



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelado de estrellas compactas con el programa Aztekas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Enrique Galicia Pineda

TUTOR

Néstor Enrique Ortiz Madrigal



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, Marzo de 2024.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*También se le ha ido el hambre.
No tenía ganas de nada, solo de vivir.*

Juan Rulfo

Agradecimientos

Mucho tiempo ha pasado desde que la idea sobre este trabajo cobró vida y mucho más todavía desde que decidí estudiar Física. Ahora que está próximo a concluir este período de mi vida, es evidente que sin el esfuerzo y apoyo de distintas personas no hubiera sido posible que lograra estar siquiera a la mitad de donde estoy ahora. Esta pequeña página funciona como retrospectiva y agradecimiento a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de estos años. Especialmente me gustaría agradecer a mi mamá Celia Pineda y a mi tía Irene Pineda, incansables mujeres. Gracias a ellas pude estudiar y dedicarme a lo que más me gusta y estaré permanentemente en deuda. También agradezco a mi tío Miguel Pineda por ser un guía y un faro de sabiduría en la vida. A Zucky por acompañarme todas las noches en vela. A mis amigos Arturo y Preisser, sin ellos ni las fiestas, las clases o los días en el Tlahuizcalpan hubieran sido lo mismo. A Preisser por esas competencias amistosas, por esa inquietud por continuar superándonos y aprendiendo.

Agradezco el apoyo y paciencia de mi asesor Néstor Ortiz durante todo este tiempo, por su apertura, por tantos consejos y su genuina disposición a enseñarme. También agradezco a mis sinodales por sus comentarios y observaciones, por incitarme a investigar más allá, por brindarme confianza en mi trabajo y por ayudarme a mejorarlo.

Agradezco el apoyo otorgado para realizar esta tesis a través de los proyectos PAPIIT IA100721, “*Fenomenología de estrellas de neutrones en la astronomía de ondas gravitacionales*”, y PAPIIT IA101123, “*Estrellas de neutrones en relatividad general y en teorías alternativas de gravitación*”.

Sinceramente
Enrique Galicia Pineda

Índice general

| | Página |
|--|---------------|
| Agradecimientos | 1 |
| Convenciones | 1 |
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Termodinámica | 7 |
| 2.1. Leyes de la Termodinámica | 7 |
| 2.2. Procesos politrópicos | 9 |
| 2.2.1. Gas ideal | 9 |
| 2.3. Propiedades de las ecuaciones de estado utilizadas en este trabajo | 11 |
| 2.4. Propiedades de la materia a densidades altas | 13 |
| 3. Enanas blancas | 21 |
| 3.1. Ecuación de estado de la materia dentro de una enana blanca | 24 |
| 3.2. Ecuaciones de estructura newtonianas | 30 |
| 3.2.1. Ecuación de Poisson | 31 |
| 3.2.2. Ecuación de Euler | 32 |
| 3.3. El Límite de Chandrasekhar | 35 |
| 4. Estrellas de neutrones | 39 |
| 4.1. La materia dentro de una estrella de neutrones | 41 |
| 4.1.1. Energías de enlace nucleares | 41 |
| 4.1.2. El estado de la materia por encima de la densidad de goteo de neutrones | 45 |
| 4.1.3. Pasta en las estrellas de neutrones | 46 |
| 4.1.4. La materia en el núcleo externo | 47 |
| 4.1.5. La materia en el núcleo interno | 49 |
| 4.2. El formalismo de los polítropos generalizados a trozos | 52 |
| 4.3. Ecuaciones de estructura en Relatividad General | 55 |
| 4.3.1. El tensor de Energía-Momento | 57 |
| 4.3.2. Las Ecuaciones de Campo de Einstein | 58 |
| 4.4. Masa máxima en las estrellas de neutrones | 63 |

| | |
|--|------------|
| 5. Modelado de estrellas compactas con el software Aztekas | 65 |
| 5.1. Aztekas | 65 |
| 5.2. Integración numérica de las ecuaciones de estructura | 66 |
| 5.2.1. El método de Runge-Kutta | 66 |
| 5.2.2. Consideraciones generales en las ecuaciones de estructura | 67 |
| 5.3. La estructura e implementación de módulos en Aztekas | 68 |
| 5.4. Refinamiento en el valor del radio estelar | 72 |
| 6. Resultados | 75 |
| 6.1. Validación del Integrador RK2 | 75 |
| 6.2. Modelos de enanas blancas | 76 |
| 6.3. Modelos de estrellas de neutrones | 81 |
| 7. Conclusiones | 89 |
| A. Solución a las integrales en la ecuación de estado para enanas blancas | 93 |
| A.1. Presión interna de la materia dentro de una enana blanca | 93 |
| A.2. Densidad de energía de los electrones dentro de una enana blanca | 95 |
| B. El Tensor de Einstein con una métrica del espaciotiempo estática y esféricamente simétrica | 99 |
| B.1. Los símbolos de Christoffel | 100 |
| B.2. El tensor de Ricci | 101 |
| B.3. El escalar de Ricci | 107 |
| B.4. El tensor de Einstein | 107 |
| Bibliografía | 112 |

Convenciones

Dado que parte de esta tesis se desarrolla en el contexto de la Relatividad General, en este espacio aclaramos las convenciones que seguimos a lo largo de la misma.

- Utilizamos como notación para la Derivada Lagrangiana $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$.
- Definimos el elemento de línea de la métrica para un espacio-tiempo plano como $ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$.
- Los índices griegos toman valores en $\{0, 1, 2, 3\}$ y los índices latinos toman valores en $\{1, 2, 3\}$.
- Para referirnos a la coordenada temporal utilizaremos indistintamente como índices a 0 y t .
- Para referirnos a las coordenadas espaciales utilizaremos indistintamente como índices a i y x_i .
- Para referirnos al tiempo propio utilizamos τ .
- Utilizamos como notación para la Derivada Covariante ∇_μ , ∂_μ , $;$ μ .
- Utilizamos como notación para las derivadas parciales: $\frac{\partial}{\partial \mu}$, $_{,\mu}$.
- Tomamos a la constante cosmológica $\Lambda = 0$.

Capítulo 1

Introducción

En la evolución estelar, la secuencia principal se refiere a la fase donde las estrellas queman Hidrógeno en el interior de sus núcleos. Enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros de masa estelar se consideran objetos compactos que constituyen la fase final de algunas estrellas que pasaron y evolucionaron más allá de la secuencia principal, pues nacen a partir del colapso gravitacional de éstas. Las enanas blancas son producto de núcleos estelares con degeneración de electrones y las estrellas de neutrones y agujeros negros son remanentes de núcleos estelares gravitacionalmente colapsados. Las estrellas de neutrones son remanentes del núcleo estelar con degeneración de bariones mientras que los agujeros negros tienen un colapso al interior del horizonte de eventos [1].

Una estrella en secuencia principal da soporte a sí misma contra el colapso gravitacional por la presión de gas caliente debida a reacciones termonucleares que ocurren en su núcleo. Cuando la estrella no es capaz de continuar produciendo estas reacciones, el próximo paso en su evolución es el colapso gravitacional. Las enanas blancas y estrellas de neutrones son objetos que tienen un mecanismo diferente para obtener equilibrio hidrostático y soportarse a sí mismas. Si no consideramos fenómenos de acreción, en estas estrellas compactas no ocurren reacciones termonucleares y estos objetos incluso se enfrían durante el transcurso del tiempo. Por otro lado si consideramos fenómenos de acreción, entonces diversas reacciones termo y pico nucleares pueden ocurrir pero no son la razón de que la estrella se soporte a sí misma. No obstante, estas reacciones nucleares son responsables de otros fenómenos en las estrellas compactas como novae y supernovas Ia en enanas blancas y destellos de rayos X (X-ray flashes) en estrellas de neutrones.

Es la presión de degeneración cuántica de las partículas que constituyen a las enanas blancas y estrellas de neutrones la responsable de darles soporte. Esta presión de degeneración se debe a la interacción cuántica de fermiones y tiene su origen en el Principio de Exclusión de Pauli. En el caso de las enanas blancas, son los electrones libres de distintos elementos los responsables de generar esta presión de degeneración, mientras que en las estrellas de neutrones, son los protones, neutrones y electrones libres de los átomos que solían conformar al núcleo de la estrella progenitora [2, 3] además de la parte repulsiva de la interacción fuerte.

Para llegar al escenario extremo donde las partículas que formaban átomos se han liberado y se encuentran dispersas en el interior de las estrellas de neutrones y enanas blancas, una gran energía tuvo que ser suministrada para vencer a las energías de enlace de los electrones que rodeaban núcleos atómicos, y de los

neutrones que estaban confinados en núcleos atómicos. Para que estas partículas puedan vencer sus energías de enlace es necesario que la materia se encuentre en un régimen de densidades de masa particularmente alto, comenzando en el orden de 10^4g cm^{-3} y terminando en el orden de 10^7g cm^{-3} para el caso de las enanas blancas y pudiendo alcanzar densidades del orden de 10^{14}g cm^{-3} para el caso de las estrellas de neutrones. Estas densidades de masa son muy altas en comparación a las densidades de otros objetos astrofísicos como las estrellas en secuencia principal o planetas.

Este rango tan amplio de densidades en el interior de las estrellas compactas tiene como consecuencia que numerosos fenómenos se manifiesten en la materia. Las diferencias que pueden existir en la materia dependiendo del rango de densidades en el que nos enfoquemos son tan particulares que permiten estructurar el interior de las enanas blancas y estrellas de neutrones únicamente tomando como parámetro el rango de densidades de masa aplicables a esa parte en específico de la estrella. Por ejemplo, para el estudio de las enanas blancas el régimen de densidades es lo suficientemente bajo para poder estudiarlas en el contexto de la gravedad newtoniana, pero es necesario tomar en cuenta fenómenos de decaimiento, interacciones coulombianas y cuánticas en una primera aproximación. Los fenómenos principales a estudiar en las enanas blancas son la completa ionización de los átomos, los electrones con momentos relativistas y la presión de degeneración cuántica.

Las estrellas de neutrones pueden llegar a ser tan compactas que resulta necesario estudiarlas en el contexto de la Relatividad General. Aún más, en el interior de las estrellas de neutrones las cuatro fuerzas fundamentales toman relevancia para la descripción de la materia, donde además de los fenómenos que ya ocurren en el interior de las enanas blancas, también hay que tomar en cuenta la liberación de neutrones del núcleo, la degeneración de los neutrones, interacciones entre nucleones libres, *materia nuclear*, el posible desconfinamiento de quarks y el posible surgimiento de otras partículas además de los protones, neutrones y electrones.

Dentro de las enanas blancas y estrellas de neutrones la materia manifiesta interacciones cuánticas y gravitacionales que difícilmente podrían encontrarse en otras partes del universo, por lo que tales objetos constituyen laboratorios naturales para entender fenómenos gravitatorios y cuánticos actuando de forma simultánea, y su estudio favorece la compresión del estado de la materia a densidades muy altas. Históricamente se han realizado numerosos esfuerzos para entender el interior de estos objetos. Comenzando por Chandrasekhar, quien desarrolló modelos de enanas blancas en 1930, y después la teorización por parte de Baade y Zwicky de las estrellas de neutrones en 1934, hasta los primeros modelos de estrellas de neutrones desarrollados por Oppenheimer y Volkoff en 1939, hoy en día el estudio de estos objetos se puede dividir en las siguientes dos partes. Los astrónomos que trabajan en la detección, caracterización y medición de las numerosas estrellas de neutrones y enanas blancas en el universo, y los físicos teóricos que proponen ecuaciones de estado complejísimas que toman en cuenta los diversos fenómenos que ocurren en el interior de estos objetos.

Ésta dualidad en el estudio de las enanas blancas y estrellas de neutrones permite validar las diferentes propuestas de ecuaciones de estado que existen hoy en día, contrastando las predicciones en las cantidades físicas medibles de distintos modelos bajo diferentes ecuaciones de estado con las observaciones hechas. Los modelos estelares se construyen considerando un sistema de ecuaciones diferenciales que modelan la estructura interna de la estrella, complementado con una ecuación de estado. Los modelos se suelen obtener

a través de métodos numéricos, pues las soluciones analíticas de las ecuaciones de estructura de las enanas blancas y estrellas de neutrones sólo son conocidas para un número reducido de ecuaciones de estado.

En 2017, varios investigadores del Instituto de Astronomía de la UNAM comenzaron el desarrollo de una ambiciosa herramienta computacional capaz de realizar simulaciones de fenómenos hidrodinámicos tridimensionales sobre espaciotiempos curvos. Este software, llamado **Aztekas**, es de libre acceso para la comunidad académica, y su principal aplicación astrofísica hasta ahora es la simulación de fenómenos de acreción de materia sobre agujeros negros esféricos o rotantes. **Aztekas** es un software desarrollado en el lenguaje C bajo el paradigma de la programación modular, y tiene un gran potencial para convertirse en una herramienta de cómputo con varias aplicaciones en la astrofísica relativista, pues permite la adición de nuevos módulos capaces de modelar nuevos problemas astrofísicos.

En este trabajo de tesis buscamos contribuir al desarrollo de **Aztekas**, abriendo la posibilidad de simular no solo agujeros negros sino también estrellas compactas soportadas con ecuaciones de estado realistas. Con este objetivo en mente, desarrollamos los módulos necesarios para resolver numéricamente las ecuaciones de estructura de enanas blancas y estrellas de neutrones, en armonía con el resto de los módulos de **Aztekas**. Esta tesis representa el aprendizaje adquirido sobre estrellas compactas y cómo fue aplicado para el desarrollo de los módulos en **Aztekas**, el entendimiento de la estructura interna de las estrellas y su relación con las ecuaciones de estado, así como novedosas implementaciones numéricas que han propuesto diversos autores para construir modelos numéricos de enanas blancas y estrellas de neutrones. En el capítulo 2 se da una introducción a las propiedades termodinámicas del interior de las enanas blancas y estrellas de neutrones, imponiendo las condiciones a seguir para las ecuaciones de estado; también caracterizamos los límites en las densidades de masa aplicables para enanas blancas y estrellas de neutrones. En el capítulo 3 estudiamos a las enanas blancas, obteniendo una ecuación de estado para una nube de electrones degenerados, no interactuantes y relativistas; también obtenemos las ecuaciones de estructura para enanas blancas en el régimen newtoniano y estudiamos la existencia del Límite de Chandrasekhar. En el capítulo 4 hacemos lo propio con las estrellas de neutrones, estudiando su interior y las propuestas históricamente conocidas de ecuaciones de estado. Deducimos también las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para describir su estructura interna y revisamos el formalismo de los politropos generalizados a trozos, el cual será útil para implementar numéricamente diversas ecuaciones de estado realistas para los núcleos de estrellas de neutrones. En el capítulo 5 revisamos la estructura de **Aztekas**, la implementación de algoritmos integradores para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de las ecuaciones de estructura de enanas blancas y estrellas de neutrones; también mostramos el aprovechamiento de la estructura modular de **Aztekas** para implementar nuestros códigos. En el capítulo 6 exponemos los resultados de nuestras implementaciones, revisando diferentes modelos estáticos y esféricamente simétricos de estrellas de neutrones y enanas blancas, y la convergencia de nuestros algoritmos integradores. En el capítulo 7 se discuten las limitaciones, mejoras y el trabajo futuro sobre **Aztekas** y nuestros módulos implementados. En los apéndices A y B desglosamos resultados de utilidad para deducir la ecuación de estado para enanas blancas y para deducir las ecuaciones TOV, respectivamente.

Capítulo 2

Termodinámica

Las descripciones macroscópicas de los sistemas físicos a menudo son utilizadas como punto de partida para entender dichos sistemas y también sus diferentes cantidades físicas medibles. Frecuentemente en el estudio de sistemas físicos, es necesario conocer y entender los distintos fenómenos que ocurren en su interior, por lo que el interés se centra en las variables del sistema que guardan una relación con su estado interno y con los fenómenos que se manifiestan en su interior. La determinación de las variables que describan correctamente el estado interno del sistema depende del sistema físico a tratar, y éstas deben ser consistentes con las Leyes de la Termodinámica [4]. Las estrellas de neutrones y enanas blancas no son la excepción, pues las relaciones entre su presión interna y su densidad de masa, en particular, están íntimamente ligadas al entendimiento de las partículas que las constituyen y sus interacciones.

Partiendo de un sistema para el cual se han determinado las variables termodinámicas necesarias para dar una descripción y conocer su estado, existe una ecuación que relaciona estas variables e indica las dependencias que se pueden tener. Estas relaciones matemáticas entre las variables se conocen como *ecuaciones de estado* y pueden ser obtenidas a partir de distintos modelos estadísticos del sistema, y de esa forma sintetizar toda la información relevante sobre el estado de la materia.

Este capítulo pretende introducir los conceptos que serán de utilidad para entender los modelos de enanas blancas y estrellas de neutrones desarrollados a lo largo de este proyecto.

2.1. Leyes de la Termodinámica

Es a través de la Primera Ley de la Termodinámica que se establece cómo puede verse alterada la energía interna de un sistema U a través del calor Q , el trabajo ejercido por o sobre el sistema W , o intercambiando con su entorno un número de partículas N con un potencial químico asociado μ_c .

Partiendo de la Primera Ley de la Termodinámica,

$$dU = dQ + dW + \mu_c dN, \tag{2.1}$$

los modelos de enanas blancas y estrellas de neutrones que desarrollaremos son esencialmente sistemas cerrados, pues consideramos que se trata de objetos aislados, descartando fenómenos de acreción o pérdida

de materia. Modelaremos el interior de estas enanas blancas y estrellas de neutrones como un fluido perfecto, que tiene entre sus propiedades ser invíscido y no permitir la conducción de calor [5]. Bajo este modelo imponemos que $\mu_c dN = 0$, lo cual excluye el intercambio de partículas; luego la energía interna del fluido se escribe en función de la temperatura T , entropía S , presión P y volumen V del sistema. En términos de estas variables, la ecuación (2.1) se encuentra típicamente en la literatura como

$$dU = TdS - PdV. \quad (2.2)$$

En la descripción de un fluido como sistema cerrado es de interés conocer la densidad de número de partículas n . Puede ocurrir que el fluido sea un sistema donde se encuentren distintas especies de partículas en diferentes cantidades, de tal forma que si m_i es la masa de una partícula de la especie i -ésima en el fluido, entonces

$$\rho_i = m_i n_i \quad (2.3)$$

es la densidad de masa de la i -ésima especie de partículas con una densidad de número de partículas n_i . El concepto de masa molecular promedio μ será el que vincule la densidad total de masa del fluido $\rho = \sum_i n_i m_i$ con la densidad de partículas $n = \sum_i n_i$ [2]:

$$\mu = \frac{1}{m_H} \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i = \frac{1}{m_H} \sum_i c_i m_i, \quad (2.4)$$

con m_H masa del átomo de Hidrógeno y $c_i := n_i/n$ la concentración de la i -ésima especie de partículas en el fluido.

De lo anterior obtenemos la relación

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H}. \quad (2.5)$$

A través de estas dos cantidades, es posible hacer una reformulación de la ecuación (2.2), considerando que el número de partículas N del sistema es una cantidad conservada [1]. Si ε es la densidad de energía del sistema y s es la densidad de entropía, entonces podemos reescribir $U = \varepsilon N/n$, $S = sN/n$ y $V = N/n$, obteniendo

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = Td\left(\frac{s}{n}\right) - Pd\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.6)$$

Y así como U es función de las variables (T, P, V) , la densidad de energía del sistema ε queda en función de las variables (T, P, n) .

Las capacidades caloríficas son una medida de la sensibilidad que tiene el sistema a cambiar su temperatura cuando hay cambios en su energía interna por calor [4]. Estas capacidades caloríficas tienen un valor definido para un proceso particular, y pueden variar dependiendo de si el sistema se encuentra a presión constante (C_P) o a volumen constante (C_V) de tal forma que se definen

$$C_V := \left(\frac{dU}{dT}\right)_V, \quad C_P := \left(\frac{dU}{dT}\right)_P. \quad (2.7)$$

En general se tiene que $C_P > C_V$, pues la capacidad calorífica a presión constante puede tomar en cuenta

trabajos de expansión del sistema mientras que la capacidad calorífica a volumen constante por definición, no lo hace [4, 6]. El cociente entre estas capacidades caloríficas se conoce como índice adiabático γ y es una cantidad adimensional que caracteriza al sistema y que satisface

$$\gamma := \frac{C_P}{C_V} > 1. \quad (2.8)$$

Hasta ahora hemos propuesto que un fluido perfecto es el sistema termodinámico cerrado que describe la materia dentro de enanas blancas y estrellas de neutrones. Sin embargo, esto no es suficiente y debemos introducir otras restricciones a nuestros modelos, las cuales limitarán las posibles ecuaciones de estado que podemos considerar.

2.2. Procesos politrópicos

Definimos un proceso politrópico como aquel proceso termodinámico en el que se cumple la relación [7, 8]

$$PV^\Gamma = C, \quad (2.9)$$

con C una constante y Γ un número real positivo llamado exponente politrópico.

En principio, existen muchos procesos termodinámicos que satisfacen la relación anterior, incluyendo procesos de expansión, de compresión y de transferencia de calor. De manera introductoria analizaremos las propiedades del sistema en el caso de un gas ideal.

2.2.1. Gas ideal

La ecuación de estado de un gas ideal es $PV = NK_B T$, donde K_B es la constante de Boltzmann y se satisface que $C_P = C_V + NK_B$ [4].

De la Primera Ley de la Termodinámica, si consideramos un proceso adiabático tenemos que

$$dU = d\overset{0}{Q} + dW.$$

Para un proceso isobárico, los cambios en la energía interna están dados por

$$\begin{aligned} dU &= -PdV \\ \implies C_V dT + PdV &= 0.. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por otro lado, de la ecuación de estado para el gas ideal obtenemos

$$\begin{aligned} PdV + VdP &= NK_B dT \\ \implies dT &= \frac{PdV + VdP}{NK_B}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De las ecuaciones (2.10) y (2.11) deducimos

$$\begin{aligned}
 C_V P dV + C_V V dP + N K_B P dV &= 0 \\
 \implies C_V V dP + \cancel{N K_B P dV} + \overset{C_P}{N K_B P dV} &= 0 \\
 \implies C_V V dP + C_P P dV &= 0 \\
 \implies \frac{dP}{P} + \frac{\overset{\gamma}{C_P} dV}{\cancel{C_V} V} &= 0, \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

donde hemos identificado al cociente de calores específicos como el índice adiabático. Esta ecuación diferencial considerando a γ constante tiene como solución

$$PV^\gamma = C. \tag{2.13}$$

De esta forma, se tiene que un proceso adiabático en un gas ideal es un proceso politrópico donde el exponente politrópico coincide con el índice adiabático del gas. La generalización no es cierta pues como hemos mencionado, diferentes procesos que no son necesariamente adiabáticos o cuya ecuación de estado es diferente a la del gas ideal pueden satisfacer la ecuación (2.9) [6, 8].

Podemos ir más allá trabajando con el gas ideal bajo la condición de adiabaticidad y ver qué relaciones satisfacen otras variables termodinámicas de interés con nuestro sistema. Con este propósito, reescribimos la ecuación del gas ideal en función de la densidad de masa ρ ¹

$$P = (\gamma - 1) \rho \epsilon. \tag{2.14}$$

Donde ϵ es la energía interna del sistema por unidad de masa, diferente de la densidad de energía interna del sistema ε .

Podemos reescribir la Primera Ley de la Termodinámica bajo la condición de adiabaticidad como

$$d\epsilon = 0 - Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 \implies d\epsilon + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) &= \frac{1}{\gamma - 1} d \left(\frac{P}{\rho} \right) + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 \\
 \implies \frac{dP}{P} &= \gamma \frac{d\rho}{\rho}. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación diferencial es integrada para conseguir la relación entre P y ρ

$$P = K \rho^\gamma, \tag{2.17}$$

donde K es una constante y γ es el índice adiabático del gas ideal.

¹Para el desarrollo de este trabajo no es de vital importancia expresar paso a paso todas las posibles transformaciones y propiedades termodinámicas del gas ideal, pero sí lo es la búsqueda de una relación entre la presión interna del sistema y una variable intensiva, en lugar de la relación encontrada entre la presión interna y una magnitud extensiva como lo es el volumen del sistema.

De forma más general, la ecuación (2.17) puede formularse para un exponente politrópico $\Gamma = 1 + 1/N$ donde N es el índice politrópico y Γ no necesariamente coincide con el índice adiabático del sistema. Introducimos la ecuación de estado politrópica

$$P = K\rho^\Gamma. \quad (2.18)$$

Esta es una ecuación de estado extensamente utilizada para proponer modelos estelares y será utilizada en este proyecto para ajustar y proponer modelos de enanas blancas y estrellas de neutrones que provienen de ecuaciones de estado más complejas.

Concluyendo, la ecuación (2.18) es equivalente a la ecuación de estado del gas ideal si el proceso que se describe es adiabático y entonces el exponente politrópico coincide con el índice adiabático. En el caso particular de un fluido perfecto, que será empleado para desarrollar los modelos de enanas blancas y estrellas de neutrones, por definición no se permite la conducción de calor y la condición de adiabaticidad se satisface, considerándose una *generalización* del gas ideal [5, 6]. Sin embargo, la constante de integración K puede ser diferente para distintas líneas de trayectorias de los elementos de fluido, y se puede probar que K está relacionada con los cambios en la entropía del fluido.² Si queremos tomar una constante K para dar una ecuación de estado politrópica que describa a todo el fluido, es necesario entonces imponer la condición de isentropía, es decir, que no debe haber cambios en la entropía del fluido. Esta condición es el último ingrediente en las ecuaciones de estado que utilizaremos a lo largo de este proyecto.

2.3. Propiedades de las ecuaciones de estado utilizadas en este trabajo

A partir de un sistema cuya composición es conocida, existe una relación entre sus variables termodinámicas

$$f(P, \rho, T, \dots) = 0, \quad (2.19)$$

que se conoce como ecuación de estado. La importancia de esta relación está en que caracteriza al sistema, pues contiene información sobre el comportamiento de las variables termodinámicas y por lo tanto, del sistema.

Nuestras enanas blancas y estrellas de neutrones son modeladas como fluidos perfectos isentrópicos. Retomando la ecuación (2.6)

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = Td\left(\frac{s}{n}\right) - Pd\left(\frac{1}{n}\right),$$

por la condición de isentropía tenemos que la densidad de energía, ε , es función únicamente de la presión P y de la densidad de número de partículas n , es decir $\varepsilon = \varepsilon(P, n)$. Dada una ecuación de estado que vincule estas dos variables $P = P(n)$, la densidad de energía interna quedará como función únicamente de la densidad de partículas o de la presión interna de la estrella [9]. Así, desarrollando la ecuación (2.6)

²Una excelente referencia a esta afirmación y al estudio de la termodinámica en la dinámica de fluidos relativistas se puede encontrar en el capítulo 7 de la referencia [6], donde la sección 7.5 está dedicada específicamente al estudio de diferentes ecuaciones de estado.

suponiendo que $P = P(n)$ se llega a

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{\varepsilon + P(n)}{n}. \quad (2.20)$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$\varepsilon(P) = nm_0c^2 + n \int_0^n P(u) \frac{du}{u^2}, \quad (2.21)$$

donde m_0c^2 denota la energía de la masa en reposo por partícula.

Enseguida introducimos el índice adiabático efectivo [9]

$$\gamma(n) := \frac{\partial \log P}{\partial \log n} = \frac{n}{P(n)} \frac{dP(n)}{dn}, \quad n > 0, \quad (2.22)$$

e imponemos que la función de la presión, $P(n)$, sea una función continua, diferenciable respecto a la densidad de partículas n , y que satisfaga las siguientes propiedades [9]:

- $P(n) > 0$ si $n > 0$,
- $P(n)$ es una función monótonamente creciente, y
- $\gamma(n) \geq \gamma_1$ con $\gamma_1 > 1$ para todo $n > 0$ suficientemente pequeño.

La última condición es necesaria para asegurar la convergencia de la integral en (2.21). De esta forma, $\varepsilon(P)$ es una función continua, diferenciable y monótonamente creciente que satisface [9]

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(P)}{n} \rightarrow m_0c^2. \quad (2.23)$$

En particular, utilizando la ecuación de estado politrópica obtenemos las relaciones [9, 10]

$$\varepsilon(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{1/\Gamma} m_0c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1} \quad \text{si } P = P(n), \quad (2.24)$$

$$\varepsilon(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{1/\Gamma} c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1} \quad \text{si } P = P(\rho). \quad (2.25)$$

Las estrellas de neutrones y enanas blancas se modelan como sistemas compuestos por un gas fermiónico altamente degenerado, lo cual es congruente con las características de nuestro modelo de un fluido perfecto isentrópico. Sin embargo, la degeneración de un gas fermiónico ya no se puede describir como un gas ideal.

Los politropos fueron ampliamente estudiados por J.H. Lane, R. Emdem y S. Chandrasekhar para describir estructuras estelares y se pueden utilizar para plantear modelos muy simples de estrellas colapsadas. Dos resultados de gran importancia involucran a las ecuaciones de estado politrópicas y a nuestros modelos estelares, y son la razón por la que introducimos estas ecuaciones en primer lugar. En el caso de las enanas blancas, veremos que la ecuación de estado apropiada para describir a un gas de electrones degenerado

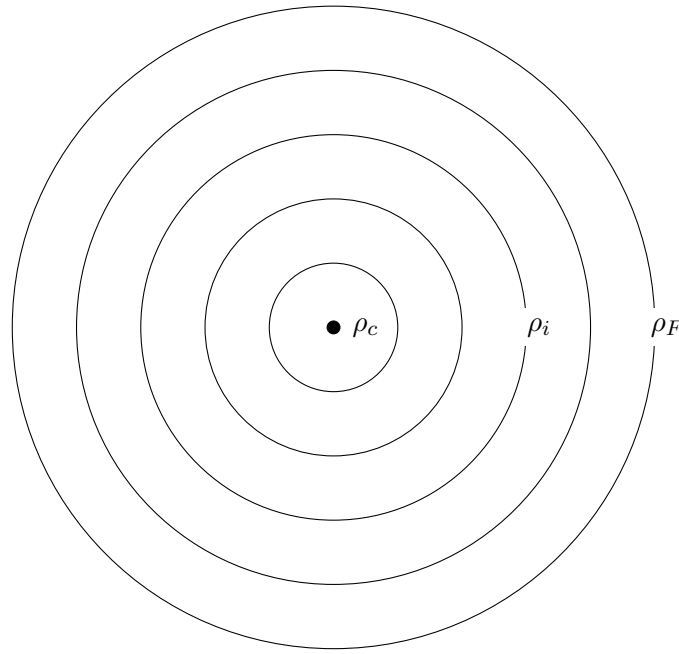


Figura 2.1: Secciones de una estrella de neutrones en función de la densidad de masa.

puede aproximarse a una forma politrópica en los límites no relativista y ultrarrelativista, donde el índice adiabático es conocido para ambos límites. En el caso de las estrellas de neutrones, un enfoque distinto toma lugar, donde en vez de intentar describir a toda la estrella mediante una única ecuación de estado politrópica, se aprovecha la simetría esférica de los modelos estelares simples, es decir, que la densidad de masa solo depende de la coordenada radial y es estrictamente decreciente, y entonces se toman *secciones* de la estrella, particionando su densidad de masa en distintos intervalos como se aprecia en la Figura 2.1. En este caso, cada trozo de la estrella, dependiendo del rango de densidades en el que nos encontremos, $[\rho_i, \rho_{i+1})$, tiene una ecuación de estado politrópica asociada

$$P = K_i \rho^{\Gamma_i}, \quad \rho \in [\rho_i, \rho_{i+1}). \quad (2.26)$$

La elección de K_i , Γ_i y ρ_i no es trivial. Como veremos más adelante, tales parámetros pueden ser ajustados para aproximar ecuaciones de estado más complejas. También veremos que la condición de isentropía ya no se satisface en toda la estrella, pues tendremos que $K_i \neq K_j$ para $i \neq j$. Este enfoque nace de buscar expresiones simples para describir la materia que se encuentra en el núcleo de las estrellas de neutrones a partir de ecuaciones de estado provenientes de modelos complejos de física de partículas y a menudo reportadas en tablas [11].

2.4. Propiedades de la materia a densidades altas

Al inicio de este capítulo nos restringimos a estudiar sistemas termodinámicos bajo la condición $\mu_c dN = 0$, suponiendo que en nuestros modelos de estrellas compactas no se presentarían fenómenos de intercambio de materia con el exterior. En esta sección estudiaremos las implicaciones de esta imposición cuando existen transformaciones entre las partículas presentes en nuestro sistema. Esto dará pie a estudiar la relación entre los valores de densidad de materia y el desconfinamiento de las distintas partículas que la conforman.

Para cada una de las especies de partículas presentes en la materia, podemos asociar el potencial químico de la partícula i -ésima³

$$\mu_i := \frac{\partial U}{\partial N_i}, \quad (2.27)$$

con N_i el número de partícula i -ésimo, y podemos reescribir la condición $\mu_c dN = 0$ como [12]

$$\sum_i \mu_i dN_i = 0. \quad (2.28)$$

La condición (2.28) se conoce como *equilibrio químico* de la materia y es una condición sobre nuestros modelos de estrellas de neutrones y enanas blancas.

Pueden existir distintas combinaciones de partículas interactuando que conducen a distintas reacciones en el interior de las estrellas que deben ser tomadas en cuenta y que deben estar sintetizadas en la ecuación (2.28). Por ejemplo, considerando el decaimiento por captura electrónica



podemos reescribir la condición de equilibrio químico como

$$\mu_{e^-} + \mu_p = \mu_n + \mu_{\nu_e}, \quad (2.30)$$

donde $dN_{e^-} = dN_p = -dN_n = -dN_{\nu_e}$.

Esencialmente, el interior de las estrellas de neutrones y de las enanas blancas es una mezcla de materia bariónica y leptónica, y las posibles interacciones entre las partículas están descritas por la electrodinámica y las interacciones débil y fuerte, donde se satisfacen leyes de conservación para el número de carga Q , el número leptónico L y el número bariónico B . Podemos expresar cada uno de los potenciales químicos de las distintas especies de partículas en términos del potencial químico bariónico μ_B , leptónico μ_L y de carga μ_Q [12], de manera que

$$\mu_i = B_i \mu_B + L_i \mu_L + Q_i \mu_Q, \quad (2.31)$$

con B_i , L_i y Q_i número bariónico, leptónico y de carga asociados a la i -ésima especie de partícula.

El rol del potencial químico con respecto a la densidad de partículas y la presión del sistema puede encontrarse si utilizamos el ensamble gran canónico $\Omega(V, \mu_i, T)$ para describir nuestro sistema [12, 13],

$$\Omega(V, \mu_i, T) = U - TS - \sum_i \mu_i N_i = -PV, \quad (2.32)$$

donde

$$P(\mu_i, T) = -\frac{\Omega}{V}, \quad (2.33)$$

³Para evitar ambigüedades, veamos que la diferencia entre μ_c , μ_i como potenciales químicos y μ como masa molecular promedio puede aclararse retomando la ecuación (2.4), donde vemos que no tendría ningún sentido agregar un subíndice a la letra μ cuando nos referimos a la masa molecular promedio.

de tal forma que en el límite termodinámico

$$-\frac{\Omega}{V} = -\varepsilon + Ts + \sum_i \mu_i n_i. \quad (2.34)$$

Y podemos redefinir el potencial químico de las partículas a partir de la ecuación (2.27) como

$$\mu_i \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i}. \quad (2.35)$$

Luego, la relación entre P y μ_i está dada por [12, 13]

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \mu_i} \right|_T = n_i, \quad (2.36)$$

con n_i la densidad de número de partículas de la especie i -ésima.

Puesto que la presión es función de los potenciales químicos de las especies de partículas μ_i , en virtud de (2.31) la presión puede escribirse en función de μ_B , μ_L y μ_Q [12].

Una restricción adicional en el sistema es la neutralidad en la carga eléctrica de nuestras estrellas. Esto implica que el número de carga del sistema es cero ($Q_{\text{tot}} = 0$) y por lo tanto la densidad de número de carga n_Q también es nula. Luego

$$n_Q = \frac{\partial P}{\partial \mu_Q} = \sum_i \frac{\partial P}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \mu_Q} = \sum_i n_i Q_i = 0, \quad (2.37)$$

y de esta forma $P = P(\mu_B, \mu_L, T)$.

Existen otras dos restricciones sobre nuestros modelos estelares a tomar en cuenta. Primero consideraremos que la materia en el interior de nuestras estrellas compactas es materia *fría*, esto es porque la temperatura de la estrella es mucho menor a la temperatura de Fermi T_F y por lo tanto se puede tomar el límite de temperatura cero para modelar la materia en el interior.⁴

La segunda restricción surge de considerar que los neutrinos escapan libremente de la estrella al medio interestelar. Los neutrinos son partículas que interaccionan muy débilmente con la materia que los rodea, y por lo tanto podemos hacer cero su potencial químico. Puesto que los neutrinos son partículas leptónicas sin carga, hacer que su potencial químico sea cero considerando (2.31) implica que el potencial leptónico μ_L también es cero.

De estas dos últimas restricciones obtenemos que $P = P(\mu_B)$. Que la presión interna dependa únicamente del potencial bariónico implica que el sistema puede ser descrito únicamente en términos del potencial químico bariónico o, equivalentemente, de la densidad de número bariónico [12]. En el Capítulo 3 veremos que la presión interna de las enanas blancas está dada principalmente por la presión de degeneración de electrones, sin embargo se obtendrá una expresión para la presión en términos de la densidad de masa de la estrella, considerando que está determinada por las masas de los nucleones, en concordancia con lo desarrollado en esta sección.

⁴Esta restricción y sus consecuencias al estudiar la materia con la distribución de Fermi-Dirac se explican en el Capítulo 3.

En resumen, el equilibrio químico dentro de estrellas de neutrones y enanas blancas implica que el número bariónico B y el número de carga Q son cantidades conservadas, la presión interna de la estrella puede describirse en términos de la densidad de masa bariónica únicamente, es decir $P = P(n_B)$, y no se considera un potencial químico para los neutrinos. La condición sobre el potencial químico de los electrones, protones y neutrones se escribe como

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n, \quad (2.38)$$

que surge de considerar la reacción



Por otro lado, el decaimiento del neutrón



está prohibido en el interior de las enanas blancas, pues el fenómeno de captura electrónica (2.39) no es posible en su interior y todos los estados disponibles para los electrones están ocupados [12]. En el interior de las estrellas de neutrones, el decaimiento del neutrón está regulado y puede ocurrir siempre y cuando haya un estado disponible para el electrón producto del decaimiento y esto es posible si algún electrón participó en el proceso de captura electrónica (2.39), manteniendo estable la condición sobre el potencial químico de las partículas (2.38).

Ahora estamos en condiciones de analizar las relación entre las interacciones de las partículas presentes en la materia y la densidad de masa de las estrellas compactas.

En la sección 3.1, estudiaremos un gas de electrones no interactuante, relativista y degenerado para describir el interior de una enana blanca. En el proceso obtendremos una relación entre la densidad numérica de los electrones n con su momento de Fermi p_F al cubo:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}. \quad (2.41)$$

También veremos que una aproximación a la densidad de masa en el interior de las estrellas, aplicable tanto para enanas blancas como para estrellas de neutrones es:

$$\rho = 2m_H n. \quad (2.42)$$

Por ahora nos limitaremos a utilizar las ecuaciones (2.41) y (2.42) para explorar los distintos fenómenos físicos que se presentan conforme la densidad de masa aumenta dentro de las estrellas. La idea principal es calcular el rango de energías a las que se encuentran los electrones y, dependiendo del límite aplicable, utilizar las relaciones de energía-momento para establecer el rango de densidades de la materia en el interior de las estrellas.

A densidades típicas terrestres, la materia se encuentra conformada por átomos con electrones ligados al núcleo atómico. Este régimen de densidades se encuentra en las atmósferas de enanas blancas y estrellas de neutrones. Conforme aumenta la densidad de masa, el número de estados ocupados por los electrones aumenta y con ello la energía de Fermi. Cuando la energía de Fermi para los electrones sea comparable con

la energía de enlace atómico, los electrones comenzarán a desprenderse del átomo, y conforme continúa aumentando la densidad de masa, los electrones se liberarán y los átomos estarán completamente ionizados. En este régimen de densidades la materia estará conformada por una nube de electrones y una retícula formada por los núcleos atómicos. Este límite de densidades distingue la atmósfera de nuestras estrellas de la materia en el interior [12, 14].

La energía de enlace entre los electrones y el núcleo atómico puede aproximarse en función de la cantidad de protones en el núcleo y de la cantidad de electrones que *apantallan* la carga positiva del núcleo [15]. De manera general, los electrones que se encuentran más cerca del núcleo experimentan una mayor fuerza de atracción coulombiana y por lo tanto son los que presentan la mayor energía de enlace a superar. Una aproximación a la energía de enlace de los electrones para distintos átomos es [15]:

$$E_B = -13.6\text{eV} \frac{Z^2}{n^2}, \quad (2.43)$$

donde Z es el número atómico y n el nivel de energía de los electrones.

Como estamos interesados en conocer la energía de enlace a superar para ionizar completamente a los átomos, nos concentraremos en analizar la energía de enlace de los electrones que se encuentren en el primer nivel de energía atómico, es decir donde $n = 1$.

El interior de enanas blancas generalmente está compuesto de átomos de Carbono, Oxígeno y/o Magnesio, que tienen números atómicos $Z = 6, 8$ y 12 , respectivamente. De esta manera, la energía de enlace para los electrones más cercanos al núcleo atómico, de acuerdo con (2.43) es $E_B = 490\text{eV}$, 870eV y 1960eV , respectivamente.

En el régimen clásico tenemos $E = p^2/2m$, por lo que los órdenes de magnitud de la densidad de materia para que los átomos se ionicen completamente son

$$\begin{aligned} \rho &= 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e \cdot 490\text{eV})^{3/2} \sim 10^2 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}, & \text{para } \text{C}_{12}, \\ \rho &= 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e \cdot 870\text{eV})^{3/2} \sim 10^2 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}, & \text{para } \text{O}_{16}, \\ \rho &= 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e \cdot 1960\text{eV})^{3/2} \sim 10^3 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}, & \text{para } \text{Mg}_{12}. \end{aligned}$$

Si la densidad de masa continúa aumentando, los electrones entrarán en el régimen relativista, de tal forma que el momento de Fermi de los electrones es comparable con la masa del electrón: $p_F \sim m_e c$, así

$$\rho = 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (m_e c)^3 \sim 10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (2.44)$$

Las densidades de masa típicas para las enanas blancas están por encima del orden de $10^4 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, y la materia en su interior está formada por una nube de electrones degenerados que pueden estar o no en el régimen relativista con átomos completamente ionizados que forman una retícula. En el caso de las estrellas de neutrones, este régimen de densidades se alcanza en la corteza exterior de la estrella.

Aumentando aún más la densidad de masa de las estrellas, los electrones obtendrán la energía suficiente para que ocurra un decaimiento por captura electrónica (2.29). Si suponemos que los protones y neutrones

en los núcleos atómicos están en reposo, entonces la energía de Fermi del electrón debe ser comparable con la diferencia de masas entre el neutrón y el protón

$$E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} = (m_n - m_p) c^2, \quad (2.45)$$

$$\implies \rho = 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} \left(\sqrt{(m_n - m_p)^2 - m_e^2 c^2} \right)^3 \sim 10^7 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (2.46)$$

Este es un límite superior en el régimen de densidades para las enanas blancas. Las densidades típicas de una enana blanca no son lo suficientemente altas como para producir decaimientos por captura electrónica y marca la distinción con respecto a las estrellas de neutrones, para las cuales este régimen de densidades se alcanza en su corteza exterior.

Al inicio de esta sección mencionamos que la materia en el interior de las estrellas compactas que estudiaremos es *materia fría*. Para nuestros fines, el hecho de que la temperatura de la estrella sea mucho menor a la temperatura de Fermi T_F es suficiente para hablar de la existencia de gases fermiónicos degenerados y al mismo tiempo poder tomar la distribución de Fermi-Dirac en el límite a temperatura cero, es decir, materia fría. Este concepto puede encontrarse en la literatura como materia densa y fría [16]. De esta forma, las enanas blancas tienen electrones en su interior con una energía asociada al estado cuántico en el que se encuentre cada partícula, siendo la Energía de Fermi E_F el límite superior en la energía que pueden tener dichos electrones, que no es suficiente para que ocurra en un decaimiento por captura electrónica. Para el caso de las estrellas de neutrones, la temperatura de la estrella sigue siendo menor a la temperatura de Fermi T_F pero en el gas fermiónico degenerado compuesto tanto por electrones como por neutrones, el valor de la Energía de Fermi E_F es mucho mayor y los electrones sí cuentan con la energía suficiente para que ocurra el decaimiento por captura electrónica.

En este régimen de densidades, los núcleos atómicos comienzan a enriquecerse de neutrones generados por la captura de los electrones dispersos en la materia. Conforme aumenta la densidad de masa los núcleos atómicos albergan más y más neutrones, hasta que la energía de enlace nuclear es superada y no es posible mantener a los nucleones unidos y los neutrones comienzan a *gotear* del núcleo atómico. Cuando ocurre este fenómeno, las densidades son tan altas como del orden de $10^{11} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y se le conoce como el *límite de goteo de neutrones*. En este límite se distingue la corteza externa de las estrellas de neutrones de su corteza interna, pero no es el orden de densidades más alto que se puede alcanzar dentro de una estrella de neutrones. En el Capítulo 4 estudiaremos la energía de enlace nuclear y los regímenes de densidades que se pueden alcanzar dentro del núcleo de una estrella de neutrones.

Resumiendo, apoyados en algunos resultados tomados del siguiente capítulo, en esta sección pudimos establecer los órdenes de magnitud para la densidad de masa de las estrellas de neutrones y enanas blancas, y cómo éstos están vinculados con la descripción de la materia en el interior. Tales órdenes de magnitud se presentan en la Tabla 2.1 y son los valores a los que recurriremos a lo largo de esta tesis cuando hablemos del régimen de densidades para modelar enanas blancas y estrellas de neutrones.

| Régimen de densidades | Descripción |
|--|--|
| $\rho < 10^4 \text{g} \cdot \text{cm}^3$ | Materia que forma la atmósfera estelar. |
| $\rho \sim 10^4 \text{g} \cdot \text{cm}^3$ | Interior de enanas blancas y corteza exterior de estrellas de neutrones. |
| $\rho \sim 10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^3$ | Electrones en el régimen relativista. |
| $\rho \sim 10^7 \text{g} \cdot \text{cm}^3$ | Captura electrónica en la corteza exterior de estrellas de neutrones. |
| $\rho \sim 10^{11} \text{g} \cdot \text{cm}^3$ | Límite de goteo de neutrones en la corteza interior de estrellas de neutrones. |

Tabla 2.1: Descripción del régimen de densidades y los fenómenos físicos presentes en estrellas de neutrones y enanas blancas.

Capítulo 3

Enanas blancas

Las enanas blancas son objetos compactos con una masa típica de alrededor de media masa solar [2, 14], con un radio típico de $5 \times 10^3 \text{km}$ y densidades de masa del orden de 10^5g cm^{-3} [2]. La hipótesis más aceptada acerca de su formación es que surgen a partir del colapso gravitacional de estrellas de entre 0.07 y 8 masas solares [17], iniciando su vida como un remanente del núcleo estelar de su estrella progenitora con temperaturas mayores a 10^5K . Estos objetos, al ser incapaces de llevar a cabo reacciones termonucleares en su núcleo, comienzan a enfriarse en los próximos millones de años conforme irradian la energía térmica residual que aún posean [1, 14].

De forma general, las enanas blancas están compuestas de dos partes: un núcleo de Carbono, Oxígeno o de Magnesio [18] y una atmósfera compuesta de elementos más ligeros. Las atmósferas son capas muy delgadas compuestas de átomos de Hidrógeno y Helio y que pueden presentar trazas de elementos más pesados como Carbono, Calcio y Potasio [14, 18]. Tienen un grosor que va desde los 300m hasta los 400km dependiendo de la composición de sus núcleos [12]. Las enanas blancas jóvenes emiten rayos ultravioleta y rayos X de baja energía cuya observación permite el estudio de la composición de sus atmósferas y realizar clasificaciones entre enanas blancas [14]. A diferencia de la atmósfera, el núcleo estelar contiene átomos que se encuentran completamente ionizados, los electrones se encuentran dispersos mientras que los núcleos atómicos, considerando interacciones coulombianas, formarán una retícula para minimizar su energía [12].

Se estima que la masa promedio de una enana blanca con una atmósfera rica en Hidrógeno es de $0.61 \pm 0.20 M_{\odot}$, mientras que para una enana blanca con una atmósfera rica en Helio se tiene una masa promedio de $0.72 \pm 0.17 M_{\odot}$ [19]. Existe evidencia de que la atmósfera de una enana blanca cambia conforme la edad de la estrella debido a fenómenos de convección, de acreción de material y difusión de elementos [19].

Existen diversas formas de medir las masas, radios y temperaturas de una enana blanca. Por ejemplo, mediante técnicas de paralaje es posible obtener su distancia, lo que permite una estimación de su luminosidad, y a través de ésta, estimar los valores de masa y radio estelares. Métodos más complejos involucran conocer la temperatura efectiva de la estrella y realizar un ajuste en su espectro de emisión [19]. Otro método al cual se recurre para estimar la masa de una enana blanca con una mayor precisión es a través de su órbita cuando se encuentra en un sistema binario, como por ejemplo se puede hacer para las enanas blancas Sirius B y Procyon B. En el caso de Sirius B, no sólo fue posible estimar su masa, sino descubrirla a través de anomalías en el movimiento de su compañera (Sirius A)[14]. Sin embargo, no siempre es posible

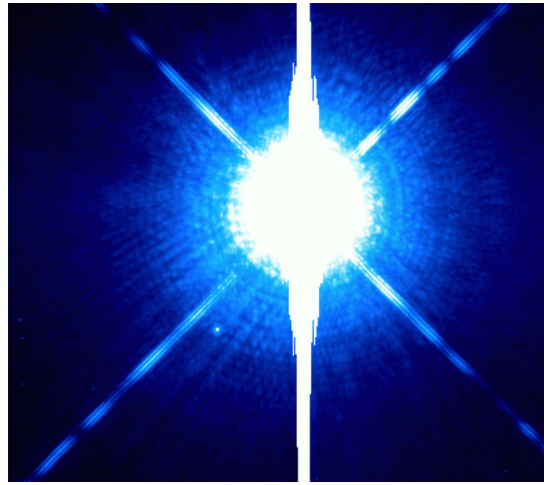


Figura 3.1: Representación en color falso de una imagen del Telescopio Espacial Hubble del sistema Sirius. Al centro y sobreexpuesta se encuentra Sirius A, en la parte inferior izquierda se encuentra Sirius B. Tomada de la referencia [22].

medir la temperatura o el radio de estrellas en sistemas binarios, sobre todo cuando éstas se encuentran muy cercanas entre sí [18]. La observación y medición de las enanas blancas en el universo es un campo muy activo en la astrofísica. Actualmente se conocen cientos de enanas blancas y se investigan posibles candidatas. Gracias a estos esfuerzos es posible encontrar catálogos revisados de enanas blancas como el de la Universidad de Villanova [20]. A continuación se describen brevemente tres de las enanas blancas conocidas hasta ahora y que históricamente han sido de suma importancia en el estudio de estos objetos.

- Sirius A y B forman un sistema binario donde ésta última es una enana blanca (Figura 3.1). Fue descubierta en 1844 gracias a que Friedrich Bessel notó que Sirius A tenía un movimiento de ida y vuelta, como si fuera orbitada por otro objeto [14]. Fue una de las primeras enanas blancas descubiertas y es una de las más masivas conocidas. Muchos investigadores están de acuerdo en que tiene una masa al rededor de $1.02M_{\odot}$ [18, 20, 21] con una temperatura del orden de $27 \times 10^3\text{K}$ [18, 21] y un radio de $0.009 \pm 0.002R_{\odot}$ [18].
- Procyon B es una enana blanca que también forma parte de un sistema binario con la estrella de secuencia principal Procyon A (Figura 3.2). Tiene una masa de $0.63M_{\odot}$ [18, 20] y debido a la proximidad y mucho mayor brillo de su compañera se han dificultado las mediciones de su radio y temperatura [18]. Mediante un análisis de su espectro, *Provencal et al* estimaron una temperatura de $7740 \pm 50\text{K}$ y un radio de $0.01234 \pm 0.00032R_{\odot}$ [23] siendo una estrella menos masiva y más vieja que Sirius B.
- 40 Eridani B (Figura 3.3), también encontrada en la literatura como 40 Eri B es una enana blanca que forma parte de un sistema estelar triple. Es una estrella muy brillante que fue de las primeras en ser descubiertas. Tiene una masa de $0.43 \pm 0.02M_{\odot}$ [18, 20] con una temperatura de $16.9 \times 10^3\text{K}$ [18] y un radio de $0.0124 \pm 0.0005R_{\odot}$ [18]. Esta es una estrella que ha sido extensamente estudiada para probar modelos de estrellas degeneradas [25].

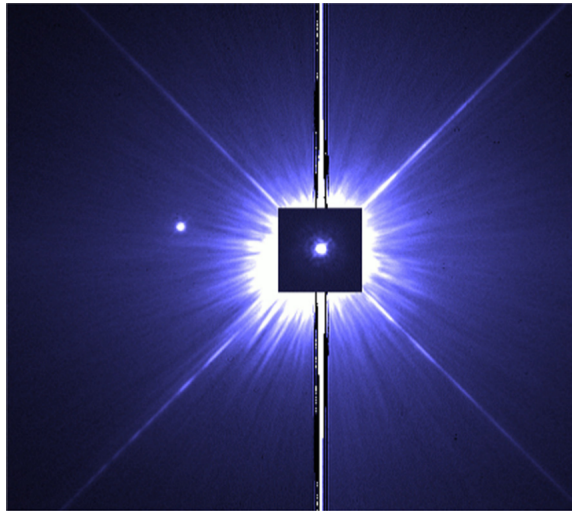


Figura 3.2: Representación en color falso de una imagen del Telescopio Espacial Hubble del sistema Procyon. Al centro y sobreexpuesta se encuentra Procyon A, y encima una imagen a corta exposición de la misma. En la parte central izquierda se encuentra Procyon B. Tomada de la referencia [24].

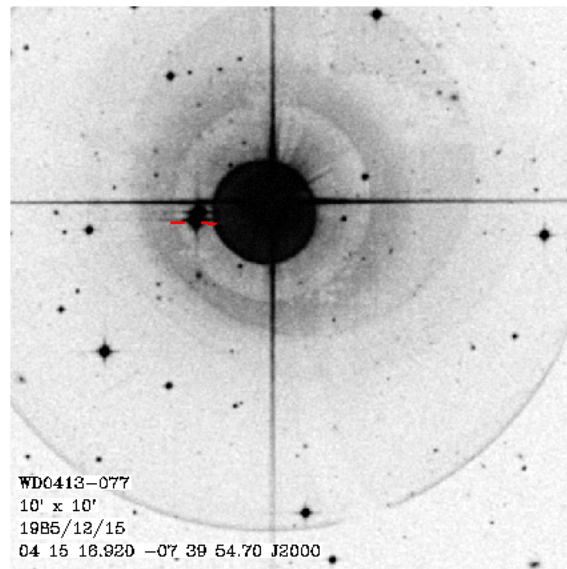


Figura 3.3: Enana blanca 40 Erandi B entre marcas rojas. Finding chart obtenida del catálogo [20].

Para realizar comparaciones de modelos numéricos contra las observaciones es muy útil obtener las medidas de masa y radio estelares de enanas blancas. Los modelos numéricos dependen de manera directa de la densidad central escogida para las estrellas y de su composición [2, 14]. Construyendo secuencias de radio vs. masa y comparándolas con datos de observaciones es posible ajustar modelos o dar una propuesta sobre la composición interna de las enanas blancas [14]. Por ejemplo, para las estrellas Sirius B y 40 Eri B podemos ver en la Figura 3.4 que los mejores ajustes se dan en modelos que consideren su interior más ligero que si estuvieran compuestas de Hierro. Si la masa de 40 Eri B fuera ligeramente menor, entonces el mejor ajuste se daría en la curva del modelo que la considera compuesta de Carbono [18].

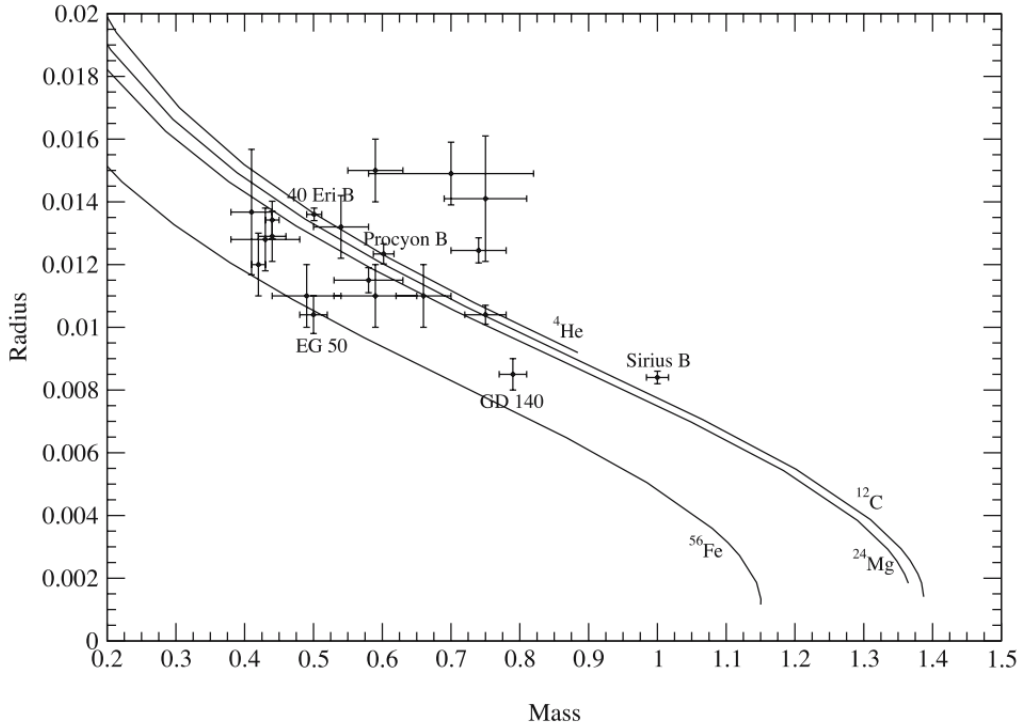


Figura 3.4: Radios y masas de enanas blancas en unidades solares sobre curvas de modelos de enanas blancas de He, C, Mg, Fe. Gráfica tomada de la referencia [14].

3.1. Ecuación de estado de la materia dentro de una enana blanca

Para describir el interior de una enana blanca, podemos modelar su materia como un gas de electrones no interactuante, relativista y degenerado [1, 2, 3, 14]. Las enanas blancas al formarse a partir del colapso de una estrella de secuencia principal y encogerse, aumentan su densidad de masa e ionizan completamente a los átomos que las componen, liberando un *mar de electrones* que soportará al remanente oponiéndose a su colapso gravitacional por efecto de la presión de degeneración cuántica [2].

Diremos que el gas está degenerado si su temperatura es menor que la temperatura de Fermi [2], definida por

$$T_F := \frac{\hbar^2}{2K_B m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (3.1)$$

con n la densidad de número del gas, m la masa de una partícula individual del gas y K_B la constante de Boltzmann. Así, los electrones dentro de una enana blanca se consideran materia degenerada, mientras que los iones de los átomos de Carbono, Oxígeno y/o Hierro, al ser mucho más masivos, no lo son.

En una enana blanca, su densidad numérica es tan alta que la temperatura de Fermi es del orden de 10^9 K [2]. Por otro lado, hemos visto que las temperaturas típicas de enanas blancas jóvenes son del orden de 10^5 K y para estrellas como Sirius B y 40 Eri B del orden de 10^3 K. De esta forma el criterio de degeneración se satisface. En general, la diferencia entre la temperatura de una enana blanca y su temperatura de Fermi se incrementa aún más cuando su densidad de masa aumenta [2].

Para derivar las propiedades de un gas de electrones degenerado y relativista, consideramos la función de

distribución de Fermi-Dirac [13]

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu_c)/K_B T} + 1}, \quad (3.2)$$

donde μ_c es el potencial químico del sistema y T la temperatura del sistema. Si suponemos que la temperatura T en el interior de nuestra enana blanca es mucho menor a la temperatura de Fermi T_F , no sólo nuestro gas de electrones está degenerado, sino que podemos tomar la distribución de Fermi-Dirac en el límite de temperatura cero y podemos escribirla en términos de la función de Heavside

$$f(E) = \Theta(E_F - E), \quad (3.3)$$

donde $\mu_c = E_F$ es el nivel de Fermi o la energía de Fermi del sistema. Para $T = 0$ todos los niveles de energía con $E < E_F$ están ocupados y los niveles superiores $E > E_F$ están vacíos [13]. Es aquí donde se aprecian las consecuencias del principio de exclusión de Pauli en nuestro sistema, pues no se permite que todos los fermiones se agrupen en el estado de menor energía, y como resultado, hay electrones que se encuentran en niveles de energía con valores tan grandes como E_F . Se define el momento de Fermi p_F como la magnitud del momento de la partícula con masa m y energía E_F .

El número de fermiones N en nuestro sistema está determinado por el total de estados ocupados:

$$N = \int g(E)f(E)dE, \quad g(E) = \frac{(2S+1)V}{h^3} 4\pi p^2 \frac{dp(E)}{dE}, \quad (3.4)$$

donde V es el volumen ocupado por el sistema y el producto $g(E)f(E)$ se entiende como una densidad de estados accesibles de las partículas en el sistema [13]. En el caso de los electrones, su espín es $S = \frac{1}{2}$ y puede haber hasta $2S + 1$ electrones por nivel de energía. En el límite de $T = 0$, el total de estados ocupados va desde el primer nivel de energía hasta la energía de Fermi.

Podemos notar que en el espacio fase, cada electrón ocupa un hipervolumen¹ h^3 por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, y si el sistema ocupa un volumen V en el espacio, estos electrones en el espacio fase están confinados a ese volumen V y a una esfera de momento de radio p_F [3, 7, 13]. Así la ecuación (3.4) se reduce a

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{h^3} 8\pi \int_0^{p_F} p^2 dp \\ &= \frac{V}{h^3} \frac{8\pi}{3} p_F^3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Entonces la densidad de número de partículas está dada por

$$n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}. \quad (3.6)$$

Si m es la masa del electrón, $x := p_F/mc$ y $\lambda = \hbar/mc$ es la longitud de onda de Compton reducida del

¹Tomando al espacio fase como el conjunto de posiciones y momentos, cada partícula ocupa un volumen espacial $(\Delta x)^3$ y un volumen de momento $(\Delta p)^3$

electrón, entonces la ecuación (3.6) se reescribe como

$$n = \frac{x^3}{3\pi^2\lambda^3}. \quad (3.7)$$

La ventaja de esta sustitución está en que el parámetro adimensional x , al comparar el momento de las partículas con respecto al producto mc , permite reconocer el límite físico aplicable a nuestro sistema. Es decir, nuestro modelo se encuentra en un límite no relativista para $x \ll 1$ y ultrarrelativista para $x \gg 1$. También brinda una comparación sobre el distanciamiento promedio entre partículas y la longitud de onda del electrón λ pues $x \propto l^{-1} = n^{1/3}$

La presión interna en nuestro sistema puede encontrarse considerando las transferencias de flujo de momento pv entre las partículas confinadas en el espacio fase [7]

$$PV = \frac{1}{3} \frac{V}{h^3} 8\pi \int_0^{p_F} vp^3 dp. \quad (3.8)$$

Donde $v = pc^2/E$, con $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. El factor de $1/3$ fue agregado a la integral considerando la isotropía del sistema. De esta forma, la integral para la presión es

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} dp. \quad (3.9)$$

La solución a esta integral se encuentra en la sección A.1 del apéndice y nos lleva a la expresión

$$P = \frac{mc^2}{3\pi^2\lambda^3} \phi(x), \quad (3.10)$$

con

$$\phi(x) = \frac{3}{8} \left[x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) \sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Podemos calcular también la densidad de energía de los electrones ε_e , sabiendo que las partículas están en un volumen V y en un rango de momentos de 0 a p_F :

$$\begin{aligned} E_{\text{Tot}} &= \frac{V}{h^3} 8\pi \int_0^{p_F} E(p)p^2 dp, \\ \Rightarrow \varepsilon_e &= \frac{E_{\text{Tot}}}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} E(p)p^2 dp, \end{aligned} \quad (3.12)$$

con $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

La solución a la integral (3.12) se puede consultar en la sección A.2 del apéndice y conduce a

$$\varepsilon_e = \frac{mc^2}{\pi^2\lambda^3} \chi(x), \quad (3.13)$$

donde

$$\chi(x) = \frac{1}{8} \left[x(2x^2 + 1) \sqrt{1 + x^2} - \log \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Las expresiones (3.7), (3.10) y (3.13) para la densidad de partículas, presión y densidad de energía, describen a un sistema de fermiones no interactuantes, degenerados y relativistas con espín $\frac{1}{2}$ y masa m .

Las contribuciones de los núcleos atómicos a la presión dentro de las enanas blancas es despreciable y se considera que la presión dentro de las enanas blancas está dada únicamente por la presión de degeneración de electrones (3.10).

Por otro lado, de acuerdo con (2.21) la densidad de energía de la estrella está dada por la energía de la masa en reposo y por la energía interna causada por la presión de degeneración. En el límite no relativista, la densidad de energía se aproxima a la densidad de masa en reposo, mientras que en el límite ultrarrelativista, la contribuciones dadas por la presión de degeneración se vuelven comparables a la energía de la masa en reposo.

Encontrar una expresión para la presión en términos de la densidad numérica n en vez del parámetro x es posible despejando a x de la ecuación (3.7) y sustituyendo en (3.10). No obstante, podemos verificar que la presión en función de la densidad numérica satisface las propiedades enunciadas en la Sección 2.3 trabajando con las expresiones (3.7) y (3.10) sin necesidad de eliminar el parámetro x . Primero veamos que $x \propto n^{1/3}$, y como $n \in [0, \infty)$, el parámetro x como función de n es una función continua, positiva, estrictamente creciente y diferenciable. Notemos que $x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) \sqrt{1 + x^2}$ y $\log \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$ son funciones continuas y diferenciables con respecto a x y por lo tanto $\phi(x)$, al ser la suma de estas funciones, también es continua y diferenciable con respecto a x . De esta forma $P(x(n))$ es una función continua y diferenciable con respecto a x y con respecto a n . Para ver que $P(x(n))$ es una función positiva y estrictamente creciente, tomaremos la derivada de $\phi(x)$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^2}} \geq 0. \quad (3.15)$$

Como la derivada de $\phi(x)$ es positiva para todo x , $\phi(x)$ es una función creciente, y como $\phi(x = 0) = 0$ ($n = 0$), entonces para $x > 0$ ($n > 0$), $\phi(x) > 0$. De esta forma podemos concluir que $P(x(n))$ es una función positiva y monótonamente creciente respecto a x y por lo tanto también lo es con respecto a la densidad de número n .

Una gráfica de la función $\phi(x)$ se muestra en la Figura 3.5. Notemos que para densidades numéricas bajas, del orden de $10^{-2/3}$ ($x \sim 10^{-2}$), la función $\phi(x)$ es del orden de 10^{-10} , y cuando n crece a órdenes de magnitud de 10^1 ($x \sim 10^3$) la función $\phi(x)$ ha crecido hasta ser del orden de 10^{12} , de donde se infiere un rápido crecimiento de la presión conforme la densidad de número aumenta.

Para encontrar el índice adiabático efectivo de acuerdo con (2.22) veamos que

$$\gamma(n) = \frac{\partial \log P}{\partial \log n} = \frac{n}{P(n)} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{n(x)}{P(n(x))} \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dn} \quad (3.16)$$

$$\equiv \frac{x^5}{3\phi(x)\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (3.17)$$

El comportamiento del índice adiabático como función de la densidad de número para un gas fermiónico

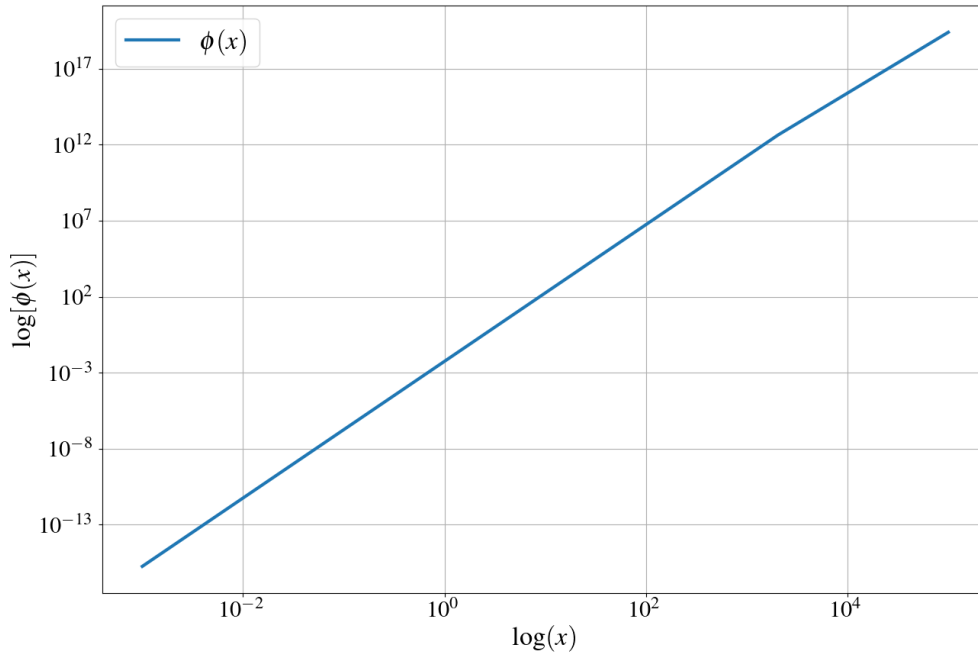


Figura 3.5: Gráfica de la función $\phi(x)$ en escala logarítmica desde el límite no relativista ($x \ll 1$) al ultrarrelativista ($x \gg 1$).

no interactuante, degenerado y relativista se muestra en la Figura 3.6. Observemos que $4/3 < \gamma(n) < 5/3$. En general, en el límite no relativista y para densidades numéricas bajas ($x \ll 1$), el índice adiabático del gas tiende a $5/3$, mientras que en el límite ultrarrelativista y para densidades numéricas altas ($x \gg 1$) el índice adiabático decrece y tiende a $4/3$. Como veremos enseguida, la existencia de estos dos límites para el índice adiabático efectivo permite modelar enanas blancas utilizando ecuaciones de estado politrópicas. Primero notamos que la función $\phi(x)$ puede aproximarse en ambos límites ($x \ll 1$ y $x \gg 1$) en términos de potencias de x

$$\phi(x) = \frac{1}{5}x^5 + O(x^7) \quad \text{si } x \ll 1, \quad (3.18)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{4}x^4 + O(x^2) \quad \text{si } x \gg 1. \quad (3.19)$$

A partir de estas aproximaciones y conociendo que $n = x^3/3\pi^2\lambda^3$ se tiene que la ecuación de estado $P(n)$ es del tipo politrópica en ambos límites

$$P(n) = Kn^{5/3} \quad \text{si } x \ll 1, \quad (3.20)$$

$$P(n) = K'n^{4/3} \quad \text{si } x \gg 1. \quad (3.21)$$

Con K y K' constantes. Notemos entonces que el exponente politrópico Γ coincide con los límites no relativista y ultrarrelativista del índice adiabático efectivo del gas $\gamma(n)$. Es así que pueden construirse modelos simples de enanas blancas usando ecuaciones de estado politrópicas, donde se considera que el gas de electrones dentro de la estrella se encuentra en el límite no relativista o en el ultrarrelativista,

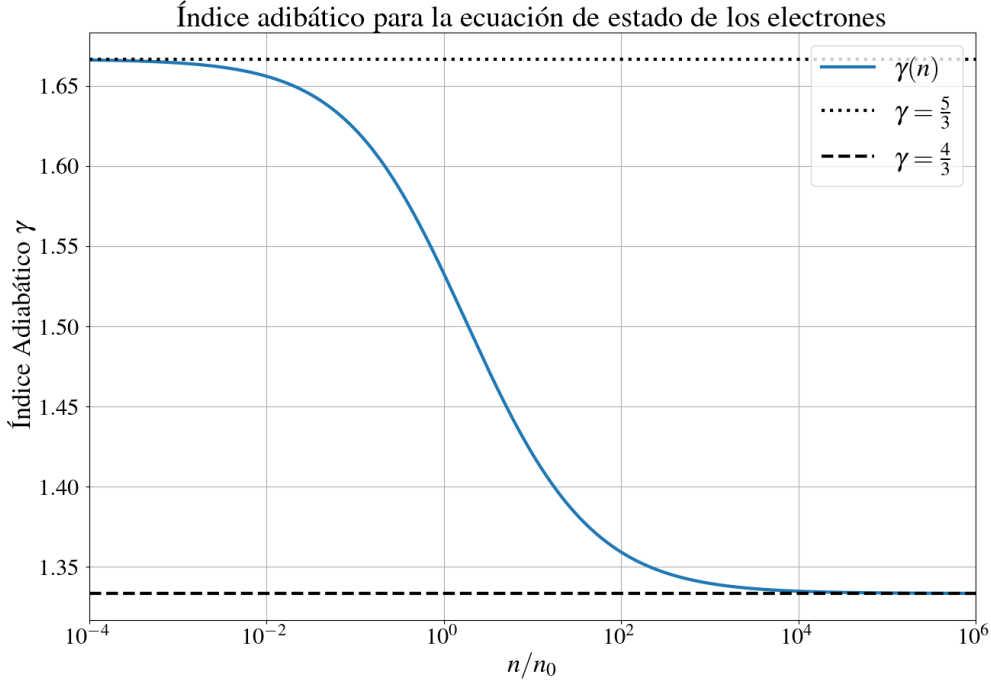


Figura 3.6: Índice adiabático efectivo en función de la densidad numérica, donde $1/n_0 = 3\pi^2\lambda^3$ y por lo tanto $n/n_0 = x^3$.

dependiendo del exponente politrópico utilizado [1, 2].

Es de nuestro interés trabajar con la función de la densidad de masa de nuestra estrella en vez de la densidad de número de electrones obtenida en (3.7). Para este propósito, recordemos que los electrones libres que modelan nuestro gas provienen de átomos de la estrella progenitora que se ionizaron por completo al dejar libres a los electrones [2], y que las relaciones (2.4) y (2.5) vinculan la densidad de número de partículas con la densidad de masa.

Para calcular el peso molecular promedio, supondremos que la materia dentro de la estrella es eléctricamente neutra y que la masa de la estrella está dada por la suma de las masas de los átomos completamente ionizados. Estos átomos están formados por un número de protones igual al número de electrones liberados y con un número de neutrones que varía dependiendo del elemento. En este caso, las concentraciones c_i de (2.4) se refieren a las concentraciones de átomos del elemento i -ésimo presente en la materia de la estrella. Por otro lado, la masa m_i se refiere a la masa de los nucleones (protones y neutrones) en proporción al número de electrones liberados. El cociente A_i/Z_i corresponde a la cantidad de nucleones del i -ésimo elemento por electrón. Así, por ejemplo, para átomos de ^{12}C y ^{16}O se tiene que $A/Z = 2$, y como estos átomos liberaron 6 y 8 electrones respectivamente al ionizarse completamente, cuentan con un total de $2 \cdot 6 = 12$ y $2 \cdot 8 = 16$ nucleones respectivamente que aportan su masa a la masa de la estrella. De esta forma, el peso molecular promedio está dado por

$$\mu = \frac{1}{m_H} \sum_i c_i m_i = \frac{1}{m_H} \sum_i c_i \frac{A_i}{Z_i} m_H = \sum_i c_i \frac{A_i}{Z_i}, \quad (3.22)$$

y la densidad de masa es

$$\rho(x) = \mu m_H n(x) = \frac{\mu m_H}{3\pi^2 \lambda^3} x^3. \quad (3.23)$$

Las masas de enanas blancas típicas están compuestas en su gran mayoría por ^{12}C y ^{16}O , de forma que se suele tomar $\mu \approx 2$.

Las relaciones de presión y densidad de masa encontradas en las ecuaciones (3.10) y (3.23) corresponden a la forma paramétrica de la ecuación de estado para nuestro modelo de enanas blancas y una combinación de ellas obtenida al eliminar el parámetro x nos diría cómo cambia la presión interna de la estrella con respecto a su densidad de masa. También podemos reescribir las expresiones (3.20) y (3.21) para expresar a la presión en función de la densidad de masa en las aproximaciones politrópicas, obteniendo

$$P(\rho) = K \rho^{5/3}, \quad K = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5(\mu m_H)^{5/3} m} \quad \text{si } x \ll 1, \quad (3.24)$$

$$P(\rho) = K' \rho^{4/3}, \quad K' = \frac{(3\pi^2)^{1/3} \hbar c}{4(\mu m_H)^{4/3}} \quad \text{si } x \gg 1. \quad (3.25)$$

Se pueden considerar ecuaciones de estado más sofisticadas que la presentada durante este capítulo que llevan a diferentes modelos de enanas blancas. Diversas propuestas de ecuaciones de estado pueden llevar a relaciones más complejas entre P y ρ e incluso pueden tomar en cuenta otras variables termodinámicas. Para el lector interesado, en la referencia [1] se presentan diferentes ecuaciones de estado que pueden utilizarse para describir el estado de la materia en el interior de una enana blanca.

Queda pues, encontrar la forma en cómo se distribuye la masa de las enanas blancas espacialmente y conocer la forma en que actúan los gradientes de presión en la estrella. Para esta tarea, desde un enfoque clásico, emplearemos el potencial gravitacional newtoniano generado por la distribución de masa de la estrella y las leyes de conservación dictadas por la mecánica de fluidos.

3.2. Ecuaciones de estructura newtonianas

Las enanas blancas son objetos autogravitantes, que pueden ser modelados en primera instancia como objetos estáticos y esféricamente simétricos, que aún pueden ser descritos en el régimen newtoniano y cuya materia está constituida por un fluido perfecto. Un criterio común para decidir cuándo utilizar física newtoniana o Relatividad General para describir un objeto es por medio de su compacidad. En la ecuación (3.26) vemos que la compacidad se define como el cociente entre M que es la masa del objeto y R que es su radio, multiplicado por el factor G/c^2 . Mientras más pequeño sea el valor de C , mejor es la aproximación utilizando el régimen newtoniano [2]. Para el caso de las enanas blancas obtenemos que C es del orden de 10^{-4} . De esta forma, supondremos que el potencial gravitacional de la estrella todavía puede ser modelado bajo el régimen newtoniano.

$$C = \frac{GM}{c^2 R} \quad (3.26)$$

Las enanas blancas poseen tres grados de libertad en el régimen newtoniano: su potencial gravitacional U , la densidad de masa de su interior ρ y la presión interna del objeto P [26]. Estas tres cantidades están

vinculadas con tres ecuaciones que describen la configuración del objeto: la ecuación de Poisson, relativa al potencial gravitacional de la estrella en todo el espacio; la ecuación de Euler, que describe la dinámica de la materia dentro de la estrella; y la ecuación de estado, que determina el estado termodinámico de la materia que forma al objeto. Para completar el estudio sobre las enanas blancas, en esta sección introduciremos las ecuaciones de Poisson y Euler con el propósito de derivar las relaciones existentes entre P , ρ y U .

3.2.1. Ecuación de Poisson

Desde el tratamiento de la mecánica clásica, las enanas blancas poseen un potencial gravitacional newtoniano U determinado por su distribución de masa en el espacio. La forma en como se distribuye la masa de la estrella está sintetizada en la función de densidad de masa $\rho(\vec{x}, t)$. La relación entre el potencial gravitacional newtoniano de la estrella y su densidad de masa está dado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho. \quad (3.27)$$

Los modelos de enanas blancas que estamos interesados en desarrollar son modelos estáticos que poseen simetría esférica. Utilizando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , las estrellas son esferas de radio R donde la densidad de masa y la presión son funciones de r . Dentro de la estrella, estas funciones son positivas y distintas de cero,² mientras que fuera de la estrella, son iguales a cero.

Para un objeto esférico, podemos definir una función de masa encerrada hasta cierto radio r :

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (3.28)$$

Puesto que $\rho(r)$ es una función positiva, $m(r)$ también es una función positiva, no decreciente, tal que $m(0) = 0$.

La ecuación (3.27) se reescribe, suponiendo simetría esférica, como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -4\pi G\rho(r). \quad (3.29)$$

Integrando una vez, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= -\frac{G}{r^2} 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \\ &= -\frac{Gm(r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

El lado derecho de la igualdad en la ecuación (3.30) debe tender a cero cuando $r = 0$, para asegurar que la fuerza gravitacional dada por dU/dr desaparezca [2]. Esto impone restricciones sobre la densidad de masa y su integral, pues en primer lugar ρ debe ser finita en $r = 0$ y $m(r)$ debe comportarse como $\frac{1}{3}\rho(0)r^3$

²Hasta la sección anterior solo habíamos hablado de la presión interna y densidad de masa como función del parámetro x , y entre las propiedades establecidas ambas son funciones positivas para todo x , en consecuencia no hay lugar dentro de la estrella donde la densidad de masa o la presión puedan tomar valores negativos. No obstante, el comportamiento de la densidad de masa y de la presión en función del radio de la estrella aún no lo hemos presentado.

para valores de r cercanos a cero [10]. Integrando (3.30) obtendríamos $U(r)$. Para nuestros fines basta con conocer únicamente dU/dr y combinaremos este resultado una vez que estudiemos la ecuación de Euler.

3.2.2. Ecuación de Euler

La dinámica de fluidos tiene como objeto de estudio la interacción y evolución de los fluidos cuando son afectados por fuerzas. En nuestros modelos de enanas blancas hemos escogido modelar la materia en su interior como un fluido perfecto isentrópico, donde hay presencia de campos gravitacionales y gradientes de presión. Entonces se vuelve necesario entender la influencia de estas fuerzas sobre la materia en nuestra estrella. La ecuación de Euler es la ecuación en la dinámica de fluidos que relaciona los cambios en el campo de velocidades del fluido \vec{u} debidos al efecto de fuerzas \vec{F} ,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F}, \quad (3.31)$$

donde ρ es la densidad del fluido y $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ es un operador diferencial conocido como *derivada lagrangiana* [27] el cual será irrelevante para los fines de este trabajo puesto que nos restringimos a fluidos estáticos donde $\vec{u} = \vec{0}$. La ecuación (3.31) se puede interpretar como una *Segunda Ley de Newton* en la dinámica de fluidos.

Hemos mencionado que las fuerzas presentes en el interior de las enanas blancas son la fuerza de atracción gravitacional y los gradientes de la presión interna [2, 7]. De forma que podemos reescribir la ecuación de Euler como

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{\nabla}U - \vec{\nabla}P. \quad (3.32)$$

La elección de signos en los gradientes de U y P es resultado de considerarlos fuerzas opuestas dentro de la estrella, donde el gradiente de presión *soporta* el peso de la estrella. Si a una distancia r del centro de la estrella se experimenta una presión interna P (Figura 3.7), el cambio en la presión al moverse infinitesimalmente de una distancia r a $r + dr$ es dP . Esta diferencia en la presión actúa como una fuerza que va en dirección radial, opuesta a la fuerza de atracción gravitacional que experimenta el cascarón de grosor dr y radio interno r , hacia el centro de la estrella.

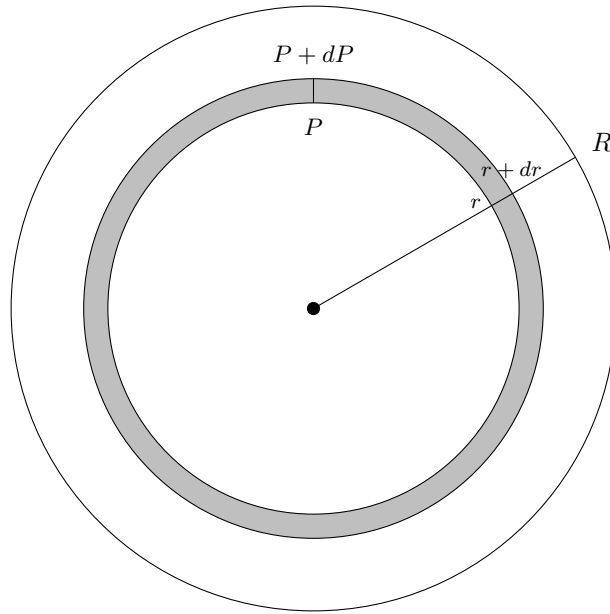


Figura 3.7: Corte transversal de nuestro modelo de enana blanca de radio R .

El campo de velocidad de un fluido estático es idénticamente cero ($\vec{u} = \vec{0}$), por lo que la ecuación (3.32) se reescribe como

$$\vec{\nabla}P = \rho\vec{\nabla}U. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) se conoce como ecuación de equilibrio hidrostático, donde el fluido en reposo se encuentra en un equilibrio entre el gradiente de presión y la fuerza gravitacional.

En virtud de la simetría esférica de nuestro modelo, obtenemos de (3.30) y (3.33),

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{dU}{dr}, \quad (3.34)$$

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (3.35)$$

Además, podemos pasar de la forma integral de la función de masa (3.28) a su forma diferencial

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (3.36)$$

De este último conjunto de ecuaciones, puesto que la presión interna depende únicamente de la densidad de masa, podemos obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales que determinan la estructura de un objeto newtoniano estático y esféricamente simétrico:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (3.37)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (3.38)$$

Las soluciones al sistema son las funciones $P(r)$ y $m(r)$. En el proceso, vía la ecuación de estado podemos calcular $\rho(r)$ y terminamos con el conjunto de funciones $P(r)$, $\rho(r)$ y $m(r)$ que describen a nuestros modelos

de enanas blancas. Comenzando desde el centro de la estrella en $r = 0$, la presión y densidad de masa poseen valores finitos y positivos, relacionados vía la ecuación de estado. Es decir, si $P(r = 0) = P_c$ y $\rho(r) = \rho_c$, entonces P_c y ρ_c satisfacen $P_c = P(\rho_c)$, de forma que las condiciones iniciales del sistema están determinadas únicamente por el valor de presión o densidad central, pues el faltante puede ser obtenido utilizando la ecuación de estado.

Conforme r aumenta y nos alejamos del centro de la estrella, la presión interna y la densidad de masa del objeto disminuyen monótonamente hasta llegar a cero en la superficie de la estrella, en $r = R$. Fuera de la estrella, para $r > R$, P y ρ son idénticamente cero [1, 2].

De esta forma, al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, encontramos el radio estelar R para nuestro modelo, pues es por definición el primer valor de r que satisface $P(R) = \rho(R) = 0$. Además, podemos conocer la masa total de nuestro modelo M , si evaluamos a la función de masa (3.28) en el radio estelar: $M = m(R)$.

Si bien los valores de densidad y presión centrales que podemos escoger para encontrar las funciones $P(r)$ y $\rho(r)$ son en principio arbitrarios, una cota inferior para la presión central P_c puede ser establecida en términos del radio y la masa estelares. Para esto primero debemos notar que la función

$$P(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}$$

es una función decreciente, lo cual se puede mostrar analizando su derivada

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \right) = \frac{dP}{dr} + \frac{Gm(r)}{4\pi r^4} \frac{dm}{dr} - \frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5}.$$

Si notamos que

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm(r)}{r^2} = -\frac{Gm(r)}{4\pi r^4} \frac{dm}{dr},$$

entonces

$$\frac{d}{dr} \left(P(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \right) = -\frac{Gm^2(r)}{2\pi r^5} < 0.$$

Además se tiene que

$$P(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} = P_c \quad \text{para } r = 0,$$

y al ser una función decreciente, P_c es el máximo de la función, obteniéndose las siguientes desigualdades para $r > 0$:

$$P_c > P(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \geq \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}. \quad (3.39)$$

En particular para $r = R$,

$$P_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}. \quad (3.40)$$

Este resultado, obtenido primero por E. A. Milne y recopilado por S. Chandrasekhar en [7], es cierto para cualquier estrella en equilibrio hidrostático y no únicamente para enanas blancas. A partir de este resultado

y haciendo uso de la ecuación de estado para nuestros modelos de enanas blancas, una cota inferior para la densidad de masa central puede ser obtenida. En el sistema cgs, la cota para la presión puede ser escrita como

$$P_c > 4.44 \times 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^4 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (3.41)$$

De la elección del valor para la presión o densidad central para resolver el sistema de ecuaciones (3.37)-(3.38) se obtiene un modelo de enana blanca con una masa y un radio estelar únicos. Distintos valores para la presión o densidad central conducen a distintos modelos de enanas blancas. El comportamiento de los radios y masas estelares en función del parámetro de densidad de masa central es frecuentemente mostrado a través de curvas (ρ_c, M) , (ρ_c, R) y (M, R) como en la Figura 3.4. El comportamiento de la masa y radio estelares de una enana blanca es peculiar en comparación al de las estrellas de secuencia principal. Conforme se aumente el valor de densidad de masa central de las enanas blancas, la masa estelar tiende a un límite superior mientras que el radio estelar se encoge manteniéndose el régimen de altas densidades dentro de la estrella. Este resultado es inherente a las estrellas compactas y fue descubierto por Chandrasekhar en 1930 para el caso de las enanas blancas, conociéndose el límite en la masa estelar como el *Límite de Chandrasekhar*.

3.3. El Límite de Chandrasekhar

Este límite es una cota superior para el valor de masa estelar que puede tener una enana blanca, y es consecuencia del equilibrio que existe entre la presión de degeneración y la fuerza de atracción gravitacional. Al aumentar el valor de la densidad de masa central, los modelos de enanas blancas obtenidos son cada vez más masivos y el distanciamiento medio entre los electrones se reduce ($l = n^{-1/3}$) de acuerdo a la ecuación (3.7). Podemos entender que los electrones en la materia deben *apretarse* aún más para mantener la presión suficiente y soportar a la estrella [1, 2, 14]. Si se continúa aumentando la densidad de masa central, los electrones de los modelos resultantes pasarán al régimen ultrarrelativista y la presión de degeneración necesaria para soportar toda la masa de la estrella será cada vez más grande.

Si suponemos que tenemos una estrella de radio R con N electrones degenerados en el régimen ultrarrelativista, la energía de Fermi asociada a cada uno de estos electrones es

$$\begin{aligned} E_F &= p_F c \\ &= \hbar c / \Delta x \text{ (Principio de Incertidumbre)} \\ &\sim \hbar c n^{1/3} \\ &\sim \frac{\hbar c N^{1/3}}{R}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Donde hemos comparado la densidad numérica de electrones n con N/R^3 .

Por otro lado, la energía gravitacional por electrón es

$$\begin{aligned} E_G &= -\frac{GMm_H}{R} \\ &= -\frac{GN\mu m_H^2}{R} \\ &\sim -\frac{GNm_H^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

De manera que la energía total del sistema por electrón es

$$E \sim \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_H^2}{R}. \quad (3.44)$$

Los modelos estables de enanas blancas son tales que $E > 0$, pues son modelos donde la energía de Fermi es mayor a la energía gravitacional y la estrella evita el colapso gravitacional [1, 2]. Al ser ambos sumandos inversamente proporcionales a R , que la energía del sistema sea positiva implica que $\hbar c N^{1/3} > GNm_H^2$. De esta desigualdad se obtiene un máximo en el número de electrones degenerados para un modelo estable contra el colapso gravitacional [1, 2]:

$$N_{max} = \left(\frac{\hbar c}{Gm_H^2} \right)^{3/2} \sim 2 \times 10^{57}. \quad (3.45)$$

Finalmente encontramos que la masa máxima del objeto está dada aproximadamente por

$$M_{\text{Chandrasekhar}} \sim N_{max} m_H \sim 1.5 M_{\odot}. \quad (3.46)$$

En la literatura [1, 2, 3, 14] es frecuente hallar la derivación de este límite de masa para enanas blancas definiendo variables adimensionales para P , ρ , m y r que conducen a una forma particular de la ecuación de estado que es incorporada a las ecuaciones de estructura (3.37) y (3.38). Esta transformación y las nuevas ecuaciones diferenciales obtenidas son una analogía a las ecuaciones de Lane-Emden donde también se incorporan variables adimensionales para P , ρ , m y r y la ecuación de estado involucrada es del tipo politrópica. Hemos decidido no describir a detalle tales ecuaciones, pues constituyen un caso particular de las ecuaciones de estructura, y uno de los objetivos de este trabajo es resolver numéricamente las ecuaciones generales (3.37) - (3.38) utilizando una ecuación de estado arbitraria. No obstante, es importante señalar que por la vía de las ecuaciones de Lane-Emden se obtienen las siguientes expresiones para la Masa de Chandrasekhar y el radio estelar:

$$M_{\text{Chandrasekhar}} = 1.45607 \left(\frac{2}{\mu} \right)^2 M_{\odot}, \quad (3.47)$$

$$R = 3.34598 \times 10^4 \left(\frac{2}{\mu} \right)^{2/3} \left(\frac{10^9 \text{ kg/m}^3}{\rho_c} \right)^{1/3} \text{ km}. \quad (3.48)$$

El análisis de las enanas blancas utilizando las ecuaciones de Lane-Emden y los resultados mostrados pueden encontrarse en [1, 2, 14].

El límite de Chandrasekhar, de acuerdo a la ecuación (3.47) es una cota que depende de la composición de la

estrella, determinada por el peso molecular promedio μ . Debido a esto, para modelos de enanas blancas con núcleos de Hierro el límite difiere ligeramente con respecto a modelos que consideran núcleos de Carbono u Oxígeno. Se pueden construir modelos de enanas blancas más complejos al considerar ecuaciones de estado más sofisticadas, donde el límite de Chandrasekhar se modifica ligeramente y queda en función de otros parámetros del modelo. Estas propuestas de ecuaciones de estado consideran a la materia de las enanas blancas en un rango de densidades lo suficientemente alto como para desconfinar a los electrones, pero que continúa siendo mucho más bajo en comparación con las densidades típicas de las estrellas de neutrones, donde los nucleones de los átomos comienzan a desconfinarse. Como mencionamos en la Sección 2.4, este límite de densidades se conoce como límite de goteo de neutrones. Varias propuestas de ecuaciones de estado debajo de este límite se pueden encontrar en [1]. Las principales diferencias entre una enana blanca y una estrella de neutrones se analizarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones son objetos compactos con un núcleo estelar cuya densidad de masa supera de 5 a 10 veces a la densidad de un núcleo atómico ($\rho_{\text{Nuc}} \sim 10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) [28]. La existencia de estos objetos había sido propuesta por Baade y Zwicky en 1934. Ese año reportaban el descubrimiento del remanente de una supernova y especulaban sobre su origen [12]. Hoy, la hipótesis más aceptada sobre la formación de las estrellas de neutrones es que son remanentes de supernovas de colapso nuclear (CC SNe por sus siglas en inglés), a partir de estrellas de 10 a 25 masas solares [14].

Las estrellas de neutrones son objetos que se pueden encontrar en el universo con distintas características y pueden estar acompañadas de otros objetos astrofísicos. Esta variedad en la presentación de las estrellas de neutrones da pie a una amplia clasificación para su estudio. Por ejemplo, existen estrellas de neutrones que pueden encontrarse como estrellas aisladas o como miembros de un sistema binario. En sistemas binarios, donde la estrella de neutrones tiene una estrella compañera, puede haber transferencia de materia de la estrella compañera hacia la estrella de neutrones. Debido a este fenómeno, la estrella de neutrones puede emitir rayos X y a esta clase de sistemas binarios se les conoce como binarias de rayos X. Por otra parte las estrellas aisladas pueden tener planetas orbitando alrededor [14] o pueden encontrarse en el centro del remanente de la supernova que les haya dado origen, donde se les clasifica como objetos compactos centrales [12]. Los púlsares y magnetares también son tipos de estrellas de neutrones con características distintivas: los púlsares son estrellas de neutrones que rotan con una gran velocidad angular y que poseen un campo magnético de gran magnitud, lo que propicia la formación de haces de radiación electromagnética altamente colimados [14]. Puesto que el eje de rotación de estas estrellas puede no estar alineado con su momento dipolar magnético, cuando una estrella de este tipo es descubierta, los haces electromagnéticos son detectados como pulsos regulares desde la Tierra, generalmente con longitudes de onda en la banda del radio [1, 12, 14]. Por su parte, los magnetares poseen campos magnéticos más intensos y periodos de rotación más largos en comparación a los púlsares. Una de sus características distintivas es que se frenan rápidamente y presentan destellos de radiación intensos y de corta duración [14]. Sus intensos campos magnéticos provocan grandes pérdidas de energía y son la causa de sus periodos de rotación más largos [12].

Como mencionamos en la Sección 2.4, la principal diferencia entre una estrella de neutrones y una enana blanca es que el núcleo de las estrellas de neutrones se encuentran en un régimen de densidades superior.



Figura 4.1: Nebulosa del Cangrejo. Al centro, en rojo, se encuentra el Púlsar del Cangrejo. Imagen renderizada de datos en el espectro visible del Telescopio Hubble (en rojo) y Rayos X del Observatorio Chandra (en azul).

Las condiciones físicas dentro del núcleo estelar son, hasta ahora, imposibles de replicar en un laboratorio y obligan a los investigadores a formular propuestas aproximativas para la ecuación de estado que describiría la materia más densa en el interior de las estrellas de neutrones [5]. De utilizar distintas propuestas de ecuaciones de estado en la construcción de modelos de estrellas de neutrones, se obtienen distintas relaciones entre la masa y el radio estelar, así como también diferentes límites para la masa máxima de una estrella de neutrones, que van desde $1.5M_{\odot}$ hasta $3M_{\odot}$ [5, 12, 14].

Desde esta perspectiva, la observación y estudio de las estrellas de neutrones en el universo es fundamental para entender su estructura interna, contrastando las predicciones de distintas ecuaciones de estado con las observaciones. Dentro de este enfoque, los púlsares y los sistemas binarios son de especial interés, siendo los púlsares la mayoría de estrellas de neutrones observadas [12]. Como ejemplo, una estrella de neutrones de relevancia es el Púlsar del Cangrejo, el cual se encuentra en el centro del remanente de supernova conocido como Nebulosa del Cangrejo (Figura 4.1). El Púlsar del Cangrejo tiene un diámetro de 20km con una emisión electromagnética que abarca desde ondas radio con una frecuencia de 10MHz hasta rayos gamma con frecuencias del orden de 10^{27} Hz [14]. Tiene un periodo rotacional de alrededor de 33ms con una temperatura en la superficie del orden de 10^6 K. Esta estrella de neutrones es utilizada a menudo en la calibración de detectores de Rayos X para la búsqueda de otras fuentes de Rayos X en el universo [29].

Por su parte, las características de las órbitas y parámetros de rotación de sistemas binarios permiten medir las masas, y en ocasiones los radios, de las estrellas que los forman [5, 28]. Por ejemplo, la binaria de Hulse-Taylor es un sistema compuesto por una estrella de neutrones y un púlsar. Fue el primer sistema binario descubierto gracias a las variaciones en los pulsos electromagnéticos del púlsar ocasionados por su compañera orbitante. Este sistema binario tiene una gran importancia histórica por aportar evidencia observacional en favor de la validez de la Teoría de la Relatividad General, que predice un decaimiento del periodo orbital del sistema a causa de la emisión de energía en forma de ondas gravitacionales [1]. De forma

general, las binarias de rayos X detectadas se clasifican dependiendo del tipo de objeto que acompañe a la estrella de neutrones, así como sus masas estelares. Esta información generalmente es representada como en la Figura 4.2, donde las líneas horizontales representan la incertidumbre en la medición de sus masas.

4.1. La materia dentro de una estrella de neutrones

A diferencia de las enanas blancas, donde se distinguen en su estructura una atmósfera y núcleo estelares, en las estrellas de neutrones se pueden distinguir, de manera general, tres capas características: la atmósfera, la corteza y el núcleo estelar. Esta distinción en el interior de las estrellas de neutrones está motivada por las propiedades que presenta la materia conforme nos acercamos al centro de la estrella y la densidad aumenta.

La atmósfera de una estrella de neutrones tiene un grosor de entre 0.3mm y 40cm, el cual está determinado por la composición de la estrella [12]. Esta atmósfera contiene una cantidad de masa despreciable en comparación con la masa total de la estrella, pero aún así juega un papel importante en los espectros de emisión electromagnética [28].

La corteza típica de una estrella de neutrones es bien conocida: tiene un grosor que va de 1 a 2km [28], y las densidades alcanzadas en ella son del orden de $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, que corresponde al orden del límite de saturación nuclear. Dentro de la corteza distinguimos dos subcapas: la corteza externa e interna. La materia en la corteza externa de una estrella de neutrones se asemeja y se puede modelar como la materia en el interior de una enana blanca, es decir, los átomos se encuentran completamente ionizados y forman una red debido a interacciones coulombianas, mientras que los electrones se encuentran degenerados y, conforme más nos adentramos al interior de la estrella, entran en el régimen relativista. Posteriormente, la densidad de masa en la corteza externa de la estrella de neutrones supera el límite de $10^7 \text{gm} \cdot \text{cm}^{-3}$, en el cual los electrones adquieren la energía suficiente para que los protones en el núcleo decaigan por captura electrónica. Como explicamos en la sección 2.4 este decaimiento provoca un enriquecimiento de neutrones en los núcleos atómicos. Conforme los núcleos comienzan a tener más y más neutrones, la estabilidad del núcleo se ve comprometida por el exceso de nucleones. Los neutrones comienzan a *gotear* del núcleo atómico cuando la energía de enlace atómica es superada; este fenómeno ocurre a densidades del orden de $10^{11} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y se conoce como *límite de goteo de neutrones*.

Para poder entender este fenómeno antes de estudiar la corteza interna y el núcleo de una estrella de neutrones, es necesario entender cómo es que los nucleones permanecen ligados a los núcleos atómicos, y la relación entre el número de nucleones y la energía de enlace nuclear.

4.1.1. Energías de enlace nucleares

De forma general, la masa de un núcleo atómico con número atómico Z y número de masa A está dada por la ecuación

$$M_{\text{Nuc}} = [Zm_p c^2 + Nm_n c^2 + E_b(A, Z)] / c^2, \quad (4.1)$$

donde $N = A - Z$ es el número de neutrones en el núcleo atómico, $m_p = 938.27 \text{MeV}/c^2$ es la masa del protón y $m_n = 939.57 \text{MeV}/c^2$ es la masa del neutrón.

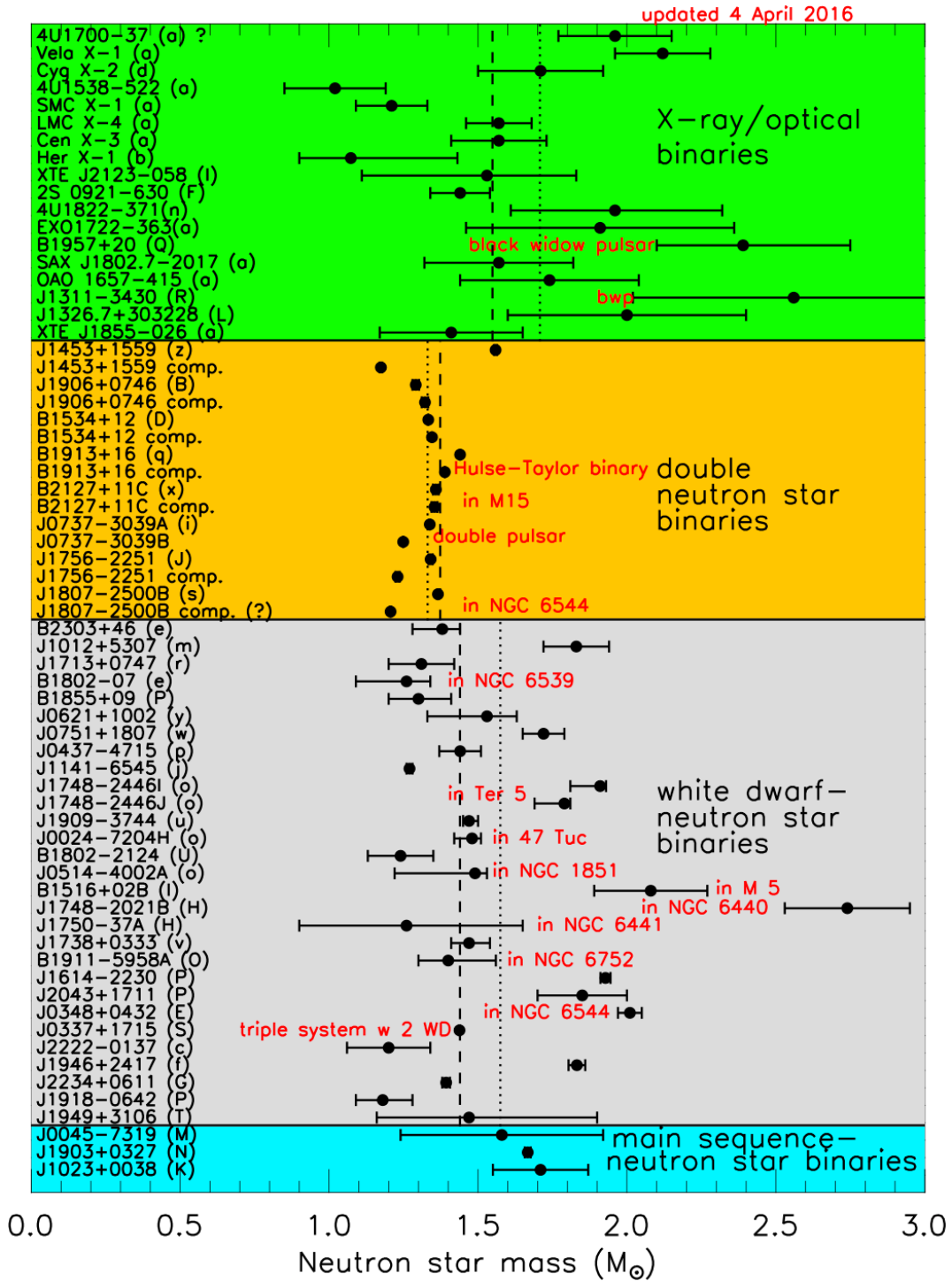


Figura 4.2: Masas medidas y estimadas de estrellas de neutrones en sistemas binarios. Las barras de error están calculadas en 1σ . Figura original de [30]. Actualizada en 2016 por J. Lattimer y recuperada de <https://stellarcollapse.org/nsmasses.html> en enero de 2023.

La masa de un núcleo atómico no está dada únicamente por la suma de las masas individuales de cada uno de los nucleones que la conforman, sino que existe una energía de enlace E_b responsable de mantener a los nucleones unidos y que provoca un defecto en la masa de los núcleos atómicos, siendo la masa del núcleo menor que la suma de las masas de los constituyentes. Esta energía de enlace es dependiente tanto del número de protones como de neutrones presentes en el núcleo y no se conoce una expresión que asocie a cada combinación de Z y A la energía de enlace correspondiente, lo que dificulta conocer la masa de distintos núcleos atómicos. Para elementos disponibles en la tierra o replicables en un laboratorio es posible medir sus masas experimentalmente, sin embargo no es el caso para los núcleos atómicos presentes en la materia de una estrella de neutrones. Otra forma de conocer las masas de núcleos atómicos para distintas combinaciones de A y Z es por medio de parametrizaciones. Estas parametrizaciones son útiles para modelar las masas de núcleos atómicos en un cierto rango de A y Z . La parametrización de Weizsäcker, también conocida como la fórmula semiempírica de la masa, es una parametrización que fue obtenida a partir de mediciones de núcleos atómicos. Se basa en el modelo de gota líquida del núcleo atómico, de donde se obtiene que [31]

$$E_b(A, Z) = -a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}. \quad (4.2)$$

Los parámetros a_v , a_s , a_c , a_a y δ se conocen como términos de volumen, superficie, coulombiano, de asimetría y de paridad respectivamente, y surgen del modelo de gota líquida para el núcleo. El valor de estos parámetros es dependiente del rango de masas atómicas para los cuales son optimizados [31].

De la Figura 4.3, las energías de enlace por nucleón conocidas van desde 1MeV hasta 8.8MeV donde los núcleos con $A \sim 60$ poseen las energías de enlace más altas; estas energías pueden ser calculadas de forma experimental para los distintos núclidos¹ presentes en la tierra o por medio de parametrizaciones. No obstante, en el escenario extremo en que se encuentran los núcleos atómicos en el interior de las estrellas de neutrones, con una gran cantidad de neutrones, las parametrizaciones propuestas fallan en la correcta predicción de las energías de enlace [12].

Otro punto a considerar en la Figura 4.3 son los picos con una mayor energía de enlace que se presentan en ciertos núcleos atómicos para ciertas combinaciones de N y Z . Estos picos pueden ser explicados desde el modelo de capas para describir el núcleo atómico. Este modelo es un análogo al modelo de capas para describir a los electrones en un átomo que orbitan el núcleo. Así como los electrones están sometidos a un potencial central coulombiano, los nucleones están sometidos al potencial global nuclear y, como en el caso de los electrones, para los nucleones también existen niveles discretos de energía de acuerdo con el Principio de Exclusión de Pauli [31]. Las capas en el caso de los electrones orbitando el núcleo se refieren a agrupamientos de electrones con energías similares, tomando en cuenta que el estado del electrón puede ser descrito con los números cuánticos n , l y s en una primera aproximación. De manera similar en el núcleo atómico, dada cierta cantidad de protones y/o neutrones, el núcleo formado es más estable en comparación a combinaciones similares [12, 31]. Estos números (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184) son conocidos como *números mágicos*. Si un núcleo tiene un número mágico de neutrones o protones, entonces la energía de enlace es mayor y ello implica que se necesita una mayor cantidad de energía para extraer un neutrón

¹Se llama *núclidos* a los núcleos atómicos con distintas combinaciones de Z y A .

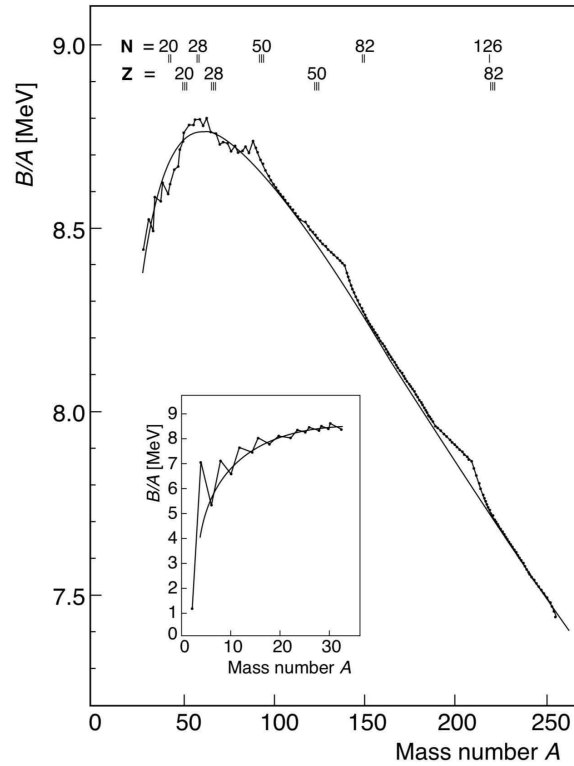


Figura 4.3: Energía de enlace por nucleón (E_b/A) calculada para combinaciones de Z y A . La línea sólida es obtenida a partir de la parametrización de Weizsäcker (4.2). Figura tomada de la referencia [31].

del núcleo atómico. También puede ocurrir que el núcleo tenga tanto un número mágico de neutrones y protones, de tal forma que la energía de enlace sea mucho mayor. La idea intuitiva detrás de los números mágicos y el modelo de capas está en que con determinado número de protones y/o neutrones, una capa del núcleo se cierra (o se completa) y es más difícil arrancar un nucleón de esas capas cerradas, en un símil a lo que ocurre con la última capa de electrones en los gases nobles.

La Tabla 4.1 muestra la secuencia de núclidos presentes en la corteza de las estrellas de neutrones conforme la densidad de masa aumenta. Comienza con el isótopo ^{56}Fe , el núclido con la mayor energía de enlace por nucleón y por lo tanto el más estable. Para entender por qué el potencial químico bariónico, μ_B aumenta conforme la densidad de masa aumenta, tomando las ecuaciones (2.35) y (2.20), y considerando que la densidad de masa de las estrellas está dada por la densidad de masa bariónica, obtenemos

$$\mu_B = \frac{\varepsilon + P}{n_B}. \quad (4.3)$$

De las propiedades para la presión interna enlistadas en la Sección 2.3 se tiene que $P \propto n_B^\Gamma$ con $\Gamma > 1$ y al menos $\varepsilon/n_B > 0$ en toda la estrella. Así,

$$\mu_B = \frac{\varepsilon + P}{n_B} > n_B^{\Gamma-1}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, conforme la densidad de masa aumenta, se volverá energéticamente más favorable disminuir la cantidad de electrones que continuar aumentando su energía. Por esta razón los electrones son capturados

| μ_B (MeV) | ρ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) | P ($\text{dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$) | n_B (cm^{-3}) | Núcleo | Z | N |
|---------------|--|--|----------------------------|-------------------|----|----|
| 930.60 | 8.02×10^6 | 5.22×10^{23} | 4.83×10^{30} | ^{56}Fe | 26 | 30 |
| 931.32 | 2.71×10^8 | 6.98×10^{25} | 1.63×10^{32} | ^{62}Ni | 28 | 34 |
| 932.04 | 1.33×10^9 | 5.72×10^{26} | 8.03×10^{32} | ^{64}Ni | 28 | 36 |
| 932.09 | 1.50×10^9 | 6.44×10^{26} | 9.04×10^{32} | ^{66}Ni | 28 | 38 |
| 932.56 | 3.09×10^9 | 1.65×10^{27} | 1.86×10^{33} | ^{86}Kr | 36 | 50 |
| 933.62 | 1.06×10^{10} | 8.19×10^{27} | 6.37×10^{33} | ^{84}Se | 34 | 50 |
| 934.75 | 2.79×10^{10} | 2.85×10^{28} | 1.68×10^{34} | ^{82}Ge | 32 | 50 |
| 935.93 | 6.21×10^{10} | 7.86×10^{28} | 3.73×10^{34} | ^{80}Zn | 30 | 50 |
| 937.28 | 1.32×10^{11} | 2.03×10^{29} | 7.92×10^{34} | ^{78}Ni | 28 | 50 |
| 937.63 | 1.68×10^{11} | 2.55×10^{29} | 1.01×10^{35} | ^{124}Mo | 42 | 82 |
| 938.13 | 2.18×10^{11} | 3.48×10^{29} | 1.31×10^{35} | ^{122}Zr | 40 | 82 |
| 938.67 | 2.89×10^{11} | 4.82×10^{29} | 1.73×10^{35} | ^{120}Sr | 38 | 82 |
| 939.18 | 3.73×10^{11} | 6.47×10^{29} | 2.23×10^{35} | ^{118}Kr | 36 | 82 |
| 939.57 | 4.55×10^{11} | 8.00×10^{29} | 2.72×10^{35} | ^{116}Se | 34 | 82 |

Tabla 4.1: Secuencia de núclidos presentes en la corteza exterior de estrellas de neutrones conforme la densidad de masa aumenta. Aquí, μ_B es el potencial químico bariónico, ρ es la densidad de masa de la estrella, P es la presión interna de la estrella, n_B la densidad de número bariónica, Z el número atómico y N el número de neutrones. Tomada de [12].

por los protones e inicia el proceso de decaimiento de los mismos, lo que da lugar a una mayor cantidad de neutrones en el núcleo, y conforme la cantidad de neutrones aumenta la energía de enlace nuclear disminuye. Podemos ver en la Tabla 4.1 que los siguientes núclidos en la secuencia tienen al menos un número mágico en la cantidad de protones o neutrones, pues de entre todos los núclidos que pudieran aparecer en la secuencia, sólo se mantienen presentes los que poseen la mayor energía de enlace dado el aumento en el número de neutrones [12]. Para densidades de masa superiores a $6 \times 10^{10} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, los núcleos tienen tal cantidad de neutrones, que sus masas experimentales no son conocidas [12].

Cuando la densidad de masa alcanza valores de $4.55 \times 10^{11} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, el último núcleo estable predicho en la secuencia es ^{116}Se . En este límite, el potencial químico bariónico ha alcanzado la energía de la masa en reposo del neutrón y, por definición, se pueden seguir añadiendo neutrones libres al sistema y no estarán ligados al núcleo, alcanzándose la densidad de goteo de neutrones [12].

4.1.2. El estado de la materia por encima de la densidad de goteo de neutrones

Superada la densidad de goteo de neutrones, la materia en el interior de las estrellas de neutrones está formada por un mar de electrones libres, degenerados y relativistas, por un mar de neutrones degenerado que comienza a aportar a la presión interna que soporta a la estrella de su colapso gravitacional, y por una red de núcleos atómicos enriquecidos de neutrones.

Una forma en que se puede modelar la estructura reticular que forman los núcleos atómicos es por medio de las celdas de Wigner-Seitz [12], que describen la red como una formación de celdas con simetría esférica y de radio R_W , tal que en el interior de cada celda únicamente puede encontrarse un núcleo atómico [12]. La carga positiva de los núcleos es apantallada por los electrones libres que rodean al núcleo dentro de su celda. En este régimen de densidades la celda también comienza a estar ocupada por los neutrones libres.

La corteza interna de una estrella de neutrones tiene un rango de densidades de masa del orden de $10^{11} - 10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. En esta zona podemos definir la densidad de energía de la mezcla de núcleos, electrones y

neutrones libres como [1, 12, 14]

$$\varepsilon = n_N(W_N + W_L) + \varepsilon_e(n_e) + (1 - V_N n_N) \varepsilon_n(n_n), \quad (4.5)$$

donde n_N es la densidad de número de núcleos atómicos, $W_N = M_{\text{Nuc}}c^2$ es la energía del núcleo atómico, W_L es la contribución a la densidad de energía de la retícula, V_N es el volumen que ocupa un núcleo atómico y n_e , n_n la densidad de electrones y neutrones libres, respectivamente.

La necesidad de estudiar este régimen de densidades por separado se debe a diversos factores. Uno de ellos es que la materia en la corteza interna no es materia ordinaria, es decir, no se sigue que $Z/A \sim 0.5$ [1]. Utilizar una parametrización para la masa de los núcleos que no considere el enriquecimiento extremo de neutrones llevaría a predicciones incorrectas en la masa y energías nucleares. Por otro lado se debe considerar que la presencia de la nube de neutrones contribuye a la inestabilidad nuclear, pues las energías superficiales de los núcleos son afectadas por la presión que ejercen los neutrones hacia el núcleo y por la reducción en el número de protones y electrones en el núcleo y en la nube, respectivamente [1].

Baym, Bethe y Pethick estudiaron el estado de la materia en este rango de densidades tomando en cuenta estas consideraciones, dando lugar a la ecuación de estado BBP. En esta formulación la densidad de energía escrita en (4.5) queda como función de A , Z , n_N , n_n y V_N . El término V_N disminuye conforme la densidad de masa aumenta en respuesta a la presión de los neutrones libres, y la masa de los núcleos atómicos no sólo está en función de A y Z , sino que también tiene como variables a V_N y n_n [1]. La expresión para la masa del núcleo atómico de acuerdo con la ecuación de estado BBP es

$$W_N = A [(1 - x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x)] + W_C + W_s, \quad (4.6)$$

donde $x = Z/A$ y $W(k, x)$ es la energía por nucleón asociada a la materia dentro del núcleo, que considera las interacciones nucleón-nucleón dado un potencial nuclear. Para ser calculada se toma en cuenta la densidad de número de la nube de neutrones y la densidad de número de nucleones en el núcleo atómico. Por otro lado, el término W_C hace referencia a la interacción coulombiana en el núcleo, W_s es un término de superficie y es construido de tal forma que $W_s = 0$ cuando la densidad de masa de los neutrones libres es igual a la densidad del núcleo atómico. En este límite y bajo esta ecuación de estado termina la corteza interna de la estrella y comienza el núcleo externo, donde los núcleos atómicos desaparecen [1]. Este límite varía dependiendo de la ecuación de estado elegida, perteneciendo al orden de $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. En estos límites, la contribución de los neutrones a la presión de degeneración fermiónica es del 80% [1].

4.1.3. Pasta en las estrellas de neutrones

En la zona de transición entre la corteza y el núcleo estelar puede existir materia que presenta una variedad de formas no vistas en alguna otra parte de la estrella de neutrones, la llamada *pasta*. En esta zona, que pertenece aún a la corteza interna de la estrella, la materia bariónica está regida por las interacciones coulombianas y las fuerzas nucleares. Estas interacciones son las responsables de organizar la materia y dan lugar a un fenómeno conocido como *frustración coulombiana*, el cual surge de la imposibilidad del sistema de satisfacer simultáneamente todas las interacciones elementales que ocurren [14].

Del modelo para la corteza interna de las estrellas de neutrones, los núcleos atómicos se encuentran en las

celdas de Wigner-Seitz con simetría esférica, y conforme la densidad de masa aumenta el radio de tales celdas decrece. Al inicio de la corteza interna el radio de las celdas es de aproximadamente 100fm y para el final de la corteza interna es de alrededor de 30fm, cada celda contando con 40 – 50 protones y alrededor de 1500 neutrones [12]. Esta situación causa que la densidad de neutrones de cada celda tienda a una densidad constante, teniendo únicamente un pequeño incremento en el centro, donde se ubica el núcleo atómico, pudiéndose entender como burbujas sumergidas en un fluido de neutrones y electrones. En 1983, D.G. Ravenhall *et al.* investigaron formas más estables en las que se pueden organizar los núcleos atómicos a densidades del orden de $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

En una caricatura del fenómeno, consideremos a los núcleos atómicos como burbujas dentro del mar de neutrones y electrones. Si estas burbujas se juntaran más y más a lo largo de una sola dirección, se obtendrían distintas tiras en la misma dirección en la que se juntaron las burbujas, formándose una estructura de espagueti. Conforme la densidad aumenta, estas tiras se fusionarían unas con otras formando una superficie que estaría intercalada con el mar de electrones y neutrones libres, formándose ahora una estructura de lasaña [12].

Aún en estos escenarios tipo pasta, la retícula que forman los núcleos atómicos sigue existiendo. En la fase de espagueti, el núcleo se extiende a lo largo desde el fondo hasta la parte superior de la celda. En la fase de lasaña, el núcleo se extiende en placas dentro de la celda [12].

Mientras los núcleos se extienden formando estas placas o barras en la estrella, los electrones no son capaces de adaptarse a esta nueva fase de la materia, pues la longitud de onda de Compton del electrón es del orden de 2pm. Por esta razón, los electrones forman un líquido separado rodeando la pasta y apantallando la carga [12]. A diferencia de los electrones, los neutrones libres pueden estar todavía dentro de las celdas de Wigner-Seitz, ya que su longitud de onda asociada es del orden de 1.3fm.

4.1.4. La materia en el núcleo externo

Conforme aumenta la densidad de masa dentro de una estrella de neutrones, la descripción del estado de la materia se torna cada vez más difícil; considerar las interacciones de los nucleones dentro y fuera del núcleo se vuelve necesario y distintas propuestas sobre el potencial de interacción entre nucleones lleva a distintos modelos de núcleos atómicos. Superado el límite de $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ nos adentramos en el núcleo externo de una estrella de neutrones. En este régimen de densidades es necesario introducir el concepto de densidad de saturación nuclear, que será de utilidad para explicar la disolución de los núcleos atómicos dentro de una estrella de neutrones.

El concepto de saturación nuclear está relacionado con la repulsión que puede existir entre nucleones dentro del núcleo atómico [12, 31]. La fuerza que experimentan dos nucleones es atractiva en un rango intermedio del orden de 1fm. En un rango más corto la fuerza de atracción se vuelve repulsiva. Los nucleones dentro del núcleo atómico mantienen un distanciamiento promedio de alrededor de 1.8fm [31]. Los núcleos con un mayor número atómico ocupan un volumen mayor y esto se ve reflejado en la relación empírica entre el número atómico y el radio del núcleo [31]

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (4.7)$$

donde $r_0 = 1.21 \text{fm}$. Aproximando los núcleos atómicos como esferas cargadas y utilizando la ecuación 4.7

podemos calcular la densidad numérica de los núcleos atómicos como

$$n = \frac{A}{V} = \frac{3A}{4\pi R^3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.19\text{fm}^{-3}. \quad (4.8)$$

En términos de densidad de masa, si consideramos la masa promedio de los nucleones como $939\text{MeV}/c^2$, entonces la densidad de masa para los núcleos atómicos es

$$\rho = 939 \frac{\text{MeV}}{c^2} n \approx 2 \times 10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (4.9)$$

Al modelar el núcleo atómico bajo estos dos supuestos obtuvimos una densidad constante para todo número atómico. Si bien la densidad de masa para cada núcleo atómico en realidad varía y los cálculos dependen del potencial nuclear que se utilice, este modelo refleja el fenómeno de repulsión y atracción que experimentan los nucleones dentro del núcleo, y cómo al incrementar el número atómico, el radio nuclear también debe de crecer para que los nucleones puedan mantener su distanciamiento y la fuerza que experimenten sea atractiva. El valor $2 \times 10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ se le conoce como densidad de saturación nuclear (ρ_{sat}) y es el concepto que hace referencia a cómo incrementa el volumen del núcleo atómico al aumentar la cantidad de nucleones en su interior, manteniendo una consistencia las densidades de masa cuando los núcleos atómicos son aproximados como una esfera cargada [31].

Las densidades de masa que existen dentro del núcleo exterior de una estrella de neutrones pasan este límite de saturación nuclear. Una vez superado, la estructura reticular desaparece así como los núcleos atómicos, encontrándonos con una mezcla de neutrones, protones y electrones [12]. El rango de densidades del núcleo exterior de una estrella de neutrones va de $0.5\rho_{\text{sat}}$ hasta $2\rho_{\text{sat}}$. Existen modelos de estrellas de neutrones cuya densidad central se aproxima a la densidad de saturación nuclear, pero también pueden existir estrellas de neutrones con densidades mayores a $2\rho_{\text{sat}}$ [32]. Para estas últimas estrellas, podremos distinguir la estructura interna del núcleo estelar, que alcanza densidades de masa superiores a $2\rho_{\text{sat}}$.

Antes de alcanzar el límite de saturación nuclear, el número de masa atómica en el núcleo exterior de las estrellas de neutrones es del orden de 10^{57} . Este extremo escenario permite modelar la materia como *materia nuclear*. El concepto de materia nuclear es una idealización que considera un sistema infinito de nucleones, es decir, hace que el número de masa atómica tienda a infinito [12, 32]. Para la materia nuclear, las interacciones coulombianas son inexistentes y las interacciones nucleón - nucleón dependen únicamente de las densidades de protones y neutrones [32]. Para poder entender este concepto, podemos recurrir a la parametrización de Weizsäcker (4.2) y calcular la energía de enlace por nucleón E_b/A

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{E_b}{A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-a_v + \frac{a_s}{A^{1/3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{4A^2} + \frac{\delta}{A^{3/2}} \right) = -a_v + \frac{a_a}{4} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(N-Z)^2}{A^2} \quad (4.10)$$

Para el modelo de materia nuclear, el término de superficie, el término de Coulomb y el de paridad tienden a cero. En este escenario la energía de enlace está dada únicamente por el término de volumen y por el término de simetría, que considera la diferencia entre el número de protones y neutrones en la materia nuclear. Diremos que la materia nuclear es simétrica si $Z = N$ o equivalentemente $Z/A = 0.5$.

Una de las diferencias entre la materia nuclear y la materia en el interior de los núcleos atómicos surge al

comparar las energías de enlace por nucleón. De la Figura 4.3 vemos que el rango de energías de enlace para distintos núclidos es de $1 - 8.8\text{MeV}$ mientras que el término de volumen en la parametrización de Weizsäcker es de aproximadamente 16MeV [12, 31]. Esta diferencia tan notoria en las energías de enlace entre los núcleos atómicos y la materia nuclear incluso para núcleos con números de masa tan grandes como de $200 - 250$ es el reflejo de cómo no hay una extrapolación inmediata entre las propiedades de los núcleos atómicos y la materia nuclear [12].

Otro efecto a tomar en cuenta en el modelado de la materia en el núcleo exterior es que la materia no es simétrica. Al final de la corteza interior la tasa de protones/neutrones es de $40/1540 \approx 0.02$, lo que se traduce como una gran asimetría en la materia. En comparación, los núcleos atómicos con proporciones Z/A más bajas conocidas son los de ${}^8\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$ y ${}^{14}\text{Be}$ con cocientes de 0.25 , 0.27 y 0.29 respectivamente. Incluso en la secuencia de núclidos presentes en la corteza exterior descrita en la Tabla 4.1, el cociente Z/A está más cerca de 0.5 que de 0.02 . Esto también refleja la necesidad en los modelos de materia nuclear de tomar en cuenta la extrema cantidad de neutrones y cómo difiere el interior de una estrella de neutrones de la materia en los núcleos atómicos [12].

Un punto de partida para modelar el núcleo externo es considerar la materia formada únicamente por neutrones, iniciando con interacciones entre dos cuerpos (neutrones). Ecuaciones de estado más complejas consideran interacciones entre más de dos cuerpos [12].

4.1.5. La materia en el núcleo interno

A la largo de esta sección y apoyados de las propiedades derivadas en el Capítulo 2 hemos explorado cómo el aumento en la densidad de masa en el interior de las estrellas de neutrones lleva a diferentes interacciones entre electrones, protones y neutrones. Estas interacciones obedecen a la Segunda Ley de la Termodinámica, donde la materia en el interior de las estrellas de neutrones buscará un estado de equilibrio tal que su energía interna sea mínima. El recorrido hecho hasta ahora está representado en la Figura 4.4, ilustrando las distintas partes en las que dividimos el interior de las estrellas de neutrones para su estudio.

Veremos que para densidades superiores a $2\rho_{\text{sat}}$ la existencia de partículas más pesadas que los electrones, protones y neutrones puede ser energéticamente favorecida, dependiendo del rango de densidades y de la energía-masa en reposo de las partículas en cuestión [12]. Por otro lado, para la creación, decaimiento y aniquilación de diferentes partículas, se espera que el número bariónico y el número de carga sean cantidades conservadas en el interior de una estrella de neutrones. De esta forma, las únicas reglas que impondremos para la existencia de estas nuevas partículas en el interior del núcleo interno de las estrellas de neutrones, serán la conservación del número de carga y del número bariónico, y que la energía asociada al estado en el que se encuentre la nueva partícula sea alcanzable para el régimen de densidades de masa en el que se encuentre el núcleo estelar.

Para el caso de los leptones, las siguientes partículas más pesadas son el muón μ^- y el tau τ^- . Ambas tienen un número de carga -1 y una masa en reposo de $105.7\text{MeV}/c^2$ y $1776\text{MeV}/c^2$, respectivamente. Para que sea energéticamente favorable la existencia de estas partículas, se debe cumplir que el potencial químico del electrón sea comparable con las masas en reposo de estas partículas. En un ejercicio similar al realizado en la Sección 2.4 podemos conocer este régimen de densidades utilizando la ecuación (3.6), pues nuestros electrones aún dentro del núcleo interno siguen modelándose como una nube no interactuante, degenerada

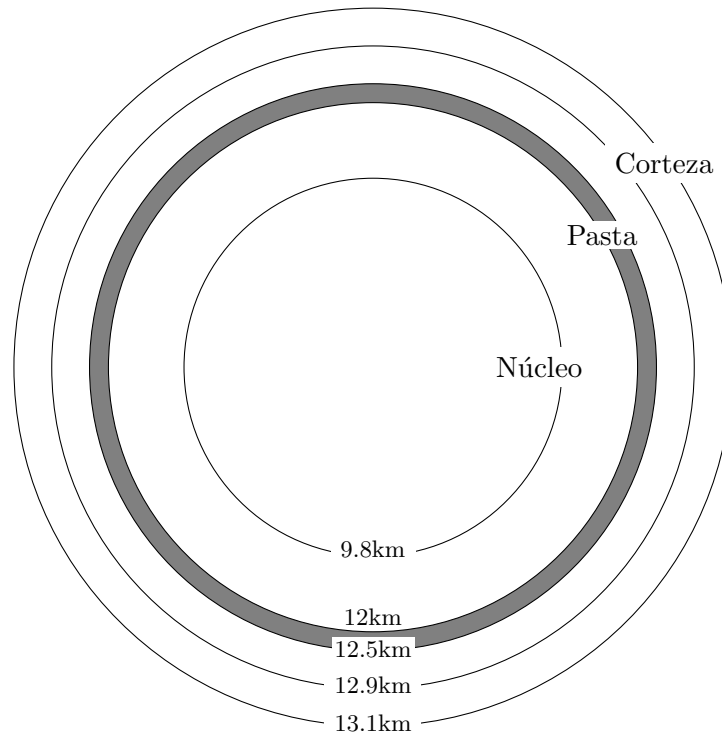


Figura 4.4: Corte sin escala de un modelo esférico de estrella de neutrones. Se ilustra el núcleo externo e interno, la pasta en la zona de transición entre la corteza y el núcleo, y la corteza externa e interna de la estrella. Los radios de cada sección fueron obtenidos del modelo presentado en la referencia [12], que tiene una masa total de $2M_{\odot}$.

y relativista. Por otro lado, la ecuación (3.23) no debería continuar utilizándose, pues la aproximación fue hecha suponiendo simetría en la materia y que aún existe un núcleo atómico. Sin embargo la expresión nos será útil para aproximar una cota inferior en el régimen de densidades, pues la densidad de masa calculada de esta forma será menor al seguir tomando en cuenta defectos de masa en el núcleo por energías de enlace.

Para que los muones puedan aparecer en el núcleo interno el potencial químico de los electrones debe alcanzar la energía-masa en reposo de los muones. Bajo nuestro modelo, el potencial químico de los electrones no es más que la energía de Fermi y, por lo tanto, el momento de Fermi asociado a los electrones debe de ser $p_F = m_{\mu}c$. Con estos valores, obtenemos para la densidad de masa

$$\rho = 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (m_{\mu}c)^3 \sim 2 \times 10^{13} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (4.11)$$

Esto es un orden de magnitud por debajo de la densidad de saturación nuclear. En [12], se reporta que la densidad de masa necesaria para la aparición de muones en el interior del núcleo interno es $3\rho_{\text{sat}}$. Como esperábamos, bajo nuestra aproximación la densidad de masa obtenida es inferior a la reportada en [12], sin embargo $3\rho_{\text{sat}}$ sigue siendo un régimen de densidades típico en el núcleo interno de las estrellas de neutrones, por lo que la existencia de muones en los núcleos internos de estrellas de neutrones es posible.

Por otro lado, para las partículas tau, la densidad de masa necesaria es

$$\rho = 2m_H \frac{8\pi}{3h^3} (m_{\tau}c)^3 \sim 8 \times 10^{16} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \quad (4.12)$$

Este valor es más de 100 veces la densidad de saturación nuclear y está por encima de la densidad de

masa central máxima que se cree que pueden tener las estrellas de neutrones, del orden de 10 a 20 veces la densidad de saturación nuclear. Por esta razón resulta poco factible que existan partículas tau en el núcleo de una estrella de neutrones.

Para los bariones, se piensa que las siguientes partículas que pueden aparecer en el núcleo, ordenadas de menor a mayor masa son Lambda (Λ), Sigma ($\Sigma^+\Sigma^-\Sigma^0$), Xi ($\Xi^-\Xi^0$) y Omega (Ω^-) [12]. Mientras que los nucleones están formados por quarks up y down, estos bariones están formados por quarks up, down y por uno o más quarks extraños, distinguiéndose así de los protones y neutrones y recibiendo el nombre de *hiperiones* [12].

La posible existencia de hiperiones en el núcleo interno de las estrellas de neutrones lleva a analizar sus interacciones con los nucleones y con otros hiperiones. Este problema ha sido afrontado realizando extrapolaciones de interacciones nucleón - nucleón, analizando simetrías en la interacción fuerte y creando modelos computacionales bajo distintos potenciales y restricciones en la materia hiperiónica [32]. Las diferencias entre las ecuaciones de estado que se obtienen de considerar este tipo de materia son resultado de las distintas suposiciones en las interacciones nucleón - nucleón, nucleón - hiperión e hiperión - hiperión, pues aún existen grandes retos en el estudio de las interacciones de estas partículas [32].

Para conocer el orden de densidades a las que pueden aparecer este tipo de partículas, el potencial químico bariónico primero debe alcanzar la energía-masa en reposo del hiperión Λ que tiene una masa de $1116\text{MeV}/c^2$ [12]. De la ecuación (2.31) obtenemos que el potencial químico bariónico es igual al potencial químico del neutrón, luego su potencial químico es igual a su energía de Fermi asociada, obteniendo

$$\begin{aligned} m_\Lambda c^2 = \mu_n = E_{F,n} = \sqrt{p_{F,n}^2 c^2 + m_n^2 c^4} &\implies p_{F,n} = \sqrt{m_\Lambda^2 - m_n^2} c, \\ \implies \rho = m_H \frac{8\pi}{3h^3} \left(\sqrt{m_\Lambda^2 - m_n^2} c \right)^3 &\sim 1.6 \times 10^{15} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Esta densidad corresponde de 4 a 8 veces la densidad de saturación nuclear, suponiendo materia puramente neutrónica y no interactuante.

Finalmente podemos preguntarnos ¿qué ocurre con los decaimientos de estas partículas? El muón decae a un electrón, un antineutrino electrón y un neutrino muón; los hiperiones *ligeros* decaen a un protón y algún mesón; y los hiperiones más *pesados* decaen a otros hiperiones. El punto clave en el análisis de estos decaimientos es que involucran a dos fermiones que son el electrón y el protón. Así como el decaimiento del neutrón (2.40) está prohibido dentro de la estrella si todos los estados para el electrón están ocupados, los decaimientos para estas partículas también estarán prohibidos por el Principio de Exclusión de Pauli [12].

Se cree que muchas otras partículas pueden existir en el núcleo interno de las estrellas de neutrones: mesones, hipernúcleos,² incluso núcleos estelares de quarks. La idea clave para proponer la existencia de estas partículas en el interior de las estrellas de neutrones está en el aumento en la densidad central de la estrella, que de superar la densidad crítica en la cual los quarks comienzan a separarse de los nucleones, lleva a considerar nuevas contribuciones a la presión interna de la estrella. Uno de los modelos más conocidos para estrellas de quarks es el modelo de bolsa del MIT, donde el gas fermiónico degenerado está formado

²Núcleos atómicos con hiperiones en vez de nucleones

por quarks [33]. Las consecuencias de suponer la existencia de estas partículas en el interior de las estrellas de neutrones y sus interacciones son un objeto de estudio activo en la física. El lector interesado puede encontrar un análisis más profundo de los núcleos de las estrellas de neutrones en las referencias [1, 12, 14].

4.2. El formalismo de los polítropos generalizados a trozos

Hemos visto cómo las ecuaciones de estado que buscan modelar el régimen de altas densidades dentro de los núcleos de las estrellas de neutrones consideran distintos parámetros relativos al estado de la materia y las interacciones físicas tomadas en cuenta. Cuando se supera la densidad de saturación nuclear ($\rho > 10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$), las ecuaciones de estado propuestas están sujetas a las distintas consideraciones que se tomen en cuenta, como la elección de un potencial para las interacciones entre nucleones y decidir cómo lidiar con el problema de n cuerpos, considerar o no la superfluidez de los neutrones y/o la existencia de hiperiones e hipernúcleos, son ejemplos de los distintos fenómenos que se pueden tomar en cuenta cuando se busca modelar el interior de las estrellas de neutrones [1]. Incluir o no estos fenómenos a la hora de proponer una ecuación de estado no sólo depende del régimen de densidades al que se quiera aplicar, pues son fenómenos complejos que requieren de un conocimiento que en su gran mayoría es puramente teórico dada la imposibilidad de replicar este tipo de materia en laboratorios terrestres.

Todos estos fenómenos y muchos más se han abordado durante décadas y son la razón por la que numerosas ecuaciones de estado han sido propuestas. Como consecuencia, se ha vuelto necesario encontrar formas de descartar o aceptar ecuaciones de estado candidatas dentro del conjunto de propuestas. Un estudio detallado de las propuestas existentes es ajeno a los propósitos de esta tesis.

La elección de cierta ecuación de estado para el núcleo afecta las propiedades físicas observables de las estrellas de neutrones [1, 11, 34]. La masa, radio, spín y momento de inercia son observables útiles, pues son sensibles únicamente a la ecuación de estado elegida y no a otros fenómenos presentes en la estrella como el enfriamiento o coeficientes de transporte [34].

Comparar modelos numéricos contruidos con cierta ecuación de estado con respecto a observaciones de estrellas de neutrones es una forma de evaluar a las ecuaciones de estado candidatas. Generalmente estas ecuaciones de estado son presentadas en tablas (ρ_i, P_i) con m registros calculados. Esto supone una dificultad al construir modelos numéricos de estrellas de neutrones, pues la diferenciabilidad y convergencia de las soluciones no siempre están aseguradas [11]. A partir de este problema han surgido distintos métodos para aproximar ecuaciones de estado tabuladas a través de funciones analíticas bien comportadas. En particular, las ecuaciones de estado paramétricas cuentan con un conjunto de parámetros libres que, dependiendo de la elección, pueden aproximar a otras ecuaciones de estado.

En busca de una manera de modelar ecuaciones de estado de materia nuclear, J. S. Read *et al.* introdujeron, en la referencia [34], el formalismo de las ecuaciones de estado politrópicas a trozos. Este formalismo se basa en dividir el rango de densidades de masa del núcleo estelar en tres intervalos $[\rho_0, \rho_1]$, $[\rho_1, \rho_2]$ y $[\rho_2, \rho_c]$, seleccionados de manera no trivial. ρ_0 representa el valor de densidad de masa en la frontera entre el núcleo y la corteza de la estrella, y ρ_c representa su densidad de masa central. Cada uno de estos tres intervalos tiene asociada una ecuación de estado politrópica $P = K_i \rho^{\Gamma_i}$. Los parámetros de esta ecuación de estado deben ser ajustados tomando en cuenta la ecuación de estado para la corteza, que se supone

conocida. Este formalismo introdujo muchas ventajas contra otros ajustes o aproximaciones para ecuaciones de estado tabuladas. Cuenta con seis parámetros libres que, en comparación con otros métodos, es una cantidad mucho menor, y al mismo tiempo son suficientes para ajustar una gran variedad de ecuaciones de estado candidatas tabuladas. Además, el espacio de parámetros libres se puede restringir tomando en cuenta observables de estrellas de neutrones [34]. Más aún, la continuidad de la función $P = P(\rho)$ está garantizada a lo largo de toda la estrella. Este formalismo se conoce como el *Formalismo de Polítropos a Trozos* (PP por sus siglas en inglés).

Posteriormente, M. F. O'Boyle *et al.* se basaron en el formalismo PP y redactaron en [11] una nueva propuesta para ajustar ecuaciones de estado tabuladas utilizando polítropos. Este nuevo formalismo se conoce como *Polítropos Generalizados a Trozos* (GPP por sus siglas en inglés). Entre las ventajas de utilizar este método está la reproducción eficaz de las propiedades físicas observables predichas por las ecuaciones de estado originales, de manera que este método puede ser utilizado para evaluar a las ecuaciones de estado candidatas. En el artículo [11] M. F. O'Boyle *et al.* demuestran esta afirmación generando modelos de estrellas de neutrones con el formalismo GPP y utilizando directamente las ecuaciones de estado tabuladas. Los autores comparan el error en la predicción de la masa y radio estelares, en las deformaciones por marea y muestran una mejora comparada con el formalismo PP. Además de las cantidades físicas observables, los autores discuten ampliamente sobre la necesidad de reproducir de manera precisa el comportamiento de otras variables como lo son el índice adiabático γ y la velocidad del sonido c_s . Ambos son indicadores de la estabilidad de la estrella [1, 11] y en el caso de la velocidad del sonido, puesto que los métodos numéricos para modelar y evolucionar fluidos dependen explícitamente de c_s , que esta variable pueda ser recuperada a través del formalismo GPP con precisión permite realizar simulaciones hidrodinámicas donde la estrella evolucione, se eviten oscilaciones espurias y puedan analizarse otros fenómenos como sus modos de oscilación y frecuencias; que de otro modo variarían significativamente si no se reprodujera c_s con precisión [11]. Además, una restricción básica en las ecuaciones de estado candidatas a modelar el núcleo de una estrella de neutrones es la verificación de la causalidad. En otras palabras, debe verificarse que el valor para la velocidad del sonido c_s siempre sea menor que el valor de la velocidad de la luz en el vacío c [35]. Las ecuaciones de estado que ajustaremos con el formalismo GPP satisfacen el principio de causalidad y en el formalismo GPP se garantiza que las expresiones análogas que obtendremos también lo harán [11].

Con este método no solo se obtiene continuidad de las funciones de presión y densidad de energía sobre toda la estrella, sino que se asegura la diferenciabilidad de las mismas y con ello la continuidad en la velocidad del sonido dentro de la estrella [11].

El formalismo GPP es una extensión del formalismo PP, con ventajas al utilizarse en simulaciones numéricas, evitando los problemas de un formalismo que sólo impone continuidad y no diferenciabilidad. En el formalismo GPP, el rango de densidades de masa del núcleo estelar también se divide en tres intervalos, $[\rho_0, \rho_1]$, $[\rho_1, \rho_2]$ y $[\rho_2, \rho_c]$. Las funciones P y ε se proponen de la forma

$$P(\rho) = K\rho^\Gamma + \Lambda, \quad (4.14)$$

$$\varepsilon(\rho) = \frac{K}{\Gamma - 1}\rho^\Gamma + (1 + a)\rho - \Lambda. \quad (4.15)$$

En una ecuación de estado politrópica se tiene $\Lambda = 0$ y $a = 0$, pues se asegura que $P(\rho) \rightarrow 0$ cuando

$\rho \rightarrow 0$, y $\varepsilon(\rho)$ sólo toma en cuenta la masa en reposo de la estrella y la energía interna del sistema. Sin embargo, al estar en el rango de densidades del núcleo estelar, es de utilidad proponer como parámetros $\Lambda \neq 0$ y $a \neq 0$ para ajustar las ecuaciones de estado a partir de la corteza y asegurar las propiedades de continuidad y diferenciabilidad. Así, a cada intervalo de densidades $[\rho_{i-1}, \rho_i]$ con $i \in \{1, 2, c = 3\}$ —donde c es el subíndice para la densidad central— le corresponde un conjunto de parámetros $\{K_i, \Gamma_i, \Lambda_i, a_i\}$. Esta es la principal diferencia y ventaja del formalismo GPP comparado con el formalismo PP. El parámetro Λ puede ser interpretado como una presión adicional fuera del núcleo y a como una energía de enlace. Bajo esta formulación, Γ ya no puede ser relacionado con el índice adiabático, interpretándose únicamente como el exponente politrópico. A partir de estas consideraciones, a las ecuaciones (4.14)-(4.15) se les conoce como *ecuaciones politrópicas generalizadas a trozos*.

Imponiendo diferenciabilidad y continuidad de la presión en las interfases de los polítrópos, de la ecuación (4.14) se obtiene

$$K_{i+1} = K_i \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i+1}} \rho_i^{\Gamma_i - \Gamma_{i+1}}, \quad (4.16)$$

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i + \left(1 - \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i+1}}\right) K_i \rho_i^{\Gamma_i}, \quad (4.17)$$

mientras que de imponer diferenciabilidad de la densidad de energía, de la ecuación (4.15) se obtiene

$$a_{i+1} = a_i + \Gamma_i \frac{\Gamma_{i+1} - \Gamma_i}{(\Gamma_{i+1} - 1)(\Gamma_i - 1)} K_i \rho_i^{\Gamma_i - 1}. \quad (4.18)$$

De estas tres relaciones se sigue la continuidad de ε en cada transición de polítrópos.

Los parámetros Λ_1 , a_1 y ρ_0 se ajustan de forma que se asegure la continuidad y diferenciabilidad de P y ε en la transición entre la corteza y el núcleo. Para esto hay que escoger una ecuación de estado para describir la corteza de la estrella de neutrones.

Sea $P_{\text{cort}}(\rho)$ la función de la presión en la corteza. Para asegurar la diferenciabilidad se toman las derivadas con respecto a ρ de P_{cort} y de (4.14). El punto donde ambas derivadas se crucen será el designado como ρ_0 , y de esta forma se asegura la diferenciabilidad sobre la zona de transición entre la corteza y el núcleo. Esto es

$$\left. \frac{dP_{\text{cort}}}{d\rho} \right|_{\rho_0} = K_1 \Gamma_1 \rho_0^{\Gamma_1 - 1}. \quad (4.19)$$

El parámetro Λ_1 es calculado de forma que se asegura la continuidad en ρ_0

$$\Lambda_1 = P_{\text{cort}}(\rho_0) - K_1 \rho_0^{\Gamma_1}. \quad (4.20)$$

De manera similar, el parámetro a_1 se calcula considerando $\varepsilon_{\text{cort}}(\rho)$ la función de la densidad de energía en la corteza:

$$a_1 = \frac{\varepsilon_{\text{cort}}(\rho_0)}{\rho_0} - \frac{K_1}{\Gamma_1 - 1} \rho_0^{\Gamma_1 - 1} + \frac{\Lambda_1}{\rho_0} - 1. \quad (4.21)$$

Concluyendo, el conjunto de parámetros $\{a_i, \Lambda_i\}_{i=1,2,3}$ se utiliza para satisfacer condiciones de continuidad y diferenciabilidad sobre los puntos de transición dentro del núcleo y sobre la frontera entre el núcleo y la corteza. Luego existen funciones $P(\rho)$ y $\varepsilon(\rho)$ que son continuas y diferenciables sobre todo el rango de densidades $[0, \rho_c]$, de tal forma que existe $\rho_0 \in [0, \rho_c]$ tal que para $\rho \leq \rho_0$, $P(\rho) = P_{\text{cort}}(\rho)$ y $\varepsilon(\rho) = \varepsilon_{\text{cort}}(\rho)$. Para $\rho > \rho_0$, las funciones $P(\rho)$ y $\varepsilon(\rho)$ están descritas por (4.14) y (4.15), respectivamente.

Hasta ahora, se tiene como parámetros libres al conjunto $\{K_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \rho_1, \rho_2\}$. Sin embargo, como se muestra en la referencia [11], existe una preferencia en la elección de las densidades de transición dentro del núcleo estelar, ρ_1 y ρ_2 . Esta preferencia surge de minimizar el error cuadrático medio de los ajustes de todas las ecuaciones de estado candidatas que se busquen reproducir. De forma que ρ_1 y ρ_2 son parámetros fijos y con valores $10^{14.87} \text{g/cm}^3$ y $10^{14.99} \text{g/cm}^3$, respectivamente. Finalmente, el formalismo GPP tiene como parámetros libres al conjunto $\{K_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ y sus valores son obtenidos utilizando el método de mínimos cuadrados para ajustarse a la ecuación de estado nuclear que sea de interés. El ajuste de estos parámetros es descrito a detalle en [11].

Así, para cada elección de ecuación de estado nuclear y de ecuación de estado para la corteza que se desee emplear, se debe ajustar el conjunto $\{K_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ de acuerdo a la ecuación de estado nuclear, y también se deben de calcular los parámetros $\{\rho_0, a_1, \Lambda_1\}$ para la zona de transición entre núcleo y corteza de acuerdo con la ecuación de estado para ésta.

En la referencia [11] se calcularon los parámetros para un total de veinticinco ecuaciones de estado para el núcleo estelar, presentados en este trabajo en la Tabla 4.2. Para los cálculos se consideró que la corteza de la estrella está descrita por la ecuación de estado SLY4, de la cual también se hizo un ajuste bajo el formalismo GPP usando cuatro densidades divisorias, como se muestra Tabla 4.3. Las ecuaciones de estado de los modelos de estrellas de neutrones construidos en este trabajo provienen de estas ecuaciones de estado parametrizadas.

4.3. Ecuaciones de estructura en Relatividad General

Como hemos discutido, la descripción del estado de la materia de las estrellas de neutrones involucra distintos fenómenos físicos actuando localmente, sintetizados en la ecuación de estado. Por otro lado, el campo gravitacional dentro y fuera de la estrella y el equilibrio interno de fuerzas son fenómenos que deben ser estudiados desde el contexto de la Relatividad General. El objetivo de esta sección es similar al de la Sección 3.2, donde se introdujeron las ecuaciones de la hidrodinámica y la ecuación de Poisson para deducir el conjunto de ecuaciones diferenciales que determinan las funciones de presión y densidad de masa de una enana blanca estática en función de las coordenadas espaciales; excepto que en esta sección serán establecidas para estrellas de neutrones. Para este caso, obtendremos las *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, conocidas como ecuaciones de TOV. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que involucran las funciones de presión interna y densidad de masa en función de las coordenadas espaciales, así como las funciones de densidad de energía de la estrella y la métrica del espacio tiempo. Estas ecuaciones provienen de las ecuaciones de campo de Einstein.

| EOS | $\log \rho_0(\text{g/cm}^3)$ | $\log K_1$ | Γ_1 | Γ_2 | Γ_3 |
|---------|------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| APR | 14.040 | -33.210 | 3.169 | 3.452 | 3.310 |
| BHF | 14.130 | -35.016 | 3.284 | 2.774 | 2.618 |
| FPS | 14.087 | -32.985 | 3.147 | 2.652 | 2.199 |
| H4 | 13.499 | -23.310 | 2.514 | 2.333 | 1.562 |
| KDE0V | 13.978 | -30.250 | 2.967 | 2.835 | 2.803 |
| KDE0V1 | 13.929 | -29.232 | 2.900 | 2.809 | 2.747 |
| MPA1 | 14.088 | -40.301 | 3.662 | 3.057 | 2.298 |
| MS1 | 13.657 | -30.170 | 2.998 | 2.123 | 1.955 |
| MS1b | 13.795 | -33.774 | 3.241 | 2.136 | 1.963 |
| QHC19 | 14.102 | -36.879 | 3.419 | 2.760 | 2.017 |
| RS | 13.641 | -25.150 | 2.636 | 2.677 | 2.647 |
| SK255 | 13.679 | -25.990 | 2.693 | 2.729 | 2.667 |
| SK272 | 13.732 | -27.597 | 2.804 | 2.793 | 2.733 |
| SKI2 | 13.552 | -24.202 | 2.575 | 2.639 | 2.656 |
| SKI3 | 13.660 | -26.457 | 2.729 | 2.680 | 2.708 |
| SKI4 | 13.907 | -31.008 | 3.029 | 2.759 | 2.651 |
| SKI5 | 13.438 | -23.109 | 2.505 | 2.708 | 2.727 |
| SKI6 | 13.902 | -31.089 | 3.035 | 2.762 | 2.653 |
| SKMP | 13.763 | -27.116 | 2.766 | 2.741 | 2.698 |
| SKOP | 13.761 | -26.089 | 2.693 | 2.660 | 2.579 |
| SLY2 | 13.967 | -31.070 | 3.026 | 2.871 | 2.760 |
| SLY230A | 14.021 | -33.385 | 3.184 | 2.895 | 2.588 |
| SLY4 | 13.980 | -31.350 | 3.045 | 2.884 | 2.773 |
| SLY9 | 13.899 | -30.657 | 3.005 | 2.796 | 2.652 |
| WFF1 | 14.133 | -34.394 | 3.240 | 3.484 | 3.695 |

Tabla 4.2: Parámetros ajustados dentro del formalismo GPP para distintas ecuaciones de estado para el núcleo estelar. Tabla obtenida de [11].

| $\rho_i(\text{g/cm}^3)$ | $K_i(\text{cgs})$ | Γ_i | $\Lambda_i(\text{g/cm}^3)$ | a_i |
|-------------------------|-------------------------|------------|----------------------------|-------------------------|
| 0 | 5.214×10^{-9} | 1.611 | 0 | 0 |
| 6.285×10^5 | 5.726×10^{-8} | 1.440 | -1.354 | -1.861×10^{-5} |
| 1.826×10^8 | 1.662×10^{-6} | 1.269 | -6.025×10^3 | -5.278×10^{-4} |
| 3.350×10^{11} | -7.957×10^{29} | -1.841 | 1.193×10^9 | 1.035×10^{-2} |
| 5.317×10^{11} | 1.746×10^{-8} | 1.382 | 7.077×10^8 | 8.208×10^{-3} |

Tabla 4.3: Parámetros de un ajuste GPP para la corteza de la ecuación de estado SLY4, usando cuatro densidades de transición. Tabla obtenida de [11].

4.3.1. El tensor de Energía-Momento

Un fluido perfecto en Relatividad General está caracterizado por el Tensor de Energía-Momento \mathbf{T} , simétrico, cuyas componentes son

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon + P) U^\alpha U^\beta + P g^{\alpha\beta}. \quad (4.22)$$

Equivalentemente, bajando índices:

$$T_{\alpha\beta} = T^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon + P) U_\alpha U_\beta + P g_{\alpha\beta}, \quad (4.23)$$

donde ε y P son la densidad total de masa-energía y la presión del fluido, respectivamente, U^α es la 4-velocidad de observadores co-móviles con el fluido y $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico del espacio-tiempo [5, 9, 10].

Una forma de entender por qué \mathbf{T} representa la energía y momento contenido en el fluido, es definiendo las entradas $T^{\alpha\beta}$ como el flujo de la componente α de momento a través de la superficie de coordenada x^β constante [5, 36], con asociaciones especiales para los casos de $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Específicamente se asocia:

- T^{00} = densidad de energía,
- T^{0i} = flujo de energía a través de la superficie x^i constante,
- T^{i0} = densidad de la componente i -ésima de momento,
- T^{ij} = flujo de la componente i -ésima de momento a través de la superficie x^j .

En un marco de referencia momentáneamente comóvil, el tensor de energía-momento adquiere la representación matricial

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Como se mencionó en la sección 3.2, la ecuación de Euler (3.31) es una ecuación en derivadas parciales del tiempo y espacio que refleja los cambios en el campo de velocidades del fluido debido a la presencia de fuerzas. De manera análoga, la derivada covariante del tensor de energía-momento describe los cambios en la energía y momento del fluido:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_t T^{\mu 0} + \partial_i T^{\mu i} = 0, \quad (4.25)$$

donde ∇_ν es el operador de derivada covariante. De acuerdo con la interpretación de las entradas del tensor de energía-momento, para $\mu = 0$, la primera de las cuatro ecuaciones presentes en (4.25) se refiere a la conservación de la energía, mientras que para $\mu = 1, 2, 3$, las ecuaciones sintetizan la conservación de momento en el sistema de manera análoga a (3.31).

La ecuación (4.25) en conjunto con la ecuación de conservación de la masa en reposo, $\nabla_\mu (\rho U^\mu) = 0$, son conocidas como las ecuaciones relativistas de la hidrodinámica para un fluido perfecto. El tensor de energía-momento juega un papel de doble importancia en Relatividad General, pues no sólo es el actor principal en las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, sino que también está presente en las ecuaciones

de campo de Einstein.

4.3.2. Las Ecuaciones de Campo de Einstein

Los modelos de estrellas de neutrones que estamos interesados en desarrollar son estáticos y esféricamente simétricos, descritos en coordenadas esféricas convencionales (r, θ, ϕ) . La métrica del espacio-tiempo debe reflejar estas propiedades dentro y fuera de la estrella. De manera genérica, el elemento de línea asociado a una métrica estática y esféricamente simétrica tiene la forma

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (4.26)$$

donde $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi$ es el elemento de ángulo sólido y g_{00} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ y $g_{\phi\phi}$ son los únicos elementos del tensor métrico distintos de cero. El ansatz que a menudo se encuentra en la literatura es $g_{00} = -e^{2\varphi}$ y $g_{rr} = e^{2\psi}$, con las funciones $\varphi = \varphi(r)$ y $\psi = \psi(r)$ [5, 9, 36], de forma que la métrica se reescribe como

$$ds^2 = -e^{2\varphi} c^2 dt^2 + e^{2\psi} dr^2 + r^2 d\Omega. \quad (4.27)$$

Las estrellas que se construyan tendrán un radio R , y las funciones φ , ψ serán tales que reflejen en la métrica la forma del campo gravitacional generado por tales estrellas. Lejos de la estrella, el espacio-tiempo es plano, lo que impone la primera condición para las funciones métricas φ , ψ [5],

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0, \quad (4.28)$$

es decir, el espacio-tiempo es asintóticamente plano, como se ilustra en la figura 4.5.

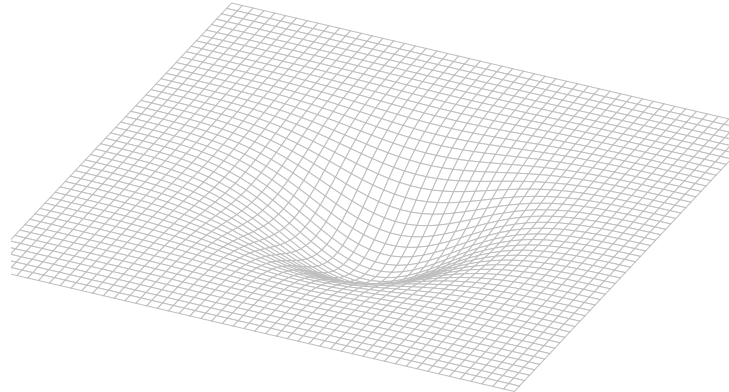


Figura 4.5: Ejemplo genérico de una hipersuperficie 2-dimensional de un espacio-tiempo asintóticamente plano en 2+1 dimensiones.

En la Teoría de la Relatividad General, las relaciones que describen cómo cambia la geometría del espacio-tiempo con la presencia de un cuerpo masivo se escriben de forma covariante, es decir, independiente del marco de referencia [1, 5]. En la teoría de gravitación Newtoniana, la fuente del campo gravitacional de un objeto es únicamente la masa del objeto, mientras que en la Teoría de la Relatividad General, el concepto de masa se generaliza con la equivalencia entre masa y energía, y el tensor de energía-momento es el objeto matemático que permite caracterizar objetos con masa-energía. Este tensor además participa en

las ecuaciones de conservación que se deben de cumplir en la física. Todo esto cumpliendo con el Principio de Covarianza.

Existen diversas motivaciones para introducir el tensor de Einstein \mathbf{G} [1, 5, 12], cuyas componentes, $G_{\mu\nu}$, contienen información sobre la curvatura del espacio-tiempo. Este tensor es simétrico y sus componentes se definen a través de la métrica del espacio-tiempo de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (4.29)$$

donde $R_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Ricci (véase su definición en el Apéndice B) y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci.

El tensor de Einstein se relaciona con el tensor de energía-momento a través de las Ecuaciones de Campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Tanto \mathbf{G} como \mathbf{T} son tensores simétricos, de forma que la relación (4.30) sintetiza un conjunto de diez ecuaciones diferenciales parciales acopladas a resolver. Para poder escribirlas de manera explícita es necesario calcular las diez entradas no triviales del tensor de Einstein y las diez entradas correspondientes del tensor de energía-momento. Esto es posible, pues podemos enlistar las entradas distintas de cero de nuestro tensor métrico $g_{\mu\nu}$ a partir de la definición de nuestra métrica estática y esféricamente simétrica (4.27), obteniendo:

$$g_{tt} = -e^{2\varphi}, \quad (4.31)$$

$$g_{rr} = e^{2\psi}, \quad (4.32)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad (4.33)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.34)$$

En el Apéndice B se derivan paso a paso el tensor y el escalar de Ricci para escribir el tensor de Einstein, de donde se obtiene que las únicas entradas distintas de cero son

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2\varphi} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\psi} \right) \right], \quad (4.35)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\psi} \left(1 - e^{2\psi} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (4.36)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\psi} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right], \quad (4.37)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \cdot G_{\theta\theta}. \quad (4.38)$$

Para poder escribir el lado derecho de la igualdad en la ecuación (4.30) debemos remitirnos a la definición de las componentes del tensor de energía-momento en la ecuación (4.23).

Como modelamos estrellas estáticas, la única componente distinta de cero de la cuadrivelocidad es U_t , luego, de la normalización

$$U^\mu U_\mu = -c^2, \quad (4.39)$$

como $U^\mu = g^{\mu\nu}U_\nu$, se tiene que

$$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= -c^2 \\ \implies g^{\mu\nu}U_\nu U_\mu &= -c^2 \\ \implies e^{-2\varphi}U_t U_t &= -c^2 \\ \implies U_t &= -c \cdot e^\varphi. \end{aligned}$$

Conociendo todas las entradas de la métrica y de la cuadrivalocidad, las del tensor de energía-momento son:

$$T_{tt} = \varepsilon \cdot e^{2\varphi}, \quad (4.40)$$

$$T_{rr} = P e^{2\psi}, \quad (4.41)$$

$$T_{\theta\theta} = P r^2, \quad (4.42)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \cdot T_{\theta\theta}. \quad (4.43)$$

Y de esta forma, a partir de las ecuaciones de campo de Einstein se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\psi} \right) \right] = 8\pi \frac{G}{c^4} \varepsilon(r), \quad (4.44)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\psi} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 - e^{2\psi} \right) = 8\pi \frac{G}{c^4} P(r), \quad (4.45)$$

$$e^{-2\psi} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right] = 8\pi \frac{G}{c^4} P(r), \quad (4.46)$$

donde la ecuación proveniente de las componentes $\phi\phi$ fue omitida, pues se reduce a la ecuación de las componentes $\theta\theta$.

Podemos llevar este conjunto de ecuaciones diferenciales a una forma más simple si introducimos la función

$$m(r) := \frac{c^2}{G} \frac{1}{2} r \left(1 - e^{-2\psi} \right). \quad (4.47)$$

De esta forma, la ecuación (4.44) toma la forma

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} \varepsilon(r) r^2. \quad (4.48)$$

Por otro lado la ecuación (4.45) se convierte en

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{4\pi}{c^2} P(r) r^3 + m(r)}{r \left[\frac{c^2}{G} r - 2m(r) \right]}. \quad (4.49)$$

A través de esta transformación, hemos reemplazado la tarea de encontrar la función $\psi(r)$ a encontrar la solución de la ecuación (4.48). Para la otra función de la métrica, $\varphi(r)$, su ecuación diferencial quedó expresada en términos de $P(r)$ y $m(r)$. Es necesario introducir una última ecuación diferencial para poder

resolver este sistema, y en una analogía a como obtuvimos las ecuaciones de estructura para las enanas blancas, esta última la obtendremos mirando hacia las ecuaciones de la hidrodinámica en Relatividad General (4.25).

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T^{\mu\nu} &= 0 \\ &= \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + T^{\sigma\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^\mu + T^{\mu\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^\nu.\end{aligned}$$

Con las definiciones establecidas para la métrica (4.27), el tensor de energía momento (4.23) y los símbolos de Christoffel calculados en el Apéndice B, podemos notar que el único caso donde la expresión anterior no es idénticamente cero es para $\mu = r$:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T^{\mu\nu} &= 0 \\ &= \frac{\partial T^{r\nu}}{\partial x^\nu} + T^{\sigma\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^r + T^{r\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^\nu \\ \implies \frac{dP}{dr} &= (\varepsilon + P) \frac{d\varphi}{dr}.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Resumiendo, hemos encontrado un conjunto de tres ecuaciones diferenciales a resolver

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{c^2}\varepsilon(r)r^2,\tag{4.51}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{4\pi}{c^2}P(r)r^3 + m(r)}{r\left[\frac{c^2}{G}r - 2m(r)\right]},\tag{4.52}$$

$$\frac{dP}{dr} = -(\varepsilon + P) \frac{\frac{4\pi}{c^2}P(r)r^3 + m(r)}{r\left[\frac{c^2}{G}r - 2m(r)\right]}.\tag{4.53}$$

A la ecuación (4.53) se le conoce como ecuación de TOV, aunque también es frecuente encontrar en la literatura que a todo el sistema de ecuaciones diferenciales se le llama *ecuaciones de TOV*.

Al resolver el sistema (4.51)-(4.53) encontraremos como solución a las funciones $\varphi(r)$, $P(r)$ y $m(r)$ [y por consecuencia a $\psi(r)$]. En el proceso, podemos encontrar las expresiones para la densidad de masa $\rho(r)$ y la densidad de energía $\varepsilon(r)$, vía la ecuación de estado $P(\rho)$ para el interior de las estrellas de neutrones y la relación impuesta en (2.21). En el caso de que se quiera utilizar el formalismo de los politropos generalizados a trozos, las relaciones (4.14) y (4.15) toman lugar.

Usualmente el sistema de ecuaciones diferenciales (4.51)-(4.53) se resuelve numéricamente comenzando desde el centro de la estrella, es decir $r = 0$, imponiendo como condición inicial un valor para la densidad de masa central $\rho(r = 0) = \rho_c > 0$ y obteniendo, vía la ecuación de estado, un valor para la presión central $P(r = 0) = P_c = P(\rho_c)$ y un valor para la densidad de energía central ε_c . Conforme r aumenta y nos alejamos del centro de la estrella, la presión interna y las densidades de masa y energía del objeto disminuyen monótonamente hasta llegar a cero en la superficie de la estrella, en $r = R$. Fuera de la estrella, para $r > R$, P , ρ y ε son idénticamente cero [1, 5].

Identificamos al radio estelar R para nuestro modelo como el primer valor de r que satisface $P(R) = \rho(R) =$

0. Fuera de la estrella, la función $m(r)$ adquiere un valor constante que identificamos como la masa de la estrella de neutrones. En efecto, notemos que la ecuación (4.51) es el análogo relativista de la ecuación de masa descrita en (3.38) y, al igual que en la sección 3.2.1, podemos expresar la función de masa en su forma integral:

$$m(r) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr'. \quad (4.54)$$

En el límite clásico $\varepsilon \rightarrow c^2 \rho$ y de esta forma, si R es el radio de la estrella de neutrones, para $r < R$, la función $m(r)$ representa también en este contexto la masa contenida en una esfera de radio r , y $M := m(R)$ representa la masa total de la estrella de neutrones.

La función de masa $m(r)$ considera ya la energía-masa en reposo, así como la energía de enlace gravitacional. Por lo tanto, al valor $m(R)$ se le suele llamar *masa gravitacional* de la estrella y es la cantidad física que puede ser medida por un observador en el exterior [12].

Fuera de la estrella ($r > R$), el sistema de ecuaciones diferenciales (4.51-4.53) toma la forma:

$$\frac{dm}{dr} = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m(r)}{r \left[\frac{c^2}{G} r - 2m(r) \right]}, \quad (4.56)$$

$$\frac{dP}{dr} = 0, \quad (4.57)$$

donde

$$m(r) = M \implies e^{2\varphi(r)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

y donde se impuso la condición $\varphi(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$. Esto permite reescribir la métrica (4.27) fuera de la estrella como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr + r^2 d\Omega^2. \quad (4.58)$$

Ésta se conoce como métrica de Schwarzschild y describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto arbitrario de masa M , estático y esféricamente simétrico.

Ahora estamos en condiciones de revisar la ecuación (4.53) y contrastarla con su versión newtoniana (3.37). Con este fin, notemos que el lado derecho de la ecuación puede ser reescrito como el producto de cuatro factores:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)} \right) \left(1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{c^2 m(r)} \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (4.59)$$

donde el primer factor es equivalente al lado derecho de la ecuación (3.37) en el límite newtoniano. De esta forma, podemos interpretar los tres factores restantes en la ecuación (4.59) como correcciones obtenidas en el marco de la Relatividad General.

La primera corrección, $(1 + P/\varepsilon)$, surge de la equivalencia masa-energía, modificando la densidad de masa

$\rho(r)$ y tomando en cuenta la contribución de la presión a la energía interna del sistema. La segunda corrección modifica a la función de masa $m(r)$ considerando las contribuciones de la presión: notemos que el término P/c^2 tiene las mismas unidades que la densidad de masa y, por ende, el valor $4\pi Pr^3/c^2$, que representa la masa de una esfera de radio r y de densidad P/c^2 , es comparado con el valor de la función de masa $m(r)$. El tercer y último término se conoce como factor de Schwarzschild y toma en cuenta la deformación del espacio-tiempo.

4.4. Masa máxima en las estrellas de neutrones

Como mencionamos en el Capítulo 3, una característica que distingue a las estrellas compactas de las estrellas de secuencia principal es que existe una cota superior para el valor de la masa estelar, de tal forma que para modelos de estrellas compactas donde la densidad de masa central aumenta, el radio estelar se encoge manteniéndose así el régimen de densidades de masa en el interior de la estrella.

Este fenómeno en las estrellas de neutrones puede ser explicado de forma similar a como se explicó en la sección 3.3, pues las estrellas de neutrones se soportan contra el colapso gravitacional por la presión de degeneración de los fermiones en su interior y por la parte repulsiva de la interacción fuerte. Como hemos visto, en el régimen de densidades del orden de $10^4 - 10^7 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ las contribuciones a la presión interna de la estrella están dadas principalmente por la presión de degeneración de los electrones. Conforme la densidad de masa aumenta y los neutrones se desconfinan del núcleo atómico, la presión de degeneración de los neutrones es ahora la que soporta a la estrella de su colapso. Para el final de la corteza de la estrella de neutrones, en el límite de densidad de saturación nuclear, las contribuciones a la presión interna de la estrella por parte de los neutrones degenerados son del 80 % aproximadamente [1]. Sin embargo, el límite en la masa estelar para las estrellas de neutrones es diferente al límite encontrado para las enanas blancas. Esto es consecuencia de las diferencias en la descripción del estado de la materia en el interior de las enanas blancas y el interior de las estrellas de neutrones.

La incapacidad de proponer una ecuación de estado aplicable para las estrellas de neutrones en general, lleva a distintas predicciones en el límite de la masa estelar, dependiendo de la ecuación de estado utilizada. No obstante, ésta es una forma en que se pueden descartar propuestas de ecuaciones de estado para el régimen de altas densidades, pues existen propuestas de ecuaciones de estado que predicen un límite en la masa estelar inferior a la masa estelar de diferentes estrellas de neutrones observadas. Éste filtrado en las propuestas de ecuaciones de estado sólo puede ser posible con los esfuerzos combinados por detectar y medir las masas de las estrellas de neutrones presentes en el universo, pues cada vez que una estrella de neutrones más masiva se conoce, distintas ecuaciones de estado pueden ser descartadas.

En 2019 H. T. Cromartie *et al.* publicaron un artículo donde lograron medir la masa del púlsar con periodo del orden de milisegundos (MSP, por las siglas de *millisecond pulsar*, en inglés) J0740+6620, reportando con un intervalo de credibilidad de 1σ un valor de $2.14^{+0.10}_{-0.09} M_{\odot}$ [37], convirtiéndose en la estrella de neutrones más masiva conocida hasta entonces. La masa de este púlsar pudo ser medida a través de información recabada por el North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav) y observaciones realizadas con el telescopio Green Bank. En 2022, Roger W. Romani *et al.* publicaron un artículo donde describen que lograron medir la masa del púlsar PSR J0952-0607, reportando un valor de $2.35 \pm 0.17 M_{\odot}$ [38]. Ésta estrella se encuentra en un sistema binario, y los autores lograron

obtener la masa del púlsar a través de mediciones en las curvas de luz y las velocidades radiales de su compañera, ajustando el modelo del sistema binario y obteniendo la masa del púlsar en consecuencia. Esta es la estrella de neutrones más masiva conocida a la fecha, pues los autores reportan que el valor mínimo para el máximo en la masa del púlsar es de $2.19M_{\odot}$ con un intervalo de confianza de 1σ .

En los modelos de estrellas de neutrones que desarrollamos en este trabajo, es posible obtener el valor de la masa máxima que se predice en función de la ecuación de estado utilizada y comparar cada predicción con el valor central de $2.35M_{\odot}$ del púlsar PSR J0952-0607. Debemos enfatizar que los modelos obtenidos son modelos estáticos y esféricamente simétricos mientras que el púlsar PSR J0952-0607 es una estrella de neutrones que posee un campo magnético de gran magnitud y tiene un periodo de rotación de 1.41ms, siendo el segundo más corto conocido hasta ahora [38]. Estas diferencias entre nuestros modelos numéricos y el púlsar PSR J0952-0607 son importantes, pues modelos estáticos de estrellas de neutrones llevan a predecir una masa máxima menor a la que pueden predecir modelos de estrellas de neutrones rotantes o modelos que consideren las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Esto se debe a que dichos modelos consideran fuerzas centrífugas y/o la contribución de los campos magnéticos a la presión interna de las estrellas.

Es importante recalcar que aún para los púlsares con los periodos de rotación más cortos sus velocidades de rotación no se consideran relativistas y suelen modelarse bajo la aproximación de rotaciones lentas de Hartle-Thorne [39]. En [1] modelan estrellas de neutrones estáticas empleando las ecuaciones de TOV y estrellas de neutrones rotantes empleando la aproximación de Hartle-Thorne. Utilizando ecuaciones de estado politrópicas concluyen que la diferencia en la masa máxima predicha entre modelos estáticos y rotantes es de a lo más el 20%. En [40] también se analiza esta diferencia entre modelos estáticos y rotantes cuando la ecuación de estado utilizada está sujeta a un mínimo de restricciones físicas: velocidad del sonido sublumínica, energías mayores o iguales a cero en el interior de la estrella y microestabilidad. Con estas condiciones concluyen que la diferencia en la masa máxima puede llegar a ser hasta del 20 – 25%. Estos valores serán tomados en cuenta al comparar las predicciones en la masa máxima de nuestros modelos estáticos y esféricamente simétricos con el valor central para la masa del púlsar PSR J0952-0607.

Esta propuesta en la evaluación de nuestros modelos numéricos de estrellas compactas es ampliamente utilizada y no se limita al análisis de ecuaciones de estado realistas. Por ejemplo, Arroyo desarrolla en [41] modelos numéricos de estrellas de neutrones esféricamente simétricas utilizando ecuaciones de estado politrópicas y ajustando los parámetros K , Γ , ρ_c para modelar estrellas de neutrones conocidas. En [42], los autores modelan estrellas de neutrones y estrellas de quarks restringiendo los parámetros de las ecuaciones de estado utilizadas de acuerdo a los datos de la onda gravitacional GW170817, producida por un sistema binario que estaba próximo a fusionarse.

Capítulo 5

Modelado de estrellas compactas con el software Aztekas

5.1. Aztekas

Aztekas es un software de código abierto y libre acceso escrito en lenguaje C de forma modular y paralelizado con el protocolo `OpenMP`. Es utilizado para estudiar diversos fenómenos en el contexto de la astrofísica [43, 44]. Específicamente, **Aztekas** permite realizar simulaciones numéricas resolviendo las ecuaciones de la hidrodinámica para un fluido perfecto, tanto en el régimen clásico como en el régimen de la Relatividad General en espacio-tiempos curvos pero fijos. **Aztekas** funciona en 1, 2 y 3D, en coordenadas cartesianas. Este software ha sido desarrollado a lo largo de varios años, principalmente por investigadores del Instituto de Astrofísica de la UNAM, y ha sido utilizado y validado en diversos artículos científicos entre los que podemos citar [45, 46, 47, 48, 49, 50]. **Aztekas** utiliza el método de volúmenes finitos para obtener la discretización de las ecuaciones de la hidrodinámica escritas en forma conservativa:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = S_i, \quad (5.1)$$

donde se distinguen para el sistema en cuestión las cantidades conservadas (Q_i), los distintos flujos (F_i) y los términos de fuente (S_i).

Aztekas se ha utilizado principalmente en el estudio de acreción y eyección de materia, considerando distintas simetrías y escenarios donde el objeto compacto involucrado es un agujero negro. **Aztekas** es un código modularizado y escalable, esto significa que existe la posibilidad de crear nuevos módulos que funcionan utilizando las funciones y variables disponibles en **Aztekas**, e incluso es posible crear nuevas funciones y variables para simular otros fenómenos físicos o modelar otros objetos compactos, como por ejemplo estrellas de neutrones y enanas blancas. Precisamente, la creación de nuevos módulos es el primer paso para estudiar distintos fenómenos sobre otros objetos compactos además de agujeros negros en **Aztekas**. Esto requiere de la validación de dichos módulos y su posterior integración al código fuente de **Aztekas**, lo que permitiría simular la evolución temporal de los objetos modelados.

Con este proceso en mente, uno de los propósitos de esta tesis es contribuir al desarrollo de **Aztekas** cons-

truyendo y validando los módulos necesarios para crear modelos estáticos de objetos compactos, resolviendo numéricamente las ecuaciones de estructura para enanas blancas (3.37, 3.38) y para estrellas de neutrones (4.51) - (4.53) dada una ecuación de estado arbitraria para la materia en su interior.

En este capítulo describimos los algoritmos y métodos utilizados para emprender esta tarea, así como una explicación sobre su implementación en *Aztekas* y la salida de datos que producen nuestros módulos.

5.2. Integración numérica de las ecuaciones de estructura

Tanto las ecuaciones de estructura para enanas blancas como para estrellas de neutrones forman un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado, de primer orden, que es integrado desde el centro de la estrella $r_c = 0$, hasta un límite arbitrario $r = r_{\text{final}} > r_c$. En ambos casos se supone conocida una ecuación de estado para el interior de la estrella. Estos sistemas de ecuaciones diferenciales pueden ser resueltos discretizando la coordenada espacial r formando una malla numérica. Del intervalo a integrar $[r_c, r_{\text{final}}]$ se escoge una partición¹ $\{r_c, \dots, r_i, \dots, r_{\text{final}}\}$ que forma la malla. Se acostumbra que la partición escogida sea regular, es decir $|r_{i+1} - r_i| = h \forall i$, con h una constante en principio arbitraria. Discretizado el espacio, puede resolverse el sistema de ecuaciones utilizando el siguiente algoritmo:

1. Fijamos las condiciones iniciales $P(r_c) = P_c$, $m(r_c) = 0$ tanto para enanas blancas como estrellas de neutrones, y además $\varphi(r_c) = \varphi_c$ para estrellas de neutrones únicamente.
2. Calculamos los valores de P , m y φ en $r = r_i$, el siguiente punto en la partición escogida.
3. Repetimos el segundo paso hasta llegar al último punto en la partición $r = r_{\text{final}}$.

φ_c es un número real positivo arbitrario, de tal forma que posteriormente a la integración, la función métrica $\varphi(r)$ puede ser reescalada. La forma como se calculan los valores para P , m y φ en cada punto de la partición dependen del método numérico escogido. En *Aztekas* se encuentran ya definidas variables y funciones para poder implementar métodos tipo Runge-Kutta de orden 2 y 3, que en su caso son utilizados para integrar en el tiempo. Durante el desarrollo de nuestros módulos hemos generalizado estas funciones para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales arbitrario utilizando el método de Runge Kutta de orden 2, y lo hemos empleado para integrar nuestras ecuaciones de estructura.

5.2.1. El método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta de orden 2 es un método numérico que calcula la solución del sistema de ecuaciones diferenciales en el punto i -ésimo de la malla a partir del valor que tienen dichas soluciones en el punto inmediato anterior. De manera general, sea nuestro sistema de ecuaciones diferenciales a resolver

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad (5.2)$$

¹Es común encontrar en la literatura que la numeración de los puntos que forman la partición comienza en 0. Sin embargo, a lo largo de este trabajo hemos identificado con el subíndice 0 al radio dentro de la estrella de neutrones que identifica la zona de transición entre núcleo y corteza de la estrella (4.19). Por esta razón, el subíndice que representa el primer punto en la malla y donde el radio de la estrella es igual a cero, es c , relativo a la palabra *centro* y no 0 .

con el vector solución $\vec{y} = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ y $\vec{f}(x, \vec{y})$ una función que representa el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. Suponiendo que existe una partición regular $\{x_c, \dots, x_{\text{final}}\}$ tal que $|x_{i+1} - x_i| = h$, entonces el valor de \vec{y} en el punto x_{i+1} está dado por la ecuación

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{2} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2), \quad (5.3)$$

donde

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(x_i, \vec{y}_i), \quad (5.4)$$

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}(x_{i+1}, \vec{y}_i + \vec{k}_1). \quad (5.5)$$

Este es el método que utilizamos para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de estructura para las enanas blancas y las estrellas de neutrones, con la coordenada $x = r$. En el caso de las enanas blancas el vector solución es $\vec{y} = (P(r), m(r))$ y la función $\vec{f}(r, \vec{y})$ es el lado derecho de las ecuaciones (3.37, 3.38); mientras que para las estrellas de neutrones el vector solución es $\vec{y} = (m(r), \varphi(r), P(r))$ con $\vec{f}(r, \vec{y})$ el lado derecho de las ecuaciones (4.51) - (4.53).

5.2.2. Consideraciones generales en las ecuaciones de estructura

Antes de continuar debemos tener en cuenta dos consideraciones en el algoritmo para resolver nuestros sistemas de ecuaciones diferenciales. La primera de ellas es que el lado derecho de (3.37), (4.52) y (4.53) diverge en $r = 0$. Esto supone una complicación a la hora de calcular \vec{y}_1 tanto para enanas blancas como para estrellas de neutrones. Esta divergencia se evita si consideramos las expansiones en Series de Taylor

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{4\pi}{3} \rho G \rho_c r \quad \text{para enanas blancas,} \quad (5.6)$$

$$\frac{dP}{dr} \approx -(\varepsilon + P) \frac{4\pi}{3c^2} \frac{3Pr + \varepsilon_c r}{\frac{c^2}{G} - \frac{8\pi}{3c^2} \varepsilon_c r^2} \quad \text{para estrellas de neutrones,} \quad (5.7)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} \approx \frac{4\pi}{3c^2} \frac{3Pr + \varepsilon_c r}{\frac{c^2}{G} - \frac{8\pi}{3c^2} \varepsilon_c r^2}. \quad (5.8)$$

Las aproximaciones se utilizan para calcular \vec{y}_1 únicamente. Para los siguientes puntos abandonamos las expansiones en Series de Taylor y regresamos a nuestros sistemas de ecuaciones diferenciales originales.

La segunda consideración es que si r_{final} es lo suficientemente grande, entonces el radio R de la estrella estará dentro del intervalo $[r_c, r_{\text{final}}]$. Esto implica que para todo $r_i > R$ los cálculos de $\vec{f}(r, \vec{y})$ deben ser realizados con $P = 0$, $\rho = 0$ y $\varepsilon = 0$ en concordancia con lo expuesto en los capítulos anteriores.

Por la naturaleza de las ecuaciones (3.37) y (4.53), la función $P(r)$ será monótonamente decreciente y en cierto punto de la malla, el valor de la presión pasará de ser un valor positivo a ser un valor negativo. Esto indica que hemos pasado por la raíz de la función $P(r)$ y por lo tanto hemos superado el valor del radio estelar R . Cuando esto ocurra, el primer valor negativo de P debe ser sustituido por 0 y continuar la iteración sobre la malla considerando que estamos fuera de la estrella.

Además, el reescalamiento en la función de la métrica $\varphi(r)$ se realiza escogiendo una constante tal que satisfaga $e^{2\varphi(R)} = 1 - \frac{2GM_T}{c^2 R}$, en concordancia a lo esperado con la métrica de Schwarzschild [10].

En resumen, para resolver nuestros sistemas de ecuaciones diferenciales comenzamos con los supuestos de que una densidad de masa central ρ_c es conocida y una ecuación de estado para la materia está dada. Luego podemos conocer los valores P_c y ε_c , e imponemos las condiciones iniciales $m(r_c) = 0$ y $\varphi(r_c) = \varphi_c$. Posteriormente resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales con nuestro algoritmo integrador, utilizando las aproximaciones por series de Taylor únicamente en el primer punto. Continuamos iterando sobre la malla $\{r_c, \dots, r_i, \dots, r_f\}$ hasta que $P(r_i) < 0$ para algún r_i . Cuando $P(r_i) < 0$, diremos que el radio estelar de nuestro modelo será $R = r_{i-1}$, es decir, el último valor donde P fue mayor a cero. Para los puntos subsecuentes, se resolverá el sistema de ecuaciones diferenciales en el vacío. En la Figura 5.1 se muestra un diagrama de flujo del proceso implementado en **Aztekas** para construir modelos numéricos de estrellas de neutrones (NS) y enanas blancas (WD).

5.3. La estructura e implementación de módulos en Aztekas

En la Figura 5.2 se muestra un diagrama en árbol de la estructura de **Aztekas**. Cuenta con tres carpetas principales llamadas **Graphics**, **SIMULATIONS** y **Src**. Durante el desarrollo de los módulos para construir modelos numéricos de enanas blancas y estrellas de neutrones fueron de especial relevancia las últimas dos carpetas. Es en la carpeta **SIMULATIONS** es donde se pueden desarrollar los módulos necesarios para realizar simulaciones hidrodinámicas. Esta carpeta se divide en dos sub-carpetas para simulaciones hidrodinámicas en el régimen newtoniano: **HD** y en el régimen relativista: **RHD**. Por otro lado, en la carpeta **Src** se encuentran los archivos donde se codifican los métodos integradores, las variables disponibles, un **Makefile** para la compilación del programa, los *headers* necesarios para la declaración de variables, entre otras herramientas.

El módulo desarrollado para resolver las ecuaciones de estructura de enanas blancas se encuentra en la carpeta **WD**, que a su vez se encuentra dentro de **HD** porque hemos utilizado las ecuaciones de estructura newtonianas. Por otro lado, el módulo desarrollado para resolver las ecuaciones de estructura de estrellas de neutrones se encuentra en la carpeta **TOV** que a su vez se encuentra dentro de **RHD**. Además en la ruta **Src/integration/ODE/** se incluyó el algoritmo desarrollado que resuelve los sistemas de ecuaciones diferenciales tanto para enanas blancas como para estrellas de neutrones basado en el archivo **Src/integration/runge-kutta.c**. La estructura de todos los módulos dentro de **SIMULATIONS** debe ser similar, pues esto permite un entendimiento general de cada uno de los módulos desarrollados así como la posibilidad de escalarlos. Para nuestros modelos estáticos y esféricamente simétricos de estrellas de neutrones y enanas blancas fue necesario utilizar los siguientes tipos de archivos:

- Archivos **.c**: son archivos de texto donde se guarda todo el código en lenguaje C desarrollado para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales. En **Aztekas** existen archivos **.c** para crear la malla e imponer las condiciones iniciales que pueden ser modificados para ajustar la solución numérica obtenida. Adicionalmente se crearon archivos **.c** para codificar las ecuaciones de estado, los sistemas de ecuaciones diferenciales a resolver e implementar el método Runge-Kutta 2 para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. En **buildModel.c** se llaman las funciones necesarias para realizar la integración del sistema de ecuaciones de acuerdo con el diagrama de flujo mostrado en la Figura 5.1.
- Archivos **.h**: también conocidos como *headers*, son archivos de texto utilizados para declarar funciones, variables globales, macros, llamar bibliotecas y todo lo relacionado con el preprocesamiento para la compilación del programa. En **Aztekas** existen *headers* en cada uno de los módulos de simulaciones

Construcción de modelos numéricos de NS yWD

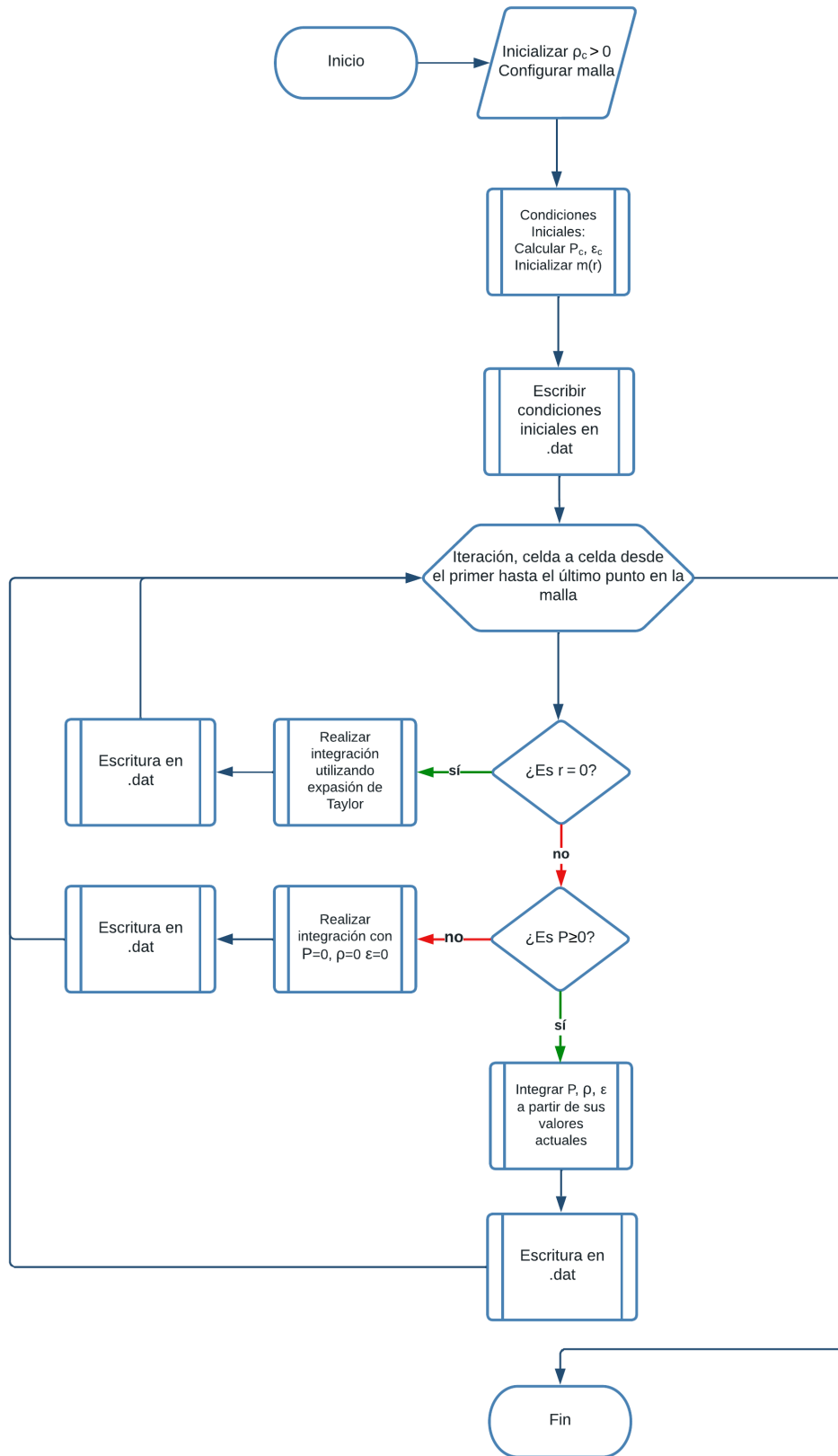


Figura 5.1: Diagrama de flujo del algoritmo para la integración numérica y salida de datos de las ecuaciones de estructura para estrellas de neutrones (NS) y enanas blancas (WD).

y también en la carpeta `Src`. En los módulos los *headers* se identifican como `user_param.h` y son utilizados para declarar las variables, macros y funciones específicas del módulo y de la simulación y que son adicionales a las implementaciones comunes a todos los módulos en la carpeta `Src`.

- Archivos `Makefile`: son archivos de texto que indican las rutas y dependencias entre los diferentes archivos `.c` y `.h`, así como las reglas de compilación necesarias para obtener un archivo ejecutable. Cada módulo en `Aztekas` tiene un archivo `Makefile` local donde se escriben las rutas de los archivos `.c` y `.h` que fueron creados dentro del módulo, así como las reglas de compilación aplicables. Este `Makefile` local llama a su vez al `Makefile` global de la carpeta `Src` para terminar la compilación de `Aztekas`
- Archivo `.param`: es un archivo de texto que contiene parámetros globales para la simulación, los cuales se pasan al objeto resultante de la compilación de `Aztekas` para iniciar la ejecución del programa. Gracias a este archivo de parámetros se inicializan distintas variables. En este lugar se configuran los valores para los parámetros de la malla, la densidad central de la estrella, la ruta al directorio y el nombre del archivo donde se guarda el resultado de la simulación, entre otros.

En resumen, hemos construido dos módulos nuevos para `Aztekas`, donde hemos creado archivos para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de estructura de enanas blancas y estrellas de neutrones: `ode.c`, las ecuaciones de estado: `eos.c`, el algoritmo de integración: `integration.c` y el algoritmo que sigue las reglas establecidas en el diagrama de flujo 5.1: `buildModel.c`. Los archivos restantes son comunes en `Aztekas` y fueron estudiados para ser modificados de acuerdo a las necesidades de los módulos creados respetando la estructura general de `Aztekas`.

Dada una densidad de masa central, generamos una malla espacial y es la que utilizamos como coordenada radial, resolviendo el problema en 1D. Como resultado se obtiene un archivo de salida de datos `.dat`, donde se escribe cada punto de la malla r_i y las soluciones correspondientes $P(r_i)$, $m(r_i)$ y $\rho(r_i)$. El tamaño y la cantidad de puntos que se tenga en esta salida depende directamente de la configuración de la malla. Esto es, simulamos objetos esféricamente simétricos apoyados de una malla cartesiana 1D.

A lo largo de esta tesis hemos hablado sobre la apertura de los módulos desarrollados para recibir cualquier ecuación de estado que satisfaga las propiedades de la sección 2.3 o la implementación de los polítrópos generalizados a trozos. Esta propiedad se consigue a través de la existencia del archivo `eos.c`, donde se deben codificar dos funciones. La primera debe regresar el valor de P dado ρ y la segunda debe calcular el valor de ρ dado P . Los módulos desarrollados son agnósticos con respecto al cálculo de P y ρ , y continuarán punto a punto con el proceso de integración una vez pasados estos valores. Para las enanas blancas codificamos la ecuación de estado politrópica (2.18), admitiendo diferentes valores para K y Γ . Para este caso es sencillo codificar el cálculo de $P(\rho)$ y $\rho(P)$, pues

$$P(\rho) = K\rho^\Gamma, \quad \rho(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{1/\Gamma}.$$

Por otro lado, para las estrellas de neutrones se codificaron los polítrópos generalizados a trozos (4.14, 4.15) con sus respectivas funciones inversas, admitiendo cada una de las combinaciones de parámetros mostradas en las tablas 4.2 y 4.3.

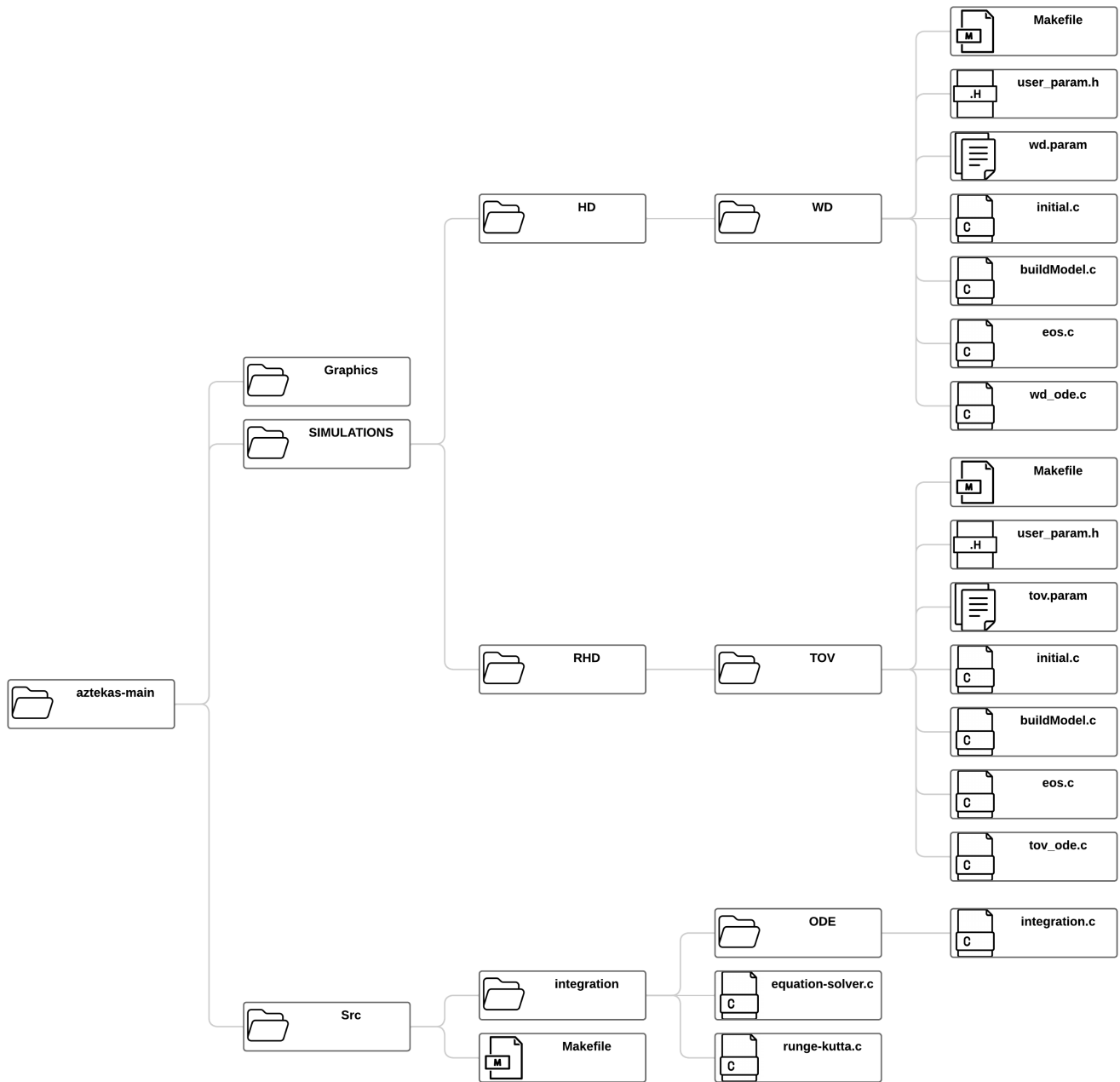


Figura 5.2: Diagrama en árbol de las carpetas en **Aztekas**. En detalle se muestran los módulos desarrollados para construir modelos numéricos de estrellas de neutrones (carpeta TOV) y enanas blancas (carpeta WD), así como la implementación del algoritmo para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales (carpeta ODE).

5.4. Refinamiento en el valor del radio estelar

Frecuentemente se busca mejorar la precisión en el cálculo de las soluciones cuando estamos cerca del radio estelar, pues esto significa obtener un valor más preciso tanto para la masa total de la estrella como para el radio estelar. Existen diversas formas de mejorar la precisión de las soluciones numéricas. Una de ellas utiliza los llamados métodos de Runge-Kutta adaptativos, donde el tamaño de paso es acortado para mejorar la precisión únicamente en un intervalo específico del dominio a resolver. Por ejemplo, podemos emplear un algoritmo de bisección en el cálculo de la solución para la presión interna $P(r)$ para refinar la malla numérica cuando estemos cerca del borde de la estrella, esto es: si la presión es positiva, significa que seguimos en el interior de la estrella, y si la presión es negativa, significa que estamos fuera de la estrella. En vez de continuar la integración haciendo $P = 0$, podemos regresar al último valor conocido donde la presión es positiva y reducir a la mitad el tamaño de nuestro paso de integración. Este refinamiento puede hacerse cuantas veces sea necesario hasta que la incertidumbre en el radio estelar quede dentro de una pequeña tolerancia numérica preestablecida. De esta forma se obtiene un valor más cercano a cero para la presión interna cerca de la superficie de la estrella, y un valor para masa estelar más preciso en comparación a los valores obtenidos con la malla original. Este algoritmo de bisección fue implementado en nuestros primeros desarrollos de los módulos para estrellas de neutrones y enanas blancas, los cuales ejecutamos en un entorno de prueba, aislado y ajeno a *Aztekas*. Sin embargo, hemos decidido no implementar este algoritmo en *Aztekas* para respetar la estructura global de su malla original, pues si intentamos mejorar la precisión de las soluciones calculadas en un intervalo específico, como por ejemplo en el borde la estrella, estaríamos forzados a refinar la malla completa y no sólo el intervalo de interés.

Existe un método alternativo para mejorar la precisión en las soluciones, conocido como *método de la entalpía* [51]. La entalpía newtoniana de un sistema con energía interna U , volumen V y presión P se define como

$$H = U + PV. \quad (5.9)$$

En el contexto de la relatividad general, es necesario tomar en cuenta la energía-masa en reposo del sistema en nuestra definición de la entalpía. Por esta razón, cuando se toma en cuenta la energía-masa en reposo del sistema, se le suele llamar entalpía relativista para poder distinguirla de su versión newtoniana. La entalpía por definición es una cantidad extensiva. Se suele trabajar con la entalpía específica, que es una cantidad intensiva del sistema. Definimos la entalpía específica relativista del sistema como

$$h = c^2 + \epsilon + \frac{P}{\rho}, \quad (5.10)$$

donde ϵ es la energía específica del sistema. De esta forma, $\rho h = \rho c^2 + \epsilon + P$, y ahora es claro que para calcular la entalpía estamos tomando en cuenta la masa de nuestro sistema, su energía interna, así como su presión interna, en concordancia con lo expuesto hasta ahora. Por definición la entalpía específica relativista decrece conforme aumenta la coordenada radial y es igual a c^2 cuando llegamos al borde de la estrella. Si consideramos ahora

$$\ln\left(\frac{h}{c^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{P}{\rho c^2}\right), \quad (5.11)$$

esta función² tiene un valor determinado $\ln(h_c/c^2) = \ln(1 + \epsilon_c/c^2 + P_c/\rho_c c^2)$ en el centro de la estrella, también decrece conforme aumenta la coordenada radial y es igual 0 en el borde de la estrella. Este comportamiento puede ser explotado en la configuración de la malla y por ende en la precisión de las soluciones numéricamente obtenidas. En el *método de la entalpía* se propone como variable independiente al logaritmo natural de la entalpía específica, relegando a la coordenada radial como una variable dependiente de h con su propia ecuación diferencial. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver queda en función de la entalpía más una ecuación adicional para la coordenada radial. La principal ventaja en este método yace en la configuración *a priori* del intervalo de integración y de la malla numérica. Luego el sistema puede ser resuelto utilizando métodos numéricos como el de Runge-Kutta. En comparación, al integrar las ecuaciones de estructura teniendo como variable de integración a la coordenada radial, el valor del radio estelar es desconocido hasta que el sistema es resuelto, lo que lleva a proponer intervalos de integración de la forma $[r_c = 0, r_{\text{final}}]$ donde r_{final} puede ser menor o mayor que el radio estelar. Mientras que el método de la entalpía propone una variable de integración donde el intervalo siempre es conocido, $[\ln(h_c/c^2), 0]$, simplificando la malla numérica y mejorando la precisión en el radio y masa de los modelos estelares sin necesidad de recurrir a métodos de Runge-Kutta adaptativos [51]. Este método no fue implementado en *Aztekas*, pero es una alternativa relevante a los métodos Runge-Kutta adaptativos y una oportunidad de mejora en nuestro trabajo.

²La división entre c^2 es innecesaria si trabajamos con unidades geometrizadas.

Capítulo 6

Resultados

6.1. Validación del Integrador RK2

De resolver las ecuaciones de estructura para enanas blancas dado un valor para la densidad de masa central ρ_c , encontramos un modelo estelar con una función de masa $m(r)$ y una función de la presión interna $P(r)$. Para probar la validez de las soluciones encontradas con integradores numéricos cuando la solución analítica no se conoce, a menudo se realizan pruebas de autoconvergencia, donde se comprueba que la diferencia entre soluciones obtenidas con mallas de resoluciones h , $h/2$ y $h/4$, disminuye de acuerdo con el orden de truncamiento del integrador numérico.

Sea f_h la solución numérica obtenida con una malla de resolución h , $f_{h/2}$ la solución numérica obtenida con una malla de resolución $h/2$, y $f_{h/4}$ la solución numérica obtenida con una malla de resolución $h/4$. Los errores relativos entre parejas sucesivas de soluciones son

$$\text{err}_1 := |f_h - f_{h/2}|, \quad \text{err}_2 := |f_{h/2} - f_{h/4}|. \quad (6.1)$$

Si la solución f es autoconvergente, entonces el cociente

$$\frac{\text{err}_1}{\text{err}_2} > 1, \quad (6.2)$$

o equivalentemente

$$\log_2 \left(\frac{\text{err}_1}{\text{err}_2} \right) > 0. \quad (6.3)$$

Para el caso del método Runge-Kutta 2 (abreviado como RK2) la solución numérica se calcula con una precisión de hasta h^2 , por lo que en las pruebas de convergencia se espera que $\log_2(\text{err}_1/\text{err}_2) = 2$, obteniendo así su nombre. En la figura 6.1 se muestra el cálculo de $\log_2(\text{err}_1/\text{err}_2)$ para la función de masa obtenida de resolver las ecuaciones de estructura para las enanas blancas. Se utilizaron mallas numéricas del intervalo $[0\text{km}, 16000\text{km}]$ con diferentes resoluciones. La solución de menor resolución fue calculada en una malla de 250 puntos; la solución de resolución intermedia corresponde a una malla de 500 puntos, y la de mayor resolución corresponde a una malla de 1000 puntos. A partir de estas tres soluciones calculamos los errores relativos err_1 y err_2 .

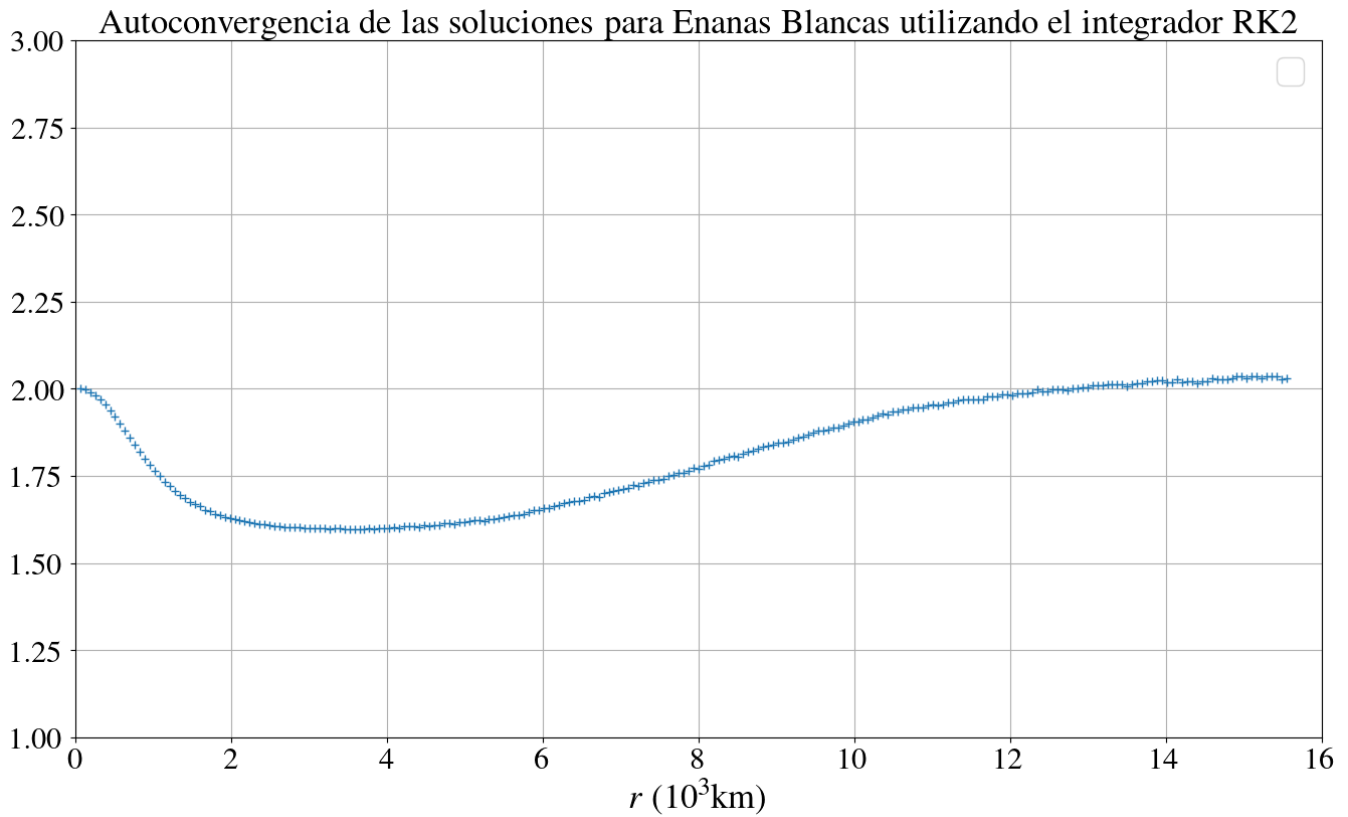


Figura 6.1: Factor de autoconvergencia (6.3) de la función de masa para modelos enanas blancas, utilizando un integrador RK2. Se utilizaron mallas con resoluciones de 250, 500 y 1000 puntos.

Podemos notar en la Figura 6.1 que el factor de autoconvergencia de la solución está en el intervalo (~ 1.6 , ~ 2.1), lo cual es consistente con la expectativa.

6.2. Modelos de enanas blancas

Como hemos mencionado anteriormente, el objetivo de los módulos desarrollados en **Aztekas** es obtener modelos de enanas blancas y estrellas de neutrones estáticos y esféricamente simétricos. En el caso de las enanas blancas, el módulo desarrollado es capaz de construir modelos con distintos valores para la densidad central de masa y utilizando diferentes ecuaciones de estado para la materia en el interior. Para ilustrar esta capacidad, en las Figuras 6.2 y 6.3 se muestran las soluciones para la función de masa y la presión interna utilizando distintos valores para la densidad central de masa y distintas ecuaciones de estado politrópicas.

En la Figura 6.2 podemos observar el suave crecimiento de la función de masa $m(r)$, la cual continúa creciendo hasta que la densidad de masa ρ es igual a cero en la frontera de la estrella. A partir de este punto, la función de masa se torna a un valor constante: la masa estelar.

También queda en evidencia cómo al escoger un valor para la densidad de masa más alto mientras modificamos el índice politrópico, la masa estelar del modelo obtenido es más grande, tendiendo a un valor aproximado de $1.4M_{\odot}$ es decir, al límite de Chandrasekhar.

Para modelos de enanas blancas a densidades bajas, descritos con un índice adiabático $\gamma = 5/3$ se obtienen modelos con masas estelares bajas y radio estelares grandes. Para los modelos con densidades de masa

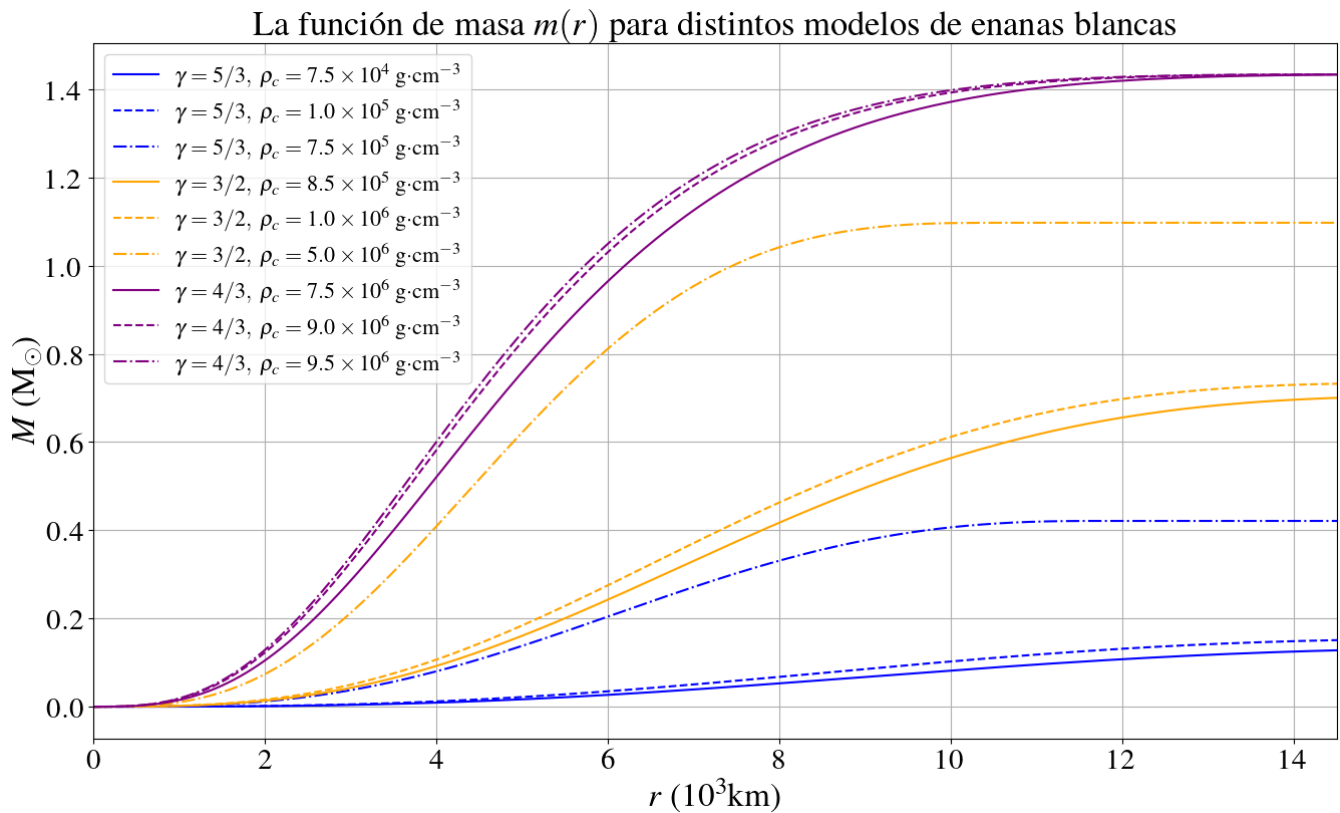


Figura 6.2: Función de masa $m(r)$ para nueve modelos de enanas blancas estáticos y esféricamente simétricos utilizando ecuaciones de estado politrópicas. La elección del índice politrópico para cada modelo se hizo en concordancia con la densidad de masa central utilizada para construir el modelo: $\gamma = 5/3$ para densidades bajas, $\gamma = 3/2$ para densidades intermedias y $\gamma = 4/3$ para densidades altas, de acuerdo a lo expuesto en el capítulo 3.

altas y descritos con un índice adiabático $\gamma = 4/3$ en la gráfica se aprecia cómo la masa estelar tiende a un valor cercano a $1.4M_{\odot}$ y los radios estelares son menores comparados con los modelos a densidades bajas, en concordancia a lo descrito en el capítulo 3.

En la Figura 6.3 graficamos el comportamiento de la presión interna normalizada entre la presión central para cada uno de los nueve modelos de enanas blancas obtenidos. En la figura se muestra cómo decrece la presión interna de la estrella en función de la coordenada radial. Podemos apreciar cómo para modelos de enanas blancas a densidades bajas, la presión interna decrece lentamente y los modelos tienen radios estelares más grandes, mientras que para los modelos con densidades de masa centrales mucho más altas, la presión interna decrece rápidamente y los radios estelares se acortan notablemente. La suavidad en las funciones con respecto a la coordenada radial también puede apreciarse.

Una prueba más robusta de la capacidad del módulo implementado para las enanas blancas de obtener modelos estelares cuya función de masa tienda al límite de Chandrasekhar puede ser obtenida si calculamos la masa estelar $M = m(R)$ para una secuencia de modelos en el límite de densidades de masa de $1 \times 10^7 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a distintas resoluciones. Esto pone a prueba los dos parámetros más importantes de nuestro módulo a la hora de construir modelos de enanas blancas:

- La resolución de la malla, para mostrar que el integrador calcula soluciones convergentes
- La densidad de masa central, para mostrar que la masa estelar tiende a un límite de masa máxima

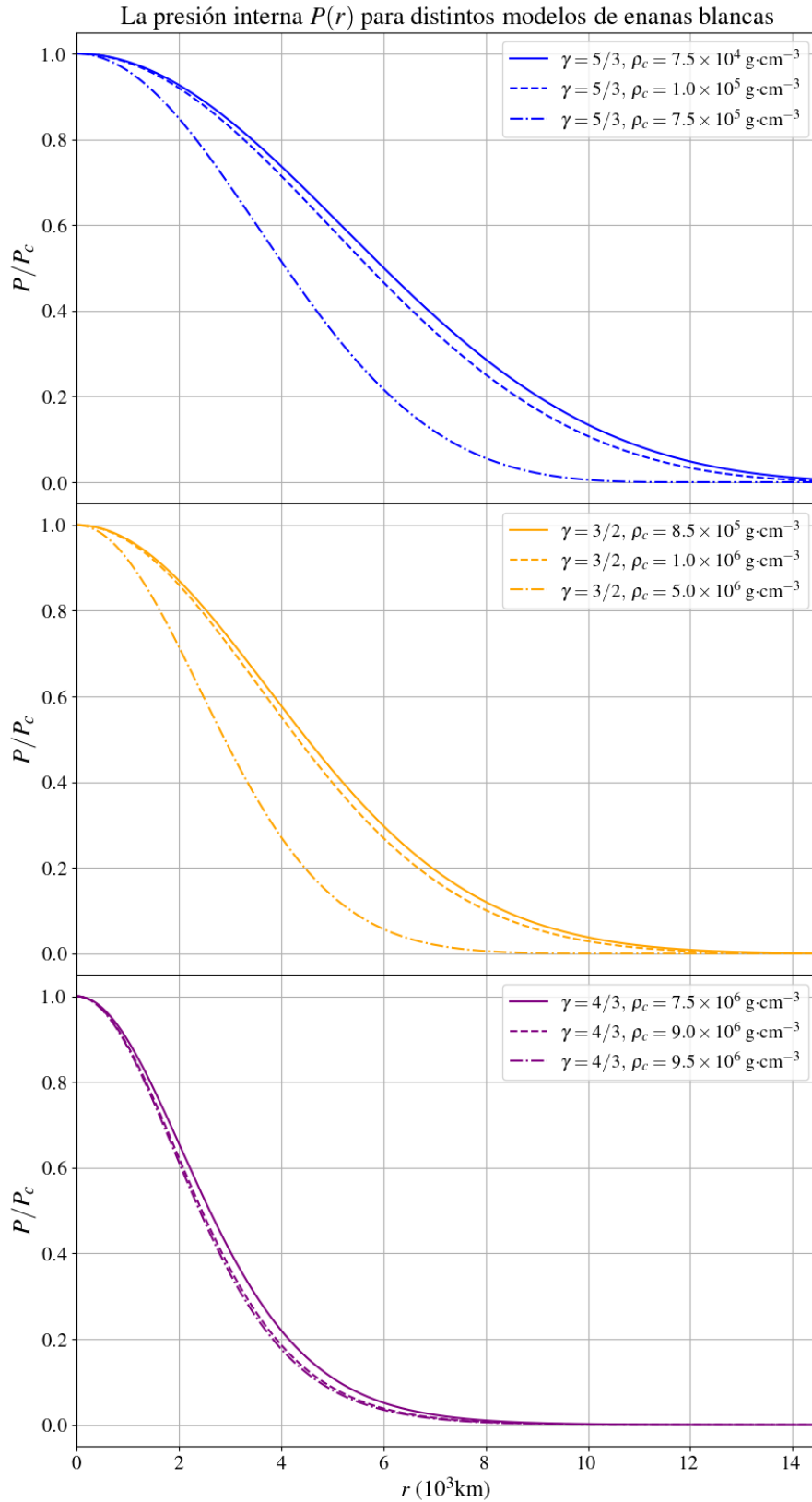


Figura 6.3: Presión interna entre la presión central $P(r)/P_c$ para los mismos nueve modelos de enanas blancas presentados en la figura 6.2.

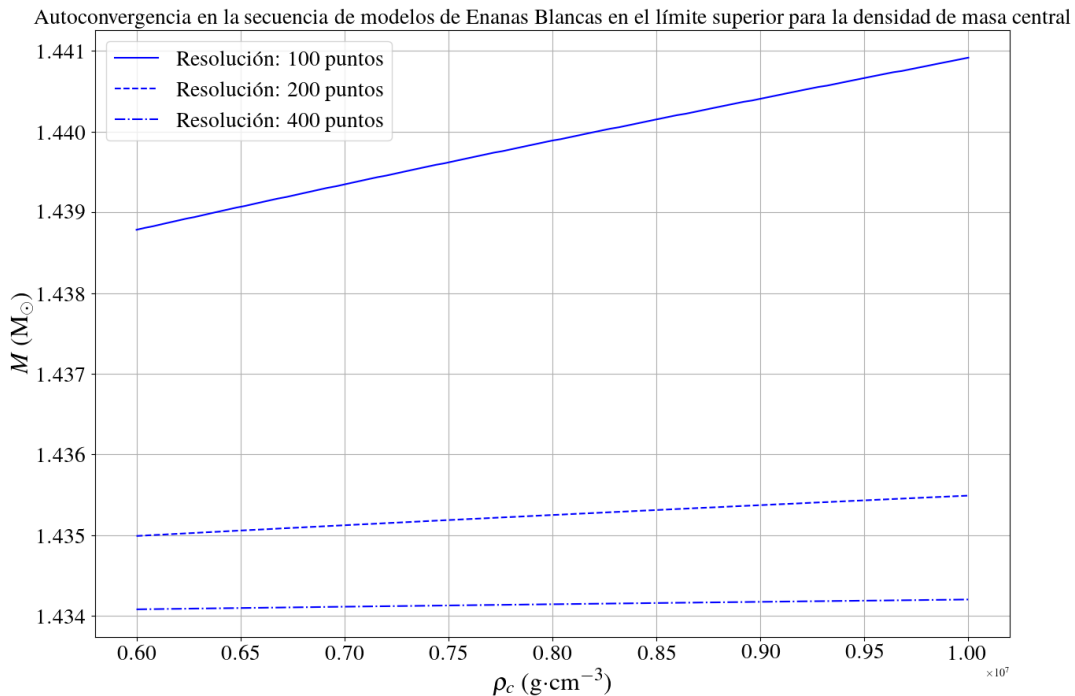


Figura 6.4: Secuencia de modelos de enanas blancas en el límite de $1 \times 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ calculados con mallas numéricas a distintas resoluciones. En la figura podemos observar cómo la diferencia en la masa estelar se reduce al aumentar la resolución de las mallas y con ello la precisión en el valor de la masa, el cual converge al límite de Chandrasekhar.

Esta prueba se muestra en la Figura 6.4, donde presentamos secuencias de modelos de enanas blancas en el rango de densidades de masa de $[6 \times 10^6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}, 1 \times 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}]$ utilizando mallas con una resolución de 100, 200 y 400 puntos para cada secuencia. Del resultado de este experimento numérico inferimos que el valor de la masa estelar es convergente conforme la resolución y la densidad de masa aumentan, pues vemos que para el caso de la secuencia obtenida con una resolución de 100 puntos, el rango en la masa estelar de los modelos va de $[1.438M_\odot, 1.441M_\odot]$, y conforme la malla se refina y llegamos a 400 puntos, el rango de masa se acota a $[1.434M_\odot, 1.435M_\odot]$.

Dada cierta ecuación de estado, podemos obtener distintos modelos de enanas blancas o estrellas de neutrones variando secuencialmente la densidad de masa central utilizada para calcular dichos modelos. De estas variaciones se obtienen valores de radios y masas estelares en función de la densidad de masa central exclusivamente. Estas secuencias se utilizan para realizar gráficas (R, M) tanto para enanas blancas como para estrellas de neutrones y explorar el comportamiento de los radios y masas estelares para cierta ecuación de estado y en cierto rango de densidades. En particular, estas gráficas nos son de utilidad si las secuencias son calculadas para un rango de densidades lo suficientemente amplio, pues nos permite estudiar los valores de la masa y radio estelares a densidades bajas y cómo la masa estelar tiende a una masa máxima y el radio estelar disminuye conforme la densidad aumenta. Estas secuencias son preferidas a la Figura 6.2 cuando es necesario resumir el comportamiento de las cantidades físicas medibles de las estrellas compactas bajo cierta ecuación de estado, pues en lugar de mostrar cómo cambia la función de masa en todo el intervalo $[0, R]$ para cada uno de los modelos obtenidos, se muestra una sola curva parametrizada por la densidad de masa central mostrando únicamente los valores de las masas y radios estelares.

En la Figura 6.5 se muestran las secuencias de radio y masas estelares de modelos construidos utilizando

las ecuaciones de estructura newtonianas (3.37)-(3.38) y las ecuaciones de estado politrópicas (3.24)-(3.25). Las ecuaciones de estado politrópicas (3.24)-(3.25) fueron obtenidas de aproximar la ecuación de estado original obtenida en el capítulo 3 a los límites de densidades de masa central bajas ($\sim 10^4 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) y altas ($\sim 10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) respectivamente. Estas aproximaciones en la ecuación de estado para las enanas blancas nos permiten modelar enanas blancas ligeras, con densidades bajas y un índice adiabático que tiende a $5/3$ y también enanas blancas masivas, con densidades en su interior mucho más altas y un índice adiabático que tiende a $4/3$. Fuera de estos límites aplicables, estas ecuaciones de estado politrópicas no modelan correctamente a las enanas blancas y las secuencias de masa y radio estelares muestran comportamientos incongruentes. Como muestra de esta afirmación, en la Figura 6.5 se graficaron secuencias de modelos estelares donde se utilizó como ecuación de estado la ecuación (3.24). En la Figura 6.5 a, se observa cómo los modelos obtenidos aumentan su masa estelar arbitrariamente mientras se disminuye su radio estelar. Este comportamiento dista de la realidad, donde la masa estelar de nuestros modelos de enanas blancas no debe sobrepasar el límite de Chandrasekhar.

Para poder explicar este comportamiento en nuestros modelos estelares con exponente politrópico $5/3$, tomaremos el resultado de [2] donde se muestra que el radio y masa estelar de las enanas blancas se puede parametrizar en el límite de bajas densidades utilizando una ecuación de estado politrópica con exponente $5/3$, quedando en función de la densidad de masa central ρ_c y de la masa molecular promedio μ :

$$M = 0.496028 \left(\frac{2}{\mu}\right)^{5/2} \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}}\right)^{1/2} M_{\odot}, \quad (6.4)$$

$$R = 1.12160 \times 10^4 \left(\frac{2}{\mu}\right)^{5/6} \left(\frac{10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}}{\rho_c}\right)^{1/6} \text{ km}. \quad (6.5)$$

Podemos pasar de una expresión paramétrica para el radio y masa estelares a una función $M(R)$ y notar que

$$M \propto R^{-1/3}. \quad (6.6)$$

Vemos que utilizar como exponente politrópico $5/3$ lleva a modelos donde se reduce el radio estelar conforme la densidad de masa central aumenta mientras el valor de la masa estelar también aumenta. Este comportamiento es típico en enanas blancas de baja densidad, que poseen una masa ligera, y se vuelven más masivas conforme su densidad de masa central aumenta. No obstante, la masa estelar para estos modelos no está acotada y no es posible reproducir el comportamiento de las enanas blancas en el límite a altas densidades, donde la masa estelar tiende a la masa de Chandrasekhar. Esto significa que sería un error intentar modelar enanas blancas con densidades centrales altas ($\sim 10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) con un exponente politrópico de $5/3$, en consistencia con el comportamiento del índice adiabático de la materia en el interior de las enanas blancas, y como mostramos en la Figura 3.6 una mejor aproximación es utilizar el valor de $4/3$.

En [2] también se muestra que es posible obtener una parametrización en el límite de altas densidades

utilizando ecuación de estado politrópica con exponente $4/3$, consiguiendo las relaciones

$$M = 1.45607 \left(\frac{2}{\mu} \right)^2 M_{\odot}, \quad (6.7)$$

$$R = 3.34598 \times 10^4 \left(\frac{2}{\mu} \right)^{2/3} \left(\frac{10^6 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}}{\rho_c} \right)^{1/3} \text{km}. \quad (6.8)$$

En este caso la masa estelar deja de estar en función de la densidad de masa central del modelo y es un valor constante para todos los modelos con la misma masa molecular promedio. Este comportamiento en los modelos estelares también está graficado en Figura 6.5 b, donde una línea recta horizontal muestra cómo la masa estelar de los modelos estelares es constante sin importar el valor del radio estelar. En este caso, intentar modelar enanas blancas a densidades bajas lleva a inconsistencias en el tamaño y masa que tendrían esos modelos, obteniéndose modelos más grandes y masivos que en la realidad. Finalmente en la Figura 6.5 c también mostramos una secuencia de modelos estelares donde utilizamos los polítopos $5/3$ o $4/3$ para obtener estos modelos dependiendo de la densidad central utilizada. En esta gráfica a pesar de obtener una continuidad en los valores de radio y masa estelar, se muestra que la curva no es derivable en el punto donde se encuentran los modelos con polítopo $5/3$ y los modelos con polítopo $4/3$ y es consecuencia de intentar modelar a las estrellas que se encuentran en un régimen de densidades intermedio con cualquiera de estos dos exponentes politrópicos.

6.3. Modelos de estrellas de neutrones

Para el caso de las estrellas de neutrones, gracias al formalismo de los polítopos generalizados a trozos dispusimos de un conjunto de veinticinco ecuaciones de estado realistas para obtener modelos de estrellas de neutrones estáticas y esféricamente simétricas. De acuerdo con O'Boyle *et al.* en [11], este conjunto de veinticinco ecuaciones de estado son aplicables en un rango de densidades de masa de $10^{14} - 10^{15} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ de manera que calculamos secuencias de modelos de estrellas de neutrones en este rango de densidades para cada una de las 25 ecuaciones de estado. El resultado de estos cálculos se muestra en la Figura 6.6 donde se grafican las masas y radios estelares, y se comparan en el valor central de $2.35M_{\odot}$ del púlsar PSR J0952-0607, la estrella de neutrones más masiva conocida hasta ahora [38].

Para poder realizar la comparación entre las distintas ecuaciones de estado y la masa del púlsar PSR J0952-0607, las secuencias de estrellas de neutrones comienzan en un régimen de densidades de masa pequeño, del orden de $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, hasta un régimen de densidades extremadamente alto, del orden de $10^{16} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Este arreglo permitió alcanzar la masa estelar máxima que predice cada ecuación de estado con su densidad de masa central utilizada, y de esta forma nos aseguramos de que al mostrar cada secuencia en la Figura 6.6 el máximo ilustrado es la masa estelar máxima predicha en la secuencia.

En la Tabla 6.1 se muestra el valor de la masa máxima que predice cada ecuación de estado, además del radio estelar y la densidad de masa central utilizada para obtener este valor. Para todas las ecuaciones de estado, la masa máxima de las estrellas de neutrones se alcanzó en un régimen de densidades consistente con lo expuesto en el capítulo 4, que va de $(1.1 - 2.3) \times 10^{15} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Tanto en la Figura 6.6 como en la tabla 6.1 podemos notar que únicamente tres ecuaciones de estado predicen modelos estáticos, esféricamente simétricos de estrellas de neutrones cuya masa máxima es superior a la masa del púlsar PSR J0952-0607.

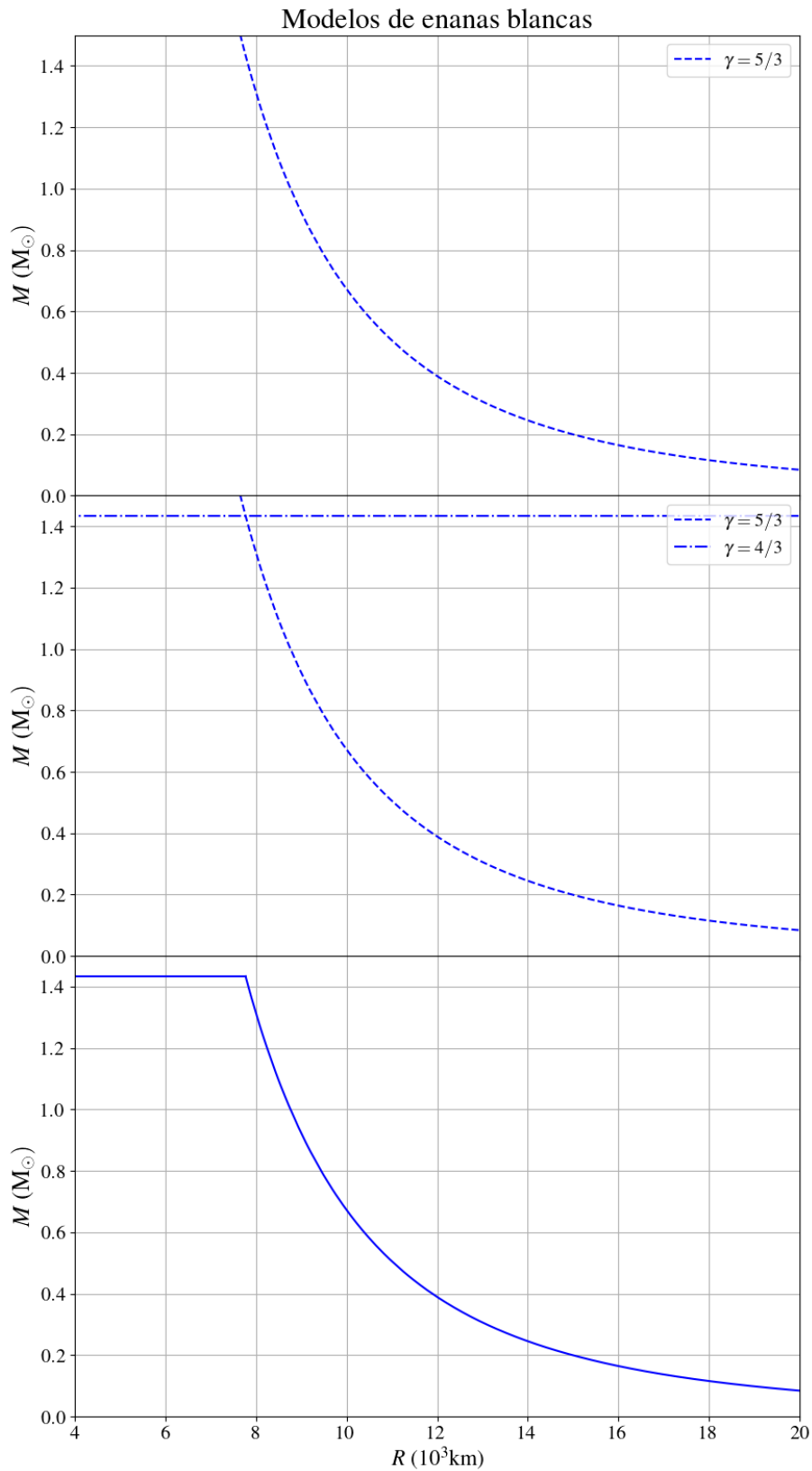


Figura 6.5: Secuencias de modelos estelares utilizando ecuaciones de estructura newtonianas y ecuaciones de estado politrópicas. De arriba hacia abajo: a. Secuencia de masa y radio estelares utilizando el exponente politrópico $5/3$ aplicable para modelos de enanas blancas a densidades bajas, b. Secuencia de masa y radio estelares con polítrpos $5/3$ y $4/3$ mostrando sus distintos comportamientos y predicciones de modelos estelares, c. Secuencia de masa y radio estelares utilizando la ecuación de estado politrópica acorde al límite de densidades aplicable en los modelos.

Modelos de Estrellas de Neutrones

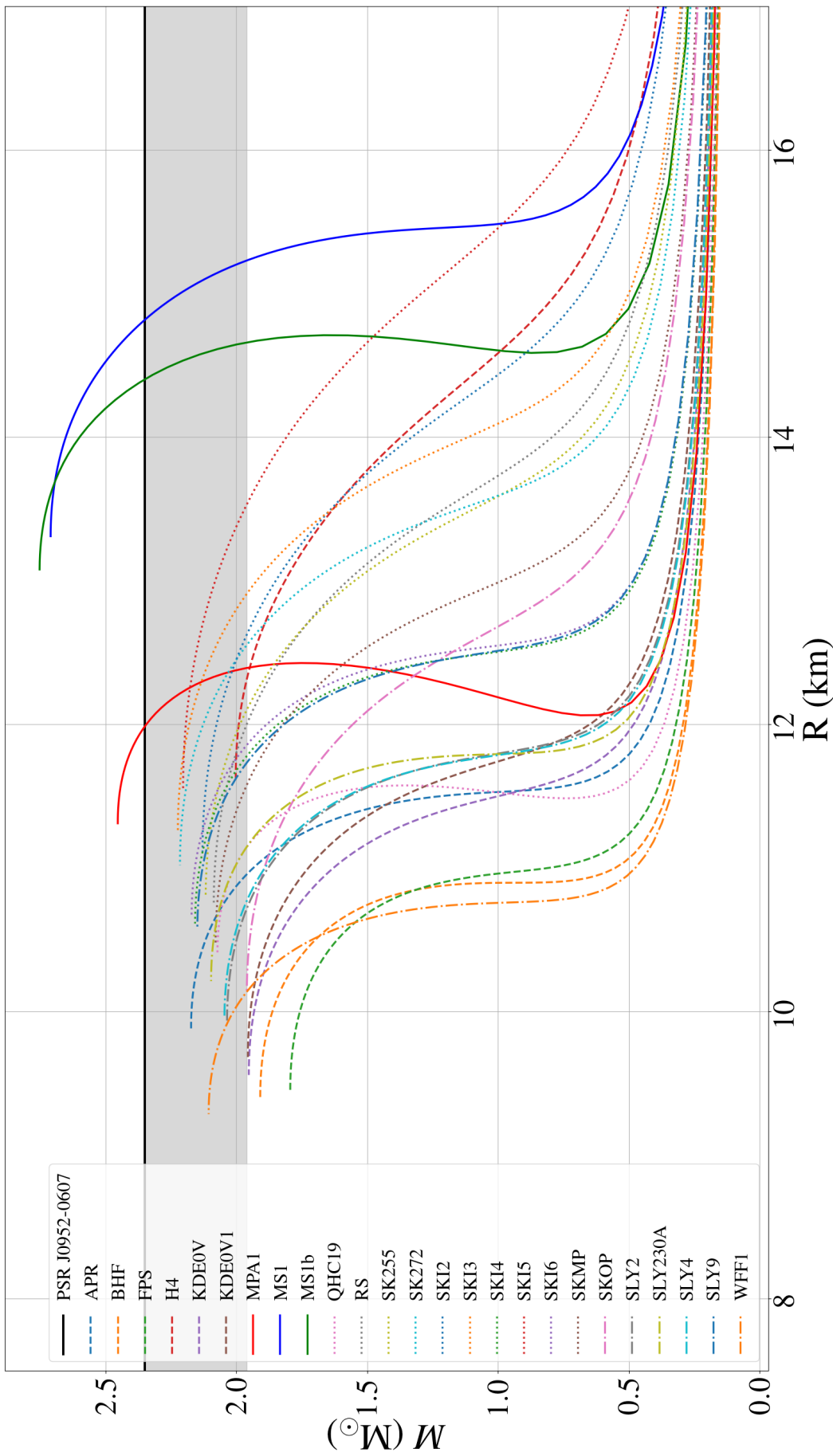


Figura 6.6: Sequências de modelos de estrelas de neutrones obtidos para cada uma de las veinticinco ecuaciones de estado ajustadas con el formalismo GPP presentadas en O'Boyle *et al* [11]. Se grafica la masa y radio estelar para cada ecuación de estado cuya densidad de masa central está en los órdenes de $10^{14} - 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Cada secuencia de modelos estelares se grafica hasta alcanzar el máximo en la masa estelar. Se distinguen con líneas sólidas aquellas ecuaciones de estado cuyos máximos en la masa estelar superan el valor de $2.35M_{\odot}$, masa del púlsar PSR J0952-0607 [38].

| EoS | ρ_c ($10^{15} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) | R (km) | $M_{\text{máx}}$ (M_{\odot}) |
|-------------|--|-----------------|----------------------------------|
| APR | 1.940860 | 9.88697 | 2.173328 |
| BHF | 2.280710 | 9.40270 | 1.908925 |
| FPS | 2.341650 | 9.45879 | 1.794230 |
| H4 | 1.659990 | 11.63081 | 2.002535 |
| KDE0V | 2.207000 | 9.56258 | 1.952591 |
| KDE0V1 | 2.169210 | 9.68729 | 1.956118 |
| MPA1 | 1.494250 | 11.31480 | 2.453575 |
| MS1 | 1.133880 | 13.31367 | 2.710292 |
| MS1b | 1.142500 | 13.08225 | 2.752506 |
| QHC19 | 1.860320 | 10.41583 | 2.072548 |
| RS | 1.817400 | 10.76359 | 2.086487 |
| SK255 | 1.782290 | 10.80337 | 2.117631 |
| SK272 | 1.684911 | 11.02267 | 2.215761 |
| SKI2 | 1.719600 | 11.11683 | 2.129806 |
| SKI3 | 1.638750 | 11.25177 | 2.223855 |
| SKI4 | 1.782160 | 10.61722 | 2.158114 |
| SKI5 | 1.606375 | 11.55739 | 2.203808 |
| SKI6 | 1.761437 | 10.67055 | 2.171458 |
| SKMP | 1.875380 | 10.48444 | 2.079720 |
| SKOP | 2.038550 | 10.14696 | 1.960185 |
| SLY2 | 2.029070 | 9.94182 | 2.035835 |
| SLY230A | 1.915025 | 10.21588 | 2.096820 |
| SLY4 | 2.012520 | 9.96481 | 2.045759 |
| SLY9 | 1.801043 | 10.57453 | 2.149445 |
| WFF1 | 2.138210 | 9.29052 | 2.106027 |

Tabla 6.1: Masa máxima predecida para cada una de las veinticinco ecuaciones de estado ajustadas con el formalismo GPP. Además de la masa máxima, se reporta la densidad de masa central utilizada para obtener el modelo y su radio estelar. Se resaltan las tres ecuaciones de estado cuyas masas máximas superan el valor de $2.35M_{\odot}$, masa del púlsar PSR J0952-0607 [38].

En la sección 4.4 mencionamos que los modelos estáticos de estrellas de neutrones llevan a predecir masas máximas menores en comparación a modelos de estrellas de neutrones rotantes, y que esta diferencia puede llegar a ser del 20 – 25 %. Esto significa que la masa máxima que se predice para estas 25 ecuaciones de estado podría aumentarse hasta un 25 % más tomando en cuenta rotación. Por estas razones, ecuaciones de estado que predicen masa máximas para modelos estáticos por encima de $1.96M_{\odot}$, podrían predecir para modelos rotantes masas máximas que se equiparen o superen el valor central del púlsar PSR J0952-0607 de $2.35M_{\odot}$. Las ecuaciones de estado que tienen esta posibilidad son aquellas que alcanzan la zona sombreada en la Figura 6.6. Por otro lado, las ecuaciones de estado que predicen una masa máxima con modelos estáticos por debajo de $1.96M_{\odot}$, van a predecir una masa máxima con modelos rotantes por debajo de $2.35M_{\odot}$ y son aquellas que no alcanzan la zona sombreada en la Figura 6.6.

Los resultados obtenidos para estrellas de neutrones son consistentes con los reportados por O’Boyle *et al.* en [11], quienes calcularon las masas máximas de estas ecuaciones de estado utilizando el formalismo GPP y utilizando una ecuación de estado tabulada para la corteza, a diferencia de nosotros, que utilizamos la ecuación de estado SLY4 para la corteza con el formalismo GPP con los parámetros mostrados en la tabla 4.3.

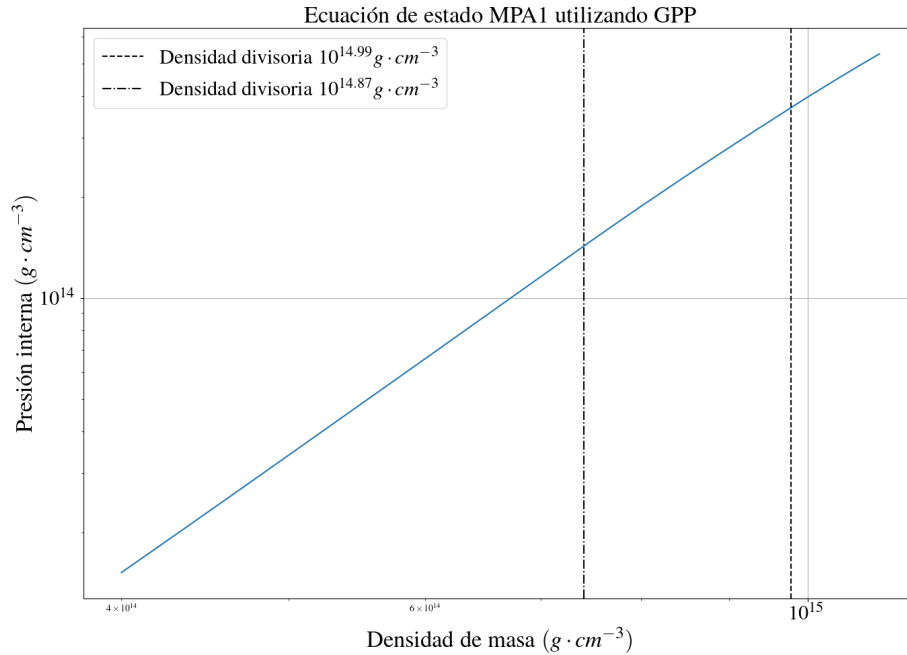


Figura 6.7: Presión interna (P/c^2) en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MPA1 en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

Finalmente, enfocaremos nuestra atención en las tres ecuaciones de estado cuya predicción en la masa máxima supera a la masa del púlsar PSR J0952-0607. Estas ecuaciones de estado son MPA1, MS1 y MS1b, las cuales al ser ajustadas con el formalismo GPP, la continuidad y diferenciabilidad de $P(\rho)$ está garantizada. Aún más, por la definición del índice adiabático (2.8), también se asegura la posibilidad de calcular el índice adiabático continuo a partir de estas ecuaciones de estado.

En las Figuras 6.7 - 6.12 se muestra el comportamiento de la presión interna en función de la densidad de masa central, así como del índice adiabático. En el artículo [11] de O'Boyle *et al.* trabajan con unidades tales que $c = 1$. Por esta razón, en esta parte específica de los resultados dividiremos a la presión interna entre c^2 para mostrar las gráficas en armonía con los resultados presentados en [11].

Como es de esperar, en los tres casos la gráfica de $P(\rho)$ es suave y continua para todo valor de la densidad central y la transición entre las densidades divisorias $10^{14.87} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y $10^{14.99} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ es imperceptible, gracias a los ajustes en los parámetros Λ y a de los polítopos generalizados que permitieron asegurar la continuidad y diferenciabilidad incluso en estos puntos.

Para las tres ecuaciones de estado el índice adiabático es continuo y toma valores entre 2 y 3 si las densidades de masa están entre $10^{14} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ y $10^{15} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Esto es consistente con el comportamiento del índice adiabático predicho por las ecuaciones de estado originales. Aún más, un índice adiabático $\gamma \geq 2$ es un indicador de que el núcleo estelar de nuestro modelo considera únicamente materia hadrónica en su interior [52]. En los tres casos, conforme la densidad de masa aumenta y después de superar el valor de la primera densidad divisoria de $10^{14.87} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, el índice adiabático muestra una tendencia decreciente, y después de superar el valor de la segunda densidad divisoria de $10^{14.99} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ esta tendencia es irreversible

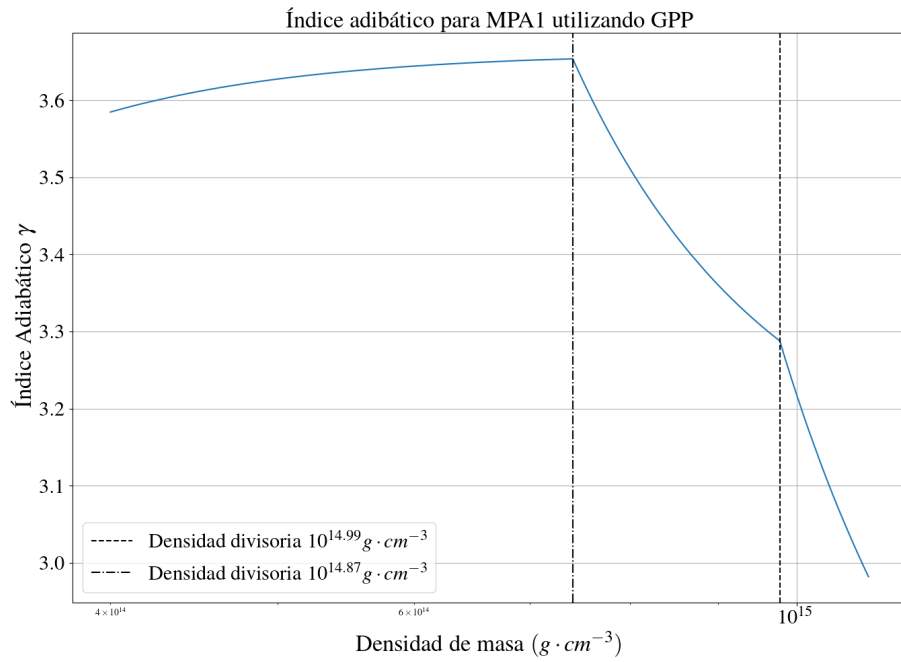


Figura 6.8: Índice adiabático en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MPA1 en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

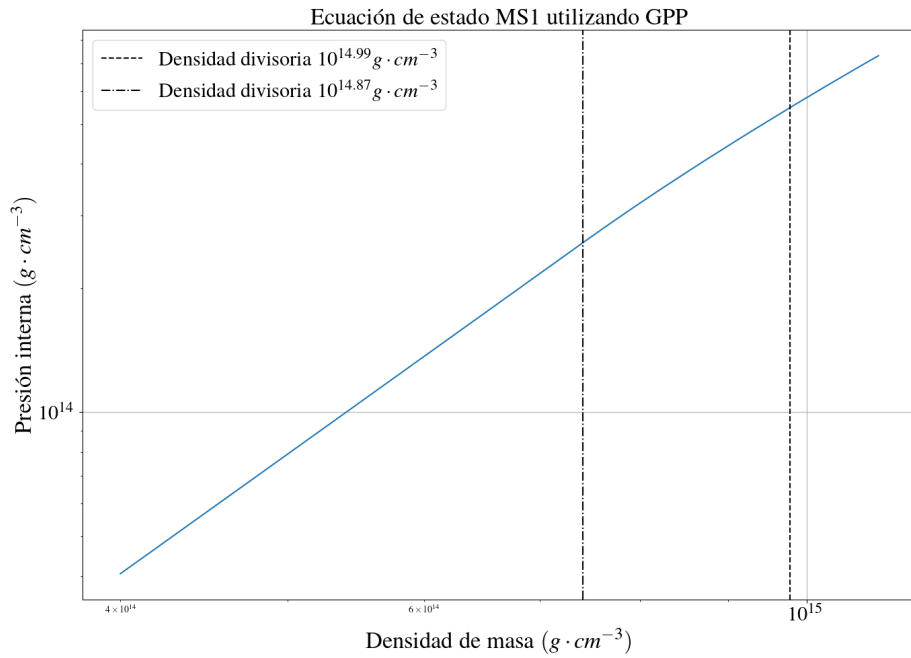


Figura 6.9: Presión interna (P/c^2) en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MS1 en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

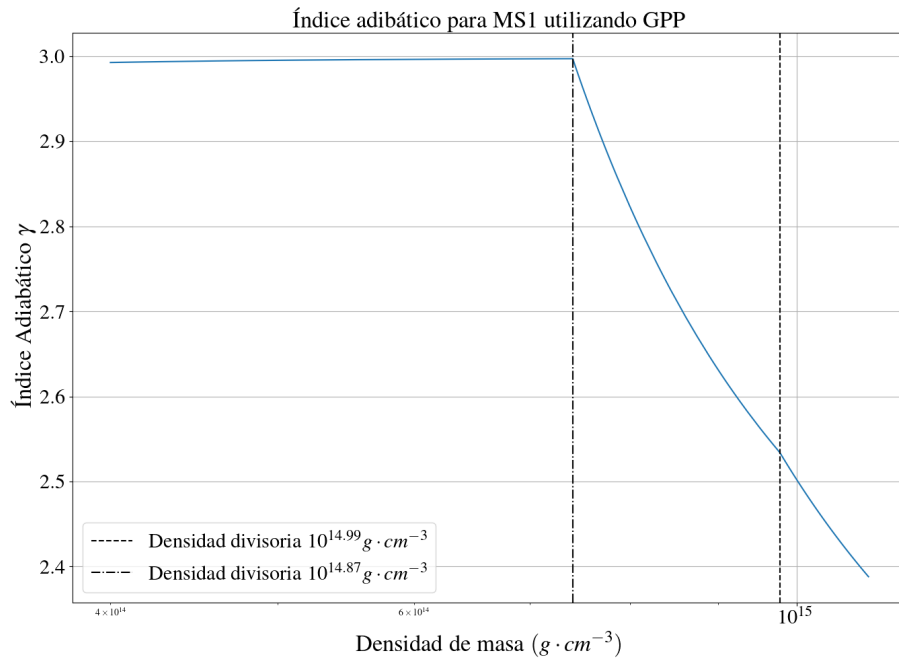


Figura 6.10: Índice adiabático en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MS1 en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

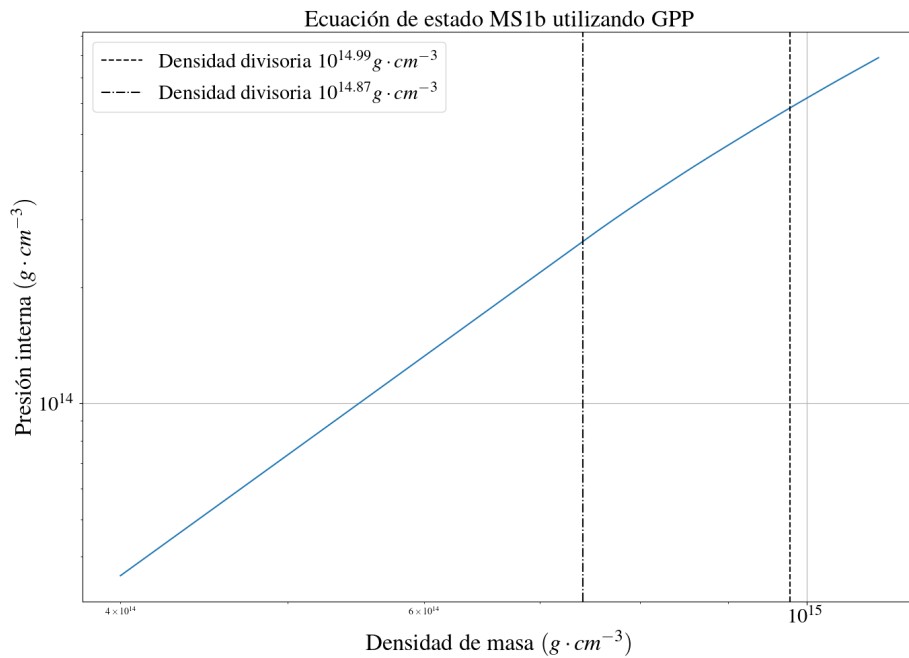


Figura 6.11: Presión interna (P/c^2) en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MS1b en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

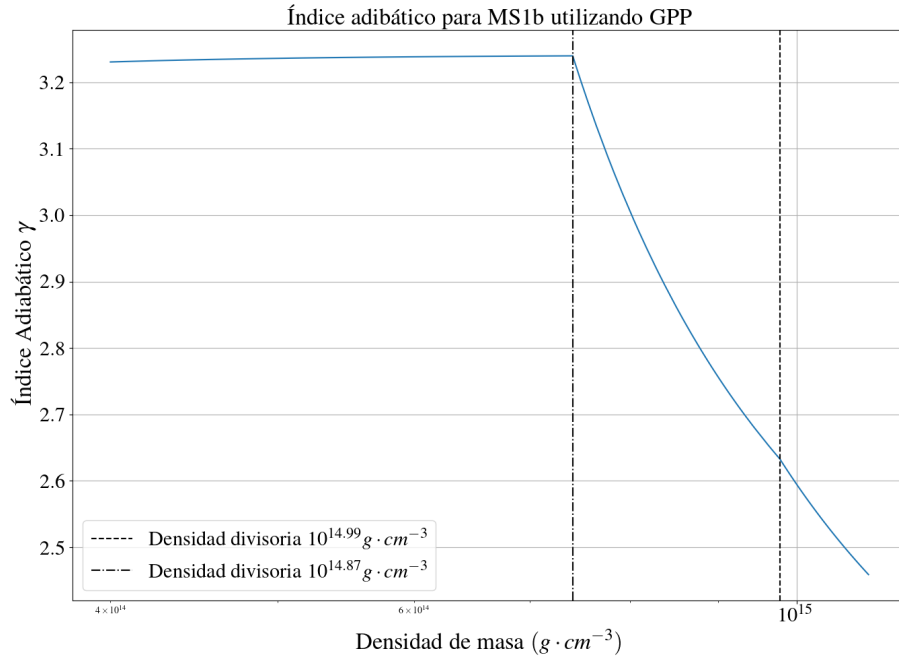


Figura 6.12: Índice adiabático en función de la densidad de masa para la ecuación de estado MS1b en el rango típico de densidades de masa central para una estrella de neutrones. Se muestran en las líneas verticales las densidades divisorias establecidas por el formalismo GPP.

pues en esta zona se encuentra ajustado el último polítropo y los parámetros K , Γ , Λ , a no cambiarán. En [52] Annala *et al* mencionan que modelos de estrellas de neutrones con índices adiabáticos cercanos a 1 son indicadores de la presencia de quarks en los núcleos estelares. Si $\gamma < 1$, podemos encontrarnos con modelos de estrellas de neutrones inestables [1]. En los tres casos se puede apreciar que el índice adiabático no es diferenciable en los puntos de transición entre las densidades divisorias. No obstante podemos considerar este comportamiento como una limitación y no como una desventaja del formalismo GPP, pues en un principio, este índice adiabático bajo el formalismo GPP se puede entender como un esfuerzo por reconstruir trozo a trozo una parte del comportamiento de la ecuación de estado original, y por otro lado, a pesar de esta característica, se asegura la continuidad y diferenciable de $P(\rho)$, la continuidad de la velocidad del sonido y su valor subluminal y la precisión en la reproducción de las cantidades físicas observables de las estrellas de neutrones.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo logramos implementar exitosamente en **Aztekas** módulos para construir modelos estáticos y esféricamente simétricos de estrellas compactas. El principal reto en la creación de dichos módulos estuvo en entender a fondo el funcionamiento de **Aztekas** para que los módulos creados se acoplaran y pudiéramos considerarlos una extensión de **Aztekas** y no programas aislados e independientes codificados en su interior. **Aztekas** como un software ampliamente utilizado y validado para el modelado fenómenos astrofísicos alrededor de agujeros negros contiene muchas funciones, variables y macros para facilitar la implementación de nuevos módulos, por lo que antes de codificar una función o declarar una nueva variable fue necesario preguntarse si no estaba ya escrita en **Aztekas**. Esto no sólo como buenas prácticas y para evitar redundancias en el código, sino también para evitar declarar funciones o variables con el mismo nombre, lo cual conduce a errores de compilación o a errores de ejecución inesperados.

La principal limitación de los módulos que implementamos está en la estaticidad de nuestros modelos de estrellas compactas. Como hemos mencionado, el propósito de colaborar en **Aztekas** fue abrir la posibilidad de estudiar otros objetos compactos además de agujeros negros con este programa. Hemos dado el primer paso hacia este objetivo, pero para poder estudiar otras características de las estrellas compactas, además de su estructura, como lo son su evolución o la acreción de materia, es necesario por ejemplo, conocer la velocidad del sonido en el medio, dada por las ecuaciones de estado para determinar el tamaño de paso de evolución temporal. Este cálculo actualmente es posible de implementar con **Aztekas** y con nuestro enfoque en las ecuaciones de estado.

Un punto de mejora está en el refinamiento del radio estelar. En **Aztekas** utilizamos las funciones establecidas para la creación de una malla espacial uniforme, por lo que la única forma de refinar el radio estelar de nuestros modelos es creando una malla con una mejor resolución para todo el intervalo de interés. Esto tiene como consecuencia que un mayor esfuerzo computacional sea requerido, pues un aumento en la cantidad de puntos en la malla lleva a un aumento en el número de operaciones a realizar. Además, para refinar el radio estelar de los modelos no es necesario aumentar la resolución en toda la malla, solo en un pequeño subintervalo alrededor del radio estelar. De los métodos descritos en la sección 5.4, los primeros candidatos a implementar pueden ser los métodos Runge Kutta adaptativos o los métodos de bisección. El principal reto en la implementación de alguno de estos métodos está en la modificación de funciones globales dentro de **Aztekas**, como las responsables de crear y especificar los parámetros de las mallas,

así como los responsables de escribir la salida en archivos `.dat`. Esto implica que para poder modificar estas funciones se debe tener un mayor conocimiento de `Aztekas` y realizar validaciones sobre las funciones globales involucradas para asegurar que a pesar de las alteraciones, su comportamiento es el esperado para todos los módulos existentes, y no sólo para los de estrellas compactas.

Para trabajo futuro, una de las principales características que puede ser explotada es la versatilidad de nuestros módulos para permitir la implementación de nuevas ecuaciones de estado y así construir modelos más realistas, tanto de enanas blancas como de estrellas de neutrones. Para enanas blancas se pueden considerar ecuaciones de estado donde se introduzcan correcciones electrostáticas y se tomen en cuenta la contribución a la densidad de energía de la estrella por parte de la retícula que forman los núcleos atómicos. También se pueden considerar modelos donde la temperatura sea distinta de cero. De estas consideraciones, las ecuaciones de estado pueden quedar en términos de otras variables y la complejidad de las relaciones entre P y ρ puede aumentar, así como puede cambiar el comportamiento del índice adiabático.

En `Aztekas`, además de construir modelos numéricos de enanas blancas utilizando ecuaciones de estado politrópicas, es posible implementar la relaciones (3.10) y (3.23), donde es necesario eliminar el parámetro x para obtener una relación $P(\rho)$ donde la principal dificultad está en la imposibilidad de expresar de forma algebraica una relación $\rho(P)$, necesaria para poder utilizar nuestros módulos. No obstante, este problema puede resolverse en primera instancia calculando explícitamente parejas (ρ_i, P_i) y recurriendo a métodos de interpolación para aproximar el valor de ρ dado P . Aún más, el codificar un algoritmo de interpolación en `Aztekas`, y particularmente en nuestros módulos, abre la posibilidad de calcular modelos de estrellas compactas con ecuaciones de estado donde no pueden expresarse directamente las relaciones $P(\rho)$ y $\rho(P)$ y por ende es imposible codificarse en una función en C. Por supuesto, la elección y posible implementación del método de interpolación merece un estudio cuidadoso sobre continuidad y diferenciabilidad de las funciones P y ρ en toda la estrella, la convergencia de las soluciones numéricas, así como la capacidad de reproducir las propiedades físicas observables que predicen las ecuaciones de estado originales. Estas mismas preguntas se redactaron en primer lugar en el artículo [11] de M. F. O'Boyle *et al* y sirvieron como motivación para introducir el formalismo GPP, por lo que es natural preguntarse por la posibilidad de implementar las técnicas descritas en ese artículo para sintetizar aún más ecuaciones de estado como polítopos generalizados a trozos. Esta labor es mucho más ambiciosa y el resultado de codificar estas técnicas bien puede ser un programa independiente a `Aztekas`.

Además de elevar la complejidad en nuestras propuestas de ecuaciones de estado, así como su codificación en `Aztekas`, también se pueden desarrollar modelos más complejos de estrellas compactas a los descritos en este trabajo en cuanto a las ecuaciones de estructura se refiere, donde podríamos suponer la pérdida de alguna simetría, los efectos de rotación en las estrellas, e incluso la presencia de campos magnéticos. Estos refinamientos en la construcción de modelos de estrellas compactas llevan también a modificaciones en la masa máxima, de manera que al reportar los valores para la masa estelar máxima de modelos de estrellas de neutrones, se suele especificar los supuestos bajo los que se rige el modelo, además de la ecuación de estado utilizada.

En la parte computacional también existe trabajo futuro donde podría mejorarse el algoritmo de integración, utilizando métodos de Runge Kutta de orden superior, o estudiando la posible optimización y paralelización de las funciones implementadas.

Por último, hemos mencionado que **Aztekas** es capaz de evolucionar fluidos relativistas y newtonianos en espacio-tiempos fijos, lo que significa que **Aztekas** no es capaz de resolver las ecuaciones de Einstein de forma dinámica. Que **Aztekas** pudiera ser capaz de evolucionar el espacio tiempo es un proyecto que va más allá de la creación de módulos para la modelación de estrellas de neutrones y enanas blancas, que requiere de conocimientos y técnicas más avanzadas tanto en Relatividad General, como en computación para obtener soluciones numéricas e implementarlas.

Apéndice A

Solución a las integrales en la ecuación de estado para enanas blancas

A.1. Presión interna de la materia dentro de una enana blanca

La presión interna está dada por la integral

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} dp. \quad (\text{A.1})$$

Considerando el cambio de variable $u = p/mc$ entonces $du = dp/mc$. Luego $p^4 c^2 dp \equiv m^5 c^7 u^4 du$ y $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \equiv mc^2 \sqrt{u^2 + 1}$.

La integral (A.1) se reescribe como:

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} m^4 c^5 \int_0^{\frac{p_F}{mc}} \frac{u^4}{\sqrt{u^2 + 1}} du. \quad (\text{A.2})$$

Notemos que el factor $\frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} m^4 c^5$ se puede reescribir como $\frac{1}{3} \frac{mc^2}{\pi^2} \left(\frac{2\pi mc}{h}\right)^3 = \frac{mc^2}{3\pi^2 \lambda^3}$.

Consideremos la integral indefinida:

$$I = \int \frac{u^4}{\sqrt{u^2 + 1}} du. \quad (\text{A.3})$$

Por sustitución trigonométrica, sea $u = \tan(s)$ y $du = \sec^2(s) ds$. Entonces $\sqrt{u^2 + 1} = \sqrt{\tan^2(s) + 1} =$

$\sec(s)$, obteniendo la integral

$$I \equiv \int \tan^4(s) \sec(s) ds \quad (\text{A.4})$$

$$= \int (\sec^2(s) - 1)^2 \sec(s) ds$$

$$= \int \sec^5(s) - 2\sec^3(s) + \sec(s) ds.$$

$$= \int \sec^5(s) ds - 2 \int \sec^3(s) ds + \int \sec(s) ds. \quad (\text{A.5})$$

Conociendo que:

$$\int \sec^m(s) ds = \frac{\sin(s) \sec^{m-1}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2}(s) ds, \text{ con } m \neq 1, \quad (\text{A.6})$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \sec^5(s) ds &= \frac{\sin(s) \sec^4(s)}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3(s) ds \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{5}{4} \int \sec^3(s) ds + \int \sec(s) ds \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3(s) ds &= \frac{\sin(s) \sec^2(s)}{2} + \frac{1}{2} \int \sec(s) ds \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{5}{8} \tan(s) \sec(s) + \frac{3}{8} \int \sec(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Como $\int \sec(s) ds = \log(\tan(s) + \sec(s))$ tenemos finalmente que

$$I = \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{5}{8} \tan(s) \sec(s) + \frac{3}{8} \log(\tan(s) + \sec(s)). \quad (\text{A.9})$$

De la sustitución $\tan(s) = u$, como $\tan(s) = \frac{C.O.}{C.A.}$ se tiene que $C.O. = u$, $C.A. = 1$ y $H = \sqrt{1+u^2}$, de forma que $\sec(s) = \frac{H}{C.A.} = \sqrt{1+u^2}$. Así:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} u (1+u^2)^{3/2} - \frac{5}{8} u \sqrt{1+u^2} + \frac{3}{8} \log(u + \sqrt{1+u^2}) \\ &= \frac{1}{8} \left[2u (1+u^2)^{3/2} - 5u \sqrt{1+u^2} + 3 \log(u + \sqrt{1+u^2}) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[u \sqrt{1+u^2} (2(1+u^2) - 5) + 3 \log(u + \sqrt{1+u^2}) \right] \\ &= \frac{3}{8} \left[u \sqrt{1+u^2} \left(\frac{2}{3} u^2 - 1 \right) + \log(u + \sqrt{1+u^2}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De encontrar la solución a la integral indefinida I se tiene entonces que la integral de la presión en (A.2)

tiene como solución

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{mc^2}{3\pi^2\lambda^3} \frac{3}{8} \left[u\sqrt{1+u^2} \left(\frac{2}{3}u^2 - 1 \right) + \log \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right] \Bigg|_0^{\frac{p_F}{mc}} \\
 &= \frac{mc^2}{3\pi^2\lambda^3} \frac{3}{8} \left[\frac{p_F}{mc} \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2 - 1 \right) + \log \left(\frac{p_F}{mc} + \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2} \right) \right]. \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

Si $x = \frac{p_F}{mc}$ entonces

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \frac{3}{8} \left[x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) \sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left[\frac{p_F}{mc} \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2 - 1 \right) + \log \left(\frac{p_F}{mc} + \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc} \right)^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Y finalmente encontramos la expresión (3.10):

$$P = \frac{mc^2}{3\pi^2\lambda^3} \phi(x). \quad (\text{A.12})$$

A.2. Densidad de energía de los electrones dentro de una enana blanca

De la integral de la densidad de energía,

$$\varepsilon_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} p^2 dp, \quad (\text{A.13})$$

proponemos el cambio de variable $u = p/mc$ entonces $du = dp/mc$. De esta forma $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \equiv mc^2\sqrt{u^2 + 1}$ y $p^2 dp \equiv m^3c^3u^2 du$.

La integral de la densidad de energía (A.13) se reescribe como

$$\varepsilon_e = \frac{mc^2}{\pi^2\lambda^3} \int_0^{\frac{p_F}{mc}} \sqrt{u^2 + 1} u^2 du. \quad (\text{A.14})$$

Donde hemos reescrito el factor $\frac{8\pi}{h^3} m^4 c^5$ como $\frac{mc^2}{\pi^2} \left(\frac{2\pi mc}{h} \right)^3 = \frac{mc^2}{\pi^2\lambda^3}$.

Consideremos la integral indefinida

$$I = \int \sqrt{u^2 + 1} u^2 du. \quad (\text{A.15})$$

Proponiendo el cambio de variable $u = \tan(s)$, entonces $du = \sec^2(s) ds$ y $\sqrt{u^2 + 1} \equiv \sqrt{\tan^2(s) + 1} = \sec(s)$

y la integral indefinida se reescribe como

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sec^3(s) \tan^2(s) ds \\
 &= \int \sec^3(s) (\sec^2(s) - 1) ds \\
 &= \int \sec^5(s) - \sec^3(s) ds \\
 &= \int \sec^5(s) ds - \int \sec^3(s) ds.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Tomando en cuenta la fórmula (A.6) encontramos que

$$\begin{aligned}
 \int \sec^5(s) ds &= \frac{\sin(s) \sec^4(s)}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3(s) ds \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{1}{4} \int \sec^3(s) ds
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3(s) ds &= \frac{\sin(s) \sec^2(s)}{2} + \frac{1}{2} \int \sec(s) ds \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{1}{8} \tan(s) \sec(s) - \frac{1}{8} \int \sec(s) ds.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Como $\int \sec(s) ds = \log(\tan(s) + \sec(s))$ tenemos finalmente que

$$I = \frac{1}{4} \tan(s) \sec^3(s) - \frac{1}{8} \tan(s) \sec(s) - \frac{1}{8} \log(\tan(s) + \sec(s)). \tag{A.19}$$

De la sustitución $\tan(s) = u$, como $\tan(s) = \frac{C.O.}{C.A.}$ se tiene que $C.O. = u$, $C.A. = 1$ y $H = \sqrt{1 + u^2}$ de forma que $\sec(s) = \frac{H}{C.A.} = \sqrt{1 + u^2}$. Así:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} u (1 + u^2)^{3/2} - \frac{1}{8} u \sqrt{1 + u^2} - \frac{1}{8} \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \\
 &= \frac{1}{8} \left[2u (1 + u^2)^{3/2} - u \sqrt{1 + u^2} - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[u \sqrt{1 + u^2} (2(1 + u^2) - 1) - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[u \sqrt{1 + u^2} (2u^2 + 1) - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \right].
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

De encontrar la solución a la integral indefinida I se tiene entonces que la integral de la densidad de energía en (A.14) tiene como solución

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_e &= \frac{mc^2}{3\pi^2 \lambda^3} \frac{1}{8} \left[u \sqrt{1 + u^2} (2u^2 + 1) - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \Bigg|_0^{\frac{p_F}{mc}} \\
 &= \frac{mc^2}{3\pi^2 \lambda^3} \frac{1}{8} \left[\frac{p_F}{mc} \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2} \left(2 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2 + 1 \right) - \log \left(\frac{p_F}{mc} + \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Si $x = \frac{p_F}{mc}$ entonces

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \frac{1}{8} \left[x\sqrt{1+x^2}(2x^2+1) - \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \right] \\ &\equiv \frac{1}{8} \left[\frac{p_F}{mc} \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2} \left(2 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2 + 1 \right) - \log\left(\frac{p_F}{mc} + \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2}\right) \right].\end{aligned}$$

Y finalmente encontramos la expresión (3.13):

$$\varepsilon_e = \frac{mc^2}{3\pi^2\lambda^3} \chi(x). \quad (\text{A.22})$$

Apéndice B

El Tensor de Einstein con una métrica del espaciotiempo estática y esféricamente simétrica

El Tensor de Einstein es un tensor simétrico que se define como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (\text{B.1})$$

con R el escalar de Ricci y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, también simétrico, dados por

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}, \quad (\text{B.3})$$

donde $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Riemann, que se define como

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu}, \quad (\text{B.4})$$

donde $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ son los símbolos de Christoffel, definidos como

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\beta\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\beta} - g_{\alpha\beta,\sigma}). \quad (\text{B.5})$$

Dada una métrica para el espacio tiempo, es necesario conocer los símbolos de Christoffel, para posteriormente calcular el tensor y el escalar de Ricci. De acuerdo con (4.27), los elementos del tensor métrico distintos de cero son

$$g_{tt} = -e^{2\varphi(r)}, \quad (\text{B.6})$$

$$g_{rr} = e^{2\psi(r)}, \quad (\text{B.7})$$

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad (\text{B.8})$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{B.9})$$

B.1. Los símbolos de Christoffel

Comenzaremos escribiendo los símbolos de Christoffel distintos de cero de acuerdo con el tensor métrico propuesto. Puesto que los elementos distintos de cero en el tensor métrico se encuentran en la diagonal, el factor $g^{\mu\sigma}$ presente en la definición (B.5) solo será distinto de cero con $g^{\mu\mu}$. De esta forma

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (\text{B.10})$$

Esto sugiere que una manera de obtener todos los símbolos de Christoffel no nulos es hacer $\mu = t, r, \theta, \phi$ y analizar los posibles sumandos distintos de cero en cada caso.

Caso $\mu = t$

Tenemos que

$$\Gamma^t_{\alpha\beta} = \Gamma^t_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{tt} (g_{\beta t,\alpha} + g_{\alpha t,\beta} - g_{\alpha\beta,t}). \quad (\text{B.11})$$

Como ninguna entrada del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ es función de t se tiene que $g_{\alpha\beta,t} = 0$. Luego como los elementos del tensor métrico distintos de cero se encuentran en la diagonal, tenemos dos casos, $\alpha = t$ ó $\beta = t$, pero por simetría se reducen a calcular

$$\Gamma^t_{\alpha t} = \Gamma^t_{t\alpha} = \frac{1}{2}g^{tt} (g_{tt,\alpha}). \quad (\text{B.12})$$

Como g_{tt} es función de r , únicamente $g_{tt,\alpha} \neq 0$ cuando $\alpha = r$. De esta forma

$$\Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt} (g_{tt,r}) = \frac{d\varphi}{dr}. \quad (\text{B.13})$$

Caso $\mu = r$

Se tiene que

$$\Gamma^r_{\alpha\beta} = \Gamma^r_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{rr} (g_{\beta r,\alpha} + g_{\alpha r,\beta} - g_{\alpha\beta,r}). \quad (\text{B.14})$$

En este caso las entradas del tensor métrico g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\phi\phi}$ son función de r por lo que se tienen distintos símbolos

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr} (-g_{tt,r}) = e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (\text{B.15})$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr} (g_{rr,r}) = \frac{d\psi}{dr}, \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr} (-g_{\theta\theta,r}) = -re^{-2\psi}, \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{rr} (-g_{\phi\phi,r}) = \sin^2\theta \cdot \Gamma^r_{\theta\theta}. \quad (\text{B.18})$$

Caso $\mu = \theta$

La expresión que obtenemos es

$$\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\theta}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (g_{\beta\theta,\alpha} + g_{\alpha\theta,\beta} - g_{\alpha\beta,\theta}). \quad (\text{B.19})$$

En este caso la entrada $g_{\phi\phi}$ es función de θ y $g_{\theta\theta}$ es función de r , de donde se obtienen los símbolos

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(-g_{\phi\phi,\theta}) = -\sin\theta \cos\theta, \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{r}. \quad (\text{B.21})$$

Caso $\mu = \phi$

Los símbolos a encontrar tienen los índices

$$\Gamma^{\phi}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\phi}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(g_{\beta\phi,\alpha} + g_{\alpha\phi,\beta} - g_{\alpha\beta,\phi}). \quad (\text{B.22})$$

Para este caso notemos que la entrada del tensor métrico $g_{\phi\phi}$ es función tanto de θ como de r , por lo que calcularemos dos símbolos de Christoffel más:

$$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,r}) = \frac{1}{r}, \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \quad (\text{B.24})$$

Una vez obtenidos todos los símbolos de Christoffel distintos de cero, podemos calcular el tensor de Ricci.

B.2. El tensor de Ricci

Para calcular el tensor de Ricci, de acuerdo con la ecuación (B.3) primero notemos que las únicas entradas del tensor de Ricci distintas de cero están en la diagonal.

En efecto, veremos que

$$R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda} \quad (\text{B.25})$$

es cero cuando $\alpha \neq \beta$.

- $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} = 0$ si $\alpha \neq \beta$

Expandiendo la suma:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} &= \Gamma^t_{\alpha\beta,t} + \Gamma^r_{\alpha\beta,r} + \Gamma^{\theta}_{\alpha\beta,\theta} + \Gamma^{\phi}_{\alpha\beta,\phi} \\ &= 0 + \Gamma^r_{\alpha\beta,r} + \Gamma^{\theta}_{\alpha\beta,\theta} + 0, \end{aligned}$$

pues no hay símbolos de Christoffel que estén en función de t o de ϕ .

Ahora notemos que de los símbolos de Christoffel distintos de cero encontrados para el caso $\mu = r$ no hay ninguno de la forma $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ con $\alpha \neq \beta$.

Por otro lado, de los símbolos de Christoffel encontrados para el caso $\mu = \theta$, el único diferente de cero de la forma $\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta}$ es $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = 1/r$, de forma que $\Gamma^{\theta}_{r\theta,\theta} = 0$.

Así,

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^\lambda = 0 \quad \text{para } \alpha \neq \beta.$$

- $\Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^\lambda = 0$ si $\alpha \neq \beta$

Expandimos la suma

$$\Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha t,\beta}^t + \Gamma_{\alpha r,\beta}^r + \Gamma_{\alpha\theta,\beta}^\theta + \Gamma_{\alpha\phi,\beta}^\phi.$$

Notemos que de los símbolos de Christoffel escritos, para $\alpha = t$ y $\alpha = \phi$ todos son cero. Para el caso $\alpha = r$ tenemos:

$$\Gamma_{r\lambda,\beta}^\lambda = \Gamma_{rt,\beta}^t + \Gamma_{rr,\beta}^r + \Gamma_{r\theta,\beta}^\theta + \Gamma_{r\phi,\beta}^\phi,$$

como $\alpha \neq \beta$, entonces $\beta \neq r$, y como cada uno de los sumandos para $\Gamma_{r\lambda}^\lambda$ está en función de r , se tiene que $\Gamma_{r\lambda,\beta}^\lambda = 0$ para $\beta \neq r$.

Análogamente para $\alpha = \theta$ la expresión $\Gamma_{\theta\lambda}^\lambda = \Gamma_{\theta\phi}^\phi$ es una función de θ , por lo tanto $\Gamma_{\theta\lambda,\beta}^\lambda = \Gamma_{\theta\phi,\beta}^\phi = 0$ para $\beta \neq \theta$.

Concluimos que

$$\Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^\lambda = 0 \quad \text{para } \alpha \neq \beta.$$

- $\Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma = 0$ si $\alpha \neq \beta$

Para esta última parte, expandimos primero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma &= \Gamma_{\sigma t}^t \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\sigma r}^r \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\sigma\theta}^\theta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\sigma\phi}^\phi \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \\ &= \Gamma_{rt}^t \Gamma_{\alpha\beta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\alpha\beta}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\alpha\beta}^r + \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{\alpha\beta}^r + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \\ &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \\ &= \frac{\cot \theta}{r} \quad \text{con } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Ahora expandiendo

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\sigma\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} &= \Gamma_{t\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^t + \Gamma_{r\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^r + \Gamma_{\theta\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\theta} + \Gamma_{\phi\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\phi} \\
&= \Gamma_{t\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^t + \Gamma_{t\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^t + \Gamma_{t\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^t + \Gamma_{t\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^t + \dots \\
&\dots + \Gamma_{r\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^r + \Gamma_{r\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^r + \Gamma_{r\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^r + \Gamma_{r\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^r + \dots \\
&\dots + \Gamma_{\theta\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^{\theta} + \Gamma_{\theta\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^{\theta} + \Gamma_{\theta\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^{\theta} + \dots \\
&\dots + \Gamma_{\phi\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^{\phi} + \Gamma_{\phi\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^{\phi} + \Gamma_{\phi\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^{\phi} + \Gamma_{\phi\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^{\phi} + \dots \\
&= \Gamma_{t\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^t + \Gamma_{t\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^t + \dots \\
&\dots + \Gamma_{r\beta}^t\Gamma_{\alpha t}^r + \Gamma_{r\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^r + \Gamma_{r\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^r + \Gamma_{r\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^r + \dots \\
&\dots + \Gamma_{\theta\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^{\theta} + \Gamma_{\theta\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^{\theta} + \dots \\
&\dots + \Gamma_{\phi\beta}^r\Gamma_{\alpha r}^{\phi} + \Gamma_{\phi\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^{\phi} + \Gamma_{\phi\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^{\phi} + \dots \\
&= \Gamma_{\phi\beta}^{\phi}\Gamma_{\alpha\phi}^{\phi} \\
&= \frac{\cot\theta}{r} \quad \text{con } \alpha \neq \beta.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta.$$

Esto concluye la afirmación

$$R_{\alpha\lambda\beta}^{\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta. \quad (\text{B.26})$$

Por otro lado, podemos notar que en la suma $R_{\mu\lambda\mu}^{\lambda}$, cuando $\lambda = \mu$ el sumando es igual a cero, pues por la ecuación (B.4),

$$R_{\mu\mu\mu}^{\mu} = \Gamma_{\mu\mu,\mu}^{\mu} - \Gamma_{\mu\mu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\mu}^{\mu}\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} - \Gamma_{\mu\mu}^{\mu}\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} = 0. \quad (\text{B.27})$$

De esta forma las entradas distintas de cero a calcular son

$$R_{tt} = R_{trt}^r + R_{t\theta t}^{\theta} + R_{t\phi t}^{\phi} \quad (\text{B.28})$$

$$R_{rr} = R_{rtr}^t + R_{r\theta r}^{\theta} + R_{r\phi r}^{\phi} \quad (\text{B.29})$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta t\theta}^t + R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\phi\theta}^{\phi} \quad (\text{B.30})$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\phi t\phi}^t + R_{\phi r\phi}^r + R_{\phi\theta\phi}^{\theta}. \quad (\text{B.31})$$

Primer componente R_{tt}

$$\begin{aligned}
R^r{}_{trt} &= \Gamma^r{}_{tt,r} - \Gamma^r{}_{rt,t} + \Gamma^r{}_{r\lambda}\Gamma^\lambda{}_{tt} - \Gamma^r{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{rt} \\
&= \Gamma^r{}_{tt,r} - 0 + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^r{}_{r\theta}\Gamma^\theta{}_{tt} + \Gamma^r{}_{r\phi}\Gamma^\phi{}_{tt} - \Gamma^r{}_{tt}\Gamma^t{}_{rt} - \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^r{}_{rt} - \Gamma^r{}_{t\theta}\Gamma^\theta{}_{rt} - \Gamma^r{}_{t\phi}\Gamma^\phi{}_{rt} \\
&= \frac{d}{dr} \left(e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr} \right) + \frac{d\psi}{dr} e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr} + 0 + 0 - e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\varphi}{dr} - 0 - 0 - 0 \\
&= \frac{d^2\varphi}{dr^2} e^{2(\varphi-\psi)} + \frac{d\varphi}{dr} \frac{d}{dr} \left(e^{2(\varphi-\psi)} \right) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} e^{2(\varphi-\psi)} - e^{2(\varphi-\psi)} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \\
&= \frac{d^2\varphi}{dr^2} e^{2(\varphi-\psi)} + \left(2e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr} - 2e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\psi}{dr} \right) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} e^{2(\varphi-\psi)} - e^{2(\varphi-\psi)} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \\
&= e^{2(\varphi-\psi)} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - 2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} - \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right] \\
&= e^{2(\varphi-\psi)} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right]. \tag{B.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\theta{}_{t\theta t} &= \Gamma^\theta{}_{tt,\theta} - \Gamma^\theta{}_{\theta t,t} + \Gamma^\theta{}_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{tt} - \Gamma^\theta{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\theta t} \\
&= 0 + 0 + \Gamma^\theta{}_{\theta t}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{tt} + \Gamma^\theta{}_{\theta\phi}\Gamma^\phi{}_{tt} - \Gamma^\theta{}_{tt}\Gamma^t{}_{\theta t} - \Gamma^\theta{}_{tr}\Gamma^r{}_{\theta t} - \Gamma^\theta{}_{t\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta t} - \Gamma^\theta{}_{t\phi}\Gamma^\phi{}_{\theta t} \\
&= 0 + 0 + 0 + \Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^r{}_{tt} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \\
&= \frac{1}{r} e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr}. \tag{B.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\phi{}_{t\phi t} &= \Gamma^\phi{}_{tt,\phi} - \Gamma^\phi{}_{\phi t,t} + \Gamma^\phi{}_{\phi\lambda}\Gamma^\lambda{}_{tt} - \Gamma^\phi{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\phi t} \\
&= 0 + 0 + \Gamma^\phi{}_{\phi\lambda}\Gamma^\lambda{}_{tt} - \Gamma^\phi{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\phi t} \\
&= \Gamma^\phi{}_{\phi t}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^\phi{}_{\phi r}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\Gamma^\theta{}_{tt} + \Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{tt} - \Gamma^\phi{}_{tt}\Gamma^t{}_{\phi t} - \Gamma^\phi{}_{t\phi}\Gamma^r{}_{\phi t} - \Gamma^\phi{}_{t\theta}\Gamma^\theta{}_{\phi t} - \Gamma^\phi{}_{t\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi t} \\
&= 0 + \Gamma^\phi{}_{\phi r}\Gamma^r{}_{tt} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \\
&= \frac{1}{r} e^{2(\varphi-\psi)} \frac{d\varphi}{dr}. \tag{B.34}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{tt} = e^{2(\varphi-\psi)} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right]. \tag{B.35}$$

Segunda componente R_{rr}

$$\begin{aligned}
R^t{}_{rtr} &= \Gamma^t{}_{rr,t} - \Gamma^t{}_{tr,r} + \Gamma^t{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{rr} + \Gamma^t{}_{r\lambda}\Gamma^\lambda{}_{tr} \\
&= -\Gamma^t{}_{tr,r} + \Gamma^t{}_{tt}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^t{}_{tr}\Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^t{}_{t\theta}\Gamma^\theta{}_{rr} + \Gamma^t{}_{t\phi}\Gamma^\phi{}_{rr} - \Gamma^t{}_{rt}\Gamma^t{}_{tr} - \Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{tr} - \Gamma^t{}_{r\theta}\Gamma^\theta{}_{tr} - \Gamma^t{}_{r\phi}\Gamma^\phi{}_{tr} \\
&= -\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + 0 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\psi}{dr} + 0 + 0 - \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\varphi}{dr} - 0 - 0 - 0 \\
&= \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\psi}{dr} - \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
R^\theta{}_{r\theta r} &= \Gamma^\theta{}_{rr,\theta} - \Gamma^\theta{}_{\theta r,r} + \Gamma^\theta{}_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{rr} - \Gamma^\theta{}_{r\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\theta r} \\
&= \frac{1}{r^2} + \Gamma^\theta{}_{\theta t}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\theta\phi}\Gamma^\phi{}_{rr} - \Gamma^\theta{}_{rt}\Gamma^t{}_{\theta r} - \Gamma^\theta{}_{rr}\Gamma^r{}_{\theta r} - \Gamma^\theta{}_{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r} - \Gamma^\theta{}_{r\phi}\Gamma^\phi{}_{\theta r} \\
&= \frac{1}{r^2} + 0 + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + 0 - \frac{1}{r^2} - 0 - 0 - 0 \\
&= \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}
R^\phi{}_{r\phi r} &= \Gamma^\phi{}_{rr,\phi} - \Gamma^\phi{}_{\phi r,r} + \Gamma^\phi{}_{\phi\lambda}\Gamma^\lambda{}_{rr} - \Gamma^\phi{}_{r\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\phi r} \\
&= \frac{1}{r^2} + \Gamma^\phi{}_{\phi t}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^\phi{}_{\phi r}\Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\Gamma^\theta{}_{rr} + \Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{rr} - \Gamma^\phi{}_{rt}\Gamma^t{}_{\phi r} - \Gamma^\phi{}_{rr}\Gamma^r{}_{\phi r} - \Gamma^\phi{}_{r\theta}\Gamma^\theta{}_{\phi r} - \Gamma^\phi{}_{r\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi r} \\
&= \frac{1}{r^2} + 0 + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + 0 - 0 - 0 - 0 - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R_{rr} &= \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\psi}{dr} - \partial_r^2\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} \\
&= \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\psi}{dr} - \partial_r^2\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.39}$$

Tercer componente $R_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned}
R^t_{\theta t\theta} &= \Gamma^t_{\theta\theta,t} - \Gamma^t_{t\theta,\theta} + \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \Gamma^t_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{t\theta} \\
&= \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{\theta\theta} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^t_{t\phi}\Gamma^\phi_{\theta\theta} - \Gamma^t_{\theta t}\Gamma^t_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta r}\Gamma^r_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{t\theta} \\
&= 0 + \frac{d\varphi}{dr} \left(-re^{-2\psi} \right) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 \\
&= -re^{-2\psi} \frac{d\varphi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
R^r_{\theta r\theta} &= \Gamma^r_{\theta\theta,r} - \Gamma^r_{r\theta,\theta} + \Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{r\theta} \\
&= \frac{d}{dr} \left(-re^{-2\psi} \right) + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} \\
&= 2re^{-2\psi} \frac{d\psi}{dr} - e^{-2\psi} + \frac{d\psi}{dr} \left(-re^{-2\psi} \right) - \left(-re^{-2\psi} \right) \frac{1}{r} \\
&= 2re^{-2\psi} \frac{d\psi}{dr} - e^{-2\psi} + \frac{d\psi}{dr} \left(-re^{-2\psi} \right) + e^{-2\psi} \\
&= re^{-2\psi} \frac{d\psi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
R^\phi_{\theta\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\theta,\phi} - \Gamma^\phi_{\phi\theta,\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \Gamma^\phi_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{\phi\theta} \\
&= 0 - \Gamma^\phi_{\phi\theta,\theta} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} - \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{\phi\theta} \\
&= -\frac{d \cot \theta}{d\theta} + \frac{1}{r} \left(-re^{-2\psi} \right) - \cot^2 \theta \\
&= \left(1 - e^{-2\psi} \right).
\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R_{\theta\theta} &= -re^{-2\psi} \frac{d\varphi}{dr} + re^{-2\psi} \frac{d\psi}{dr} + \left(1 - e^{-2\psi} \right) \\
&= e^{-2\psi} \left[r \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\varphi}{dr} \right) - 1 \right] + 1.
\end{aligned} \tag{B.43}$$

Cuarta componente $R_{\phi\phi}$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= -re^{-2\psi} \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dr} + re^{-2\psi} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dr} + \left(1 - e^{-2\psi} \right) \sin^2 \theta \\
&= \left\{ e^{-2\psi} \left[r \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\varphi}{dr} \right) - 1 \right] + 1 \right\} \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{B.44}$$

B.3. El escalar de Ricci

Una vez encontradas las entradas distintas de cero del tensor de Ricci, podemos calcular el escalar de Ricci de acuerdo con la ecuación (B.2). Por simplicidad, haremos $\frac{d\varphi}{dr} = \varphi'$ y $\frac{d\psi}{dr} = \psi'$.

$$\begin{aligned}
R &= g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\
&= -e^{-2\varphi}e^{2(\varphi-\psi)} \left[\varphi'' - \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\varphi' \right] + e^{-2\psi} \left[-\varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\psi' \right] + \dots \\
&\dots + \frac{1}{r^2} \left\{ e^{-2\psi} [r(\psi' - \varphi') - 1] + 1 \right\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left\{ e^{-2\psi} [r(\psi' - \varphi') - 1] + 1 \right\} \sin^2 \theta \\
&= e^{-2\psi} \left[-\varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' - \frac{2}{r}\varphi' - \varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\psi' \right] + \frac{2}{r^2} \left\{ e^{-2\psi} [r(\psi' - \varphi') - 1] + 1 \right\} \\
&= 2e^{-2\psi} \left[-\varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' - \frac{1}{r}(\varphi' - \psi') \right] + 2e^{-2\psi} \left[\frac{1}{r}(\psi' - \varphi') - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} \\
&= -2e^{-2\psi} \left[-\varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' - \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} \\
&= -2e^{-2\psi} \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= 2e^{-2\psi} \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \tag{B.45}
\end{aligned}$$

B.4. El tensor de Einstein

Ahora estamos en condiciones de calcular el tensor de Einstein de acuerdo con la ecuación (B.1). Como las componentes distintas de cero de la métrica y el tensor de Ricci se encuentran en la diagonal, basta con calcular G_{tt} , G_{rr} , $G_{\theta\theta}$ y $G_{\phi\phi}$.

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R \\
&= e^{2(\varphi-\psi)} \left(\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\varphi' \right) - 2e^{2(\varphi-\psi)} \left[\varphi'' + \varphi' - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= e^{2(\varphi-\psi)} \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\varphi' - \varphi'' - \varphi' + \varphi'\psi' - \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') - \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= e^{2(\varphi-\psi)} \left[\frac{2}{r}\psi' - \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= \frac{1}{r^2}e^{2\varphi}e^{-2\psi} \left(2\psi'r + e^{2\psi} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{r^2}e^{2\varphi} \frac{d}{dr} \left[r(1 - e^{2\psi}) \right]. \tag{B.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R \\
&= -\varphi'' - \varphi'^2 + \varphi'\psi' + \frac{2}{r}\psi' - \frac{1}{2}e^{2\psi}(-2e^{-2\psi}) \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= \frac{2}{r}\varphi' + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \\
&= -\frac{1}{r^2}e^{2\psi}(1 - e^{2\psi}) + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}.
\end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\begin{aligned}
G_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}R \\
&= e^{-2\psi} [r(\psi' - \varphi') - 1] + 1 - \frac{1}{r^2}(-2e^{-2\psi}) \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= r^2e^{-2\psi} \left[\varphi'' + \varphi'^2 + \frac{1}{r}(\varphi' - \psi') - \varphi'\psi' \right] \\
&= r^2e^{-2\psi} \left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right].
\end{aligned} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
G_{\phi\phi} &= R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}R \\
&= \sin^2\theta \left\{ e^{-2\psi} [r(\psi' - \varphi') - 1] + 1 \right\} - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta(-2e^{-2\psi}) \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= e^{-2\psi}\sin^2\theta [r(\psi' - \varphi') - 1 + e^{2\psi}] + r^2\sin^2\theta e^{-2\psi} \left[\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi'\psi' + \frac{2}{r}(\varphi' - \psi') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\psi}) \right] \\
&= e^{-2\psi}\sin^2\theta [r\psi' - r\varphi' - 1 + e^{2\psi} + r^2\varphi'' + r^2\varphi'^2 - r^2\varphi'\psi' + 2r\varphi' - 2r\psi' + 1 - e^{2\psi}] \\
&= e^{-2\psi}\sin^2\theta [r\varphi' - r\psi' + r^2\varphi'' + r^2\varphi'^2 - r^2\varphi'\psi'] \\
&= \sin^2\theta G_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{B.49}$$

Bibliografía

- [1] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects*. Wiley-VCH, 1983.
- [2] E. Poisson and C. M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [3] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Benjamin Cummings, jan 2003.
- [4] M. W. Zemansky and R. Dittman. *Heat and thermodynamics : an intermediate textbook*. McGraw-Hill, 7 edition, 1997.
- [5] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press, 1985.
- [6] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. International Series of Monographs on Physics. OUP Oxford, 2008.
- [7] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Astrophysical monographs. University of Chicago Press, 1939.
- [8] G. P. Horedt. *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*. Astrophysics and Space Science Library. Springer Netherlands, 2004.
- [9] E. C. Nambo and O. Sarbach. Static spherical perfect fluid stars with finite radius in general relativity: a review. *Rev. Mex. Fis. E*, 18, oct 2020.
- [10] F. S. Guzmán, F. D. Lora-Clavijo, and M. D. Morales. Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics. *Rev. Mex. Fis. E*, 58(2):84–98, 2012.
- [11] M. F. O'Boyle, C. Markakis, S. Stergioulas, Nikolaos, and J. S. Read. Parametrized equation of state for neutron star matter with continuous sound speed. *Phys. Rev. D*, 102(8), 2020.
- [12] J. Schaffner-Bielich. *Compact Star Physics*. Cambridge University Press, 2020.
- [13] R. K. Pathria and P. D. Beale. *Statistical mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2nd ed edition, 1996.
- [14] M. Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [15] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Physics of Atoms and Molecules*. Prentice Hall, 2003.

- [16] E. A. Milne. Cold dense matter. *Nature*, 153:658, May 1944.
- [17] G. Fontaine, P. Brassard, and P. Bergeron. The potential of white dwarf cosmochronology. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 113(782):409–435, apr 2001.
- [18] J. Liebert. White dwarf stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 18(1):363–398, 1980.
- [19] B. M. S. Hansen and J. Liebert. Cool white dwarfs. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41(1):465–515, 2003.
- [20] G. P. McCook and E. M. Sion. A catalog of spectroscopically identified white dwarfs. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 121(1):1–130, mar 1999.
- [21] J. Liebert, P. A. Young, D. Arnett, J. B. Holberg, and K. A. Williams. The age and progenitor mass of sirius b. *The Astrophysical Journal*, 630(1):L69–L72, aug 2005.
- [22] H. E. Bond, G. H. Schaefer, R. L. Gilliland, et al. The sirius system and its astrophysical puzzles: Hubble space telescope and ground-based astrometry. *The Astrophysical Journal*, 840(2):70, may 2017.
- [23] J. L. Provencal, H. L. Shipman, D. Koester, F. Wesemael, and P. Bergeron. Procyon b: Outside the iron box. *The Astrophysical Journal*, 568(1):324–334, mar 2002.
- [24] H. E. Bond, R. L. Gilliland, G. H. Schaefer, et al. Hubble space telescope astrometry of the procyon system. *The Astrophysical Journal*, 813(2):106, nov 2015.
- [25] H. L. Shipman, J. L. Provencal, E. Høg, and P. Thejll. The mass and radius of 40 eridani b from hipparcos: An accurate test of stellar interior theory. *The Astrophysical Journal*, 488(1):L43–L46, oct 1997.
- [26] U. M. Schaudt. On static stars in newtonian gravity and lane-emden type equations. *Ann. Henri Poincaré*, 1:945–976, 2000.
- [27] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [28] J. M. Lattimer and M. Prakash. The physics of neutron stars. *Science*, 304:536–542, 2004.
- [29] M.G.F Kirsch, et al. Crab: the standard x-ray candle with all (modern) x-ray satellites. *International Society for Optics and Photonics*, 5898, 2005.
- [30] James M. Lattimer and Madappa Prakash. Ultimate energy density of observable cold baryonic matter. *Physical Review Letters*, 94:111101, mar 2005.
- [31] B. Povh, M. Lavelle, K. Rith, C. Scholz, and F. Zetsche. *Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [32] P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York, 2006.
- [33] Luis A. García. Estudio numérico de estrellas de quarks relativistas. Bachelor’s thesis, Facultad de Ciencias, UNAM, February 2019.
- [34] J. S. Read, B. D. Lackey, B. J. Owen, and J. L. Friedman. Constraints on a phenomenologically

- parametrized neutron-star equation of state. *Physical Review D*, 79(12), jun 2009.
- [35] S. Altiparmak, C. Ecker, and L. Rezzolla. On the sound speed in neutron stars. *The Astrophysical Journal Letters*, 939(2):L34, November 2022.
- [36] L. Rezzolla and O. Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. EBSCO ebook academic collection. OUP Oxford, 2013.
- [37] H. T. Cromartie, E. Fonseca, S. M. Ransom, et al. Relativistic shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, 4:72–76, January 2020.
- [38] R. W. Romani, D. Kandel, A. V. Filippenko, T. G. Brink, and W. Zheng. Psr j0952-0607: The fastest and heaviest known galactic neutron star. *The Astrophysical Journal Letters*, 934(2):L17, August 2022.
- [39] R. Belvedere. *Static and rotating neutron stars in a general relativistic formulation of all fundamental interactions and astrophysical applications*. PhD thesis, Sapienza - University of Rome, 2012.
- [40] J. L. Friedman and J. R. Ipser. On the maximum mass of a uniformly rotating neutron star. *Astrophysical Journal*, 314:594, March 1987.
- [41] G. Arroyo. Contraste numérico-observacional de modelos de estrellas de neutrones relativistas politropas. Bachelor’s thesis, Universidad Veracruzana, January 2018.
- [42] G. Arroyo, A. Cruz, F. D. Lora, et al. Neutron and quark stars: constraining the parameters for simple eos using the gw170817. *Astrophys Space Sci*, 365(43), feb 2020.
- [43] A. Aguayo Ortiz. *Estudios numéricos de fenómenos de acreción y eyección en astrofísica*. PhD thesis, Instituto de Astronomía, UNAM, 2022.
- [44] A. Aguayo-Ortiz and S. Mendoza. aztekas: Grhd numerical code, jun 2021.
- [45] E. Tejeda, A. Aguayo-Ortiz, and X. Hernandez. Choked accretion onto a schwarzschild black hole: A hydrodynamical jet-launching mechanism. *Astrophys. J.*, 893:81, 2020.
- [46] E. Tejeda and A. Aguayo-Ortiz. Relativistic wind accretion on to a schwarzschild black hole. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 487(3):3607–3617, 2019.
- [47] A. Aguayo-Ortiz, E. Tejeda, and X. Hernandez. Choked accretion: from radial infall to bipolar outflows by breaking spherical symmetry. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 490(4):5078–5087, 2019.
- [48] A. Aguayo-Ortiz, S. Mendoza, and D. Olvera. A direct primitive variable recovery scheme for hyperbolic conservative equations: the case of relativistic hydrodynamics. *PLoS One*, 13, 2018.
- [49] A. Aguayo-Ortiz, E. Tejeda, O. Sarbach, and D. López-Cámara. Spherical accretion: Bondi, michel and rotating black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(4):5039–5053, apr 2021.
- [50] A. Aguayo-Ortiz, O. Sarbach, and E. Tejeda. Choked accretion onto a kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 103(2), 2021.
- [51] Angel B. Diaz. Solving the equations for neutron star structure using the enthalpy method. Master’s thesis, California State University, Long Beach, January 2019.

- [52] E. Annala, T. Gorda, A. Kurkela, J. Nättilä, and A. Vuorinen. Evidence for quark-matter cores in massive neutron stars. *Nature Physics*, 16(9):907–910, June 2020.