal{F} una familia de subgrupos de G , definimos la dimensión cohomológica de G respecto de la familia \mathcal{F} como

$$cd_{\mathcal{F}}(G) = \min \{ n \in \mathbb{N} : \text{existe una resolución proyectiva de } \mathcal{F}\text{-módulos de Bredon de longitud } n \text{ para el } \mathcal{F}\text{-módulo } \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \}.$$

1.1.5. Homología y cohomología de Bredon

Para definir la homología de Bredon, necesitamos definir el producto tensorial de un \mathcal{F} -módulo de Bredon $M: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ y un funtor covariante $N: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$.

Definición 1.1.17. Sean $M: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ un \mathcal{F} -módulo de Bredon y $N: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ un funtor covariante. Definimos el producto tensorial $M \otimes N$ de M y N como el \mathcal{F} -módulo de Bredon definido en objetos por $(M \otimes N)(G/H) = M(G/H) \otimes N(G/H)$, y definido en morfismos por $\varphi: G/H \rightarrow G/K \mapsto M(\varphi) \otimes N(\varphi)$.

Definición 1.1.18 (Homología de Bredon). Sean P_\bullet resolución proyectiva del \mathcal{F} -módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$ representada por

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \rightarrow 0,$$

y $M: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ un funtor covariante. Consideremos el siguiente complejo de cadenas $P_\bullet \otimes M$

$$\cdots \rightarrow P_n \otimes M \rightarrow P_{n-1} \otimes M \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \otimes M \rightarrow P_0 \otimes M \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \otimes M \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Definimos la homología de Bredon de G con coeficientes en M como $H_n^{\mathcal{F}}(G, M) = H_n(P_\bullet \otimes M)$.

Definición 1.1.19. Sean M y N \mathcal{F} -módulos de Bredon. Definimos $\text{hom}(M, N)$ como el conjunto de todos los morfismos de \mathcal{F} -módulos de Bredon $M \rightarrow N$.

Definición 1.1.20 (Cohomología de Bredon). Sean P_\bullet resolución proyectiva del \mathcal{F} -módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$ representada por

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} 0,$$

M un \mathcal{F} -módulo de Bredon. Consideremos el siguiente complejo de cadenas

$$0 \rightarrow \text{hom}(\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}, M) \rightarrow \text{hom}(P_0, M) \rightarrow \text{hom}(P_1, M) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{hom}(P_n, M) \rightarrow \cdots$$

Definimos la cohomología de Bredon de G con coeficientes en M como $H_{\mathcal{F}}^n(G, M) = H_n(\text{hom}(P_\bullet, M))$.

1.2. Espacios clasificantes para familias

En esta sección vamos a definir espacios clasificantes para familias. Para ello primero vamos a definir la noción de un G -CW-complejo, posteriormente veremos como un modelo del espacio clasificante induce una resolución proyectiva del \mathcal{F} -módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$.

1.2.1. G-CW-complejos

Antes de definir espacios clasificantes para familias necesitamos ver la noción de G -CW-complejo.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo actuando en un espacio X . Decimos que X admite una estructura de G -CW-complejo si existen:

1. Una filtración de G -subespacios $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \cdots \subset X^{(n)} \cdots \subset \bigcup_k X^{(k)} = X$.

Donde $X^{(0)}$ es el conjunto discreto $\coprod_k G/H_k$ con H_k un subgrupo de G ;

2. El espacio X tiene la topología colímite con respecto a esta filtración, es decir, un subconjunto $U \subseteq X$ es un cerrado en X si y sólo si $U \cap X^{(n)}$ es cerrado en $X^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

3. Para todo $n > 1$, el subespacio $X^{(n)}$ se construye a partir de $X^{(n-1)}$ adjuntando n -células de forma equivariante, es decir, existe un G -coproducto amalgamado

$$\begin{array}{ccc} \coprod_k G/H_k \times S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_k} & X^{(n-1)} \\ \downarrow i & & \downarrow \\ \coprod_k G/H_k \times D^n & \xrightarrow{\coprod Q_k} & X^{(n)} \end{array}$$

La acción de G en D^n y S^n es trivial. El G -espacio $X^{(n)}$ se llama el n -esqueleto de X .

1.2.2. Complejo de cadenas inducido por un G -CW-complejo

Sea X un G -CW complejo. Denotamos por Δ_n el conjunto de todas las células de dimensión n , y $[G/H, \Delta_n]_G$ el conjunto de todas las G -funciones de G/H en Δ_n . Notemos que Δ_n es un G -conjunto. En la categoría de \mathcal{F} -módulos de Bredon, vamos a construir un complejo de cadenas inducido por X

$$\cdots \rightarrow \underline{C}_n(X) \xrightarrow{d_n} \underline{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} \underline{C}_1(X) \xrightarrow{d_1} \underline{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

como sigue: definimos los \mathcal{F} -módulos de Bredon de nuestro complejo de cadenas como

$$\underline{C}_n(X) = \mathbb{Z}[\cdot, \Delta_n]_G$$

donde $\mathbb{Z}[\cdot, \Delta_n]: \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G \rightarrow Ab$ es el \mathcal{F} -módulo de Bredon, definido en objetos como $\mathbb{Z}[\cdot, \Delta_n](G/H) = \mathbb{Z}[G/H, \Delta_n]_G$ el grupo abeliano libre con base $[G/H, \Delta_n]_G$. Definido en morfismos como: si $\varphi: G/H \rightarrow G/K$ es una G -función, entonces definimos $\varphi^*: \mathbb{Z}[G/K, \Delta_n]_G \rightarrow \mathbb{Z}[G/H, \Delta_n]_G$ como el único morfismo definido en la base por $f \mapsto f \circ \varphi$.

Antes de definir los diferenciales del complejo de cadenas hagamos la siguiente observación,

Observación 1.2.2. $\underline{C}_n(X)(G/H) = C_n(X^H)$ donde $C_n(X^H)$ denota el n -enésimo vértice del complejo de cadena celular de X^H . En efecto

$$\begin{aligned} \underline{C}_n(X)(G/H) &= \mathbb{Z}[G/H, \Delta_n]_G \\ &= \mathbb{Z}[\Delta_n^H] \\ &= H_n(X_n^H, X_{n-1}^H) \\ &= C_n(X^H). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Para cada $n \geq 1$ definimos el morfismo $d_n: \underline{C}_n(X) \rightarrow \underline{C}_{n-1}(X)$ de \mathcal{F} -módulos de Bredon como sigue: si $\varphi: G/H \rightarrow G/K$ es una G -función, entonces obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_n(X)(G/K) & \xrightarrow{\varphi^*} & \underline{C}_n(X)(G/H) \\ d_{n,K} \downarrow & & \downarrow d_{n,H} \\ \underline{C}_{n-1}(X)(G/K) & \xrightarrow{\varphi^*} & \underline{C}_{n-1}(X)(G/H) \end{array}$$

donde $d_{n,K}$ y $d_{n,H}$ son las diferenciales del complejo de cadenas celular de X^K y X^H respectivamente (por la Observación 1.2.2). De hecho el diagrama conmuta; el morfismo φ^* es inducido por la función $X^H \rightarrow X^K$ que envía $x \in X^K$ a $gx \in X^H$; esta última función induce un morfismo de complejo de cadenas celular $C_{\bullet}(X^K) \rightarrow C_{\bullet}(X^H)$ que es natural [29, pág. 111], es decir, el diagrama conmuta. Por lo tanto podemos definir $d_n(G/H) = d_{n,H}$ para todo $H \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.2.3. *La sucesión*

$$\cdots \rightarrow \underline{C}_n(X) \xrightarrow{d_n} \underline{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} \underline{C}_1(X) \xrightarrow{d_1} \underline{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

es un complejo de cadenas, donde ϵ es el morfismo de aumentación definido por $\epsilon_H: C_0(X^H) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía cualquier 0-célula del CW-complejo X^H a 1.

Demostración. Tenemos que mostrar que $d_n \circ d_{n-1} = 0$, para ello basta mostrar que la siguiente sucesión es un complejo de cadenas

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underline{C}_n(X)(G/H) \xrightarrow{d_{n,H}} \underline{C}_{n-1}(X)(G/H) \xrightarrow{d_{n-1,H}} \cdots \\ \xrightarrow{d_{2,H}} \underline{C}_1(X)(G/H) \xrightarrow{d_{1,H}} \underline{C}_0(X)(G/H) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{F}}(G/H) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para todo $H \in \mathcal{F}$.

La sucesión anterior corresponde al complejo de cadena celular aumentado de X^H por construcción, por lo tanto $d_{n,H} \circ d_{n-1,H} = 0$. \square

Lema 1.2.4. *Sea X un G -CW-complejo. Si X^H es contráctil para todo $H \in \mathcal{F}$, entonces el complejo de cadenas aumentado $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$*

$$\cdots \rightarrow \underline{C}_n(X) \xrightarrow{d_n} \underline{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} \underline{C}_1(X) \xrightarrow{d_1} \underline{C}_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

es exacto.

Demostración. Por observación 1.2.2 el complejo de cadenas $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$ es exacto si y sólo si el complejo de cadenas celular $C_{\bullet}(X^H)$ es exacto para todo $H \in \mathcal{F}$.

El espacio X^H es contráctil, así X^H tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, luego el complejo de cadenas celular $C_{\bullet}(X^H)$ es exacto. \square

1.2.3. Espacios clasificantes para familias

Definición 1.2.5 (Espacio clasificante para familias). *Sea G un grupo y sea \mathcal{F} una familia. Un G -CW complejo X es un espacio clasificante de G para la familia \mathcal{F} , o un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$, si satisface las siguientes condiciones:*

- Para todo $x \in X$, el grupo de isotropía G_x pertenece a la familia \mathcal{F} ;
- Si Y es un G -CW-complejo tal que, para todo $y \in Y$ los grupos de isotropía G_y pertenecen a la familia \mathcal{F} . Entonces existe una G -función $f: Y \rightarrow X$ que es única hasta G -homotopía.

Teorema 1.2.6. [47, Theorem 1.9.]. *Sea G un grupo y \mathcal{F} una familia de G . Entonces existe un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$.*

La siguiente caracterización de espacios clasificantes será útil, [47, Theorem 1.9.].

Teorema 1.2.7 (Caracterización de espacios clasificantes para familias). *Sea G un grupo discreto y sea \mathcal{F} una familia de subgrupos de G . Un G -CW-complejo X es un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$ si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- a) *Para todo $x \in X$, el grupo de isotropía G_x pertenece a la familia \mathcal{F} ;*
- b) *Para todo $H \in \mathcal{F}$, $X^H = \{x \in X : hx = x \ \forall h \in H\}$ es no vacío y contráctil.*

Ejemplos 1.2.8. *Ejemplos de espacios clasificantes para familias.*

1. *Sean G un grupo y Tr la familia trivial de G . Sea X un modelo para el espacio clasificante BG , entonces el cubriente universal \tilde{X} de X es un modelo para $E_{\text{Tr}}G$.*
2. *Sean G un grupo y \mathcal{F} una familia de G tal que $G \in \mathcal{F}$, entonces el espacio de un punto $\{*\}$ es un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$.*
3. *\mathbb{R} es un modelo para $E_{\mathcal{F}_0} \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.*
4. *Sea F_n el grupo libre en n -generadores, entonces (la realización geométrica de) su gráfica de Cayley es un modelo para $E_{\mathcal{F}_0} F_n$.*

Definición 1.2.9. *Definimos la dimensión de un espacio G -CW-complejo X conexo como el máximo entero n tal que existe una célula de X de dimensión n .*

Definición 1.2.10 (Dimensión geométrica para familias). *Sea G un grupo y \mathcal{F} una familia de G . Definimos la dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}}G$ de G respecto de la familia \mathcal{F} como la mínima n tal que existe un modelo para el espacio clasificante $E_{\mathcal{F}}G$ de dimensión n .*

Ejemplos 1.2.11. *Ejemplos de dimensión geométrica*

1. $\text{gd}_{\mathcal{F}}(G) = 0$ si y sólo si $G \in \mathcal{F}$.
2. *Stallings[67] y Swan[69] caracterizan a los grupos libres como sigue:*
 $\text{gd}(G) = 1$ si y sólo si G es libre y no trivial.

La siguiente proposición nos ayudará a dar cotas inferiores de la \mathcal{F} -dimensión geométrica.

Proposición 1.2.12. *Sean G un grupo y $H \leq G$, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F} \cap H}(H) \leq \text{gd}_{\mathcal{F}}(G)$ para cualquier familia \mathcal{F} de G*

Demostración. Se sigue del hecho de que un modelo X para $E_{\mathcal{F}}G$ es también un modelo para $E_{\mathcal{F} \cap H}H$ donde la acción está dada por restricción. \square

1.3. El teorema de Eilenberg-Ganea para familias

Análogo al caso clásico tenemos el siguiente teorema de Eilenberg-Ganea para familias

Teorema 1.3.1 (El teorema de Eilenberg-Ganea para familias). *Sean G un grupo y \mathcal{F} cualquier familia de subgrupos, entonces*

$$\text{cd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, \text{cd}_{\mathcal{F}}(G)\}.$$

En particular si $\text{cd}_{\mathcal{F}}(G) \geq 3$, entonces $\text{cd}_{\mathcal{F}}(G) = \text{gd}_{\mathcal{F}}(G)$.

Demostración. La primera desigualdad se demuestra igual que el caso clásico. Sea X un modelo del espacio clasificante $E_{\mathcal{F}}G$ de dimensión $n = \text{gd}_{\mathcal{F}}(G)$. Vamos a demostrar que el complejo de cadenas aumentado $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$ inducido por X (ver Proposición 1.2.3) nos da una resolución proyectiva del módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$. Por [26, Proposition 2.9] para todo $n \geq k \geq 1$, el módulo de Bredon $\underline{C}_k(X)$ es un módulo de Bredon libre. Por definición de $E_{\mathcal{F}}G$ el conjunto de puntos fijos X^H es contráctil para todo $H \in \mathcal{F}$, luego por Lema 1.2.4 el complejo de cadenas aumentado $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$ es exacto.

Ahora notemos que $\underline{C}_k(X) = 0$ para todo $k \geq n + 1$. En efecto por observación 1.2.2 $\underline{C}_n(G/H) = C_n(X^H)$ para todo $H \in \mathcal{F}$. Por otra parte X^H es un espacio CW-complejo de dimensión $\leq n$, luego $C_k(X^H) = 0$ para todo $k \geq n + 1$. Así $\underline{C}_k(X) = 0$ para todo $k \geq n + 1$.

Por lo tanto obtuvimos una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$ de longitud n . Luego por la definición de dimensión cohomológica para familias obtenemos $\text{cd}_{\mathcal{F}} G \leq \text{gd}_{\mathcal{F}} G$.

La segunda desigualdad se demuestra en [49, Theorem 0.1]. □

1.3.1. Dimensión cohomológica vía cohomología

Igual que en el caso clásico, la dimensión cohomológica se puede definir en términos de la cohomología de Bredon.

Definición 1.3.2 (Cohomología de Bredon de $E_{\mathcal{F}}G$). *Sea X un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$ y M un \mathcal{F} -módulo de Bredon. Sea $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$ la resolución de $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$ inducido por X . Definimos la cohomología de Bredon $H^n(G, M)$ de X con coeficientes en M como la homología del complejo de cadenas $\text{hom}(\underline{C}_{\bullet}^*(X), M)$.*

Proposición 1.3.3. *Siguiendo la notación de Definición 1.3.2 anterior tenemos que la cohomología de Bredon $H^n(G, M)$ de X con coeficientes en M es la misma que $H_{\mathcal{F}}^n(G, M)$ definida en Definición 1.1.20*

Demostración. El complejo de cadenas aumentado $\underline{C}_{\bullet}^*(X)$ inducido por X es una resolución proyectiva del módulo de Bredon $\mathbb{Z}_{\mathcal{F}}$ como se mostró en la demostración de Teorema 1.3.1. La proposición se sigue de que la definición de la cohomología de Bredon no depende de la resolución proyectiva. □

Proposición 1.3.4 (Caracterización de la dimensión cohomológica para familias). [56, Corollary 3.5] *Sean G un grupo discreto y \mathcal{F} una familia de subgrupos de G , entonces*

$$\text{cd}_{\mathcal{F}}(G) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists M \in \text{Mod} - \mathcal{O}_{\mathcal{F}}G : H_{\mathcal{F}}^n(G, M) \neq 0\}$$

1.4. Construcciones de coproductos amalgamados

1.4.1. La construcción de Lück-Weiermann

Una forma de construir modelos para espacios clasificantes $E_{\mathcal{F}}G$ es hacerlo a partir de otros ya conocidos. En lo que sigue vamos a describir la construcción de Lück-Weiermann [51, Theorem 2.3] el cual nos permitirá construir de manera inductiva $E_{\mathcal{F}_n}G$.

Definición 1.4.1. Sean G un grupo, y familias anidadas $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Se dice que una relación de equivalencia \sim en $\mathcal{G} - \mathcal{F}$ es fuerte si satisface las siguientes condiciones

- a) Si $H, K \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$ con $H \subseteq K$, entonces $H \sim K$;
- b) Si $H, K \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$ y $g \in G$, entonces $H \sim K$ si y sólo si $gHg^{-1} \sim gKg^{-1}$.

Definición 1.4.2. Sean G un grupo y L, K subgrupos de G . Decimos que L y K son conmensurables si $L \cap K$ tiene índice finito en L y en K .

Ejemplos 1.4.3. Ejemplos de relaciones de equivalencia fuertes

1. Sean $k \geq 0$ y G un grupo. Consideremos las familias anidadas $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$ de G , definamos una relación de equivalencia \sim en $\mathcal{F}_{k+1} - \mathcal{F}_k$ como sigue: $H, K \in \mathcal{F}_{k+1} - \mathcal{F}_k$ están relacionados si y sólo si H, K son conmensurables, i.e., $H \cap K$ tiene índice finito en ambos H y K . Esta relación es fuerte, en efecto, verifiquemos las condiciones, demostramos primero la condición a), sean $H, K \in \mathcal{F}_{k+1} - \mathcal{F}_k$ con $H \leq K$, como H y K son virtualmente \mathbb{Z}^{k+1} se sigue que H tiene índice finito en K , y como $H = H \cap K$ la condición se sigue.

Finalmente verifiquemos la condición b), $H, K \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$ y $g \in G$, tenemos que demostrar $H \sim K$ si y sólo si $gHg^{-1} \sim gKg^{-1}$. Consideremos el automorfismo $\varphi: G \rightarrow G$ dado por conjugación por g . Por definición $H, K \in \mathcal{F}_{k+1} - \mathcal{F}_k$ están relacionados si y sólo si $H \cap K$ tiene índice finito en ambos H y K si y sólo si $\varphi(H \cap K)$ tiene índice finito en ambos $\varphi(H)$ y $\varphi(K)$, esto termina la demostración de esta condición.

Definición 1.4.4. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y \mathcal{F} una familia de subgrupos de G . Definimos la familia $\mathcal{F} \cap H$ de H como todos los subgrupos de H que pertenecen a \mathcal{F} . Podemos completar la familia $\mathcal{F} \cap H$ para obtener una familia $\overline{\mathcal{F} \cap H}$ de G , es decir, $\overline{\mathcal{F} \cap H}$ es la intersección de todas las familias que contienen a $\mathcal{F} \cap H$.

Observación 1.4.5. Siguiendo la notación de Definición 1.4.4 notemos que:

- Si $H = G$ entonces $\overline{\mathcal{F} \cap H} = \mathcal{F}$.
- Si H es un subgrupo normal de G , entonces $\overline{\mathcal{F} \cap H} = \mathcal{F} \cap H$.

Definición 1.4.6. Sean G un grupo y H un subgrupo de G . Definimos el conmensurador de H en G como el subgrupo

$$N_G[H] := \{g \in G \mid gHg^{-1} \text{ es conmensurable con } H\}.$$

Sea G un grupo, H un subgrupo de G y $n \geq 0$. Consideremos las siguientes familias anidadas de G , $\mathcal{F}_n \cap \overline{H} \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}$, sea \sim la relación de equivalencia en $\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}$ dada por conmensurabilidad. Es fácil comprobar que esta es una relación de equivalencia fuerte.

Introducimos la siguiente notación:

- Denotamos por $(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) / \sim$ las clases de equivalencia en $\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}$. Sea $L \in (\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) / \sim$ denotamos por $[L]$ su clase de equivalencia.
- Sea $[L] \in (\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) / \sim$, definimos la siguiente familia de subgrupos de $N_G[L]$

$$(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}})[L] = \{K \subseteq N_G[L] \mid K \in (\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}), [K] = [L]\} \cup (\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}} \cap N_G[L]).$$

Teorema 1.4.7. [51, Theorem 2.3] *Sea G un grupo, H un subgrupo de G y $n \geq 0$. Consideremos las siguientes familias anidadas de G , $\mathcal{F}_n \cap \overline{H} \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}$, sea \sim la relación de equivalencia dada por la conmensurabilidad en $\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}$. Sea I un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación en $(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}} - \overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) / \sim$. Eliminamos arbitrarios $N_G[L]$ -CW-modelos para $E_{(\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) \cap N_G[L]} N_G[L]$ y $E_{(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}})[L]} N_G[L]$, y un G -CW-modelo arbitrario para $E_{\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}} G$. Consideremos el siguiente G -coproducto amalgamado*

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{[L] \in I} G \times_{N_G[L]} E_{(\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}) \cap N_G[L]} N_G[L] & \xrightarrow{i} & E_{\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}} G \\ \bigsqcup_{[L] \in I} id_G \times_{N_G[L]} f_{[L]} \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{[L] \in I} G \times_{N_G[L]} E_{(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}})[L]} N_G[L] & \longrightarrow & X \end{array}$$

tal que $f_{[L]}$ es una G -función celular para cada $[L] \in I$ y o bien (1) i es una inclusión de G -CW-complejos, o (2) tal que cada función $f_{[L]}$ es una inclusión de G -CW-complejos para cada $[L] \in I$ e i es una G -función celular. Entonces, X es un modelo para $E_{\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}}} G$.

Observación 1.4.8. *Las condiciones en Teorema 1.4.7 no son restrictivas. Por ejemplo, para satisfacer la condición (2), podemos usar el teorema de aproximación celular equivariante para asumir que las funciones i y $f_{[L]}$ sean funciones celulares para todo $[L] \in I$, y para hacer que la función $f_{[L]}$ sea una inclusión para cada $[L] \in I$, podemos reemplazar los espacios por los mapping cylinders. Ver [51, Remark 2.5].*

Siguiendo la notación de Teorema 1.4.7 tenemos

Corolario 1.4.9. $\text{gd}_{\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}}}(G) \leq \max\{\text{gd}_{\overline{\mathcal{F}_n \cap \overline{H}}}(G) + 1, \text{gd}_{(\overline{\mathcal{F}_{n+1} \cap \overline{H}})[L]}(N_G[L]) \mid L \in I\}$.

1.4.2. Sucesión de Mayer-Vietoris

Siguiendo la notación de Teorema 1.4.7, por [21, Proposition 7.1] [51] tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^n(X/G) \rightarrow \left(\prod_{L \in I} H^n(E_{(\mathcal{F}_{n+1} \cap H)[L]} N_G[L]/N_G[H]) \right) \oplus H^n(E_{\mathcal{F}_n \cap H} G/G) \rightarrow \\ \prod_{L \in I} H^n(E_{(\mathcal{F}_n \cap H) \cap N_G[L]} N_G[L]/N_G[L]) \rightarrow H^{n+1}(X/G) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

1.4.3. Espacio clasificante para la unión de dos familias

Proposición 1.4.10. [19, Lemma 4.4] Sean G un grupo y dos familias de subgrupos \mathcal{F} , \mathcal{G} de G . Elijamos arbitrarios G -CW-complejos modelos para $E_{\mathcal{F}}$, $E_{\mathcal{G}}$ y $E_{\mathcal{F} \cap \mathcal{G}}$. Entonces el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{F} \cap \mathcal{G}} G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}} G \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\mathcal{G}} G & \longrightarrow & X \end{array}$$

nos da un modelo X para $E_{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}} G$.

Con la notación de Proposición 1.4.10 tenemos

Corolario 1.4.11. $\text{gd}_{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}(G) \leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}}(G), \text{gd}_{\mathcal{G}}(G), \text{gd}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{G}}(G) + 1\}$.

1.4.4. Familias anidadas

Proposición 1.4.12. [51, Proposition 5.1 (i)] Sea G un grupo y sean \mathcal{F} y \mathcal{G} dos familias de subgrupos tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Supongamos que para todo $H \in \mathcal{G}$ tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F} \cap H}(H) \leq d$. Entonces, $\text{gd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{G}}(G) + d$.

Proposición 1.4.13. Sea G un grupo. Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} familias de subgrupos de G tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Si X es un modelo para $E_{\mathcal{G}} G$, entonces

$$\text{gd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F} \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma) \mid \sigma \text{ es una célula de } X\}.$$

Observación 1.4.14. Los resultados presentados en Corolario 1.4.9, Corolario 1.4.11, y Proposición 1.4.12 tienen contrapartes cohomológicas. Más precisamente, si reemplazamos $\text{gd}_{\mathcal{F}}$ por $\text{cd}_{\mathcal{F}}$, todos los resultados análogos son ciertos, ver por ejemplo [61, Observación 2.9].

1.4.5. Variantes de la construcción de Lück-Weiermann

Definición 1.4.15. Sea G un grupo finitamente generado, y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ un par de familias de subgrupos de G . Decimos que una colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subgrupos de G es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ si las siguientes condiciones se cumple:

- a) Para todo $A, B \in \mathcal{A}$, o bien $A = B$ o $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- b) \mathcal{A} es cerrado bajo conjugación;
- c) Cualquier $A \in \mathcal{A}$ es autonormalizado, es decir, $N_G(A) = A$;
- d) Para todo $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \leq B$.

Teorema 1.4.16. [42, P. 302] Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ familias de subgrupos de G . Asumimos que la colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Sea \mathcal{H} un conjunto completo de representantes de clases de conjugación en \mathcal{A} , y consideremos el G -coproducto amalgamado celular

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}} G \times_H E_{\mathcal{F}} H & \xrightarrow{g} & E_{\mathcal{F}} G \\
 \downarrow f & & \downarrow h \\
 \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}} G \times_H E_{\mathcal{F}'} H & \xrightarrow{\varphi} & X
 \end{array} \tag{1.3}$$

tal que o bien (1) f sea la unión disjunta de H -funciones celulares, y g sea una inclusión de G -CW-complejos, o (2) h sea la unión disjunta de inclusiones de H -CW-complejos, y g sea una G -función celular. Entonces X es un modelo para $E_{\mathcal{F}'} G$.

Lema 1.4.17. Sea G un grupo discreto finitamente generado, sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$ tres familias anidadas de subgrupos de G . Sea \mathcal{A} una colección adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$. Entonces \mathcal{A} es una familia adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ y $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$

Demostración. Primero mostremos que \mathcal{A} es una familia adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

- 1) Sean $A, B \in \mathcal{A}$, porque \mathcal{A} es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ tenemos que $A = B$ o $A \cap B \in \mathcal{F}$. Así la primera condición se cumple.
- 2) Porque \mathcal{A} es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ es cerrada bajo conjugación por definición, luego la segunda condición se cumple.
- 3) Por la misma razón la tercera condición se cumple.
- 4) Sea $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, notemos que $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'' \setminus \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$, entonces $A \in \mathcal{F}'' \setminus \mathcal{F}$. \mathcal{A} es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ por hipótesis luego la cuarta condición se cumple.

Por lo tanto \mathcal{A} es una familia adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Para el otro par procedemos de forma análoga. \square

Lema 1.4.18. *Sea $\varphi: G \rightarrow G_0$ un morfismo de grupos discretos sobreyectivo, sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ un par de familias de subgrupos de G_0 , y sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Entonces $\tilde{\mathcal{A}} = \{\varphi^{-1}(A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una colección adaptada al par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}')$ de familias de subgrupos de G .*

Demostración. Verifiquemos que $\tilde{\mathcal{A}}$ cumple con las condiciones 1.4.15

- 1) Sean $\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Por hipótesis \mathcal{A} es adaptada al par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, entonces por la propiedad 1) 1.4.15 $A = B$ o $A \cap B \in \mathcal{F}$, luego $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(B)$ o $\varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B) \in \tilde{\mathcal{F}}$ pues $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$;
- 2) Sean $H \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $g \in G$, supongamos que $H = \varphi^{-1}(A)$. \mathcal{A} es una colección adaptada, entonces $\varphi(g)A\varphi(g)^{-1} \in \mathcal{A}$, notemos que $\varphi^{-1}(\varphi(g)A\varphi(g)^{-1}) = g\varphi^{-1}(A)g^{-1} = gHg^{-1} \in \tilde{\mathcal{A}}$.
- 3) Sea $\varphi^{-1}(K) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Porque \mathcal{A} es una colección adaptada tenemos $N_{G_0}(K) = K$. Para mostrar que K es autonormalizado basta mostrar que $\varphi^{-1}(N_{G_0}(K)) = N_G(\varphi^{-1}(K))$ por la ecuación anterior.

$$G \in N_G(\varphi^{-1}(K)) \Leftrightarrow G\varphi^{-1}(K)G^{-1} = \varphi^{-1}(K) \Leftrightarrow \varphi(G)K\varphi(G)^{-1} = K \Leftrightarrow G \in \varphi^{-1}(N_{G_0}(K))$$

por lo tanto tenemos que $\varphi^{-1}(K)$ es autonormalizado.

- 4) Sea $\varphi^{-1}(A) \in \tilde{\mathcal{F}}' \setminus \tilde{\mathcal{F}}$. $A \in \mathcal{A}$ entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \leq B$, se sigue que $\varphi^{-1}(A) \leq \varphi^{-1}(B)$.

□

Teorema 1.4.19. [35, Theorem 4.5.] *Sea \mathcal{F} una familia de subgrupos de un grupo discreto finamente generado G . Sea $\varphi: G \rightarrow G_0$ un morfismo sobreyectivo. Sea $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}'_0$ un par de familias anidadas de subgrupos de G_0 satisfaciendo $\tilde{\mathcal{F}}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}'_0$, y sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección adaptada al par $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}'_0$. Sea \mathcal{H} un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación en $\tilde{\mathcal{A}} = \{\varphi^{-1}(A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, y considere el siguientes G -coproducto amalgamado celular*

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\tilde{H} \in \mathcal{H}} G \times_{\tilde{H}} E_{\mathcal{F}_0} H & \xrightarrow{g} & E_{\mathcal{F}_0} G_0 \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}} G \times_{\tilde{H}} E_{\mathcal{F}} \tilde{H} & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Entonces X es un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$. En el G -coproducto amalgamado anterior requerimos que obien (1) f sea la unión disjunta de H -funciones celulares, y g sea una inclusión de G -CW-complejos, o (2) h sea la unión disjunta de inclusiones de H -CW-complejos, y g sea una función G -función celular

Demostración. El morfismo φ hace que $E_{\mathcal{F}_0}G_0 = E_{\tilde{\mathcal{F}}_0}G$ y $E_{\mathcal{F}_0}H = E_{\tilde{\mathcal{F}}_0}\tilde{H}$ donde la acción esta dada por $gx = \varphi(g)x$ donde $g \in G$ y $x \in E_{\mathcal{F}_0}G_0$. De Lemma 1.4.17 y Lemma 1.4.5 tenemos que $\tilde{\mathcal{A}}$ es una colección adaptada a al para $(\tilde{\mathcal{F}}_0, \mathcal{F})$, entonces podemos aplicar el Teorema 1.4.16 para ver que el G -coproducto amalgamado anterior nos da un modelo para $E_{\mathcal{F}}G$. \square

Observación 1.4.20. *Las condiciones (1) y (2) que aparecen en Teorema 1.4.16 y Teorema 1.4.19, no son restricciones y se pueden satisfacer utilizando el construcción de mapping cylinder y el teorema de aproximación celular equivariante.*

Capítulo 2

\mathcal{F}_k -dimensión de grupos fundamentales de gráficas de grupos

El objetivo de este capítulo es aproximar la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos fundamentales de gráficas de grupos. Al final de este capítulo se demostrará el Teorema 2.4.3 que se utilizará en los capítulos 3 y 5.

Para demostrar el resultado principal utilizaremos la teoría de Bass-Serre, la cual se introduce en la siguiente sección.

2.1. Básicos de teoría de Bass-Serre

Un grupo libre se puede caracterizar como sigue: Un grupo es libre si y sólo si actúa en árbol libremente. Una pregunta natural es saber que sucede si relajamos la condición de actuar libremente ¿qué tipos de grupos pueden aparecer? Una respuesta a estas cuestiones es la teoría de Bass-Serre.

En esta sección vamos a definir la noción de una gráfica de grupos, posteriormente vamos a definir el grupo fundamental de una gráfica de grupos. Finalizaremos con un resultado fundamental de la teoría de Bass-Serre que nos dice que el grupo fundamental de una gráfica de grupos actúa en un árbol con cociente *igual* a la gráfica de grupos inicial.

Gráficas en el sentido de Serre y su realización geométrica

Definición 2.1.1 (Definición de gráfica en el sentido de Serre). *Una gráfica Y consiste de un conjunto de vértices $V(Y)$, un conjunto de aristas $E(Y)$ y dos funciones*

$$E(Y) \rightarrow V(Y) \times V(Y), y \mapsto (o(y), t(y))$$

y

$$E(Y) \rightarrow E(Y), y \mapsto \bar{y}$$

que satisface la siguiente condición: para cada $y \in Y$ tenemos $\bar{\bar{y}} = y$, $\bar{y} \neq y$, y $o(y) = t(\bar{y})$.

En la definición anterior $o(y)$ denota el punto inicial de y y $t(y)$ denota el vértice terminal de y . \bar{y} es la arista inversa de y .

Definición 2.1.2. Sean X, Y gráficas. Una función $\varphi: X \rightarrow Y$ es de gráficas si envía aristas en aristas y vértices en vértices.

Definición 2.1.3. Sea T un árbol. Un automorfismo de T es una función de gráficas $\varphi: T \rightarrow T$ tal que existe una función de gráficas $\psi: T \rightarrow T$ que cumple con $\varphi\psi = id$ y $\psi\varphi = id$. El conjunto de todos los automorfismos de T lo denotamos por $Aut(T)$, notemos que $Aut(T)$ es un grupo con la composición de funciones.

Definición 2.1.4 (Gráfica orientada). Sea Y una gráfica. Una orientación de la gráfica Y es un subconjunto X_+ de $E(Y)$ tal que $E(Y)$ es la unión disjunta de X_+ y \bar{X}_+ . Si elegimos una orientación de Y decimos que la gráfica esta orientada.

Definición 2.1.5 (Realización geométrica de una gráfica). Sea Y una gráfica, definimos la realización geométrica de Y como el siguiente espacio cociente: tomemos la unión disjunta $V(Y) \sqcup (E(Y) \times I)$ donde $V(Y)$ y $E(Y)$ tienen la topología discreta. Definimos la relación de equivalencia en $V(Y) \sqcup (E(Y) \times I)$ generada por: para cada $y \in E(Y)$ y $s \in I$, $(y, s) \sim (\bar{y}, 1 - s)$, $(y, 0) \sim o(y) = t(\bar{y})$ y $(y, 1) \sim t(y) = o(\bar{y})$.

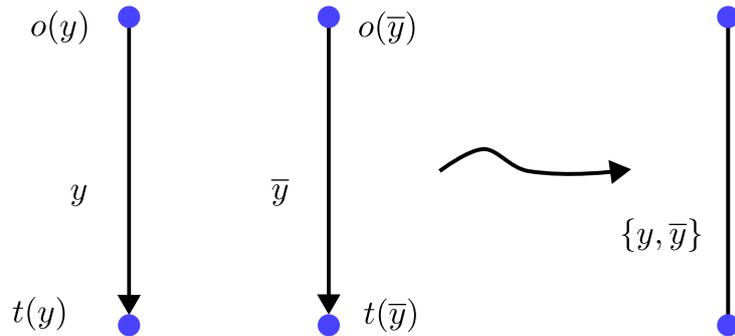


Figura 2.1:

Definición 2.1.6. Sea X la gráfica 2.2 con la orientación natural.



Figura 2.2:

Un camino de longitud n en una gráfica Y es un morfismo $\gamma: X \rightarrow Y$. Un lazo γ en Y es un camino tal que su punto inicial es igual a su punto final.

Definición 2.1.7 (Dominio fundamental). Sea G un grupo actuando en una gráfica X . Un dominio fundamental de X/G es una subgráfica Y de X tal que $Y \rightarrow X/G$ es un isomorfismo.

Observación 2.1.8. El dominio fundamental puede no existir, por ejemplo si consideramos a $X = \mathbb{R}$ con la estructura de gráfica canónica, y \mathbb{Z} actuando por traslaciones.

Gráficas de grupos y sus grupos fundamentales

Definición 2.1.9 (Gráfica de grupos). Una gráfica de grupos (\mathcal{G}, Y) consiste de los siguientes datos:

1. Una gráfica Y .
2. Una colección de grupos \mathcal{G} que consiste de
 - a) Para cada vértice v un grupo G_v .
 - b) Para cada arista y un grupo G_y con la propiedad que $G_y = G_{\bar{y}}$.
3. Para cada arista y un morfismo inyectivo $\varphi_y: G_y \rightarrow G_{t(y)}$, $a \mapsto a^y$.

Observación 2.1.10. Note que no pedimos que la gráfica de grupos este orientada.

Gráfica de espacios

Definición 2.1.11 (Gráfica de espacios). Una gráfica de espacios (\mathcal{X}, Y) consiste de los siguientes datos:

1. Una gráfica Y .
2. Una colección de espacios \mathcal{X} que consiste de
 - a) Para cada vértice v un espacio X_v .
 - b) Para cada arista y un espacio X_y con la propiedad que $X_y = X_{\bar{y}}$.
3. Para cada arista y un morfismo inyectivo $\varphi_y: X_y \rightarrow X_{t(y)}$.

De forma análoga a Definición 2.1.5 podemos definir la realización geométrica de una gráfica de espacios (\mathcal{X}, Y) : tomamos la unión disjunta $\{X_v\}_{v \in V(Y)} \sqcup \{X_y \times I\}_{y \in E(Y)}$. Definimos la relación de equivalencia en $\{X_v\}_{v \in V(Y)} \sqcup \{X_y \times I\}_{y \in E(Y)}$ generada por: para cada $y \in E(Y)$ y $s \in I$, $(x, s) \in (X_y, s) \sim (x, 1-s) \in (X_{\bar{y}}, 1-s)$, $(x, 0) \in (X_y, 0) \sim \varphi_{\bar{y}}(x) \in X_{t(\bar{y})=o(y)}$ y $(x, 1) \in (X_y, 1) \sim \varphi_y(x) \in X_{t(y)=o(\bar{y})}$.

Definición 2.1.12 (Grupo fundamental de una gráfica de grupos). Dado una gráfica de grupos (\mathcal{G}, Y) podemos asociarle la siguiente gráfica de espacios: La gráfica subyacente es Y , para cada $s \in V(Y) \cup E(Y)$ tomamos un modelo X_s para BG_s , notemos que los monomorfismos $\varphi_y: G_y \rightarrow G_{t(y)}$ inducen monomorfismos $\varphi_y: X_y \rightarrow X_{t(y)}$. Definimos el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ de la gráfica de grupos (\mathcal{G}, Y) como el grupo fundamental de la realización geométrica de la gráfica de espacios asociado.

Ejemplos 2.1.13. Calculando el grupo fundamental de una gráfica de grupos

1. Si la gráfica de grupos es la que se muestra en la Figura 2.3, entonces usando el teorema de Seifert–Van Kampen el grupo fundamental es $\pi_1(Y) = \pi_1(X, x_0) = G_{v_1} *_{G_e} G_{v_2}$.

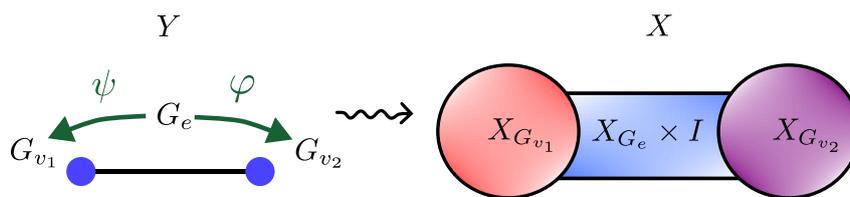


Figura 2.3:

2. En general si tenemos un árbol de grupos (\mathcal{G}, T) entonces el grupo fundamental es

$$\varinjlim(G_v) = \langle \bigsqcup_{v \in V(T)} S_v \mid \bigsqcup_{v \in V(T)} R_v \bigsqcup_{y \in A(T)} R_y \rangle$$

donde $G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle$ y $R_y = \{a^y = a^{\bar{y}} \mid a \in G_y\}$. Note que si T no es un árbol esto no es cierto en general.

El árbol de Bass-Serre

Definición 2.1.14. Sea G un grupo actuando en una gráfica Y . Una inversión consiste de un elemento g en G y una arista y de Y tal que $gy = \bar{y}$.

Teorema 2.1.15 (El árbol de Bass-Serre). Sea (\mathcal{G}, Y) una gráfica conexa de grupos. Entonces existe un árbol $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathcal{G}, Y)$ en el que $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y)$ actúa sin inversiones, un morfismo $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ que induce un isomorfismo $\tilde{X}/G \cong Y$. Además existen secciones $V(Y) \rightarrow V(\tilde{X})$ $P \mapsto \tilde{P}$ y $A(Y) \rightarrow A(\tilde{X})$ $y \mapsto \tilde{y}$. El árbol $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathcal{G}, Y)$ se le llama el árbol de Bass-Serre de Y .

Teorema 2.1.16. [66, Corollary 3, p.65] Sea G un grupo finitamente generado. Si cada uno de sus elementos tiene un punto fijo, entonces G tiene un punto fijo.

2.2. Grupos actuando en árboles

Árboles como espacios métricos

Definición 2.2.1. Sea T un árbol. Una geodésica entre dos puntos x_1 y x_2 de T es un camino de longitud mínima que une x_1 y x_2 .

Proposición 2.2.2. [66, p.18, Proposition 8] Sean P y Q dos vértices en un árbol T . Existe exactamente un geodésica entre P y Q , y es un camino inyectivo.

Lema 2.2.3. Sean T un árbol y s un automorfismo de T . Si α es una geodésica, entonces $s\alpha$ es una geodésica.

Demostración. Notemos que basta mostrar que la afirmación es cierta para geodésicas de longitud finita, porque una línea geodésica se puede ver como un límite directo de caminos de longitud finita. Sea entonces γ un camino de longitud n , denotemos este camino por $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n) = (\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(n))$. Sea β la geodésica entre $s(v_0)$ y $s(v_n)$,

denotemos β como $(s(v_0), y_1, \dots, s(v_n))$. Vamos a mostrar que $s\gamma = (s(v_0), \dots, s(v_n)) = (s(v_0), y_1, \dots, s(v_n)) = \beta$ por inducción sobre i . Si $i = 0$, se sigue de la definición de $s\gamma$ que coinciden en el punto inicial de β . Vamos a mostrar $s(v_k) = y_k$. Supongamos que $s(v_i) = y_i$ para todo $i < k$. Supongamos que $s(v_k) \neq y_k$. Notemos que $s\gamma$ se restringe a un camino entre y_{k-1} y $s(v_n)$. Podemos usar el hecho de que T no tiene lazos, para concluir que $s\gamma$ no es un camino inyectivo, es decir, existen i, j tal que $s(v_i) = s(v_j)$. Pero esto último no puede pasar porque s es inyectivo. Luego $s(v_k) = y_k$. Concluimos que $s\gamma = \beta$. \square

Proposición 2.2.4. [66, Proposition 24] Sea T un árbol. Supongamos que el automorfismo s de T no tiene puntos fijos. Definimos $l(s) = \inf_{p \in V(T)} d(p, sp)$ y $K = \{p \in V(T) \mid d(p, sp) = l(s)\}$

1. K es el conjunto de vértices de una línea geodésica.
2. s induce una traslación de K de longitud $l(s)$.
3. Si un vértice p de T esta a distancia n de K , entonces $d(p, sp) = l(s) + 2n$.

Definición 2.2.5. Sea X un espacio topológico y G un grupo actuando en X . Decimos que la acción es cocompacta si el espacio de orbitas X/G es compacto.

Proposición 2.2.6. [66, Proposition 25] Sea s un automorfismo de un árbol T . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) s no tiene puntos fijos.
- b) s actúa co-compactamente en una geodésica.

Definición 2.2.7. Sea s un automorfismo de T . Decimos que s es elíptico si tiene un punto fijo, si s actúa en una línea geodésica de manera cocompacta decimos que es hiperbólico.

Grupos actuando en árboles

Lema 2.2.8. Sea T un árbol y G un grupo actuando en T sin inversiones. Sea H un subgrupo de G tal que el conjunto de puntos fijos $T^H = \{x \in T \mid hx = x \ \forall h \in H\}$ es no vacío, entonces T^H es un subárbol de T .

Demostración. Veamos que T^H es arco-conexo. Sean $x_1, x_2 \in T^H$, entonces existe una única geodésica $\alpha \subset T$ que une x_1 y x_2 . Sea $g \in H$, por el Lema 2.2.3 $g\alpha$ es una geodésica que une x_1 y x_2 , por la unicidad de la geodésica obtenemos que $g\alpha = \alpha$, entonces $\alpha \subset T^H$, así T^H es arco-conexo. Concluimos que T^H es un subgráfica conexa de T , luego T^H es un subárbol de T . \square

Teorema 2.2.9. Sea T un árbol y G un grupo actuando en T sin inversiones. Entonces el árbol T es un modelo para $E_{\text{Iso}_G(T)}G$, donde $\text{Iso}_G(T)$ es la familia $\{H \leq G \mid H \leq G_x \text{ para algún } x \in T\}$.

Demostración. a) El árbol T es un G -CW-complejo. El árbol T tiene una estructura CW-complejo natural: las 0-células son los vértices de T y las aristas de T son las 1-células. Ahora veamos que T es un G -CW-complejo. La acción de G en T es celular porque la acción es por automorfismos de T . Si $g \in G$ fija una célula entonces la fija puntualmente. En efecto, esta afirmación se cumple trivialmente para las 0-células. Sea e^1 una 1-célula tal que $ge^1 = e^1$ para algún $g \in G$, entonces los vértices de e^1 quedan fijos porque G actúa en T sin inversiones, luego g fija puntualmente a e^1 .

b) Si $H \in \text{Iso}_G(T)$ entonces T^H es no vacío y contráctil, y si $K \notin \text{Iso}_G(T)$ entonces T^H es vacío. En efecto, dado que $H \in \text{Iso}_G(T)$ entonces $H \subset G_x$ para algún $x \in T$. Se sigue que T^H es no vacío porque al menos contiene a x . Por el Lema 2.2.8 T^H es un árbol y, por lo tanto contráctil. Por último si $H \notin \text{Iso}_G(T)$, entonces T^H tiene que ser vacío de lo contrario existiría un $x \in T$ tal que $G_x = H$ y como consecuencia $H \in \text{Iso}_G(T)$ lo cual sería una contradicción.

□

2.3. Grupos virtualmente abelianos actuado en árboles

Lema 2.3.1. [24, Lemma 1.1] [27, Lemma 1.4] Sea H un grupo virtualmente \mathbb{Z}^n actuando en un árbol T . Entonces pasa exactamente uno de los siguientes:

- a) H fija un vértice de T .
- b) H actúa co-compactamente en una única línea geodésica γ de T .

La siguiente definición de acilíndricidad aparece en [22], el cual fue una generalización de [65].

Definición 2.3.2. Sea G un grupo actuando en un árbol T . Decimos que la acción es acilíndrica si existe un entero k tal que, para cualquier camino γ de longitud k en el árbol de Bass-Serre T de Y , el estabilizador de γ es finito.

Definición 2.3.3. Definimos el grupo diedral infinito D_∞ como el producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Teorema 2.3.4 (Teorema de clasificación de grupos virtualmente cíclicos). [64, Theorem 5.12.] Sea G un grupo virtualmente cíclico, entonces o G es finito, o G se suprayecta a D_∞ con kernel finito o G se suprayecta a \mathbb{Z} con kernel finito.

Lema 2.3.5. Sea γ una línea geodésica en un árbol T . Entonces el grupo de automorfismos $\text{Aut}(\gamma)$ es isomorfo a D_∞ .

Demostración. La línea geodésica γ es isomorfo como gráfica a la línea real \mathbb{R} con su estructura de gráficas canónica. Luego basta mostrar que el subgrupo discreto H de $\text{Iso}(\mathbb{R})$ que preserva la estructura de gráficas anterior es isomorfo a D_∞ . Recordemos que cualquier

elemento de $\text{Iso}(\mathbb{R})$ es de la forma $\pm x + b$ donde $b \in \mathbb{R}$. Entonces todo elemento de H es de la forma $\pm x + n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Notemos ahora que H esta generado por $r(x) = -x$ y $t(x) = x + 1$. Podemos dar un morfismo $\varphi: H \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ definido en generadores por $r \rightarrow (1, 0)$, $s \rightarrow (0, 1)$. Se puede verificar que φ es un isomorfismo. \square

Lema 2.3.6. *Los subgrupos de D_∞ son o bien finitos, o isomorfos a \mathbb{Z} o a D_∞ .*

Demostración. El grupo $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ induce la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1.$$

Sea L un subgrupo de D_∞ , a partir de la sucesión anterior tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \cap L \rightarrow L \rightarrow \psi(L) \rightarrow 1.$$

Ahora bien, $\psi(L)$ es el grupo trivial o \mathbb{Z}_2 . Se sigue de la sucesión exacta corta anterior que L es finito o isomorfo a \mathbb{Z} o a D_∞ . \square

Lema 2.3.7. *Sea Y una gráfica de grupos con grupo fundamental G , y árbol de Bass-Serre T . Supongamos que la acción de G en T es acilíndrica, entonces el estabilizador de cualquier línea geodésica en T es virtualmente cíclico.*

Demostración. Sea G una línea geodésica de T . Denotemos por $\text{Fix}_G(\gamma)$ el conjunto de todos los elementos de G que fijan puntualmente a γ , y $\text{Stab}_G(\gamma)$ el conjunto de todos los elementos de G que fijan a γ como conjunto. De Lema 2.3.5 y Lema 2.3.6 se sigue que tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Fix}_G(\gamma) \rightarrow \text{Stab}_G(\gamma) \rightarrow D \rightarrow 1$$

donde D o bien es finito, isomorfo a \mathbb{Z} o a D_∞ . Por hipótesis Y es acilíndrica, luego $\text{Fix}_G(\gamma)$ es finito porque γ contiene caminos de longitud arbitraria. Se sigue de la sucesión exacta anterior y de Teorema 2.3.4 que $\text{Stab}_G(\gamma)$ es virtualmente cíclico. \square

Lema 2.3.8. *Sea Y una gráfica de grupos con grupo fundamental G , y árbol de Bass-Serre T . Supongamos que la acción de G en T es acilíndrica, entonces todo subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^n de G con $n \geq 2$ fija un vértice de T .*

Demostración. Sea H un subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^n de G con $n \geq 2$, entonces por el Lema 2.3.1 pasa exactamente uno de los siguientes: o bien H fija un vértice de T o actúa co-compactamente en una única geodésica γ de T . Supongamos que H actúa co-compactamente en una única geodésica γ de T .

Sea L un subgrupo de H isomorfo a \mathbb{Z}^n con $n \geq 2$ y de índice finito, este grupo existe porque H es virtualmente \mathbb{Z}^n . Notemos que L actúa por restricción en γ , es decir, tenemos un morfismo $L \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(\gamma)$ cuya imagen contiene un subgrupo de traslaciones por el Lema 2.3.5. Por el Lema 2.3.6 la imagen $\varphi(L)$ o bien es isomorfo al grupo cíclico

\mathbb{Z} o al grupo dihédrico infinito D_∞ . Pero $\varphi(L)$ no puede isomorfo a D_∞ , de lo contrario $(L/\ker(\varphi)) \cong D_\infty$ no sería nilpotente, porque D_∞ no es nilpotente. El morfismo $L \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(\gamma)$ induce la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow L \rightarrow \varphi(L) \rightarrow 1$$

Sea $\text{Fix}(\gamma)$ el subgrupo de H que fija puntualmente a γ . Notemos que $\text{Fix}(\gamma)$ contiene a $\ker(\varphi)$. Como $\varphi(L)$ es isomorfo a \mathbb{Z} , la sucesión anterior lo podemos escribir como:

$$1 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Usando que la sucesión exacta corta anterior se escinde y que L es isomorfo a \mathbb{Z}^n con $n \geq 2$, obtenemos que $\ker(\varphi)$ es un subgrupo infinito de L , esto tiene como consecuencia que $\text{Fix}(\gamma) \supset \ker(\varphi)$ sea un subgrupo infinito y por ende cualquier subcamino de γ de longitud arbitraria tiene estabilizador infinito, lo cual contradice que Y sea acilíndrica. Por lo tanto, H fija un vértice de T . \square

2.4. La \mathcal{F}_k -dimensión de grupos fundamentales de gráfica de grupos

Definición 2.4.1. Sea Y una gráfica de grupos con grupo fundamental G y árbol de Bass-Serre T . Decimos que un elemento $g \in G$ es hiperbólico (resp. elíptico) si su acción en T es hiperbólico (resp. elíptico).

Teorema 2.4.2. [44, Theorem 6.3] Sea Y una gráfica de grupos con grupo fundamental G y árbol de Bass-Serre T . Consideremos la colección \mathcal{A} de todas las geodésicas de T tal que admiten una acción co-compacta de un subgrupo virtualmente \mathbb{Z} de G . Entonces el siguiente coproducto amalgamado homotópico

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \gamma & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \{*\} & \longrightarrow & \tilde{T} \end{array} \tag{2.1}$$

da un modelo \tilde{T} para $E_{\text{Iso}_G(\tilde{T})}G$ donde $\text{Iso}_G(\tilde{T})$ es la familia $\{H \leq G \mid H \leq G_x \text{ para algún } x \in \tilde{T}\}$, es decir, conecando las geodésicas de \mathcal{A} en T obtenemos un modelo para $E_{\text{Iso}_G(\tilde{T})}G$. Además, si suponemos que la acción $G = \pi_1(Y)$ en T es acilíndrica, entonces la familia $\text{Iso}_G(\tilde{T})$ contiene la familia \mathcal{F}_n de G con $n \geq 0$.

Demostración. a) El espacio \tilde{T} es un G -CW-complejo. El espacio \tilde{T} tiene una estructura de complejo simplicial natural: El árbol T tiene una estructura simplicial donde los

0-simplejos son los vértices de T y los 1-simplejos son las aristas de T . Al conear una geodésica $\gamma \in \mathcal{A}$ agregamos un único 0-simplejo $*_\gamma$ que corresponde al vértice del cono, un 1-simplejo $[*_\gamma, v]$ por cada vértice v de γ , y un 2-simplejo $[*_\gamma, v, w]$ por cada arista $[v, w]$ de γ . De esta manera obtenemos una estructura simplicial de \tilde{T} que en particular es una estructura de CW-complejo de \tilde{T} .

Definimos una acción de G en \tilde{T} como sigue: Como G actúa celularmente en T , vamos a extender esta acción a todo \tilde{T} . Sea $x \in \tilde{T} \setminus T$ entonces x pertenece al cono de una geodésica $\alpha \in \mathcal{A}$, luego x pertenece a un 2-simplejo que corresponde a una arista $[v, w]$ de α . Si x es el vértice del cono, definimos gx como el vértice del cono de la geodésica $g\alpha$, si no es así, entonces x pertenece al segmento que une el punto cónico con un punto $s \in [v, w]$, definimos gx como el único punto que le corresponde en el segmento que une el punto cónico $*_{g\alpha}$ con $gs \in [gv, gw] \subset g\alpha$.

- b) Veamos que si $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$ entonces \tilde{T}^H es no vacío y contráctil, y si $H \notin \text{Iso}_G(\tilde{T})$ entonces \tilde{T}^H es vacío. En efecto, sea $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$, entonces $H \leq G_x$ para algún $x \in \tilde{T}$, se sigue que \tilde{T}^H es no vacío porque al menos contiene a x . Ahora mostremos que \tilde{T}^H es contráctil. Tenemos dos casos $x \in T$ o $x \in \tilde{T} \setminus T$. En el primer caso tenemos por el Lema 2.2.8 que T^H es un sub-árbol de T . Luego \tilde{T}^H se obtiene de T^H conear unas geodésicas, entonces el espacio \tilde{T}^H tiene como retracto por deformación a T^H , pero T^H es contráctil por ser un árbol, se sigue que \tilde{T}^H es contráctil. En el segundo caso tenemos que $x \in \tilde{T} \setminus T$ pertenece al cono de una geodésica digamos γ , así $x = *_\gamma$ o $x \neq *_\gamma$. Si x no es el vértice del cono, entonces $G_x = G_s$ con $s \in \gamma$, porque $G_x = G_s \cap G_{*_\gamma}$ y $G_s \subset G_{*_\gamma}$, se sigue que \tilde{T}^H es contraíble por lo discutido en el caso que $x \in T$. Si $x = *_\gamma$, entonces el subgrupo H de G_{*_γ} tiene un elemento hiperbólico o no. Si H tiene un elemento hiperbólico, entonces $\tilde{T}^H = *_\gamma$, esto es así porque s actúa en una única geodésica. Si H no tiene elementos hiperbólicos, entonces H tiene un punto fijo $x \in T$, por consiguiente $K \leq G_x$ con $x \in T$, luego por lo discutido anteriormente \tilde{T}^K es no vacío y contráctil.

Si $H \notin \text{Iso}_G(\tilde{T})$ entonces \tilde{T}^H es vacío de lo contrario existiría un $y \in \tilde{T}$ tal que $H \leq G_y$, así $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$ lo cual sería una contradicción.

- c) La familia \mathcal{F}_n de G está contenida en $\text{Iso}_G(\tilde{T})$. En efecto, sea $H \in \mathcal{F}_n$ entonces podemos tener tres casos: H es finito, H es virtualmente \mathbb{Z} o H es virtualmente \mathbb{Z}^k con $k \geq 2$. Si H es finito, entonces tiene un punto fijo $t \in T$ porque un grupo finito siempre tiene un punto fijo en un árbol, luego $H \leq G_t$ y así $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$. Si T es virtualmente \mathbb{Z} entonces por el Lema 2.3.1 H fija un vértice de T o actúa co-compactamente en una única geodésica γ_H . En el caso que H fije un vértice de T , se sigue que $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$ por el mismo argumento que el caso finito, en el otro caso, tenemos por construcción de \tilde{T} que el grupo de isotropía del punto cónico de γ_H contiene a H , se sigue que $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$. Por último si H es virtualmente \mathbb{Z}^k con $k \geq 2$ tenemos por el Lema 2.3.8 que H tiene un punto fijo $s \in T$, luego $H \leq G_s$, así $H \in \text{Iso}_G(\tilde{T})$.

□

Teorema 2.4.3. *Sea Y una gráfica de grupos con grupo fundamental G finitamente generado y árbol de Bass-Serre T . Supongamos que la acción de G en T es acilíndrica. Entonces, para todo $k \geq 1$ tenemos:*

$$\text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{máx}\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\}$$

Demostración. Para cada $s \in V(Y) \cup E(Y)$ tenemos que G_s es un subgrupo de G , por lo tanto la primera desigualdad se cumple. Ahora demostremos la segunda desigualdad. La acción de G en T es acilíndrica, entonces podemos usar Teorema 2.4.2 para obtener un espacio bidimensional \tilde{T} que se obtiene de T al 'conear' algunas geodésicas a T , ver Figura 2.4, el espacio \tilde{T} es un modelo para $E_{\text{Iso}_G(\tilde{T})}G$ y $\mathcal{F}_k \subseteq \text{Iso}_G(\tilde{T})$. Por Proposición 1.4.13

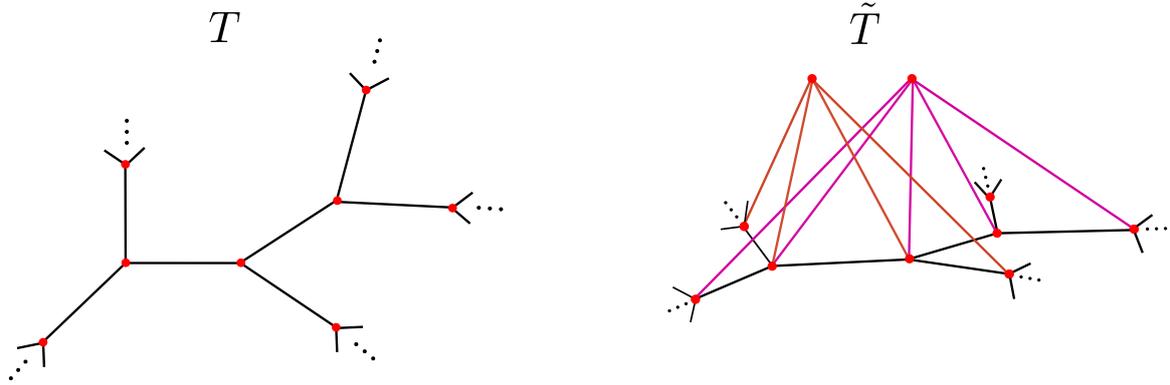


Figura 2.4: Promoviendo T a \tilde{T} .

tenemos

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma) \mid \sigma \text{ es una celda de } \tilde{T}\}.$$

Sea σ una celda de \tilde{T} , calculamos $\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma)$.

- Si σ es una 0-célula, tenemos dos casos: $\sigma \in T$ o $\sigma \in \tilde{T} - T$. En el primer caso tenemos $G_\sigma = G_v$ para algún $v \in V(Y)$, en el segundo caso tenemos que G_σ es virtualmente cíclico, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma) = \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v)$ o 0.
- Si σ es una 1-célula, tenemos dos casos: $\sigma \in T$ o σ tiene un vértice en $\tilde{T} - T$. En el primer caso tenemos $G_\sigma = G_e$ para algún $e \in E(Y)$, en el otro caso tenemos que G_σ es virtualmente cíclico, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma) = \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1$ o 1.
- Si σ es una 2-célula, entonces σ tiene un vértice en $\tilde{T} - T$, por lo que G_σ es virtualmente cíclico. Entonces, $\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_\sigma}(G_\sigma) + \dim(\sigma) = 2$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{máx}\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\}$, lo cual completa la demostración del teorema. \square

Capítulo 3

\mathcal{F}_k -dimensión geométrica de RAAGs, grupos de trenzas y gráficas de grupos abelianos

Corob Cook, Moreno, Nucinkis y Pasini en [17] demuestran que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\mathbb{Z}^n) \leq n + k$ para todo $0 \leq k < n$, ellos preguntan si esta cota superior es óptima en [17, Question 2.7]

Pregunta 3.0.1. [17, Question 2.7] ¿Para $0 \leq k < n$, es $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\mathbb{Z}^n) = n + k$?

En [43] respondí de forma afirmativa esta pregunta. Para $k = 1$, esto fue demostrado en [51, Teorema 5.13] y para $k = 2$ en [46, Proposición A.]. Como una aplicación, proporcionamos cotas inferiores para la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos virtualmente abelianos, grupos de trenzas y grupos de Artin de ángulo recto (RAAGs). Lo anterior es gracia a que se conoce en la literatura que todos estos grupos tienen un subgrupo isomorfo a un grupo abeliano libre de rango la vcd del grupo correspondiente. Combinando estas cotas inferiores con resultados previamente conocidos en la literatura, demostraremos que son óptimos. En el caso de los RAAGs se tuvo que mejorar la cota superior para calcular explícitamente la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica. También demostraremos que la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica es igual a la \mathcal{F}_k -dimensión cohomológica en todos estos casos.

En lo que sigue se enuncian los resultados que se demostrarán en este capítulo.

La \mathcal{F}_k -dimensión de grupos virtualmente abelianos.

Teorema 3.0.2. *Sea $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n$. Sea G un grupo virtualmente \mathbb{Z}^n . Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = n + k$.*

Para $k = 1$, el Teorema 3.0.2 fue demostrado en [51, Theorem 5.13]. Para $k = 2$, un caso particular fue demostrado en [46, Proposition A.], específicamente $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\mathbb{Z}^k) = k + 2$ para todo $k \geq 3$. Como un corolario de Teorema 3.0.2 tenemos

Corolario 3.0.3. *Sea $n \geq 1$ y sea G un grupo que tiene un subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^n . Entonces para todo $0 \leq k < n$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq n + k$ y $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq n + k$.*

La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos de trenzas.

Existen varias formas de definir el grupo de trenzas (completo) B_n en n hebras. Para nuestros propósitos, la siguiente definición es conveniente. Sea D_n el disco cerrado con n punturas. Definimos el *grupo de trenzas B_n en n hebras* como las clases de isotopía de difeomorfismos que preservan la orientación de D_n y que se restringen a la identidad en la frontera ∂D_n . En la literatura, este grupo es conocido como el mapping class group de D_n . Definimos el *grupo de trenzas puro*, P_n , como el subgrupo de índice finito de B_n que consiste de todos los elementos que fijan puntualmente las punturas.

Es bien conocido que $\text{gd}_{\mathcal{F}_0}(B_n) = n - 1$, ver por ejemplo [28]. En [34, Teorema 1.4], se demostró que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(B_n) \leq n + k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizando Corolario 3.0.3 y [25, Proposición 3.7], se demuestra que esta cota superior es óptima.

Teorema 3.0.4. *Sea $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n - 1$ y G o bien el grupo de trenzas completo B_n o el grupo de trenzas puro P_n . Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{vcd}(G) + k = n + k - 1$.*

La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de los grupos de Artin de ángulo recto.

Sea Γ una gráfica simple finita, es decir, una gráfica finita sin lazos ni múltiples aristas entre vértices. Definimos el *grupo de Artin de ángulo recto* (RAAG) A_Γ como el grupo generado por los vértices de Γ con todas las relaciones de la forma $vw = wv$ siempre que v y w estén unidos por una arista.

Sea A_Γ un RAAG. Es bien sabido que A_Γ es un grupo CAT(0), de hecho, A_Γ actúa en el cubriente universal \tilde{S}_Γ de su CW-complejo de Salvetti S_Γ , ver Sección 4.2. En [61] se demostró que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) \leq \dim(S_\Gamma) + k + 1$. Siguiendo la demostración de [61, Demostración del Teorema 3.1] y usando [30, Proposición 7.3], podemos mostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) \leq \dim(S_\Gamma) + k$ en Teorema 3.3.5. Además, utilizando Corolario 3.0.3 y Observación 3.3.1, podemos demostrar que esta cota superior es óptima.

Teorema 3.0.5. *Sea A_Γ un grupo de Artin de ángulo recto. Entonces para $0 \leq k < \text{cd}(A_\Gamma)$ se cumple $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(A_\Gamma) = \dim(S_\Gamma) + k = \text{cd}(A_\Gamma) + k$.*

Este cálculo de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de un RAAG A_Γ es explícito porque la dimensión del CW-complejo de Salvetti S_Γ es el máximo de los naturales n tales que hay una subgráfica completa Γ' de Γ con $|V(\Gamma')| = n$ (ver Lema 3.3.4).

Usando Corolario 3.0.3 podemos dar una cota inferior para la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica del grupo de automorfismos externos $\text{Out}(A_\Gamma)$ de algunos RAAGs A_Γ .

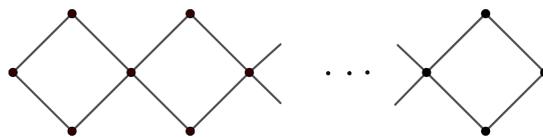
Proposición 3.0.6. *Sea $n \geq 2$. Sea F_n el grupo libre en n generadores. Entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\text{Out}(F_n)) \geq 2n + k - 3$$

para todo $0 \leq k < 2n - 3$.

Proposición 3.0.7. *Sea A_d el grupo de Artin de ángulo recto dado por una cadena de d diamantes (ver Figura 3.1). Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\text{Out}(A_d)) \geq 4d + k - 1$ para todo $0 \leq k < 4d - 1$.*

La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de gráficas de grupos abelianos finitamente generados.

Figura 3.1: Cadena de d diamantes

Proposición 3.0.8. *Sea Y una gráfica finita de grupos tal que para cada $v \in V(Y)$ el grupo G_v es virtualmente abeliano infinito finitamente generado, con $\text{Rango}(G_e) < \text{Rango}(G_v)$. Supongamos que la descomposición de $G = \pi_1(Y)$ es acilíndrica. Sea $m = \max\{\text{Rango}(G_v) \mid v \in V(Y)\}$. Entonces para $1 \leq k < m$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = m + k$.*

Corolario 3.0.9. *Sea Y una gráfica finita de grupos tal que para cada $v \in V(Y)$ el grupo G_v es virtualmente abeliano infinito finitamente generado, y para cada $e \in E(Y)$ el grupo G_e es finito. Sea $m = \max\{\text{Rango}(G_v) \mid v \in V(Y)\}$. Entonces para $1 \leq k < m$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = m + k$.*

La distribución de este capítulo es como sigue: en la sección 3.1 se calcula la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos virtualmente abelianos. Posteriormente se presenta algunas aplicaciones de Teorema 3.0.2 por ejemplo en la sección 3.2 se calcula la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos de trenzas, en la sección 3.3 se calcula la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos de Artin de ángulo recto, en la sección 3.4 se calcula la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de gráfica de grupos con grupos vértices virtualmente abelianos.

3.1. \mathcal{F}_k -dimensión de grupos virtualmente abelianos

El objetivo de esta sección es demostrar Teorema 3.0.2. Sea G un grupo virtualmente \mathbb{Z}^n . Por [61, Proposición 1.3], Teorema 1.3.1 y dado que la dimensión cohomológica \mathcal{F} es monótona, tenemos para todo $0 \leq k < n$ las siguientes desigualdades

$$n + k \geq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq \text{cd}_{\mathcal{F}_k \cap \mathbb{Z}^n}(\mathbb{Z}^n).$$

Por lo tanto, para demostrar Teorema 3.0.2, es suficiente mostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k \cap \mathbb{Z}^n}(\mathbb{Z}^n) \geq n + k$ para $0 \leq k < n$. En Teorema 3.1.6, demostramos esta desigualdad. Para demostrar Teorema 3.1.6 necesitamos Lema 3.1.1, la sucesión de Mayer-Vietoris, Lema 3.1.5, y Corolario 3.1.3.

Lema 3.1.1. *Sean $k, t, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < t \leq n$. Sea H un subgrupo de \mathbb{Z}^n de Rango t , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap H}(\mathbb{Z}^n) \leq n + k$.*

Demostración. La demostración es por inducción en k . Sea $G = \mathbb{Z}^n$. Para $k = 0$ tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F}_0 \cap H}(G) = \text{gd}(G) = n$. Supongamos que la desigualdad es cierta para todo $k < m$. Demostraremos que la desigualdad es cierta para $k = m$. Sea \sim la relación de equivalencia

en $\mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H$ definida por conmensurabilidad, y sea I un conjunto completo de representantes de las clases en $(\mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H) / \sim$. Por Corolario 1.4.9 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{gd}_{\mathcal{F}_m \cap H}(G) &\leq \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G) + 1, \text{gd}_{(\mathcal{F}_m \cap H)[L]}(G) \mid L \in I\} \\ &\leq \text{máx}\{n + m, \text{gd}_{(\mathcal{F}_m \cap H)[L]}(G) \mid L \in I\} \end{aligned}$$

entonces demostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_m \cap H}(G) \leq n + m$ es suficiente mostrar que $\text{gd}_{(\mathcal{F}_m \cap H)[L]}(G) \leq n + m$ para todo $L \in I$. Sea $L \in I$. Podemos escribir la familia

$$(\mathcal{F}_m \cap H)[L] = \{K \leq G \mid K \in \mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H, K \sim L\} \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)$$

como la unión de dos familias $(\mathcal{F}_m \cap H)[L] = \mathcal{G} \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)$ donde \mathcal{G} es la familia generada por $\{K \leq G \mid K \in \mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H, [K] = [L]\}$. Por Corolario 1.4.11 tenemos

$$\begin{aligned} \text{gd}_{(\mathcal{F}_m \cap H)[L]}(G) &\leq \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G), \text{gd}_{\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) + 1, \text{gd}_{\mathcal{G}}(G)\} \\ &\leq \text{máx}\{n + m - 1, \text{gd}_{\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) + 1, \text{gd}_{\mathcal{G}}(G)\}, \text{ por hipótesis de inducción.} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar las siguientes desigualdades

- a) $\text{gd}_{\mathcal{G}}(G) \leq n - m$,
- b) $\text{gd}_{\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) \leq n + m - 1$

y como consecuencia tendríamos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_m \cap H}[L](G) \leq n + m$. Primero demostraremos el inciso a). Notemos que un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}(G/L)$ es un modelo para $E_{\mathcal{G}}G$ vía la acción dada por la proyección $G \rightarrow G/L$. Dado que G/L es virtualmente \mathbb{Z}^{n-m} por [61, Proposition 1.3], tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F}_0}(G/L) \leq n - m$.

Ahora demostraremos el inciso b). Aplicando Proposición 1.4.12 a la inclusión de las familias $\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H) \subset \mathcal{G}$ obtenemos

$$\text{gd}_{\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{G}}(G) + d$$

para algún d tal que para cualquier $K \in \mathcal{G}$ se cumpla que $\text{gd}_{\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H) \cap K}(K) \leq d$. Dado que ya mostramos que $\text{gd}_{\mathcal{G}}(G) \leq n - m$, nuestra siguiente tarea es mostrar que d puede elegirse igual a $2m - 1$.

Recordemos que cualquier $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^t para algún $0 \leq t \leq m$. Dividamos nuestra demostración en dos casos. Primero supongamos que $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^t para algún $0 \leq t \leq m - 1$. Por lo tanto, K pertenece a $\mathcal{F}_{m-1} \cap H$, se sigue que K pertenece a $\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)$ y concluimos que $\text{gd}_{(\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)) \cap K}(K) = 0$. Ahora supongamos $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^m . Afirmamos que $(\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)) \cap K = \mathcal{F}_{m-1} \cap K$. La inclusión $(\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)) \cap K \subset \mathcal{F}_{m-1} \cap K$ es clara ya que $\mathcal{F}_{m-1} \cap H \subset \mathcal{F}_{m-1}$. Para la otra inclusión, sea $M \in \mathcal{F}_{m-1} \cap K$. Dado que $K \leq H$ obtenemos que $\mathcal{F}_{m-1} \cap K \subseteq \mathcal{F}_{m-1} \cap H$ y como consecuencia $M \in \mathcal{F}_{m-1} \cap H$. Por otro lado, $M \leq K \in \mathcal{G}$, por lo tanto $M \in (\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)) \cap K$. Esto demuestra la afirmación. Concluimos que

$$\text{gd}_{(\mathcal{G} \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)) \cap K}(K) = \text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap K}(K) \leq m + m - 1 = 2m - 1$$

donde la desigualdad se sigue de [61, Proposition 1.3].

□

La siguiente proposición es una pequeña generalización de [17, Lemma 2.3].

Proposición 3.1.2. *Sea H un subgrupo de \mathbb{Z}^n que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$. Entonces, para todo $0 \leq k \leq t$ se cumplen que todo elemento $L \in (\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H)$ esta contenido en único elemento maximal $M \in (\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1})$ y $M \leq H$.*

Demostración. Tenemos dos casos $\text{Rango}(H) = n$ o $\text{Rango}(H) < n$. En el primer caso tenemos por la maximalidad de H que $H = \mathbb{Z}^n$, y $\mathcal{F}_k \cap H = \mathcal{F}_k$. Sea $L \in (\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1})$, consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^n / L \rightarrow 1$$

puesto que $\text{Rango}(\mathbb{Z}^n) = \text{Rango}(L) + \text{Rango}(\mathbb{Z}^n / L)$ y por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados tenemos que \mathbb{Z}^n / L es isomorfo a $\mathbb{Z}^{n-k} \oplus F$ donde F es la parte de torsión. Entonces es claro que $p^{-1}(F)$ es el único subgrupo maximal de \mathbb{Z}^n de rango k que contiene a L .

Supongamos que $\text{Rango}(H) = t < n$. Sea $L \in \mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$, en particular $L \in \mathcal{F}_k$ entonces L está contenido en un único maximal $M \in \mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}$. Afirmamos que $M \leq H$. Notemos que MH es virtualmente \mathbb{Z}^t

$$[HM : H] = [M : M \cap H] \leq [M : L] < \infty,$$

la maximalidad de H implica que $H = MH$. Esto finaliza la demostración de la afirmación. Ahora es fácil ver que $M \in \mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$ es el único maximal en $\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$ que contiene L . De hecho, supongamos que hay otro $N \in \mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$ que es maximal y contiene L . Entonces tenemos

$$[NM : N] = [M : M \cap N] \leq [M : L] < \infty$$

lo cual implica que $NM \in H \cap \mathcal{F}_k$. Esto contradice la maximalidad de N . \square

Corolario 3.1.3. *Sea H un subgrupo de \mathbb{Z}^n que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$. Entonces, para todo $0 \leq k \leq t$ se cumplen las siguientes afirmaciones*

- a) *Cada $L \in (\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H)$ está contenido en un único elemento maximal $M \in (\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H)$.*
- b) *Sea $S \in (\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H)$ un elemento maximal, entonces S es maximal en $\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}$.*

Lema 3.1.4. *Sean $n, t \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq t < n$. Sea L un subgrupo de \mathbb{Z}^n que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$. Sea $SUB(L)$ la familia de todos los subgrupos de L . Entonces, $\text{gd}_{SUB(L)}(\mathbb{Z}^n) \leq n - t$.*

Demostración. Un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}(\mathbb{Z}^n / L)$ es un modelo para $E_{SUB(L)}\mathbb{Z}^n$ vía la acción dada por la proyección $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n / L$. Dado que $\mathbb{Z}^n / L = \mathbb{Z}^{n-t}$, un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}(\mathbb{Z}^n / L)$ es \mathbb{R}^{n-t} con la acción dada por traslación. \square

Lema 3.1.5. *Sean $p, t, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq p < t \leq n$. Sea H un subgrupo de \mathbb{Z}^n que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$, y sea S maximal en $\mathcal{F}_p \cap H - \mathcal{F}_{p-1} \cap H$ (nótese que S es un subgrupo de H). Entonces, podemos escoger un modelo X de $E_{\mathcal{F}_k \cap S} \mathbb{Z}^n$ con $\dim(X) \leq n + k$, y un modelo Y de $E_{\mathcal{F}_k \cap H} \mathbb{Z}^n$ con $\dim(Y) \leq n + k$ tal que tenemos una inclusión $X \hookrightarrow Y$.*

Demostración. La demostración es por inducción en k . Sea $G = \mathbb{Z}^n$. Para $k = 0$ tenemos $E_{\mathcal{F}_0 \cap S} G = EG$ y $E_{\mathcal{F}_0 \cap H} G = EG$. Un modelo para EG es \mathbb{R}^n , por lo que la afirmación se sigue. Suponiendo que la afirmación es válida para todo $k < m$, vamos a demostrar que también es cierta para $k = m$, es decir, mostraremos que existe un modelo X de $E_{\mathcal{F}_m \cap S} \mathbb{Z}^n$ con $\dim(X) \leq n + m$, y un modelo Y de $E_{\mathcal{F}_m \cap H} \mathbb{Z}^n$ con $\dim(Y) \leq n + m$ tal que tenemos una inclusión $X \hookrightarrow Y$. Sea \sim la relación de equivalencia en $\mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H$ definida por conmensurabilidad. Sea I_1 un conjunto completo de representantes de clases de subgrupos en $(\mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H) / \sim$. Por Corolario 3.1.3, estos representantes pueden ser elegidos maximales dentro de sus clases de conmensuración. Aplicando Teorema 1.4.7 y Observación 1.4.5, el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico nos da un modelo X_1 para $E_{\mathcal{F}_m \cap H} G$

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{L \in I_1} E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{L \in I_1} E_{(\mathcal{F}_m \cap H)[L]} G & \longrightarrow & X_1
 \end{array} \tag{3.1}$$

Para $L \in I_1$, por la maximalidad de L en su clase de conmensuración podemos escribir la familia

$$(\mathcal{F}_m \cap H)[L] = \{K \leq G \mid K \in \mathcal{F}_m \cap H - \mathcal{F}_{m-1} \cap H, K \sim L\} \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)$$

como la unión de dos familias

$$(\mathcal{F}_m \cap H)[L] = SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H),$$

donde $SUB(L)$ es la familia generada por todos los subgrupos de L .

Por otro lado, sea \sim la relación de equivalencia en $\mathcal{F}_m \cap S - \mathcal{F}_{m-1} \cap S$ definida por la conmensuración. Sea I_2 un conjunto completo de representantes de las clases de subgrupos en $(\mathcal{F}_m \cap S - \mathcal{F}_{m-1} \cap S) / \sim$. Por la Corolario 3.1.3, estos representantes pueden elegirse maximales dentro de sus clases de conmensuración. Por Teorema 1.4.7 el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico nos da un modelo X_2 para $E_{\mathcal{F}_m \cap S} G$.

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{L \in I_2} E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S} G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S} G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{L \in I_2} E_{SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)} G & \longrightarrow & X_2
 \end{array} \tag{3.2}$$

Sea $T \in I_2$. Afirmamos que un modelo para $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G$ es también un modelo para $E_{SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G$ para todo $L \in I_1$. Sea $L \in I_1$. Notemos que T y L son subgrupos maximales de H , entonces $H = L \oplus N_1$ y $H = T \oplus N_2$. Podemos construir un automorfismo de H , $\sigma: L \oplus N_1 \rightarrow T \oplus N_2$, que envía L a T de manera isomorfa. Puesto que H es maximal en G podemos descomponer G como $G = H \oplus R$. Por lo tanto podemos extender el automorfismo σ a un automorfismo de G , $\hat{\sigma}: L \oplus N_1 \oplus R \rightarrow T \oplus N_2 \oplus R$, que envía L a T de manera isomorfa y preserva el subgrupo H . Se sigue que $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G$ es un modelo para $E_{SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G$ vía la acción dada por el automorfismo $\hat{\sigma}$.

De Corolario 3.1.3 se deduce que $I_1 = I_2 \sqcup (I_1 - I_2)$. Por lo tanto, podemos reemplazar los G -coproductos amalgamados homotópicos en Ecuación (3.1) y Ecuación (3.2) con las siguientes G -coproductos amalgamados homotópicos.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\bigsqcup_{L \in I_2} E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{L \in I_1 - I_2} E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G \right) & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \left(\bigsqcup_{L \in I_2} E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{L \in I_1 - I_2} E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)} G \right) & \longrightarrow & X_1
 \end{array} \tag{3.3}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{L \in I_2} E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S} G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S} G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{L \in I_2} E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)} G & \longrightarrow & X_2
 \end{array} \tag{3.4}$$

Por hipótesis de inducción existe un modelo X de $E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S} G$ con $\dim(X) \leq n + m - 1$, y un modelo Y de $E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H} G$ con $\dim(Y) \leq n + m - 1$, tal que tenemos una inclusión $X \hookrightarrow Y$. Por los G -coproductos amalgamados en Ecuación (3.3) y Ecuación (3.4), para demostrar que existe una inclusión $E_{\mathcal{F}_m \cap S} \hookrightarrow E_{\mathcal{F}_m \cap H}$ es suficiente demostrar que

hay una inclusión $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)}G \hookrightarrow E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}G$. Por Proposición 1.4.10 los siguientes G -coproductos amalgamados nos dan un modelo para $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)}G$ y $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}G$ respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} E_{SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)}G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap S}G & E_{SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}G & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}G & (3.5) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ E_{SUB(T)}G & \longrightarrow & Y_2 & E_{SUB(T)}G & \longrightarrow & Y_1 & \end{array}$$

Notemos que $SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap S) = \mathcal{F}_{m-1} \cap T = SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)$. Se sigue de estos G -coproductos amalgamados que tenemos una inclusión $E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap S)}G \hookrightarrow E_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}G$.

Finalmente mostraremos que $\dim(X_1) \leq n + m$ y $\dim(X_2) \leq n + m$. De Ecuación (3.3) se sigue

$$\begin{aligned} \dim(X_1) &\leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G), \text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G) + 1, \text{gd}_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G)\} \\ &\leq \max\{n + m, \text{gd}_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G)\}, \text{ por hipótesis de inducción} \end{aligned}$$

Entonces demostrar que $\dim(X_1) \leq n + m$ es suficiente mostrar que $\text{gd}_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) \leq n + m$. Por Ecuación (3.5) y dado que $SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H) = \mathcal{F}_{m-1} \cap T$ tenemos que

$$\begin{aligned} \text{gd}_{SUB(T) \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) &\leq \dim(Y_1) \\ &\leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G), \text{gd}_{SUB(T) \cap (\mathcal{F}_{m-1} \cap H)}(G) + 1, \text{gd}_{SUB(T)}(G)\} \\ &= \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap H}(G), \text{gd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap T}(G) + 1, \text{gd}_{SUB(T)}(G)\} \\ &\leq \max\{n + m - 1, n + m, n - m\}, \text{ By Lema 3.1.1 and Lema 3.1.4} \\ &= n + m. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.6 (La cota inferior). *Sea $k, t, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < t \leq n$. Sea H un subgrupo de \mathbb{Z}^n que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$, entonces $H_{\mathcal{F}_k \cap H}^{n+k}(\mathbb{Z}^n; \mathbb{Z}) \neq 0$.*

Demostración. Sea $G = \mathbb{Z}^n$. La demostración es por doble inducción sobre (t, k) . La afirmación es cierta para todo $(t, 0) \in \mathbb{N} \times \{0\}$. Sea H un subgrupo de G que es maximal en $\mathcal{F}_t - \mathcal{F}_{t-1}$, entonces

$$H_{\mathcal{F}_0 \cap H}^{n+0}(G; \mathbb{Z}) = H_{\mathcal{F}_0}^n(G; \mathbb{Z}) = H^n(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Supongamos que la afirmación es verdadera para todo $(t, s) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \dots, k-1\}$, demostraremos que la afirmación es verdadera para (t, k) , es decir, $H_{\mathcal{F}_k \cap H}^{n+k}(G; \mathbb{Z}) \neq 0$. Sea \sim la relación de equivalencia en $\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$ definida por conmensuración. Sea I un conjunto completo de representantes de clases de subgrupos en $(\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H) / \sim$. Por Corolario 3.1.3 estos representantes pueden ser elegidos maximales dentro de sus clases de conmensuración. Por Teorema 1.4.7 y Observación 1.4.5 el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico nos da un modelo X para $E_{\mathcal{F}_k \cap H}G$.

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{L \in I} E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G & \xrightarrow{\bigsqcup_{L \in I} id} & E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G \\
 \bigsqcup_{L \in I} f_L \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{L \in I} E_{(\mathcal{F}_k \cap H)[L]} G & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \tag{3.6}$$

Para $L \in I$, por la maximalidad de L en su clase de conmensuración podemos escribir la familia

$$(\mathcal{F}_k \cap H)[L] = \{K \leq G \mid K \in \mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H, K \sim L\} \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)$$

como la unión de dos familias

$$(\mathcal{F}_k \cap H)[L] = SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H),$$

donde $SUB(L)$ es la familia generada por todos los subgrupos de L .

Sea $S \in I$. Afirmamos que un modelo para $E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$ es también un modelo para $E_{SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$ para todo $L \in I$. Sea $L \in I$. Puesto que S y L son maximales en H tenemos que $H = S \oplus N_1$ y $H = L \oplus N_2$ luego podemos construir un automorfismo $\sigma: L \oplus N_2 \rightarrow S \oplus N_1$ que envía L a S de manera isomorfa. Puesto que H es maximal en G , podemos descomponer a G como una suma directa $G = H \oplus R$. Ahora podemos extender σ a un automorfismo de G , $\hat{\sigma}: L \oplus N_1 \oplus R \rightarrow S \oplus N_2 \oplus H \oplus R$, que envía L a S de manera isomorfa y preserva H por construcción.

Se sigue que $E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$ es un modelo para $E_{SUB(L) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$ vía la acción dada por el automorfismo $\hat{\sigma}$. Por lo tanto, podemos reemplazar el G -coproducto amalgamado homotópico en Ecuación (3.6) por el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico.

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{L \in I} E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G & \xrightarrow{\bigsqcup_{L \in I} id} & E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G \\
 \bigsqcup_{L \in I} f_S \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{L \in I} E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \tag{3.7}$$

Por Proposición 1.4.10 el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico nos da un modelo Y para $E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$.

$$\begin{array}{ccc}
 E_{SUB(S) \cap (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G & \xrightarrow{g} & E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G \\
 \downarrow & & \downarrow \psi \\
 E_{SUB(S)} G & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array} \tag{3.8}$$

Notemos que $SUB(S) \cap (\mathcal{F}_{k-1} \cap H) = \mathcal{F}_{k-1} \cap S$. Por Lema 3.1.5, la función g puede ser tomado como una inclusión, entonces por [71, Theorem 1.1] el G -coproducto amalgamado homotópico puede ser tomado como un G -coproducto amalgamado. Se sigue que

$$\begin{aligned}
 \text{gd}_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)}(G) &\leq \dim(Y) \\
 &= \text{máx}\{\text{gd}_{SUB(S)}(G), \text{gd}_{\mathcal{F}_{k-1} \cap S}(G), \text{gd}_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H}(G)\} \\
 &= \text{máx}\{n-k, n+k-1, n+k-1\}, \text{ by Lema 3.1.1 and Lema 3.1.4} \\
 &= n+k-1
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Aplicando Mayer-Vietoris al G -coproducto amalgamado en Ecuación (3.7), usando Ecuación (3.9) y Lema 3.1.1, tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{aligned}
 \dots \rightarrow \left(\prod_{L \in I} H^{n+k-1}(E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G/G) \right) \oplus H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G/G) \xrightarrow{\varphi} \\
 \prod_{L \in I} H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G/G) \rightarrow H^{n+k}(X/G) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Entonces demostrar que $H_{\mathcal{F}_k \cap H}^{n+k}(G; \mathbb{Z}) = H^{n+k}(X/G) \neq 0$ es suficiente mostrar que φ es no sobreyectiva. Por Ecuación (3.7) tenemos $\varphi = (\prod_{L \in I_1} f_S^*) - \Delta$, donde Δ es el encaje diagonal. Primero, demostraremos que f_S^* es no sobreyectiva.

Aplicando Mayer-Vietoris al G -coproducto amalgamado en Ecuación (3.8) tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^{n+k-1}(E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G/G) \xrightarrow{h^* \oplus \psi^*} H^{n+k-1}(E_{SUB(S)} G/G) \oplus H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G/G) \rightarrow H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap S} G/G) \rightarrow 0$$

Puesto que $\text{gd}_{SUB(S)}(G) \leq n-k$ y dado que existe precisamente una G -función $E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G \rightarrow E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G$ hasta G -homotopía podemos reducir la sucesión a

$$\dots \rightarrow H^{n+k-1}(E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G/G) \xrightarrow{f_S^*} H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G/G) \rightarrow H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap S} G/G) \rightarrow 0$$

Por hipótesis S es maximal en $\mathcal{F}_k \cap H - \mathcal{F}_{k-1} \cap H$, entonces por Corolario 3.1.3 a) tenemos que S es maximal en $\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}$, por hipótesis de inducción tenemos que $H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap S} G/G) \neq 0$, por lo tanto f_S^* es no sobreyectiva.

Finalmente veremos que φ es no sobreyectiva. De hecho, sea $b_K \notin \text{Im}(f_S^*)$, para algún $K \in I$, entonces $(0, 0, \dots, b_K, \dots, 0) \notin \text{Im}(\varphi)$. Supongamos que no es el caso, i.e. existe

$$\left(\prod_{L \in I} a_L, c \right) \in \left(\prod_{L \in I} H^{n+k-1}(E_{SUB(S) \cup (\mathcal{F}_{k-1} \cap H)} G/G) \right) \oplus H^{n+k-1}(E_{\mathcal{F}_{k-1} \cap H} G/G)$$

tal que $(0, 0, \dots, b_K, \dots, 0) = \varphi\left(\prod_{L \in I} a_L, c\right) = \prod_{L \in I} f_S^*(a_L) - \Delta(c) = (f_S^*(a_L) - c)_{L \in I}$. Entonces $f_S^*(a_L) = c$ para $L \neq K$ y $f_S^*(a_K) - c = b_K$, se sigue que

$$b_K = f_S^*(a_K) - f_S^*(a_L) = f_S^*(a_K - a_L),$$

entonces $b_K \in \text{Im}(f_S^*)$ y esto es una contradicción. \square

3.2. La \mathcal{F}_k -dimensión de grupos de trenzas

Como una primera aplicación del Teorema 3.0.2, calculamos la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupo del grupo de trenzas completo B_n y el grupo de trenzas puro P_n .

Teorema 3.2.1. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k < n - 1$ y G o bien el grupo de trenzas completo B_n o el grupo de trenzas puro P_n . Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{vcd}(G) + k = n + k - 1$.*

Demostración. Es suficiente demostrar las siguientes desigualdades

$$n + k - 1 \geq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq n + k - 1.$$

En [34, Teorema 1.4] se demostró que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(B_n) \leq \text{vcd}(B_n) + k$ para todo $0 \leq k < n - 1$. Dado que P_n tiene índice finito en B_n , también tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(P_n) \leq \text{vcd}(P_n) + k$ para todos $0 \leq k < n - 1$. Por otro lado, es bien conocido que $\text{gd}_{\mathcal{F}_0}(B_n) = n - 1$, ver por ejemplo [28]. Esto demuestra la primera desigualdad. La segunda desigualdad se sigue por Teorema 1.3.1.

En [25, Proposición 3.7], se muestra que P_n tiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^{n-1} . Por lo tanto, por la monotonía de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica y Corolario 3.0.3, tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(B_n) \geq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(P_n) \geq n + k - 1$ para todos $0 \leq k < n - 1$. Esto demuestra la última desigualdad. \square

Para $k = 1$ este teorema fue demostrado en [25].

3.3. La \mathcal{F}_k -dimensión de RAAGs y sus grupos de automorfismos exteriores

En esta subsección, calcularemos la \mathcal{F}_n -dimensión geométrica de grupos de Artin de ángulo recto (RAAG) y daremos una cota inferior para la \mathcal{F}_n -dimensión geométrica del grupo de automorfismos exteriores de algunos RAAGs.

Recordemos algunas nociones básicas sobre RAAGs, para más detalles ver por ejemplo [15]. Sea Γ una gráfica simple finita, es decir, una gráfica finita sin lazos ni múltiples aristas entre vértices. Definimos el *grupo de Artin de ángulo recto* (RAAG) A_Γ como el grupo generado por los vértices de Γ con todas las relaciones de la forma $vw = wv$ siempre que v y w estén unidos por una arista.

El complejo Salvetti

Para la construcción del complejo Salvetti seguiremos [15, Subsección 3.6]. Sea A_Γ un RAAG, su *complejo Salvetti* S_Γ es un complejo CW que se puede construir de la siguiente manera:

- El $S_\Gamma^{(1)}$ esqueleto se construye de la siguiente manera: tomamos un punto x_0 , y para cada $v \in V(\Gamma)$, añadimos una 1-célula $I = [0, 1]$ identificando los extremos de I a x_0 . Entonces, el $S_\Gamma^{(1)}$ esqueleto es una cuña de círculos.
- El $S_\Gamma^{(2)}$ esqueleto se construye de la siguiente manera. Para cada arista de Γ añadimos una 2-célula $I \times I$ a $S_\Gamma^{(1)}$ por la frontera $\partial(I \times I)$ como $s_v s_w s_v^{-1} s_w^{-1}$.
- En general, el $S_\Gamma^{(n)}$ esqueleto se construye de la siguiente manera. Para cada subgráfica completa Γ' de Γ con $|V(\Gamma')| = n$ añadimos una n -célula I^n al esqueleto $S_\Gamma^{(n-1)}$ utilizando los generadores $V(\Gamma')$.

Observación 3.3.1. *Notemos que por la construcción del complejo Salvetti S_Γ , su grupo fundamental es A_Γ . Además, S_Γ tiene encajado un toro de dimensión $\dim(S_\Gamma)$, lo cual se deduce de su construcción. Por lo tanto, el grupo fundamental $\pi_1(S_\Gamma, x_0) = A_\Gamma$ tiene un subgrupo que es isomorfo a $\mathbb{Z}^{\dim(S_\Gamma)}$.*

Teorema 3.3.2. [15, Theorem 3.6] *El cubriente universal del complejo de Salvetti, \tilde{S}_Γ , es un complejo cubular CAT(0). En particular, S_Γ es un espacio $K(A_\Gamma, 1)$.*

Corolario 3.3.3. *Sea G un RAAG. Entonces G es libre de torsión.*

Lema 3.3.4. *Sea A_Γ un RAAG entonces $\text{gd}(A_\Gamma) = \text{cd}(A_\Gamma) = \dim(S_\Gamma)$. Además*

$$\text{cd}(A_\Gamma) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una subgráfica completa } \Gamma' \text{ de } \Gamma \text{ con } |V(\Gamma')| = n\}.$$

Demostración. Es suficiente demostrar las siguientes desigualdades

$$\dim(S_\Gamma) \geq \text{gd}(A_\Gamma) \geq \text{cd}(A_\Gamma) \geq \dim(S_\Gamma).$$

La primera desigualdad se deduce de Teorema 3.3.2. La segunda desigualdad se deduce de Teorema 1.3.1. Por [15, Subsección 3.7], $H^{\dim(S_\Gamma)}(S_\Gamma) = H^{\dim(S_\Gamma)}(A_\Gamma)$ es un grupo abeliano libre generado por cada $\dim(S_\Gamma)$ -célula. De aquí se sigue la tercera desigualdad.

Por la construcción del complejo Salvetti S_Γ , tenemos que

$$\dim(S_\Gamma) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una subgráfica completa } \Gamma' \text{ de } \Gamma \text{ con } |V(\Gamma')| = n\}.$$

Dado que $\text{cd}(A_\Gamma) = \dim(S_\Gamma)$, la afirmación se sigue. □

Sea G un grupo de Artin de ángulo recto. En [61, Corolario 1.2], se demostró que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{cd}(G) + k + 1$ para todo $0 \leq k < \text{cd}(G)$. Sin embargo, siguiendo su demostración en [61, Prueba del Teorema 3.1] y utilizando [30, Proposición 7.3], podemos demostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{cd}(G) + k$ para todo $0 \leq k < \text{cd}(G)$. En [61] y [30, Proposición 7.3], trabajan con la \mathcal{F}_k -dimensión cohomológica en lugar de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica, esa es la razón por la que el siguiente Teorema 3.3.5 se enuncia en términos de la dimensión cohomológica \mathcal{F}_k .

Teorema 3.3.5. *Sea G un RAAG. Entonces $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{cd}(G) + k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre k . Para $k = 0$ se sigue de Lema 3.3.4. Supongamos que la desigualdad es verdadera para todo $k < m$. Demostraremos la desigualdad para $k = m$. Sea \sim la relación de equivalencia en $\mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1}$ definida por conmensuración, y sea I un conjunto completo de representantes de clases de conjugación en $(\mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1})/\sim$. Entonces, por la versión cohomológica de Corolario 1.4.9 (ver Observación 1.4.14) tenemos

$$\begin{aligned} \text{cd}_{\mathcal{F}_m}(G) &\leq \text{máx}\{\text{cd}_{\mathcal{F}_{m-1}}(G) + 1, \text{cd}_{\mathcal{F}_m[L]}(N_G[L]) \mid L \in I\} \\ &\leq \{\text{cd}(G) + m, \text{cd}_{\mathcal{F}_m[L]}(N_G[L]) \mid L \in I\} \end{aligned}$$

Entonces demostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_m}(G) \leq \text{cd}(G) + m$ es suficiente demostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_m[L]}(N_G[L]) \leq \text{cd}(G) + m$ para todo $L \in I$. Sea $L \in I$, podemos escribir la familia

$$\mathcal{F}_m[L] = \{K \leq N_G[L] \mid K \in \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1}, K \sim L\} \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap N_G[L])$$

como la unión de dos familias $\mathcal{F}_m[L] = \mathcal{G} \cup (\mathcal{F}_{m-1} \cap N_G[L])$ donde \mathcal{G} es la familia generada por $\{K \leq N_G[L] \mid K \in \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1}, K \sim L\}$. Por la versión cohomológica de Corolario 1.4.11 (ver Observación 1.4.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{cd}_{\mathcal{F}_m[L]}(N_G[L]) &\leq \text{máx}\{\text{cd}_{\mathcal{G}}(N_G[L]), \text{cd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap N_G[L]}(N_G[L]), \text{cd}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}}(N_G[L]) + 1\} \\ &\leq \text{máx}\{\text{cd}_{\mathcal{G}}(N_G[L]), \text{cd}(G) + m - 1, \text{cd}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}}(N_G[L]) + 1\} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar las siguientes desigualdades

1. $\text{cd}_{\mathcal{G}}(N_G[L]) \leq \text{cd}(G) - m$
2. $\text{cd}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}}(N_G[L]) \leq \text{cd}(G) + m - 1$

Como una consecuencia tendríamos $\text{cd}_{\mathcal{F}_m[L]}(N_G[L]) \leq \text{cd}(G) + m$. Procedemos a demostrar el inciso (1). Definimos la familia $\mathcal{F} = \{K \leq N_G[L] \mid [K : K \cap L] < \infty\}$. Afirmamos que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Para mostrar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ notemos que

$$\{K \leq N_G[L] \mid K \in \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1}, K \sim L\} \subseteq \{K \leq N_G[L] \mid [K : K \cap L] < \infty\} = \mathcal{F}$$

como por definición \mathcal{G} es la familia mas pequeña que contiene $\{K \leq N_G[L] \mid K \in \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_{m-1}, K \sim L\}$ se sigue que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Ahora demostremos la otra inclusión $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Sea $S \in \mathcal{F}$, entonces $[S : S \cap L] < \infty$, notemos que $[LS : L] = [S : S \cap L] < \infty$ se sigue que

LS es comensurable con L , y como una consecuencia $S \leq LS \in \mathcal{G}$, en particular se sigue que $S \in \mathcal{G}$. Esto demuestra la afirmación.

Puesto que demostramos que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ se sigue de [30, Proposition 7.3] $\text{cd}_{\mathcal{G}}(N_G[L]) \leq \text{cd}(G) - m$. Aplicando la versión cohomológica de Proposición 1.4.12 (ver Observación 1.4.14) a la inclusión de familias $(\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_m - 1) \subset \mathcal{G}$ obtenemos

$$\text{cd}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}}(G) \leq \text{cd}_{\mathcal{G}}(G) + d$$

para algún d tal que para cualquier $K \in \mathcal{G}$ se tiene $\text{cd}_{\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1} \cap K}(K) \leq d$. Puesto que ya demostramos $\text{gd}_{\mathcal{G}}(N_G(L)) \leq \text{cd}(G) - m$, nuestra siguiente tarea es mostrar que d puede ser elegido igual a $2m - 1$.

Recordemos que cualquier $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^t para algún $0 \leq t \leq m$. Vamos a dividir la demostración en dos casos. Primero asumamos $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^t para algún $0 \leq t \leq m - 1$. entonces K es elemento de \mathcal{F}_{m-1} , se sigue que K es un elemento de $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}$ y concluimos que $\text{cd}_{(\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}) \cap K}(K) = 0$. Ahora asumamos que $K \in \mathcal{G}$ es virtualmente \mathbb{Z}^m . Afirmamos que $(\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}) \cap K = \mathcal{F}_{m-1} \cap K$. La inclusión $(\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}) \cap K \subset \mathcal{F}_{m-1} \cap K$ es evidente. Para la otra inclusión, sea $M \in \mathcal{F}_{m-1} \cap K$. Puesto que $M \leq K \in \mathcal{G}$, por lo tanto $M \in (\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}) \cap K$. Esto termina la demostración de la afirmación.

Concluimos que

$$\text{cd}_{(\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{m-1}) \cap K}(K) = \text{cd}_{\mathcal{F}_{m-1} \cap K}(K) \leq m + m - 1 = 2m - 1$$

donde la desigualdad se sigue de [61, Proposition 1.3].

□

Teorema 3.3.6. *Sea G un RAAG. Entonces para $0 \leq k < \text{cd}(G)$ tenemos $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}(G) + k$.*

Demostración. Por Teorema 3.3.5 tenemos que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{cd}(G) + k$. Por otro lado, por Lema 3.3.4 G tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^{\text{cd}(G)}$, la afirmación se sigue de Corolario 3.0.3.

□

Teorema 3.3.7. *Sea G un RAAG. Entonces para $0 \leq k < \text{cd}(G)$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G)$.*

Demostración. Si $k = 0$ la afirmación se sigue de Lema 3.3.4. Supongamos que $k \geq 1$, por hipótesis $\text{cd}(G) \geq 2$. Por Teorema 3.3.6 tenemos que $\text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G) \geq 3$, entonces por Teorema 1.3.1, $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \text{cd}_{\mathcal{F}_k}(G)$.

□

Fijemos un grupo de Artin de ángulo recto A_{Γ} , denotamos por $\text{Aut}(A_{\Gamma})$ al grupo de automorfismos de A_{Γ} y por $\text{Inn}(A_{\Gamma})$ al subgrupo que consiste de los automorfismos internos. El grupo de automorfismos externos de A_{Γ} se define como el cociente $\text{Out}(A_{\Gamma}) = \text{Aut}(A_{\Gamma}) / \text{Inn}(A_{\Gamma})$. Si $S \subseteq V(\Gamma)$, entonces el subgrupo H generado por S se llama subgrupo especial de A_{Γ} . Se puede demostrar que, de hecho, H es el grupo de Artin de ángulo recto A_S asociado al subgráfica completa inducido por S en Γ .

Sea F_n el grupo libre en n generadores. El grupo F_n puede ser visto como el RAAG asociado a la gráfica que tiene n vértices y no tiene aristas. En [18] se demostró que $\text{vcd}(\text{Out}(F_n)) = 2n - 3$ para $n \geq 2$ y que $\text{Out}(F_n)$ tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^{\text{vcd}(\text{Out}(F_n))}$. Por Corolario 3.0.3 obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.3.8. *Sea $n \geq 2$. Sea F_n el grupo libre en n generadores. Entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\text{Out}(F_n)) \geq 2n + k - 3$$

para todo $0 \leq k < 2n - 3$.

Sea A_d el grupo de Artin de ángulo recto dado por una cadena de d diamantes. En [20, Proposition 6.5] se demostró que $\text{vcd}(\text{Out}(A_d)) = 4d - 1$ y que $\text{Out}(A_d)$ tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^{\text{vcd}(\text{Out}(A_d))}$. Como consecuencia de Corolario 3.0.3, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.3.9. *Sea A_d el grupo de Artin de ángulo recto dado por una cadena de d diamantes. Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\text{Out}(A_d)) \geq 4d + k - 1$ para todo $0 \leq k < 4d - 1$.*

3.4. La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de gráficas de grupos abelianos finitamente generados.

Proposición 3.4.1. *Sea Y una gráfica finita de grupos tal que para cada $v \in V(Y)$ el grupo G_v es virtualmente abeliano infinito finitamente generado, con $\text{Rango}(G_e) < \text{Rango}(G_v)$. Supongamos que la descomposición de $G = \pi_1(Y)$ es acilíndrica. Sea $m = \max\{\text{Rango}(G_v) \mid v \in V(Y)\}$. Entonces para $1 \leq k < m$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = m + k$.*

Demostración. La descomposición de G es acilíndrica, entonces por Teorema 2.4.3 tenemos

$$\begin{aligned} \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) &\geq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \\ &\geq \max\{\text{Rango}(G_v) + k, \text{Rango}(G_e) + k \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\}, \text{Corolario 3.0.3} \\ &= \max\{\text{Rango}(G_v) + k \mid v \in V(Y)\}, \text{Rango}(G_e) \leq \text{Rango}(G_v) \\ &= m + k. \end{aligned}$$

También por Teorema 2.4.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) &\leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \\ &= \max\{2, \text{Rango}(G_v) + k, \text{Rango}(G_e) + k + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \\ &= \max\{\text{Rango}(G_v) + k \mid v \in V(Y)\}, \text{Rango}(G_e) < \text{Rango}(G_v) \text{ y } k \geq 1 \\ &= m + k, \end{aligned}$$

la primera igualdad es por Teorema 3.0.2. □

Corolario 3.4.2. *Sea Y una gráfica finita de grupos tal que para cada $v \in V(Y)$ el grupo G_v es virtualmente abeliano infinito finitamente generado, y para cada $e \in E(Y)$ el grupo G_e es finito. Sea $m = \max\{\text{Rango}(G_v) \mid v \in V(Y)\}$. Entonces para $1 \leq k < m$ tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = m + k$.*

Capítulo 4

Dimensión virtualmente cíclica de grupos polilibres

En este capítulo se presenta un trabajo realizado en colaboración con la Dra. Rita Jiménez Rolland [33]. En éste damos una cota superior para la dimensión virtualmente cíclica de grupos normalmente polilibres, para enunciar el teorema introducimos algunas definiciones.

Un grupo G se llama *polilibre* si existe una filtración finita de G por subgrupos

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$$

tal que G_i es normal en G_{i+1} , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre, para $0 \leq i \leq n-1$. Si tenemos que cada G_i es normal en G , decimos que G es *normalmente polilibre*. Si hay una filtración tal que los grupos libres G_{i+1}/G_i son de rango finito, decimos que G es *poli-f.g.-libre*. Definimos la *longitud de G* como el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una filtración como la anterior.

En la literatura, hay varios ejemplos de grupos polilibres y normalmente polilibres:

- Los grupos poli- \mathbb{Z} son un caso particular de grupos polilibres, y sus dimensiones virtualmente cíclica fueron explícitamente calculados en [51, Section 5].
- En [32, Theorem 1.3] muestran que el grupo fundamental de un gráfica finita cuyos grupos vértices y aristas son grupos libres finitamente generados es normalmente polilibre.
- Los grupos de trenzas puras de superficies con frontera no vacía [2].
- Los grupos de Artin pares de tipo FC son normalmente polilibres [9, Teorema 3.18], [72, Theorem A]. Es una pregunta abierta [6, Question 2] si todos los grupos de Artin son virtualmente polilibres.

Los grupos polilibres satisfacen la Conjetura de Baum–Connes con coeficientes [14, Remark 2] la conjetura de Farrell–Jones [14, Theorem A], véase también [2], [7, Theorem 1.1], [38, Theorem 2.3.7].

Notación: En la literatura es común denotar a $\text{gd}_{\mathcal{F}_0}$ y $\text{gd}_{\mathcal{F}_1}$ como $\underline{\text{gd}}$ y $\underline{\underline{\text{gd}}}$ respectivamente. En este capítulo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.0.1. *Sea G un grupo polilibre de longitud $n \in \mathbb{N}$.*

- a) *La dimensión geométrica $\text{gd}(G) = \underline{\text{gd}}(G)$ está acotado superiormente por n . Además, si G es normalmente poli-f.g.-libre, entonces $\text{gd}(G) = n$.*
- b) *Si G es normalmente polilibre, entonces la dimensión virtualmente cíclica satisface la siguiente desigualdad*

$$\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq 3(n - 1) + 2.$$

El argumento utilizado para demostrar el teorema anterior es por inducción sobre la longitud del grupo polilibre. Y además se necesitó demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.0.2 (L.A.-Jiménez Rolland, 2023). *Sea G un grupo tal que $\underline{\text{gd}}(G) = 1$, entonces $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq 2$. Además, si G es no virtualmente cíclico y tiene un elemento de orden infinito, entonces $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) = 2$.*

Notemos que todo grupo libre F no virtualmente cíclico satisface las hipótesis del Teorema 4.0.2 anterior, por lo tanto $\underline{\underline{\text{gd}}}(F) = 2$. Para grupos libres finitamente generados este resultado ya se conocía ver por ejemplo [39]. Pero existen grupos que no son virtualmente libres y satisfacen las hipótesis del teorema anterior, por ejemplo si tomamos un grupo finito Q no trivial y tomamos el producto libre $\Gamma = Q * (Q \times Q) * (Q \times Q \times Q) \cdots$, el grupo Γ se puede ver como el grupo fundamental de una gráfica de grupos en donde los grupos aristas son triviales y los grupos vértices son los correspondientes productos directos de Q . Está gráfica no tiene una cota uniforme en la cardinalidad de los grupos vértices, luego por [64, Theorem 7.3] no es un grupo virtualmente libre, no es finitamente generado, y satisface las hipótesis del Teorema 4.0.2 anterior.

4.0.1. Básicos de grupos normalmente polilibres

Definición 4.0.3 (Grupo polilibre). *Un grupo discreto G se llama polilibre si existe una filtración finita de G por subgrupos $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$ tal que G_i es normal en G_{i+1} , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre. Definimos la longitud de G como*

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ existe una filtración de } G \text{ de longitud } n\}.$$

Proposición 4.0.4. *Algunas propiedades de los grupos polilibres*

- a) *Todo grupo polilibre es libre de torsión.*
- b) *Sea G un grupo polilibre de longitud n , y H un subgrupo de G . Entonces H es un grupo polilibre de longitud $\leq n$.*
- c) *Sea $1 \rightarrow K \rightarrow G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$ una sucesión exacta corta de grupos tal que K y H son grupos polilibres, entonces G es un grupo polilibre.*

Demostración. Demostremos el inciso a). La demostración es por inducción sobre la longitud del grupo polilibre. Si la longitud es 1 tenemos que el grupo es libre y la afirmación se sigue. Supongamos que la afirmación es cierta para todos los grupos polilibres de longitud menor o igual que $k - 1$. Sea G un grupo polilibre de longitud k , es decir, existe una filtración por subgrupos $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{k-1} < G_k = G$ tal que G_i es normal en G_{i+1} , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre. Consideremos la sucesión exacta corta $1 \rightarrow G_{k-1} \rightarrow G \rightarrow G/G_{k-1} \rightarrow 1$ por hipótesis de inducción G_{k-1} es libre de torsión, también G/G_{k-1} es libre de torsión por ser un grupo libre. Concluimos de la sucesión exacta corta anterior que G es un grupo libre de torsión.

Demostremos el inciso b). Sea G un grupo polilibre de longitud n , es decir, existe una filtración por subgrupos $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$ tal que G_i es normal en G_{i+1} , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre. Notemos que la filtración anterior induce una filtración del subgrupo H de G : $1 = G_0 \cap H < G_1 \cap H < \dots < G_{n-1} \cap H < G_n \cap H = H$ afirmamos que esta filtración cumple con lo requerido. Podemos restringir la sucesión exacta corta $1 \rightarrow G_i \rightarrow G_{i+1} \rightarrow G_{i+1}/G_i \rightarrow 1$ a $G_{i+1} \cap H$ para obtener la siguiente sucesión $1 \rightarrow G_i \cap H \rightarrow G_{i+1} \cap H \rightarrow Q \rightarrow 1$ donde Q es un subgrupo libre de G_{i+1}/G_i , se sigue la sucesión exacta corta anterior que $(G_{i+1} \cap H)/(G_i \cap H)$ es un grupo libre.

Demostremos el inciso c). Como K y H son grupos polilibres tenemos que existen filtraciones por subgrupos $1 = K_0 < K_1 < \dots < K_{n-1} < K_n = K$ y $1 = H_0 < H_1 < \dots < H_{m-1} < H_m = H$ tal que K_i es normal en K_{i+1} (H_i es normal en H_{i+1}), y el cociente K_{i+1}/K_i es un grupo libre (el cociente H_{i+1}/H_i es un grupo libre). Se puede verificar que la siguiente filtración cumple con lo requerido: $1 = K_0 < K_1 < \dots < K_{n-1} < p^{-1}(H_0) < p^{-1}(H_1) < \dots < p^{-1}(H_{m-1}) < p^{-1}(H_m) = G$. \square

Observación 4.0.5. *En general, el cociente de grupos polilibres no es polilibre. Por ejemplo el cociente de \mathbb{Z} por $2\mathbb{Z}$ es \mathbb{Z}_2 .*

Definición 4.0.6 (Grupo normalmente polilibre). *Un grupo discreto G se llama normalmente polilibre si existe una filtración finita de G por subgrupos $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$ tal que G_i es normal en G , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre.*

4.0.2. Dimensión geométrica de grupos polilibres

Proposición 4.0.7. *Si G es un grupo polilibre de longitud n , entonces $\text{gd}(G) \leq n$. Además, si G es normalmente polilibre y los grupos cocientes son grupos libres finitamente generados, entonces $\text{gd}(G) = n$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre la longitud n del grupo. Si $n = 1$, entonces G es un grupo libre no trivial, entonces $\text{gd}(G) = 1$. Supongamos que la afirmación es cierta para todo $n \leq k - 1$. Sea G un grupo polilibre de longitud k . Entonces, existe una filtración de G por subgrupos $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$ tal que G_{i+1}/G_i es un grupo libre para $0 \leq i \leq k - 1$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow G_{k-1} \rightarrow G \rightarrow G/G_{k-1} \rightarrow 1.$$

Dado que G/G_{k-1} es un grupo libre, tenemos por [47, Teorema 5.15] que

$$\text{gd}(G) \leq \text{gd}(G_{k-1}) + \text{gd}(G/G_{k-1}) \leq (k - 1) + 1 = k,$$

la segunda desigualdad se sigue por la hipótesis de inducción y el hecho de que la dimensión geométrica de un grupo libre es 1.

Observamos que $\text{gd}(G) \geq \text{cd}(G) \geq \text{hd}_{\mathbb{Q}}(G) \geq \text{hd}_{\mathbb{Q}}(G)$.

Si G es un grupo normalmente polilivre y los grupos cocientes son grupos libres finitamente generados, en [53, Teorema 16] se demostró que $\text{hd}_{\mathbb{Q}}(G) = n$, esto termina la demostración. \square

4.0.3. Dimensión virtualmente cíclica de grupos polilibres

Teorema 4.0.8. *Sea G un grupo tal que $\text{gd}(G) = 1$, entonces $\underline{\text{gd}}(G) \leq 2$. Además, si G es no virtualmente cíclico y contiene un elemento de orden infinito, entonces $\underline{\text{gd}}(G) = 2$.*

Demostración. Dado que $\text{gd}(G) = 1$, tenemos que existe un árbol T que es un modelo para \underline{EG} . Vamos a promover T a un modelo para $\underline{\underline{EG}}$ coneando algunas geodésicas en T .

Afirmamos que el estabilizador $\text{Stab}_G(\gamma)$ de cualquier línea geodésica γ en T es virtualmente cíclico. De hecho, ya que $\text{Stab}_G(\gamma)$ actúa mediante automorfismos simpliciales en γ , tenemos un morfismo $\varphi: \text{Stab}_G(\gamma) \rightarrow \text{Aut}(\gamma) = D_{\infty}$. Luego tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow \text{Stab}_G(\gamma) \xrightarrow{\varphi} D \rightarrow 1.$$

Dado que $\ker(\varphi)$ fija puntualmente los vértices de γ y T es un modelo para \underline{EG} , tenemos que $\ker(\varphi)$ es finito. Por otro lado, D_{∞} es virtualmente cíclico, por lo que D es virtualmente cíclico. De ello se deduce que $\text{Stab}_G(\gamma)$ es virtualmente cíclico.

Dado que T es un modelo para \underline{EG} , cualquier subgrupo virtualmente cíclico infinito de G debe actuar co-compactamente en una única línea geodésica de T ver por ejemplo Lema 2.3.1. Consideremos la colección \mathcal{A} de todas las geodésicas de T que admiten una acción co-compacta de un subgrupo infinito virtualmente cíclico de G . Consideramos el espacio \hat{T} dado por el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \gamma & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \{*\}_{\gamma} & \longrightarrow & \hat{T} \end{array}$$

Si $H \leq G$ actúa co-compactamente sobre la línea geodésica γ de T y $g \in G$, entonces gHg^{-1} actúa co-compactamente en $g\gamma$. Se deduce que tanto $\bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \gamma$ como $\bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \{*\}_{\gamma}$ son G -CW-complejos, y por lo tanto, el espacio \hat{T} es un G -CW-complejo de dimensión 2.

Afirmamos que \hat{T} es un modelo para $\underline{\underline{EG}}$, para esto necesitamos verificar lo siguiente:

a) Para todo $x \in \hat{T}$ el grupo isotropía $G_x \in V_{cyc}$.

b) El conjunto de puntos fijos $\hat{T}^H = \{x \in \hat{T} \mid hx = x, \text{ para todo } h \in H\}$ es contráctil siempre que H pertenezca a V_{CYC} .

El inciso a) es por construcción. De hecho, tenemos dos casos: $x \in T$ o $x \in \hat{T} - T$. En el primer caso, tenemos que G_x es finito, en el segundo, G_x es virtualmente cíclico.

Verificamos el inciso b). Si $H \in V_{CYC}$, por Lema 2.3.1 todo grupo virtualmente cíclico actuando sobre un árbol fija un vértice o actúa co-compactamente sobre una única línea geodésica. Dado que H actúa en el árbol T por restricción, se deduce que H fija un vértice de T o actúa co-compactamente en una única línea geodésica. En el primer caso, tenemos que H es finito porque T es un modelo para \underline{EG} , esto implica que T^H es un subárbol no vacío de T , y por lo tanto, \hat{T}^H se obtiene de T^H posiblemente coneando algunos segmentos geodésicos, entonces \hat{T}^H es contráctil. En el segundo caso, tenemos que H actúa co-compactamente en una única línea geodésica γ en T , entonces $\gamma \in \mathcal{A}$ y $*_\gamma \in \hat{T}^H$. Nótese que para todo $x \in \hat{T} - \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \{*_\gamma\}$ tiene G_x finito, entonces $\hat{T}^H \subseteq \bigcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \{*_\gamma\}$. Por la unicidad de γ concluimos que $\hat{T}^H = \{*_\gamma\}$.

Vamos a demostrar ahora la segunda parte del teorema. Supongamos que G no es virtualmente cíclico y contiene un elemento de orden infinito $h \in G$. El subgrupo cíclico generado por h actúa de manera co-compacta en una única línea geodésica γ de T . Dado que el estabilizador de cualquier línea geodésica en T es virtualmente cíclico y G no lo es, implica, que existe un elemento $g \in G$ que no está en $\text{Stab}_G(\gamma)$. Notemos que el subgrupo H generado por h y g no es virtualmente cíclico. De lo contrario H actuaría en una línea geodésica β de T , en particular los subgrupos cíclicos generados por h y g , actúan en β . La unicidad de γ implica que $\beta = \gamma$, entonces g estabiliza γ lo cual es una contradicción. Por [44, Lemma 2.2] tenemos que $2 \leq \underline{\underline{\text{gd}}}(H) \leq \underline{\underline{\text{gd}}}(G)$. \square

Corolario 4.0.9. *Sea G un grupo virtualmente libre y no virtualmente cíclico. Entonces $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) = 2$.*

Demostración. Por [23, Teorema 3.2], se tiene que G es el grupo fundamental de una gráfica de grupos con grupos vértices finitos, lo anterior implica que el árbol de Bass-Serre asociado a G es un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}G$, y como consecuencia $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) = 1$. De Teorema 4.0.8, concluimos que $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) = 2$. \square

La siguiente definición fue introducida por W. Lück [48, Condition 4.1].

Definición 4.0.10. *Decimos que un grupo G satisface la condición (C) si para todo $g, h \in G$ con $|h| = \infty$ y $k, l \in \mathbb{Z}$ tenemos que $gh^k g^{-1} = h^l$ implica que $|k| = |l|$.*

Lema 4.0.11. [48, Lemma 4.4] *Sea n un entero. Suponga que G satisface la condición (C). Supongamos que $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq n$ y para cada subgrupo cíclico infinito H de G tenemos que $\underline{\underline{\text{gd}}}(W_G(H)) \leq n$. Entonces $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq n + 1$.*

Lema 4.0.12. *Consideremos una sucesión exacta corta de grupos*

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

donde F es un grupo libre. Entonces el grupo G satisface la condición (C).

Demostración. Consideremos el automorfismo $\varphi : F \rightarrow F$ tal que $G \cong F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$.

Sea $(x, a), (y, b) \in F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ con $|(x, a)| = \infty$ y $k, l \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(y, b)(x, a)^k(y, b)^{-1} = (x, a)^l.$$

Entonces $b + ka - b = la$; si $a \neq 0$, se sigue que $k = l$.

Ahora supongamos que $a = 0$ y $x \neq e_F$. Entonces tenemos que

$$(y, b)(x^k, 0)(y, b)^{-1} = (x^l, 0),$$

lo que implica que $y\varphi^b(x^k)y^{-1} = x^l$ en F . En otras palabras,

$$c_y \circ \varphi^b(x^k) = x^l, \quad (4.1)$$

donde $c_y : F \rightarrow F$ es el automorfismo de F dado por la conjugación por y .

Es bien conocido que en un grupo libre todo subgrupo virtualmente cíclico C está contenido en un único subgrupo virtualmente cíclico maximal C_{max} . Consideremos el subgrupo cíclico infinito $C = \langle x \rangle$ de F . De Ecuación (4.1), tenemos que el automorfismo $c_y \circ \varphi^b$ de F manda el subgrupo $\langle x^k \rangle$ de C en el subgrupo $\langle x^l \rangle$ de C , entonces C_{max} se mapea de manera isomorfa a C_{max} . Por lo tanto, $c_y \circ \varphi^b|_{C_{max}}$ es un automorfismo del grupo cíclico infinito C_{max} y por ende $c_y \circ \varphi^b|_{C_{max}} = \pm \text{Id}_{C_{max}}$. Se sigue que $x^l = c_y \circ \varphi^b(x^k) = \pm \text{Id}_{C_{max}}(x^k) = x^{\pm k}$, entonces $|k| = |l|$. \square

Proposición 4.0.13 (L.A.-Jiménez Rolland, 2023). *Considere una sucesión exacta corta de grupos*

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

tal que F es un grupo libre. Entonces

- a) La dimensión geométrica satisface $\text{gd}(G) \leq 2$, y se da la igualdad si el grupo G no es libre.
- b) La dimensión geométrica virtualmente cíclica satisface $2 \leq \underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq 3$.

Demostración. Si G es un grupo libre, la afirmación se deduce de Corolario 4.0.9. Ahora supongamos que G no es un grupo libre.

Primero veamos el inciso a). Por Proposición 4.0.7 tenemos $\text{gd}(G) \leq 2$. Por otro lado, si G es no trivial y no libre, entonces $\text{cd}(G) \neq 0$ y por Stallings-Swan (ver, por ejemplo, [23, Teorema 3.5]) tenemos $\text{cd}(G) \neq 1$. Por lo tanto, $2 \geq \text{gd}(G) \geq \text{cd}(G) \geq 2$, entonces $\text{cd}(G) = \text{gd}(G) = 2$.

Veamos ahora inciso b). Para la cota inferior notemos que si $F = \mathbb{Z}$, entonces G es isomorfo a \mathbb{Z}^2 o $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ en cualquier caso tenemos por Teorema 3.0.2 que $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) = 3$. Si F es no cíclico, tenemos por Corolario 4.0.9 que $2 = \underline{\underline{\text{gd}}}(F) \leq \underline{\underline{\text{gd}}}(G)$.

Ahora vamos a mostrar que $\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq 3$. Por Lema 4.0.12 el grupo $G = F \rtimes \mathbb{Z}$ satisface la condición (C). Luego, por Lema 4.0.11 y el inciso a), es suficiente demostrar que para todo subgrupo cíclico H de $G = F \rtimes \mathbb{Z}$, se cumple que $\underline{\underline{\text{gd}}}(W_G(H)) \leq 2$. Tenemos dos

casos: *i*) $p(H) = 0$ o *ii*) $p(H) \neq 0$. De la sucesión exacta corta $1 \rightarrow F \rightarrow G \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow 1$, obtenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow F \cap N_G(H) \rightarrow N_G(H) \rightarrow Q \rightarrow 1 \quad (4.2)$$

donde Q es un subgrupo de \mathbb{Z} .

En el caso *i*), tenemos que $H \subseteq F$. Dado que F es un grupo libre, tenemos que $F \cap N_G(H) = N_F(H)$ es un subgrupo cíclico. Luego, de Ecuación (4.2) obtenemos que $W_G(H)$ es virtualmente cíclico:

$$1 \rightarrow (F \cap N_G(H))/H \rightarrow W_G(H) \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

En el caso *ii*), si $p(H) \neq 0$, deducimos de Ecuación (4.2) que $W_G(H)$ es un grupo virtualmente libre:

$$1 \rightarrow F \cap N_G(H) \rightarrow W_G(H) \rightarrow Q/p(H) \rightarrow 1.$$

□

Estamos listos para demostrar el resultado principal.

Teorema 4.0.14. *Sea G un grupo normalmente polilibre de longitud n . Entonces*

$$\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq 3(n - 1) + 2.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre n .

Si $n = 1$, la afirmación se sigue de Corolario 4.0.9. Supongamos que la afirmación es válida para todos $n \leq k - 1$, demostramos que la desigualdad es válida para $n = k$.

Dado que G es un grupo normalmente polilibre de longitud k , existe una filtración de G por subgrupos $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{k-1} < G_k = G$ tal que G_i es normal en G , y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo libre. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G \xrightarrow{p} G/G_1 \rightarrow 1.$$

Notemos que G/G_1 es un grupo normalmente polilibre de longitud $\leq k - 1$. Consideramos la familia pull-back $p^*(\mathcal{G})$ de subgrupos virtualmente cíclicos \mathcal{G} de G/G_1 , es decir, la familia generada por

$$\{p^{-1}(L) : L \text{ es un subgrupo virtualmente cíclico de } G/G_1\}$$

Notemos que un modelo X de $E_{\mathcal{G}}(G/G_1)$ es un modelo de $E_{p^*(\mathcal{G})}G$ a través de la acción dada por la proyección p . Además, notemos que $V_{\text{CYC}} \subseteq p^*(\mathcal{G})$, entonces por Proposición 1.4.12 tenemos:

$$\underline{\underline{\text{gd}}}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{G}}(G/G_1) + \max\{\text{gd}_{V_{\text{CYC}} \cap p^{-1}(L)}(p^{-1}(L)) : L \text{ es un subgrupo virt. cíclico de } G/G_1\} \quad (4.3)$$

Para todo L subgrupo virtualmente cíclico de G/G_1 mostraremos que

$$\text{gd}_{V_{CYC} \cap p^{-1}(L)}(p^{-1}(L)) \leq 3.$$

Consideremos la sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow p^{-1}(L) \rightarrow L \rightarrow 1 \quad (4.4)$$

Si $L = 1$, entonces $p^{-1}(L) \cong G_1$ es un grupo libre, se sigue de Corolario 4.0.9 que $\text{gd}_{V_{CYC} \cap p^{-1}(L)}(p^{-1}(L)) = 2$. Si $L \neq 1$, L es un subgrupo cíclico infinito porque G/G_1 es libre de torsión. Dado que G_1 es un grupo libre, por Ecuación (4.4) y Proposición 4.0.13 tenemos $\text{gd}_{V_{CYC} \cap p^{-1}(L)}(p^{-1}(L)) \leq 3$.

De Ecuación (4.3), tenemos que $\underline{\text{gd}}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{G}}(G/G_1) + 3$. Por la hipótesis de inducción, se sigue que $\underline{\text{gd}}(G) \leq 3(k-1) + 2$. \square

Capítulo 5

La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos de 3-variedades orientables

En el 2019 en [35] se calculó explícitamente la \mathcal{F}_1 -dimensión geométrica de grupos fundamentales de 3-variedades orientables. Como una generalización natural, calculamos en trabajo conjunto con el Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña, la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos fundamentales de 3-variedades, para todo $k \geq 2$ en [44]. Este trabajo se presenta en este capítulo.

Para poder enunciar nuestro primer resultado, necesitamos recordar algunas definiciones de 3-variedades. En la tesis vamos a asumir que todas las 3-variedades son orientables a menos que se diga explícitamente lo contrario. Decimos que una 3-variedad M es prima, si siempre que M sea homeomorfa a una suma conexa de 3-variedades $N_1 \# N_2$ implica que uno de los factores N_i es homeomorfo a \mathbb{S}^3 . Es bien sabido que toda 3-variedad cerrada admite una descomposición prima, ver Teorema 5.1.3.

Teorema 5.0.1 (L.A.-Sánchez Saldaña, 2022). *Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_r las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(P_i, x_i)$. Entonces, para todo $k \geq 2$,*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \\ 2 & \text{si } r \geq 2, G_i \in \mathcal{F}_k \text{ para todo } 1 \leq i \leq r, \\ & \text{y } G \text{ es no virtualmente cíclico,} \\ \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además

- $G_i \in \mathcal{F}_2$ si y sólo si P_i es modelada en \mathbb{S}^3 o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$ o $P_i = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.
- $G_i \in \mathcal{F}_3$ si y sólo si $G_i \in \mathcal{F}_2$ o G_i es modelada en \mathbb{E}^3 .

Dada la descomposición prima de una 3-variedad M , el teorema anterior nos dice que para conocer explícitamente la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$ del grupo fundamental de una 3-variedad, necesitamos calcular la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}$ de las piezas primas de M .

En una 3-variedad prima cerrada podemos encontrar una colección de toros tal que al cortar a través de estos toros las piezas que nos quedan son o bien hiperbólicas o Seifert fibrado, este resultado es conocido como descomposición JSJ, ver Teorema 5.1.9. La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}$ del grupo fundamental de una 3-variedad prima es la siguiente.

Teorema 5.0.2 (L.A.-Sánchez Saldaña, 2022). *Sea M una 3-variedad prima conexa, cerrada y orientada. Sean N_1, N_2, \dots, N_r las piezas de la descomposición JSJ de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(N_i, x_i)$. Si $k \geq 2$, entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } M \text{ es modelada en Sol,} \\ \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este teorema nos dice que para conocer explícitamente la dimensión geométrica del grupo fundamental de una pieza prima, necesitamos calcular la dimensión geométrica de las piezas de su descomposición JSJ, el cual mostramos en la siguiente tabla.

Tipo de variedad N	$\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\pi_1(N, x_0))$	$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\pi_1(N, x_0))$ con $k \geq 3$
Hiperbólica con frontera vacía	3	3
Hiperbólica con frontera no vacía	3	3
Seifert fibrado con base orbifold B que es o bien mala o modelada en \mathbb{S}^2	0	0
Seifert fibrado con base orbifold B modelada en \mathbb{H}^2 , y frontera vacía o no vacía	2	2
Seifert fibrado modelada en \mathbb{E}^3 con frontera no vacía y base orbifold B modelada en \mathbb{E}^2	5	0
Seifert fibrado modelada en Nil con frontera vacía y base orbifold B modelada en \mathbb{E}^2	3	3
Seifert fibrado con frontera no vacía y base orbifold B modelada en \mathbb{E}^2	0	0

Tabla 5.1: \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de las piezas JSJ.

Los teoremas anteriores, Teorema 5.0.1 y Teorema 5.0.2 junto con la Tabla 5.1 se calcula explícitamente la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de grupos de 3-variedades con respecto de la familia \mathcal{F}_k para todo $k \geq 2$.

La distribución de este capítulo es como sigue: en la sección 5.1 se revisan algunas nociones y resultados de 3-variedades tales como la noción de 3-variedades de Seifert, el teorema de descomposición prima y JSJ. En la sección 5.1 se calcula explícitamente la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de las piezas JSJ. En la sección 5.6 se demuestran los teoremas principales.

5.1. Básicos de 3-variedades

El objetivo de esta sección es recordar algunos resultados de 3-variedades orientables que vamos a necesitar en las siguientes secciones, para más detalles ver [63] y [5]. En toda la tesis vamos a asumir que todas las 3-variedades son orientables a menos que se diga explícitamente lo contrario.

Descomposición prima

Es bien sabido que toda superficie conexa, compacta, orientable y sin frontera es o bien la esfera, un toro o una suma conexa de toros. Con este resultado en mente es natural preguntarse si toda 3-variedad se puede ver como una suma conexa de variedades más “sencillas”. Esta pregunta tiene una respuesta afirmativa.

Definición 5.1.1 (Suma conexa de 3-variedades). *Sean M y N dos 3-variedades. Eliminemos el interior una 3-bola a cada 3-variedad $M - \text{Int}(B_1)$, $N - \text{Int}(B_2)$ y tomemos un homeomorfismo $\varphi: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$. La suma conexa $M \# N$ de M y N , se define como el espacio cociente que se obtiene de la unión disjunta $M - \text{Int}(B_1) \sqcup N - \text{Int}(B_2)$ identificando $x \in \partial B_1$ con $\varphi(x)$. Si M y N están orientadas, requerimos que φ cambie la orientación con respecto a la orientación inducida a ∂B_1 y ∂B_2 .*

Definición 5.1.2. *Decimos que una 3-variedad M es prima, si siempre que M sea homeomorfa a una suma conexa de 3-variedades $N_1 \# N_2$ implica que uno de los factores N_i es homeomorfo a \mathbb{S}^3 .*

El siguiente teorema de descomposición prima es debido a Kneser (existencia) [40] y Milnor (unicidad) [55].

Teorema 5.1.3 (Teorema de Descomposición Prima). *Sea M una 3-variedad conexa, orientable y cerrada. Entonces M se puede ver como una suma conexa de variedades primas $M = P_1 \# \cdots \# P_n$. Además, esta descomposición es única salvo el orden y homeomorfismo.*

El teorema anterior nos dice que para estudiar una 3-variedad, podemos empezar por estudiar sus piezas primas, pero estas piezas primas podrían ser todavía complicadas. Entonces, la pregunta natural es si estas piezas primas se pueden descomponer en piezas más “sencillas”. Esta pregunta tiene una respuesta afirmativa y se conoce como descomposición JSJ.

Antes de enunciar la descomposición JSJ necesitamos definir una variedad de Seifert fibrado.

3-variedades de Seifert fibrado

Definición 5.1.4. Sea $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Consideremos el espacio $I \times D^2$ identifiquemos las tapas $\{0\} \times D^2$ y $\{1\} \times D^2$ mediante el automorfismo $\varphi(x) = x \exp \frac{2\pi i x p}{q}$ de D^2 , donde p y q son coprimos. El espacio cociente $T(p, q)$ se llama un toro fibrado. Si φ es la identidad obtenemos el toro fibrado trivial $S^1 \times D^2$.

Definición 5.1.5. Una 3-variedad M es de Seifert fibrado si se puede ver como una unión disjunta de círculos (como conjunto) llamadas fibras $M = \bigsqcup_{\alpha \in A} S^1_\alpha$ tal que cada círculo tiene una vecindad homeomorfa a un toro sólido fibrado. Una fibra de M se dice que es regular si tiene una vecindad tubular homomorfa a un toro sólido fibrado trivial, la fibra se dice que es singular en otro caso.

Observación 5.1.6. Un toro fibrado no trivial $T(p, q)$ tiene a lo más una fibra singular, a saber, la fibra “central”. Se sigue que en una 3-variedad de Seifert fibrado las fibras singulares son aisladas.

Ejemplos 5.1.7. Ejemplos de 3-variedades de Seifert fibrado

1) $T^3 = T^2 \times S^1 = \bigsqcup_{x \in T^2} \{x\} \times S^1$.

2) Si Σ es una superficie, entonces $\Sigma \times S^1$ es una 3-variedad de Seifert fibrado.

3) Un haz fibrado de la forma:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow p \\ & & \Sigma \end{array}$$

Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado. Dada una descomposición de M en círculos, se puede colapsar cada círculo a un punto, al hacer esto lo que nos queda es una 2-orbitad B , llamamos a B la base de M , ver [63, Section 3]. Tal orbitad B tiene su grupo fundamental orbifold $\pi_1^{orb}(B)$, que no necesariamente es el grupo fundamental del espacio topológico subyacente, pero está relacionado con el grupo fundamental de M a través del siguiente lema.

Lema 5.1.8. [63, lema 3.2] Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado con base orbitad B . Sea G el grupo fundamental de M . Entonces existe una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \pi_1^{orb}(B) \rightarrow 1$$

donde K denota el subgrupo cíclico de G generado por una fibra regular. El grupo K es infinito excepto en los casos donde M es cubierto por S^3 .

Una 2-orbitad B es exactamente de uno de los siguientes tipos, dependiendo de la estructura de su cubriente orbifold universal: malo, esférico, hiperbólico o plano. En esta tesis, dividiremos el cálculo de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de una variedad de Seifert M dependiendo del tipo de su base orbitad B .

Descomposición JSJ

Después del trabajo de Perelman [59] [60] y Thurston [70] el teorema de descomposición JSJ debido a Jaco-Shalen[31] y Johansson [36], se puede formular como sigue.

Teorema 5.1.9 (Teorema de descomposición JSJ, Jaco-Shalen-Johansson, Perelman). *Sea M una 3-variedad prima, cerrada y orientada. Entonces existe una colección $\mathcal{T} \subset M$ de toros incompresibles, es decir, propiamente encajada con haz normal trivial y π_1 -inyectivo tal que cada componente de $M \setminus \mathcal{T}$ es o bien hiperbólica o una variedad de Seifert fibrado. Una tal colección es única hasta isotopía.*

Una herramienta que podemos utilizar al estudiar 3-variedades es la geometría diferencial. A continuación introducimos la noción de geometría, para poder enunciar el Teorema 5.1.13 que nos caracteriza las 3-variedades de Seifert fibrado con su geometría.

Definición 5.1.10. *Una n -variedad Riemanniana M es una variedad suave con una métrica Riemanniana. Si el grupo de isometrías $\text{Iso}(M)$ actúa transitivamente en M , entonces decimos que M es homogénea. Si M tiene un cociente con volumen finito decimos que M es unimodular.*

Definición 5.1.11. *Una geometría es una variedad Riemanniana M simplemente-conexa, homogénea y unimodular.*

Ejemplos de geometrías son las siguientes:

- Euclidiana \mathbb{E}^n ,
- Hiperbólica \mathbb{H}^n ,
- Esférica \mathbb{S}^n .

Definición 5.1.12. *Decimos que una variedad N admite una estructura geométrica, si existe una geometría M y un subgrupo Γ de $\text{Iso}(M)$ que actúa libremente en M tal que M/Γ es difeomorfo a N .*

Por el teorema de uniformización las superficies compactas admiten las siguientes geometrías: \mathbb{S}^2 , \mathbb{E}^2 , \mathbb{H}^2 , ver por ejemplo [68], [57, Theorem 1.1.1]. Thurston mostró que existen 8 geometrías posibles para 3-variedades: Hiperbólica \mathbb{H}^3 , Euclidiana \mathbb{E}^3 , Esférica \mathbb{S}^3 , Sol, Nil, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Ver por ejemplo [63, Theorem 5.1].

El siguiente teorema nos dice el tipo de geometría que puede admitir una 3-variedad de Seifert fibrado.

Teorema 5.1.13. *Sea M una 3-variedad compacta con frontera vacía o atoroidal. Asumimos que $M \neq S^1 \times D^2$, $M \neq S^1 \times S^1 \times I$, y que M no es el I -haz torcido sobre la botella de Klein. Entonces M es Seifert fibrado si y sólo si M admite una geometría modelada en uno de las siguientes geometrías: \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ o Nil*

Para una demostración ver [63, Theorem 5.3] y [5, Theorem 1.17].

Dimensión virtualmente abeliana de las piezas JSJ

Sea N una 3-variedad prima. Utilizando el Teorema de descomposición JSJ podemos encontrar una colección de toros $\{T_i\}$ en N tal que $N \setminus \cup T_i$ las piezas que nos quedan son o bien 3-variedades hiperbólicas o 3-variedades de Seifert fibrado. En las siguientes subsecciones el objetivo es calcular la dimensión geométrica del grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica y una 3-variedad de Seifert fibrado. En la última sección mostramos una tabla de los cálculos obtenidos.

5.2. El caso hiperbólico

En esta sección, calculamos la \mathcal{F}_2 -dimensión geométrica de las variedades hiperbólicas con o sin frontera.

Teorema 5.2.1. *Sea M una 3-variedad hiperbólica de volumen finito (posiblemente con frontera) y $G = \pi_1(M, x_0)$. Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 3$.*

Demostración. Tenemos dos casos dependiendo de si la frontera de M es vacía o no. Primero, supongamos que M no tiene frontera. De [63, Corolario 4.6], sabemos que G no puede tener un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^2 , y por lo tanto $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_k$ para todo $k \geq 1$. Así, por [35, Proposición 6.1], $\text{gd}_{\mathcal{F}_1}(G) = 3$, y el resultado se sigue.

Ahora supongamos que M tiene frontera no vacía. Destacamos dos observaciones:

1. La primera es que G es libre de torsión. De hecho, como M es hiperbólica y en particular asférica, entonces el cubriente universal \mathbb{H}^3 de M es un modelo para EG , y por lo tanto G tiene dimensión cohomológica finita. De [13, Corolario 2.5] se sigue que G debe ser libre de torsión.
2. La segunda observación es que todo subgrupo virtualmente cíclico infinito de G es isomorfo a \mathbb{Z} . Esto se sigue de la primera observación y de la clasificación de grupos virtualmente cíclicos, ver por ejemplo [37, Proposición 4].

Consideremos la colección \mathcal{B} de subgrupos de G que consiste de:

- Todos los conjugados de los grupos fundamentales de las cúspides de M . Todos estos grupos son isomorfos a \mathbb{Z}^2 , ya que cada cúspide es homeomorfa al producto de un toro y un intervalo.
- Todos los subgrupos virtualmente cíclicos infinitos maximales que no son subconjugados al grupo fundamental de una cúspide. Todos estos grupos son isomorfos a \mathbb{Z} por la observación (2) anterior.

Observemos que G es hiperbólico relativo a la colección dada por los grupos fundamentales de las cúspides de M , ver por ejemplo [58, Example I, p.4]. Por [41, Theorem 2.6], la colección \mathcal{B} es adaptada a $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$. Afirmamos que \mathcal{B} es adaptada a $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2)$. Verifiquemos

cada una de las condiciones en Definición 1.4.15 para \mathcal{B} y $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_2$. Las condiciones b) y c) se siguen directamente de la demostración de Lafont y Ortiz, ya que no dependen de las familias, sino solo de la colección \mathcal{B} . La condición a) también sigue directamente de la demostración de Lafont y Ortiz, ya que tal condición solo depende de la pequeña familia \mathcal{F}_0 . Para la condición d), notamos que Lafont y Ortiz verificaron que todo subgrupo cíclico virtualmente infinito de G está contenido en un elemento de \mathcal{B} , así que solo tenemos que verificar que todo subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^2 de G está contenido en un elemento de \mathcal{B} . De hecho, si H es un subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^2 de G , entonces H no contiene un subgrupo isomorfo a un grupo libre en dos generadores. Por lo tanto, por la alternativa de Tits para grupos relativamente hiperbólicos, ver por ejemplo [8, Remark 3.5], H es subconjugado al grupo fundamental de una cúspide.

Ahora estamos listos para usar Teorema 1.4.16 y Observación 1.4.20 para construir un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$. Sea \mathcal{H} una colección de representantes de las clases de conjugación en \mathcal{B} , entonces el espacio X definido por el G -coproducto amalgamado dado por Teorema 1.4.16:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}} G \times_H EH & \xrightarrow{g} & EG \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}} G \times_H E_{\mathcal{F}_2}H & \longrightarrow & X \end{array} \quad (5.1)$$

nos da un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$.

Afirmamos que X puede ser elegido de dimensión de 3. Observemos que, por Observación 1.4.20, la dimensión de X es

$$\max\{\dim(EH) + 1, \dim(EG), \dim(E_{\mathcal{F}_2}H)\}.$$

Hemos visto que H es isomorfo a \mathbb{Z} o \mathbb{Z}^2 , por lo tanto, EH tiene un modelo de dimensión 1 o 2, y en ambos casos hay un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}H$ de dimensión 0. Esto prueba nuestra afirmación. Como consecuencia, $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 3$.

Ahora vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 3$. Es bien conocido que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq \text{cd}_{\mathcal{F}_2}(G)$, por lo tanto, es suficiente mostrar que $\text{cd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 3$. Para demostrar esta última desigualdad, probaremos que $H_{\mathcal{F}_2}^3(G; \mathbb{Z}) \neq 0$. Aplicando Mayer-Vietoris a (5.1) obtenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_{\mathcal{F}_2}^3(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(G; \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} H_{\mathcal{F}_2}^3(H; \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} H^3(H; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \quad (5.2)$$

Dado que existe un modelo de dimensión 0 para $E_{\mathcal{F}_2}H$ para todo $H \in \mathcal{H}$, entonces $H_{\mathcal{F}_2}^3(H; \mathbb{Z}) = 0$, lo que implica que $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}} H_{\mathcal{F}_2}^3(H; \mathbb{Z}) = 0$. Por [52, Teorema 1.1.7], existe un complejo de dimensión 2, $X \subseteq M$, tal que X tiene el mismo tipo de homotopía que M . Por lo tanto, el cubriente universal \tilde{X} de X es un modelo para EG . Concluimos que $H^3(G; \mathbb{Z}) = H^3(M; \mathbb{Z}) = H^3(X; \mathbb{Z}) = 0$. Como consecuencia de (5.2) y las observaciones en el párrafo anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\cdots \rightarrow H^2(G; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{H \in \mathcal{H} \ H \cong \mathbb{Z}^2} H^2(H; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\mathcal{F}_2}^3(G; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Vamos a describir la función φ de manera más explícita. Recordemos que esta función está inducido por la única función H -equivariante $\bigsqcup_{H \in \mathcal{H}, H \cong \mathbb{Z}^2} EH \rightarrow EG$ considerando EG como un H -complejo celular por restricción, ver Observación 1.4.20. Para dar una descripción concreta de esta inclusión, tomamos como modelo para EG del cubriente universal \tilde{N} de la parte "gruesa" N de M , es decir, cortamos todas las cúspides de M . Dado que cada subgrupo \mathbb{Z}^2 en \mathcal{H} es el grupo fundamental de una cúspide, corresponden a los grupos fundamentales de los componentes conexos de la frontera de N . Por lo tanto, la función $\bigsqcup_{H \in \mathcal{H}, H \cong \mathbb{Z}^2} G \times_H EH \rightarrow EG$ puede identificarse con la inclusión $p^{-1}(\partial N) \rightarrow \tilde{N}$, donde $p: \tilde{N} \rightarrow N$ es la función de cubriente universal. Por otro lado, tenemos los isomorfismos naturales $H^2(G; \mathbb{Z}) \cong H^2(EG/G; \mathbb{Z}) = H^2(N; \mathbb{Z})$ y $H^2(H; \mathbb{Z}) \cong H^2(EH/H; \mathbb{Z})$, ver por ejemplo [4, Example 4.3]. En conclusión, φ puede identificarse con el mapa inducido en cohomología de Bredon por la inclusión $\partial N \hookrightarrow N$.

Para demostrar que $H_{\mathcal{F}_2}^3(G; \mathbb{Z}) \neq 0$, es suficiente mostrar que la función φ no es sobreyectivo. Utilizando la sucesión exacta larga del par $(N, \partial N)$:

$$\cdots \rightarrow H^2(N, \partial N) \rightarrow H^2(N) \xrightarrow{\varphi} H^2(\partial N) \rightarrow H^3(N, \partial N) \rightarrow 0$$

podemos ver que φ no es sobreyectivo si y sólo si $H^3(N, \partial N) \neq 0$. Por la dualidad de Poincaré, $H^3(N, \partial N) \cong H_0(N) = \mathbb{Z}$. Por lo tanto, φ no es sobreyectivo. Esto completa la demostración. \square

5.3. Caso Seifert fibrado

5.3.1. 3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base mala o aesférica

Teorema 5.3.1. [35, Proposition 5.1] *Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado con orbidad base B y grupo fundamental G . Asumimos que B es o bien una orbidad mala, o una orbidad buena modelada en S^2 . Entonces G es virtualmente cíclico, en particular $\text{gd}_{\mathcal{F}_n}(G) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

5.3.2. 3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base hiperbólica

Teorema 5.3.2. *Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado (cerrada o con frontera no vacía) con orbidad base B y grupo fundamental G . Asumimos que B es modelada en \mathbb{H}^2 , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 2$.*

Demostración. Primero vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 2$, para ello vamos a construir un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 2 utilizando Teorema 1.4.19. Por Lema 5.1.8 tenemos una sucesión exacta corta de grupos

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} G_0 \rightarrow 1 \tag{5.3}$$

donde $G_0 = \pi_1^{orb}(B)$ el grupo fundamental orbifold de B y K es un subgrupo cíclico infinito de G , generado por una fibra regular. Sea

$$\mathcal{F}'_n = \{H < G_0 : H \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}^r \text{ para algún } r = 0, 1, \dots, n\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}'_2 = \mathcal{F}'_1$, se sigue del hecho de que G_0 no puede tener un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^2 porque G_0 es un grupo Fuchsiano. Por [41, Theorem 2.6] la colección $\mathcal{A} = \{H < G_0 : H \text{ es virtualmente } \mathbb{Z} \text{ maximal en } \mathcal{F}'_1 \setminus \mathcal{F}'_0\}$ es adaptada al par $(\mathcal{F}'_0, \mathcal{F}'_1)$.

Consideremos las familias jaladas $\tilde{\mathcal{F}}'_0$ y $\tilde{\mathcal{F}}'_1$ generadas por $\{\varphi^{-1}(L) : L \in \mathcal{F}'_0\}$ y $\{\varphi^{-1}(L) : L \in \mathcal{F}'_1\}$ respectivamente. Notemos que $\tilde{\mathcal{F}}'_0 \subset \mathcal{F}_2 \subset \tilde{\mathcal{F}}'_1$, la primera contención es por inspección, demosntremos la segunda contención: Sea $L \in \mathcal{F}_2$, tenemos tres opciones L es finito, L es virtualmente \mathbb{Z} o L es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Si L es virtualmente \mathbb{Z}^2 , entonces existe un subgrupo $L' < L$ de índice finito isomorfo a \mathbb{Z}^2 , notemos que $\varphi(L')$ es un subgrupo cíclico de G_0 que tiene índice finito en $\varphi(L)$, así $\varphi(L) \in \mathcal{F}'_1$. Concluimos que $\varphi^{-1}(\varphi(L)) \in \tilde{\mathcal{F}}'_1$ y contiene a L . Los otros casos se procede de manera análoga. Sea \mathcal{H} un conjunto completo de representantes de clases de conjugación en $\mathcal{A}^* = \{\varphi^{-1}(H) : H \in \mathcal{A}\}$. Entonces por el Teorema 1.4.19 tenemos que el siguiente G -coproducto amalgamado da un modelo X para $E_{\mathcal{F}_2}G$

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\tilde{H} \in \mathcal{H}} G \times_{\tilde{H}} E_{\mathcal{F}_0}H & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}_0}G_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\tilde{H} \in \mathcal{H}} G \times_{\tilde{H}} E_{\mathcal{F}_2}\tilde{H} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Verifiquemos que X tiene dimensión 2. Para ello calculemos las dimensiones de los vértices del G -coproducto amalgamado. Veamos que dimensión tiene $E_{\mathcal{F}_0}H$. Puesto que $H \in \mathcal{A}$ tenemos que H es virtualmente \mathbb{Z} , así un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}H$ es \mathbb{R} para todo $\tilde{H} \in \mathcal{H}$. Por [47, Theorem 4.6] un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}G_0$ es \mathbb{H}^2 . Por último mostremos que \tilde{H} es virtualmente \mathbb{Z}^2 para todo $\tilde{H} \in \mathcal{H}$, y en consecuencia el espacio de un punto es un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}\tilde{H}$ para todo $\tilde{H} \in \mathcal{H}$. Sea $\tilde{H} \in \mathcal{H}$, por definición de \mathcal{H} , $\tilde{H} \in \mathcal{A}^*$, luego $\tilde{H} = \varphi^{-1}(S)$ para algún $S \in \mathcal{A}$. S es virtualmente \mathbb{Z} , es decir, existe un subgrupo $T < S$ tal que T es isomorfo a \mathbb{Z} y de índice finito en S . Entonces de 5.3 tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow K \rightarrow \varphi^{-1}(T) \rightarrow T \rightarrow 1 \tag{5.4}$$

esta sucesión exacta 5.4 es equivalente a la siguiente sucesión exacta que se escinde

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \varphi^{-1}(T) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

así $\varphi^{-1}(T)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ el cual es virtualmente \mathbb{Z}^2 . $\varphi^{-1}(T)$ es de índice finito en \tilde{H} . Se sigue que \tilde{H} es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Observando las dimensiones del G -coproducto amalgamado concluimos que X es de dimensión 2.

Ahora vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 0, 1$. En [26, Proposition 3.19. y Proposition 3.20, p. 49] se demuestra que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 0$ si y sólo si $G \in \mathcal{F}_2$, entonces para mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 0$ basta ver que G no es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Procedemos por contradicción, supongamos que G es virtualmente \mathbb{Z}^2 , i.e, existe un subgrupo $L < G$ isomorfo a \mathbb{Z}^2 y de índice finito. Observemos que $\varphi(L)$ es un subgrupo cíclico de G_0 de índice finito,

pero $G_0 = \pi_1^{orb}(B)$ no es virtualmente cíclico porque la orbidad B esta cubierta por una superficie S_g de genero por lo menos 2, luego G_0 contiene a $\pi_1(S_g)$, así G_0 no puede ser virtualmente cíclico. Por lo tanto G no es virtualmente \mathbb{Z}^2 .

Ahora veamos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 1$. Procedemos por contradicción, supongamos que existe un modelo X para $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 1. Notemos que X es un árbol y que cada elemento $g \in G$ tiene un punto fijo pues $X^{(g)} \neq \emptyset$. Por Teorema 2.1.16 $X^G \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción porque G no es un elemento de \mathcal{F}_2 . \square

5.3.3. 3-variedades de Seifert fibrado con orbidad base plana

El objetivo de esta subsección es demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 5.3.3. *Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado, cerrada (sin frontera) con base orbidad B y grupo fundamental G . Supongamos que B está modelada en \mathbb{E}^2 . Entonces, M está modelada en \mathbb{E}^3 o está modelada en Nil. Además,*

a) *Si M está modelada en \mathbb{E}^3 , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 5$.*

b) *Si M está modelada en Nil, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 3$.*

Teorema 5.3.4. *Sea M una 3-variedad compacta de Seifert fibrado, con base orbidad B y grupo fundamental G . Supongamos que B está modelada en \mathbb{E}^2 y M tiene frontera no vacía. Entonces, M es difeomorfa a $T^2 \times I$ o al I -haz torcido sobre la botella de Klein. En particular, $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = 0$ para todo $k \geq 2$.*

Antes de demostrar los teoremas anteriores necesitamos algunos resultados previos.

Clasificación de elementos de $GL_2(\mathbb{Z})$

Teorema 5.3.5. *Una matriz $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:*

a) *Tiene orden finito. En este caso decimos que A es una matriz elíptica.*

b) *Es conjugada a una matriz triangular de la forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

para algún $s \neq 0$. En este caso decimos que A es parabólica.

c) *No es elíptica y no deja fijo ningún subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 . En este caso decimos que A es hiperbólica.*

Más aún, $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ es elíptica (resp. parabólica, hiperbólica) si y sólo si A^r es elíptica (resp. parabólica, hiperbólica) para todo $r \geq 1$.

Teorema 5.3.6. *Sea M una 3-variedad con grupo fundamental isomorfo a $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ donde $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL_2(\mathbb{Z})$. Entonces:*

- a) Si $\varphi(1) = A$ es elíptica, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 5$.
- b) Si $\varphi(1) = A$ es parabólica, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 3$.
- c) Si $\varphi(1) = A$ es hiperbólica, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 2$.

Para demostrar el Teorema 5.3.6 necesitaremos los siguientes lemas que enunciamos y demostramos a continuación.

Lema 5.3.7. *Sea $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ con $\varphi(1) = A$ un elemento parabólico en $GL_2(\mathbb{Z})$. Entonces*

- a) *La matriz A fija un subgrupo cíclico infinito de \mathbb{Z}^2 . Además el subgrupo cíclico infinito maximal fijado por A es normal en G y G/N es igual a \mathbb{Z}^2 o a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.*
- b) *Consideremos el homomorfismo $\pi: G \rightarrow G/N$. La familia jalada $\tilde{\mathcal{F}}'_1$ de la familia \mathcal{F}'_1 es igual a la familia \mathcal{F}_2*

Demostración. Demostremos el inciso a). Por Teorema 5.3.5 la matriz $\varphi(1) = A$ es conjugada a una matriz de la forma 5.5, luego podemos elegir una base \mathcal{B} de \mathbb{Z}^2 tal que la transformación asociada a A en esta base \mathcal{B} se vea de la forma 5.5. Así podemos suponer que A es de la forma 5.5 y fija un subgrupo cíclico infinito. Sea N el subgrupo cíclico infinito maximal de \mathbb{Z}^2 fijado por A . Notemos que N es un subgrupo del centro de G . En efecto, sea $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)$ en $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w\right) &= \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} A^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} a+x \\ y \end{pmatrix}, w\right). \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w\right)\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A^w \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, w\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix}, w\right). \end{aligned}$$

Se sigue que N es normal en G . Observemos que $G/N = (\mathbb{Z}^2/N) \rtimes \mathbb{Z}$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 o a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Ahora demostremos el inciso b). Primero mostremos \mathcal{F}'_1 es esta contenido en \mathcal{F}_2 . Recordemos que la familia $\tilde{\mathcal{F}}'_1$ esta generada por $\{\pi^{-1}(L) : L \in \mathcal{F}'_1\}$, luego basta ver que la contención es cierta para el conjunto generador. Sea $S \in \mathcal{F}'_1$ entonces tenemos dos opciones S es finito o S es virtualmente \mathbb{Z} . Supongamos primero que S es finito, el grupo trivial 1 es de índice finito en S , en consecuencia N es de índice finito en $\pi^{-1}(S)$,

así $\pi^{-1}(S)$ es virtualmente \mathbb{Z} . Ahora supongamos que S es virtualmente \mathbb{Z} , i.e, existe un subgrupo $L < S$ tal que L es isomorfo a \mathbb{Z} y de índice finito. Tenemos una sucesión exacta

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi^{-1}(L) \rightarrow L \rightarrow 1 \quad (5.6)$$

esta sucesión exacta es equivalente a la siguiente sucesión exacta que se escinde

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi^{-1}(L) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1 \quad (5.7)$$

así $\pi^{-1}(L)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 o a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, en cualquier caso $\pi^{-1}(L)$ es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Puesto que $\pi^{-1}(L)$ es de índice finito en $\pi^{-1}(S)$, concluimos que $\pi^{-1}(S)$ es virtualmente \mathbb{Z}^2 .

Ahora mostremos que \mathcal{F}_2 esta contenido en $\tilde{\mathcal{F}}'_1$. Sea $L \in \mathcal{F}_2$, tenemos tres opciones L es finito, L es virtualmente \mathbb{Z} o L es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Si L es finito entonces $\pi(L)$ es finito, pero L/N es libre de torsión se sigue que $\pi(L)$ es trivial. Así $L < \pi(S)$ para todo $S \in \mathcal{F}'_1$. Ahora supongamos que L es virtualmente \mathbb{Z} , i.e, existe un subgrupo K de L isomorfo a \mathbb{Z} y de índice finito. Observemos que $\pi(K)$ es abeliano, y como L/N es libre de torsión tenemos que $\pi(K)$ es trivial o cíclico infinito. Se sigue que $\pi(L)$ es virtualmente \mathbb{Z} o trivial, en cualquier caso $\pi(L) \in \mathcal{F}'_1$. Concluimos que $\pi^{-1}(\pi(L)) \in \tilde{\mathcal{F}}'_1$ y contiene a L . Por último supongamos que L es virtualmente \mathbb{Z}^2 , es decir, existe un subgrupo $T < L$ tal que T es isomorfo a \mathbb{Z}^2 y de índice finito. Notemos que $T \cap \ker(\pi) \neq 1$ de lo contrario G tendría un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^3 , en efecto, recordemos que el subgrupo cíclico infinito $N = \ker \pi$ esta en el centro de G , luego un generador h de N conmuta con los generadores de T digamos α y β , así el subgrupo generado por h, α, β es isomorfo a \mathbb{Z}^3 . En consecuencia $\text{gd}_{\mathcal{F}_1} G \geq 4$, pero en [35, Proposition 5.4.] muestran que $\text{gd}_{\mathcal{F}_1} G = 3$ por lo que encontramos una contradicción. Observemos que el subgrupo $\pi(T)$ de G/N es abeliano, usando el hecho que L/N es libre de torsión y $T \cap \ker(\pi) \neq 1$ tenemos que $\pi(T)$ es un subgrupo cíclico infinito. Ahora, el subgrupo $\pi(T)$ es de índice finito en $\pi(L)$, así $\pi(L)$ es virtualmente \mathbb{Z} , luego $\pi(L) \in \mathcal{F}'_1$. Concluimos que L es un subgrupo de $\pi^{-1}(\pi(L)) \in \tilde{\mathcal{F}}'_1$ y en consecuencia $L \in \tilde{\mathcal{F}}'_1$. \square

Lema 5.3.8. *Sea $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ con $\varphi(1) = A$ un elemento hiperbólico en $GL_2(\mathbb{Z})$. Sea H el subgrupo $\mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\}$ de G . Entonces*

- a) *Todos los subgrupos de G isomorfos a \mathbb{Z}^2 son subgrupos de H . En particular, la familia \mathcal{F}_2 de G es la siguiente unión $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$ donde $\text{SUB}(H)$ es la familia de todos los subgrupos de H .*
- b) *Sea C un subgrupo cíclico infinito de G , entonces*

$$N_G(C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } C \not\leq H \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } C \leq H \end{cases}$$

Demostración. Demostremos el inciso a). Procedemos por contradicción, supongamos que existe L un subgrupo de G isomorfo a \mathbb{Z}^2 que no es subgrupo de H . De la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 1 \quad (5.8)$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow L \cap \mathbb{Z}^2 \rightarrow L \rightarrow \psi(L) \rightarrow 1 \quad (5.9)$$

Puesto que L no es subgrupo de $H = \ker \psi$, tenemos que $\psi(L)$ es no trivial, así $\psi(L) = \langle r\mathbb{Z} \rangle$ con $r \neq 0$. Como L es isomorfo a \mathbb{Z}^2 tenemos que $L \cap \mathbb{Z}^2$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Por lo anterior y de 5.9 tenemos que $L = \mathbb{Z} \times \langle r\mathbb{Z} \rangle$, en consecuencia A^r ($\varphi(1) = A$) fija un subgrupo cíclico infinito de \mathbb{Z}^2 , así A^r no es hiperbólico lo cual es una contradicción al Teorema 5.3.5.

Ahora demostremos la igualdad $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$. Por inspección $\mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H) \subset \mathcal{F}_2$. Entonces sólo resta probar que $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$. Sea $L \in \mathcal{F}_2$ entonces tenemos dos casos L es virtualmente cíclico o L es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Supongamos primero que L es virtualmente cíclico, así $L \in \mathcal{F}_1$ y en particular $L \in \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$. Por último supongamos que L es virtualmente \mathbb{Z}^2 . De la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 1 \quad (5.10)$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow L \cap \mathbb{Z}^2 \rightarrow L \rightarrow \psi(L) \rightarrow 1 \quad (5.11)$$

como L es virtualmente \mathbb{Z}^2 y H contiene todos los subgrupos de G isomorfos a \mathbb{Z}^2 tenemos que $L \cap \mathbb{Z}^2$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Así la sucesión anterior la podemos escribir como

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow L \rightarrow \psi(L) \rightarrow 1 \quad (5.12)$$

Vamos a mostrar que $\psi(L) = 0$. Por contradicción, supongamos que $\psi(L) \neq 0$, entonces $\psi(L) = \langle m\mathbb{Z} \rangle$ con $m \neq 0$. De la sucesión exacta 5.12 tenemos que $L = \mathbb{Z}^2 \rtimes \langle m\mathbb{Z} \rangle$, lo cual es una contradicción porque L es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Por lo tanto $\psi(L) = 0$. Así L es isomorfo a \mathbb{Z}^2 , luego $L \in \text{SUB}(H)$ en particular $L \in \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$ que es lo que queríamos mostrar.

Demostremos el inciso b). Primero supongamos que $C \not\leq H$, entonces los elementos de C son de la forma $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l)$. Sea $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w) \in N_G(C)$, luego

$$\begin{aligned} (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)(0, l)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)^{-1} &= (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l)(A^{-l} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, -w) \\ &= (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A^l(A^{-l} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}), l - w) \\ &= (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w)(A^0 \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, l - w) \\ &= (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A^w \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, l) \end{aligned}$$

Se sigue que $A^w \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, por hipótesis A es hiperbólico, luego por el Teorema 5.3.5

A^w es hiperbólico, así $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De lo anterior concluimos que $N_G(C) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora supongamos que $C \leq H$. De la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 1 \quad (5.13)$$

tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow N_G(C) \cap \mathbb{Z}^2 \rightarrow N_G(C) \rightarrow \psi(N_G(C)) \rightarrow 1 \quad (5.14)$$

por hipótesis $C \leq H$, entonces $N_G(C)$ contiene H , luego la sucesión anterior es equivalente a la siguiente sucesión

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow N_G(C) \rightarrow \psi(N_G(C)) \rightarrow 1 \quad (5.15)$$

Vamos a mostrar que $\psi(N_G(C)) = 0$, para ello basta mostrar que $N_G(C)$ no contiene elementos de la forma $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l)$, en efecto, supongamos que $c = \langle (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0) \rangle$, luego

$$\begin{aligned} (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l) (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0) (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l)^{-1} &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l) (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0) (A^{-l} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -l) \\ &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l) (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -l) \\ &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l) (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, -l) \\ &= (A^l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0) \end{aligned}$$

Así $A^l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, pero esto no puede pasar porque A^l es hiperbólico. Así $\psi(N_G(C)) = 0$. Concluimos de la sucesión 5.15 que $N_G(C) \cong \mathbb{Z}^2$. \square

Demostración del Teorema 5.3.6. Para el inciso a) notemos que G es virtualmente \mathbb{Z}^3 . En efecto, por hipótesis A es elíptica, luego tiene orden finito. Sea n el orden de A , entonces el subgrupo $\langle n\mathbb{Z} \rangle$ de \mathbb{Z} actúa de manera trivial en \mathbb{Z}^2 , luego $\mathbb{Z}^2 \times \langle n\mathbb{Z} \rangle$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ isomorfo a \mathbb{Z}^3 de índice finito. Ahora la afirmación se sigue de Teorema 3.0.2.

Ahora demostremos el inciso b). Primero mostremos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 3$. Para ello vamos a mostrar un modelo de $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 3. Por el Lema 5.3.7 inciso a) $\varphi(1) = A$ fija un subgrupo cíclico infinito maximal y $G/N = (\mathbb{Z}^2/N) \rtimes \mathbb{Z}$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 o a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en ambos casos G/N es 2-cristalográfico, luego por el [16] existe un modelo Y 3-dimensional para $E_{\mathcal{F}'_1}(G/N)$ donde \mathcal{F}'_1 es la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de G/N . Por el Lema 5.3.7 inciso b) la familia jalada $\tilde{\mathcal{F}}'_1$ de la familia \mathcal{F}'_1 es igual a la familia \mathcal{F}_2 , entonces Y también es un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$ mediante la acción inducida por el morfismo $\pi: G \rightarrow G/N$.

Por último vamos a demostrar la otra desigualdad $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 3$, para ello vamos a mostrar que $H_{\mathcal{F}_2}^3(G, \mathbb{Z}) \neq 0$, en efecto, sea Y el modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$ que construimos anteriormente, entonces

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{F}_2}^3(G, \mathbb{Z}) &= H^3(Y/G, \mathbb{Z}) \\ &= H^3(Y/(G/N), \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

En [16, p.8 proof Theorem 1.1] demuestran que este último grupo es no cero.

Demostremos el inciso c). Primero vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 2$, para ello construiremos un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 2. Sea H el subgrupo $\mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\} < G$. Por el Lema 5.3.8 inciso a) la familia \mathcal{F}_2 de G es la unión $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \text{SUB}(H)$ donde $\text{SUB}(H)$ es la familia de todo los subgrupos de H . Así por Proposición 1.4.10 el siguiente G -coproducto amalgamado da un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{F}_1(H)}G & \xrightarrow{f} & E_{\mathcal{F}_1}G \\ \downarrow g & & \downarrow \\ E_{\text{SUB}(H)}G & \longrightarrow & X \end{array} \quad (5.16)$$

donde $\mathcal{F}_1(H) = \text{SUB}(H) \cap \mathcal{F}_1$. Aquí las funciones g, f son G -funciones dadas por las inclusiones $\mathcal{F}_1(H) \subseteq \mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_1(H) \subseteq \text{SUB}(H)$. Afirmamos que bajo ciertas elecciones X es de dimensión 2. Primero vamos a dar una idea de la construcción. Primero, observemos que H es un subgrupo normal de G , $E(G/N) = E\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ es un modelo para $E_{\text{SUB}(H)}G$, véase por ejemplo la demostración del Corolario 2.10 en [51]. A continuación, mostraremos que existe un modelo tridimensional Y para $E_{\mathcal{F}_1}G$ tal que:

- (1) Y es la unión de dos G -subcomplejos Y_1 y Y_2 .
- (2) Toda 3-célula en Y pertenece a Y_2 .
- (3) Y_2 es modelo para $E_{\mathcal{F}_1(H)}G$.
- (4) La función f es la inclusión $Y_2 \rightarrow Y$.

Dado que f es una inclusión, entonces el G -coproducto amalgamado homotópico (5.16) puede ser reemplazado por G -coproducto amalgamado, véase por ejemplo [71, Teorema 1.1]. Es decir, tomamos $X = Y \cup_g \mathbb{R} = Y \sqcup \mathbb{R} / \sim$, donde identificamos $x \sim g(x)$ para todo $x \in Y_2$. Por (1)-(4), podemos ver que cada 3-célula de Y está siendo colapsada a un espacio de dimensión 1 mediante g , por lo que obtenemos que X es un complejo de dimensión menor o igual a 2. De la construcción explícita concluimos de hecho que X es de dimensión 2.

Construyamos Y, Y_1 y Y_2 . Dado que G es un grupo poli- \mathbb{Z} sin torsión, por [51, Lema 5.15 y Teorema 2.3] obtenemos un modelo Y para $E_{\mathcal{F}_1}G$ mediante el siguiente G -coproducto amalgamado

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (5.17)$$

donde \mathcal{I} es un conjunto de representantes de clases de conmensuración en $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0$. Para construir el mencionado G -coproducto amalgamado utilizamos una construcción análoga a la descrita en Observación 1.4.20, es decir, reemplazamos EG con el mapping cylinder de la función horizontal superior.

Por Lema 5.3.8 parte b), el conjunto \mathcal{I} es la unión disjunta de $\mathcal{I}_1 = \{C \in \mathcal{I} | N_G(C) \cong \mathbb{Z}\} = \{C \in \mathcal{I} | C \not\leq \mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\}\}$ y $\mathcal{I}_2 = \{C \in \mathcal{I} | N_G(C) \cong \mathbb{Z}^2\} = \{C \in \mathcal{I} | C \leq \mathbb{Z}^2 \rtimes \{0\}\}$. Por lo tanto, el G -coproducto amalgamado (5.17) se puede escribir como

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_1} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_2} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) \right) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_1} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_2} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) \right) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (5.18)$$

Definimos Y_1 y Y_2 vía los siguientes G -coproductos amalgamados

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_1} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_1} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_2} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{C \in \mathcal{I}_2} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$$

Claramente $Y = Y_1 \cup Y_2$, y $Y_1 \cap Y_2 = EG$. Puesto que $\mathcal{F}_1(H)$ es la familia de todos los subgrupos virtualmente cíclicos de H y \mathcal{I}_2 es el conjunto de representantes de las clases de conmensuración de subgrupos cíclicos infinitos en H , podemos usar [51, Lema 5.15 y Teorema 2.3] para demostrar que Y_2 es un modelo para $E_{\mathcal{F}_1(H)}G$.

Observamos lo siguiente:

- i) Si $C \in \mathcal{I}_1$ entonces un modelo para $EN_G(C) \cong E\mathbb{Z}$ es \mathbb{R} . Por lo tanto, el cilindro asociado a $EN_G(C) \cong E\mathbb{Z}$ contribuye a $E_{\mathcal{F}_1}G$ con un subespacio de dimensión 2.
- ii) Si $C \in \mathcal{I}_2$ entonces un modelo para $EN_G(C) \cong E\mathbb{Z}^2$ es \mathbb{R}^2 . Así, el cilindro asociado a $EN_G(C)$ contribuye a $E_{\mathcal{F}_1}G$ con un subespacio de dimensión 3.
- iii) Por [51, Teorema 5.13], EG tiene un modelo de dimensión 3.

Como consecuencia de las observaciones anteriores, concluimos que toda 3-célula de Y pertenece a Y_2 . Esto concluye la construcción de un modelo bidimensional para $E_{\mathcal{F}_2}\Gamma$.

Ahora vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 0, 1$. En [26, Proposition 3.19. y Proposition 3.20, p. 49] se demuestra que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 0$ si y sólo si $G \in \mathcal{F}_2$, pero como G no es virtualmente \mathbb{Z}^2 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 0$.

Ahora veamos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \neq 1$. Procedemos por contradicción, supongamos que existe un modelo X para $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 1. Notemos que X es un árbol y que cada elemento $G \in G$ tiene un punto fijo pues $X^{(G)} \neq \emptyset$. Por Teorema 2.1.16 $X^G \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción porque G no es un elemento de \mathcal{F}_2 . \square

Teorema 5.3.9. *Sea M una 3-variedad de Seifert fibrado cerrada (sin frontera) con orbidad base B y grupo fundamental G . Supongamos que B es modelada en \mathbb{E}^2 . Entonces M está modelada en \mathbb{E}^3 o está modelada en Nil. Además,*

a) *Si M es modelada en \mathbb{E}^3 , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 5$.*

b) *Si M es modelada en Nil, entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 3$.*

Demostración. Por [63, Theorem 5.3] M es modelada en \mathbb{E}^3 o en Nil. Si estamos en el inciso a), tenemos que G es 3-cristalográfico, así G es virtualmente \mathbb{Z}^3 . Ahora la afirmación se sigue de Teorema 3.0.2.

Para el inciso b), tenemos por [1, Section 12] que G es virtualmente $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ con $\varphi(1) = A$ una matriz parabólica, entonces por Teorema 5.3.6 inciso b) tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 3$. Sólo resta mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 3$. Por [63, p. 467] tenemos una sucesión exacta corta central

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \xrightarrow{p} B \rightarrow 1 \quad (5.19)$$

donde B es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Sea \mathcal{G} la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de B , consideremos la familia pull-back $p^*(\mathcal{G})$, es decir, $p^*(\mathcal{G})$ es la familia generada por $\{p^{-1}(L) \mid L \in \mathcal{G}\}$. Notemos que $\mathcal{F}_2 \subseteq p^*(\mathcal{G})$ esto viene del hecho de que todo subgrupo \mathbb{Z}^2 de G intersecta no trivialmente a $\ker(p)$. Aplicando Proposición 1.4.12 a las familias $\mathcal{F}_2 \subseteq p^*(\mathcal{G})$ obtenemos que

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq \text{gd}_{p^*(G)}(G) + \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(p^{-1}(L)) \mid L \in \mathcal{G}\}. \quad (5.20)$$

Notemos que un modelo para $E_{\mathcal{G}}B$ es un modelo para $E_{p^*(G)}G$ vía la proyección p , como una consecuencia obtenemos que $\text{gd}_{p^*(G)}(G) \leq \text{gd}_{\mathcal{G}}(B) = 3$. Por Ecuación (5.20) resta mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(p^{-1}(L)) = 0$ para todo $L \in \mathcal{G}$.

Sea $L \in \mathcal{G}$, entonces $p^{-1}(L)$ es o bien virtualmente cíclico o virtualmente \mathbb{Z}^2 , en cualquier caso tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(p^{-1}(L)) = 0$. Por lo tanto $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 3$. \square

Teorema 5.3.10. *Sea M una 3-variedad de Seifert de volumen finito, con frontera no vacía, con orbidad base B y grupo fundamental G . Supongamos que B es modelada en \mathbb{E}^2 . Entonces M es difeomorfo a $T^2 \times I$ o al I -haz torcido sobre la botella de Klein. Más aún, $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 0$.*

Demostración. Por [57, Theorem 1.2.2] M esta modelada en \mathbb{E}^3 , Nil o bien M es difeomorfo a $T^2 \times I$ o al I -haz torcido sobre la botella de Klein.

La 3-variedad M no puede ser modelada en \mathbb{E}^3 y Nil. Esto es así porque en [57, p. 60, párrafo 2 y último párrafo] se muestra que una 3-variedad de volumen finito modelada en \mathbb{E}^3 o Nil debe ser compacta, por lo tanto $\text{Int}(M)$ no puede ser modelada en \mathbb{E}^3 o Nil porque es una 3-variedad abierta.

De lo anterior concluimos que M es difeomorfo a $T^2 \times I$ o al I -haz torcido sobre la botella de Klein.

Los grupos fundamentales de $T^2 \times I$ y del I -haz torcido sobre la botella de Klein son isomorfos a \mathbb{Z}^2 y $\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ respectivamente. En los dos casos la familia \mathcal{F}_2 de G contiene G , por lo tanto $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 0$. \square

5.4. El caso Sol

En esta sección calculamos la \mathcal{F}_2 -dimensión geométrica de las 3-variedades modeladas en Sol. Este cálculo es relevante en el enunciado y demostración de Teorema 5.6.5.

Proposición 5.4.1. *Sea M una 3-variedad cerrada y conexa modelada en Sol con grupo fundamental G . Entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 2$.*

Para demostrar Proposición 5.4.1, necesitamos el siguiente lema. Sea \mathcal{K} el grupo fundamental de la botella de Klein.

Lema 5.4.2. *Sean K_1 y K_2 copias de \mathcal{K} , y sea A el subgrupo \mathbb{Z}^2 de índice dos de \mathcal{K} . Suponga que $\varphi: A \rightarrow A$ es un isomorfismo hiperbólico. Considere $G = K_1 *_A K_2$ el producto amalgamado asociado a φ . Entonces*

- a) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}(K_1, K_2)$, donde $\mathcal{F}(K_1, K_2)$ es la familia más pequeña de G que contiene K_1 y K_2 .
- b) Sea C un subgrupo cíclico infinito de G entonces

$$N_G(C) \cong \begin{cases} \text{es virtualmente } \mathbb{Z}^2 & \text{si } |C \cap A| = \infty \\ \text{es virtualmente } \mathbb{Z} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. a) Demostremos la inclusión $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}(K_1, K_2)$. Sea $S \in \mathcal{F}_2$ entonces S es virtualmente cíclico o virtualmente \mathbb{Z}^2 . Si S es virtualmente cíclico, por definición $S \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}(K_1, K_2)$. Ahora, supongamos que S es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \xrightarrow{\psi} D_{\infty} \rightarrow 1$$

Sea L el subgrupo isomorfo a \mathbb{Z} de D_{∞} de índice 2. Entonces el subgrupo $G' = \psi^{-1}(L) \cong A \rtimes_{\varphi} L \leq G$ también es de índice 2. Se deduce que $G' \cap S$ tiene índice finito en S . Dado que $S \leq G$ es virtualmente \mathbb{Z}^2 , entonces $G' \cap S \leq G'$ también es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Por Lema 5.3.8, $G' \cap S \leq A$. Por lo tanto, en la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow A \cap S \rightarrow S \rightarrow \psi(S) \rightarrow 1$$

tenemos que $\psi(S)$ es finito. Si pensamos en D_{∞} como el producto libre de dos grupos cíclicos de orden dos, podemos ver fácilmente que todo subgrupo finito de D_{∞} es trivial o

un conjugado de uno de los factores libres. Se deduce que S es subconjugado a K_1 o K_2 . La otra inclusión $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}(K_1, K_2) \subseteq \mathcal{F}_2$ es clara.

b) Primero supongamos que $|C \cap A| = \infty$. Si C y C' son subgrupos cíclicos conmensurables de G , entonces $N_G(C) = N_G(C')$, ver [51, Lemma 5.15], por lo que podemos suponer que $C \leq A$. Entonces, por Lema 5.3.8, $N_G(C) \cap G'$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Ahora, G' es de índice 2 en G , entonces $[N_G(C) : N_G(C) \cap G'] \leq 2$. Se deduce que $N_G(C)$ es virtualmente \mathbb{Z}^2 . Ahora supongamos que $|C \cap A| < \infty$, entonces $C \cap A$ es trivial porque A no tiene torsión. Por Lema 5.3.8, tenemos que $N_G(C) \cap G'$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Ahora, G' es de índice 2 en G , entonces $[N_G(C) : N_G(C) \cap G'] \leq 2$. Se deduce que $N_G(C)$ es virtualmente \mathbb{Z} .

□

Proof of Proposición 5.4.1. En [5, Teorema 1.8.2, p.17] demuestran que si M está modelado en Sol, entonces o bien M es el mapping torus de (T^2, A) con A Anosov, o M es un doble de $K \tilde{\times} I$, el I -haz torcido sobre la botella de Klein. En el primer caso, tenemos que $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$ con $\psi(1) = A$ hiperbólico. Por Teorema 5.3.6 parte c), $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 2$.

Supongamos ahora que M es un doble de $K \tilde{\times} I$. En este caso, por el teorema de Seifert-Van Kampen, $G = K_1 *_{\mathbb{Z}^2} K_2$ donde K_1 y K_2 son copias del grupo fundamental de la botella de Klein \mathcal{K} , y \mathbb{Z}^2 está encajado en K_i como un subgrupo de índice 2. Sea H el subgrupo \mathbb{Z}^2 de índice dos de \mathcal{K} . En la demostración de Lema 5.4.2 demostramos que G contiene un subgrupo de índice 2 isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ con $\varphi: H \rightarrow H$ un isomorfismo hiperbólico. Se sigue, de nuestro caso previo, que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq \text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}) = 2$. Resta por demostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 2$, para esto construimos un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$ de dimensión 2. La construcción de dicho modelo sigue la misma estrategia que en la demostración de Teorema 5.3.6 c). Incluimos los detalles por completitud.

Por Lema 5.4.2, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}(K_1, K_2)$, donde $\mathcal{F}(K_1, K_2)$ es la familia más pequeña de G que contiene K_1 y K_2 . Entonces, por [19, Lemma 4.4] el siguiente G -coproducto amalgamado homotópico proporciona un modelo para $E_{\mathcal{F}_2}G$

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{F}_1(K_1, K_2)}G & \xrightarrow{f} & E_{\mathcal{F}_1}G \\ \downarrow g & & \downarrow \\ E_{\mathcal{F}(K_1, K_2)}G & \longrightarrow & X \end{array} \quad (5.21)$$

donde $\mathcal{F}_1(K_1, K_2) = \mathcal{F}(K_1, K_2) \cap \mathcal{F}_1$. Afirmamos que, con las elecciones adecuadas, X es 2-dimensional. Primero daremos la idea de la construcción. Notemos que H es un subgrupo normal de G , y $G/H \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ la familia más pequeña de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ que contiene ambos factores \mathbb{Z}_2 , y notemos que $\mathcal{F}(K_1, K_2)$ coincide con la familia más pequeña de G que contiene todas las preimágenes de elementos en $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ bajo la proyección $G \rightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Recordemos que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ actúa en \mathbb{R} por isometrías simpliciales, de hecho, el primer factor actúa como una reflexión a través de 0, y el segundo factor como una reflexión a través de $1/2$, y con esta acción $E_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = \mathbb{R}$. Ahora es fácil verificar que $E_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}(G/H) = E_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = \mathbb{R}$ es un modelo para $E_{\mathcal{F}(K_1, K_2)}G$.

A continuación, demostraremos que existe un modelo tridimensional Y para $E_{\mathcal{F}_1}G$ tal que

- (1) Y es la unión de dos G -subcomplejos: Y_1 y Y_2 .

- (2) cada 3-célula en Y pertenece a Y_2 .
- (3) Y_2 es un modelo para $E_{\mathcal{F}_1(K_1, K_2)}G$.
- (4) La función f es la inclusión $Y_2 \rightarrow Y$.

Dado que f es una inclusión, entonces el G -coproducto amalgamado homotópico (5.21) puede ser reemplazado por un G -coproducto amalgamado honesto, ver por ejemplo [71, Teorema 1.1]. Es decir, tomamos $X = Y \cup_g \mathbb{R} = Y \sqcup \mathbb{R} / \sim$, donde identificamos $x \sim g(x)$ para todo $x \in Y_2$. Por (1)-(4), podemos ver que cada 3-célula de Y se colapsa en un espacio de dimensión 1 a través de g , por lo tanto, obtenemos que X es un complejo de dimensión menor o igual a 2. Por la construcción explícita concluimos que X es de dimensión 2. Construyamos Y , Y_1 y Y_2 . Dado que G es un grupo libre de torsión-libre y virtualmente poli- \mathbb{Z} (contiene un subgrupo de índice dos isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$), por [51, Lemma 5.15 y Teorema 2.3] obtenemos un modelo Y para $E_{\mathcal{F}_1}G$ a través del siguiente G -coproducto amalgamado

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{C \in I} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{C \in I} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (5.22)$$

donde I es un conjunto de representantes de clases de conmensuración en $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0$. Para construir el G -coproducto amalgamado mencionado, usamos una construcción análoga a la descrita en Observación 1.4.20, es decir, reemplazamos EG con el cilindro de mapeo de la flecha horizontal superior.

Dado que I es un conjunto de representantes de clases de conmensuración, podemos asumir que cada $C \in I$ es un subgrupo del subgrupo de índice dos $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$ de G . Ahora por Lemma 5.4.2 b) tenemos que I es la unión disjunta de $I_1 = \{C \in I \mid N_G(C) \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}\} = \{C \in I \mid C \not\leq H\}$ y $I_2 = \{C \in I \mid N_G(C) \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}^2\} = \{C \in I \mid C \leq H\}$. Entonces el G -coproducto amalgamado (5.22) se puede escribir como

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigsqcup_{C \in I_1} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{C \in I_2} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) \right) & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\bigsqcup_{C \in I_1} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{C \in I_2} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) \right) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (5.23)$$

Definamos Y_1 y Y_2 a través de los siguientes G -coproductos amalgamados

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{C \in I_1} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{C \in I_1} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{C \in I_2} G \times_{N_G(C)} EN_G(C) & \longrightarrow & EG \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{C \in I_2} G \times_{N_G(C)} EW_G(C) & \longrightarrow & Y_2
 \end{array}$$

Usamos la construcción de cilindro descrita en Observación 1.4.20 para construir todos los coproductos amalgamados anteriores. Claramente $Y = Y_1 \cup Y_2$, y $Y_1 \cap Y_2 = EG$. Dado que $\mathcal{F}_1(K_1, K_2)$ es la familia más pequeña de G que contiene los subgrupos cíclicos virtuales de K_1 y K_2 , una aplicación directa de [51, Lemma 5.15 y Teorema 2.3] lleva al hecho de que Y_2 es un modelo para $E_{\mathcal{F}_1(K_1, K_2)}G$.

Observamos lo siguiente:

- i) Si $C \in I_1$, entonces $N_G(C)$ es virtualmente \mathbb{Z} , y por tanto por [51, Teorema 5.13] $EN_G(C)$ tiene un modelo 1-dimensional. Por lo tanto, el cilindro asociado a $EN_G(C)$ contribuye a $E_{\mathcal{F}_1}G$ con un subespacio de dimensión 2.
- ii) Si $C \in I_2$, entonces $N_G(C)$ es un grupo virtualmente \mathbb{Z}^2 libre de torsión, por lo tanto por [51, Teorema 5.13] $EN_G(C)$ tiene un modelo 2-dimensional. Por lo tanto, el cilindro asociado a $EN_G(C)$ contribuye a $E_{\mathcal{F}_1}G$ con un subespacio de dimensión 3.
- iii) Por [51, Teorema 5.13] EG tiene un modelo de dimensión 3.

Como consecuencia de las observaciones anteriores, concluimos que cada 3-célula de Y pertenece a Y_2 . Esto concluye la construcción de un modelo 2-dimensional para $E_{\mathcal{F}_2}G$. \square

5.5. Resumen de los cálculos de la \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de las piezas JSJ

En la siguiente tabla resumimos los cálculos de la dimensión geométrica de las piezas que nos quedan al aplicarle la descomposición JSJ a una 3-variedad prima P .

Tipo de pieza N	Analizado en	$\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\pi_1(N, x_0))$
Pieza hiperbólica con frontera vacía	Teorema 5.2.1	3
Pieza hiperbólica con frontera no vacía	Teorema 5.2.1	3
Pieza Seifert fibrado con orbidad base B mala o modelada en S^2	Teorema 5.3.1	0
Pieza Seifert fibrado cerrada con orbidad base B modelada en \mathbb{H}^2 con o sin frontera	Teorema 5.3.2	2
Pieza Seifert fibrado cerrada con orbidad base B modelada en \mathbb{E}^2 , y pieza modelada en \mathbb{E}^3	Teorema 5.3.9	5
Pieza Seifert fibrado cerrada con orbidad base B modelada en \mathbb{E}^2 , y pieza modelada en Nil	Teorema 5.3.9	3
Pieza Seifert fibrado de volumen finito, con frontera no vacía, con orbidad base B modelada en \mathbb{E}^2	Teorema 5.3.10	0

Tabla 5.2: Resumen de los cálculos de la dimensión \mathcal{F}_2 de las piezas JSJ.

5.6. Demostración de los teoremas principales

Antes de demostrar los teoremas principales necesitamos algunos resultados.

Proposición 5.6.1. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad M que es o bien hiperbólica, Seifert fibrada posiblemente con frontera no vacía, o modelada en Sol. Entonces*

- (a) *Si M no está modelada en \mathbb{E}^3 , entonces $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_k$ para todo $k \geq 3$. En particular, $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$ para todo $k \geq 3$.*
- (b) *Si M está modelada en \mathbb{E}^3 , entonces $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_k$ para todo $k \geq 4$. Además, $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = 0$ para todo $k \geq 3$.*

Demostración. Por [46, Proposición A], $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(\mathbb{Z}^3) = 5$. Como consecuencia, si G contiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^3 , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 5$. Por la segunda columna de Cuadro 5.2 y Proposición 5.4.1 concluimos que G no contiene un subgrupo \mathbb{Z}^3 a menos que M esté modelada en \mathbb{E}^3 . Esto demuestra el primer inciso. El segundo inciso se sigue al notar que si M está modelada en \mathbb{E}^3 , entonces G es virtualmente \mathbb{Z}^3 . \square

Teorema 5.6.2. [35, Proposición 8.2] *Sea M una 3-variedad prima, cerrada, orientada y conexa que no es geométrica. Sea Y la gráfica de grupos asociado a su descomposición JSJ mínima. Sea $G = \pi_1(Y)$ y T el árbol de Bass-Serre asociado. Entonces la acción de $G = \pi_1(Y)$ en T es acilíndrica.*

Corolario 5.6.3. *Sea G el grupo fundamental de una 3-variedad M . Sea H un subgrupo \mathbb{Z}^n de G , entonces $n \leq 3$. Además, G contiene un subgrupo \mathbb{Z}^3 si y sólo si una de las piezas primas de M está modelada en \mathbb{E}^3 .*

Demostración. Sea $n \geq 2$. Sea $G = G_1 * \cdots * G_r$ la descomposición de G asociada a la descomposición prima de M , y sea $H \leq G$ un subgrupo \mathbb{Z}^n de G . Entonces por el teorema del subgrupo de Kurosh, sin pérdida de generalidad, H es un subgrupo de G_1 . A continuación, miramos el gráfica de grupos Y dado por la descomposición JSJ de G_1 , en particular, los grupos de vértices de Y son los grupos fundamentales de las piezas JSJ de G_1 y los grupos aristas son isomorfos a los grupos fundamentales de los toros en la descomposición JSJ. Entonces por Teorema 5.6.2 la acción $G_1 = \pi_1(Y)$ en su árbol de Bass-Serre es acilíndrica, y por Lema 2.3.7, H fija un vértice del árbol de Bass-Serre de Y , por lo que H está conjugado a un subgrupo del grupo fundamental de una pieza JSJ N de G_1 . Por Proposición 5.6.1 concluimos que $n \leq 3$. Más aún, si asumimos que $n = 3$, por Proposición 5.6.1 tal pieza debe estar modelada en \mathbb{E}^3 . Por otro lado, cada variedad modelada en \mathbb{E}^3 tiene frontera vacía, así que N es una pieza prima de G . Finalmente, si M tiene una pieza prima modelada en \mathbb{E}^3 es claro que G contiene un subgrupo \mathbb{Z}^3 . \square

5.6.1. La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de una 3-variedad prima

Proposición 5.6.4. *Sea M una 3-variedad prima que es no geométrica, conexa, cerrada y orientada. Sean N_1, N_2, \dots, N_r con $r \geq 1$, las piezas de la descomposición JSJ de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(N_i, x_i)$. Si $k \geq 2$, entonces*

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\}.$$

Demostración. Sea Y la gráfica de grupos asociada a la descomposición JSJ de M con árbol de Bass-Serre T . Por [35, Proposition 8.2] la acción de $\pi_1(Y) = \pi_1(M, x_0) = G$ en T es acilíndrica. Entonces por Teorema 2.4.3 tenemos las siguientes desigualdades

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap \mathbb{Z}^2}(\mathbb{Z}^2) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap \mathbb{Z}^2}(\mathbb{Z}^2) + 1 \mid 1 \leq i \leq r\}$$

Simplificando obtenemos

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

\square

Teorema 5.6.5 (Dimensión virtualmente abeliana de una 3-variedad prima). *Sea M una 3-variedad prima que es conexa, cerrada y orientada. Sean N_1, N_2, \dots, N_r con $r \geq 1$,*

las piezas de la descomposición minimal JSJ de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(N_i, x_i)$. Si $k \geq 2$, entonces

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } M \text{ está modelada en Sol,} \\ \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si la descomposición JSJ mínima de M tiene solo una pieza, entonces la variedad no puede ser modelada en Sol, ya que dichas variedades no son ni Seifert ni hiperbólicas. Por lo tanto, si M tiene solo una pieza JSJ, el teorema se sigue. De ahora en adelante, supongamos que la descomposición JSJ mínima de M tiene más de una pieza. Tenemos dos casos: M es geométrica o no. Si M no es geométrica, afirmamos que

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\Gamma) = \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\Gamma_i) \mid 1 \leq i \leq r\}.$$

Por Proposición 5.6.4 es suficiente ver que hay una pieza N_i en la descomposición JSJ mínima de M tal que $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\Gamma_i) \geq 2$. Por definición, las piezas en la descomposición JSJ de M son o bien hiperbólicas con frontera o Seifert fibradas con frontera. Si la descomposición JSJ de M tiene una pieza hiperbólica o una fibra Seifert con orbifold base B modelada en \mathbb{H}^2 , entonces hemos terminado, ya que por la Tabla 5.1 los grupos fundamentales de estas piezas tienen $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}$ igual a 3 y 2 respectivamente. Resta ver qué pasa si solo tenemos piezas de Seifert fibrado con base orbifold B modelada en \mathbb{E}^2 . Por Teorema 5.3.10 estas piezas son o bien difeomorfas a $T^2 \times I$ o a un I -haz torcido sobre la botella de Klein. Si tenemos una pieza del tipo $T^2 \times I$, entonces la descomposición JSJ mínima de M tendría solo una pieza, de lo contrario, contradeciríamos la minimalidad de la descomposición JSJ. Entonces M sería el mapping torus de un autodifeomorfismo de T^2 y, por [5, Teorema 1.10.1., p.23], M sería geométrica. Dado que estamos en el caso no geométrico descartamos esta posibilidad. Por último, vemos qué pasa si solo tenemos piezas homeomorfas a un I -haz torcido sobre la botella de Klein. Note que estas piezas solo tienen una componente de frontera, por lo tanto, solo podemos tener dos de estas piezas unidas por un difeomorfismo entre sus fronteras. En [5, p.19, último párrafo] muestran que M es geométrico, y una vez más descartamos esta posibilidad.

Supongamos ahora que M es geométrica con al menos dos piezas JSJ. Note que M no es hiperbólico, de lo contrario, la descomposición JSJ de M tendría solo una pieza. Si M está modelado en Sol el teorema se sigue de Proposición 5.4.1. Finalmente, si M no es hiperbólica ni modelada en Sol, entonces por [5, Teorema 1.8.1, p.17] M es Seifert fibrado. Pero esto no puede suceder ya que esto implica que tenemos solo una pieza JSJ. \square

5.6.2. La \mathcal{F}_k -dimensión geométrica de una 3-variedad orientable

Teorema 5.6.6. *Sea M una 3-variedad, conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_r con $r \geq 1$, las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M, x_0)$ y $G_i = \pi_1(P_i, x_i)$. Si $k \geq 2$, entonces*

$$\text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \text{máx}\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\}.$$

Demostración. Sea Y la gráfica de grupos asociada a la descomposición prima de M y árbol de Bass-Serre T . La acción de $\pi_1(Y) = \pi_1(M, x_0) = G$ en T es acilíndrica. Entonces por Teorema 2.4.3 tenemos

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap e}(e) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap e}(e) + 1 \mid 1 \leq i \leq r\}$$

Simplificando obtenemos

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_i}(G_i)\} \mid 1 \leq i \leq r\}$$

□

Lema 5.6.7. *Sea $G = H_1 * \cdots * H_k$ con $k \geq 2$ y $H_i \neq 1$ para todo i . Entonces pasa exactamente uno de los siguientes casos:*

- a) G es isomorfo a D_∞ con $k = 2$ y H_1, H_2 isomorfos a \mathbb{Z}_2 o
- b) G contiene un subgrupo libre no cíclico.

Demostración. Podemos asociar como $G = H_1 * (H_2 * \cdots * H_k)$. Por [5, Lemma 1.11.2, p.24] este producto libre contiene un subgrupo libre no cíclico a menos que los factores sean isomorfos a \mathbb{Z}_2 . Por hipótesis $H_i \neq 1$ para todo i , entonces $H_2 * \cdots * H_k$ es isomorfo a \mathbb{Z}_2 si y sólo si tiene un factor el cual es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Por lo tanto los factores de $G = H_1 * (H_2 * \cdots * H_k)$ son isomorfos a \mathbb{Z}_2 si y sólo si $k = 2$ y H_1, H_2 sean isomorfos a \mathbb{Z}_2 . □

Teorema 5.6.8. *Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_r con $r \geq 1$, las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M)$ y $G_i = \pi_1(P_i)$. Entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G \cong D_\infty \text{ o finito,} \\ 2 & \text{si } r \geq 2 \text{ y } P_i \text{ es Seifert esférica para todo } i, \\ & \text{y } G \text{ no es virtualmente cíclico,} \\ \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si sólo tenemos una pieza, la afirmación se sigue.

Supongamos que tenemos más de una pieza. Entonces el grupo fundamental de M se ve como $G = \pi_1(P_1) * \pi_1(P_2) * \cdots * \pi_1(P_r)$ con $r \geq 2$. Por el Lema 5.6.7 tenemos dos casos: el grupo G es isomorfo a D_∞ con $r = 2$ y $\pi_1(P_1), \pi_1(P_2)$ son isomorfos a \mathbb{Z}_2 o G contiene un subgrupo libre no cíclico. Supongamos primero que G es isomorfo a D_∞ con $r = 2$ y $\pi_1(P_1), \pi_1(P_2)$ son isomorfos a \mathbb{Z}_2 , entonces $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = 0$ y estamos en el primer

caso del teorema. Ahora supongamos que G contiene un subgrupo libre no cíclico, por el Corolario 4.0.9 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 2$.

De ahora en adelante supongamos que G contiene un subgrupo libre no cíclico. Tenemos dos casos a considerar: o todas las piezas son Seifert fibrado con orbifold base B modelada en S^2 o no. Veamos que pasa en el primer caso. Por la tabla 5.2 $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_i) = 0$ para todo i , luego por Teorema 5.6.6 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \leq 2$ y estamos en el segundo caso del teorema. Supongamos que existe una pieza P_s que no es Seifert fibrado con base B modelada en S^2 . Vamos a mostrar que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_s) \geq 2$, luego por Teorema 5.6.6 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) = \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$ y estamos en el tercer caso del teorema. Tenemos dos casos: P_s es geométrica o no. Primero supongamos que P_s es no geométrica. En la demostración del Teorema 5.6.5 mostramos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_s) \geq 2$. Veamos el caso cuando P_s es geométrica. Si P_s es hiperbólica, entonces de Teorema 5.2.1 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_s) = 3$. Si P_s esta modelada en Sol, entonces por el Teorema 5.6.5 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_s) = 2$. Si P_s no es hiperbólica o modelada en Sol, por [5, Theorem 1.8.1, p.17] P_s es Seifert fibrado sin frontera. Por la tabla 5.2 tenemos que $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G_s) \geq 2$. \square

Teorema 5.6.9. *Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_r con $r \geq 1$, las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M)$ y $G_i = \pi_1(P_i)$. Si $k \geq 3$*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G \cong D_\infty \text{ o finito,} \\ 2 & \text{si } r \geq 2 \text{ y } P_i \text{ es euclideana o Seifert esférica } \forall i, \\ & \text{y } G \text{ no es virtualmente cíclico,} \\ \max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_i) \mid 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La demostración se sigue en las mismas líneas como en el teorema anterior.

Teorema 5.6.10. *Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean P_1, P_2, \dots, P_k con $k \geq 1$, las piezas de la descomposición prima de M . Denotemos $G = \pi_1(M)$ y $G_i = \pi_1(P_i)$. Entonces, G contiene un subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^3 si y sólo si la descomposición prima de M contiene una pieza prima modelada en \mathbb{E}^3 .*

Demostración. Supongamos primero que la descomposición prima de M contiene una pieza prima N_l que esta modelada en \mathbb{E}^3 , entonces G_l es cristalográfico y así G_l es virtualmente \mathbb{Z}^3 . Pero $G = G_1 * \dots * G_k$, se sigue que G contiene un subgrupo virtualmente \mathbb{Z}^3 . Veamos la otra dirección, es decir, supongamos que G contiene un subgrupo H virtualmente \mathbb{Z}^3 . Sea L un subgrupo de H isomorfo a \mathbb{Z}^3 y l_1, l_2, l_3 los generadores de L . Sabemos que G se descompone como el producto libre $G = G_1 * \dots * G_k$, se sigue que l_1, l_2, l_3 necesariamente pertenecen al mismo factor digamos G_s . Acabamos de mostrar que G_s contiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^3 , luego $\text{gd}_{\mathcal{F}_2}(G) \geq 5$. Se sigue de Teorema 5.6.5 y Cuadro 5.2 que la descomposición JSJ de P_s contiene una pieza modelada en \mathbb{E}^3 . \square

Bibliografía

- [1] O. Antolín-Camarena, L. E. García-Hernández, and L. J. Sánchez Saldaña. The classifying space for commutativity of geometric orientable 3-manifold groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:2307.04997, July 2023.
- [2] C. S. Aravinda, F. T. Farrell, and S. K. Roushon. Algebraic K -theory of pure braid groups. *Asian J. Math.*, 4(2):337–343, 2000.
- [3] J. A. Arciniega-Nevárez and J. L. Cisneros-Molina. Comparison of relative group (co)homologies. *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)*, 23(1):41–74, 2017.
- [4] J. A. Arciniega-Nevárez, J. L. Cisneros-Molina, and L. J. Sánchez Saldaña. Relative group homology theories with coefficients and the comparison homomorphism. *Quaest. Math.*, 44(8):1107–1132, 2021.
- [5] M. Aschenbrenner, S. Friedl, and H. Wilton. *3-manifold groups*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [6] M. Bestvina. Non-positively curved aspects of Artin groups of finite type. *Geom. Topol.*, 3:269–302, 1999.
- [7] M. Bestvina, K. Fujiwara, and D. Wigglesworth. The Farrell-Jones conjecture for hyperbolic-by-cyclic groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):5887–5904, 2023.
- [8] H. Bigdely and D. T. Wise. Quasiconvexity and relatively hyperbolic groups that split. *Michigan Math. J.*, 62(2):387–406, 2013.
- [9] R. Blasco-García, C. Martínez-Pérez, and L. Paris. Poly-freeness of even Artin groups of FC type. *Groups Geom. Dyn.*, 13(1):309–325, 2019.
- [10] N. Brady, I. J. Leary, and B. E. A. Nucinkis. On algebraic and geometric dimensions for groups with torsion. *J. London Math. Soc. (2)*, 64(2):489–500, 2001.
- [11] G. E. Bredon. Equivariant cohomology theories. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:266–268, 1967.
- [12] G. E. Bredon. *Equivariant cohomology theories*. Lecture Notes in Mathematics, No. 34. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [13] K. S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [14] B. Brück, D. Kielak, and X. Wu. The Farrell-Jones conjecture for normally poly-free groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(6):2349–2356, 2021.
- [15] R. Charney. An introduction to right-angled Artin groups. *Geom. Dedicata*, 125:141–158, 2007.
- [16] F. Conolly, B. Fehrman, and M. Hartglass. On the dimension of the virtually cyclic classifying space of a crystallographic group. *arXiv:math/0610387*, 2006.
- [17] G. Corob Cook, V. Moreno, B. Nucinkis, and F. W. Pasini. On the dimension of classifying spaces for families of abelian subgroups. *Homology Homotopy Appl.*, 19(2):83–87, 2017.
- [18] M. Culler and K. Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1):91–119, 1986.

- [19] J. F. Davis, F. Quinn, and H. Reich. Algebraic K -theory over the infinite dihedral group: a controlled topology approach. *J. Topol.*, 4(3):505–528, 2011.
- [20] M. B. Day and R. D. Wade. Relative automorphism groups of right-angled Artin groups. *J. Topol.*, 12(3):759–798, 2019.
- [21] D. Degrijse and N. Petrosyan. Geometric dimension of groups for the family of virtually cyclic subgroups. *J. Topol.*, 7(3):697–726, 2014.
- [22] T. Delzant. Sur l’accessibilité acylindrique des groupes de présentation finie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(4):1215–1224, 1999.
- [23] W. Dicks. *Groups, trees and projective modules*. Springer, Berlin,, 1980.
- [24] M. J. Dunwoody and M. E. Sageev. JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.*, 135(1):25–44, 1999.
- [25] R. Flores and J. González-Meneses. Classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups of braid groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5):1575–1600, 2020.
- [26] M. Fluch. *On Bredon (Co-)Homological Dimensions of Groups*. PhD thesis, Sep 2010.
- [27] V. Guirardel and G. Levitt. JSJ decompositions of groups. *Astérisque*, (395):vii+165, 2017.
- [28] J. L. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 84(1):157–176, 1986.
- [29] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [30] J. Huang and T. Prytuła. Commensurators of abelian subgroups in CAT(0) groups. *Math. Z.*, 296(1-2):79–98, 2020.
- [31] W. H. Jaco and P. B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.
- [32] K. Jankiewicz and K. Schreve. Profinite properties of algebraically clean graphs of free groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:2312.15115, December 2023.
- [33] R. Jiménez Rolland and P. L. León Álvarez. On the virtually cyclic dimension of normally poly-free groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:2311.10257, November 2023.
- [34] R. Jiménez Rolland, P. L. León Álvarez, and L. J. Sánchez Saldaña. Commensurators of abelian subgroups and the virtually abelian dimension of mapping class groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 228(6):Paper No. 107566, 2024.
- [35] K. Joecken, J.-F. Lafont, and L. J. Sánchez Saldaña. Virtually cyclic dimension for 3-manifold groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 2019.
- [36] K. Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [37] D. Juan-Pineda and I. J. Leary. On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups. In *Recent developments in algebraic topology*, volume 407 of *Contemp. Math.*, pages 135–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [38] D. Juan-Pineda and L. J. Sánchez Saldaña. The K and L theoretic Farrell-Jones isomorphism conjecture for braid groups. In *Topology and geometric group theory*, volume 184 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 33–43. Springer, [Cham], 2016.
- [39] Daniel Juan-Pineda and Ian J. Leary. On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups. In *Recent developments in algebraic topology*, volume 407 of *Contemp. Math.*, pages 135–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [40] H. Kneser. Geschlossene flächen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 38:248–259, 1929.
- [41] J.-F. Lafont and I. J. Ortiz. Relative hyperbolicity, classifying spaces, and lower algebraic K -theory. *Topology*, 46(6):527–553, 2007.

- [42] J.-F. Lafont and I. J. Ortiz. Lower algebraic K -theory of hyperbolic 3-simplex reflection groups. *Comment. Math. Helv.*, 84(2):297–337, 2009.
- [43] P. L. León Álvarez. Classifying spaces for families of abelian subgroups of braid groups, RAAGs and graphs of abelian groups. *Glasgow Mathematical Journal*, page 1–18, 2024.
- [44] P. L. León Álvarez and L. J. Sánchez Saldaña. Classifying spaces for the family of virtually abelian subgroups of orientable 3-manifold groups. *Forum Math.*, 34(5):1277–1296, 2022.
- [45] K. Li. On the topological complexity of toral relatively hyperbolic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 150(3):967–974, 2022.
- [46] A. C. Lopes Onorio. *Relative ends and splittings of groups*. PhD thesis, University of Southampton, August 2018.
- [47] W. Lück. Survey on classifying spaces for families of subgroups. In *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 269–322. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [48] W. Lück. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups for CAT(0)-groups. *Münster J. Math.*, 2:201–214, 2009.
- [49] W. Lück and D. Meintrup. On the universal space for group actions with compact isotropy. In *Geometry and topology: Aarhus (1998)*, volume 258 of *Contemp. Math.*, pages 293–305. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [50] W. Lück and H. Reich. The Baum-Connes and the Farrell-Jones conjectures in K - and L -theory. In *Handbook of K -theory. Vol. 1, 2*, pages 703–842. Springer, Berlin, 2005.
- [51] W. Lück and M. Weiermann. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups. *Pure Appl. Math. Q.*, 8(2):497–555, 2012.
- [52] S. Matveev. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, volume 9 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 2007.
- [53] D. Meier. On the homological dimension of poly-locally free groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 22(3):449–459, 1980.
- [54] J. Milnor. Construction of universal bundles. I. *Ann. of Math. (2)*, 63:272–284, 1956.
- [55] J. Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, 84:1–7, 1962.
- [56] V. Moreno. Classifying spaces for chains of families of subgroups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1911.01893, November 2019.
- [57] J. W. Morgan. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42(1):57–78, 2005.
- [58] D. V. Osin. Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 179(843):vi+100, 2006.
- [59] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0211159, November 2002.
- [60] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0303109, March 2003.
- [61] T. Prytuła. Bredon cohomological dimension for virtually abelian stabilisers for CAT(0) groups. *J. Topol. Anal.*, 13(3):739–751, 2021.
- [62] L. J. Sánchez Saldaña. Groups acting on trees and the Eilenberg-Ganea problem for families. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(12):5469–5479, 2020.
- [63] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [64] P. Scott and T. Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1979.

-
- [65] Z. Sela. Acylindrical accessibility for groups. *Invent. Math.*, 129(3):527–565, 1997.
- [66] J.-P. Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.
- [67] J. Stallings. Groups of dimension 1 are locally free. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:361–364, 1968.
- [68] J. Stillwell. *Geometry of surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1992 original.
- [69] R. G. Swan. Groups of cohomological dimension one. *J. Algebra*, 12:585–610, 1969.
- [70] W. P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):357–381, 1982.
- [71] S. Waner. Equivariant homotopy theory and Milnor’s theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 258(2):351–368, 1980.
- [72] X. Wu. Poly-freeness of Artin groups and the Farrell-Jones conjecture. *J. Group Theory*, 25(1):11–24, 2022.