UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DE REGULARIDAD EN ANILLOS Y MÓDULOS Y ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JESÚS URIEL MEDRANO MATA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
Cd. Mx. 2024

1. Datos del alumno
   Medrano
   Mata
   Jesús Uriel
   55 20 53 87 65
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   419004743
2. Datos del tutor
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía
3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Oscar Alberto
   Garrido
   Jimenez
4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Luis Jorge
   Sánchez
   Saldaña
5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   Luis Fernando
   Garcia
   Mora
6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Francisco
   Gónzales
   Bayona
7. Datos del trabajo escrito
   Acerca de regularidad en anillos y módulos y algunos conceptos relacionados
   63 p
   2024

Agradecimientos.

Al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía por enseñarme y guiarme, tanto como profesor y asesor, para la realización de este trabajo.

A mis padres por todo el apoyo que me han dado a lo largo de mi vida.

A mis amigos y compañeros de la facultad, Diego, Livia y Rodolfo, por acompañarme durante mi carrera.

Índice general

Introducción.

Sea R un anillo con unidad, Von Neumann llamó a R regular si para todo elemento r en R existe a en R tal que $r = rar$. En el presente trabajo se estudian R-módulos M en donde su anillo de endomorfismos $S := \mathrm{End}_R(M)$ es regular, llamaremos módulos endorregulares a estos módulos. En el Capítulo 3 mostraremos que S es regular si y sólo si el núcleo e imagen de todo elemento en S es un sumando directo de M. Si además todos los idempotentes de S son centrales entonces a M lo llamaremos endorregular abeliano y esta condición es equivalente a que el núcleo de todo elemento en S es complemento directo de su imagen. A un R-módulo M que cumpla que para todo elemento φ en S, $M/\varphi(M) \cong \mathrm{Nuc}(\varphi)$ lo llamaremos mórfico, esta clase de módulos se relacionan fuertemente con los módulos endorregulares abelianos, como se verá en el capítulo 4, en donde se dará una equivalencia entre estos dos conceptos. También estudiaremos a los R-módulos M en donde para todo submódulo $N \leq M$ se tiene que $N = MA$ para algún ideal A de R, los cuales llamaremos módulos multiplicación. Finalmente en el capítulo 6 diremos que un R-módulo M es JT regular si para todo elemento m en M $mR = Ma = Ma^2$, para algún a en R. Se verá que si R es conmutativo entonces todo R-módulo multiplicación es JT-regular si y sólo si es endorregular abeliano. A lo largo del trabajo se presentan ejemplos que ilustran como las hipótesis de algunos resultados no se pueden debilitar.
Este trabajo se basa principalmente en [10]. También el primer capítulo, en donde se dan todos los resultados previos para leer el trabajo, se basa en el libro de Kasch [9].

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo, se mencionarán y demostrarán algunos de los resultados más importantes que ocuparemos a lo largo del trabajo. A falta de indicación contraria, los R-módulos son módulos derechos.

1.1. Producto y coproducto.

Definición 1.1.1. Sea $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos. Definimos el producto directo de la familia $\{M_i \mid i \in I\}$ como el conjunto

$$\prod_{i\in I} M_i := \{f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i \mid f(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Observación 1.1.2. Podemos darle estructura de R-módulo a $\prod_{i\in I} M_i$ definiendo las operaciones puntualmente.

Definición 1.1.3. Al subconjunto $\bigsqcup_{i\in I} M_i := \{f \in \prod_{i\in M} M_i \mid \operatorname{sop}(f) \text{ es finito}\}$ de $\prod_{i\in I} M_i$ lo llamaremos el coproducto de la familia $\{M_i \mid i \in I\}$.

Observación 1.1.4. Es fácil ver que $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$.

Definición 1.1.5. Sea $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos.

(1) Un producto para la familia $\{M_i \mid i \in I\}$ es un R-módulo X junto con una familia de morfismos $\{f_i : X \to M_i \mid i \in I\}$ tal que para todo R-módulo Y y toda familia de morfismos $\{g_i : Y \to M_i \mid i \in I\}$ se tiene que existe un único morfismo $f : Y \to X$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f_i"] \\ Y \arrow[ur, dotted, "\exists! f"] \arrow[r, "g_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

es decir, $f_i f = g_i$.

(2) Un coproducto para la familia $\{M_i \mid i \in I\}$ es un R-módulo X junto con una familia de morfismos $\{f_i : M_i \to X \mid i \in I\}$ tal que para todo R-módulo Y y toda familia de morfismos $\{g_i : M_i \to Y \mid i \in I\}$ se tiene que existe un único morfismo $f : X \to Y$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] & \\ M_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "g_i"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, $ff_i = g_i$.

Teorema 1.1.6. Sea $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos.

(1) El R-módulo $\prod_{i\in I} M_i$ junto con los morfismos $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$, donde $\pi_j((m_i)) = m_j$ es un producto de $\{M_i \mid i \in I\}$.

(2) El R-módulo $\coprod_{i\in I} M_i$ junto con los morfismos inyectivos $\eta_j : M_j \to \coprod_{i\in I} M_i$, con $\eta_j(m_j)(i) = m_j\delta_{ij}$ es un coproducto de $\{M_i \mid i \in I\}$.

Demostración. Véase [9, Teorema 4.1.6]. □

Definición 1.1.7. Sea M un R-módulo. Decimos que M es la suma directa de la familia de submódulos $\{M_i \leq M \mid i \in I\}$, y lo denotamos por $M := \bigoplus M_i$, si:

1. $M = \sum_{i\in I} M_i$.
2. Para cada $j \in I$, $M_j \cap \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} M_i = \varnothing$.

Teorema 1.1.8. Sea $\{M_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos. Entonces $\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i'$, con $M_i \cong M_i'$.

Demostración. Sea $i \in I$, como $\eta_i : M_i \to \coprod_{i\in I} M_i$ es inyectivo, entonces $M_i \cong \eta_i(M_i) := M_i'$. Como $M_i' \subseteq \coprod_{i\in I} M_i$, para toda $i \in I$, entonces $\sum_{i\in I} M_i' \subseteq \coprod_{i\in I} M_i$. Veamos que $\bigoplus_{i\in I} M_i' = \coprod_{i\in I} M_i$.
Sea $0 \neq (m_i) \in \coprod_{i\in I} M_i$, entonces existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $m_{i_k} \neq 0$ y $m_i = 0$ para todo $i \neq i_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Entonces $(m_i) \in M_{i_1}' + \cdots + M_{i_n}'$, con lo que $\sum_{i\in I} M_i' = \coprod_{i\in I} M_i$. Ahora, sean $j \in I$ y

$$(m_i) \in M_j' \cap \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} M_i'.$$

Entonces, como (m_i) pertenece a la suma, tenemos que $m_j = 0$, y también $m_i = 0$ para toda $i \neq j$, pues, $(m_i) \in M_j'$. Por lo tanto $\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i'$, con $M_i \cong M_i'$. □

1.2. Módulos libres.

Definición 1.2.1. Sea F un R-módulo. Decimos que F es libre si existe $X \subseteq F$ tal que X genera a F y para todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ si $x_1r_1 + \cdots + x_nr_n = 0$, con $r_1, \ldots, r_n \in R$, entonces $r_i = 0$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Llamaremos a dicho subconjunto X una base de F.

Teorema 1.2.2. Sea F un R-módulo. Entonces F es libre si y sólo si $F = \bigoplus_{i \in I} A_i$ y $A_i \cong R$, para todo $i \in I$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que F es libre y sea $X \subseteq F$ una base de F. Para $a \in X$ definamos $\varphi_a : R \to aR$, dada por $\varphi_a(r) = ar$, para todo $r \in R$. Es fácil ver que $\varphi_a \in \mathrm{Hom}(R, Ra)$ y que es suprayectiva. Ahora, si $0 = \varphi(r) = ar$, del hecho de que X es base se sigue que $r = 0$, con lo que φ_a es inyectiva. Por lo tanto $R \cong aR$. Veamos que $F = \bigoplus_{a \in X} aR$. Como X es base de F, entonces $F = \sum_{a \in X} aR$. Ahora, sea $a_0 \in X$, si

$$c \in a_0 R \cap \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_0}} aR,$$

entonces existen $r_0, r_1, \dots r_n \in R$ tal que $a_0 r_0 = c = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$, entonces $a_0 r_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i r_i = 0$, lo que implica que $r_i = 0$, para toda $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, con lo que $c = 0$. Por lo tanto $F = \bigoplus_{a \in X} aR$ y $aR \cong R$, para todo $a \in X$.
$\Leftarrow$] Supongamos que $F = \bigoplus_{i \in I} A_i$ y $A_i \cong R$ bajo el isomorfismo $\varphi_i : R \to A_i$, para cada $i \in I$. Veamos que $\{\varphi_i(1_R) \mid i \in I\} \subseteq F$ es una base de F. Como $A_i = \varphi_i(R) = \varphi(1_R)R$, entonces $F = \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i(1_R)R$, con lo que $\{\varphi_i(1_R) \mid i \in I\}$ genera a F. Ahora, sea $I' \subseteq I$ finito y supongamos que $0 = \sum_{i \in I'} \varphi_i(1_R) r_i = \sum_{i \in I'} \varphi_i(r_i)$, por la unicidad en la expresión de un elemento en una suma directa se sigue que $\varphi_i(r_i) = 0$, entonces $r_i = 0$ para toda $i \in I'$, pues φ_i es un isomorfismo. Por lo tanto $\{\varphi_i(1_R) \mid i \in I\}$ es una base para F, es decir, F es un módulo libre. □

Teorema 1.2.3. Sean M un R-módulo y $Y \subseteq M$ un conjunto generador de M. Entonces existe un módulo libre F con base $X = \{x_b \mid b \in Y\}$ y un epimorfismo $f : F \to M$, tal que $f(x_b) = b$, para todo $x_b \in X$.

Demostración. Sea $Y \subseteq M$ un conjunto generador de M. Primero veamos que si $A_b = R$, para todo $b \in Y$, entonces el módulo $F = \bigsqcup_{b \in Y} A_b$ es libre y tiene una base con cardinalidad igual a la de Y.
Por el teorema 1.1.8

$$\bigsqcup_{b \in Y} A_b = \bigoplus_{b \in Y} A'_b$$

con $R = A_b \cong A'_b$, mediante φ_b. Por la demostración del Teorema 1.2.2, $F = \bigoplus_{b \in Y} A'_b = \bigoplus_{b \in Y} \varphi_b(1_R)R$, F es libre y con base $\{\varphi_b(1_R) \mid b \in Y\}$. Ahora consideremos la función

$$f : \bigoplus_{b \in Y} \varphi_b(1_R)R \to M$$

dada por

$$f(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{b_i}(1_R) r_{b_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i r_{b_i}$$

Usando que $\{\varphi_b(1_R) \mid b \in Y\}$ es base de $\bigoplus_{b \in Y} \varphi_b(1_R)R$ es fácil ver que f está bien definida y es suprayectiva, de igual manera se verifica que f es un morfismo de R-módulos. Finalmente observemos que $f(\varphi_b(1_R)) = b$, para toda $b \in Y$. □

1.3. Módulos artinianos y noetherianos.

Definición 1.3.1. Decimos que un R-módulo M es artiniano (noetheriano) si cada conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento mínimo (máximo), con respecto a la inclusión.

Definición 1.3.2. Sea M un R-módulo. Decimos que M es finitamente generado si existe un un subconjunto $\{m_1, \dots, m_k\} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{k} m_i R$.

Definición 1.3.3. Sea M un R-módulo. Decimos que M es finitamente cogenerado si para todo conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$ de submódulos de M con $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$, existe un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i \in I_0} A_i = 0$.

Proposición 1.3.4. Sea $\varphi : M \to N$ un morfismo de R-módulos.

(1) Para todo $A \leq M$, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A + \mathrm{Nuc}(\varphi)$.

(2) Para todo $B \leq N$, $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

Demostración. (1) $\subseteq$] Sea $m \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$, entonces $\varphi(m) \in \varphi(A)$, con lo que existe $a \in A$ tal que $\varphi(m) = \varphi(a)$, entonces $m - a \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, con lo que podemos escribir a m como $m = (m - a) + a \in \mathrm{Nuc}(\varphi) + A$.
$\supseteq$] Sea $a + x \in M$, con $a \in A$, y $x \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $\varphi(a + x) = \varphi(a) \in \varphi(A)$, con lo que $a + x \in \varphi^{-1}\varphi(A)$.
(2) $\subseteq$] Sea $y \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$, entonces existe $m \in \varphi^{-1}(B)$ tal que $y = \varphi(m) \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap B$, pues, $\varphi(m) \in B$.
$\supseteq$] Sea $y \in B \cap \mathrm{Im}(\varphi)$, entonces existe $m \in M$ tal que $y = \varphi(m)$, como $y \in B$, entonces $m \in \varphi^{-1}(B)$, con lo que $y = \varphi(m) \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$. □

El siguente resultado se conoce como la Ley Modular.

Proposición 1.3.5. Sean M un R-módulo y $A, B, C \leq M$, con $B \leq C$. Entonces $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) = (A \cap C) + B$.

Demostración. Primero veamos que $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.
$\subseteq$] Sea $c \in (A + B) \cap C$, entonces existen $a \in A$, $b \in B$, tales que $c = a + b \in C$, entonces $a = c - b \in C$, pues $B \subseteq C$ y $b = c - a \in C$, con lo que $c = (c - a) + a \in (B \cap C) + (A \cap C)$.
$\supseteq$] Sea $x \in (A \cap C) + (B \cap C)$, entonces existen $a \in A \cap C$ y $b \in B \cap C$ tales que $x = a + b$, como $a, b \in C$, entonces $x \in (A + B) \cap C$.
Ahora veamos que $(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$.
$\subseteq$] Sea $a + b = c \in (A + B) \cap C$, con $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$, entonces $a = c - b \in A \cap C$, pues $B \subseteq C$, con lo que $a + b = c \in (A \cap C) + B$.
$\supseteq$] Sea $x + b \in (A \cap C) + B$, con $x \in A \cap C$ y $b \in B$, como $B \subseteq C$, entonces $x + b \in C$, con lo que $x + b \in (A + B) \cap C$.
Juntando las dos igualdades llegamos al resultado. □

Definición 1.3.6. Sea M un R-módulo. Diremos que una cadena finita de submódulos de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

es una serie de composición de M si los cocientes M_i/M_{i-1} son simples, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. En este caso, diremos que la longitud de la cadena es n. Llamaremos longitud de M a la máxima longitud de todas las series de composición, si es que existen, en otro caso diremos M es de longitud infinita.

Definición 1.3.7. Sean M un R-módulo y dos cadenas finitas de submódulos

$$B : 0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n = M$$

$$C : 0 = C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots \subseteq C_m = M.$$

Decimos que C es un refinamiento de B si $B = C$ o B se obtiene de C al remover a algunos C_i de C.

Gracias al siguiente teorema la longitud de un módulo está bien definida.

Teorema 1.3.8 (Jordan–Hölder)**.** Si un R-módulo M tiene una serie de composición, entonces todas sus series de composición tienen la misma longitud.

Demostración. Véase [3, 11.3]. □

Teorema 1.3.9. Sea M un R-módulo que tiene longitud finita. Entonces toda cadena de la forma

$$B := 0 = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n = M$$

es un refinamiento de una serie de composición de M.

Demostración. Véase [9, Corolario 3.5.3]. □

Otro resultado, que ocuparemos más adelante, es el siguiente.

Proposición 1.3.10. Sea $M \neq 0$ un R-módulo finitamente generado, entonces M tiene un submódulo propio máximo.

Demostración. Véase [9, Corolario 2.3.12]. □

Teorema 1.3.11. Sean M un R-módulo y $A \leq M$ un submódulo.

1. Son equivalentes:

   (a) M es artiniano.

   (b) A y M/A son artinianos.

   (c) Cada cadena descendente de submódulos de M, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ es estacionaria, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = A_N$ para todo $n \geq N$.

   (d) Para todo submódulo $N \leq M$, M/N es finitamente cogenerado.

   (e) En todo conjunto $\{A_i \mid i \in I\} \neq \varnothing$ de submódulos de M, existe un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que
   $$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I_0} A_i.$$

2. Son equivalentes:
   (a) M es noetheriano.
   (b) A y M/A son noetherianos.
   (c) Cada cadena ascendente de submódulos de M, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ es estacionaria.
   (d) Todo submódulo de M es finitamente generado.
   (e) En todo conjunto $\{A_i \mid i \in I\} \neq \varnothing$ de submódulos de M, existe un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que
   $$\sum_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I_0} A_i.$$
3. Son equivalentes:
   (a) M es artiniano y noetheriano.
   (b) M tiene longitud finita.

Demostración. (1) $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos (a). Sea $\Gamma = \{N_i \leq A \mid i \in I\}$ un conjunto no vacío de submódulos de A. Como $A \subseteq M$, entonces Γ, es un subconjunto no vacío de submódulos de M, con lo que tiene un elemento mínimo, esto implica que A es artininano.

Sea $\Gamma = \{N_i \leq M/A \mid i \in I\}$ un conjunto no vacío de submódulos de M/A. Consideremos la proyección canónica $\pi : M \to M/A$. Entonces $\Gamma' = \{\pi^{-1}(N_i) \leq M \mid i \in I\}$ es un conjunto no vacío de submódulos de M, con lo que tiene un elemento mínimo, digamos $\pi^{-1}(N_{i_0})$. Veamos que N_{i_0} es un elemento mínimo en Γ. Sea $i \in I$ y supongamos que $N_i \leq N_{i_0}$, entonces $\pi^{-1}(N_i) \leq \pi^{-1}(N_{i_0})$, con lo que $\pi^{-1}(N_i) = \pi^{-1}(N_{i_0})$, entonces, al ser π suprayectiva se sigue que $N_i = \pi\pi^{-1}(N_i) = \pi\pi^{-1}(N_{i_0}) = N_{i_0}$. Por lo tanto N_{i_0} es un elemento mínimo en Γ.

$(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos (b). Sea $A \leq M$, tal que A y M/A son artinianos. Consideremos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ una cadena descendente de submódulos de M. Definamos $\Gamma := \{\pi(A_i) \mid i \geq 1\}$, donde $\pi : M \to M/A$ es la proyección canónica y $\Gamma_A := \{A_i \cap A \mid i \geq 1\}$. Observemos que todo elemento de Γ es un submódulo de M/A y todo elemento de Γ_A es un submódulo de A, con lo que Γ y Γ_A tienen un elemento mínimo, digamos $\pi(A_l)$ y $A_m \cap A$, respectivamente. Consideremos $n = \max(l, m)$, entonces $A_m \supseteq A_n$, con lo que $A_m \cap A \supseteq A_n \cap A$, lo que implica que $A_m \cap A = A_n \cap A$, análogamente $\pi(A_n) = \pi(A_l)$. De esta manera para toda $i \geq 1$, como $A_n \supseteq A_{n+i}$, tenemos que $\pi(A_n) \supseteq \pi(A_{n+i})$ y $A_n \cap A \supseteq A_{n+i} \cap A$, como $\pi(A_l)$ y $A_m \cap A$ son elementos mínimos de sus respectivos conjuntos se sigue que $\pi(A_n) = \pi(A_{n+i})$ y $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$. Ahora, por la Proposición 1.3.4 $A_n + A = \pi^{-1}\pi(A_n) = \pi^{-1}\pi(A_{n+i}) = A_{n+i} + A$, además, es claro que, $A_k = (A + A_k) \cap A_k$, para toda $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} A_n &= (A + A_n) \cap A_n = (A + A_{n+i}) \cap A_n \\ &= (A + A_n) \cap A_{n+i} = (A + A_{n+i}) \cap A_{n+i} = A_{n+i}, \end{aligned}$$

la tercera igualdad se debe a la Proposición 1.3.5. Por lo tanto $A_n = A_{n+i}$ para todo $i \geq 1$, es decir, la cadena es estacionaria.

$(c) \Rightarrow (a)$. Supongamos (c). Por contradicción supongamos que existe un conjunto no vacío Γ de submódulos de M que no tiene elemento mínimo. Entonces para todo $N \in \Gamma$, existe $N' \in \Gamma$ tal que $N \supsetneq N'$. Como $\Gamma \neq \varnothing$, sea $N_1 \in \Gamma$, por el comentario anterior podemos construir una cadena descendente de submódulos $N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$ la cual claramente no es estacionaria, contradiciendo (c).
$(d) \Rightarrow (e)$. Supongamos (d). Sea $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ conjunto no vacío de submódulos de M y consideremos $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Consideremos la proyección canónica $\pi : M \to M/A$. Observemos que $\operatorname{Nuc}(\pi) = A \subseteq A_i$, para todo $i \in I$, con lo que $\operatorname{Nuc}(\pi) + A_i = A_i$, para toda $i \in I$, entonces usando la Proposición 1.3.4

$$\begin{aligned}
0 = \pi(A) &= \pi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \pi\left(\bigcap_{i\in I}(A_i + \operatorname{Nuc}(\pi))\right) = \pi\left(\bigcap_{i\in I}\pi^{-1}\pi(A_i)\right)\\
&= \pi\left(\pi^{-1}\bigcap_{i\in I}\pi(A_i)\right) = \pi\pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}\pi(A_i)\right) = \bigcap_{i\in I}\pi(A_i)\cap \operatorname{Im}(\pi)\\
&= \bigcap_{i\in I}\pi(A_i).
\end{aligned}$$

Por hipótesis M/A es finitamente cogenerado, entonces existe un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i\in I_0}\pi(A_i) = 0$, entonces usando la Proposición 1.3.4

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} A_i = \pi^{-1}(0) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I_0}\pi(A_i)\right) &= \bigcap_{i\in I_0}\pi^{-1}\pi(A_i)\\
&= \bigcap_{i\in I_0}(A_i + \operatorname{Nuc}(\pi)) = \bigcap_{i\in I_0} A_i.
\end{aligned}$$

$(e) \Rightarrow (d)$. Supongamos (e). Sean $N \leq M$ y $\Gamma = \{N_i \leq M/N \mid i \in I\}$ un conjunto de submódulos de M/N, con $\bigcap_{i\in I} N_i = 0$. Sea $\pi : M \to M/N$ la proyección canónica, entonces

$$N = \operatorname{Nuc}(\pi) = \pi^{-1}(0) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I}\pi^{-1}(N_i).$$

Por hipótesis, existe un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que $N = \operatorname{Nuc}(\pi) = \bigcap_{i\in I}\pi^{-1}(N_i) = \bigcap_{i\in I_0}\pi^{-1}(N_i)$. Entonces

$$N = \bigcap_{i\in I_0}\pi^{-1}(N_i) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I_0} N_i\right),$$

aplicando π obtenemos $0 = \pi(N) = \bigcap_{i\in I_0} N_i$. Por lo tanto M/N es finitamente cogenerado.
$(a) \Rightarrow (e)$. Supongamos (a). Sea $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ conjunto no vacío de submódulos de M. Definamos $\Gamma' := \{\bigcap_{i\in J} A_i \mid J \subseteq I \text{ es finito}\}$. Por hipótesis Γ' tiene un elemento mínimo, digamos $A = \bigcap_{i\in I_0} A_i$, con $I_0 \subseteq I$ finito. Para cada $i \in I$, como $A \cap A_i \subseteq A$, entonces $A \cap A_i = A$, con lo que $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ y como la otra inclusión siempre se cumple, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i = A = \bigcap_{i\in I_0} A_i$.
$(e) \Rightarrow (c)$. Supongamos (e). Sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ una cadena descendente de

submódulos de M. Entonces para $\{A_i \mid i \geq 1\}$ existe un subconjunto finito $I \subseteq \mathbb{Z}^+$, tal que $\bigcap_{i\geq 1} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$. Consideremos $n = \max(\{m \in I\})$. Como $A_n \subseteq A_i$ para toda $i \in I$, entonces $\bigcap_{i\geq 1} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i = A_n$, con lo que para todo $k \geq 1$, $A_n \subseteq A_k$, además si $k \geq n$, entonces $A_n \supseteq A_k$. Por lo tanto la cadena es estacionaria.

(2) $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos (a). Sea $\Gamma = \{N_i \leq A \mid i \in I\}$ un conjunto no vacío de submódulos de A. Como $A \subseteq M$, entonces Γ, es un subconjunto no vacío de submódulos de M, con lo que tiene un elemento máximo, esto implica que A es noetheriano. Sea $\Gamma = \{N_i \leq M/A \mid i \in I\}$ un conjunto no vacío de submódulos de M/A. Consideremos la proyección canónica $\pi : M \to M/A$. Entonces $\Gamma' = \{\pi^{-1}(N_i) \leq M \mid i \in I\}$ es un conjunto no vacío de submódulos de M, con lo que tiene un elemento máximo, digamos $\pi^{-1}(N_{i_0})$. Veamos que N_{i_0} es un elemento máximo en Γ. Sea $i \in I$ y supongamos que $N_{i_0} \leq N_i$, entonces $\pi^{-1}(N_{i_0}) \leq \pi^{-1}(N_i)$, con lo que $\pi^{-1}(N_{i_0}) = \pi^{-1}(N_i)$, entonces, al ser π suprayectiva se sigue que $N_i = \pi\pi^{-1}(N_i) = \pi\pi^{-1}(N_{i_0}) = N_{i_0}$. Por lo tanto N_{i_0} es un elemento máximo en Γ.
$(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos (b). Sea $A \leq M$, tal que A y M/A son noetherianos. Consideremos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M. Definamos $\Gamma := \{\pi(A_i) \mid i \geq 1\}$, donde $\pi : M \to M/A$ es la proyección canónica y $\Gamma_A := \{A_i \cap A \mid i \geq 1\}$. Observemos que todo elemento de Γ es un submódulo de M/A y todo elemento de Γ_A es un submódulo de A, con lo que Γ y Γ_A tienen un elemento máximo, digamos $\pi(A_l)$ y $A_m \cap A$, respectivamente. Consideremos $n = \min(l, m)$, entonces $A_n \subseteq A_m$, con lo que $A_n \cap A \subseteq A_m \cap A$, lo que implica que $A_n \cap A = A_m \cap A$, análogamente $\pi(A_n) = \pi(A_l)$. Entonces para toda $i \geq 1$, como $A_n \subseteq A_{n+i}$, se sigue que $\pi(A_n) \subseteq \pi(A_{n+i})$ y $A_n \cap A \subseteq A_{n+i} \cap A$, como $\pi(A_l)$ y $A_m \cap A$ son elementos máximos de sus respectivos conjuntos se sigue que $\pi(A_n) = \pi(A_{n+i})$ y $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$. Ahora, por la Proposición 1.3.4 $A_n + A = \pi^{-1}\pi(A_n) = \pi^{-1}\pi(A_{n+i}) = A_{n+i} + A$, además, es claro que, $A_k = (A + A_k) \cap A_k$, para toda $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} A_n &= (A + A_n) \cap A_n = (A + A_{n+i}) \cap A_n \\ &= (A + A_n) \cap A_{n+i} = (A + A_{n+i}) \cap A_{n+i} = A_{n+i}, \end{aligned}$$

la tercera igualdad se debe a la Proposición 1.3.5. Por lo tanto $A_n = A_{n+i}$ para todo $i \geq 1$, es decir, la cadena es estacionaria.
$(c) \Rightarrow (a)$. Supongamos (c). Por contradicción supongamos que existe un conjunto no vacío Γ de submódulos de M que no tiene elemento máximo. Entonces para todo $N \in \Gamma$, existe $N' \in \Gamma$ tal que $N \subsetneq N'$. Como $\Gamma \neq \varnothing$, sea $N_1 \in \Gamma$, por el comentario anterior podemos construir una cadena ascendente de submódulos $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots$, la cual claramente no es estacionaria, contradiciendo (c).
$(d) \Rightarrow (e)$. Supongamos (d). Sea $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ conjunto no vacío de submódulos de M y consideremos $A = \sum_{i\in I} A_i$. Por hipótesis, A es finitamente generado, entonces existen $a_1, \dots a_n \in A$ tales que $A = \sum_{k=1}^{n} a_k R$. Para cada $1 \leq k \leq n$ existe un subconjunto finito $I_k \subseteq I$, tal que $a_k \in \sum_{i\in I_k} A_i$, entonces es claro que $I_0 = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ es finito y que $a_1, \dots, a_n \in \sum_{i\in I_0} A_i$, con lo que

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k R \subseteq \sum_{i\in I_0} A_i \subseteq A.$$

Por lo tanto $\sum_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I_0} A_i$.
$(e) \Rightarrow (d)$. Supongamos (e). Sea $N \leq M$. Para el conjunto no vacío de submódulos M, $\Gamma := \{aR \mid a \in N\}$, por hipótesis, existe un subconjunto finito de Γ tal que $N = \sum_{a\in N} aR = \sum_{i=1}^{n} a_i R$. Por lo tanto N es finitamente generado.
$(a) \Rightarrow (e)$. Supongamos (a). Sea $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ conjunto no vacío de submódulos de M. Definamos $\Gamma' := \{\bigcup_{i\in J} A_i \mid J \subseteq I \text{ es finito}\}$. Por hipótesis Γ' tiene un elemento máximo, digamos $A = \bigcup_{i\in I_0} A_i$, con $I_0 \subseteq I$ finito. Para cada $i \in I$, como $A \subseteq A \cup A_i$, entonces $A = A \cup A_i$, con lo que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$ y como la otra inclusión siempre se cumple, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i = A = \bigcup_{i\in I_0} A_i$. Además, por definición, $\sum_{i\in I} A_i$ es el submódulo generado por $\bigcup_{i\in I} A_i$, con lo que $\sum_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I_0} A_i$.
$(e) \Rightarrow (c)$. Supongamos (e). Sea $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M. Entonces para $\{A_i \mid i \geq 1\}$ existe un subconjunto finito $I \subseteq \mathbb{Z}^+$, tal que $\sum_{i\geq 1} A_i = \sum_{i\in I} A_i$. Consideremos $n = \max(\{m \in I\})$. Como $A_i \subseteq A_n$ para toda $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i = A_n$, con lo que $A_n = \sum_{i\in I} A_i = \sum_{i\geq 1} A_i \supseteq A_j$, para toda $j \in \mathbb{Z}^+$, y para $j \geq n$, $A_n \subseteq A_j$. Por lo tanto $A_n = A_j$ para toda $j \geq n$.

(3) $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos (a). Como M es noetheriano, todo submódulo es finitamente generado. Entonces si $N \leq M$, $N \neq 0$, por la Proposición 1.3.10 N tiene un submódulo máximo N'. En particular, M tiene un submódulo máximo M_1, que a su vez tiene un submódulo máximo M_2. Continuando con este proceso podemos construir la cadena descendente de submódulos de M

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots$$

donde M_i es un submódulo máximo de M_{i-1}, para todo $i \geq 1$, entonces M_i/M_{i-1} es simple. Como M es artiniano entonces para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, $M_n = 0$, entonces tenemos

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0.$$

Por lo tanto M tiene longitud finita.
$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos (b). Supongamos que M tiene longitud $l \geq 0$. Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de submódulos de M. Veamos que existe $k \in \{1, \dots, l+1\}$ tal que para algunos $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}^+$, $\{M_i\}_{i\geq 1} \subseteq \{M_{i_1}, \dots, M_{i_k}\}$, con lo que la cadena sería estacionaria.
Supongamos que no existe tal k, entonces en la cadena hay por lo menos $l+2$ submódulos diferentes, en consecuencia,

$$M_{i_1} \subsetneq M_{i_2} \subsetneq \dots \subsetneq M_{i_{l+2}},$$

por el Teorema 1.3.9, está subcadena es un refinamiento de una serie de composición de M, con lo que la longitud de M sería mayor o igual a $l+1$, contradiciendo el Teorema 1.3.8. Por lo tanto sí existe dicha k, con lo que M es noetheriano. Análogamente M es artiniano.

□

1.4. Módulos semisimples.

Definición 1.4.1. Decimos que un R-módulo M es semisimple si es suma de submódulos simples de M.

Definición 1.4.2. Sean M un R-módulo y $\Gamma = \{N_i \leq M \mid i \in I\}$ un conjunto de submódulos de M. Decimos que Γ es independiente si para cada $i \in I$

$$M_i \cap (\sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} M_j) = 0.$$

En el caso $I = \varnothing$ diremos que Γ es independiente. Además si Γ es independiente se tiene que

$$\sum_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Proposición 1.4.3. Sea M un R-módulo tal que todos sus submódulos son sumandos directos. Entonces para todo $N \leq M$, con $N \neq 0$, N tiene un submódulo simple.

Demostración. Observemos que todo submódulo $N \leq M$, diferente de cero, contiene un submódulo finitamente generado. Entonces bastará probar el resultado para submódulos finitamente generados. Sea $N \leq M$, finitamente generado y diferente de cero. Por la Proposición 1.3.10, existe un submódulo máximo C en N. Por hipótesis, existe $M_1 \leq M$, tal que $M = C \bigoplus M_1$, entonces $N = N \cap M = N \cap (C + M_1)$, como $C \leq N$, entonces por la Proposición 1.3.5, $N = C + (N \cap M_1)$. Ahora, $C \cap (N \cap M_1) \subseteq C \cap M_1 = 0$, con lo que $N = C \bigoplus (N \cap M_1)$, entonces $N/C \cong (N \cap M_1)$, como C es máximo en N, entonces N/C es simple, con lo que $(N \cap M_1)$ es simple. Por lo tanto N tiene un submódulo simple. □

Teorema 1.4.4. Sea M un R-módulo. Son equivalentes:

(1) Cada submódulo de M es la suma de submódulos simples.

(2) M es la suma de submódulos simples.

(3) M es la suma directa de submódulos simples.

(4) Cada submódulo de M es un sumando directo de M.

Demostración. (1) ⇒ (2). Es inmediato.
(2) ⇒ (3) y (4). Supongamos (2). Supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$, con $M_i \leq M$, submódulos simples. Primero veamos que todo submódulo de M es un sumando directo. Sea $U \leq M$. Definamos

$$\Gamma_U := \{L \mid L \subseteq I\ ,\ \{M_i\}_{i \in L} \text{ es independiente y } U \cap \sum_{i \in L} M_i = 0\}.$$

Como $\{M_i\}_{i \in \varnothing}$ es independiente, por definición, entonces $\varnothing \in \Gamma_U$, con lo que $\Gamma_U \neq \varnothing$ y $(\Gamma_U, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea Λ una cadena en Γ_U. Veamos que

$L' = \bigcup_{L\in\Lambda} L$ es una cota superior de Λ en Γ_U. Es claro que $L \subseteq L'$ para todo $L \in \Lambda$. Sean $j \in L'$ y

$$x \in M_j \cap (\sum_{\substack{i\in L'\\ i\neq j}} M_i).$$

Existen $i_1,\dots i_n \in L' \setminus \{j\}$ tal que $x = \sum_{k=1}^n m_{i_k}$, con $m_{i_k} \in M_{i_k}$. Como Λ es una cadena, existe $L \in \Lambda$ tal que $j, i_1,\dots,i_n \in L$, entonces

$$x \in M_j \cap (\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}) \subseteq M_j \cap (\sum_{\substack{i\in L\\ i\neq j}} M_i) = 0,$$

pues $L \in \Gamma$. Por lo tanto $\{M_i\}_{i\in L'}$ es independiente.
Ahora, sea $u \in U \cap (\sum_{i\in L'} M_i)$, entonces $u = \sum_{k=1}^n m_{i_k}$, para algunos $m_{i_k} \in M_{i_k}$. Entonces existe $L \in \Lambda$ tal que $i_1,\dots,i_n \in L$, con lo que

$$u \in U \cap (\sum_{k=1}^{n} M_{i_k}) \subseteq U \cap (\sum_{i\in L} M_i) = 0.$$

Por lo tanto $U \cap (\sum_{i\in L'} M_i) = 0$, de donde L' es una cota superior de Λ en Γ_U. Entonces, por el Lema de Zorn, Γ_U tiene un elemento máximo J. Observemos que como $J \in \Gamma_U$, entonces podemos definir al submódulo

$$N = U + (\sum_{i\in J} M_i) = U \bigoplus (\bigoplus_{i\in J} M_i).$$

Veamos que $N = M$. Sea $i \in I$, como $N \cap M_i \leq M_i$, y M_i es simple, entonces tenemos dos casos: $N \cap M_i = M_i$ o $N \cap M_i = 0$. Si $N \cap M_i = 0$, entonces no puede pasar que $i \in J$, pues de lo contrario como $M_i \leq \sum_{i\in J} M_i \subseteq N$, entonces $M_i \cap N = M_i \neq 0$, pues M_i es simple, con lo que $i \notin J$. Si $u \in U \cap (\sum_{j\in J} M_j + M_i)$, entonces $u = \sum_{k=1}^n m_{j_k} + m_i$, con $m_{i_k} \in M_{i_k}$ y $m_i \in M_i$, entonces $m_i \in U \cap (\sum_{k=1}^n M_j) \subseteq U \cap (\sum_{j\in J} M_j) = 0$, con lo que $u \in U \cap (\sum_{k=1}^n M_{j_k}) = 0$. Por lo tanto $U \cap (\sum_{j\in J} M_j + M_i) = 0$. De una manera similar tenemos que $\{M_j\}_{j\in J\cup\{i\}}$ es independiente, con lo que $J \cup \{i\} \in \Gamma$, e $i \notin J$, contradiciendo que J sea un elemento máximo en Γ.
Entonces se cumple que $N \cap M_i = M_i$, lo que implica que $M_i \subseteq N$, para todo $i \in I$, entonces

$$M = \sum_{i\in I} M_i \leq N \subseteq M.$$

Por lo tanto $M = U \bigoplus (\bigoplus_{i\in J} M_i)$. Con lo que hemos probado (4) y tomando $U = 0$ tenemos (3).
(3) $\Rightarrow$ (4). Se sigue de que (3) $\Rightarrow$ (2).
(4) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (4). Sea $U \leq M$ un submódulo no cero. Definamos $\Gamma := \{N \leq U \mid N \text{ es simple}\}$, por la Proposición 1.4.3, $\Gamma \neq \varnothing$. Ahora definimos $U_0 = \sum_{N\in\Gamma} N$, entonces $U_0 \leq U$ y existe $M_1 \leq M$ tal que $M = U_0 \bigoplus M_1$, entonces, usando un argumento similar al de la prueba de la Proposición 1.4.3, $U = M \cap U = (U_0 \bigoplus M_1) \cap U = U_0 \bigoplus (M_1 \cap U)$. Tenemos dos casos.
Caso 1: Si $M_1 \cap U = 0$, entonces $U = U_0$, con lo que tendríamos el resultado.
Caso 2: Si $M_1 \cap U \neq 0$, entonces por la Proposición 1.4.3, existe $B \leq M_1 \cap U$, con B simple. Luego $B \leq U$, con lo que $B \leq U_0$, entonces $B \leq U_0 \cap (M_1 \cap U) = 0$, contradiciendo que B sea simple. Por lo tanto sólo se da el caso 1. $\square$

Teorema 1.4.5. (1) Cada submódulo de un módulo semisimple es semisimple.

(2) Si M, N son R-módulos, con M semisimple y $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo supra-yectivo, entonces N es semisimple.

Demostración. Véase [9, Corolario 8.1.5]. □

Teorema 1.4.6. Para un R-módulo semisimple M, son equivalentes:

(1) M es la suma finita de módulos simples.

(2) M es la suma directa de una cantidad finita módulos simples.

(3) M es artiniano.

(4) M es noetheriano.

(5) M es finitamente generado.

(6) M es finitamente cogenerado.

Demostración. Sea $M = \sum_{i\in I} M_i$, con M_i simple.
(1) ⇒ (2). Supongamos (1). Entonces $M = \sum_{i\in J} M_i$, con J finito y M_i simple. Por la prueba del Teorema 1.4.4 existe $J_0 \subseteq J$ tal que $M = \bigoplus_{i\in J_0} M_i$.
(2) ⇒ (3) y (2) ⇒ (4). Supongamos (2). Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, M_i simple. Entonces

$$0 \subseteq M_1 \subseteq M_1 \bigoplus M_2 \subseteq \cdots \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M$$

es una serie de composición de M, pues para toda $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$\bigoplus_{i=1}^{k} M_i / \bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i \cong M_k.$$

Por lo tanto M tiene longitud finita, por el Teorema 1.3.11, M es noetheriano y artiniano.
(3) ⇒ (6) y (4) ⇒ (5) se siguen del teorema 1.3.11.
(5) ⇒ (1). Supongamos (5). Entonces existen $m_1, \ldots, m_n \in M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{n} m_i R$. Recordemos que, por hipótesis, $M = \sum_{i\in I} M_i$, con M_i simple, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $I_i \subseteq I$, finito, tal que $m_i \in \sum_{j\in I_i} M_j$, definiendo $I' = \cup_{i=1}^{n} I_i$, se sigue que

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i R \subseteq \sum_{j\in I'} M_j \subseteq \sum_{i\in I} M_i = M.$$

Por lo tanto $M = \sum_{j\in I'} M_j$, con I' finito.
(6) ⇒ (2). Supongamos (6). Por el teorema 1.4.4, existe $I_0 \subseteq I$ tal que $M = \bigoplus_{i\in I_0} M_i$. Si I_0 no es finito, podemos escoger una cantidad infinita numerable de M_i, digamos, $M_1, M_2, \ldots$ Entonces podemos definir el submódulo $B = \bigoplus_{i\geq 1} M_i$. Para cada $i \in \mathbb{Z}^+$ definamos al submódulo $A_i = \bigoplus_{j\geq i} M_j$. Sea $x \in \bigcap_{i\geq 1} A_i$, entonces $x \in A_1 = B$, de modo de que existen $i_1, \ldots i_n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \in \bigoplus_{k=1}^{n} M_{i_k}$. Sea $N = \max(\{i_1, \ldots, i_n\})$, como $x \in A_{N+1}$, y $A_{N+1} \cap (\bigoplus_{i=1}^{N} M_i) = 0$, se sigue que $x = 0$. Por lo tanto $\bigcap_{i\geq 1} A_i = 0$, por hipótesis existe un subconjunto finito de enteros positivos tal que la intersección finita también es cero, sin perdida de generalidad, supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = 0$, pero $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n \neq 0$. Por lo tanto I_0 es finito. □

1.5. Módulos proyectivos.

Definición 1.5.1. Sea P un R-módulo. Decimos que P es proyectivo si para todo R-morfismo suprayectivo $f : N \to M$, y para cada R-mórfismo $g : P \to M$, existe un R-morfismo $h : P \to N$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\exists h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Es decir, $fh = g$.

Definición 1.5.2. Sean M un R-módulo y $N \leq M$ un submódulo de M. Diremos que N es un sumando directo de M, y lo denotaremos por $N \leq^{\oplus} M$, si existe $N' \leq M$ submódulo de M tal que $N \oplus N' = M$.

Definición 1.5.3. Sean A, B y C R-módulos.

(1) Decimos que un monomorfismo $f : A \to B$ se escinde si $f(A) \leq^{\oplus} B$.

(2) Decimos que un epimorfismo $g : B \to C$ se escinde si $\mathrm{Nuc}(B) \leq^{\oplus} B$.

(3) Decimos que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 ,$$

se escinde por la izquierda (respectivamente, por la derecha) si f se escinde (respectivamente, g se escinde). Y se escinde si lo hace por la derecha e izquierda.

Teorema 1.5.4. (1) Sean A y B R-módulos y $\alpha : A \to B$. Son equivalentes:

(a) α es un monomorfismo que se escinde.

(b) Existe $\beta : B \to A$ tal que $\beta\alpha = \mathrm{Id}_A$.

(2) Sean B y C R-módulos y $\beta : B \to C$. Son equivalentes:

(a) β es un isomorfismo que se escinde.

(b) Existe $\alpha : C \to B$ tal que $\beta\alpha = \mathrm{Id}_C$.

Demostración. (1) $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos (a). Sea $N \leq B$ tal que $\alpha(A) \oplus N = B$. Sea $\pi : B \to \alpha(A)$ dada por $\pi(\alpha(a) + n) = \alpha(a)$, para todo $\alpha(a) \in \alpha(A)$, $n \in N$. Como α es un monomorfismo, entonces $\alpha\restriction: A \to \alpha(A)$ es un isomorfismo. Consideremos $\beta = \pi(\alpha\restriction)^{-1} : B \to A$. Entonces si $a \in A$, $\beta\alpha(a) = (\alpha\restriction)^{-1}(\alpha(a)) = a$.
Por lo tanto $\beta\alpha = \mathrm{Id}_A$.
$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos (b). Sea $\beta : B \to A$ tal que $\beta\alpha = \mathrm{Id}_A$, entonces α es un monomorfismo. Ahora, por la Proposición 1.3.4, $\beta^{-1}(\beta(\alpha(A))) = \alpha(A) + \mathrm{Nuc}(\beta)$ y $\alpha(\alpha^{-1}(\mathrm{Nuc}(\beta))) = \mathrm{Nuc}(\beta) \cap \alpha(A)$. Pero $\beta^{-1}(\beta(\alpha(A))) = \beta^{-1}(A) = B$ y $\alpha(\alpha^{-1}(\mathrm{Nuc}(\beta))) = 0$, pues $a \in \alpha^{-1}(\mathrm{Nuc}(\beta))$ si y sólo si $\beta\alpha(a) = 0$, pero $\beta\alpha(a) = a$. Con lo que $\alpha(A) + \mathrm{Nuc}(\beta) = B$ y $\alpha(A) \cap \mathrm{Nuc}(\beta) = 0$
Por lo tanto $\alpha(A) \oplus \mathrm{Nuc}(\beta)$.

(2) $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos (a). Sea $N \leq B$ tal que $B = \text{Nuc}(\beta) \oplus N$. Consideremos $\gamma = \beta|_N : N \to C$. Veamos que γ es un isomorfismo. Sea $n \in N$, si $\gamma(n) = 0$, entonces $n \in N \cap \text{Nuc}(\beta) = 0$, con lo que γ es inyectivo. Ahora, sea $c \in C$, como β es un epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Además existen $n \in N$ y $x \in \text{Nuc}(\beta)$ tal que $b = n + x$, entonces $\beta(b) = \beta(n) + \beta(x) = \beta(n) = \gamma(n)$, así tenemos que γ es sobreyectivo. Consecuentemente γ es un isomorfismo.
Sea $\eta : N \to B$ la inclusión canónica y definamos $\alpha = \eta\gamma^{-1} : C \to B$, entonces si $c \in C$, $\beta\alpha(c) = \beta(\gamma^{-1}(c)) = c$.
Por lo tanto $\beta\alpha = \text{Id}_C$.
$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos (b). Sea $\alpha : C \to B$ tal que $\beta\alpha = \text{Id}_C$. Por la Proposición 1.3.4, $\beta^{-1}(\beta(\alpha(C))) = \alpha(C) + \text{Nuc}(\beta)$ y $\alpha(\alpha^{-1}(\text{Nuc}(\beta))) = \text{Nuc}(\beta) \cap \alpha(C)$, pero $\beta^{-1}(\beta(\alpha(C))) = \beta^{-1}(C) = B$ y $\alpha(\alpha^{-1}(\text{Nuc}(\beta))) = 0$, pues $c \in \alpha(\alpha^{-1}(\text{Nuc}(\beta)))$ si y sólo si $\beta(\alpha(c)) = 0$, con $c = \beta(\alpha(c))$. Con lo que $B = \alpha(C) + \text{Nuc}(\beta)$ y $\alpha(C) \cap \text{Nuc}(\beta) = 0$.
Por lo tanto $\text{Nuc}(\beta) \oplus \leq^{\oplus} B$.

□

Teorema 1.5.5. Dada la sucesión exacta

$$\eta : \ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\,,$$

son equivalentes:

(1) η se escinde por la izquierda.

(2) $B = f(A) \bigoplus C'$, con $g|_{C'} : C' \to C$ un isomorfismo.

(3) η se escinde por la derecha.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos (1). Por el Teorema 1.5.4, existe $h : B \to A$ tal que $hf = \text{Id}_A$ y por la demostración del mismo teorema, tenemos que $B = f(A) \oplus \text{Nuc}(h)$. Luego, $C = g(B) = g(f(A)) + g(\text{Nuc}(h)) = g(\text{Nuc}(h))$. Entonces la restricción de g al núcleo de h, $g|_{\text{Nuc}(h)}$, es un epimorfismo. Además

$$\text{Nuc}(g|_{\text{Nuc}(h)}) = \text{Nuc}(g) \cap \text{Nuc}(h) = f(A) \cap \text{Nuc}(h) = 0,$$

con lo que $g|_{\text{Nuc}(h)}$ es un monomorfismo.
Por lo tanto $g|_{\text{Nuc}(h)}$ es un isomorfismo.
$(2) \Rightarrow (3)$. Supongamos (2). Por hipótesis $B = f(A) \oplus C'$, con $g|_{C'} : C' \to C$ un isomorfismo. Consideremos la inclusión $\iota : C' \to B$ y definamos $l = \iota(g|_{C'})^{-1} : C \to B$. Veamos que $gl = \text{Id}_C$. Sea $c \in C$, entonces

$$g(l(c)) = g(\iota((g|_{C'})^{-1}(c))) = g((g|_{C'})^{-1}(c)) = c.$$

Por lo tanto $gl = \text{Id}_C$, por el Teorema 1.5.4, η se escinde por la derecha.
$(3) \Rightarrow (2)$. Supongamos (3). Por el Teorema 1.5.4, existe $l : C \to B$ tal que $gl = \text{Id}_C$ y por la demostración del mismo teorema, tenemos que $B = \text{Nuc}(g) \oplus l(C) = f(A) \oplus l(C)$. Entonces $C = g(B) = g(l(C))$, con lo que $g|_{l(C)}$ es un epimorfismo.

Además $\mathrm{Nuc}(g|_{l(C)}) = \mathrm{Nuc}(g) \cap l(C) = 0$.
Por lo tanto $g|_{l(C)}$ es un isomorfismo.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (1). Sea $B = f(A) \oplus C'$, con $g|_C$ un isomorfismo. Sea $b \in B$, entonces existen únicos $f(a) \in f(A)$ y $c' \in C'$ tales que $b = f(a) + c'$. Definamos $h : B \to A$ dada por $h(b) = a$. Si $b = f(b') + c''$, con $f(a') \in f(A)$ y $c'' \in C'$, entonces $c' = c''$ y $f(a) = f(a')$, por la inyectividad de f se sigue que $a = a'$. Por lo tanto h está bien definida. Veamos que h es un morfismo. Sean $b, b' \in B$ y $r \in R$, entonces $b = f(a) + c'$ y $b' = f(a') + c''$, con $f(a), f(a') \in f(A)$ y $c', c'' \in C'$, con lo que

$$h(b + b') = h((f(a + a'r)) + (c' + c''r)) = a + a'r = h(b) + h(b')r.$$

Finalmente veamos que $hf = \mathrm{Id}_A$. Sea $a \in A$, entonces $h(f(a)) = a$. Por 1.5.4 f se escinde. □

Lema 1.5.6. Todo R-módulo libre es proyectivo.

Demostración. Sean F un R-módulo libre y $\{x_i \in F \mid i \in I\}$ una base de F. Sean M y N R-módulos, $f : M \to N$ un epimorfismo y $g : F \to N$. Para cada $i \in I$ existe $m_i \in M$ tal que $f(m_i) = g(x_i)$. Si $x \in F$, entonces $x = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j} r_{i_j}$, para algunos $r_{i_j} \in R$, $i_k \in I$ para todo $1 \leq k \leq n$. Definamos $h : F \to M$, dada por $h(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{i_j} r_{i_j}$. Como $\{x_i \in F \mid i \in I\}$ es una base de F, entonces h está bien definida y $h \in \mathrm{Hom}_R(F, M)$.
Ahora,

$$f(h(x)) = f(\sum_{j=1}^{n} m_{i_j} r_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} f(m_{i_j}) r_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} g(x_{i_j}) r_{i_j} = g(\sum_{j=1}^{n} x_{i_j} r_{i_j}) = g(x).$$

Entonces $fh = g$. Por lo tanto F es proyectivo. □

Lema 1.5.7. Sean M y P R-módulos. Si $M \cong P$ y P es proyectivo, entonces M es proyectivo.

Demostración. Sean A y B R-módulos, $f : A \to B$ un epimorfismo y $g : M \to B$. Por hipótesis, existe $\varphi : P \to M$ isomorfismo. Entonces existe $h : P \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "g\varphi"'] & B, \end{tikzcd}$$

es decir, $fh = g\varphi$. Observemos que $h\varphi^{-1} : M \to A$ y $f(h\varphi^{-1}) = g\varphi\varphi^{-1} = g$. Por lo tanto M es proyectivo. □

Teorema 1.5.8. Sea P un R-módulo. Son equivalentes:

(1) P es proyectivo.

(2) Toda sucesión exacta

$$\eta : \; 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 \,,$$

se escinde.

(3) P es isomorfo a un sumando directo de un módulo libre.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos (1). Como P es proyectivo existe $l : P \to B$ tal que el siguente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\exists l"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_P"'] & P, \end{tikzcd}$$

es decir, $gl = \mathrm{Id}_P$, por el Teorema 1.5.4, g se escinde y por el Teorema 1.5.5, η se escinde.
(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos (2). Por el Teorema 1.2.3, existe un módulo libre F y un epimorfismo $g : F \to P$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(g) \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0\ ,$$

es exacta, y por el Teorema 1.5.5 $F = f(A) \oplus C'$, con $C' \cong P$.
(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (3). Sea $P \cong C$, donde $C \leq^{\oplus} F$, con F un R-módulo libre, digamos $F = C \oplus C'$. Veamos que C es proyectivo.
Sean A y B R-módulos, $f : A \to B$ un epimorfismo y $g : C \to B$. Consideremos la proyección $\pi : F \to C$, dada por $F(c + c') = c$, para todo $c \in C$ y $c' \in C'$. Por el Lema 1.5.6, F es proyectivo, entonces existe $h : F \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "g\pi"'] & B, \end{tikzcd}$$

es decir, $fh = g\pi$. Definamos $\varphi = h|_C : C \to B$, entonces si $c \in C$, tenemos que $f(\varphi(c)) = f(h(c)) = g(\pi(c)) = g(c)$, con lo que el siguente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[ur, dotted, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto C es proyectivo. Por el Lema 1.5.7, P también es proyectivo. □

Teorema 1.5.9 (Lema de la Base Dual)**.** Sea P un R-módulo, son equivalentes:

(1) P es proyectivo.

(2) Para cada conjunto de generadores $\{y_i \mid i \in I\}$ de P existe una familia $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$ tales que

  (a) Para todo $p \in P$, $\varphi_i(p) \neq 0$, solo para finitos $i \in I$.

  (b) Para todo $p \in P$, $p = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(p)$.

(3) Existen familias $\{y_i \mid i \in I\}$, con $y_i \in P$ y $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$, tales que (a) y (b) se cumplen.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos (1). Sea $\{y_i \mid i \in I\}$ un conjunto de generadores de P. Por la prueba del Teorema 1.2.3, existe un R-módulo libre F, con base $\{x_i \mid i \in I\}$, y un morfismo suprayectivo $f : F \to P$, tal que $f(x_i) = y_i$, para cada $i \in I$.
Para cada $j \in I$ tenemos que si $a \in F$, entonces existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tal que $a = x_{i_1} r_{i_1} + \cdots + x_{i_n} r_{i_n}$, $r_{i_k} \in R$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces si $j \neq i_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, podemos escribir $a = x_{i_1} r_{i_1} + \cdots + x_{i_n} r_{i_n} + 0x_j$. Con lo que podemos definir una función $\pi_j : F \to R$, dada por $\pi_j(x_{i_1} r_{i_1} + \cdots + x_{i_n} r_{i_n}) = r_j$. Como $\{x_i \mid i \in I\}$ es base de F, entonces π_j está bien definida. Además, observemos que para todo $a = x_{i_1} r_{i_1} + \cdots + x_{i_n} r_{i_n} \in F$, $\pi_j(a) \neq 0$, sólo para un número finito de $j \in I$ y $a = \sum_{i \in I} x_i \pi_i(a)$.
Ahora, por hipótesis P es proyectivo, entonces existe $h : P \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\exists h"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_P"'] & P \end{tikzcd}$$

es decir, $fh = \mathrm{Id}_P$. Para cada $i \in I$ definamos $\varphi_i = \pi_i h : P \to R$. Entonces para cada $p \in P$, $\varphi_i(p) = \pi_i(h(p)) \neq 0$, sólo para finitos $i \in I$, además $p = f(h(p)) = f(\sum_{i \in I} x_i \pi_i(h(p))) = \sum_{i \in I} f(x_i)\pi_i(h(p)) = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(p)$. Por lo tanto hemos probado (2).
(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos (2), tomando a P como el conjunto de generadores de P se sigue inmediatamente (3).
(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (3). Sea $\{y_i \mid i \in I\}$ una familia de generadores de P y $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$, tales que (a) y (b) se cumplen. Por la prueba del Teorema 1.2.3, existe un R-módulo libre F, con base $\{x_i \mid i \in I\}$, y un morfismo suprayectivo $f : F \to P$, tal que $f(x_i) = y_i$, para todo $i \in I$. Definamos $\Psi : P \to F$, dada por $\Psi(p) = \sum_{i \in I} x_i \varphi_i(p)$, entonces Ψ está bien definida, pues, por (a), sólo $\varphi_i(p) \neq 0$ para finitos $i \in I$ y por (b), la representación de $p = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(p)$ es única. Además, es fácil ver que $\Psi \in \mathrm{Hom}(P, F)$. Entonces para todo $p \in P$,

$$f(\Psi(p)) = f(\sum_{i \in I} x_i \varphi_i(p)) = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(p) = p,$$

con lo que $\mathrm{Id}_P = f\Psi$, entonces la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(f) \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0\,,$$

se escinde por la derecha, por el Teorema 1.5.5, $F = \mathrm{Nuc}(f) \bigoplus P'$, con $P' \cong P$, por el Teorema 1.5.8, tenemos que P es proyectivo.

□

1.6. Módulos fieles.

Definición 1.6.1. Sean M un R-módulo. Definimos el anulador de M como $\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid mr = 0 \text{ para todo } m \in M\}$.

Observación 1.6.2. Si M es un R-módulo, es fácil ver que $\mathrm{Ann}_R(M)$ es un ideal derecho de R.

Definición 1.6.3. Sea M un R-módulo. Decimos que M es fiel si $\operatorname{Ann}_R(M) = 0$

Proposición 1.6.4. Sea M un grupo abeliano, R un anillo y $I \leq R$ un ideal de R. Entonces M es un R/I-módulo si y sólo si M es un R-módulo e $I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es un R/I-módulo. Definamos la función $f : M \times R \to M$ dada por $f(m,r) = m(r+I) = mr$, donde $m(r+I)$ es la operación ya dada. Veamos que con esta nueva operación M es un R-módulo. Sean $m,n \in M$ y $r,s \in R$.
1) $(m+n)r = (m+n)(r+I) = m(r+I) + n(r+I) = mr + nr$.
2) $m(r+s) = m((r+s)+I) = m((r+I)+(s+I)) = m(r+I) + m(s+I)$.
3) $m(rs) = m(rs+I) = m(r+I)(s+I) = (m(r+I))(s+I) = (mr)s$,
4) $m(1) = m(1+I) = m$.
Por lo tanto M es un R-módulo.
Ahora, sean $a \in I$ y $m \in M$, entonces $m(a) = m(a+I) = m(0+I) = 0$, con lo que $I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que M es un R-módulo y que $I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$. Definamos la función $f : M \times R/I \to M$, dada por $f(m, r+I) = mr = m(r+I)$, donde mr es la operación dada. Veamos que f está bien definida, sean $m \in M$ y $r+I = s+I \in R/I$, entonces $m(r+I) = mr$ y $m(s+I) = ms$, como $I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$, entonces $r-s \in I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$, de manera que $m(r-s) = 0$, por ende $mr = ms$, de está manera f está bien definida. Veamos que con está nueva operación tenemos que M es un R/I-módulo. Sean $m,n \in M$ y $r+I, s+I \in R/I$.
1) $(m+n)(r+I) = (m+n)r = mr + nr = m(r+I) + n(r+I)$,
2) $m((r+s)+I) = m(r+s) = mr + ms = m(r+I) + m(s+I)$,
3) $m((rs)+I) = m(rs) = (mr)s = (m(r+I))(s+I)$,
4) $m(1+I) = m1 = m$.
Por lo tanto M es un R/I módulo. □

Proposición 1.6.5. Sea M un R-módulo. Entonces M es un $R/\operatorname{Ann}_R(M)$-módulo fiel.

Demostración. Por la proposición 1.6.4, M es un $R/\operatorname{Ann}_R(M)$-módulo, con la operación $m(r+\operatorname{Ann}_R(M)) = mr$. Sean $m \in M$ y $r+\operatorname{Ann}_R(M) \in \operatorname{Ann}_{R/\operatorname{Ann}_R(M)}(M)$, entonces $0 = m(r+\operatorname{Ann}_R(M)) = mr$, con lo que $r \in \operatorname{Ann}_R(M)$, entonces $r+\operatorname{Ann}_R(M) = 0+\operatorname{Ann}_R(M)$. Por lo tanto $\operatorname{Ann}_{R/\operatorname{Ann}_R(M)} = 0$, es decir, M es un $R/\operatorname{Ann}_R(M)$-módulo fiel. □

1.7. El Radical de Jacobson.

Definición 1.7.1. Sea R un anillo. Definimos el radical de Jacobson, al que solo llamaremos radical de R, como la intersección de todos los ideales máximos derechos de R y lo denotaremos por $J(R)$.

Lema 1.7.2. Sea $x \in R$. Entonces $x \in J(R)$ si y sólo si $1_R - xy$ es una unidad en R para todo $y \in R$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $x \in J(R)$. Supongamos que existe $y \in R$ tal que $1_R - xy$ no es unidad. El ideal generado por $1_R - xy$ es un ideal propio de R, con lo que existe un ideal máximo $I \leq R$ tal que $1_R - xy \in I$. Como $x \in J(R) \subseteq I$, entonces $1_R = (1_R - xy) + xy \in I$, contradiciendo que I es máximo.

$\Leftarrow$) Sea $x \in R$ y supongamos que para toda $y \in R$ $1_R - xy$ es una unidad. Supongamos que $x \notin J(R)$. Sea $I \leq R$ un ideal máximo tal que $x \notin I$, como I es máximo $R = I + xR$, entonces existe $m \in I$ y $r \in R$ tales que $1_R = m + xr$, con lo que $1_R - xr = m \in I$, el cual es una unidad. Por lo tanto $1_R \in I$, lo cual es una contradicción. □

1.8. Producto tensorial.

Definición 1.8.1. Sean L un R-módulo derecho y M un R-módulo izquierdo. Un producto tensorial de L y M es (T, τ), donde T es un grupo abeliano y τ es una función bilineal $\tau : L \times M \to T$ tal que para todo grupo abeliano G y para toda función bilineal $\varphi : L \times M \to G$, existe un único morfismo de grupos $\alpha : T \to G$ tal que $\alpha\tau = \varphi$.

Teorema 1.8.2. Sean L un R-módulo derecho y M un R-módulo izquierdo. Entonces existe un producto tensorial de L y M.

Demostración. Véase [15, Proposición 8.2]. □

Teorema 1.8.3. Si (T, τ) y (T', τ') son productos tensoriales de L_R y $_RM$, entonces existe un isomorfismo de grupos $\alpha : T \to T'$ tal que $\alpha\tau = \tau'$.

En virtud de los Teoremas 1.8.2 y 1.8.3, denotaremos al producto tensorial de L_R y $_RM$ por $(L \otimes M, \tau)$, con $\tau(x, y) = x \otimes y$, para todo $(x, y) \in L \times M$.
Algunas de las propiedades del producto tensorial de L_R y $_RM$ son las siguientes.

Proposición 1.8.4. Sean $a, a' \in M$, $u, u' \in L$, $s \in R$ y $z \in \mathbb{Z}$

(1) $(a + a') \otimes u = a \otimes u + a' \otimes u$,

(2) $a \otimes (u + u') = a \otimes u + a \otimes u'$,

(3) $as \otimes u = a \otimes su$,

(4) $0_M \otimes u = a \otimes 0_L = 0$

(5) $-(a \otimes u) = (-a) \otimes u = a \otimes (-u)$,

(6) $(a \otimes u)z = (az) \otimes u = a \otimes (uz)$.

Demostración. Véase [9, 10.1.2]. □

Observación 1.8.5. Por (6) de la Proposición 1.8.4, cada elemento de $M \bigotimes L$ puede escribirse como una suma finita de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes u_i,$$

donde $a_i \in M$ y $u_i \in U$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sean M_R, N_R R-módulos derechos y ${}_RL, {}_RU$ R-módulos izquierdos. Dados $\varphi : M \to N$ y $\alpha : L \to U$ morfismos de R-módulos derechos e izquierdos, respectivamente, consideremos la función $\Psi : M \times L \to N \bigotimes U$, dada por $\Psi(m,l) = \varphi(m) \otimes \alpha(l)$, para todo $m \in M$ y $l \in L$. Es fácil ver que Ψ es una función bilineal, entonces existe un único morfismo de grupos $f : M \bigotimes L \to N \bigotimes U$ tal que $f(m \otimes l) = \Psi(m,l) = \varphi(m) \otimes \alpha(l)$. De esta manera podemos dar la siguente definición.

Definición 1.8.6. Al morfismo f del comentario anterior le llamaremos el producto tensorial de φ y α y lo denotaremos por $\varphi \otimes \alpha$.

Teorema 1.8.7. Sea M un R-módulo izquierdo, entonces $R \otimes M \cong M$.

Definición 1.8.8. Sea ${}_RF$ un R-módulo izquierdo. Decimos que ${}_RF$ es plano si para todo R-monomorfismo de módulos derechos $\varphi : M_R \to N_R$, $\varphi \otimes 1_F : M \otimes F \to N \otimes F$,también es un monomorfismo.

Una caracterización de módulos planos es la siguiente.

Proposición 1.8.9. Sea ${}_RF$ un R-módulo. F es plano si y sólo si el morfismo

$$\iota : I \otimes M \to M$$

es un monomorfismo, con

$$\iota(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes m_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i,$$

para todo ideal $I \leq R$ finitamente generado.

Demostración. Véase [15, Proposición 10.6] □

Capítulo 2

Anillos regulares.

2.1. Ideales finitamente generados en anillos regulares.

Von Neumann introdujo el concepto de anillos regulares al estudiar álgebras de Von Neumann y geometría continua. Además utilizó el concepto para probar resultados de retículas, ver, por ejemplo, [5].
En esta sección probaremos que un anillo es regular si y sólo si todos sus ideales finitamente generados son sumandos directos.

Observación 2.1.1. Si R es un anillo, entonces para todo elemento $\varphi \in \mathrm{End}(R)$ se cumple que $\varphi(r) = \varphi(1_R)r$, es decir, todo elemento en $\mathrm{End}(R)$ es multiplicar por la izquierda por $\varphi(1_R)$.

Definición 2.1.2. Sea R un anillo. Decimos que R es

(1) regular si para todo $a \in R$ existe $y \in R$ tal que $a = aya$;

(2) unitariamente regular si para todo $a \in R$ existe $y \in R$ tal que y es unidad en R y $a = aya$;

(3) unilateral regular si para todo $a \in R$ existe $y \in R$, tal que y tiene inverso derecho o izquierdo, y $a = aya$;

(4) fuertemente regular si para todo $a \in R$ existe $y \in R$ tal que $a = a^2y$;

(5) reducido si R no tiene nilpotentes no cero.

Ejemplo 2.1.3. Todo campo K es un anillo regular, pues si $a \in K$, entonces $a = aa^{-1}a$.

Ejemplo 2.1.4. Decimos que un anillo R es booleano si para todo $a \in R$ $a^2 = a$, es decir, todos los elementos de R son idempotentes. Entonces si $a \in R$, $a = aaa$, con lo que R es regular.

Proposición 2.1.5. Sea R un anillo. Entonces R es fuertemente regular si y sólo si R es regular y sus idempotentes son centrales.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que R es fuertemente regular. Consideremos $a \in R$ y $y \in R$ tal que $a = a^2y$. Primero veamos que R es reducido. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y supongamos que $a^n = 0$. Como $a = a^2y = a^3y^2 = \cdots = a^ny^{n-1} = 0$, entonces, $a = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}(a - aya)^2 &= (a - aya)(a - aya) = a^2 - a^2ya - aya^2 + aya^2ya \\ &= a^2 - a^2 - aya^2 + aya^2 = 0,\end{aligned}$$

entonces $a - aya$ es nilpotente, lo que implica que $a = aya$. De esta manera, R es regular. Si $a^2 = a$ y $x \in R$, entonces $(ax - axa)^2 = 0 = (xa - axa)^2$, por lo que $ax = axa = xa$. Por lo tanto a está en el centro de R.
$\Leftarrow$) Supongamos que R es regular y que sus idempotentes son centrales. Sean $a, y \in R$ tales que $a = aya$, entonces $ay = (ay)^2$. Así, ay es un idempotente de R, que conmuta con a, por lo que $a = (ay)a = a^2y$. □

Proposición 2.1.6. Sea R un anillo fuertemente regular. Entonces para todo $a \in R$ existe una unidad $t \in R$ y un idempotente $e \in R$ tales que $a = te$.

Demostración. Sea $a \in R$. Como R es fuertemente regular, existe $x \in R$ tal que $a = a^2x$. Observemos que $e = ax$ y $f = xa$ son idempotentes, pues $e^2 = (ax)(ax) = (a^2x)x = ax = e$, y $f^2 = (xa)(xa) = x(ax)a = xaax = xa$, por la Proposición 2.1.5, e y f son centrales. Veamos que $e = f$,

$$f = xa = x(a^2x) = x(aax) = (xaa)x = (axa)x = e^2 = e.$$

Definamos $t = (ea + 1_R - e)$, entonces

$$\begin{aligned}t(ex + 1_R - e) &= (ea + 1_R - e)(ex + 1_R - e) = eaex + ea - eae + ex + 1_R - e - eex - e + ee \\ &= e + ea - ea + ex + 1_R - e - ex - e + e = 1_R.\end{aligned}$$

Análogamente $(ex + 1_R - e)t = 1_R$. Por lo tanto, t es unidad y

$$te = (ea + 1_R - e)(ax) = eaax + ax - eax = ea = a^2x = a.$$

□

Teorema 2.1.7. Sea R un anillo. Son equivalentes:

(1) R es regular.

(2) Todo ideal derecho cíclico de R es un sumando directo.

(3) Todo ideal derecho finitamente generado de R es un sumando directo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos (1). Sea $a \in R$ y consideremos el ideal cíclico aR. Como $a = axa$, para algún $x \in R$, entonces $ax = (ax)^2$. Veamos que $aR = axR$. Claramente $axR \subseteq aR$. Ahora, si $ar \in aR$, entonces $ar = (axa)r = ax(ar) \in axR$. Por lo tanto $aR \subseteq axR$, con lo cual tenemos la igualdad.
Es claro que $R = (1 - ax)R + axR$. Además, si $y \in (1 - ax)R \cap axR$, entonces $y = (1 - ax)r = axs$, para algunos $r, s \in R$. Tenemos que $0 = ax(1 - ax)r = (ax)^2s = axs = y$. Por lo tanto

$R = (1 - ax)R \bigoplus axR$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (2). Sea $a \in R$. Entonces existe $I \subseteq R$ ideal tal que $R = aR \bigoplus I$. Para 1_R, existen únicos $r \in R$ y $x \in I$ tal que $1_R = ar + x$, entonces $xa = a(1_R - ra) \in I \cap aR = 0$. Por lo tanto $a = ara$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos (2) y (1). Veamos que si $I \leq R$ es un ideal finitamente generado, entonces $I = aR$, con $a \in R$. Supongamos que $I = \sum_{i=1}^{n} m_i R$. Procederemos por inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces se tiene el resultado. Demostremos el caso $n = 2$. Supongamos que $I = a_1 R + a_2 R$. Por hipótesis, existen idempotentes $e, f \in R$ tal que $a_1 R = eR$ y $a_2 R = fR$. Veamos que $eR + fR = eR + (f - ef)R$. Sean $r, s \in R$.
$\subseteq]$ $er + fs = e(r + fs) + (f - ef)s \in eR + (f - ef)R$
$\supseteq]$ $er + (f - ef)s = er - efs + fs = e(r - fs) + fs \in eR + fR$.
Como R es regular, existe $x \in R$ tal que $f - ef = (f - ef)x(f - ef)$. Sea $f' = (f - ef)x$, f' es idempotente. Observemos que $ef' = 0$ y $(f - ef)R = f'R$, de esta manera $eR + fR = eR + (f - ef)R = eR + f'R$. Luego, $e = (e + f' - f'e)e$ y $f' = (e + f' - f'e)f'$, entonces $eR + f'R = (e + f' - f'e)R$, y $e + f' - f'e$ es idempotente.
Supongamos para $n > 2$ que si $I = a_1 R + \cdots + a_n R$, entonces existe $a \in R$ tal que $I = aR$. Sea $I = (a_1 R + \cdots + a_n R) + a_{n+1} R = eR + a_{n+1} R = eR + fR$, con $e, f \in R$ idempotentes. Por el caso $n = 2$, $I = f'R$, con $f' \in R$ idempotente. Utilizando (2), tenemos el resultado.
(3) $\Rightarrow$ (2). Es inmediato. $\square$

Proposición 2.1.8. Sea R un anillo. Son equivalentes:

(1) R es fuertemente regular.

(2) R es regular y reducido.

(3) Todo ideal cíclico es generado por un idempotente central.

(4) R es regular y $Ra \subseteq aR$, para todo $a \in R$.

(5) $aR = a^2 R$, para todo $a \in R$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Se demostró en la Proposición 2.1.5.
(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos (2). Sean $a, x \in R$ tal que $a = axa$, entonces $e = ax$ es idempotente y $aR = eR$. Si $y \in R$, entonces

$$\begin{aligned}(ey - eye)^2 &= (ey - eye)(ey - eye) = eyey - eyeye - eyeey + eyeeye \\ &= eyey - eyeye - eyey + eyeye = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(ye - eye)^2 &= (ye - eye)(ye - eye) = yeye - yeeye - eyeye + eyeeye \\ &= yeye - yeye - eyeye + eyeye = 0.\end{aligned}$$

Como R es reducido, concluimos que $ey = eye$ y $ye = eye$, por lo tanto $ey = ye$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Supongamos (3). Sean $a \in R$ y $e \in R$ un idempotente central tal que $aR = eR$, entonces existen $r, x \in R$ tales que $a = er$ y $e = ax$, entonces $e = e^2 = (ax)e$, multiplicando

por r, $er = (ax)er$, con lo que $a = axa$. Ahora, sea $at \in aR$. Como $aR = eR = Re$, entonces $a = se$, para algún $s \in R$, entonces $ta = t(se) = ets \in eR = aR$. Por lo tanto $Ra \subseteq aR$.
(4) $\Rightarrow$ (5). Supongamos (4). Sea $a \in R$. Es claro que $a^2R \subseteq aR$. Sea $ar \in aR$. Como R es regular, existe $x \in R$ tal que $a = axa$, $xa \in Ra \subseteq aR$, entonces $xa = ay$, para alguna $y \in R$, luego, $a = a^2y$, entonces $ar = a^2yr \in a^2R$. Por lo tanto $aR = a^2R$.
(5) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (5). Sea $a \in R$. Como $aR = a^2R$, entonces existe $y \in R$ tal que $a = a^2y$. □

2.2. Anillos regulares que son semisimples.

Antes de estudiar el concepto de regularidad en el anillo de endomorfismo de un R-módulo M veremos la importancia de anillos regulares cuando estos son semisimples, artinianos o noetherianos, los cuales son conceptos equivalentes.

Lema 2.2.1. Sea R un anillo regular, entonces $J(R) = 0$.

Demostración. Sea $0 \neq x \in J(R)$. Por el Teorema 2.1.7, existe $e \in R$ idempotente tal que $xR = eR$ y como $x \neq 0$, entonces $e \neq 0$. Observemos que $1_R - e \neq 0$ y existe $r \in R$ tal que $e = xr \in J(R)$. Por el Lema 1.7.2, $1_R - e$ es una unidad, entonces existe $y \in R$ tal que $y(1_R - e) = 1_R$, multiplicando esta igualdad por e obtenemos que $e = y(e - e^2) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x = 0$. □

Teorema 2.2.2. Sea R un anillo regular. Son equivalentes:

(1) R es semisimple.

(2) R es artiniano.

(3) R es noetheriano.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) y (3). Supongamos (1). Como R es finitamente generado, es fácil ver que $R = \sum_{i=1}^{n} S_i$, con $S_i \leq R$ ideales simples. Por el Teorema 1.4.6 R es artiniano y noetheriano.
(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (3). Por el Teorema 1.3.11, todo ideal de R es finitamente generado, y por el Teorema 2.1.7 esto implica que todo ideal de R es un sumando directo. Por lo tanto, el Teorema 1.4.4, implica que R es semisimple.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (2). Definamos $\Lambda := \{I \leq R \mid I \text{ es máximo }\}$ el conjunto de todos los ideales máximos de R. Para cada $\alpha \subseteq \Lambda$ subconjunto finito de ideales máximos definamos

$$I_\alpha := \bigcap_{A_i \in \alpha} A_i.$$

Para el conjunto de ideales $\{I_\alpha\}$, tenemos que existe un elemento mínimo $H = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Afirmamos que $H = 0$, pues si $0 \neq x \in H$, por el Lema 2.2.1,

$$J(R) = \bigcap_{I \in \Lambda} I = 0,$$

entonces existe un ideal máximo M tal que $x \notin M$, con lo que el ideal $H \cap M$, es una intersección finita de ideales máximos y $H \cap M \subsetneq H$, contradiciendo que H es mínimo en $\{I_\alpha\}$. Por lo tanto $H = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = 0$. Ahora, consideremos la proyección canónica en cada ideal $\varphi_k : R \to R/A_k$. Existe un único morfismo $\varphi : R \to \prod_{k=1}^{n} R/A_k$ tal que para $k \in \{1,\ldots,n\}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \prod_{k=1}^{n} R/A_k \arrow[d, "\pi_k"] \\ R \arrow[ur, dotted, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi_k"'] & R/A_k, \end{tikzcd}$$

es decir, $\pi_k\varphi = \varphi_k$.
Veamos que $\text{Nuc}(\varphi) = 0$. Si $\varphi(r) = 0$, entonces, para $k \in \{1,\ldots,n\}$, $0 = \pi_k(\varphi(r)) = \varphi_k(r) = r + A_k$, con lo que $r \in A_k$, entonces $r \in \cap_{k=1}^{n} A_k = 0$. Por lo tanto $\text{Nuc}(\varphi) = 0$.
Ahora, observemos que $\prod_{k=1}^{n} R/A_k = \coprod_{k=1}^{n} R/A_k$. Además, por el Teorema 1.1.8, $\coprod_{k=1}^{n} R/A_k = \bigoplus_{k=1}^{n} N_k$, con $R/A_k \cong N_k$, para toda $k \in \{1,\ldots,n\}$. Además,para toda $k \in \{1,\ldots,n\}$, R/A_k es un anillo simple, pues $A_k \leq R$ es un ideal máximo, con lo que N_k es simple, entonces $\bigoplus_{k=1}^{n} N_k$ es un anillo semisimple.
Con todo lo anterior, tenemos que $R \cong \varphi(\bigoplus_{k=1}^{n} N_k)$, y por el Teorema 1.4.5, $\varphi(\bigoplus_{k=1}^{n} N_k)$ es semisimple y R es semisimple. $\square$

Capítulo 3

Módulos endorregulares y módulos endorregulares abelianos.

3.1. Regularidad en el anillo de endomorfismos de un módulo.

Definición 3.1.1. Sea R un anillo, decimos que R es abeliano si todos sus idempotentes son centrales.

Definición 3.1.2. Sea R un anillo y M un R-módulo, decimos que M es

(1) endorregular si $\mathrm{End}(M)$ es regular;

(2) abeliano si $\mathrm{End}(M)$ es abeliano;

(3) endorregular abeliano si $\mathrm{End}(M)$ es regular y abeliano;

(4) fuertemente endorregular si $\mathrm{End}(M)$ es fuertemente regular;

(5) unitariamente endorregular si $\mathrm{End}(M)$ es unitariamente regular;

(6) unilateral endorregular si $\mathrm{End}(M)$ es unilateral regular.

El concepto de módulos endorregulares fue planteado por Fuchs en [7], donde él sólo considero el caso de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos).

Definición 3.1.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Al anillo de enteros módulo n lo denotaremos por $\mathbb{Z}_n$.

Lema 3.1.4. Si $M \neq 0$ es simple, entonces $\mathrm{End}(M)$ es un anillo con división.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Como M es simple, entonces $\varphi(M) = M$ o 0. En el primer caso, $M \neq 0$ implica que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = 0$. En el segundo caso $\mathrm{Nuc}(\varphi) = M$. Entonces φ es un isomorfismo o es el morfismo cero. □

Ejemplo 3.1.5. Por el Lema 3.1.4, todo módulo simple es endorregular, en particular $\mathbb{Z}_p$ es endorregular, con p primo.

Definición 3.1.6. Sea M un R-módulo y $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Decimos que φ es regular si existe $\psi \in \mathrm{End}(M)$ tal que $\varphi = \varphi\psi\varphi$.

Lema 3.1.7. Sean M un R-módulo y $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, φ es regular si y sólo si $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ son sumandos directos de M.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que φ es regular. Sea $\psi \in \mathrm{End}(M)$ tal que $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Definamos $\varphi' := \varphi \upharpoonright^{\mathrm{Im}(\varphi)}$ y $\psi' := \psi|_{\mathrm{Im}(\varphi)}$. Como φ' es suprayectivo y $Id_{\mathrm{Im}(\varphi)}\varphi' = \varphi' = (\varphi'\psi')\varphi'$, entonces $Id_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \varphi'\psi'$. De esta manera φ' se escinde, con lo que, por el Teorema 1.5.4, $\mathrm{Nuc}(\varphi') = \mathrm{Nuc}(\varphi)$ es un sumando directo de M.
Ahora, sea $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$, y $\iota : \mathrm{Im}(\varphi) \to M$ la inclusión canónica, entonces existe $m \in M$ tal que $x = \varphi(m)$. Entonces $(\varphi'\psi)\iota(x) = \varphi'\psi(\varphi(m)) = \varphi'(m) = x$, con lo que $(\varphi'\psi)\iota = Id_{\mathrm{Im}(\varphi)}$. Por lo tanto, ι se escinde, entonces $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un sumando directo de M, por el Teorema 1.5.4.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ son sumandos directos de M. Entonces existe $N \leq M$ tal que $\mathrm{Nuc}(\varphi) \oplus N = M$. Definamos $\varphi' := \varphi \upharpoonright^{\mathrm{Im}(\varphi)}$, $\varphi_N := \varphi'|_N$ y consideremos f, la inclusión del $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ en M y $\eta' : N \to M$ la inclusión de N en M. Consideremos la sucesión exacta

$$\eta :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(\varphi) \xrightarrow{f} \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus N \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0\,.$$

Veamos que φ_N es un isomorfismo. Sea $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, entonces existe $m \in M$ tal que $y = \varphi(m)$. Además, $m = a + b$, con $a \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$ y $b \in N$, entonces, $y = \varphi(m) = \varphi(b) = \varphi_N(b)$. Por lo tanto, φ_N es suprayectiva.
Ahora, si $\varphi_N(x) = 0$, entonces $x \in \mathrm{Nuc}(\varphi) \cap N = 0$. Por lo tanto, φ_N es inyectiva.
Consideremos $\varphi_N^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \to N$. Luego, sea $\gamma = \eta'\varphi_N^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \to M$. Si $m \in \mathrm{Im}(\varphi)$, entonces $\varphi(\gamma(m)) = \varphi(\eta'(\varphi_N^{-1}(m))) = \varphi(\varphi_N^{-1}(m)) = m$. Por lo tanto $\varphi\gamma = Id_{\mathrm{Im}(\varphi)}$. Por hipótesis existe $N' \leq M$ tal que $M = \mathrm{Im}(\varphi) \bigoplus N'$, consideremos la proyección de $\mathrm{Im}(\varphi)$ sobre N', $\pi : M \to \mathrm{Im}(\varphi)$, entonces $\gamma\pi : M \to M$ cumple que $\varphi(\gamma\pi)\varphi = \varphi$. Por lo tanto φ es regular. □

Ejemplo 3.1.8. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Entonces V es endorregular.

Demostración. Sea $U \leq V$ un subespacio lineal de V. Definamos el conjunto $\Gamma_U := \{W \leq V \mid V \cap W = 0\}$. Observemos que $0 \in \Gamma_U$ y $(\Gamma_U, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea Λ una cadena en Γ_U. Consideremos $N := \cup_{W\in\Lambda} W$. Veamos que N es un subespacio de W. Claramente $0 \in N$. Sean $x, y \in N$ y $r \in K$, entonces $x \in W$ y $y \in W'$, con $W, W' \in \Lambda$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $W \subseteq W'$, entonces $xr + y \in W' \subseteq N$. Por lo tanto, N es un subespacio de V. Ahora veamos que $N \in \Gamma_U$. Observemos que

$$U \cap N = U \cap (\bigcup_{W\in\Lambda} W) = \bigcup_{W\in\Lambda} (U \cap W) = 0.$$

Por lo tanto, $N \in \Gamma_U$ y N es una cota superior de Λ en Γ_U. Por el Lema de Zorn existe un elemento máximo $W \in \Gamma_U$. Si $U + W \neq V$, sea $x \in V \smallsetminus \{U + W\}$. Sea $a \in U \cap (W + xK)$, entonces $a = w + xr \in U$, para algún $w \in W$ y $r \in K$, de esta manera, si $r \neq 0$, tenemos

que $x \in U + W$, lo cual es una contradicción, con lo que $r = 0$, entonces $a \in U \cap W = 0$. Por lo tanto $U \cap (W + xK) = 0$, lo cual implica que $W + xk \in \Gamma_U$, pero $W \subsetneq W + xK$, contradiciendo que W es un elemento máximo en Γ_U. De esta manera, $U + W = V$, con lo que $U \leq^{\oplus} V$.
Hemos probado que todo subespacio lineal de V es un sumando directo, por el Lema 3.1.7 V es endorregular. □

Lema 3.1.9. Sean M un R-módulo y $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Si φ es idempotente, entonces $M = \mathrm{Im}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\varphi)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi^2 = \varphi$. Sea $m \in M$, entonces $0 = \varphi(m) - \varphi^2(m) = \varphi(m - \varphi(m))$, con lo que $m - \varphi(m) \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$. Entonces $m = (m - \varphi(m)) + \varphi(m)$. Por lo tanto $M = \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Nuc}(\varphi)$. Si $x \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $x = \varphi(n)$, para algún $n \in M$ y $\varphi(x) = \varphi^2(n) = \varphi(n) = 0$, con lo cual $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Nuc}(\varphi) = 0$.
$\therefore M = \mathrm{Im}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\varphi)$. □

Observación 3.1.10. La implicación recíproca no siempre se cumple, por ejemplo consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre el campo $\mathbb{R}$ y la transformación lineal $T(x, y) = 2(x, y)$. Entonces T es un isomorfismo y por lo tanto $R^2 = \mathrm{Im}(T) \bigoplus \mathrm{Nuc}(T)$, pero T no es idempotente.

Teorema 3.1.11. Sea M un R-módulo. M es endorregular abeliano si y sólo si para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $M = \mathrm{Im}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\varphi)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es endorregular abeliano. Sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, como $\mathrm{End}(M)$ es regular, existe $\psi \in \mathrm{End}(M)$ tal que $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Consideremos el morfismo $1_S - \psi\varphi$. Veamos que $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$. Sea $m \in M$, es claro que $m - \psi\varphi(m) \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, además

$$(1_S - \psi\varphi)(\psi\varphi(m)) = \psi\varphi(m) - (\psi\varphi(\psi\varphi(m))) = \psi\varphi(m) - \psi\varphi(m) = 0,$$

entonces $\psi\varphi(m) \in \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$. Por lo tanto $m = (m - \psi\varphi(m)) + \psi\varphi(m)$, con lo cual $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) + \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$. Ahora, si $x \in \mathrm{Nuc}(\varphi) \cap \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$, entonces $\varphi(x) = 0$ y $x - \psi\varphi(x) = 0$, aplicando ψ a la primera igualdad tenemos que $\psi\varphi(x) = 0$, entonces $x = 0$. Por lo tanto $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$. Consideremos $e = \psi\varphi$ y $f = \varphi\psi$, los cuales son idempotentes en $\mathrm{End}(M)$, y, por lo tanto, centrales. Como $\varphi e = \varphi$, entonces $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(M) = \varphi e(M)$. Veamos que $e(M) = \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$.
$\supseteq$) Sea $x \in \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi)$, entonces $x = \psi\varphi(x) \in \psi\varphi(M) = e(M)$
$\subseteq$) Sea $\psi\varphi(m) \in e(M)$, entonces

$$(1_S - \psi\varphi)(\psi\varphi)(m) = \psi\varphi(m) - \psi\varphi(\psi\varphi(m)) = \psi\varphi(m) - \psi\varphi(m) = 0.$$

Con lo cual hemos probado la afirmación.
Por último veamos que $\varphi(M) = e(M)$. Observemos que $\varphi(M) = \varphi e(M) = e\varphi(M) \subseteq e(M)$ y

$$\begin{aligned} e(M) &= \psi\varphi(M) = \psi\varphi\psi\varphi(M) = \psi f\varphi(M) = f\psi\varphi(M) \subseteq f(M) \\ &= \varphi\psi(M) \subseteq \varphi(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto $e(M) = \varphi(M)$, con lo cual tenemos que $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Nuc}(1_S - \psi\varphi) = \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus e(M) = \mathrm{Nuc}(\varphi) \bigoplus \mathrm{Im}(\varphi)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $M = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \mathrm{Nuc}(f)$, para todo $f \in \mathrm{End}(M)$. Por el Lema 3.1.7, tenemos que $\mathrm{End}(M)$ es regular. Ahora, sea $e \in \mathrm{End}(M)$ idempotente y $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Consideremos $\alpha = e\varphi(1_S - e)$. Por hipótesis $M = \mathrm{Im}(\alpha) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\alpha)$. Observemos que

$$\alpha^2 = e\varphi(1_S - e)e\varphi(1_S - e) = e\varphi e\varphi - e\varphi e\varphi e - e\varphi ee\varphi + e\varphi ee\varphi e = 0.$$

Luego, si $m \in M$, entonces existen únicos $x \in \mathrm{Nuc}(\alpha)$ y $w \in \mathrm{Im}(\alpha)$ tales que $m = x + w$, con $w = \alpha(n)$, para algún $n \in M$, entonces $\alpha(m) = \alpha^2(n) = 0$, por lo cual $\alpha = 0$, así $e\varphi = e\varphi e$, análogamente $\varphi e = e\varphi e$. Por lo tanto $\varphi e = e\varphi$. $\square$

Para el caso de los espacios vectoriales de dimensión finita podemos debilitar la condición anterior, como veremos en el Teorema 3.1.13.

Lema 3.1.12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K . Sean $W_1, W_2 \subseteq V$ dos subespacios, entonces $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base del subespacio $W_1 \cap W_2$. Extendamos esta base a una base $\{u_1 \dots, u_k, v_1, \dots, v_m\}$ para W_1 y a otra base $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_p\}$ para W_2. Ahora, sean γ_i, β_j, $\alpha_t \in K$, con $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq t \leq p$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{t=1}^{p} \alpha_t w_t = 0.$$

Despejando al término $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j$, obtenemos

$$v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_j - \sum_{t=1}^{p} \alpha_t w_t.$$

Como el lado derecho pertenece a W_2, entonces $v \in W_1 \cap W_2$, con lo que existen $\gamma_i' \in K$, con $1 \leq i \leq k$ tales que

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i' u_j,$$

igualando a cero y usando que el conjunto $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente, concluimos que $\beta_j = 0$ para toda $1 \leq j \leq m$. Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_j + \sum_{t=1}^{p} \alpha_t w_t = 0.$$

Entonces como $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_p\}$ es linealmente independiente, $\alpha_t = 0$, para toda $1 \leq t \leq p$ y $\gamma_i = 0$ para toda $1 \leq j \leq k$. Por lo tanto
$\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p\}$ es linealmente independiente. Ahora si $a + b \in W_1 + W_2$, con $a \in W_1$ y $b \in W_2$, entonces existen β_j, $\alpha_t \in K$, con $1 \leq j \leq k + m$ y $1 \leq t \leq k + p$, tales que $a = \beta_1 u_1 + \dots \beta_k u_k + \beta_{k+1} v_1 + \dots + \beta_{k+m} v_m$ y $b = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_{k+p} w_p$. Entonces

$$a + b = (\beta_1 + \alpha_1)u_1 + \dots (\beta_k + \alpha_k)u_k + \beta_{k+1} v_1 + \dots + \beta_{k+m} v_m + \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_{k+p} w_p.$$

Con lo que $\{u_1, \dots u_k, v_1, \dots v_m, w_1, \dots, w_p\}$ genera a $W_1 + W_2$. Entonces $\dim(W_1 + W_2) = k + m + p = k + m + p + k - k = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$. $\square$

Teorema 3.1.13. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K de dimensión finita, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces:

(1) Si $T(V) + \text{Nuc}(T) = V$, entonces $T(V) \cap \text{Nuc}(T) = 0$.

(2) Si $\text{Nuc}(T) \cap T(V) = 0$, entonces $T(V) + \text{Nuc}(T) = V$.

Demostración. (1). Supongamos que $T(V)+\text{Nuc}(T) = V$. Por el Teorema de la dimensión $\dim(V) = \dim(T(V)) + \dim(\text{Nuc}(T))$, por otro lado, por el Lema 3.1.12,

$$\dim(V) = \dim(T(V) + \text{Nuc}(T)) = \dim(T(V)) + \dim(\text{Nuc}(T)) - \dim(T(V) \cap \text{Nuc}(T)),$$

con lo que $\dim(T(V) \cap \text{Nuc}(T)) = 0$, entonces $T(V) \cap \text{Nuc}(T) = 0$.
(2). Supongamos que $\text{Nuc}(T) \cap T(V) = 0$. Por el teorema de la dimensión $\dim(V) = \dim(T(V)) + \dim(\text{Nuc}(T))$, por otro lado, por el Lema 3.1.12,

$$\begin{aligned}\dim(T(V) + \text{Nuc}(T)) &= \dim(T(V)) + \dim(\text{Nuc}(T)) - \dim(T(V) \cap \text{Nuc}(T))\\ &= \dim(T(V)) + \dim(\text{Nuc}(T)) = \dim(V),\end{aligned}$$

con lo que $\dim(V) = \dim(T(V) + \text{Nuc}(T))$. Por lo tanto $V = T(V) + \text{Nuc}(T)$. □

Ejemplo 3.1.14. La hipótesis de que V sea de dimensión finita en el Teorema 3.1.13, es necesaria. Para ver esto consideremos $V = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$ el espacio vectorial de sucesiones infinitas con entradas en los números reales sobre el campo de los números reales. Definamos $T : V \to V$ como $T(\{x_i\}_{i\geq 1}) = \{x'_i\}_{i\geq 1}$, donde $x'_i = x_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que T es una transformación lineal. Veamos que $V = T(V) + \text{Nuc}(T)$. Sea $\{x_i\}_{i\geq 1} \in V$, definamos las sucesiones e_1x_1, donde e_i vale uno en la entrada i−ésima y cero en todas las demás y $\{x'_i\}_{i\geq 1}$, donde $x'_i = 0$ si $i = 1, 2$ y $x'_i = x_{i-1}$ para todo $i > 2$. Entonces $T(e_1x_1) = 0$ y $\{x_i\}_{i\geq 1} = T(\{x'_i\}_{i\geq 1}) + e_1x_1$, con lo que $V = T(V) + \text{Nuc}(T)$, pero $T(e_2) = e_1$ y $e_1 \in \text{Nuc}(T)$. Por lo tanto $\text{Nuc}(T) \cap T(V) \neq 0$.
Ahora, sea $U : V \to V$ dada por $U(\{x_i\}_{i\geq 1}) = \{x'_i\}_{i\geq 1}$, donde $x'_1 = 0$ y $x'_i = x_{i-1}$, para todo $i \geq 2$. Es fácil ver que U es una transformación lineal y que $\text{Nuc}(U) = 0$, entonces $\text{Nuc}(U) \cap U(V) = 0$, pero $e_1 \notin U(V)$, con lo que $V \neq U(V) + \text{Nuc}(U)$.

3.2. Módulos de Rickart y Rickart duales.

En esta sección daremos una caracterización de un módulo endorregular.

Definición 3.2.1. Sea M un R-módulo. Decimos que M

(1) es un módulo de Rickart si para todo $\varphi \in \text{End}(M)$, $\text{Nuc}(\varphi) \leq^{\oplus} M$;

(2) satisface la condición C_2 si para todo $N \leq M$ con $N \cong M' \leq^{\oplus} M$, se tiene que $N \leq^{\oplus} M$;

(3) satisface la condición D_2 si para todo $N \leq M$ con $M/N \cong M' \leq^{\oplus} M$, se tiene que $N \leq^{\oplus} M$;

(4) es un módulo de Rickart dual o dual-Rickart si para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $\varphi(M) \leq^{\oplus} M$.

Proposición 3.2.2. Sea M un R-módulo, son equivalentes:

(1) M es un módulo de Rickart.

(2) M satisface la condición D_2, y para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $\varphi(M)$ es isomorfo a un sumando directo de M.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos (1). Sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, consideremos la sucesión exacta

$$\eta : 0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(\varphi) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\varphi} \varphi(M) \longrightarrow 0 .$$

Como $\mathrm{Nuc}(\varphi) \leq^{\oplus} M$, entonces ι se escinde, por el Teorema 1.5.4, y por el Teorema 1.5.5, $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) \oplus C$, con $C \cong \varphi(M)$. Por lo tanto $\varphi(M)$ es isomorfo a un sumando directo de M.
Para ver que M satisface D_2, sea $N \leq M$ con $M/N \cong M' \leq^{\oplus} M$. Consideremos los morfismos

$$M \xrightarrow{\pi} M/N \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\iota} M ,$$

donde π es la proyección natural y φ es el isomorfismo dado. Definamos $\beta = \iota\varphi\pi : M \to M$ y observemos que $\mathrm{Nuc}(\beta) = \mathrm{Nuc}(\pi) = N$, y como M es Rickart, entonces $N \leq^{\oplus} M$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos (2). Sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, como $M/\mathrm{Nuc}(\varphi) \cong \varphi(M)$ con $\varphi(M)$ isomorfo a un sumando directo de M, entonces, por la condición D_2, $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ es isomorfo a un sumando directo de M.

□

Proposición 3.2.3. Sea M un R-módulo, son equivalentes:

(1) M es un módulo dual-Rickart.

(2) M satisface C_2 y $\varphi(M) \cong M' \leq^{\oplus} M$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos (1). Es claro que se cumple la segunda parte de (2). Para ver que M satisface la condición C_2, sea $N \leq M$ con $N \cong M' \leq^{\oplus} M$. Consideremos los siguentes morfismos

$$M \xrightarrow{\pi} M' \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\iota} M ,$$

donde π es la proyección de M sobre M' y φ es el isomorfismo dado. Definamos $\beta = \iota\varphi\pi : M \to M$. Entonces $\beta(M) = \varphi(M') = N$, con lo que N es la imagen de un morfismo, como M es dual-Rickart, se tiene que $N \leq^{\oplus} M$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos (2) y sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Por hipótesis $\varphi(M) \cong M' \leq^{\oplus} M$ y M satisface C_2, entonces $\varphi(M) \leq^{\oplus} M$. □

Teorema 3.2.4. Sea M un R-módulo, son equivalentes:

(1) M es un módulo Rickart y satisface C_2.

(2) M es un módulo dual-Rickart y satisface D_2.

(3) M es endorregular.

Demostración. (1) ⇒ (2) Supongamos (1). Por la Proposición 3.2.2, M satisface la condición D_2 y para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $\varphi(M) \cong N \leq^{\oplus} M$, por la Proposición 3.2.3, se sigue que M es dual-Rickart, con lo que hemos probado (2).
(2) ⇒ (1) Supongamos (2). Por la Proposición 3.2.3 M satisface la condición C_2 y para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $\varphi(M) \cong N \leq^{\oplus} M$, por la Proposición 3.2.2 se sigue que M es Rickart.
(2) ⇒ (3) Supongamos (2) y (1). Para todo $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, $\mathrm{Nuc}(\varphi), \varphi(M) \leq^{\oplus} M$, por el Lema 3.1.7, se sigue que M es endorregular.
(3) ⇒ (1) Supongamos (3). Por el Lema 3.1.7, M es Rickart y dual-Rickart, por lo que también satisface la condición C_2. □

3.3. Regularidad en un módulo.

Veamos como los conceptos mencionados en la Definición 3.1.2 se relacionan entre ellos. Primero enunciemos un teorema que vamos a ocupar más adelante.

Teorema 3.3.1. Sea $N \neq 0$ un R-módulo y $M := \bigoplus_{i \in I} N$ la suma directa de copias de N. donde $I \neq \varnothing$.

(1) Si I es infinito y N es finitamente generado, entonces M es endoregular (respectivamente, unitaleral endoregular) si y sólo si $\mathrm{End}(N)$ es semisimple (respectivamente, simple artiniano). Entonces si R es conmutativo, I es infinito, y N es finitamente generado, entonces M es endoregular (respectivamente, unitariamente endoregular) si y sólo si es semisimple (respectivamente, anulado por un ideal máximo).

(2) M es unitariamente endoregular si y sólo si I es finito y N es unitariamente endoregular.

Demostración. Véase [2, Teorema 1.10]. □

Teorema 3.3.2. Sea R un anillo, y M un R-módulo. Consideremos los siguientes enunciados.

(1) M es endorregular y $\mathrm{End}(M)$ es conmutativo.

(2) M es fuertemente endorregular.

(3) M es unitariamente endorregular.

(4) M es unilateral endorregular.

(5) M es endorregular.

Entonces (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5).

Demostración. (1) ⇒ (2). Supongamos (1). Como $\mathrm{End}(M)$ es conmutativo, entonces todos sus idempotentes son centrales, por la Proposición 2.1.5, $\mathrm{End}(M)$ es fuertemente regular.
(2) ⇒ (3). Supongamos (2). Sea $a \in \mathrm{End}(M)$. Por la Proposición 2.1.6, existe $t \in R$

unidad tale que $a = t(ax)$, con $a = a^2x$ y ax idempotente central. Entonces $at^{-1} = ax$, multiplicando ambos lados por a, $at^{-1}a = axa = a^2x = a$. Por lo tanto M es unitariamente endorregular.
(3) $\Rightarrow$ (4) y (4) $\Rightarrow$ (5) son inmediatos. □

Ejemplo 3.3.3. Sea $\mathbf{H}$ el anillo de los cuaterniones. Como $\mathbf{H}$ es un anillo no conmutativo, se tiene que $\mathbf{H} \cong \operatorname{End}(M)$, además al ser un anillo con división H es fuertemente regular. Por lo tanto H es fuertemente endorregular pero $\operatorname{End}(M)$ no es conmutativo.

Ejemplo 3.3.4. $\mathbb{R}^2$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es unitariamente endorregular pero no fuertemente endorregular.

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces $2 = \dim(T(\mathbb{R}^2)) + \dim(\operatorname{Nuc}(T))$. Si $\dim(T(\mathbb{R}^2)) = 0$ entonces $T = 0$ y $T = TidT$. Si $\dim(T(\mathbb{R}^2)) = 2$, entonces R es un isomorfismo y $T = TT^{-1}T$. Si $\dim(T(\mathbb{R}^2)) = \dim(\operatorname{Nuc}(T)) = 1$, consideremos $N, N' \leq \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Nuc}(T) \bigoplus N$ y $\mathbb{R}^2 = T(\mathbb{R}^2) \bigoplus N'$. Observemos que $\dim(N') = 1 = \dim(\operatorname{Nuc}(T))$ con lo que $N' \cong \operatorname{Nuc}(T)$. Sea $\beta : N' \to \operatorname{Nuc}(T)$ dicho isomorfismo. Por un argumento similar a la prueba del Lema 3.1.7, la restricción de T a N, $T|_N : N \to T(\mathbb{R}^2)$ es un isomorfismo. Definamos $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $L(x+y) = T^{-1}|_N(x)+\beta(y)$, con $x \in T(\mathbb{R}^2)$ y $y \in N'$. Veamos que L es una transformación lineal. Sean $a = x + y$, $b = x' + y' \in \mathbb{R}^2$, con $x, x' \in T(\mathbb{R}^2)$, $y, y' \in N'$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} L(a + br) &= L((x + x'r) + (y + y'r)) = T^{-1}|_N(x + x'r) + \beta(y + y') \\ &= T^{-1}|_N(x) + \beta(y) + T^{-1}|_N(x')r + \beta(y)r = L(a) + L(b)r. \end{aligned}$$

Ahora, sean $x \in T(\mathbb{R}^2)$ y $y \in N'$ tales que $0 = L(x + y) = T^{-1}|_N(x) + \beta(y)$, entonces $T^{-1}|_N(x) = -\beta(y) \in N \cap \operatorname{Nuc}(T) = 0$, con lo que $x = 0 = y$, por lo tanto L es inyectiva y por ende biyectiva. Si $w \in \mathbb{R}^2$, $w = x + y$, con $x \in \operatorname{Nuc}(T)$ y $y \in N$, entonces

$$TLT(w) = TLT(x + y) = TLT(y) = TT^{-1}|_N(T(y)) = T(y) = T(x + y) = T(w),$$

con lo que $T = TLT$, con L unidad de $\operatorname{End}(M)$. Por lo tanto $\mathbb{R}^2$ es unitariamente endorregular.
Luego Sean $T, L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dadas por $T(x, y) = (y, x)$ y $L(x, y) = (0, y)$, entonces T es idempotente y $TL(x, y) = T(0, y) = (y, 0)$ pero $LT(x, y) = L(y, x) = (0, x)$, es decir, T no es central, por la Proposición 2.1.5, $\mathbb{R}^2$ no es fuertemente endorregular. □

Ejemplo 3.3.5. Sea $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es visto como un anillo. Como $\mathbb{R}$ es simple y artiniano, pues su retícula de ideales es finita, entonces por el Teorema 3.3.1, M es unilateral endorregular y como M consiste de copias infinitas de $\mathbb{R}$, nuevamente por el Teorema 3.3.1, M no es unitariamente endoregular.

Ejemplo 3.3.6. Sea $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es visto como un $\mathbb{Z}$−módulo. Observemos que cada elemento en $S = \operatorname{End}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ es de la forma f_a, con $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, es decir, $f_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, entonces, es fácil ver que los ideales $f_2S = \{f_0, f_2, f_3\}$ y $f_3S = \{f_0, f_3\}$ son simples y $S = f_2S + f_3 \operatorname{End}(M)$, con lo que $\operatorname{End}(M)$ es semisimple. Por el Teorema 3.3.1, M es endorregular. Además $\operatorname{End}(M)$ no es simple, por el Teorema 3.3.1, M no es unilateral endoregular.

3.4. Grupos abelianos.

En esta corta sección veremos un ejemplo importante de módulos endorregulares, los grupos abelianos divisibles y libres de torsión.

Definición 3.4.1. Sea G un $\mathbb{Z}$-módulo. Diremos que G es

(1) divisible si para todo entero positivo n se tiene que $nG = G$.

(2) libre de torsión si para todo entero positivo n y $x \in G$, $xn = 0$ implica que $x = 0$, es decir, el único elemento de orden finito es 0.

Observación 3.4.2. Si G es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible entonces $nG = G$ para todo entero $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Teorema 3.4.3. Todo $\mathbb{Z}$-módulo divisible y libre de torsión es endorregular.

Demostración. Sea G un $\mathbb{Z}$-módulo divisible y libre de torsión. Veamos que a G le podemos dar estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $g \in G$, existe $y \in G$ tal que $g = ny$. Ahora, si $g = ny'$, para algún $y \in G$, entonces $n(y-y') = 0$, con lo que $y = y'$, pues G es libre de torsión. Definamos la operación $\mu : \mathbb{Q} \times G \to G$, dada por: si $g \in G$, $ag = by$, para un único $y \in G$, entonces $\mu(\frac{a}{b}, g) = y$.
μ está bien definida: supongamos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y sean $y, y' \in G$ tales que $ag = by$ y $cg = dy'$, entonces $bdy' = bcg = adg = bdy$, con lo que $\mu(\frac{a}{b}, g) = y = y' = \mu(\frac{c}{d}, g)$.
Observemos que la restricción de μ a $\mathbb{Z} \times G$ es la acción de $\mathbb{Z}$ en G.
Luego, sean $g, h \in G$, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, además consideremos a los elementos $y_1, y_2, z_1, x, w, z \in G$ tales que $ag = by_1$, $cg = dy_2, ay_2 = bw, acg = bdx, ah = bz_1, (ad + bc)g = bdz$.

1) $\mu(1, g) = g$.

2) Como $ay_2 = bw$, y $dy_2 = cg$ entonces $bdx = acg = ady_2 = bdw$, con lo que $x = w$, es decir $\mu(\frac{a}{b}, \mu(\frac{c}{d}, g)) = \mu(\frac{ac}{bd}, g)$.

3) Como $a(g + h) = ag + ah = by_1 + bz_1 = b(y_1 + z_1)$, entonces $\mu(\frac{a}{b}, g + h) = y_1 + z_1 = \mu(\frac{a}{b}, g) + \mu(\frac{a}{b}, h)$.

4) Como $adg = dby_1$ y $bcg = bdy_2$, entonces $(ad+bc)g = bd(y_1+y_2)$, con lo que $\mu(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}, g) = \mu(\frac{ad+bc}{bd}, g) = y_1 + y_2 = \mu(\frac{a}{b}, g) + \mu(\frac{c}{d}, g)$.

Por lo tanto G es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Por el Ejemplo 3.1.8, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(G)$ es un anillo regular. Observemos que $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(G) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(G)$, pues si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(G)$ y $g, y \in G$ tales que $ag = by$, entonces $af(g) = bf(y)$, con lo que $f(\mu(\frac{a}{b}, g)) = f(y) = \mu(\frac{a}{b}, f(g))$, se sigue que G es endorregular. □

Capítulo 4

Módulos mórficos y débilmente mórficos.

4.1. Definiciones.

Definición 4.1.1. Sean M un R-módulo y $\varphi \in \operatorname{End}(M)$. Decimos que φ es mórfico si $M/\varphi(M) \cong \operatorname{Nuc}(\varphi)$. Si todo $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ es mórfico, diremos que M es mórfico.

Observación 4.1.2. Si R es conmutativo, entonces para todo $a \in R$ la función $\varphi_a : M \to M$, $\varphi_a(m) = ma$ es un elemento de $\operatorname{End}(M)$, y $\operatorname{Nuc}(\varphi_a) = \{m \in M \mid ma = 0\} =: l_M(a)$.

Con base en la observación anterior tenemos la siguiente

Definición 4.1.3. Sea R conmutativo. Decimos que M es débilmente mórfico si $M/Ma \cong l_M(a)$ para todo $a \in R$.

Proposición 4.1.4. Sean M un R-módulo y $\varphi \in \operatorname{End}(M)$. Entonces φ es mórfico si y sólo si existe $\beta \in \operatorname{End}(M)$ tal que $\operatorname{Nuc}(\beta) = \varphi(M)$ y $\operatorname{Nuc}(\varphi) = \beta(M)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que φ es mórfico. Consideremos la proyección $\pi : M \to M/\varphi(M)$ y un isomorfismo $f : M/\varphi(M) \to \operatorname{Nuc}(\varphi)$. Definamos $\beta = f\pi : M \to \operatorname{Nuc}(\varphi)$. Como π y f son suprayectivas, entonces $\beta(M) = \operatorname{Nuc}(\varphi)$. Luego, $\beta(m) = 0$ si y sólo si $\pi(m) = 0$ si y sólo si $m \in \varphi(M)$. Por lo tanto $\operatorname{Nuc}(\beta) = \varphi(M)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que existe $\beta \in \operatorname{End}(M)$ tal que $\operatorname{Nuc}(\beta) = \varphi(M)$ y $\beta(M) = \operatorname{Nuc}(\varphi)$. Por el primer teorema de isomorfismo $M/\varphi(M) = M/\operatorname{Nuc}(\beta) \cong \beta(M) = \operatorname{Nuc}(\varphi)$. $\square$

Proposición 4.1.5. Sea M un R-módulo. M es mórfico si y sólo si siempre que $M/N \cong K$ se tiene que $M/K \cong N$, donde $N, K \leq M$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es mórfico. Sean $N, K \leq M$ con $M/N \cong K$. Consideremos $\varphi : M/N \to K$ un isomorfismo y definamos $\psi : M \to M$ dado por $\psi(m) = \varphi(m + N)$. Observemos que $\psi(M) = \varphi(M/N) = K$ y $\operatorname{Nuc}(\psi) = N$. Ahora, por la Proposición 4.1.4, existe $\beta \in \operatorname{End}(M)$ tal que $\operatorname{Nuc}(\beta) = \psi(M)$ y $\beta(M) = \operatorname{Nuc}(\psi)$. Entonces $M/K = M/\psi(M) = M/\operatorname{Nuc}(\beta) \cong \beta(M) = \operatorname{Nuc}(\psi) = N$.
$\Leftarrow$) Supongamos que siempre que $M/N \cong K$ se tiene que $M/K \cong N$, donde $N, K \leq M$. Sea $\varphi \in \operatorname{End}(M)$. Como $M/\operatorname{Nuc}(\varphi) \cong \varphi(M)$, entonces $M/\varphi(M) \cong \operatorname{Nuc}(\varphi)$. $\square$

Corolario 4.1.6. Si M es mórfico y $N \leq M$ tal que $N \cong M$, entonces $M = N$.

Demostración. Por el Primer teorema de isomorfismo $M/0 \cong N$, por la Proposición 4.1.5, $M/N \cong 0$, con lo que $N = M$. □

Con la ayuda del Corolario 4.1.6, obtenemos un módulo que es mórfico y un módulo que no lo es.

Ejemplo 4.1.7. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ no es mórfico.

Demostración. Como $2\mathbb{Z} \lneqq \mathbb{Z}$ y $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, por el Corolario 4.1.6, $\mathbb{Z}$ no es mórfico. □

Ejemplo 4.1.8. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ es mórfico.

Demostración. Recordemos que dos grupos cíclicos finitos son isomorfos si y sólo si tienen el mismo orden. Sean $H, K \leq \mathbb{Z}_n$ tales que $\mathbb{Z}_n/H \cong K$, entonces $|\mathbb{Z}_n/H| = |K|$. Por otro lado, el Teorema de Lagrange implica que $|\mathbb{Z}_n/H||H| = n = |\mathbb{Z}_n/K||K|$, con lo que $|H| = |\mathbb{Z}_n/K|$, por lo tanto $\mathbb{Z}_n/K \cong H$. □

Si bien es claro que si R es conmutativo entonces todo R-módulo mórfico es débilmente mórfico, la implicación contraria no siempre se cumple, como veremos en el siguente

Ejemplo 4.1.9. El $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ es débilmente mórfico pero no es mórfico.

Demostración. Sean $K = \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_4$ y $N = \mathbb{Z}_2 \times 0$, subgrupos de M. Sea $\varphi : M \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\varphi(([a],[b])) = [b]$, para todo $([a],[b]) \in M$. Si $([a],[b]) = ([a'],[b'])$, tenemos 3 casos.
Caso 1: $b \equiv 0 \mod 4$, o $b \equiv 2 \mod 4$ entonces $b \equiv 0 \mod 2$.
Caso 2: $b \equiv 1 \mod 4$, entonces $b \equiv 1 \mod 2$.
Caso 3: $b \equiv 3 \mod 4$, entonces $b \equiv 1 \mod 2$.
Como $b \equiv b' \mod 4$, podemos concluir que $\varphi([a],[b]) = \varphi([a'],[b'])$, con lo que φ está bien definida.
Sean $([a],[b]), ([a'],[b']) \in M$, entonces

$$\varphi(([a],[b]) + ([a'],[b'])) = [b] + [b'] = \varphi(([a],[b])) + \varphi(([a'],[b'])).$$

Por lo tanto φ es un morfismo de grupos. Observemos que φ es suprayectiva, lo cual implica que el $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ tiene 4 elementos, además si $([a],[b]) \in K$, entonces $\varphi(([a],[b])) = [0]$, como K tiene 4 elementos, podemos concluir que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = K$. Entonces $M/K \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times 0 = N$.
Por otro lado, tenemos que si $\pi : M \to Z_4$, es la proyección sobre $\mathbb{Z}_4$, entonces $M/N \cong \mathbb{Z}_4$, pero $\mathbb{Z}_4 \ncong K$, pues $\mathbb{Z}_4$ sólo tiene un elemento de orden 2, $[2]$, mientras que $([0],[2]), ([1],[0])$ y $([1],[2])$ son elementos en K de orden 2. Por la Proposición 4.1.5 M no es mórfico.
Ahora, sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos los siguientes 4 casos.
Caso 1: $n = 4r$, para alguna $r \in \mathbb{Z}$. Entonces si $([a],[b]) \in M$, tenemos que $([a],[b])n = ([4ra],[4rb]) = ([0],[0])$, con lo que $Mn = 0$ y $l_M(n) = M$. Por lo tanto $M/Mn \cong l_M(n)$.
caso 2: $n = 4r + 1$, para alguna $r \in \mathbb{Z}$. Sea $([a],[b]) \in M$, entonces $([a],[b])n = ([4ra + a],[4rb + b]) = [(a),(b)]$, con lo que $Mn = M$. Además $([0],[0]) = ([a],[b])n$ si y sólo si $4ra + a \equiv 0 \mod 2$ y $4rb + b \equiv 0 \mod 4$, con lo que $([a],[b]) = ([0],[0])$. Por lo tanto $l_M(n) = 0$, entonces $M/Ma \cong l_M(n)$.

Caso 3: $n = 4r + 2$, para alguna $r \in \mathbb{Z}$. Veamos que $Mn = 0 \times 2\mathbb{Z}_4$.
$\subseteq$] Sea $([a],[b]) \in M$. Entonces $([a],[b])n = ([4ra + 2a],[4rb, 2b]) = ([0], 2[b]) \in 0 \times 2\mathbb{Z}_4$.
$\supseteq$] Sea $([a], 2[b]) \in 0 \times 2\mathbb{Z}_4$. Observemos que $([a], 2[b]) = ([4ra+2a],[4rb, 2b]) = ([a],[b])n \in Mn$.
Por lo tanto $Mn = 0 \times 2\mathbb{Z}_4$. Sea $\Psi : M \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dada por $\Psi(([a],[b])) = ([a],[b])$. De manera análoga a la prueba de que φ estaba bien definida y era un morfismo de grupos, tenemos que Ψ está bien definida y es un morfismo de grupos. Observemos que Ψ es suprayectiva, entonces $\mathrm{Nuc}(\Psi)$ tiene 2 elementos, además $\Psi(([0],[2])) = ([0],[0])$, con lo que $\mathrm{Nuc}(\Psi) = 0 \times 2\mathbb{Z}_4$. Por lo tanto $M/Mn = M/0 \times 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Luego, $([0],[0]) = ([a],[b])n = ([4ra+2a],[4rb+2b]) = ([0],[2b])$ si y sólo si $2b \equiv 0 \mod 4$ si y sólo si $b \equiv 0 \mod 4$ o $b \equiv 2 \mod 4$. Por lo tanto $l_M(n) = \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_4$. Como $2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$, entonces $l_M(n) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong M/Mn$.
Caso 4: $n = 4r+3$, para alguna $r \in Z$. Si $([a],[b]) \in M$, entonces $([a],[3b])n = ([3a],[9b]) = ([a],[b])$. Por lo tanto $Mn = M$. Además $([0],[0]) = ([a],[b])n = ([a],[3b])$ si y sólo si $([a],[b]) = ([0],[0])$, con lo que $l_M(n) = 0$, de esta manera $M/Mn \cong l_M(n)$.
Por lo tanto M es débilmente mórfico. □

Para cerrar está sección veamos una caracterización de módulos endorregulares que son unitariamente endorregulares.

Teorema 4.1.10. Sea M un R-módulo endorregular. Entonces M es mórfico si y sólo si M es unitariamente endorregular.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es mórfico. Sea $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Por el Lema 3.1.7, $\varphi(M) \oplus N' = M = \mathrm{Nuc}(\varphi) \oplus N$, con $N, N' \leq M$. Más aún, en la demostración del Teorema vimos que $\varphi_N : N \to \varphi(M)$, la restricción de φ a N, con codominio $\varphi(M)$, es un isomorfismo. Ahora, como $M/\varphi(M) \cong N'$ y $M/\varphi(M) \cong \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $N' \cong \mathrm{Nuc}(\varphi)$. Sea $\Psi : N' \to \mathrm{Nuc}(\varphi)$ un isomorfismo. Definamos la función $\beta : M \to M$, dada por, $\beta(x + y) = \varphi_N^{-1}(x) + \Psi(y)$, para todo $x \in \varphi(M)$ y para todo $y \in N'$. β está bien definida, pues $\varphi(M) \oplus N' = M$. Sean $x_1, x_2 \in \varphi(M)$, $y_1, y_2 \in N'$ y $r \in R$, existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $x_1 = \varphi(m_1)$ y $x_2 = \varphi(m_2)$, entonces

$$\begin{aligned}\beta((x_1 + y_1) + r(x_2 + y_2)) &= \beta(\varphi(m_1 + rm_2) + y_1 + ry_2) = (m_1 + rm_2) + \Psi(y_1 + y_2)\\ &= m_1 + \Psi(y_1) + r(m_2 + \Psi(y_2)) = \beta(x_1 + y_1) + r\beta(x_2 + y_2).\end{aligned}$$

Como $\varphi(M) \oplus N' = M$, se sigue que β es suprayectivo. Luego, si $x \in \varphi$ y $y \in N'$, con $x = \varphi(m)$, para algún $m \in M$, entonces $0 = \beta(x+y) = m+\Psi(y)$, aplicando φ, obtenemos, $0 = x$, de donde se sigue que $y = 0$. Por lo tanto β es un isomorfismo. Finalmente observemos que si $x \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$ y $n \in N$, entonces

$$\varphi\beta\varphi(x + n) = \varphi\beta(\varphi(n)) = \varphi(n) = \varphi(x + n).$$

Por lo tanto $\varphi\beta\varphi = \varphi$, con β isomorfismo.
$\Leftarrow$) Supongamos que M es unitariamente endorregular. Sea $\beta \in \mathrm{End}(M)$, existe $\beta \in \mathrm{End}(M)$ isomorfismo tal que $\varphi = \varphi\beta\varphi$. Como $\varphi\beta$ es idempotente, por el Lema 3.1.9, $M = \varphi\beta(M) \oplus \ker(\varphi\beta) = \varphi(M) \oplus \ker(\varphi\beta)$, con lo que $M/\varphi(M) \cong \ker(\varphi\beta)$. Sea $\Psi : \ker(\varphi\beta) \to \ker(\varphi)$, dada por $\Psi(x) = \beta(x)$. Ψ está bien definida, pues si $x \in \ker(\varphi\beta)$,

entonces $\beta(x) \in \ker(\varphi)$. Claramente Ψ es un homomorfismo y es inyectivo, pues β lo es. Si $y \in \ker(\varphi)$, existe $x \in M$ tal que $\beta(x) = y$, con lo que $\varphi(\beta(x)) = \varphi(y) = 0$ y $\Psi(x) = \beta(x) = y$. Por lo tanto $\ker(\varphi\beta) \cong \ker(\varphi)$, de donde se sigue que $M/\varphi(M) \cong \ker(\varphi)$. □

4.2. Módulos reducidos y correducidos.

Definición 4.2.1. Sea M un R-módulo. Decimos que M es reducido si para todo $a \in R$ y para todo $m \in M$ tales que $ma^2 = 0$, entonces $mRa = 0$.

Definición 4.2.2. Sean R conmutativo y M un R-módulo. Decimos que M es correducido si $Ma = Ma^n$ para todo $a \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 4.2.3. Todo V_F espacio vectorial es un módulo reducido.

El siguente resultado nos será de utilidad más adelante.

Teorema 4.2.4. Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo finitamente generado. Si $I \leq R$ es un ideal de R tal que $MI = M$, entonces existe $x \in R$, tal que $x + I = 1_R + I$ y $Mx = 0$.

Demostración. Véase [4, Corolario 2.5]. □

Proposición 4.2.5. Sea R conmutativo, entonces R es regular si y sólo si R es correducido.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que R es regular y sea $a \in R$. Por inducción sobre $n \in \mathbb{Z}^+$ veamos que $aR = a^nR$. Sea $y \in R$ tal que $a = aya = a^2y$, entonces $aR = a^2R$. Supongamos para $n > 2$, que $aR = a^nR$, entonces $a = a^ns$, para alguna $s \in R$. Si $ar \in aR$, entonces $ar = a^nsr$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por ay obtenemos, $ar = ar(ay) = a^{n+1}sry \in a^{n+1}R$, con lo que $aR \subseteq a^{n+1}R$, así tenemos la igualdad $aR = a^{n+1}R$.
$\Leftarrow$) Supongamos que R es correducido. Para $a \in R$ tenemos que $aR = a^2R$, entonces $a = a^2r = ara$ para algún $r \in R$. Por lo tanto R es regular. □

Definición 4.2.6. Sea M un R-módulo. Decimos que M es rígido si para todo $a \in R$ y para todo $m \in M$, $ma^2 = 0$, implica que $ma = 0$.

Proposición 4.2.7. Sea M un R-módulo. Si M es reducido, entonces M es rígido.

Demostración. Supongamos que M es reducido y sean $a \in R$ y $m \in M$ tales que $ma^2 = 0$, entonces $mRa = 0$, en particular $ma = 0$. Por lo tanto M es rígido. □

Lema 4.2.8. Un R-módulo M es rígido si y sólo si $l_M(a^n) = l_M(a)$ para todo $a \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es rígido. Sea $a \in R$, por inducción sobre n veamos que $l_M(a^n) = l_M(a)$. Si $n = 1$ la afirmación es cierta. Hagamos el caso para $n = 2$. Sea $m \in l_M(a^2)$, entonces $ma^2 = 0$, por hipótesis, $ma = 0$, con lo que $m \in l_M(a)$, así $l_M(a^2) \subseteq l_M(a)$, la otra contención siempre la tenemos. Por lo tanto $l_M(a^2) = l_M(a)$. Ahora, supongamos para $n > 2$ que $l_M(a^n) = l_M(a)$ y sea $m \in l_M(a^{n+1})$, entonces $ma^{n+1} = ma(a^n) = 0$, entonces

$ma \in l_M(a^n) = l_M(a)$, con lo que $ma^2 = 0$, por hipótesis $ma = 0$, por lo tanto $m \in l_M(a)$, obteniendo así $l_M(a^{n+1}) = l_M(a)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $l_M(a) = l_M(a^n)$ para todo $a \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean $a \in R$ y $m \in M$ tales que $ma^2 = 0$, como $l_M(a^2) = l_M(a)$, entonces $ma = 0$, es decir, M es rígido. □

Ahora podemos dar otra caracterización de un módulo endoregular abeliano.

Teorema 4.2.9. Sea M un R-módulo y denotemos por $S := \mathrm{End}(M)$ al anillo de endomorfismos de M. Entonces M es endorregular abeliano si y sólo si M es mórfico y S es reducido como S-módulo.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es endorregular abeliano. Sean $\varphi, f \in S$ tales que $\varphi f^2 = 0$. Por la Proposición 2.1.5, S es fuertemente regular, entonces existe $h \in S$ tal que $f = f^2 h$, con lo que $\varphi f = \varphi f^2 h = 0$. Ahora, existe $g \in S$ tal que $\varphi = \varphi g \varphi$, con $g\varphi$ idempotente, y por hipótesis, también es regular. Sea $\psi \in S$, entonces $\varphi\psi f = \varphi g \varphi \psi f = \varphi \psi g \varphi f = 0$. Por lo tanto $\varphi S f = 0$.
$\Leftarrow$) Supongamos que M es mórfico y S reducido, como $S-$anillo. Sea $\varphi \in S$. Por la Proposición 4.2.7 S es rígido, y por el Lema 4.2.8 $l_S(\varphi^n) = l_S(\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que $\varphi(M) = r'_M(l_S(\varphi)) := \{m \in M \mid f(m) = 0 \text{ para todo } f \in l_S(\varphi)\}$.
$\subseteq$] Sea $x \in \varphi(M)$, entonces existe $m \in M$ tal que $x = \varphi(m)$, si $f \in l_S(\varphi)$, entonces $f\varphi = 0$, en particular, $f\varphi(m) = f(x) = 0$. Por lo tanto $x \in r'_M(l_S(\varphi))$.
$\supseteq$] Sea $m \in r'_M(l_S(\varphi))$. Por la Proposición 4.1.4, existe $\beta \in S$ tal que $\varphi(M) = \mathrm{Nuc}(\beta)$ y $\beta(M) = \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $\beta\varphi = 0$, con lo que $\beta \in l_S(\varphi)$, entonces $\beta(m) = 0$, lo que implica que $m \in \mathrm{Nuc}(\beta) = \varphi(M)$.
Entonces tenemos que $\varphi(M) = r'_M(l_S(\varphi)) = r'_M(l_S(\varphi^2)) = \varphi^2(M)$. Si $m \in M$ entonces $\varphi(m) \in \varphi^2(M)$, entonces existe $n \in M$ tal que $\varphi(m) = \varphi^2(n)$, con lo que $m - \varphi(n) \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $m = (m - \varphi(n)) + \varphi(n) \in \mathrm{Nuc}(\varphi) + \varphi(M)$. Por lo tanto $M = \mathrm{Nuc}(\varphi) + \varphi(M)$. Ahora, sea $x \in \mathrm{Nuc}(\varphi) \cap \varphi(M)$, entonces $x = \varphi(m)$, para alguna $m \in M$ y $\varphi(x) = \varphi^2(m) = 0$. Por la Proposición 4.1.4, existe $\psi \in S$ tal que $\psi(M) = \mathrm{Nuc}(\varphi^2)$ y $\mathrm{Nuc}(\psi) = \varphi^2(M)$, entonces $\varphi^2\psi = 0$, y al ser S reducido, $\varphi S \psi = 0$, en particular $\varphi\psi = 0$. Ahora, $\mathrm{Nuc}(\varphi^2) = \psi(M) \subseteq \mathrm{Nuc}(\varphi)$, entonces $m \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, con lo que $\varphi(m) = x = 0$. Por lo tanto $M = \varphi(M) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\varphi)$ lo cual implica, por el Teorema 3.1.11, que M es endorregular abeliano. □

Proposición 4.2.10. Si R es conmutativo y M es un R-módulo, entonces M es reducido si sólo si $l_M(a) = l_M(a^n)$ para todo $a \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es reducido. Por la Proposición 4.2.7, M es rígido y, por el Lema 4.2.8, se sigue el resultado.
$\Leftarrow$) Supongamos que $l_M(a) = l_M(a^n)$ para todo $a \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $a \in R$ y $m \in M$ tales que $ma^2 = 0$, por hipótesis $m \in l_M(a)$, con lo que $ma = 0$. Para $r \in R$, tenemos que $ma(r) = mra = 0$, así $mRa = 0$, es decir, M es reducido. □

Teorema 4.2.11. Sean R conmutativo y $M_R \neq 0$. Son equivalentes:

(1) M es débilmente mórfico y reducido.

(2) M es débilmente mórfico y correducido.

(3) M es correducido y reducido.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos (1). Sea $a \in R$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la Proposición 4.2.10, $l_M(a^n) = l_M(a)$, además al ser M débilmente mórfico $M/Ma \cong l_M(a)$ y $M/Ma^n \cong l_M(a^n)$, con lo que $M/Ma \cong M/Ma^n$, sea φ dicho isomorfismo. Entonces $\varphi(Ma/Ma^n) = \varphi(M/Ma^n)a = (M/Ma)a = Ma/Ma = 0$, entonces, $Ma/Ma^n = 0$ y como $Ma^n \subseteq Ma$, concluimos que $Ma = Ma^n$, es decir, M es correducido.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (2). Sean $a \in R$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Como M es correducido $Ma = Ma^n$ y al ser M débilmente mórfico, por la Proposición 4.1.4, existe $\beta \in S$ tal que $\beta(M) = l_M(a^n)$ y $\operatorname{Nuc}(\beta) = Ma^n$, entonces $0 = \beta(Ma^n) = \beta(Ma) = \beta(M)a = l_M(a^n)a$, con lo que $l_M(a^n) \subseteq l_M(a)$, por la Proposición 4.2.10, M es reducido.
(2) $\Rightarrow$ (3). Esto es claro, pues (2) $\Rightarrow$ (1).
(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (3). Sea $a \in R$. Veamos que $M = Ma \bigoplus l_M(a)$. Si $x \in Ma \cap l_M(a)$, entonces $x = ma$, para algún $m \in M$ y $xa = ma^2 = 0$, con lo que $m \in l_M(a^2) = l_M(a)$, por la Proposición 4.2.10, de esta manera $x = ma = 0$. Por lo tanto $Ma \cap l_M(a) = 0$. Sea $m \in M$, como M es correducido, $Ma = Ma^2$, entonces $ma = na^2$, para algún $n \in M$. Entonces $(m - na)a = 0$, con lo que $(m - na) \in l_M(a)$, entonces $m = (m - na) + na \in l_M(a) + Ma$. Por lo tanto $M = Ma \bigoplus l_M(a)$, de lo que se sigue que $M/Ma \cong l_M(a)$. □

El siguiente Teorema se encuentra en [10, Corolario 2].

Teorema 4.2.12. Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo finitamente generado. Son equivalentes:

(1) M es débilmente mórfico y reducido.

(2) M es correducido.

(3) $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ es regular.

(4) $M = Ma \bigoplus l_M(a)$ para todo $a \in R$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Se sigue del Teorema 4.2.11.
(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos (2). Sea $a \in R$. Como M es correducido $Ma = Ma^2$. Considerando a los ideales $aR, a^2R \leq R$, con la última igualdad podemos concluir que $M(aR) = M(a^2R) = M(aR)(aR)$, además como M es finitamente generado, digamos que $\{m_1, \ldots, m_n\}$ genera a M, entonces $\{m_1a, \ldots, m_na\}$ genera a $M(aR)$. Por el Teorema 4.2.4, como $M(aR) = M(aR)(aR)$, entonces existe $r \in R$, tal que el elemento $x = 1_R - ar$ cumple que $M(aR)(x) = 0$, es decir, para todo $s \in R$ y para todo $m \in M$, $mas(x) = mas(1_R - ar) = 0$, en particular, si $s = 1_R$, entonces $m(a - a^2r) = 0$, con lo que $a - a^2r \in \operatorname{Ann}_R(M)$. Entonces existe $y \in \operatorname{Ann}_R(M)$ tal que $a - a^2r = a - ara = y \in \operatorname{Ann}_R(M)$, lo que es equivalente a que $a + R/\operatorname{Ann}_R(M) = ara + R/\operatorname{Ann}_R(M)$, es decir, $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ es regular.
(3) $\Rightarrow$ (4). Supongamos (3). Sea $a \in R$ y denotemos por $S := \operatorname{End}(M)$ al anillo de endomorfismos de M. Consideremos el morfismo $\varphi : R \to S$ dado por $\varphi(r)(m) = \varphi_r(m) = mr$, es fácil ver que $\operatorname{Nuc}(\varphi) = \operatorname{Ann}_R(M)$ y por lo tanto $\beta = \{\varphi_r \mid r \in R\} \cong R/\operatorname{Ann}_R(M)$ y como $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ es conmutativo y regular, entonces $\beta \subseteq S$ es un anillo fuertemente regular, por la Proposición 2.1.5. Por la Proposición 2.1.6, $\varphi_a = \varphi_e\varphi_t$, con φ_e idempotente y φ_t isomorfismo, entonces $Ma = \varphi_a(M) = \varphi_e(\varphi_t(M)) = \varphi_e(M)$ y $l_M(a) = \operatorname{Nuc}(\varphi_a) = \operatorname{Nuc}(\varphi_e)$.

Como $\varphi_e \in S$ es idempotente, por Lema 3.1.9, $M = \varphi_e(M) \oplus \mathrm{Nuc}(\varphi_e) = Ma \oplus l_M(a)$.
(4) $\Rightarrow$ (1). Supongamos (4). Sea $a \in R$. Como $M = Ma \oplus l_M(a)$, se sigue que M es débilmente mórfico. Luego, si $m \in M$ es tal que $ma^2 = 0$, entonces $ma \in l_M(a) \cap Ma = 0$, con lo que $ma = 0$ y como R es conmutativo, se sigue que M es reducido. □

Observación 4.2.13. En la demostración anterior únicamente se usó la hipótesis de que M fuera finitamente generado en (2) $\Rightarrow$ (3).

Teorema 4.2.14. Si R es conmutativo y regular, entonces todo R-módulo M es débilmente mórfico.

Demostración. Como R es regular, entonces $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ también es regular. Por el Teorema 4.2.12 M es débilmente mórfico. □

Capítulo 5

Módulos multiplicación.

5.1. Definiciones.

Definición 5.1.1. Sea M un R-módulo. Decimos que M es un módulo multiplicación si para todo submódulo N de M existe un ideal A de R tal que $N = MA$.

Ejemplo 5.1.2. Todo anillo conmutativo es multiplicación y todo R-módulo simple también es multiplicación.

Definición 5.1.3. Sea M un R-módulo. Para un submódulo N de M definimos $[N : M] := \{r \in R \mid Mr \subseteq N\}$.

Observación 5.1.4. $[N : M]$ es un ideal de R, para todo submódulo N de M, porque es el anulador de M/N.

Proposición 5.1.5. Sean M un módulo multiplicación y R un anillo conmutativo. Entonces para todo $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ y $m \in M$, existe $r \in R$, que depende de m, tal que $\varphi(m) = mr$.

Demostración. Sean $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ y $m \in M$. Como M es un módulo multiplicación, existe un ideal A de R tal que $mR = MA$, de aquí, tenemos que $\varphi(mR) = \varphi(MA) = \varphi(M)A \subseteq MA = mR$, entonces existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = mr$. □

Proposición 5.1.6. Sean R conmutativo y M un R-módulo multiplicación, entonces S es conmutativo.

Demostración. Sean $f, g \in S$ y $m \in M$. Por la Proposición 5.1.5, existen $r, s \in R$ tales que $f(m) = mr$ y $g(m) = ms$, entones $f(g(m)) = f(ms) = (mr)s = (ms)r = g(mr) = g(f(m))$. □

Proposición 5.1.7. Si M es un módulo multiplicación, entonces para todo submódulo N de M, $N = M[N : M]$.

Demostración. Sea N un submódulo de M, entonces existe un ideal A de R tal que $N = MA$. Veamos que $MA = M[N : M]$.
$\subseteq$) Sea $mr \in MA = N$. Si $m' \in M$, entonces $m'r \in MA = N$, lo que implica que $r \in [N : M]$.
$\supseteq$) Sea $mr \in M[N : M]$, entonces $Mr \subseteq N$, en particular, $mr \in N$. □

Observación 5.1.8. Todo módulo M se puede escribir como $M = \sum_{m\in M} mR$. Si M es un módulo multiplicación, entonces $M = \sum_{m\in M} M[mR : M]$.

Teorema 5.1.9. Sean R conmutativo y M un R-módulo. Si M es un módulo multiplicación, entonces $R = r_R(m) + \sum_{n\in M}[nR : M]$, para todo $m \in M$, donde $r_R(m) := \{r \in R \mid mr = 0\} \leq R$.

Demostración. Procederemos por contradicción, supongamos que existe $m \in M$ tal que $R \neq r_R(m) + \sum_{n\in M}[nR : M]$. Como R es conmutativo con unidad, existe un ideal máximo Q de R tal que $r_R(m) + \sum_{n\in M}[nR : M] \subseteq Q$. Entonces $[nR : M] \subseteq Q$ para todo $n \in M$, por lo que $M[nR : M] \subseteq MQ$, para todo $n \in N$, y por la Observación 5.1.8, $MQ = M$. Ahora, por la Proposición 5.1.7,

$$mR = M[mR : M] = MQ[mR : M] = M[mR : M]Q = mRQ = mQ,$$

entonces $m = mq$ para algún $q \in Q$, lo que implica que $m(1_R - q) = 0$, entonces $1 - q \in r_R(m) \subseteq r_R(m) + \sum_{n\in M}[nR : M] \subseteq Q$, así $1_R \in Q$, contradiciendo que Q es un ideal máximo de R. Por lo tanto $R = r_R(m) + \sum_{n\in M}[nR : M]$ para todo $m \in M$. □

La siguiente prueba se encuentra en [13, Proposición 1.3].

Proposición 5.1.10. Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo y A un ideal de R, con $R = A + \sum_{m\in M}[mR : M]$. Consideremos $f \in S$ tal que para todo $m \in M$ existe $r \in R$ tal que $f(m) = mr$. Entonces existe $r' \in R$ tal que $f(x) = xr'$ para todo $x \in r_M(A)$.

Demostración. Como $R = A + \sum_{m\in M}[mR : M]$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$, $r_i \in [y_iR : M]$, $1 \leq i \leq n$ y $a \in A$ tales que $1_R = a + r_1 + \cdots + r_n$. Existen $c_i \in R$ tales que $f(y_i) = y_ic_i$. Consideremos $r = r_1c_1 + \cdots + r_nc_n$. Sea $x \in r_M(A)$, entonces $x = xa + xr_1 + \cdots + xr_n = xr_1 + \cdots + xr_n$. Como $Mr_i \subseteq y_iR$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces existe $t_i \in R$, tal que $xr_i = y_it_i$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(xr_1 + \ldots xr_n) = f(y_1t_1 + \ldots y_nt_n) \\ &= f(y_1)t_1 + \ldots f(y_n)t_n \\ &= y_1c_1t_1 + \ldots y_nc_nt_n \\ &= xr_1c_1 + \cdots + xr_nc_n = xr. \end{aligned}$$

□

Lema 5.1.11. Sean R conmutativo y $P = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ finito, tales que $R = r_R(x_i) + \sum_{m\in M}[mR : M]$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces $R = r_R(P) + \sum_{m\in M}[mR : M]$, donde $r_R(P) := \{r \in R \mid x_ir = 0 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Demostración. Se procederá por inducción sobre n. Si $n = 2$, y $P = \{x_1, x_2\}$, con $R = r_R(x_1) + \sum_{m\in M}[mR : M]$ y $R = r_R(x_2) + \sum_{m\in M}[mR : M]$, entonces existen $r_2 \in r_R(x_2)$ y $t \in \sum_{m\in M}[mR : M]$ tales que $1_R = r_2 + t$. Ahora, si $s \in R$, entonces $s = r_1 + t'$, para algunos $r_1 \in r_R(x_1)$ y $t' \in \sum_{m\in M}[mR : M]$. Luego, $s = r_1(1_R) + t' = r_1(r_2 + t) + t' = (r_1r_2) + (r_2t + t') \in r_R(P) + \sum_{m\in M}[mR : M]$.
Supongamos cierto el resultado para $n > 2$. Si $P = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ con $R = r_R(x_i) + \sum_{m\in M}[mR : M]$ para todo $1 \leq i \leq n + 1$. Como $R = r_R(\{x_1, \ldots, x_n\}) + \sum_{m\in M}[mR : M]$, entonces $1_R = r + y$, con $r \in r_R(\{x_1, \ldots, x_n\})$ y $y \in \sum_{m\in M}[mR : M]$, entonces si $s \in R$ tenemos que $s = r_{n+1} + y'$ con $r_{n+1} \in r_R(x_{n+1})$ y $y' \in \sum_{m\in M}[mR : M]$. Entonces $s = r_{n+1}(r + y) + y' = r_{n+1}r + r_{n+1}y + y' \in r_R(P) + \sum_{m\in M}[mR : M]$. □

Teorema 5.1.12. Sean R conmutativo y $P \subseteq M$ finito con M un módulo multiplicación. Entonces para todo $\varphi \in S$ existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = mr$ para cualquier $m \in P$.

Demostración. Sea $\varphi \in S$. Por la Proposición 5.1.5, para todo $m \in P$, $\varphi(m) = mr_m$ para algún $r_m \in R$. Por el Teorema 5.1.9, $R = r_R(m) + \sum_{m \in M}[mR : M]$ para todo $m \in P$ y por el Lema 5.1.11, $R = r_R(P) + \sum_{m \in M}[mR : M]$. Finalmente por la Proposición 5.1.10, existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = mr$ para todo $x \in r_M(r_R(P))$, como $P \subseteq r_M(r_R(P))$, entonces se sigue el resultado. $\square$

Corolario 5.1.13. Sean R conmutativo y M un R-módulo multiplicación finitamente generado. Entonces para todo $\varphi \in S$ existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = mr$ para todo $m \in M$.

Demostración. Sea $P = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto que genera a M. Por la Proposición 5.1.10, existe $r \in R$ tal que $\varphi(x) = rx$ para todo $x \in P$. Sea $m \in M$, entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in R$ tal que $m = x_1 s_1 + \ldots x_n s_n$, entonces $\varphi(m) = \varphi(x_1 s_1 + \ldots x_n s_n) = \varphi(x_1)s_1 + \ldots \varphi(x_n)s_n = x_1 r s_1 + \ldots x_n r s_n = (x_1 s_1 + \ldots x_n s_x)r = mr$. $\square$

Teorema 5.1.14. Sea R conmutativo y M un módulo multiplicación finitamente generado. M es débilmente mórfico si y sólo si M es mórfico.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es débilmente mórfico. Por el Corolario 5.1.13, para todo $\varphi \in S$, tenemos que existe $r \in R$ tal que $\varphi(m) = mr$, para toda $m \in M$, es decir $\varphi = \varphi_r$, como M es débilmente mórfico $M/Mr \cong l_M(r)$, que es lo mismo que $M/\varphi(M) \cong \mathrm{Nuc}(\varphi)$.
$\Leftarrow$) Todo módulo mórfico es débilmente mórfico. $\square$

Capítulo 6

Módulos JT-regulares.

6.1. Definiciones.

Definición 6.1.1. Sean M un R-módulo y $N \leq M$ un submódulo de M. Decimos que:

(1) N es puro en M si la sucesión

$$0 \longrightarrow N \otimes E \longrightarrow M \otimes E$$

es exacta para todo R-módulo izquierdo E.

(2) N es RD-puro en M si $Na = Ma \cap N$, para todo $a \in R$.

(3) M es JT-regular si para todo $m \in M$, $mR = Ma = Ma^2$, para algún $a \in R$.

(4) M es débilmente JT-regular si $Ma = Ma^2$, para todo $a \in R$.

(5) M es fuertemente F-regular si cada uno de sus submódulos finitamente generados es un sumando directo.

(6) M es F-regular si todos sus submódulos son puros en M.

Los módulos JT-regulares fueron introducidos por Jayaram y Tekir en [8]. Los módulos fuertemente F-regulares fueron nombrados por Ramamurthi y Rangaswamy en [14], al estudiar módulos finitamente cuasi-inyectivos. Finalmente, Fieldhouse llamó a los módulos F-regular por ese nombre en [6].

Ejemplo 6.1.2. Decimos que un entero positivo n es un entero libre de cuadrados si $n > 1$ y para todo número primo p, p^2 no divide a n. Esto equivale a decir que si $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$, donde $\{p_i\}_{i \leq 1}$ es la sucesión ascendente de números primos: $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \ldots$ y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, para todo $i \geq 1$ y $\alpha_j = 0$ es igual a cero para toda j salvo un número finito, entonces $\alpha_i \neq 0$ implica que $\alpha_i = 1$. Consideremos al $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_n$, con n un entero libre de cuadrados, entonces M es JT-regular.

Demostración. Supongamos que $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ es un entero libre de cuadrados. Sea $[m] \in \mathbb{Z}_n$. Veamos que $\mathbb{Z}[m] = m\mathbb{Z}_n = m^2\mathbb{Z}_n$.

Si $m = 0$ el resultado es claro. Supongamos que $m \neq 0$. Observemos que $\mathbb{Z}[m] = m\mathbb{Z}_n$ y $m^2\mathbb{Z}_n \subseteq m\mathbb{Z}_n$. Sean $d = (m, n)$ y $d' = (m^2, n)$ el máximo común de m y n y el de m^2 y n, respectivamente. Como $d = (-m, n)$ ponemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m > 0$ y que m se puede escribir como el producto $m = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\beta_i}$. Por [11, Proposición 7.4.13], $d = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\gamma_i}$ y $d' = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\delta_i}$, con $\gamma_i = \text{mín}\{\alpha_i, \beta_i\}$ y $\delta_i = \text{mín}\{\alpha_i, \beta_i^2\}$, para todo $i \geq 1$. Sea $i \geq 1$. Si $\gamma_i = \alpha_i$ entonces $\alpha_i \leq \beta_i \leq \beta_i^2$, de está manera, $\delta_i = \alpha_i = \gamma_i$.
Si $\gamma_i = \beta_i$ entonces $\beta_i \leq \alpha_i$, como $\alpha_i \in \{0, 1\}$, tenemos que $\beta_i^2 = \beta_i \leq \alpha_i$, entonces $\delta_i = \beta_i^2 = \beta_i = \gamma_i$. Por lo tanto $d = d'$.
Como $d' = (m^2, n)|m$, entonces la congruencia $m^2 x \equiv m \mod n$ tiene solución, con lo que $[m^2 x_0] = [m]$, lo cual implica que $m\mathbb{Z}_n \subseteq m^2\mathbb{Z}_n$. Por lo tanto $\mathbb{Z}[m] = m\mathbb{Z}_n = m^2\mathbb{Z}_n$. □

El siguiente resultado lo utilizaremos más adelante.

Teorema 6.1.3. Sean M un R-módulo y $N \leq M$ un submódulo. N es puro en M si y sólo si para elementos $y_1, \ldots, y_n \in N$ y (a_{ij}) una matriz de $m \times n$ con entradas en R, si el sistema de ecuaciones $\sum_{i=1}^{m} X_i a_{ij} = y_j$, $(1 \leq j \leq n)$ tiene una solución $(x_1, \ldots x_m)$ en M, entonces también tiene una solución en N.

Demostración. Véase [15, Proposición 11.2]. □

Proposición 6.1.4. Si M es finitamente generado y fuertemente F-regular, entonces M es mórfico si y sólo si M es endorregular y $S := \text{End}(M)$ es mórfico.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es mórfico. Sea $\varphi \in S$. Tenemos que $M/\varphi(M) \cong \text{Nuc}(\varphi)$ y $M/\text{Nuc}(\varphi) \cong \varphi(M)$. Como $\text{Nuc}(\varphi)$ y $\varphi(M)$ son finitamente generados, por hipótesis, ambos son sumandos directos, entonces, por el Lema 3.1.7, φ es regular. Por lo tanto M es endorregular.
Llamemos $S' := \text{End}_S(S)$ al anillo de $S-$morfismos de S en S. Sea $T \in S'$. Por la Observación 2.1.1, existe $\beta \in S$ tal que $T(\varphi) = \beta\varphi$, para toda $\varphi \in S$. Como M es mórfico, por la Proposición 4.1.4, existe $\eta \in S$ tal que $\text{Nuc}(\beta) = \eta(M)$ y $\text{Nuc}(\eta) = \beta(M)$. Definamos $\Psi : S \to S$, por $\Psi(\varphi) = \eta\varphi$, para toda $\varphi \in S$. Veamos que $\text{Nuc}(\Psi) = T(S)$ y $\Psi(S) = \text{Nuc}(T)$. Sea $f \in \text{Nuc}(\Psi)$, entonces $\eta f = 0_S$, con lo que $f(M) \subseteq \text{Nuc}(\eta) = \beta(M)$. Entonces para todo $m \in M$ existe $x_m \in M$ tal que $f(m) = \beta(x_m)$. Una vez escogido dicho x_m para cada $m \in M$ definamos la función $g : M \to M$ mediante $g(m) = x_m$. Si $m, m' \in M$ y $r \in R$, tenemos que

$$f(m + m'r) = f(m) + f(m')r = \beta(x_m) + \beta(x_{m'})r = \beta(x_m + x_{m'}r),$$

entonces $g(m + m'r) = x_m + x_{m'}r$. Por lo tanto $g \in S$. Además, $T(g)(m) = \beta(g(m)) = \beta(x_m) = f(m)$, es decir, $T(g) = f$, con lo que $\text{Nuc}(\Psi) \subseteq T(S)$. Sea $f \in T(S)$, entonces existe alguna $h \in S$ tal que $f = T(g) = \beta g$, entonces, $\Psi(f) = \eta(\beta g) = (\eta\beta)g = 0_S$, con lo que $f \in \text{Nuc}(\Psi)$. Por lo tanto $T(S) \subseteq \text{Nuc}(\Psi)$.
Ahora, sea $f \in \text{Nuc}(T)$, entonces $0_S = T(f) = \beta f$, con lo que $f(M) \subseteq \text{Nuc}(\beta) = \eta(M)$. Entonces para todo $m \in M$ existe $x_m \in M$ tal que $f(m) = \eta(x_m)$. Por un argumento análogo al anterior, la función $g : M \to M$, dada por $g(m) = x_m$, es un elemento de S, y $\Psi(g)(m) = \eta(g(m)) = \eta(x_m) = f(m)$, es decir, $\Psi(g) = f$, con lo que $f \in \Psi(S)$. Por lo tanto $\text{Nuc}(T) \subseteq \Psi(S)$. Sea $f \in \Psi(S)$, entonces $f = \eta h$, para alguna $h \in S$, entonces

$T(f) = T(\eta h) = \beta(\eta h) = (\beta\eta)h = 0_S$. Entonces $f \in \mathrm{Nuc}(T)$. Por lo tanto $\Psi(S) \subseteq \mathrm{Nuc}(T)$. Por la Proposición 4.1.4, se sigue que S es mórfico.
$\Leftarrow$) Supongamos que M es endorregular y S es mórfico. Sea $\varphi \in S$. Definamos la función $\Psi : S \to S$, dada por $\Psi(f) = \varphi f$, para toda $f \in S$, es fácil ver que $\Psi \in S'$. Como S es mórfico, por la Proposición 4.1.4 existe $\beta' \in S'$ tal que $\mathrm{Nuc}(\beta') = \Psi(S)$ y $\mathrm{Nuc}(\Psi) = \beta'(S)$, además supongamos que $\beta'(f) = \beta f$, para alguna $\beta \in S$ y para toda $f \in S$. Tenemos que $\varphi = \varphi \mathrm{Id}_S = \Psi(\mathrm{Id}_S) \in \mathrm{Nuc}(\beta')$, entonces $0_S = \beta'(\varphi) = \beta\varphi$, con lo que $\varphi(M) \subseteq \mathrm{Nuc}(\beta)$. Sea $m \in \mathrm{Nuc}(\beta)$. Por hipótesis, existe $N \leq M$ tal que $mR \bigoplus N = M$, ahora consideremos la proyección $\pi : M \to M$, dada por $\pi(mr + n) = mr$, donde $mr \in mR$ y $n \in N$. Entonces para todo $mr + n$, con $mr \in mR$ y $n \in N$, $\beta'(\pi)(mr + n) = \beta(\pi(mr + n)) = \beta(mr) = 0$. Entonces $\pi \in \mathrm{Nuc}(\beta') = \Psi(S)$, con lo que existe $h \in S$ tal que $\pi = \varphi h$, entonces $m = \pi(m) = \varphi(h(m)) \in \varphi(M)$. Por lo tanto $\mathrm{Nuc}(\beta) \subseteq \varphi(M)$, con lo que concluimos que $\mathrm{Nuc}(\beta) = \varphi(M)$.
Ahora, $\beta = \beta'(\mathrm{Id}_S) \in \mathrm{Nuc}(\Psi)$, entonces $0_S = \Psi(\beta) = \varphi\beta$, con lo que $\beta(M) \subseteq \mathrm{Nuc}(\varphi)$. Sea $m \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$ y consideremos $N \leq M$ tal que $mR \bigoplus N = M$. Observemos que la proyección $\pi : mR \to N$, dada por $\pi(mr + n) = mr$, con $mr \in mR$ y $n \in N$ cumple que $\Psi(\pi)(mr + n) = \varphi(mr) = 0$, con lo que $\pi \in \mathrm{Nuc}(\Psi) = \beta'(S)$, entonces existe $h \in S$ tal que $\pi = \beta h$, entonces $m = \pi(m) = \beta(h(m)) \in \beta(M)$. Por lo tanto $\mathrm{Nuc}(\varphi) \subseteq \beta(M)$, con lo que concluimos que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \beta(M)$. Entonces por la Proposición 4.1.4, se sigue que M es mórfico. □

Teorema 6.1.5. Para un anillo R, son equivalentes:

(1) R es regular.

(2) Todo R-módulo izquierdo ${}_RM$ es plano.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos (1). Sea ${}_RM$ un R-módulo izquierdo. Por la Proposición 1.8.9, bastará ver que si $I_R \leq R$ es un ideal finitamente generado, entonces $\iota : I \otimes M \to M$ es un monomorfismo, donde $\iota(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes m_i)) = \sum_{i=1}^n a_i m_i$. Ahora, sea $\sum_{i=1}^n (a_i \otimes m_i) \in \mathrm{Nuc}(\iota)$, entonces $\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0$. Por 2.1.7 existe $e \in R$ idempotente tal que $I = eR$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $a_i' \in R$ tal que $a_i = ea_i'$, con lo que $ea_i = ea_i' = a_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (a_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n (ea_i \otimes m_i) &= \sum_{i=1}^n (e^2 a_i' \otimes m_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (e \otimes ea_i m_i) = e \otimes (\sum_{i=1}^n (ea_i m_i)) \\
&= e \otimes (\sum_{i=1}^n (a_i m_i)) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Nuc}(\iota) = \{0\}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos (2). Sea $r \in R$ y consideremos al ideal izquierdo Rr y al ideal derecho rR. Ahora, rRr es un subgrupo del grupo rR, entonces, consideremos al cociente rR/rRr. Definamos la función $\varphi : rR \times R/Rr \to rR/rRr$, dada por $\varphi(ra, b + Rr) = rab + rRr$. Veamos que φ está bien definida. Sea $(ra, b + Rr) \in rR \times R/Rr$ y supongamos que $b + Rr = b' + Rr$, entonces $\varphi(ra, b + Rr) = rab + rRr$ y $\varphi(ra, b' + Rr) = rab' + rRr$, observemos que

$rab - rab' = ra(b - b')$ y $b - b' \in Rr$, entonces $rab - rab' \in rRr$, con lo que $\varphi(ra, b + Rr) = \varphi(ra, b' + Rr)$.
Veamos que φ es bilineal. Si $s \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(ra + ra', b + Rr) &= (ra + ra')b + rRr = rab + ra'b + rRr \\
&= \varphi(ra, b + Rr) + \varphi(ra', b + Rr), \\
\varphi(ra, (b + b') + Rr) &= ra(b + b') + rRr = rab + rab' + rRr \\
&= \varphi(ra, b + Rr) + \varphi(ra, b' + Rr), \\
\varphi((ra)s, b + Rr) &= rasb + rRr = (ra)(sb) + rRr = \varphi(ra, sb + Rr).
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es una función bilineal. Entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\Psi : rR \otimes R/Rr \to rR/rRr$, que cumple que $\Psi(ra \otimes b + Rr) = \varphi(ra + b + Rr) = rab + rRr$. Consideremos la inclusión canónica $\iota : R \to R$, como R/Rr es plano, entonces $\iota \otimes 1_{R/Rr} : rR \otimes R/Rr \to R \otimes R/Rr$ es un monomorfismo. Observemos que $(\iota \otimes 1_{R/Rr})(r \otimes 1_R + Rr) = 1_R \otimes r + Rr = 1_R \otimes 0 + Rr = 0$. Por lo tanto $r \otimes 1_R + Rr = 0$. Entonces $0 = \Psi(r \otimes 1_R + Rr) = r + rRr$, con lo que $r \in rRr$, entonces existe $r' \in R$ tal que $r = rr'r$. □

En el Teorema 6.1.8 veremos que si R es un anillo conmutativo entonces todo R-módulo JT-regular es fuertemente F-regular. Para ello probemos los siguientes lemas.

Lema 6.1.6. Sean M un R-módulo y $N \leq M$ un submódulo. Son equivalentes:

(1) Para cada $n \in N$ existe $f : M \to N$ tal que $f(n) = n$.

(2) Para cada subconjunto finito $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq N$ existe $f : M \to N$ tal que $f(n_i) = n_i$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostración. (1) ⇒ (2) Supongamos (1). Sea $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq N$. Procederemos por inducción sobre k. El caso $k = 1$ es justamente la hipótesis. Supongamos cierto el resultado para $k > 1$. Sea $\{n_1, \ldots, n_{k+1}\} \subseteq N$. Para el conjunto $\{n_1, \ldots, n_k\}$, por hipótesis de inducción, existe $f : M \to N$ tal que $f(n_i) = n_i$, para $1 \leq i \leq k$; y para el conjunto $\{n_{k+1} - f(n_{k+1})\} \subseteq N$, por el caso $k = 1$, existe $g : M \to N$ tal que $g(n_{k+1} - f(n_{k+1})) = n_{k+1} - f(n_{k+1})$, de esta última igualdad tenemos que $g(n_{k+1}) = n_{k+1} - f(n_{k+1}) + g(f(n_{k+1}))$. Definamos a $h : M \to N$ dada por $h(x) = f(x) + g(x) - g(f(x))$, entonces, h es un morfismo de R-módulos y

$$\begin{aligned}
h(n_i) &= f(n_i) + g(n_i) - g(f(n_i)) \\
&= n_i + g(n_i) - g(n_i) \\
&= n_i,
\end{aligned}$$

para toda $1 \leq i \leq k$; y

$$\begin{aligned}
h(n_{k+1}) &= f(n_{k+1}) + g(n_{k+1}) - g(f(n_{k+1})) \\
&= f(n_{k+1}) + g(n_{k+1}) + n_{k+1} - f(n_{k+1}) - g(n_{k+1}) \\
&= n_{k+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto h es el morfismo buscado.
(2) $\Rightarrow$ (1). Es inmediato. $\square$

Lema 6.1.7. Sean R conmutativo y M un R-módulo tal que M es JT-regular, entonces M cumple las dos condiciones del Lema 6.1.6.

Demostración. Supongamos que M es JT-regular y sea $N \leq M$ un submódulo. Para $n \in N$ existe $a \in R$ tal que $nR = Ma = Ma^2$. Entonces $n = m_1 a = m_2 a^2$, para algunos $m_1, m_2 \in M$. Ahora, $m_2 a \in Ma = nR$, entonces existe $r \in R$ tal que $m_2 a = nr$, con lo que $n = nra = nar$. Definamos $f : M \to N$, dada por $f(x) = xar$, es fácil ver que f es un morfismo de R-módulos, $f(n) = nar = n$ y $f(x) = xar$, con $xa \in Ma = nR$, entonces $xar \in nR \subseteq N$, para toda $x \in M$. Por lo tanto hemos probado que M cumple la condición (1) del Lema 6.1.6. $\square$

Teorema 6.1.8. Sean R conmutativo y M un R-módulo tal que M es JT-regular, entonces M es fuertemente F-regular.

Demostración. Sea $N \leq M$ un submódulo finitamente generado, digamos que $\{n_1, \ldots, n_k\}$ genera a N. Por el Lema 6.1.7, existe un morfismo de R-módulos $f : M \to N$ tal que $f(n_i) = n_i$, para $1 \leq i \leq k$. Entonces para todo $x = n_1 r_1 + \cdots + n_k r_k \in N$, $f(x) = f(n_1 r_1) + \cdots + f(n_k r_k) = n_1 r_1 + \cdots + n_k r_k = x$, entonces $\iota f : M \to M$, con $\iota : N \to M$ la inclusión natural, es idempotente. Por el Lema 3.1.9, $M = \iota f(M) \bigoplus \mathrm{Nuc}(\iota f) = f(M) \bigoplus \mathrm{Nuc}(f) = N \bigoplus \mathrm{Nuc}(f)$. Por lo tanto M es fuertemente F-regular. $\square$

La implicación recíproca del Teorema 6.1.8 no siempre se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.9. Sea $\mathbb{R}^2$ visto como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Como $\mathbb{R}^2$ es de dimensión finita, entonces todos sus subespacios son sumandos directos. Por otro lado, supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1,0)\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 a = \mathbb{R}^2 a^2$. Entonces $(1,0) = (x,y)a$, para algún $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con lo que $a \neq 0$. Sin embargo, $(0,1)a = (1,0)r$, para algún $r \in \mathbb{R}$, con lo que $a = 0$, es decir, $\mathbb{R}^2$ no es JT-regular.

Observación 6.1.10. Si M es un R-módulo y $N \leq^{\oplus} M$ es un sumando directo, entonces existe $\varphi : M \to N$ tal que $\varphi(n) = n$, para todo $n \in N$.

Teorema 6.1.11. Sea M un R-módulo fuertemente F-regular, entonces M es F-regular.

Demostración. Sea $N \leq M$. Consideremos $y_1, \ldots, y_n \in N$, (a_{ij}) una matriz de $m \times n$ con entradas en R y supongamos que el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = y_j,$$

para $1 \leq j \leq n$, tiene solución en M. Veamos que también tiene solución en N. Consideremos al submódulo $N' = y_1 R + \cdots + y_n R$, observemos que $N' \leq N$ y, por hipótesis,

N' es un sumando directo de M, entonces por la Observación 6.1.10, existe un morfismo $\varphi : M \to N'$ tal que $\varphi(y_j) = y_j$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i a_{ij}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) \\ &= \varphi(y_j) = y_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene solución en N. Por el Teorema 6.1.3, N es puro en M. □

Para ver la existencia de un R-módulo M que es F-regular pero no fuertemente F-regular véase [1, Ejemplo 14].

Lema 6.1.12. Sean M un R-módulo y $N \leq M$ un submódulo. Entonces son equivalentes:

(1) N es RD-puro en M.

(2) Para cada $a \in R$ el morfismo $\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra} : N \otimes R/Ra \to M \otimes R/Ra$ es inyectivo.

Demostración. Primero veamos que para todo $a \in R$, $M \otimes R/Ra \cong M/Ma$ (como grupos abelianos). Definamos $\varphi : M \times R/Ra$ dada por $\varphi(m, r + Ra) = mr + Ma$, para todo $(m, r + Ra) \in M \times R/Ra$.
Veamos que φ está bien definida. Si $(m, r+Ra) = (m', r'+Ra)$, entonces $m = m'$ y $r-r' \in Ra$, con lo que existe $s \in R$ tal que $r - r' = sa$, entonces $m(r - r') = m(sa) = (ms)a \in Ma$, lo que implica que $mr + Ma = m'r' + Ma$, es decir, $\varphi(m, r + Ra) = \varphi(m', r' + Ra)$.
Veamos que φ es bilineal. Sean $m, m' \in M$, $r, s \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(m + m', r + Ra) &= (m + m')r + Ma = (mr + m'r) + Ma \\ &= \varphi(m, r + Ra) + \varphi(m', r + Ra), \\ \varphi(m, (r + r') + Ra) &= m(r + r') + Ma = (mr + mr') + Ma \\ &= \varphi(m, r + Ra) + \varphi(m, r' + Ra), \\ \varphi(mr, r' + Ra) &= (mr)r' + Ma = m(rr') + Ma \\ &= \varphi(m, rr' + Ra).\end{aligned}$$

Ahora, sea $f : M \times R/Ra \to G$ una función bilineal, definamos $h : M/Ma \to G$, dada por $h(m+Ma) = f(m, 1_R+Ra)$, para todo $m+Ma \in M/Ma$. Veamos que h está bien definida. Supongamos que $m + Ma = m' + Ma$, existe $x \in M$ tal que $m - m' = xa$, entonces

$$f(m, 1_R + Ra) - f(m', 1_R + Ra) = f(m - m', 1_R + Ra) = f(xa, 1_R + Ra) = f(x, a + Ra) = 0.$$

Por lo tanto $f(m, 1_R + Ra) = f(m', 1_R + Ra)$, es decir, h está bien definida.
Sean $m + Ma, m' + Ma \in M/Ma$, entonces

$$\begin{aligned}h((m + m') + Ma) &= f(m + m', 1_R + Ra) = f(m, 1_R + Ra) + f(m', 1_R + Ra) \\ &= h(m + Ma) + h(m' + Ma).\end{aligned}$$

Por lo tanto h es un morfismo de grupos. Además, para todo $(m, r + Ra) \in M \times R/a$,

$$h(\varphi(m, r + Ra)) = h(mr + Ma) = f(mr, 1_R + Ra) = f(m, r + Ra),$$

con lo que $h\varphi = f$. Finalmente supongamos que existe $g : M/Ma \to G$ tal que $g\varphi = f$. Sea $m + Ma \in M/Ma$, entonces $g(m + Ma) = g(\varphi(m, 1_r + Ra)) = f(m + Ma)$, con lo que $g = f$. Hemos probado que la pareja $(M/Ma, \varphi)$ cumple la definición del producto tensorial $M \otimes R/Ra$. Por lo tanto $M/Ma \cong M \otimes R/Ra$. Ahora, denotemos por $(M \otimes R/Ra, \tau)$ al producto tensorial usual de M y R/Ra. Existe $\alpha : M \otimes R/Ra \to M/Ma$ tal que $\alpha\tau = \varphi$ y existe $\alpha' : M/Ma \to M \otimes R/Ra$ tal que $\alpha'\varphi = \tau$. Entonces $\alpha'\alpha\tau = \alpha'\varphi = \tau = \mathrm{Id}_{M\otimes R/Ra}\tau$, por la unicidad de la factorización de τ, se sigue que $\alpha'\alpha = \mathrm{Id}_{M\otimes R/Ra}$. Análogamente $\alpha\alpha' = \mathrm{Id}_{M/Ma}$. Por lo tanto α es un isomorfismo y para todo $m \otimes r + Ra \in M \otimes R/Ra$, $\alpha(m \otimes r + Ra) = \varphi(m, r + Ra) = mr + Ma$.
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos (1). Sea $a \in R$. Sea $\sum_{i=1}^{k}(n_i \otimes r_i + Ra) \in N \otimes R/Ra$ tal que

$$0 = \alpha(\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}(\sum_{i=1}^{k}(n_i \otimes r_i + Ra))) = \alpha(\sum_{i=1}^{k}(n_i \otimes r_i + Ra)) = (\sum_{i=1}^{k} n_i r_i) + Ma,$$

con lo que $(\sum_{i=1}^{k} n_i r_i) \in Ma$, entonces existe $m \in M$ tal que $(\sum_{i=1}^{k} n_i r_i) = ma$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(n_i \otimes r_i + Ra) &= \sum_{i=1}^{k}(n_i r_i \otimes 1_R + Ra) = (\sum_{i=1}^{k} n_i r_i) \otimes 1_R + Ra) \\ &= ma \otimes 1_R + Ra = m \otimes a + Ra = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha \circ \iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}$ es inyectiva, lo que implica que $\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}$ es inyectivo.
(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos (2). Sea $a \in R$. Veamos que $Na = Ma \cap N$.
$\subseteq$] Sea $n \in N$, entonces $na \in Na \subseteq Ma$ y $na \in N$, con lo que $na \in Ma \cap N$.
$\supseteq$] Sea $x \in Ma \cap N$, entonces existe $m \in M$ tal que $x = ma \in N$. Usando la prueba al principio de éste lema sabemos que existe un isomorfismo $\beta : N \otimes R/Ra \to N/Na$ tal que $\beta(n \otimes r + Ra) = nr + Na$. Observemos que

$$\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}(x \otimes 1_R + Ra)\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}(ma \otimes 1_R + Ra) = ma \otimes 1_R + Ra = m \otimes a + Ra = 0,$$

con lo que $ma \otimes 1_R + Ra = 0$, pues $\iota \otimes \mathrm{Id}_{R/Ra}$ es un monomorfismo, de esta manera $0 = \beta(ma \otimes 1_R + Ra) = ma + Na$, entonces $ma \in Na$. Por lo tanto $x = ma \in Na$, lo que implica que $Na = Ma \cap N$. □

Observación 6.1.13. El lema anterior nos dice que para todo submódulo N de un R-módulo M, si N es puro en M, entonces N es RD-puro en M.

Teorema 6.1.14. Sean M un R-módulo F-regular, entonces M es débilmente JT-regular.

Demostración. Sea $N \leq M$ un submódulo de M y $a \in R$. Por hipótesis, N es puro en M, entonces el morfismo $\iota \otimes 1_{R/Ra} : N \otimes R/Ra \to M \otimes R/Ra$ es inyectivo, por el Lema 6.1.12, tenemos que N es RD-puro en M, es decir, $Na = Ma \cap N$, si $N = Ma$, entonces $Ma^2 = (Ma)a = Ma$. Por lo tanto M es débilmente JT-regular. □

La implicación recíproca no siempre se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.15. Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$. Para $a \in Z$ veamos que $\mathbb{Q}a = \mathbb{Q}a^2$. Si $a = 0$ es clara la igualdad. Supongamos que $a \neq 0$, entonces para todo $x \in \mathbb{Q}$, $(x)a = (\frac{x}{a})a^2 \in \mathbb{Q}a^2$, con lo que $\mathbb{Q}a \subseteq \mathbb{Q}a^2$, como la otra inclusión siempre se cumple, entonces $\mathbb{Q}a = \mathbb{Q}a^2$. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ es débilmente JT-regular. Para ver que $\mathbb{Q}$ no es F-regular, consideremos el submódulo $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ y observemos que $2\mathbb{Z} \neq 2\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}$ no es RD-puro en $\mathbb{Q}$, por la Observación 6.1.13, $\mathbb{Z}$ no es puro en $\mathbb{Q}$, lo que implica que $\mathbb{Q}$ no es F-regular.

6.2. Relación con módulos multiplicación

En está sección veremos que si R es conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, entonces (M es JT-regular $\Longleftrightarrow$ M es fuertemente F-regular $\Longleftrightarrow$ M es F-regular $\Longleftrightarrow$ M es débilmente JT-regular $\Longleftrightarrow$ M es endoregular abeliano).

Lema 6.2.1. Sean R conmutativo y M un R-módulo fuertemente F-regular tal que cada submódulo $N \leq M$ finitamente generado es proyectivo, entonces para cada $m \in M$ existe $f \in \operatorname{Hom}(M, R)$ tal que $m = mf(m)$.

Demostración. Sea $m \in M$. Por hipótesis, existe $N \leq M$ submódulo de M tal que $mR \bigoplus N = M$ y mR es proyectivo. Como R es conmutativo, consideremos al morfismo $f : R \to mR$, dado por $f(r) = mr$, el cual es sobreyectivo, entonces existe $h : mR \to R$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "f"] \\ mR \arrow[ur, dotted, "\exists h"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_{mR}"'] & mR, \end{tikzcd}$$

es decir, $fh = \mathrm{Id}_{mR}$.
Ahora, consideremos $\pi : M \to mR$, con $\pi(mr + n) = mr$, para todo $mr \in mR$ y $n \in N$, y definamos $\varphi = h\pi : M \to R$. Observemos que $m\varphi(m) = f(\varphi(m)) = f(h(\pi(m))) = f(h(m)) = m$. Con lo que hemos probado el resultado. □

Proposición 6.2.2. Sean R conmutativo y M un R-módulo multiplicación tal que para todo $m \in M$ existe $f \in \operatorname{Hom}(M, R)$ tal que $m = mf(m)$. Entonces M es endoregular abeliano.

Demostración. Sea $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ y $m \in M$. Existe $f \in \operatorname{Hom}(M, R)$ tal que $\varphi(m) = \varphi(m)f(\varphi(m))$. Definamos la función $\Psi : M \to M$, dada por $\Psi(x) = \varphi(m)f(x)$, es fácil ver que $\Psi \in \operatorname{End}(M)$. Además, $\Psi(\varphi(m)) = \varphi(m)f(\varphi(m)) = \varphi(m)$ y, por la Proposición 5.1.6, $\operatorname{End}(M)$ es abeliano, entonces $\varphi(\Psi(m)) = \varphi(\varphi(m)f(m)) = \varphi^2(m)f(m)$, con lo que $\varphi(m) = \varphi^2(m)f(m)$, entonces $m - \varphi(m)f(m) \in \operatorname{Nuc}(\varphi)$, de está manera, $m = (m - \varphi(m)f(m)) + (\varphi(m)f(m)) \in \operatorname{Nuc}(\varphi) + \varphi(M)$. Luego, si $y \in \operatorname{Nuc}(\varphi) \cap \varphi(M)$, entonces $y = \varphi(m)$, para alguna $m \in M$ y $\varphi(y) = \varphi^2(m) = 0$. Como $\varphi(m) = \varphi(m)f(\varphi(m))$, entonces $y = \varphi(m) = \varphi^2(m)f(m) = 0$. Por lo tanto $M = \operatorname{Nuc}(\varphi) \bigoplus \varphi(M)$. Por el Teorema 3.1.11, M es endoregular abeliano. □

El siguiente resultado se encuentra en [12, Lema 1.1].

Lema 6.2.3. Sean R conmutativo y M un R-módulo fiel, multiplicación y fuertemente F-regular. Si $N \leq M$ es un submódulo de M finitamente generado, entonces existen $m_1, \ldots, m_k \in M$, y $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{Hom}(M, R)$ tales que $n = \sum_{i=1}^{k} m_i f_i(n)$, para todo $n \in N$

Demostración. Supongamos que N es generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Por el Teorema 5.1.9, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$R = r_R(x_i) + \sum_{m \in M} [mR : M].$$

Entonces para $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen $a_i \in r_R(x_i)$, $b_i \in \sum_{m \in M} [mR : M]$ tales que $1 = a_i + b_i$. Definamos $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$ y $b = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - b_i)$. Veamos que $a \in r_R(x_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $b \in \sum_{m \in M} [mR : M]$. Si $1 \leq j \leq n$, $ax_j = (\prod_{i=1}^{n} a_i) x_j = (\prod_{i=1, i \neq j}^{n} a_i) a_j x_j = 0$, entonces $a \in r_R(x_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, observemos que al desarrollar $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - b_i)$ obtenemos algo de la forma $1 - 1 + m = m$, con $m \in \sum_{m \in M} [mR : M]$, con lo que $b \in \sum_{m \in M} [mR : M]$, entonces existen $m_1, \ldots, m_k \in M$ tal que $b \in \sum_{i=1}^{k} [m_i R : M]$, entonces existen $r_i \in R$, $1 \leq i \leq k$, tales que $M r_i \subseteq m_i R$ y $b = \sum_{i=1}^{k} r_i$. Entonces $1 = a + \sum_{i=1}^{k} r_i$,
Ahora veamos que está última igualdad implica que existen $u_0, u_1, \ldots, u_k \in R$ tales que $au_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i^2 u_i = 1$. Si $k = 1$, entonces

$$r_1 = ar_1 + r_1^2,$$

con lo que

$$1 = a + ar_1 + r_1^2 = a(1 + r_1) + r_1^2,$$

en este caso $u_0 = 1 + r_1$ y $u_1 = 1$. Ahora, si $k = 2$, entonces $1 = a + r_1 + r_2$, con lo que

$$\begin{aligned} r_1 &= ar_1 + r_1^2 + r_1 r_2 \\ r_2 &= ar_2 + r_1 r_2 + r_2^2 \\ r_1 r_2 &= ar_1 r_2 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 = a + r_1 + r_2 &= a + ar_1 + r_1^2 + r_1 r_2 + ar_2 + r_1 r_2 + r_2^2 \\ &= a + ar_1 + ar_2 + 2(ar_1 r_2 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2) + r_1^2 + r_2^2 \\ &= a(1 + r_1 + r_2 + 2r_1 r_2) + r_1^2 (1 + r_2) + r_2^2 (1 + r_1), \end{aligned}$$

en este caso $u_0 = 1 + r_1 + r_2 + 2r_1 r_2$, $u_1 = 1 + r_2$ y $u_2 = 1 + r_1$. Continuando recursivamente este proceso podemos concluir que existen $u_0, u_1, \ldots, u_k \in R$ tales que $au_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i^2 u_i = 1$. Entonces para cada $1 \leq p \leq n$, $x_p = x_p (\sum_{i=1}^{k} r_i^2 u_i)$.
Para cada $1 \leq i \leq k$, $w \in M$, $wr_i \in Mr_i \subseteq m_i R$, entonces existe $r_{i_w} \in R$ tal que $wr_i = m_i r_{i_w}$. Para cada $1 \leq j \leq k$, definamos la función $\varphi_j : N \to R$, dada por $\varphi_j (\sum_{i=1}^{n} x_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}} s_i$. Veamos que φ_j está bien definida, para esto, sea $n = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i = \sum_{i=1}^{n} x_i t_i$.

Entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i(s_i - t_i) = 0$, si $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
m\left(\sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}}(s_i - t_i)\right) &= \sum_{i=1}^{n}[(mr_j)u_j r_{j_{x_i}}(s_i - t_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(m_j r_{j_m})u_j r_{j_{x_i}}(s_i - t_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(m_j r_{j_{x_i}})u_j r_{j_m}(s_i - t_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i r_j)u_j r_{j_m}(s_i - t_i)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(s_i - t_i)\right)u_j r_j r_{j_m} = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}}(s_i - t_i) \in \operatorname{Ann}_R(M) = \{0\}$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}} s_i = \sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}} t_i$, es decir, φ_j está bien definida. Ahora veamos que $\varphi_j \in \operatorname{Hom}(N, R)$. Sean $\sum_{i=1}^{n} x_i s_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i \in N$ y $l \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i s_i + l\sum_{i=1}^{n} x_i t_i\right) &= \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(s_i + l t_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}}(s_i + l t_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}} s_i + l\sum_{i=1}^{n} r_j u_j r_{j_{x_i}} t_i \\
&= \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i s_i\right) + l\varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_j \in \operatorname{Hom}(N, R)$. Ahora, sea $c = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \in N$ y observemos que, para cada $1 \le p \le n$, $\varphi_j(x_p) = r_j u_j r_{j_{x_p}}$, entonces, $m_j\varphi_j(x_p) = m_j r_j u_j r_{j_{x_p}} = x_p r_j^2 u_j$, además $x_p = x_p(\sum_{j=1}^{k} r_j^2 u_j) = \sum_{j=1}^{k} x_p r_j^2 u_j = \sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_j(x_p)$, con lo que $x_p s_p = \sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_j(x_p s_p)$, sumando sobre $1 \le p \le n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
c = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i &= \sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_j(x_1 s_1) + \cdots + \sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_j(x_n s_n) \\
&= m_1\varphi_1(c) + \ldots m_k\varphi_k(c) = \sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_j(c).
\end{aligned}$$

Finalmente, como N es un sumando directo de M, entonces existe $\pi : M \to N$, tal que $\pi(c) = c$, para todo $c \in N$. Definamos $f_j = \varphi_j\pi \in \operatorname{Hom}(M, R)$, para $1 \le j \le k$, entonces $c = \sum_{j=1}^{k} m_j f_j(c)$, para todo $c \in N$. □

Proposición 6.2.4. Sean R conmutativo y M un R-módulo fiel, multiplicación y fuertemente F-regular. Si $N \le M$ es un submódulo de M finitamente generado, entonces N es proyectivo.

Demostración. Por el Teorema 6.1.11, M es F-regular, entonces N es un submódulo puro en M. Siguendo la demostración del Lema 6.2.3, si N es generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces existen $m_1, \ldots, m_k \in M$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \operatorname{Hom}(N, R)$, tales que si $a \in N$, entonces $a = \sum_{i=1}^{k} m_i\varphi_i(a)$, como N es puro, por el Teorema 6.1.3, existen $n_1, \ldots, n_k \in N$ tales que $a = \sum_{i=1}^{k} n_i\varphi_i(a)$, entonces se cumple (3) del Teorema 1.5.9, aquí tomamos a la familia de elementos en N como todo N. Por lo tanto N es proyectivo. □

Teorema 6.2.5. Sean R conmutativo y M un R-módulo fiel, multiplicación y fuertemente F-regular. Entonces para todo $m \in M$ existe $\varphi \in \operatorname{Hom}(M, R)$ tal que $m = m\varphi(m)$.

Demostración. Sean $N \leq M$ un submódulo finitamente generado, por el Lema 6.2.4, N es proyectivo, entonces se sigue el resultado del Lema 6.2.1. □

Proposición 6.2.6. Sea R conmutativo y M un R.módulo, entonces

(1) Si M es fuertemente F-regular como R-módulo, entonces M es un módulo fuertemente F-regular como $R/\operatorname{Ann}(M)$-módulo.

(2) $S = \operatorname{End}_R(M) = \operatorname{End}_{R/\operatorname{Ann}(M)}(M) = S'$.

(3) Si M es multiplicación como R módulo, entonces M es multiplicación como $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ módulo.

Demostración. (1). Llamemos $A = R/\operatorname{Ann}_M$. Supongamos que M_R es fuertemente F-regular como R-módulo. Por la Proposición 1.6.4, M es un A−módulo. Observemos que todo submódulo $W \leq M_R$ si y sólo si $W \leq M_A$.Si $N \leq M_A$ es un submódulo finitamente generado, digamos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ generan a N, entonces para todo $a \in N$ existen $r_i + \operatorname{Ann}_R(M) \in A$, $1 \leq i \leq n$, tales que $a = x_1(r_1 + \operatorname{Ann}_R(M) + \ldots x_n(r_n + \operatorname{Ann}_R(M) = x_1r_1 + \cdots + x_nr_n$, entonces N también es finitamente generado como R-módulo. Por lo tanto, existe $N' \leq M_R$ tal que $M_R = N \bigoplus N'$. Es fácil ver que esto también implica que $M_A = N \bigoplus N'$.
(2) Sea $\varphi \in S$. Como φ es un morfismo de grupos abelianos, entonces sólo falta ver que si $m \in M$ y $r + \operatorname{Ann}_R(M) \in A$, entonces $\varphi(m(r + \operatorname{Ann}_R(M)) = \varphi(m)(r + \operatorname{Ann}_R(M))$, pero esto se sigue inmediatamente de $m(r + \operatorname{Ann}_R(M)) = mr$, con lo que $\varphi \in S'$. Análogamente $S' \subseteq S$.
(3). Supongamos que M_R es un módulo multiplicación. Sea $N \leq M_A$ un submódulo de M_A y $I \leq R$ tal que $M_RI = N$, como $\operatorname{Ann}_R(M) \leq \operatorname{Ann}_R(M) + I \leq R$, entonces $B = (\operatorname{Ann}_R(M) + I)/\operatorname{Ann}_R(M) \leq A$. Veamos que $M_AB = N$. Sea $n \in N$, existe $r \in I$ y $m \in M$ tales que $n = mr = m(r+\operatorname{Ann}_R(M)) \in M_AB$. Luego, si $m(r+x+\operatorname{Ann}_R(M)) \in B$, con $r \in I$ y $x \in \operatorname{Ann}_R(M)$, entonces $m(r+\operatorname{Ann}_R(M))+m(x+\operatorname{Ann}_R(M)) = m(r+\operatorname{Ann}_R(M)) = mr \in MI = N$. Por lo tanto $M_AB = N$, con lo que M_A es un A−módulo multiplicación. □

Ahora ya podemos enunciar y demostrar el teorema principal de está sección.

Teorema 6.2.7. Sean R conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Son equivalentes:

(1) M es JT-regular.

(2) M es fuertemente F-regular.

(3) M es endoregular abeliano.

(4) M es F-regular.

(5) M es débilmente JT-regular.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (4) y (4) $\Rightarrow$ (5) se siguen de los Teoremas 6.1.8, 6.1.11 y 6.1.14, respectivamente.
(2) $\Rightarrow$ (3) Llamemos $A := R/\operatorname{Ann}_R(M)$. Supongamos que M es fuertemente F-regular. Por la Proposición 6.2.6 M es un A-módulo fuertemente F-regular y $S = \operatorname{End}_R(M) = \operatorname{End}_A(M) = S'$, además, por la Proposición 1.6.5 M_A es un módulo fiel. Por el Teorema 6.2.5, para cada $m \in M_A$ existe $f \in \operatorname{Hom}_A(M, A)$ tal que $m = mf(m)$, entonces por la Proposición 6.2.2, M_A es endoregular abeliano, es decir, $S' = S$ es regular y conmutativo. Por lo tanto M_R es endoregular abeliano.
(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que M es endoregular abeliano. Sea $m \in M$. Como M es multiplicación, existe $I \leq R$ ideal tal que $mR = MI$, entonces existen $a \in I$ y $x \in M$ tales que $m = xa$. Veamos que $mR = Ma$.
$\subseteq$] Sea $mr \in mR$, entonces $mr = (xa)r = (xr)a \in Ma$.
$\supseteq$] Como $Ma \subseteq MI = mR$, entonces se sigue el resultado.
Ahora veamos que $Ma = Ma^2$. Es claro que $Ma^2 \subseteq Ma$. Para la otra contención definamos $\varphi : M \to M$, dada por $\varphi(y) = ya$, entonces $\varphi \in S$. Por hipótesis, existe $f \in S$ tal que $\varphi = \varphi f \varphi$, con lo que $ma = \varphi(f(\varphi(m))) = \varphi(f(ma)) = f(m)a^2 \in Ma^2$. Por lo tanto $Ma = Ma^2$. Entonces M es JT-regular.
(5) $\Rightarrow$ (1). Sea $m \in M$, en la prueba de (3) $\Rightarrow$ (1), usando sólo que M fuese un módulo multiplicación, obtuvimos que existe $a \in R$ tal que $mR = Ma$. Como M es débilmente JT-regular, tenemos que $mR = Ma = Ma^2$. Por lo tanto M es débilmente JT-regular. $\square$

Bibliografía

[1] DD Anderson, Sangmin Chun, and JR Juett. Module-theoretic generalization of commutative von neumann regular rings. *Communications in Algebra*, 47(11):4713–4728, 2019.

[2] DD Anderson and JR Juett. Endoregular modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 225(1):106475, 2021.

[3] Frank W Anderson and Kent R Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Michael Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.

[5] Garrett Birkhoff. Von neumann and lattice theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64:50–56, 1958.

[6] D.J. FIELDHOUSE. Pure theories. *Mathematische Annalen*, 184:1–18, 1970.

[7] L. Fuchs. *Abelian Groups*. Number v. 1 in International series of monographs in pure and applied mathematics. Pergamon Press, 1960.

[8] C Jayaram and Ünsal Tekir. von neumann regular modules. *Communications in Algebra*, 46(5):2205–2217, 2018.

[9] Friedrich Kasch. *Modules and rings*, volume 17. Academic press, 1982.

[10] Philly Ivan Kimuli and David Ssevviiri. Characterizations of regular modules. *International Electronic Journal of Algebra*, pages 1–23, 2022.

[11] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra superior: curso completo*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[12] Adil G Naoum. Regular multiplication modules. *Periodica Mathematica Hungarica*, 31:155–162, 1995.

[13] AG Naoum. On the ring of endomorphisms of a multiplication module. *Periodica Mathematica Hungarica*, 29(3):277–284, 1994.

[14] VS Ramamurthi and KM Rangaswamy. On finitely injective modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(2):239–248, 1973.

[15] Bo Stenström. *Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory*, volume 217. Springer Science & Business Media, 2012.