



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
CIUDAD UNIVERSITARIA

MODELACIÓN DE UN SISTEMA TIPO ONDA-FLUJO
ZONAL EN AMBIENTES IONOSFÉRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

PEDRO ISMAEL GUERRERO ENCISO

TUTOR:

DR. JULIO J. MARTINELL BENITO

Coyoacán, CDMX, 2024





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mi hermana, Desireé, por ser mi fuente más grande de inspiración y admiración.

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi profundo agradecimiento al Dr. Julio Javier Martinell Benito por su invaluable apoyo y orientación a lo largo de mi formación como estudiante durante la licenciatura. Su tutela y disposición para llevar a cabo este proyecto han sido fundamentales para el desarrollo y existencia del mismo, así como en mi camino hacia convertirme en un futuro científico y en mi crecimiento personal.

Además, me complace expresar mi sincero agradecimiento a las doctoras Marni Margarita Pazos Espejel y María Dolores Maravilla Meza, así como a los doctores Francisco Javier Mandujano Sánchez y José Julio Emilio Herrera Velázquez. Sus valiosos comentarios y correcciones han contribuido significativamente a la mejora del trabajo aquí presentado.

De igual manera agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la DGAPA-UNAM a través del proyecto IN110021, *Nuevas perspectivas en la electrodinámica de los plasmas en el contexto espacial y de fusión nuclear*, por el apoyo recibido durante la realización de mi servicio social.

Agradezco sinceramente a mi padre, quien ha sido mi constante compañía y guía durante el proceso de desarrollo de este proyecto, así como en todas las facetas de mi vida. A mi madre, le agradezco el apoyo y afecto incondicional que me ha brindado a lo largo de todos estos años.

No puedo pasar por alto la contribución de mi mejor amigo, Luis Camarillo, quien ha compartido conmigo tanto momentos de risas como de lágrimas a lo largo de tantos años. Más que un amigo, ha sido un hermano para mí, un compañero en debates que van desde lo mundano hasta los temas más abstractos en el ámbito científico.

A Diana, por su paciencia comprensión y cariño. Por ser ese lugar seguro a donde puedo acudir a desahogarme y a aclarar mis ideas.

A mis amigos, por siempre brindarme ánimos e impulsarme a realizar mis proyectos.
 Y a Gaea, por brindarme la motivación y alegría necesarios para consolidar mis metas y objetivos.

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	VII
1 Eventos Zonales y fenómenos ondulatorios	1
§1.1 Introducción	1
§1.2 Fenómenos Zonales	2
§1.2.1 Flujo Zonal	2
§1.2.2 Campos Zonales	3
§1.3 Fenómenos Ondulatorios	4
§1.3.1 Ondas de Deriva	4
§1.3.2 Ondas de Alfvén	5
§1.3.3 Ondas de Rossby	6
§1.3.4 Resumen de Ondas	8
§1.4 Elementos de Teoría de Turbulencia	8
§1.4.1 Cascada en 3D	8
§1.4.2 Cascada y Cascada inversa 2D	10
§1.4.3 La Ecuación de Charney–Hasegawa–Mima	11
§1.4.4 El problema de la cerradura	12
§1.5 Conclusión	13
2 La Ionosfera	14

§2.1	Introducción	14
§2.2	Ionosfera y su Relación con la Atmósfera Terrestre	14
§2.2.1	Fenómenos Ondulatorios en Ambientes Ionosféricos	17
§2.3	Flujos y Campos Zonales en ambientes ionosféricos y planetarios	18
§2.3.1	Modelo de Kaladze	18
§2.4	Conclusión	19
3	Modelos de tipo Depredador-Presa	20
§3.1	Introducción	20
§3.2	Lotka-Volterra	20
§3.3	Sistemas Tokamak	21
§3.4	Generalización del modelo de Terry-Diamond-Carreras	25
§3.5	Conclusión	26
4	Modelo para la capa E de la Ionosfera	27
§4.1	Introducción	27
§4.2	Ecuaciones para el modelado de la capa E	27
§4.3	Separación de Escalas	30
§4.4	Relación de Dispersión y Escala Temporal	31
§4.5	Componentes Fluctuantes	33
§4.5.1	Energía de las Fluctuaciones Magnéticas	33
§4.5.2	Enstrofía	35
§4.6	Componentes Zonales	37
§4.6.1	Energía del Flujo Zonal	37
§4.6.2	Energía del Campo Zonal	39
§4.7	Sistema de Ecuaciones	40
§4.8	Solución Numérica de las Ecuaciones	40
§4.8.1	Discretización de las ecuaciones: Método de Euler y Runge-Kutta	40
§4.8.2	Algoritmo	43
5	Resultados del Modelo Ionosférico	44

§5.1 Pruebas	44
§5.1.1 Lotka-Volterra	44
§5.1.2 Modelo de Carreteras-Diamond-Terry	45
§5.2 Puntos de equilibrio	45
§5.3 Modelado de Casos Específicos	51
§5.3.1 Caso 1	51
§5.3.2 Caso 2	53
§5.3.3 Caso 3	53
§5.3.4 Caso 4	54
§5.3.5 Caso 5	55
§5.3.6 Caso 6	56
6 Conclusiones	64
A Notación	70
B Código para las simulaciones numéricas escrito en <i>C++</i>	73
C Código para el análisis de las simulaciones escrito en <i>Python</i>	82
D Código para la obtención y análisis de los puntos de equilibrio escrito en <i>Mathematica</i>	98

Índice de figuras

2.1 Capas de la Ionosfera	16
4.1 Sistema de Coordenadas	28
4.2 Diagrama de flujo para las simulaciones numéricas	43
5.1 Modelo de Lotka-Volterra	45

5.2	Modelo de Carreras-Diamond-Terry	46
5.3	Campo zonal y fluctuaciones magnéticas débiles.	58
5.4	Campo zonal débil.	59
5.5	Campo zonal débil y fluctuaciones magnéticas moderadas.	60
5.6	Campo zonal débil y fluctuaciones magnéticas intensas	61
5.7	Modelo sin campo zonal.	62
5.8	Modelo de fluctuaciones.	63

Introducción

La ionosfera terrestre, al fungir como una interfase entre la atmósfera neutra y el espacio exterior, presenta una dinámica que se ve afectada tanto por los procesos atmosféricos, como por la radiación proveniente del Sol, lo que genera un sistema con una complejidad elevada, misma que puede dar origen a propiedades emergentes, típicas de estos sistemas [21], o sistemas autorregulados.

Es este proceso mediante el cual un sistema consigue estabilizarse sin la intervención de un sistema auxiliar externo, el que compete al presente trabajo. Por lo cual se emplearán herramientas de una gran diversidad de ramas del conocimiento como son la dinámica de fluidos, la dinámica atmosférica, física de plasmas, enfocada a la dinámica de la ionosfera y en sistemas de fusión controlada, así como la teoría de turbulencia.

Partiendo de las ecuaciones de momento para un fluido débilmente ionizado y diluido, así como de la ley de Ohm generalizada para un fluido con resistividad despreciable, se desarrolló un modelo de dimensión 0, es decir, con dependencia únicamente temporal, que describe la evolución de la energía de los flujos y campos zonales, así como la de la enstrofia, y la energía asociada a las fluctuaciones de origen magnético.

Lo anterior se realizó tomando como punto de partida las ecuaciones presentadas por Kaladze et al. en [16], para la capa E de la ionosfera, y siguiendo el proceso realizado por Terry, Diamond y Carreras a lo largo de múltiples investigaciones [10, 7, 8, 32, 26, 2].

El modelo obtenido permite entender de manera cualitativa y clara los papeles que juegan cada una de las componentes que lo integran, enstrofia, \mathcal{E} , energía del flujo zonal, U , energía del campo zonal, E_b , y energía de las fluctuaciones magnéticas, E_A . En este caso, el campo zonal actúa de manera análoga al comportamiento de un depredador sobre las fluctuaciones magnéticas, mientras que el flujo zonal produce el mismo efecto sobre

las fluctuaciones cinéticas. Por otra parte, las fluctuaciones cinéticas en si mismas generan un amortiguamiento sobre las fluctuaciones magnéticas, con lo cual fue posible encontrar un sistema cuya dinámica es análoga a la de un sistema de tipo depredador presa de 3 especies, siendo las especies involucradas E_A, U y \mathcal{E} .

El trabajo aquí presentado consta de 6 capítulos, y 4 anexos, mismos que se distribuyen de la manera siguiente:

El primer capítulo funciona como una breve, pero necesaria introducción a los conceptos básicos asociados a la dinámica de los flujos zonales, su importancia en sistemas atmosféricos y sistemas tokamak, seguida de una revisión general de las ondas principales presentes en ambos sistemas. Posteriormente se introducen los procesos conocidos como cascadas tridimensionales y cascadas en dos dimensiones, responsables de la interacción entre los fenómenos previamente explicados, cuya información se condensa en la ecuación de Charney-Hasegawa-Mina.

El segundo capítulo brinda todos los conceptos básicos asociados a la ionosfera necesarios para la comprensión del modelo. En él se discuten cuales son los orígenes de las ionosfera terrestre, su composición y su dinámica conjunta con la atmósfera. En adición, se analiza en manera amplia el artículo de Kaladze et al. [16] acerca de la dinámica de la capa E y la posibilidad de la generación espontánea de flujos y campos zonales en dicha región.

El tercer capítulo consiste en una breve explicación del modelo de Lotka-Volterra para modelar poblaciones, así como la deducción detallada del modelo realizado por Carreras, Diamond y Terry para explicar la transición entre los estados de bajo y alto confinamiento en sistemas tokamak a partir de la interacción entre las ondas de deriva y los flujos zonales. Dicho modelo a su vez puede ser generalizado a la interacción entre ondas de Rossby y los flujos atmosféricos haciendo uso de la ecuación de Charney-Hasegawa-Mina.

El cuarto capítulo consiste en el desarrollo detallado del modelo, conjuntando los elementos expuestos en los capítulos anteriores, mientras que el capítulo 5 consiste en la presentación y análisis de resultados provenientes del análisis de los puntos de equilibrio del sistema y las simulaciones numéricas del mismo. Por último, el capítulo 6 funciona como un cierre al trabajo, siendo esta la conclusión del mismo.

Capítulo 1

Eventos Zonales y fenómenos ondulatorios

1.1. Introducción

El presente capítulo disecciona por separado los elementos físicos básicos y la interacción entre los mismos, con la finalidad de sentar las bases necesarias para el desarrollo adecuado del modelo que describa la evolución de la energía y enstrofía en la capa E de la ionosfera.

Con dicha finalidad el capítulo consta de tres secciones, la primera busca responder las preguntas "¿qué son los flujos y campos zonales? ¿Cómo se generan?z "¿En que ambientes ocurren?". La segunda sección busca plantear cuales son los tipos de ondas asociados a la generación de cascadas de energía (sección 3), familiarizando así al lector con las características principales y orígenes de cada clase de ondas.

Por último, la sección tres busca dar explicación al mecanismo que describe la interacción entre ondas y componentes zonales, siendo estos las cascadas directa (para flujos en dos y tres dimensiones) e inversa (exclusivas de flujos bidimensionales). En adición, este capítulo hace referencia al problema de cerradura presente en las teorías de turbulencia.

1.2. Fenómenos Zonales

1.2.1. Flujo Zonal

En el campo de la geofísica y las ciencias atmosféricas, un flujo zonal es un movimiento de material (un flujo) confinado a bandas o "zonas" de una determinada latitud, por lo que usualmente presentan una geometría bidimensional, en lo que en esencia se comporta como un círculo. Sin embargo, el término también ha sido empleado en el ámbito de la física de plasmas, en particular en el confinamiento magnético de los sistemas tokamak, para referirse a la componente promedio de la velocidad del plasma en la dirección poloidal, confinada en una región radial finita [6].

Los flujos zonales son estructuras bastante habituales cuando de estudios atmosféricos se trata, como es el ejemplo de las 30 regiones de jets zonales presentes en la atmósfera Joviana, en la atmósfera terrestre o en los océanos [24].

En el ámbito de la física de plasmas, típicamente los flujos zonales se refieren a fluctuaciones del campo eléctrico de frecuencia 0 y con número de onda radial finito [15], sin embargo, existe una generalización del modelo, los modos acústicos geodésicos o GAMs por sus siglas en inglés [24]. Se trata de flujos poloidales simétricos que en general se asocian a un caso extremo de una celda convectiva oscilatoria. Sin embargo, es dicha simetría azimutal la que evita que los mismos encuentren una fuente de energía proveniente del gradiente de funciones como la temperatura, la densidad de partículas, etc. Por lo que se requiere de un fenómeno de cascada inversa para sustentar de energía al flujo [7, 15].

Los flujos zonales son cruciales dentro del marco de los plasmas confinados magnéticamente, debido a que cizallan el flujo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, distorsionando las ondas de deriva, estabilizando el confinamiento [7], lo que a su vez permite decir que el flujo zonal es un ensamble de flujos cizallados que regulan las fluctuaciones debidas a las ondas de deriva.

En general, se asume que los flujos zonales tienen una longitud de onda grande comparada con la escala de la turbulencia, lo que permite describir la interacción entre las ondas y el flujo zonal en términos de un sistema de ecuaciones en diferentes escalas, lo que a su vez conserva la acción de las ondas en el espacio fase.

Existen tres características que hacen que los flujos zonales resalten por encima de

otros modos vibracionales de numero de onda en la dirección toridal, n , pequeña:

1. No presentan apantallamiento por parte de los electrones de Boltzmann, como lo hacen los modos de deriva, por lo que tiene un inercia efectiva menor.
2. Los modos $n = 0$ y $k = 0$ son modos de mínimo amortiguamiento de Landau.
3. Son incapaces de producir perturbaciones $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Un ambiente donde es natural que aparezca la presencia del flujo zonal es en el estudio de la turbulencia bidimensional, que en ambientes atmosféricos puede estar descrita por la ecuación

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \tilde{f} + D \quad (1.1)$$

con ψ una función de corriente, tal que, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi$, la velocidad [24], es decir, se trata de un potencial cuyas derivadas espaciales dan origen al vector de velocidades. Por otra parte, se ha mostrado que los flujos zonales pueden ser excitados debido a otro tipo de ondas, como las de Alfvén, tal como explica Shukla [30].

1.2.2. Campos Zonales

Debido a la interacción entre ondas electromagnéticas, como son las ondas de Alfvén, y los flujos zonales, puede surgir una nueva propiedad emergente, un campo magnético intenso [12]. Para el plasma ionizado débilmente de la capa E de la ionosfera, lo anterior puede suceder siempre que el producto $k_x k_z B_{0z} \beta$ sea diferente de 0, tal como se explica en [16], donde k_x, k_y son el numero de onda en las direcciones x, z respectivamente, B_{0z} es el campo geomagnético y β es la variación del parámetro de Coriolis (ver capítulo 4.3 para su definición).

Para que este tipo de estructuras surjan a partir de la interacción entre ondas, es necesario considerar la existencia de ondas de bombeo, mismas que se acoplan con los campos y flujos zonales mediante las cantidades perturbadas [12, 29].

1.3. Fenómenos Ondulatorios

1.3.1. Ondas de Deriva

Las ondas de deriva vienen asociadas a las no homogeneidades en el medio [11], su deducción se realiza a partir de las siguientes suposiciones:

1. Los gradientes se encuentran en la dirección x , esto indica que la energía libre se acumula en esta dirección para el sistema. Tal es el caso de la densidad del plasma, ρ .
2. Las perturbaciones en la dirección y, z son sinusoidales $\tilde{n} = n_0 \exp[-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$. Lo anterior implica que el vector de onda, \mathbf{k} , tenga componentes en la dirección y y z .
3. Se emplea una aproximación local a las inhomogeneidades para obtener la relación de dispersión
4. $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{E} = -\nabla\Phi$.
5. $T = cte.$ y los iones se consideran frios.
6. Se considera que la longitud de onda de las ondas, $\lambda \ll L_n$, con $L_n^{-1} = (1/n_0)(dn_0/dx)$ la escala de las variaciones de densidad .
7. $\omega \ll k_z v_{the}$, con v_{the} la velocidad térmica de los electrones. Bajo dicha suposición, los electrones se comportan adiabáticamente lo que permite que las perturbaciones, \tilde{n} , tengan la forma

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{e\Phi}{T_e}.$$

Considérese ahora las ecuaciones de continuidad y momento para los iones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} &= \nabla \cdot (n_0 \tilde{\mathbf{v}}_i) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_i}{\partial t} &= \frac{e}{m_i} \nabla \Phi + \frac{e}{m_i c} (\tilde{\mathbf{v}}_i \times \mathbf{B}_0). \end{aligned}$$

Con lo anterior, se pueden encontrar las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}_{i\perp} &= i \frac{c}{B_0} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}) \Phi + \frac{c\omega}{B_0 \Omega_{ci}} \mathbf{k}_\perp \Phi, \\ \tilde{v}_{iz} &= \frac{ek_z}{m_i \omega} \Phi\end{aligned}$$

En el régimen de frecuencias bajas, el segundo termino es despreciable, por lo que combinando con la ecuación de continuidad se encuentra

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \left(\frac{\omega_*}{\omega} - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} \right) \frac{e\Phi}{T_e},$$

con $\omega_* = k_y v_0 = \frac{k_y T_e}{m_i \Omega_{ci} L_n}$ y v_0 la velocidad de deriva. Considerando la quasi-neutralidad del plasma e igualando las perturbaciones en la densidad de los iones y electrones se tiene la relación de dispersión

$$\omega^2 - \omega\omega_* - k_z^2 c_s^2 = 0,$$

característica de las ondas de deriva.

1.3.2. Ondas de Alfvén

Se trata de ondas de baja frecuencia que aparecen en un plasma magnetizado, cuya resistividad es cercana a cero. Las ondas de Alfvén tienen dos efectos, uno de compresión y uno de cizalla [25].

Para considerar el efecto de cizalla, la ecuación de momento que describe al plasma es

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

En general, la evolución del campo magnético está dada por

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_m - (\mathbf{v}_m \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m)$$

Considerando un fluido incompresible, homogéneo y con $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + \tilde{B} \hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{v}_m = \tilde{v}_x \hat{\mathbf{x}}$, con las variables con tilde perturbaciones de tipo ondulatorio. Con esto se encuentra que las ecuaciones linealizadas son

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} &= \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z}.\end{aligned}$$

El cuál es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado, mismo que se puede desacoplar derivando la primer ecuación respecto al tiempo y la segunda respecto a z para obtener la ecuación de la velocidad, y lo opuesto para obtener la ecuación para el campo, con lo cuál se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{v}_x &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{B}_x &= 0\end{aligned}$$

Las cuales son ecuaciones de onda, cuya solución puede escribirse como $n = \hat{n} \sin[k_z(z \pm v_A t)]$, con $v_A = (B_0^2 / \mu_0 \rho_m)$ la velocidad de fase de las ondas, conocida como velocidad de Alfvén.

Este tipo de ondas conservan el volumen entre las líneas del campo magnético, por lo que el mecanismo que da origen a estas ondas es una tensión de magnitud igual a 2 veces la presión magnética, por lo que $v_A = \sqrt{\mathcal{T} / \rho_m}$, con \mathcal{T} la tensión sobre las líneas de campo magnético.

En el caso de las ondas compresionales, las mismas viajan en la dirección del campo magnético comprimiéndolo. Si la presión del gas es mucho menor que la presión magnética, la velocidad de fase es la de Alfvén, en caso contrario, la velocidad de propagación es $v_\phi = \sqrt{v_A^2 + c_s^2}$.

1.3.3. Ondas de Rossby

Las ondas de Rossby son las ondas de larga escala más importantes para la meteorología, su longitud de onda es tal que se les denomina, *ondas planetarias*. Pueden entenderse como propagaciones de la vorticidad en una línea cerrada presentes en las parcelas de un fluido, alineadas a lo largo de un círculo de latitud constante. Se trata de un movimiento de conservación de vorticidad absoluta, ya que existe debido a las variaciones del parámetro de Coriolis, β , con la latitud, para atmósferas barotrópicas de profundidad constante y viscosidad despreciable, mientras que en atmósferas baroclínicas, se debe al gradiente del

potencial de la vorticidad isoentrópico [13].

Considérese la ecuación de vorticidad barotrópica para un plano en latitud media

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta + \beta v = 0,$$

Si asumimos que las velocidades son las zonales más una perturbación pequeña, se tiene que

$$u_x = \bar{u}_x + \tilde{u}_x, \quad u_y = \tilde{u}_y, \quad \zeta = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} = \zeta'$$

Ahora se define a la función de corriente ψ' , tal que

$$\tilde{u}_x = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad \tilde{u}_y = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

con lo cuál $\zeta' = \nabla^2 \psi'$, con lo que la ecuación de vorticidad toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$$

Se supone una solución de la forma $\psi' = Re[\Psi exp(i\phi)]$, con $\phi = k_x x + k_y y - \omega t$, con k_x, k_y los números de onda en las componentes zonal y meridional. Con lo anterior, la ecuación puede ser linealizada, con lo cuál se tiene

$$(-\omega + k\bar{u})(-k_x^2 - k_y^2) + k\beta = 0$$

lo cual lleva a ,

$$\omega = \bar{u}k - \beta k / (k_x^2 + k_y^2) \tag{1.2}$$

con lo que en el limite donde el flujo promedio puede despreciarse y $k_y \rightarrow 0$,a velocidad de fase $c = \omega/k_x = -\beta/k_x^2$, lo que implica que las ondas de Rossby se mueven en dirección este respecto al flujo zonal y son ondas dispersivas.

1.3.4. Resumen de Ondas

Comparativa entre ondas			
Tipo de Onda	Deriva	Alfvén	Rossby
Origen	Inhomogeneidades en el medio	Plasma Magnetizado con resistividad 0	Variaciones en el parámetro de coriolis
Ecuaciones Básicas	Perturbaciones para los electrones, y ecuaciones de momento y continuidad para iones	Ecuación de momento y ley de Ohm Generalizada	Vorticidad Barotópica
Relación de Dispersión	$\omega^2 - \omega\omega_* - k_z^2 c_s^2 = 0$	$\omega^2 = \frac{kv_a^2}{1+v_a/c}$	$(-\omega + k\bar{u})(-k^2 - l^2) + k\beta = 0$

1.4. Elementos de Teoría de Turbulencia

1.4.1. Cascada en 3D

La idea del fenómeno indica que la energía se inyecta a un sistema a gran escala, dando origen a torbellinos más pequeños, es decir, la energía pasa de una mayor a menor escala variando de forma local, esto resulta en el escalamiento de Kolmogorov [24]. Para su deducción, se seguirá lo desarrollado por Parker [24] ; se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

En adición, es necesario realizar 3 suposiciones:

1. La turbulencia es homogénea e isotópica estadísticamente.
2. La energía fluye localmente en el espacio de las $k \Rightarrow E(k) = f(\epsilon, k)$
3. Existe un rango inercial en el espacio de las k donde la turbulencia no sufre efecto por forzamientos de escalas largas ni de viscosidad a pequeñas escalas,

Si la energía se inyecta a una tasa ϵ en el fenómeno de mayor escala, entonces, ya que la energía fluye de manera local en el espacio de las k y no se disipa hasta que llega al dominio de la viscosidad (escalas pequeñas), en el estado estacionario estadístico, el flujo de energía debe ser igual a ϵ , hasta que se disipa al acercarse al régimen de la viscosidad.

Por otra parte, en el estado intermedio la turbulencia no puede depender del número de onda en la región de forzamiento o en la región viscosa, sino sólo de la escala k y ϵ . Lo anterior se puede expresar como la de advección en el espacio de las k_s .

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\Delta k}{\Delta t} E(k, t) \right) = \epsilon \delta(k - k_f).$$

La ecuación representa una conservación local, la cual considera los efectos de forzamiento debidos al fenómeno a gran escala, pero no a la disipación, y puede considerarse como una variación de la ecuación de *Fokker-Planck*, misma que predice la evolución de la densidad de probabilidad de una variable a lo largo del tiempo. Aquí, el coeficiente $\Delta k / \Delta t$ es la velocidad de deriva en el espacio de las k y es válida para $k > k_f$, donde k_f es el número de onda en la escala de forzamiento.

Por otra parte el Δt se conoce como el tiempo de correlación no lineal o *eddy turnover time* τ_k , que se define como el tiempo que le toma a un elemento de fluido de velocidad v_k en atravesar un vórtice de tamaño $l \sim k^{-1}$, es decir

$$\tau_k = \frac{l}{v_k}, \text{ con } \frac{1}{2} v_k^2 = \int_{k/2}^k E(k') dk' \sim k E(k).$$

Para un k fijo, τ_k esta dado por

$$\tau_k \sim \frac{1}{k v_k} \sim k^{-3/2} E^{-1/2} \sim \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}.$$

ya que por análisis dimensional $\epsilon \sim v_k^3 k$. Por otra parte, a partir de la ecuación de Navier-Stokes la escala de tiempo para un proceso que ocurre en un medio con viscosidad ν , en términos de k es

$$\tau_k^\nu = \frac{1}{\nu k^2}.$$

Por lo cual, la dinámica se ve dominada por el proceso más rápido, es decir, la disipación se vuelve importante para k_ν , donde $\tau_k^\nu = \tau_k$. Para $k < k_\nu$ la inercia domina, mientras que $k > k_\nu$ el efecto de la viscosidad es el dominante, a su vez esto da un estimado para la escala de viscosidad o de Kolmogorov

$$l_\nu = k_\nu^{-1} = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

la tasa de disipación es $\hat{E} = \langle \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \rangle$. Sin embargo, para escalas de Kolmogorov $\nabla \sim k_\nu$ encontramos que

$$\hat{E} \sim \nu v_\nu^2 k_\nu^2 \sim \nu^3 k_\nu^4 \sim \epsilon$$

de aquí se obtiene que la disipación es independiente de la viscosidad y ocurre siempre a escalas pequeñas.

1.4.2. Cascada y Cascada inversa 2D

Al igual que en la cascada en tres dimensiones, las propiedades que dan origen a los fenómenos de cascada son la aleatoriedad, debida a la naturaleza no determinista del flujo turbulento, y la no linealidad convectiva, derivada de la interacción no local de las diferentes velocidades en el fluido de interés [5]. Ambas cascadas comparten un fenómeno característico, el mezclado debido a las interacciones caóticas y autoinducidas existentes entre los elementos del flujo turbulento, sin embargo, las cascadas en 2D muestran dos componentes, una cascada de enstrofia que va de la escala grande a la de menor escala, un espectro similar de energía y un flujo de energía inverso de escala pequeña a gran escala [5, 24]. En general, este tipo de turbulencia aparece en flujos incompresibles de la forma $\mathbf{u}(x, y) = (u_x, u_y, 0) = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{z}})$, donde el número de Reynolds es alto, siendo este hecho responsable de la casi conservación de la energía, una de las características más peculiares

de la turbulencia bidimensional.

Las tres hipótesis que dan soporte al sistema son:

1. La enstrofia pasa de manera continua hacia las estructuras de escala pequeña, donde es destruida.
2. La energía se distribuye de manera constante en el tiempo en los torbellinos (estructuras turbulentas).
3. La energía cinética se envía de las estructuras de pequeña escala hacia las de gran escala.

En este esquema de turbulencia se considera que el forzamiento de los torbellinos ocurre en una escala de número de onda intermedia. Considerando isotropía y homogeneidad estadística se encuentra que el espectro de energía en la cascada inversa es $E(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$, con ϵ el flujo de energía en el espacio del número de onda, mientras que el espectro de enstrofia de la cascada directa es $E(k) = \eta^{2/3} k^{-3}$, con η el flujo de enstrofia en el espacio del número de ondas [24].

1.4.3. La Ecuación de Charney–Hasegawa–Mima

De acuerdo a lo expuesto por Shivamoggi [28], la ecuación de Charney-Hasegawa-Mima, es similar a la ecuación de Euler para fluidos incompresibles. Sin embargo, el fluido descrito por la misma puede moverse a lo largo del eje de rotación (en el caso de fluidos geofísicos) o seguir el movimiento de deriva de los electrones originado por la presencia de un campo magnético (plasmas de fusión). Se trata de una ecuación que describe la evolución de la función $\psi(x, y, z, t)$ que representa a la función de flujo (en ambientes geostroficos) o el potencial eléctrico (en física de plasmas)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - F\psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0,$$

con β la derivada en la dirección norte-sur del parámetro de Coriolis o el cociente entre la presión del plasma y la presión magnética. Esta ecuación presenta dos invariantes

cuadráticos, la energía (E) y la enstrofia (Q), tal como expresa Connaughton et al.[3].

$$E = \frac{1}{2} \int [(\nabla\psi)^2 + F\psi^3] d\mathbf{x},$$

$$Q = \frac{1}{2} \int [q - \beta y]^2 d\mathbf{x},$$

además, la misma cuenta con un término lineal que permite que el sistema soporte el movimiento de ondas. A su vez, posee un límite débilmente no lineal, lo que en conjunto permite que el sistema se comporte como un conjunto de ondas que sufre perturbaciones débiles, pero cuyo efecto acumulativo puede dar origen a un flujo zonal.

1.4.4. El problema de la cerradura

Es bien sabido que cualquier teoría de turbulencia debe trabajar con cantidades estadísticas [5], por ejemplo, puede tomarse una ecuación de la forma

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{v}), \quad (1.3)$$

es decir, la ecuación de momento. Sin embargo, el comportamiento de \mathbf{v} puede ser caótico y complejo, por lo tanto, en ocasiones es preferible enfocarse en el comportamiento de $\langle \mathbf{v} \rangle$ o $\langle |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \rangle$, debido a que estas cantidades son reproducibles y bien comportadas. Es por este motivo que ahora resulta necesario desarrollar una serie de ecuaciones que describan a dichas cantidades, de tal manera que las ecuaciones resultantes tengan la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{propiedad estadística de } \mathbf{u}] = \mathbf{F}(\text{otras propiedades estadísticas de } \mathbf{u}).$$

y por lo tanto, están acopladas entre sí. Sin embargo, existe un problema en el desarrollo de este tipo de ecuaciones, debido a que siempre existen más variables estadísticas, que ecuaciones en el sistema. Es decir, se tiene una cadena de ecuaciones ligadas unas con las otras, llamada jerarquía de ecuaciones, que seguirán de esta manera hasta el infinito, motivo por el cual se debe romper la cadena para cerrar el sistema de ecuaciones. A esto se conoce como el *problema de cerradura*. Este problema se deriva de los términos no lineales existentes en el lado derecho de la ecuación 1.3, por lo que es necesario hacer

suposiciones heurísticas acerca del sistema basadas en información adicional de algún tipo, con la finalidad de romper el acople en algún nivel . Es este proceso el que se conoce como *cerradura*.

1.5. Conclusión

Como se explicó, la naturaleza de los campos zonales evita que este tipo de estructuras obtengan energía de fuentes diferentes a la cascada directa y cascada inversa, lo que provoca un intercambio continuo de energía entre las fluctuaciones y las componentes zonales. Una forma de estudiar este tipo de sistemas consiste en separar las ecuaciones en escalas, la primera que describe el comportamiento promedio del fluido y la segunda, que describe las fluctuaciones del mismo. Lo anterior hace necesario introducir alguna cerradura de origen empírico que permita la existencia del mismo número de variables y ecuaciones en el sistema. Es así que los párrafos anteriores resumen el tipo de sistemas que se abordarán en el modelo desarrollado en el presente trabajo y cuya descripción completa aparece en el capítulo 4.

Capítulo 2

La Ionosfera

2.1. Introducción

El presente capítulo busca brindarle al lector la información necesaria sobre el medio en el cual se dan los fenómenos que se utilizan en el capítulo 4 , para lo cual se hace una revisión breve de la ionosfera terrestre, explicando las peculiaridades, orígenes y composición de cada una de las capas que la componen y cómo se relacionan con la dinámica atmosférica.

En adición, se incluye una sección haciendo referencia a los fenómenos ondulatorios presentes en esta peculiar capa de la Tierra, lo que conduce al modelo de Kaladze et al [16], que confirma la viabilidad de que se desarrollen campos y flujos zonales en la capa E de la ionosfera.

2.2. Ionosfera y su Relación con la Atmósfera Terrestre

Se puede definir como ionosfera, a toda capa de gas parcialmente ionizadas, que contiene un número importante de iones y electrones con energías por debajo de $1eV$, pero en cantidades que permiten considerar estudiarlos como fluidos cuasi-neutros. Estos iones se generan debido a la irradiancia XUV proveniente de los fotones solares, que ionizan N_2 y O_2 principalmente. [18, 27, 22].

Estas capas rodean a cuerpos planetarios, algunos satélites naturales y hasta cometas. Puede considerarse como una interfase entre el objeto y el espacio, motivo por el cual, el estudio de estas regiones es una rama en sí misma de las ciencias espaciales, ya que ni la cantidad de gas neutro ni la presencia de iones puede ser despreciada. En adición, debido a su ubicación, las ionosferas presentan un acoplamiento con las atmósferas planetarias, así como con las magnetosferas, motivo por el cual esta región es del dominio tanto de ciencias atmosféricas como de las ciencias espaciales y la física de plasmas [18, 4, 27]. .

En el caso del planeta Tierra, esta capa fue propuesta en 1902 por Kennelly y Heaviside, para explicar porque era posible transmitir ondas de radio a través del Océano Atlántico. Sin embargo, fue verificada hasta 1925 por Appleton y Barnett[19].

Por su parte, la atmósfera terrestre presenta un perfil de temperatura el cual permite clasificarla en diversas regiones, por ejemplo, la Troposfera que concentra alrededor del 80% de la masa presente en la atmósfera, y llega hasta los 10 a 15 km sobre el nivel del mar, en general la temperatura tiende a disminuir a un ritmo de 7 K/km respecto a la temperatura superficial [18, 4].

Una vez que se alcanza la Tropopausa, la temperatura comienza a aumentar, indicando la entrada a la Estratosfera, misma que llega hasta los 50 km de altura. En esta región, la capa de ozono absorbe una parte de la radiación UV proveniente del Sol [18, 4].

Posteriormente, la temperatura desciende de nuevo tras cruzar la Estratopausa, dando paso a la región conocida como Mesosfera, aquí, el enfriamiento radiativo, es decir, la emisión de energía en forma de radiación térmica, crea una disminución de temperatura de hasta 130 K, hasta llegar al mínimo conocido como Mesopausa, en esta región se comienzan a crear nuevas especies químicas interactuantes [18, 4].

A los 90 km inicia una capa conocida como Termosfera, en la cual, los fotones con energías correspondientes a rayos X son absorbidos, incrementando la temperatura de la región hasta los 1000 K. Sin embargo, su composición es uniforme debido a múltiples mecanismos de turbulencia, lo que da origen a la Homosfera. Los mecanismos de mezcla se vuelven casi inexistentes al pasar la Turbopausa, que es la región a partir de la cual la difusión molecular es el mecanismo de mezclado principal, por lo que a mayores alturas se generan estratos dependiendo del gas; a esta capa se le conoce como Heterosfera. Su

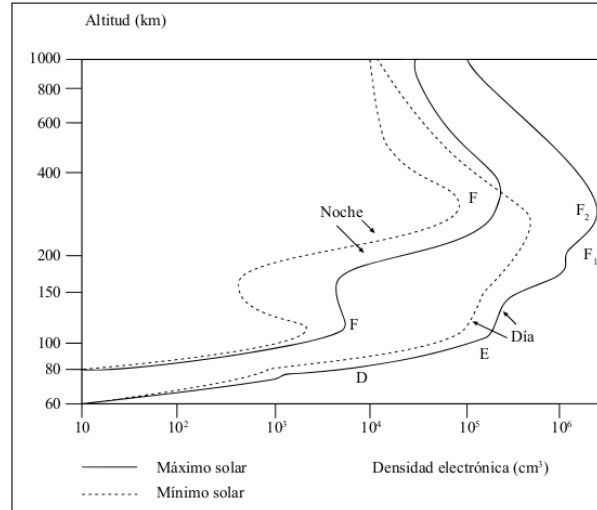


Figura 2.1: Capas de la Ionosfera

composición principal son N_2 , O_2 , Ar y CO_2 [18, 4, 27].

En contraste, la ionosfera no presenta un comportamiento tan bien definido a lo largo del día, esta capa es susceptible a la interacción con el Sol, principalmente debido a que su estructura en capas se encuentra directamente asociada a la penetración de los fotones de diferentes energías, mediante el proceso de foto-ionización, mecanismo mediante el cual se generan iones a partir de partículas neutras debido a la interacción con fotones de altas energías [19, 22, 27, 18]. La división de la ionosfera se asocia directamente a la densidad de iones, esta se ve afectada por el incremento en la densidad de la atmósfera con la disminución de la altitud y latitud, las variaciones del flujo solar y la difusión de los fotones en el medio [4, 18, 19]. Dicha división se encuentra esquematizada en la figura 2.1

Históricamente la capa E recibe su nombre debido a que E fue el vector empleado por Appleton para designar el campo eléctrico de la onda descendente tras ser reflejada. Se encuentra ubicada entre los 90 y 150 km, las especies de iones encontradas en esta región son N^+ y O_2^+ . Ocasionalmente aparece una ionización anómala durante el verano y presenta densidades muy superiores a las típicas de la capa [4, 18, 19].

La capa F se llama así debido a que fue detectada por encima de la capa E, en esta capa se encuentra la concentración máxima de iones, y se divide en capa F1, que se posiciona entre los 150 y 210 km siendo una capa diurna y F2, que inicia a partir de los 210 km y se mantiene constante durante el día, esta se ubica entre los 150 y 500 km de altura y su

concentración principal es O^+ [19, 4, 18].

La capa D recibe su nombre ya que se encuentra por debajo de la capa E, se extiende de los 60 a 90 km, y se le considera una capa diurna debida a que durante las noches su espesor es casi 0 [4].

2.2.1. Fenómenos Ondulatorios en Ambientes Ionosféricos

En el artículo de Kaladze [16] se establece que el enriquecimiento de partículas cargadas en el gas poco ionizado de la capa E incrementa la variedad de ondas planetarias de ultra baja frecuencia presentes en el medio. Por otra parte se menciona que la interacción entre la corriente inducida y el campo geomagnético, en adición a su cambio latitudinal, modifica la dinámica de las ondas de Rossby en la capa E. A este tipo de ondas se les denomina ondas de gradiente hidromagnético (HMG) y se acopla con las ondas de Rossby debido al efecto Hall.

Existe un tipo de onda adicional que toma en cuenta el gradiente norte-sur de la componente vertical del campo geomagnético y la corriente Hall. Este tipo de onda tiene un campo dinamo-eléctrico $\mathbf{E}_d = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ y se les conoce como ondas de Rossby magnetizadas (MR), diferenciándose de las HMG, en que las primeras son más rápidas. Ambas son ondas planetarias de escala grande y periodo largo. La rápida tiene una velocidad de $100m/s$ y la lenta de $10m/s$ similar a los vientos ionosféricos.

Por otra parte, el efecto Hall y las inhomogeneidades en el campo geomagnético generan perturbaciones electromagnéticas (EM) de larga escala que se propagan a latitudes medias. Sus oscilaciones para modos rápidos se asocian a los electrones congelados en el campo geomagnético y son las responsables de la generación de un campo eléctrico vortical conducido por la deriva de los electrones. Estas ondas se propagan contra el flujo zonal promedio en la capa E, con una velocidad de fase $|c_B| \simeq 1 - 20kms^{-1}$ y una frecuencia $\omega \simeq k_x c_B$, que puede cambiar en un orden de magnitud debido a las variaciones diurnas. Presentan periodos de entre 4 minutos a 6 horas. Las ondas planetarias EM generan pulsaciones magnéticas que van de los 20 a los 800 nT por encima del campo magnético, y se les conoce como ondas de Khantadze por su descubridor.

El acoplamiento entre ondas de Alfvén y las de Rossby fue probado, y muestra la posible

existencia de un conjunto espacialmente aislado de estructuras vorticales en la ionosfera terrestre [17].

2.3. Flujos y Campos Zonales en ambientes ionosféricos y planetarios

2.3.1. Modelo de Kaladze

Retomando el artículo publicado por Kaladze en el 2013 [16] se consideró que el parámetro de Coriolis y la componente vertical del campo geomagnético producen ondas electromagnéticas en el gas poco ionizado de la ionosfera y se llamaron eigenmodos de Rossby-Alfvén-Khantadze. A amplitudes finitas estas ondas no lineales dan origen a un flujo zonal de cizalla y una variación zonal del campo magnético fluctuante.

Se sabe que los flujos zonales se generan debido al esfuerzo de Reynolds generado por las ondas de Rossby de amplitud finita, mismas que se propagan a lo largo de los paralelos y cuentan con simetría azimutal. El equipo de Kaladze observó que en la ionosfera las ondas de Rossby magnetizadas son las que generan el esfuerzo de Reynolds en la capa E, cuya contraparte magnética también se conoce como tensor de Maxwell [25].

Si existe un flujo de cizallamiento junto con una fuente de turbulencia, el flujo suprime la turbulencia, esto debido a que el efecto del flujo de cizalla en la estabilidad lineal deforma las eigenfunciones. Este es un mecanismo clásico de la supresión de la inestabilidad por cizallamiento [9].

En general la deformación ocurre de manera tal, que la longitud de onda se reduce en la dirección del gradiente de presión, por lo que el crecimiento lineal se reduce, lo que quiere decir que los modos fundamentales, que tienen el crecimiento más grande, se acoplan a los pequeños que son más estables. Usualmente aparece en segundo orden respecto a la velocidad de cizalla.

2.4. Conclusión

La diversidad en fuentes de ionización, mecanismos de mezclado, diferencias de temperatura y presión, aunadas al movimiento de rotación de la Tierra, hacen a la ionosfera terrestre un ambiente propicio para la excitación de inestabilidades y oscilaciones, mismas que pueden acoplarse entre si dando origen a fenómenos como los campos y flujos zonales.

En particular, en la capa E se ha demostrado que ambos fenómenos pueden aparecer de manera espontánea, lo cual brinda un primer indicio de la posible existencia de un sistema autorregulado entre fluctuaciones y componentes zonales en dicha región.

Capítulo 3

Modelos de tipo Depredador-Presa

3.1. Introducción

Los modelos del tipo depredador-presa permiten prever la evolución de dos poblaciones que interactúan entre sí a lo largo del tiempo. Con esta premisa, la idea puede extrapolarse a otras áreas de la ciencia, como la física. Por esta razón, el objetivo de este capítulo es proporcionar un breve recuento de los modelos de esta índole, comenzando con el primero que existió, conocido como el modelo de Lotka-Volterra. Posteriormente, se abordará el modelo análogo desarrollado por Carreras, Terry y Diamond en el contexto de los plasmas de fusión nuclear confinados magnéticamente como los tokamaks, para describir la evolución temporal de la energía contenida en los campos zonales y las ondas de deriva. Este modelo, a su vez, se generalizó para la interacción entre flujos zonales y ondas de Rossby, siendo aplicable a ambientes atmosféricos.

3.2. Lotka-Volterra

El planeta Tierra, al igual que el resto de planetas del sistema solar, presenta una gran variedad de fenómenos y factores interactuantes entre sí. Sin embargo, son los organismos vivos, sus interacciones inter e intra especie y con las diferentes esferas del planeta una de las mayores peculiaridades de dicho cuerpo celeste.

Por ejemplo, los seres vivos presentan diferentes tipos de interacción, siendo una de

las más comunes y básicas encontradas en el reino animal la depredación, en la cuál, una especie funge como fuente de alimentos para un depredador. Esta relación es la base de las redes tróficas.

Uno de los modelos matemáticos más simples desarrollados para el estudio de estas interacciones es el modelo de Volterra [23], cuya finalidad era la de explicar el comportamiento de algunos peces. El modelo consta de un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(a - bP), \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d),\end{aligned}\tag{3.1}$$

con $N(t) = N$ la población de presas y $P(t) = P$ la población de los depredadores, a la tasa de reproducción de las presas, b la tasa de depredación de los depredadores sobre las presas, c la tasa de reproducción de las presas en presencia de alimentos y d la tasa de mortalidad de las presas debido a la competencia entre individuos de la misma especie.

Es debido su simpleza por lo que se emplea como primera aproximación para describir fenómenos cuya evolución temporal presenta un acoplamiento mutuo, tal es el caso de las fluctuaciones y los campos zonales en sistemas tokamak, [10, 9, 15, 31] .

3.3. Sistemas Tokamak

En los plasmas toroidales, los flujos con cizalla han resultado jugar un papel importante en la transición de regímenes de confinamiento de modos bajos a altos. Es debido a esto que Carreras, Terry y Diamond [2, 32, 10] propusieron un modelo simple que describe la interacción entre ondas de deriva de gran longitud de onda en presencia de un flujo cizallado poloidal, es decir, un flujo zonal con simetría azimutal.

Para el desarrollo del modelo se consideró el conjunto de ecuaciones planteado en [32],

que es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} + u_E(x) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \tilde{u}_{xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tilde{u}_{yi} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \sigma_\xi \\
u_E = \frac{E_r}{B_\phi} = \frac{1}{B_\phi Z_i e n_i} \frac{\partial}{\partial x} p_i - \langle u_{yi} \rangle, \\
\frac{\partial \langle u_{yi} \rangle}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{u}_{xi} \tilde{u}_{yi} \rangle - \mu_\theta \langle u_{yi} \rangle, \\
\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q_i &= \hat{P}_i
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La primera ecuación es una ecuación de conservación que describe las fluctuaciones turbulentas, ξ , incluyendo el flujo y presión de los iones (a través de la velocidad u_E), denotados por el subíndice i , con σ_ξ la fuente de las fluctuaciones. La segunda, cuyo origen se da a partir de la ecuación de momento para los iones, brinda la definición de la velocidad de deriva eléctrica, que es un flujo poloidal $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ con cizalla en la dirección radial (x), que como vemos, depende de la velocidad promedio en la dirección y , denotada por $\langle u_{yi} \rangle$ y del gradiente radial de presión. La tercera ecuación, obtenida de la ecuación de momento de los iones promediada sobre las fluctuaciones, describe la dinámica del flujo promedio de los iones, mientras que la cuarta es la ecuación que describe la presión, con $Q_i = \langle \tilde{u}_{xi} \tilde{p}_i \rangle$ el producto correlación de las fluctuaciones del flujo de iones y la presión y \hat{P}_i una entrada externa de densidad de potencia para los iones.

Cuando el termino asociado al tensor de Reynolds es mayor en magnitud que la presión de los iones, los términos asociados a la presión son despreciables, es posible realizar un modelo de bifurcaciones en la región de transición de bajo confinamiento a alto confinamiento (transición L-H, por sus siglas en ingles) [10].

El modelo desarrollado parte de 3 suposiciones, la primera es que la inestabilidad subyacente son los modos fuertemente disipativos de los electrones atrapados. La segunda consiste en asumir que el amortiguamiento paralelo es colisional, y la tercera considera $k_\perp \rho_s < 1$, con lo que la principal fuente de interacciones no lineales provienen de la no linealidad $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Además, se consideró una geometría de placa cizallada, con lo que las cantidades varían a lo largo de la dirección radial.

Para obtener una ecuación que describa la evolución de la energía es necesario considerar que el crecimiento no lineal resulta del balance entre el crecimiento lineal de la energía γ_0 y la interacción con diferentes helicidades, que puede representarse como un termino difusivo $D_k = \rho_s^2 c_s^2 \sum_{k'} k_\theta'^2 |\tilde{n}_{k'}/n_0|^2 \Gamma_{k-k'}$, con $c_s = \sqrt{T_{e0}/m_i}$ la velocidad del

sonido, $\rho_s = c_s/\Omega_i$ el radio de Larmor, k_θ el número de onda poloidal y Γ_{k-k} el tiempo de correlación efectivo respectivamente, que es proporcional al cuadrado de la densidad de las fluctuaciones $E := |\tilde{n}_k/n_0|^2$. Por otra parte, debido a la presencia del flujo zonal cizallado, Diamond y Terry en 1994 mencionan que es necesario introducir un término de ruptura $k_\theta u' x$ que debe ser invariante ante transformaciones $x \rightarrow -x, u' \rightarrow -u'$, por lo que concluyen que el amortiguamiento debido al flujo cizallado debe ser proporcional a $|u'|^2$, con lo cual se plantea que la ecuación que describe la evolución de E es:

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = \gamma_0 E - \alpha_1 E^2 - \alpha_2 U E, \quad (3.3)$$

con el primer término describiendo la inyección de energía, el segundo la transferencia a otros modos de oscilación inestables y el tercero representando la supresión debida a la presencia del flujo zonal, siendo $U = \langle |u'|^2 \rangle$.

Para obtener una ecuación que describa la evolución de U se toma la derivada radial de la tercera ecuación presente en la ecuación (3.2), se multiplica por la derivada radial del promedio del flujo poloidal y se le aplica una cerradura a los términos del tensor de Reynolds, misma que se sustenta en [2]. En dicho artículo se plantea que la ecuación para la descripción del flujo de iones considerando que no existe deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, es:

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s^2 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \tilde{n}_k - i \frac{x^2}{\Delta_k^4} \tilde{n}_k + i \frac{D_0 k_y^2}{\omega \rho_s^2} \tilde{n}_k = 0,$$

con $\Delta_k \approx \rho_s \sqrt{(L_s/L_n)(\nu_i/\omega_{*e})}$, el ancho del modo lineal, cuya solución se da en términos de los polinomios de Hermit, es decir

$$\tilde{n}_k(x) = \bar{n} H_l(\sqrt{\alpha_k} x) \exp(-\alpha_k x^2/2),$$

con $\alpha_k^2 = i/\Delta_k^4$. Al sustituir en la ecuación la relación de dispersión resultante es:

$$\omega = \frac{1}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \left(\omega_{*e} + i k_y^2 D_0 - (2l + 1) \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega c_s^2 k_y^2 \rho_s^2}{\nu_i L_s^2}} \right)$$

El primer término, representa la frecuencia de las ondas de deriva, el segundo es la tasa

de crecimiento, y el tercero representa el amortiguamiento debido a la cizalla magnética e induce un desfaseamiento de la frecuencia.

Ahora, si se considera un flujo zonal en la dirección y de la forma

$$\langle u_{yi}(x) \rangle_k = \langle u_{yi}(0) \rangle_k + x \langle u'_{yi}(0) \rangle_k.$$

Se aprecia que el primer termino sólo introduce un desfaseamiento Doppler en la frecuencia ($\omega_E = k_y \langle u_{yi}(0) \rangle_k$), mientras que el segundo, que involucra el flujo cizallado, modifica la forma de los modos propios de la ecuación, con lo que la ecuación resultante es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s - \frac{\omega_{*e}}{\bar{\omega}} \right) \tilde{n}_k - i \frac{x^2}{\Delta_k^4} \tilde{n}_k + \\ \frac{k_y \langle u'_{yi}(0) \rangle_k x}{\bar{\omega} \rho_s^2} + i \frac{D_0 k_y^2}{\bar{\omega} \rho_s^2} \tilde{n}_k = 0, \end{aligned}$$

con $\bar{\omega} := \omega - \omega_E$. El término del flujo zonal, rompe la simetría del potencial, de igual manera, el término xu es una invariante ante transformaciones $x \rightarrow -x$, $u' \rightarrow -u'$, así como el resto de términos del potencial, motivo por el cual, el efecto de la cizalla no depende del signo de u' . Además, el ancho de la frecuencia se modifica como $\Delta_k^4 = \rho_s^2 \bar{\omega} \nu_i L_s^2 / c_s^2 k_y^2$, por lo que es conveniente definir una nueva variable $S := \omega_s / \bar{\omega} = k_y \langle u'_{yi}(0) \rangle_k \Delta_k / \bar{\omega}$, que representa el efecto de cizalla del flujo. Con lo anterior y completando cuadrados para S y x se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{n}_k}{\partial x^2} - i \frac{1}{\Delta_k^4} \left(x + i \frac{\Delta_k S}{2 \rho_s^2} \right)^2 \tilde{n}_k \\ - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s^2 - \frac{\omega_{*e}}{\bar{\omega}} - i \frac{D_0 k_y^2}{\bar{\omega}} + i \frac{\Delta_k^2 S^2}{4 \rho_s^2} \right) \tilde{n}_k = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es la misma que en el caso donde no se consideró la presencia del flujo zonal, salvo un término de corrimiento $\xi_k = \Delta_k^3 S / 2 \rho_s^2$, que es proporcional a la frecuencia de cizalla, que induce un término estabilizador. La solución para $l = 0$ es

$$\tilde{n}_k = n_0 \exp \left(\frac{1 + i \frac{\xi_k^2}{W_k^2}}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}W_k^2} (y - \xi_k)^2 \right) \exp \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}W_k^2} (y + \xi_k)^2 \right),$$

con la segunda exponencial representando la envolvente gaussiana, y la tercera una propagación enriquecida de ondas debido al flujo zonal. Con lo anterior, la relación de dispersión

que se obtiene es

$$\omega - \omega_E = \frac{1}{1+k_y^2\rho_s^2} \left[\omega_{*e} + ik_y^2 D_0 - i \frac{W_k^2 \Omega_S^2}{4\rho_s^2} \omega_{*e} - (2l+1) \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(\omega - \omega_E c_s^2 k_y^2 \rho_s^2)}{\nu_i L_s^2}} \right].$$

con W_k igual a Δ_k evaluado en $\bar{\omega} = \omega_{*e}$, y $\Omega_S = \omega_s/\omega_{*e}$. Esto permite que $\xi_k = W_k^3 \Omega_S / 2\rho_s^2$. Notamos que la ecuación presenta un término proporcional a Ω_S^2 , que representa al término estabilizador. Este término entra a escena cuando cancela la diferencia entre la inestabilidad inducida y el amortiguamiento magnético.

Con lo anterior y considerando $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla\phi \times \hat{\mathbf{z}} \sim \nabla(\tilde{n}_i/n_0) \times \hat{\mathbf{z}}$, Terry en [26] obtuvo que

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{u}_x \tilde{u}_y \rangle = c_s^2 \rho_s^2 \sum_{k_y} k_y \xi_y \Delta^{-3} |\tilde{n}_0|^2,$$

con lo que se concluye que el término asociado al tensor de Reynolds tras el proceso de derivación, promediación y multiplicación será igual a UE , con lo cual la ecuación que describe las variaciones de la energía del flujo zonal es:

$$\frac{1}{2} \frac{dU}{dt} = -\mu U + \alpha_3 UE \quad (3.4)$$

con el primer término representando el amortiguamiento debido al bombeo magnético, efecto derivado de la rotaciones del plasma en la dirección poloidal, lo que implica el paso del mismo por regiones de alto y bajo campo magnético.

3.4. Generalización del modelo de Terry-Diamond-Carreras

El modelo fue generalizado por Diamond et al así como por Connaughton et al [9, 3], y se describe por el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \gamma E - \alpha_1 E^2 - \sigma UE \\ \frac{dU}{dt} &= \sigma UE - \alpha_2 U - \alpha_{NL}(U)U \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $E(t)$ la intensidad de la turbulencia (presa), $U(t)$ (depredador) la intensidad del flujo zonal, γ el parámetro de crecimiento de la onda debido a su propia inestabilidad, α_2

representa el amortiguamiento colisional, σ representa la transferencia de energía entre las escalas debido al cizallamiento, α_1 representa el amortiguamiento debido a la interacción entre eddies, y $\alpha_{NL}(U)$ origina un amortiguamiento del fenómeno de gran escala. La dinámica del modelo se resume de la manera siguiente:

1. Existe una inestabilidad primaria que produce ondas causantes de la turbulencia (fluctuaciones a escala pequeña).
2. Se genera un flujo zonal que crece debido a la extracción de energía mediante el cizallamiento de eddies, este proceso se considera una inestabilidad secundaria.
3. El flujo zonal incrementa su intensidad, lo que genera la reducción de la intensidad de la turbulencia a escala pequeña.
4. El flujo zonal comienza a amortiguarse, lo que permite un incremento en la intensidad de la turbulencia.

Lo anterior representa la dinámica típica de un modelo de depredador-presa que oscila al rededor de un punto de equilibrio estable.

3.5. Conclusión

Los modelos de tipo depredador presa pueden ser útiles en los ámbitos de la fusión nuclear controlada y en la dinámica atmosférica esto debido a que la interacción entre flujos zonales y ondas de deriva, es análoga a la interacción existente entre flujos zonales y ondas de Rossby, lo que se resumen en la ecuación de Charney–Hasegawa–Mima. Lo anterior sugiere el plantear la posible existencia de un modelo con estas características en ambientes ionosféricos siguiendo el desarrollo matemático realizado por Carreras, Diamond y Terry, aplicado a las ecuaciones de Kaladze, lo que brinda una justificación preliminar para el desarrollo que se construirá en los capítulos siguientes.

Capítulo 4

Modelo para la capa E de la Ionosfera

4.1. Introducción

El presente capítulo tiene como meta la construcción del modelo de dimensión cero, a partir de las ecuaciones presentadas por Kaladze para la capa E de la ionosfera [16], empleando los fundamentos teóricos del capítulo 1 así como las técnicas y argumentos físicos presentados en los capítulos 2 y 3. Con lo anterior se obtuvo un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que posteriormente fueron discretizadas mediante los esquemas de Euler y Runge-Kutta 4 para la posterior realización de simulaciones numéricas en *C++*.

4.2. Ecuaciones para el modelado de la capa E

Para la realización del modelo se emplearán coordenadas cartesianas locales, con x en la dirección este-oeste, y en la dirección norte-sur, mientras que z es la dirección vertical, tal como se muestra en la figura 4.1

Siguiendo las ecuaciones planteadas por Kaladze [16] en su modelo ionosférico, la primera ecuación necesaria para realizar un análisis dinámico es la ecuación de momento. Para la capa E de la ionosfera, se considerará un fluido conductor débilmente ionizado, incompresible y en el cual la variación día-noche de la temperatura que experimenta el flujo latitudinal al circundar la Tierra, μ , funge como principal medio de amortiguamien-

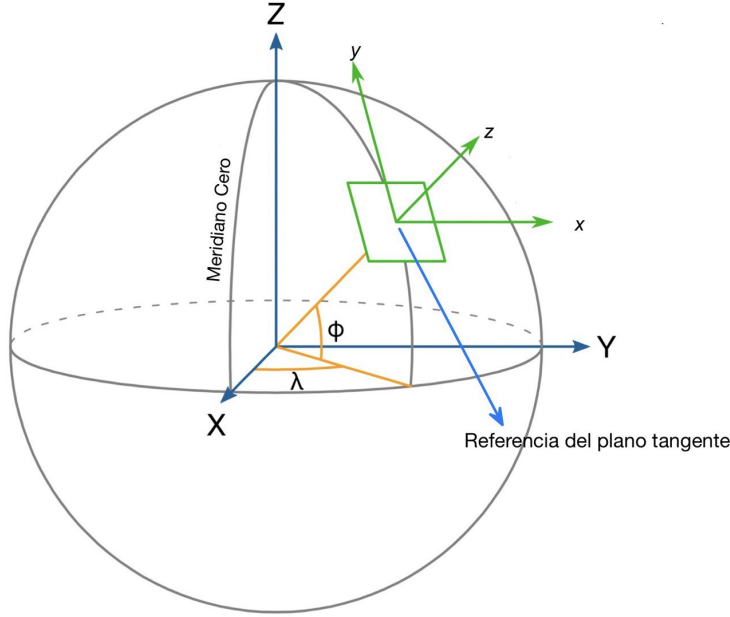


Figura 4.1: Sistema de Coordenadas

to para el movimiento de las partículas. Es así que la ecuación que cumple con dichas características es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \mathbf{g} + \mu \mathbf{v} = 0,$$

con \mathbf{v} la velocidad del fluido neutro, ρ la densidad del gas, p la presión, \mathbf{g} la aceleración gravitacional, $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de la Tierra, mientras que el termino $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ representa la fuerza magnética debida a la materia ionizada.

Aplicando la ley de Ampere para un campo eléctrico estacionario, se tiene que $\mathbf{J} \times \mathbf{B} / \rho = (1/\rho\mu_0)(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (1/\rho\mu_0)(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla(B^2/2)$. Dicho termino representa la componente magnética del tensor de esfuerzos de Maxwell. Con lo cuál, la ecuación final es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{\rho\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \right] + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \mathbf{g} + \mu \mathbf{v} = 0. \quad (4.1)$$

Si se toma el rotacional de la ecuación (4.1) es posible obtener una ecuación para la vorticidad $\nabla \times \mathbf{v} = \zeta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta - \frac{1}{\rho \mu_0} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{B}) - (\nabla \times \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \\ + 2 [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}] + \mu \zeta = 0. \end{aligned}$$

Considerando latitudes suficientemente altas en el hemisferio norte, tanto el campo geomagnético de la Tierra como su velocidad angular se reducen a $\mathbf{B}_0(y) = \mathbf{B}_{0z}(y) = B_{0z}(y)\hat{\mathbf{z}}$ y a $\boldsymbol{\Omega}_0(y) = \boldsymbol{\Omega}_{0z}(y) = \Omega_{0z}(y)\hat{\mathbf{z}}$. Un aspecto más a considerar es el hecho de que tanto las fluctuaciones debidas a la inducción magnética como al movimiento de ondas de longitud larga en la capa E son en esencia bidimensionales, por lo que el campo magnético y la velocidad escritas en sus componentes son $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ y $\mathbf{B} = (b_x, b_y, B_{z0})$.

Esto a su vez permite introducir a la función de corriente, tal que $\mathbf{v} = -\nabla \times \psi(x, y, z)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi(x, y, z)$. y el potencial vectorial que cumple con $\mathbf{B}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla A(x, y, z) \times \hat{\mathbf{z}}$.

Con lo anterior, la componente en z de la ecuación para la vorticidad en términos de la función de flujo y el potencial magnético es:

$$\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \psi}{\partial t} + 2 \frac{\partial \Omega_{0z}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \nabla_{\perp}^2 \psi) + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi = -\frac{B_{0z}}{\rho \mu_0} \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 A}{\partial z} + \frac{1}{\rho \mu_0} J(A, \nabla_{\perp}^2 A), \quad (4.2)$$

con $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ y $J(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_x B \partial_y A$.

En la ecuación anterior se despreció el término $\partial B_{0z} / \partial y$ debido a que es muy pequeño comparado con el primer término de la derecha .

La siguiente ecuación necesaria para la descripción del medio, es la ley de Ohm generalizada:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en\mu_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_e + \eta \mathbf{J}.$$

Donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} el campo magnético, e la carga del electrón, n la densidad de partículas cargadas, p_e es la presión debida a los electrones y η es la resistividad del fluido. El primer término del lado derecho representa el efecto Hall $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que es relevante bajo la consideración de que los electrones se encuentran magnetizados. El segundo es el termino de presión de los electrones, mientras que el tercero representa el efecto de la resistividad.

Si se considera un fluido cuya resistividad es despreciable y además, considerando la temperatura de los electrones pequeña en comparativa con la presente en capas más externas de la ionosfera, los términos de resistividad y presión de los electrones son despreciables, con lo cual la ley de ohm generalizada para la capa E de la ionosfera se puede escribir de la manera siguiente:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \right].$$

Esta ecuación indica que los electrones se encuentran congelados en el campo magnético y que la resistividad del sistema es despreciable.

Ahora se toma el rotacional de la ecuación anterior y se recuerda la ley de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, que en términos del potencial vectorial se escribe como $\partial \mathbf{A} / \partial t = -\mathbf{E} + \nabla \phi$, debido a la libertad de norma asociada a la definición del potencial magnético.

Sin embargo, $\mathbf{A} = (0, 0, A)$, con lo cual, la ecuación anterior sólo cuenta con una componente en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = v_y B_x - v_x B_y - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{en\mu_0} \left[\left(B_y \frac{\partial}{\partial y} \right) B_{0z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (B_x^2 + B_y^2) \right] + \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

además, eligiendo la norma con $\phi = B_{0z} \psi$, la ecuación se reescribe en términos del potencial magnético y la función de corriente como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{en\mu_0} \left[\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] - B_{0z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= -J(\psi, A) + \frac{1}{en\mu_0} \left[\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] - B_{0z} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.3. Separación de Escalas

El comportamiento de la ionosfera puede dividirse esencialmente en dos escalas, una componente promedio, de gran escala, que corresponde al comportamiento del flujo y el campo zonal, mismos que sólo presentan variaciones latitudinales en la dirección y , y una componente fluctuante, asociadas a las oscilaciones de las ondas presentes en el medio, de

menor escala [13]. El promedio se supone que es sobre las escalas pequeñas.

Con lo anterior, el potencial magnético y la función de flujo pueden reescribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A(x, y, z, t) &= A_0(y) + \tilde{A}(x, y, z, t) \Rightarrow B_x = b_0(y, t) + \tilde{b}_x(x, y, z, t), \quad B_y(x, y, z, t) = \tilde{b}_y(x, y, z, t) \\ \psi(x, y, z, t) &= \psi_0(y, t) + \tilde{\psi}(x, y, z, t) \Rightarrow v_x = u(y, t) + \tilde{v}_x(x, y, z, t), \quad v_y(x, y, z, t) = \tilde{v}_y(x, y, z, t), \end{aligned}$$

con $u(y, t) = -\partial\psi_0/\partial y$, y $b_0(y, t) = \partial A_0/\partial y$.

De tal manera que la componente x de la ecuación (4.1) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}_x^2}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ - \frac{1}{\rho \mu_0} \left[\tilde{b}_y \frac{\partial b_0}{\partial y} + \tilde{b}_y \frac{\partial \tilde{b}_x}{\partial y} + B_{0z} \frac{\partial \tilde{b}_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{b}_y^2}{\partial x} \right] \\ - 2\Omega_{0z}(y)\tilde{v}_y - \mu u + \mu \tilde{v}_x = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por otra parte, la ecuación (4.2) tras separarse en escalas es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial \Omega_{0z}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + J(\tilde{\psi}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}}{\partial x} + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi - \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \\ - \frac{B_{0z}}{\rho \mu_0} \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}}{\partial z} + \frac{1}{\rho \mu_0} \left[J(\tilde{A}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}) + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} - b_0 \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por último, la ecuación (4.3) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial t} = -b_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - u \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - J(\tilde{\psi}, \tilde{A}) \\ + \frac{1}{en\mu_0} \left[\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \right)^2 + b_0 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \right)^2 \right] - B_{0z} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tomando la derivada respecto a y de esta ecuación, se obtiene una ecuación en términos del los campos magnéticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial b_0}{\partial t} = - \frac{\partial b_0}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - b_0 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - u \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \partial x} - \frac{\partial J(\tilde{\psi}, \tilde{A})}{\partial y} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} - B_{0z} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y \partial z} \\ + \frac{1}{en\mu_0} \left[\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial b_0}{\partial y} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z \partial y} + b_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.4. Relación de Dispersión y Escala Temporal

Un paso clave en la obtención de las ecuaciones que brindan una descripción a la evolución temporal de las componentes fluctuantes es la obtención de una relación de dispersión generalizada para las fluctuaciones, análoga a la obtenida por Kaladze [16], con

el agregado de términos asociados a la presencia de flujos y campos zonales. En adición, se empleará una notación más compacta para expresar las derivadas $f_{,x_i} = \partial f / \partial x_i$.

Para realizar tal labor es necesario considerar las ecuaciones (4.5) y (4.6) linealizadas, además, se propone una solución oscilatoria para las fluctuaciones, $\tilde{x}_i(x, y, z, t) = \sum_k \hat{x}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$, siendo k_x, k_y y k_z componentes del vector de onda, mientras que ω es la frecuencia angular,

$$-i\omega \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} - u_{,ty} - i \frac{k_x}{k_{\perp}^2} \beta \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} + i \frac{k_x}{k_{\perp}^2} u_{,y^2} \nabla_{\perp}^2 \psi + ik_x u \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi - \mu u_{,y} =$$

$$ik_x k_{\perp}^2 \frac{B_{0z}}{\rho \mu_0} \tilde{A} + \frac{1}{\rho \mu_0} [ik_x b_{0,y^2} \tilde{A} + ik_x k_{\perp}^2 b_0 \tilde{A}],$$

$$-i \frac{k_x b_0}{k_{\perp}^2} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} - i \frac{k_z}{k_{\perp}^2} B_{0z} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} - A_{0,t} = i\omega \tilde{A} - ik_x u \tilde{A} + \frac{1}{en\mu_0} [ik_x c_{\beta} \tilde{A} - k_y k_z b_0 \tilde{A}]$$

con $\beta = 2\partial\Omega_{0z}/\partial y$ y $c_{\beta} = \partial B_{0z}/\partial y$ y $-k_{\perp}^2 = -(k_x^2 + k_y^2) = (\partial_x^2 + \partial_y^2) = \nabla_{\perp}^2$.

Si se toma el promedio de ambas ecuaciones y, sabiendo que el promedio de las cantidades fluctuantes es cero, se tiene:

$$-u_{,ty} - \mu u_{,y} = 0,$$

$$-A_{0,t} = 0$$

De la primera ecuación es posible obtener la escala temporal del flujo zonal, misma que se considerará equivalente para el campo zonal. Lo anterior se realiza considerando que el flujo zonal tiene una solución de la forma $u(y, t) = \hat{u} e^{i[q_y y - \Omega_y t]}$, con q_y el vector de onda y Ω_y la frecuencia angular del flujo zonal.

$$\Omega_y = -i\mu.$$

Lo que indica que el campo zonal tiene una escala temporal proporcional al inverso de la variación diurna, es decir, una escala de días:

$$\tau_{\Omega_y} \propto \frac{1}{\mu}. \quad (4.8)$$

Restando las componentes promedio, despejando \tilde{A} de la ecuación linealizada para las

fluctuaciones magnéticas, y sustituyendo en la ecuación linealizada para las fluctuaciones cinéticas se tiene que la relación de dispersión es:

$$\begin{aligned} \left(\omega + \frac{k_x}{k_\perp^2} \beta - k_x u - \frac{k_x}{k_\perp^2} u_{,y^2} - i\mu \right) \left(\omega - k_x u + \frac{1}{en\mu_0} [k_x c_\beta + ik_y k_z b_0] \right) = \\ \left(k_x k_\perp^2 \frac{B_{0z}}{\rho\mu_0} + \frac{1}{\rho\mu_0} [k_x b_{0,y^2} + k_x k_\perp^2 b_0] \right) \left(\frac{k_x b_0^2}{k_\perp} + \frac{k_z}{k_\perp^2} B_{0z} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como se puede apreciar, los términos imaginarios presentes son $ik_y k_x b_0$ y $-i\mu$. Esto indica que ambos tienen presencia en ambas fluctuaciones, el primero como un término de amortiguamiento y el segundo como un término de crecimiento.

4.5. Componentes Fluctuantes

4.5.1. Energía de las Fluctuaciones Magnéticas

Para obtener un modelo de dimensión cero que describa los contenidos energéticos de las cantidades promedio y las fluctuantes, es conveniente considerar que las variables fluctuantes tienen una solución de la forma $\tilde{n}_i(x, y, z, t) = \sum_n \tilde{n}_k(y, t) \exp[i(k_x x + k_z z)]$. Es bajo esta consideración que, para obtener una ecuación que describa las variaciones de la energía contenida en las fluctuaciones de origen magnético es necesario primero partir de la ecuación (4.6) y aplicar dicha suposición:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{,t} - A_{0,t} = -ik_x b_0 \tilde{\psi} - ik_x u \tilde{A} - J(\tilde{\psi}, \tilde{A}) \\ + \frac{1}{en\mu_0} \left[ik_z B_{0z,y} \tilde{A} - \frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,y})^2 + ik_z b_0 \tilde{A}_{,y} - \frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,x})^2 \right] - ik_z B_{0z} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

consideremos los términos no lineales, mismos a los que se les aplicará la cerradura,

$$\tilde{A}_{,t} \propto -J(\tilde{\psi}, \tilde{A}) + \frac{1}{en\mu_0} \left[-\frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,y})^2 - \frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,x})^2 \right].$$

En este caso, el término $-J(\tilde{\psi}, \tilde{A})$, puede reescribirse en términos de una interacción no local entre las ondas presentes en el medio, y las ondas inducidas, denotadas por el superíndice (2). Por convención, se considerará que la cantidad inducida será el término de la izquierda dentro del jacobiano.

Dicho jacobiano puede definirse como una función γ^{NLA} , que al multiplicarse por la variable \tilde{A} resume el comportamiento no lineal de cada término. Por ejemplo, los términos no lineales respecto a las fluctuaciones asociados a $J(\tilde{\psi}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi})$ representan el tensor de Reynolds, presente en la ecuación (4.5), por lo que son responsables de introducir la interacción existente entre dos ondas, misma que da origen a una tercera, este proceso es conocido como interacción de tres ondas [2, 9]. En contraste, el término $J(\tilde{\psi}, \tilde{A})$ representa la interacción entre ondas cinéticas (ondas de Rossby) y ondas electromagnéticas (ondas de Alfvén).

Con lo anterior, y siguiendo el método heurístico realizado por Carreras en 1992 [2]

$$-J(\tilde{\psi}, \tilde{A}) = \gamma^{NLA} \tilde{A} \simeq -D_0 \sum_k \left[(\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}}) - ik'_x \tilde{A}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)} - (k_x + k'_x) \tilde{A}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)} \right].$$

Ahora es necesario suponer que $\tilde{\psi}^{(2)}$ seguirá una ecuación equivalente a (4.5) respecto a los términos no lineales, con esto, $\tilde{\psi}^{(2)} \propto -J(\tilde{\psi}^{(2)}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}^{(2)}) - J(\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(2)})$, y es así que: $\gamma^{NLA} \tilde{A} \propto (-\tilde{A} |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 - \tilde{A} |\tilde{A}|^2)$

$$\tilde{A}_{,t} \propto (-\tilde{A} |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 - \tilde{A} |\tilde{A}|^2) + \frac{1}{en\mu_0} \left[-\frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,y})^2 - \frac{ik_z}{2} (\tilde{A}_{,x})^2 \right].$$

multiplicando por A^* la ecuación, y sumando el conjugado de la misma se tiene:

$$\frac{1}{2} \langle |\tilde{A}|^2 \rangle_{,t} \propto (-\langle |\tilde{A}|^2 |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle - \langle |\tilde{A}|^4 \rangle).$$

Tomando ahora la covariancia entre $|\tilde{A}|^2$ y $|\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2$, al igual que la varianza de $|\tilde{A}|$ y $|\tilde{A}|^2$:

$$\begin{aligned} Cov(|\tilde{A}|^2, |\tilde{\psi}|^2) &= \langle |\tilde{A}|^2 \rangle \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle - \langle |\tilde{A}|^2 |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle, \\ \sigma_{|\tilde{A}|}^2 &= \langle |\tilde{A}|^2 \rangle - \langle |\tilde{A}| \rangle^2, \\ \sigma_{|\tilde{A}|^2}^2 &= \langle |\tilde{A}|^4 \rangle - \langle |\tilde{A}|^2 \rangle^2 = \langle |\tilde{A}|^4 \rangle - E_A^2 \end{aligned}$$

Considerando el marco de la teoría de turbulencia débil, puede decirse que la interacción entre las perturbaciones magnéticas y cinéticas tiene una magnitud despreciable y por lo tanto, la covarianza es pequeña, con lo cual es válido escribir $\langle |\tilde{A}|^2 |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle = \langle |\tilde{A}|^2 \rangle \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle = \mathcal{E} E_A$ con $\mathcal{E} = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle$, la enstrofia y $E_A = \langle |\tilde{A}|^2 \rangle$ la energía de

las fluctuaciones magnéticas. Un argumento análogo puede emplearse para la varianza de $\sigma_{|\tilde{A}|^2}^2$, con lo cuál se tiene que $\langle |\tilde{A}|^4 \rangle = E_A^2$

Para obtener la igualdad en la ecuación es necesario incluir los términos lineales respecto a E_A , dichos términos están asociados al amortiguamiento debido al campo zonal y al fenómeno de autocrecimiento de las inestabilidades. La presencia de ambos términos se justifica a partir de la relación de dispersión (4.9), misma que indica que el campo zonal aparece como un término de amortiguamiento en ambas ondas, de igual manera, su presencia se encuentra asociada al cizallamiento producido por el tensor de Maxwell sobre las ondas y que existe un flujo de energía de los fenómenos de escala grande a escala pequeña (cascada directa). Con lo anterior, la ecuación que describe la evolución de la energía asociada a las fluctuaciones magnéticas es:

$$\frac{1}{2}E_{A,t} = \alpha_6 E_A - \alpha_7 E_b E_A - \alpha_8 E_A \mathcal{E} - \alpha_9 E_A^2. \quad (4.11)$$

4.5.2. Enstrofía

Para obtener una ecuación que describa la evolución de la enstrofía en el tiempo, es necesario tomar la ecuación (4.5) y se le aplicará el mismo tratamiento que se mostró en la subsección previa para los términos no lineales. Cabe resaltar que la variación diurna es un fenómeno presente a escalas del orden de las del flujo zonal, por lo que los términos asociados a la misma derivados de las fluctuaciones son despreciables, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}_{,t} = & u_{,ty} - ik_x 2\Omega_{0z,y} \tilde{\psi} + ik_x \tilde{\psi} u_{,y^2} - ik_x u \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} - J(\tilde{\psi}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}) + \mu u_{,y} \\ & - ik_z \frac{B_{0z}}{\rho\mu_0} \nabla_{\perp}^2 \tilde{A} + \frac{1}{\rho\mu_0} [ik_x \tilde{A} b_{0,y^2} - ik_x b_0 \nabla_{\perp}^2 \tilde{A} - J(\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}, \tilde{A})], \end{aligned} \quad (4.12)$$

Consideremos ahora los términos no lineales.

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}_{,t} \propto -J(\tilde{\psi}, \Delta_{\perp} \tilde{\psi}) - \frac{1}{\rho\mu_0} [J(\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}, \tilde{A})]$$

Cada uno de estos términos puede definirse como una función $\gamma^{NL\psi i}$, que, análogamente a lo realizado en la sección anterior, se multiplicará posteriormente por $\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}$. En 1992, Carreras et al. [2] mencionan que es posible expresar estas no linealidades como

$\gamma^{NL\psi^1} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} \simeq -D_0 \sum_k [\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}}] [-ik'_x \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)} - (k_x + k'_x) \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)}]$, donde $\tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)}$ debe contener contribuciones no lineales análogas a los presentes en (4.2), es decir, los términos provenientes de $-J(\tilde{\psi}^{(2)}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}^{(2)})$ y $-J(\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(2)})$, con lo cual $-J(\tilde{\psi}, \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}) = \gamma^{NL\psi^1} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} = -\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 - \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\tilde{A}|^2$.

Por otra parte, los términos asociados a $J(\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}, \tilde{A})$ presentan su origen en el tensor de Maxwell, sin embargo, $\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}_{k+k'}^{(2)}$ debe cumplir, de manera análoga a lo descrito en el párrafo anterior, con la ecuación (4.3), cuya no linealidad proviene del término $-J(\tilde{\psi}^{(2)}, \tilde{A}^{(2)})$. Sin embargo, es importante recalcar que la energía debe conservarse dentro del sistema, motivo por el cual la no linealidad asociada a este término debe ser negativo, con lo cual, se puede concluir que a $-J(\tilde{\psi}^{(2)}, \tilde{A}^{(2)}) = -\gamma^{NL\psi^2} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} \propto \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\tilde{A}|^2$. Con lo anterior, la evolución temporal de $\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}$ asociada a los términos no lineales puede escribirse como :

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}_{,t} \propto \left(-\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 - \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\tilde{A}|^2 \right) + \frac{1}{\rho \mu_0} \left[\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} |\tilde{A}|^2 \right]$$

Para conocer el papel de estos términos en la evolución de la enstrofia es necesario multiplicar por $\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}^*$ y promediar la ecuación respecto al ensamble, lo cual causa que al promediar fluctuaciones con orígenes diferentes dichos términos se cancelen. Posteriormente se toma el conjugado de dicha ecuación y se suman ambas, con lo que se tiene

$$\begin{aligned} \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|_{,t}^2 \rangle &\propto -2 \left(\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^4 \rangle \right) - 2 \left(\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 |\tilde{A}|^2 \rangle \right) + \frac{2}{\rho \mu_0} \left(\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 |\tilde{A}|^2 \rangle \right) \\ &= -2 \left(\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^4 \rangle \right) + 2 \left(\frac{1}{\rho \mu_0} - 1 \right) \left(\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 |\tilde{A}|^2 \rangle \right) \end{aligned}$$

En el sistema internacional de unidades $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} T * m/A$ y $\rho \propto 10^3 m^{-3}$ para un gas neutro en la ionosfera, con lo cual el término $\frac{1}{\rho \mu_0} - 1 > 0$.

Consideremos ahora la covarianza entre $|\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2$ y $|\tilde{A}|^2$ definida como $Cov(|\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2, |\tilde{A}|^2) = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle \langle |\tilde{A}|^2 \rangle - \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 |\tilde{A}|^2 \rangle$. Si se consideran las interacciones en el marco de la teoría de turbulencia débil, puede decirse que la interacción entre las perturbaciones magnéticas y cinéticas tienen una magnitud poco considerable y por lo tanto su covarianza es pequeña, lo que implica que $\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 |\tilde{A}|^2 \rangle = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle \langle |\tilde{A}|^2 \rangle = \mathcal{E} E_A$, con $\mathcal{E} = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle$, la enstrofia y $E_A = \langle |\tilde{A}|^2 \rangle$ la energía de las fluctuaciones magnéticas.

Por otra parte, la varianza de las fluctuaciones cinéticas puede definirse como: $\sigma_{|\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|}^2 =$

$\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}^2 \rangle - \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}| \rangle^2 = \mathcal{E}$. Mientras que la varianza de la norma cuadrada de las fluctuaciones es: $\sigma_{|\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2}^2 = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^4 \rangle - \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle^2 = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^4 \rangle - \mathcal{E}^2$, por lo que una vez más, considerando que las interacciones entre ondas son débiles, puede asumirse que la varianza es pequeña y concluir que $\langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 \rangle^2 = \langle |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^4 \rangle = \mathcal{E}^2$. Para obtener la igualdad con la ecuación es necesario incluir a los términos lineales respecto a \mathcal{E} , cuyo efecto está asociado al amortiguamiento debido al campo zonal, al flujo zonal y al auto crecimiento de las inestabilidades. El primero encuentra su origen en la relación de dispersión (4.9), mientras que el segundo aparece de manera explícita en la ecuación, siendo su origen la separación de escalas sobre el tensor de Reynolds.

Como detalle, es conveniente considerar que las interacciones entre las fluctuaciones y los campos y flujo zonal son locales, motivo por el cual las cantidades promedio pueden expandirse en serie de Taylor, con lo que se tiene que:

$$u(y, t) = u(0, t) + yu(0, t)', \quad b_0(y, t) = b_0(0, t) + yb_0(0, t)'$$

A su vez, los términos $yu(0, t)'$ y $yb_0(0, t)'$ presentan una simetría bajo la transformación $y \rightarrow -y$, $u'(0) \rightarrow -u'(0)$, con lo cual, para preservar la simetría en el modelo de orden 0, es necesario asumir que el producto $yu(0)' \propto |u_{,y}|^2$, tal como expresan en [10], [2] y [26]. De igual manera, es conveniente introducir una serie de parámetros α_i , que dependerán de los números de onda, si además llamamos $U = |\langle u \rangle_{,y}|^2 = |u_{,y}|^2$ la energía del flujo zonal y $E_b = |\langle b_0 \rangle_{,y}|^2 = |b_{0,y}|^2$ la energía del campo zonal, se obtiene la ecuación para la enstrofía.

$$\frac{1}{2} \mathcal{E}_{,t} = \alpha_1 \mathcal{E} - \alpha_2 U \mathcal{E} - \alpha_3 \mathcal{E} E_b - \alpha_4 \mathcal{E}^2 + \alpha_5 \mathcal{E} E_A \quad (4.13)$$

4.6. Componentes Zonales

4.6.1. Energía del Flujo Zonal

Para obtener una ecuación que describa la evolución temporal de la energía del campo zonal es necesario derivar la ecuación (4.4) respecto de y , y se promedia respecto al ensamble.

$$\langle u \rangle_{,yt} - ik_x \frac{1}{2} \langle \tilde{v}_x^2 \rangle_{,y} + \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_{x,y} \rangle_{,y} - \frac{1}{\rho\mu_0} \left[-ik_x \frac{1}{2} \langle \tilde{b}_x^2 \rangle_{,y} + \langle \tilde{b}_y \tilde{b}_{x,y} \rangle_{,y} \right] + \mu \langle u \rangle_{,y} = 0,$$

posteriormente, se multiplicará la ecuación anterior por $\langle u \rangle_{,y}^*$.

Simultáneamente se tomar el conjugado de la ecuación anterior y se multiplica por $\langle u \rangle_{,y}$, para posteriormente sumar ambas ecuaciones, con lo cual, definiendo a la energía del campo zonal como $|b_{0,y}|^2$, la expresión ahora es:

$$U_{,t} + k_x \text{Im} \left(u_{,y}^* \langle \tilde{v}_x^2 \rangle_{,y} \right) + 2 \text{Re} \left(u_{,y}^* \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_{x,y} \rangle_{,y} \right) - \frac{1}{\rho\mu_0} \left[k_x \text{Im} \left(u_{,y}^* \langle \tilde{b}_x^2 \rangle_{,y} \right) + 2 \text{Re} \left(u_{,y}^* \langle \tilde{b}_y \tilde{b}_{x,y} \rangle_{,y} \right) \right] + 2\mu U = 0$$

Debido a que las ecuaciones aquí presentes incluyen términos de orden superior, es necesario emplear un proceso de cerradura para expresar la ecuación en términos de las variables conocidas. Dicho proceso se realizará siguiendo el tratamiento realizado en [2] y [10]. Es de esperarse que la solución de las ecuaciones de modos propios presente un término proporcional a $\exp[-i/2\sqrt{2}W_k^2(y + \xi_k^2)]$, con ξ un término que representa el cizallamiento de los torbellinos debido a las ondas de Rossby magnetizadas y ondas de Alfvén. Con lo anterior, se espera que $\langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle_{,y} \propto (u_{,y} + b_{0,y}) \langle |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \rangle$. Mientras que los términos asociados al tensor de Maxwell deben respetar una relación análoga $\langle \tilde{b}_i \tilde{b}_j \rangle_{,y} \propto (u_{,y} + b_{0,y}) \langle |A|^2 \rangle$. Lo que permite expresar la ecuación para los términos que se encuentran en fase, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} U_{,t} \propto U \langle |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \rangle + u_y^* b_0 \langle |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \rangle - u_y^* b_0 \langle |A|^2 \rangle - U \langle |A|^2 \rangle - \mu \text{Re} \left(\langle u_{,y}^* u_{,y} \rangle \right)$$

Sin embargo, para concluir con la construcción del modelo de dimensión 0, es decir, cuya dependencia sea únicamente temporal, es necesario promediar las interacciones de cada uno de los términos respecto a las variables espaciales motivo por el cual, las cantidades no cuadráticas respecto a u, b_0 se cancelan. Por lo que, si se define a la enstrofía como $\mathcal{E} = \langle |\nabla_{\perp}^2 \psi|^2 \rangle$ y a la energía de las fluctuaciones magnéticas como $E_A = \langle |A|^2 \rangle$ se consigue una ecuación que describe la evolución temporal de la energía del flujo zonal,

$$\frac{1}{2}U_{,t} = \alpha_{10}U\mathcal{E} - \alpha_{11}UE_A - \mu U. \quad (4.14)$$

4.6.2. Energía del Campo Zonal

Para obtener la ecuación encargada de representar la evolución de la energía del campo zonal a lo largo del tiempo es necesario partir de la ecuación (4.6), derivarla dos veces respecto a y y promediarla, incorporando las soluciones planteadas en la sección anterior. Lo anterior da como resultado

$$\langle b_{0,y}, t \rangle = \langle J(\tilde{A}, \tilde{\psi})_{,y^2} \rangle - \frac{ik_z}{2\mu_0 en} \left(\langle |b_x|_{,y^2}^2 \rangle + \langle |b_y|_{,y^2}^2 \rangle \right).$$

Sin embargo, gracias a [2] sabemos que los términos no lineales provenientes de $(\tilde{A}, \tilde{\psi})$ representa un fenómeno de interacción entre tres ondas, lo que permite expresar dicha no linealidad como $\gamma^{NL\psi}\tilde{\psi} + \gamma^{NLA}\tilde{A} \simeq -D_0 \sum_k [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}})] [-ik'_x \tilde{\psi}_{-k} \tilde{A}_{k+k'}^{(2)} - (k_x + k'_x) \tilde{\psi}_{-k} \tilde{A}_{k+k'}^{(2)} - ik'_x \tilde{A}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)} - (k_x + k'_x) \tilde{A}_{-k} \tilde{\psi}_{k+k'}^{(2)}]$, $(\tilde{\psi}^{(2)})$ cumple a su vez la ecuación (4.2) y $(\tilde{A}^{(2)})$ la (4.3), con lo que $J(\tilde{A}, \tilde{\psi})_{,y^2} \simeq -\tilde{A} |\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}|^2 + \tilde{A} |\tilde{A}|^2$.

Sin embargo, debido a que se trata del promedio de cantidades fluctuantes diferentes entre sí, se espera que el promedio de dichas fluctuaciones refleje un comportamiento cercano a cero, con lo cuál, sólo los términos asociados al tensor de esfuerzos de Maxwell tendrán un efecto sobre el campo zonal,

$$\langle b_{0,y}, t \rangle = -\frac{k_z}{2\mu_0 en} \left(\langle |b_x|_{,y^2}^2 \rangle + \langle |b_y|_{,y^2}^2 \rangle \right).$$

Multiplicando por $\langle b_{0,y} \rangle^*$, posteriormente conjugando la ecuación resultante y sumando ambas se obtiene

$$|\langle b_{0,y} \rangle_{,t}^2| = \frac{k_z}{\mu_0 n \rho} \text{Im} \left(\langle b_{0,y} \rangle^* \left(\langle |b_x|_{,y^2}^2 \rangle + \langle |b_y|_{,y^2}^2 \rangle \right) \right)$$

Con lo que aplicando la cerradura para el tensor de Maxwell descrita en la sección anterior y definiendo a $E_b = |\langle b_{0,y} \rangle_{,t}^2|$ se llega a la ecuación para la energía del campo zonal.

$$\frac{1}{2}E_{b,t} = \alpha_{12}E_A E_b \quad (4.15)$$

4.7. Sistema de Ecuaciones

Es así, que el sistema de ecuaciones resultante del esquema anterior se compone de las cuatro ecuaciones diferenciales no lineales siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{E}_{,t} &= \alpha_1\mathcal{E} - \alpha_2U\mathcal{E} - \alpha_3\mathcal{E}E_b - \alpha_4\mathcal{E}^2 + \alpha_5\mathcal{E}E_A, \\ \frac{1}{2}E_{A,t} &= \alpha_6E_A - \alpha_7E_bE_A - \alpha_8E_A\mathcal{E} - \alpha_9E_A^2, \\ \frac{1}{2}U_{,t} &= \alpha_{10}U\mathcal{E} - \alpha_{11}UE_A - \mu U, \\ \frac{1}{2}E_{b,t} &= \alpha_{12}E_A E_b. \end{aligned} \quad (4.16)$$

El modelo presentado consta de 12 parámetros, cuyos valores numéricos están generalmente relacionados con las frecuencias y números de ondas de las oscilaciones, así como las tasas de crecimiento del flujo y campo zonal. Sin embargo, debido a la falta de una base de datos centrada en la caracterización de este sistema y la inexistencia de un método analítico claro para obtener la dependencia explícita de cada coeficiente, los esfuerzos subsiguientes de este trabajo se centrarán principalmente en el estudio cualitativo del sistema teniendo como meta principal estudiar las posibilidades que ofrece para generar una dinámica análoga a un sistema depredador-presa. Con esto en mente, se realizarán una serie de simulaciones numéricas modificando los parámetros del modelo.

4.8. Solución Numérica de las Ecuaciones

4.8.1. Discretización de las ecuaciones: Método de Euler y Runge-Kutta

Para realizar la discretización del sistema (4.16), se empleará el método de Euler, esto debido a que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Este es el método más básico [14] conocido para la integración de una ecuación diferencial

ordinaria. El mismo se basa en la definición de la derivada en una dimensión, con esto, si se considera una ecuación de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (4.17)$$

es discretizanda como:

$$f(x, t) \simeq \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Con Δt el ancho de un intervalo $t_1 - t_2$, por lo que su valor debe ser pequeño para obtener así una buena aproximación.

Con esto es posible reescribir la ecuación diferencial de forma discreta como:

$$x_{,n+1} = x_{,n} + \Delta t f(x_{,n}, t_n) \quad (4.18)$$

con el subíndice n representando el paso de tiempo.

El esquema anterior es fácilmente aplicable a conjunto de ecuaciones(4.16), con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{,n+1} &= \mathcal{E}_{,n} + 2\Delta t \left(\alpha_1 \mathcal{E}_{,n} - \alpha_2 U_{,n} \mathcal{E}_{,n} - \alpha_3 E_b \mathcal{E} - \alpha_4 \mathcal{E}_{,n}^2 + \alpha_5 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n} \right), \\ E_{A,n+1} &= E_{A,n} + 2\Delta t \left(\alpha_6 E_{A,n} - \alpha_7 E_b E_A - \alpha_8 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n} - \alpha_9 E_{A,n}^2 \right), \\ U_{,n+1} &= U_{,n} + 2\Delta t \left(\alpha_{10} U_{,n} \mathcal{E}_{,n} - \alpha_{11} U_{,n} E_{A,n} - \mu U_{,n} \right), \\ E_{b,n+1} &= E_{b,n} + 2\Delta t \left(\alpha_{12} E_{A,n} E_{b,n} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Un método más preciso y estable es el de Runge-Kutta, el cuál consiste en tomar la ecuación (4.17) e integrarla desde un intervalo t_n a t_{n+1} y aproximar la ecuación de lado derecho al área de un trapecio [1], de forma que la aproximación obtenida es :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} [k_1 + k_2],$$

con $k_1 = \Delta t f(x_n, t_x)$ y $k_2 = \Delta t f(x_n + k_1, t_n + 1)$. El método puede incrementar su precisión al aumentar el número de variables intermedias, k_i , en el caso del presente trabajo, se empleará el método de cuarto orden, cuya esquematización es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

con:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(x_n, t_n), \\ k_2 &= \Delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_3 &= \Delta t f\left(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_4 &= \Delta t f(x_n + k_3, t_n + h). \end{aligned}$$

Empleando es esquema RK4, las ecuaciones del sistema obtenido discreteadas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &= \mathcal{E}_n + \frac{1}{6} [k_{1\mathcal{E}} + 2k_{2\mathcal{E}} + 2k_{3\mathcal{E}} + k_{4\mathcal{E}}], \\ E_{A,n+1} &= E_{A,n} + \frac{1}{6} [k_{1E_A} + 2k_{2E_A} + 2k_{3E_A} + k_{4E_A}], \\ U_{n+1} &= U_n + \frac{1}{6} [k_{1U} + 2k_{2U} + 2k_{3U} + k_{4U}], \\ E_{b,n+1} &= E_{b,n} + \frac{1}{6} [k_{1E_b} + 2k_{2E_b} + 2k_{3E_b} + k_{4E_b}]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Como ejemplo, esquematicemos las constantes asociadas a la enstrofía:

$$\begin{aligned} k_{1\mathcal{E}} &= \Delta t \mathcal{E}(\mathcal{E}_n, E_{A,n}, U_n, E_{b,n}, t_n), \\ k_{2\mathcal{E}} &= \Delta t \mathcal{E}\left(\mathcal{E}_n + \frac{1}{2}k_{1\mathcal{E}}, E_{A,n} + \frac{1}{2}k_{1E_A}, U_n + \frac{1}{2}k_{1U}, E_{b,n} + \frac{1}{2}k_{1E_b}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_{3\mathcal{E}} &= \Delta t \mathcal{E}\left(\mathcal{E}_n + \frac{1}{2}k_{2\mathcal{E}}, E_{A,n} + \frac{1}{2}k_{2E_A}, U_n + \frac{1}{2}k_{2U}, E_{b,n} + \frac{1}{2}k_{2E_b}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_{4\mathcal{E}} &= \Delta t \mathcal{E}(\mathcal{E}_n + k_{3\mathcal{E}}, E_{A,n} + k_{3E_A}, U_n + k_{3U}, E_{b,n} + k_{3E_b}, t_n + \Delta t), \end{aligned}$$

con:

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}_n, E_{A,n}, U_n, E_{b,n}, t_n) = 2 \left(\alpha_1 \mathcal{E}_n - \alpha_2 U_n \mathcal{E}_n - \alpha_3 E_b \mathcal{E} - \alpha_4 \mathcal{E}_n^2 + \alpha_5 \mathcal{E}_n E_{A,n} \right).$$

Lo propio se puede realizar para el resto de la variables intermedias asociadas a las variables, E_A , E_b y U .

4.8.2. Algoritmo

El esquema para la simulación consiste en tres partes esquematizadas en el diagrama de flujo en la figura 4.2. Para el paso uno, es necesario determinar los valores adecuados para los parámetros α_i , con $i \in [1, 2, \dots, 12]$. De igual manera, lo propio se realiza para el amortiguamiento día-noche μ . El paso dos consiste en la ejecución de un algoritmo iterativo desarrollado en *C++*, implementando el sistema de ecuaciones (4.20). Dicha iteración se repetirá un número l de veces, de tal manera que el comportamiento en el tiempo sea confiable. El código completo se encuentra en el Anexo B de este texto. Una vez realizada la iteración, los archivos se guardarán en formato *.csv* para su posterior análisis haciendo uso de un algoritmo desarrollado en *python* que permite la visualización de los datos obtenidos, el cual se encuentra en el anexo C.

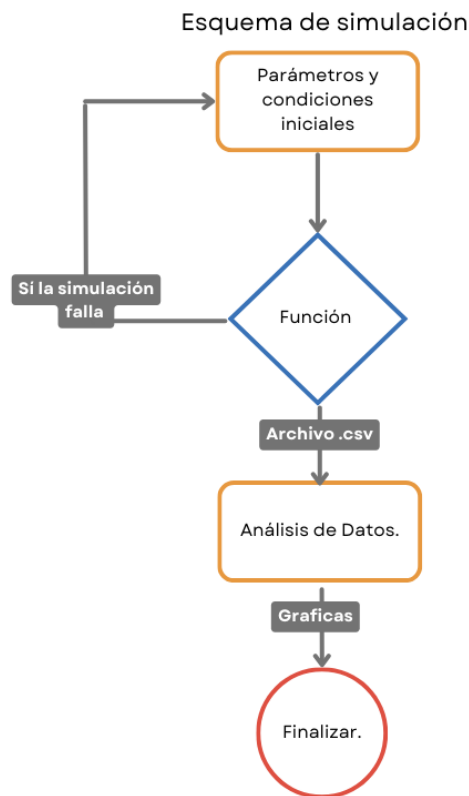


Figura 4.2: Diagrama de flujo para las simulaciones numéricas

Capítulo 5

Resultados del Modelo Ionosférico

5.1. Pruebas

5.1.1. Lotka-Volterra

La primera prueba de interés del código para realizar una comparación viene de replicar el modelo de Lotka-Volterra, con la finalidad de asegurarse que el algoritmo implementado funcione de manera adecuada. Para esto se decidió seguir el sistema de ecuaciones diferenciales (3.1).

Los resultados expuestos en la figura 5.1 representan la evolución de un depredador y una presa con un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$, un número de pasos $l = 100000$, $a = 1.1$, $b = 0.4$, $c = 0.1$ y $d = 0.4$.

Como se aprecia, el comportamiento es el esperado, siendo periódico en el tiempo, con una población de presas mayor a la de depredadores, misma que aumenta a lo largo del tiempo provocando el posterior crecimiento del número de depredadores, lo que a su vez ocasiona la reducción de las presas. Por último, debido a la escasez de alimento, la población de depredadores decrece, lo que permite la recuperación de la población de presas, reiniciando el ciclo.

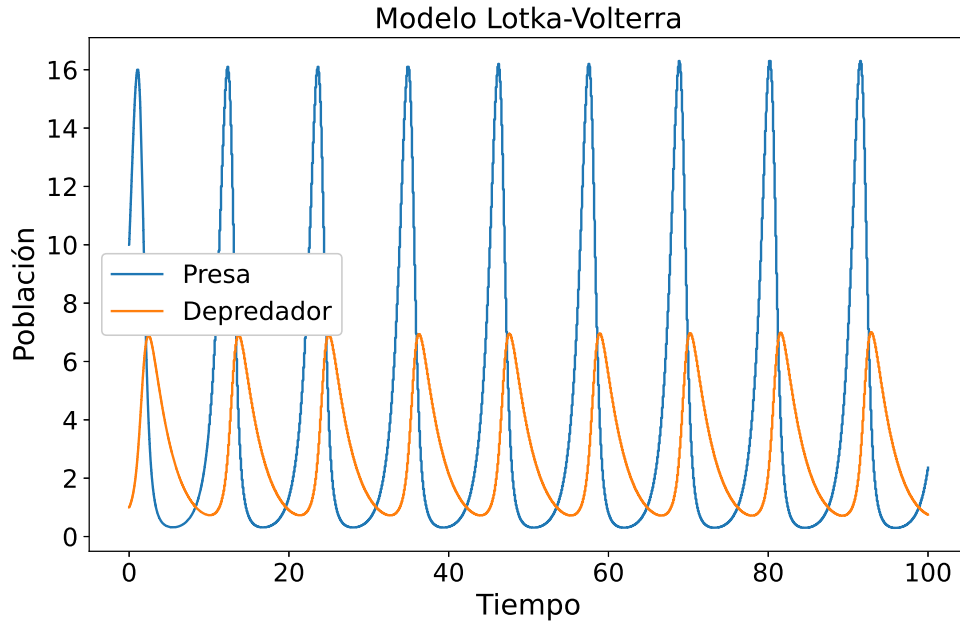


Figura 5.1: Modelo de Lotka-Volterra

5.1.2. Modelo de Carrearas-Diamond-Terry

Como segunda prueba se exploró el comportamiento del sistema discutido en la sección 3.2, basado en el sistema derivado de las ecuaciones (3.3) y (3.4). La figura 5.2 representa los resultados obtenidos empleando como parámetros $\gamma_0 = 0.6$, $\alpha_1 = 0.008$, $\alpha_2 = 0.009$, $\alpha_3 = 0.03$, $\mu = 0.6$, con $l = 10000$, y $\Delta t = 0.001$. El comportamiento observado en este modelo con los parámetros previamente mencionados es análogo a lo descrito en [9], donde se menciona que el campo zonal actúa como un depredador, el cual estabiliza las fluctuaciones hasta que ambas cantidades llegan a un valor de equilibrio.

5.2. Puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema es necesario considerar el caso estacionario del mismo, es decir, que el lado izquierdo de las ecuaciones expresadas en el sistema 4.16 sea igual a 0. Con esto el sistema se reescribe como :

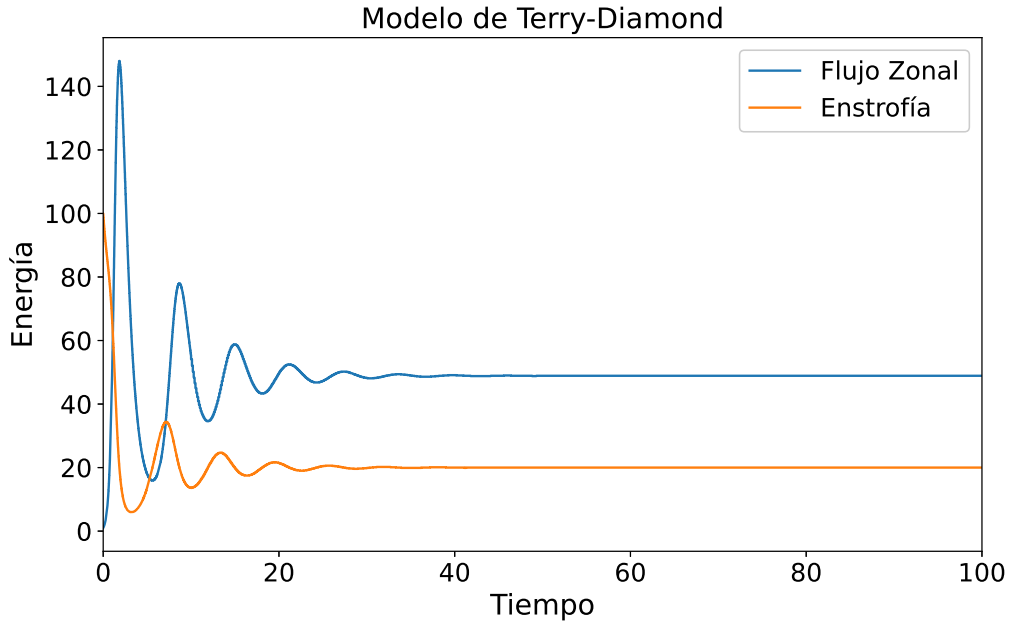


Figura 5.2: Modelo de Carreras-Diamond-Terry

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \mathcal{E} - \alpha_2 U \mathcal{E} - \alpha_3 \mathcal{E} E_b - \alpha_4 \mathcal{E}^2 + \alpha_5 \mathcal{E} E_A &= 0, \\
 \alpha_6 E_A - \alpha_7 E_b E_A - \alpha_8 E_A \mathcal{E} - \alpha_9 E_A^2 &= 0, \\
 \alpha_{10} U \mathcal{E} - \alpha_{11} U E_A - \mu U &= 0, \\
 \alpha_{12} E_A E_b &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como una observación inmediata, para que el sistema se encuentre en un punto de equilibrio, al menos alguna de las dos energías magnéticas, E_A o E_b , debe anularse. Lo anterior es un sistema de ecuaciones algebraicas, las cuales pueden ser fácilmente resueltas haciendo uso de *Wolfram Mathematica*, lo que nos da el conjunto siguiente de puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned}
& 1) \left[E_A \rightarrow 0, \mathcal{E} \rightarrow \frac{\mu}{\alpha_{10}}, E_b \rightarrow -\frac{\alpha_4\mu - \alpha_1\alpha_{10}}{\alpha_3\alpha_{10}} - \frac{\alpha_2 U}{\alpha_3} \right], \\
& 2) \left[U \rightarrow 0, E_A \rightarrow 0, E_b \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{\alpha_4 \mathcal{E}}{\alpha_3} \right], \\
& 3) \left[U \rightarrow 0, E_A \rightarrow 0, \mathcal{E} \rightarrow 0 \right], \\
& 4) \left[U \rightarrow -\frac{\alpha_5\alpha_8\mu + \alpha_4\alpha_9\mu - \alpha_1\alpha_{11}\alpha_8 - \alpha_5\alpha_6\alpha_{10} - \alpha_1\alpha_9\alpha_{10} + \alpha_4\alpha_6\alpha_{11}}{\alpha_2(\alpha_9\alpha_{10} + \alpha_8\alpha_{11})}, \right. \\
& \quad \left. E_A \rightarrow -\frac{\alpha_8\mu - \alpha_6\alpha_{10}}{\alpha_9\alpha_{10} + \alpha_8\alpha_{11}}, \mathcal{E} \rightarrow -\frac{\alpha_9(-\mu) - \alpha_6\alpha_{11}}{\alpha_9\alpha_{10} + \alpha_8\alpha_{11}}, E_b \rightarrow 0 \right], \\
& 5) \left[U \rightarrow 0, E_A \rightarrow -\frac{-\alpha_4\alpha_6 + \alpha_1\alpha_8}{\alpha_5\alpha_8 + \alpha_4\alpha_9}, \mathcal{E} \rightarrow -\frac{-\alpha_5\alpha_6 - \alpha_1\alpha_9}{\alpha_5\alpha_8 + \alpha_4\alpha_9}, E_b \rightarrow 0 \right], \\
& 6) \left[U \rightarrow 0, E_A \rightarrow \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, \mathcal{E} \rightarrow 0, E_b \rightarrow 0 \right], \\
& 7) \left[U \rightarrow -\frac{\mu\alpha_4 - \alpha_1\alpha_{10}}{\alpha_2\alpha_{10}}, E_A \rightarrow 0, \mathcal{E} \rightarrow \frac{\mu}{\alpha_{10}}, E_b \rightarrow 0 \right], \\
& 8) \left[U \rightarrow 0, E_A \rightarrow 0, \mathcal{E} \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_4}, E_b \rightarrow 0 \right].
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Para determinar la estabilidad de cada punto de equilibrio es necesario calcular la matriz Jacobiana del sistema, expresada como:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 U - \alpha_3 E_b - 2\alpha_4 \mathcal{E} + \alpha_5 E_A & \alpha_5 \mathcal{E} & -\alpha_2 \mathcal{E} & -\alpha_3 \mathcal{E} \\ -\alpha_8 E_A & \alpha_6 - 2\alpha_9 E_A - \alpha_7 E_b - \alpha_8 \mathcal{E} & 0 & -\alpha_7 E_A \\ \alpha_{10} U & -\alpha_{11} U & -\alpha_{11} E_A + \alpha_{10} \mathcal{E} - \mu & 0 \\ 0 & \alpha_{12} E_b & 0 & \alpha_{12} E_A \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Posteriormente, de acuerdo al teorema de Hartman-Grobman, se evalúa la matriz jacobiana en cada uno de los puntos de equilibrio y se obtienen los eigenvalores, los cuales se presentan a continuación, denotados numéricamente en el mismo orden en el que se expresaron en la ecuación (5.2):

1.

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{-\alpha_3\alpha_8\mu - \alpha_1\alpha_{10}\alpha_7 + \alpha_4\alpha_7\mu + \alpha_3\alpha_6\alpha_{10} + \alpha_2\alpha_{10}\alpha_7 U}{\alpha_3\alpha_{10}} \\ \frac{-\alpha_3\alpha_4\mu - \sqrt{\alpha_3^2\alpha_4^2\mu^2 - 4\alpha_2\alpha_3^2\alpha_{10}^2\mu U}}{2\alpha_3\alpha_{10}} \\ \frac{-\alpha_3\alpha_4\mu + \sqrt{\alpha_3^2\alpha_4^2\mu^2 - 4\alpha_2\alpha_3^2\alpha_{10}^2\mu U}}{2\alpha_3\alpha_{10}} \end{array} \right).$$

Para obtener información acerca de los puntos de equilibrio es necesario recordar que la estabilidad se determina a partir de los eigenvalores que en general son complejos; cuando la parte real es negativa para todos ellos, el sistema es estable y si para algún

eigenvalor es positiva, es inestable. Cuando el eigenvalor presenta una parte imaginaria existe una oscilación alrededor del punto de equilibrio. Con lo cual, a partir de la expresión anterior se puede obtener que el punto es estable y oscilatorio siempre que $\alpha_3\alpha_8\mu + \alpha_1\alpha_{10}\alpha_7 > \alpha_4\alpha_7\mu + \alpha_3\alpha_6\alpha_{10} + \alpha_2\alpha_{10}\alpha_7U$ y $\mu^2\alpha_3^2\alpha_4^2 < 4\alpha_2\alpha_3^2\alpha_{10}^2\mu U$. Como puede apreciarse, la estabilidad depende de un valor fijo del flujo zonal, el mismo puede ser el valor inicial en caso de que el sistema se encuentre en un estado estacionario o, el valor final del sistema tras alcanzar el equilibrio. En caso de que los valores de U sean grandes comparados con los parámetros $\mu\alpha_4^2/4\alpha_2\alpha_{10}^2$ el sistema presentará oscilaciones al rededor del punto de equilibrio.

2.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_4\mathcal{E} \\ \frac{\alpha_3\alpha_6 - \alpha_1\alpha_7 + \alpha_4\alpha_7\mathcal{E} - \alpha_3\alpha_8\mathcal{E}}{\alpha_3} \\ -\mu + \alpha_{10}\mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Análogo al punto de equilibrio anterior, se aprecia que la estabilidad del sistema depende del valor inicial de una cantidad, que en éste caso se trata de la enstrofia. Sin embargo, las condiciones necesarias para que el punto sea estable son: $\alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_8\mathcal{E} > \alpha_3\alpha_6 + \alpha_4\alpha_7\mathcal{E}$ y $\mu > \mathcal{E}\alpha_{10}$. Un detalle importante a resaltar se asocia a la falta de oscilaciones de este punto de equilibrio, por lo cual, puede anticiparse que cuando el sistema tienda a un estado donde las fluctuaciones magnéticas y el flujo zonal desaparezcan, las cantidades asociadas al campo zonal y a la estrofia permanecerán constantes a lo largo del tiempo.

3.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ \alpha_1 - E_b\alpha_3 \\ \alpha_6 - E_b\alpha_7 \end{pmatrix}.$$

Este punto es estable, siempre que $E_b\alpha_3 > \alpha_1$ y $E_b\alpha_7 > \alpha_6$. Pero, al igual que en el caso del punto 2, el sistema no presenta oscilaciones.

4.

$$\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})} \begin{pmatrix} I \\ II \\ III \\ \alpha_2 \alpha_{12} (\alpha_8 \mu - \alpha_6 \alpha_{10}) \end{pmatrix},$$

con I, II, III las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + (\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 - \mu \alpha_2 \alpha_8 \alpha_9 + \alpha_2 \alpha_6 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}) \lambda^2 \\ & + (-\mu^2 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_2^2 + \mu \alpha_1 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 \alpha_2^2 + \mu \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_2^2 - \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 \alpha_2^2 \\ & + \alpha_1 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 \alpha_2^2 - \mu^2 \alpha_5 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_2^2 - \mu^2 \alpha_4 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_2^2 + \mu \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_2^2 - \mu^2 \alpha_5 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_2^2 \\ & + \mu \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_2^2 - \mu \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_{11} \alpha_2^2 + \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \alpha_2^2 \\ & - \mu \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{11} \alpha_2^2 + \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_2^2 - \mu \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_2^2 \\ & + \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_2^2 - 2\mu \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_2^2 + \mu \alpha_1 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_2^2) \lambda \\ & + \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_9^3 \alpha_{10}^3 + \mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^3 - \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8^3 \alpha_{11}^3 \\ & + \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{11}^3 + \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 - \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^3 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 \\ & - \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 \alpha_{10}^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8 \alpha_9^3 \alpha_{10}^2 - 2\mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^3 \alpha_{11}^2 \\ & + \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_8 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 - \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 + 2\alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 \\ & - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8^3 \alpha_9 \alpha_{11}^2 + 2\mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - 2\mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 \\ & - \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9^3 \alpha_{10} \\ & + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} + \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} + \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} \\ & - 2\mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} + \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} - \mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \\ & + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_8^3 \alpha_9 \alpha_{11} - 2\mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} + \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones para dicha ecuación pueden obtenerse haciendo uso del código presente en el Anexo D, sin embargo, la complejidad de las mismas limita la información que es posible obtener de ellas

5.

$$\begin{pmatrix} \frac{-\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 + \alpha_1 \alpha_8 \alpha_9 - \sqrt{\beta}}{2(\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9)} \\ \frac{-\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 + \alpha_1 \alpha_8 \alpha_9 + \sqrt{\beta}}{2(\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9)} \\ \frac{-\mu \alpha_5 \alpha_8 - \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_1 \alpha_{11} \alpha_8 + \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{10} + \alpha_1 \alpha_9 \alpha_{10} - \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9} \\ \frac{(\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_8) \alpha_{12}}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9} \end{pmatrix},$$

Con $\beta = (\alpha_4\alpha_5\alpha_6 + \alpha_4\alpha_9\alpha_6 + \alpha_1\alpha_4\alpha_9 - \alpha_1\alpha_8\alpha_9)^2 - 4(\alpha_4\alpha_5^2\alpha_8\alpha_6^2 + \alpha_4^2\alpha_5\alpha_9\alpha_6^2 - \alpha_1\alpha_5^2\alpha_8^2\alpha_6 + \alpha_1\alpha_4^2\alpha_9^2\alpha_6 - \alpha_1^2\alpha_4\alpha_8\alpha_9^2 - \alpha_1^2\alpha_5\alpha_8^2\alpha_9)$.

Para este punto, las condiciones de estabilidad y oscilación son:

$$\begin{aligned} 4(\alpha_4\alpha_5^2\alpha_8\alpha_6^2 + \alpha_4^2\alpha_5\alpha_9\alpha_6^2 - \alpha_1\alpha_5^2\alpha_8^2\alpha_6 + \alpha_1\alpha_4^2\alpha_9^2\alpha_6 - \alpha_1^2\alpha_4\alpha_8\alpha_9^2 - \alpha_1^2\alpha_5\alpha_8^2\alpha_9) &> (\alpha_4\alpha_5\alpha_6 + \alpha_4\alpha_9\alpha_6 + \alpha_1\alpha_4\alpha_9 - \alpha_1\alpha_8\alpha_9)^2, \\ \alpha_4\alpha_5\alpha_6 + \alpha_4\alpha_9\alpha_6 + \alpha_1\alpha_4\alpha_9 &> \alpha_1\alpha_8\alpha_9, \\ \mu\alpha_5\alpha_8 + \alpha_4\alpha_9\mu + \alpha_4\alpha_6\alpha_{11} &> \alpha_1\alpha_{11}\alpha_8 + \alpha_5\alpha_6\alpha_{10} + \alpha_1\alpha_9\alpha_{10}, \\ \alpha_1\alpha_8 &> \alpha_4\alpha_6. \end{aligned}$$

Sin embargo, haciendo uso del código desarrollado en el Anexo D, se encuentra que la combinación de dichas condiciones no es posible, es decir, el sistema no puede ser un atractor y oscilar a la vez. Con esto, puede anticiparse que la posibilidad de que exista una dinámica de tipo depredador-presa para un sistema sin la presencia de componentes zonales es nula, al menos bajo las condiciones empleadas.

6.

$$\begin{pmatrix} -\alpha_6 \\ \frac{\alpha_5\alpha_6 + \alpha_1\alpha_9}{\alpha_9} \\ \frac{-\mu\alpha_9 + \alpha_6\alpha_{11}}{\alpha_9} \\ \frac{\alpha_6\alpha_{12}}{\alpha_9} \end{pmatrix}.$$

Notemos que este sistema no oscila y en general no es estable, este caso corresponde a la situación en la cual el campo zonal es la única cantidad que persiste a lo largo del tiempo.

7.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\mu\alpha_8 + \alpha_6\alpha_{10}}{\alpha_{10}} \\ \frac{-\mu\alpha_2^2\alpha_4\alpha_{10} - \sqrt{\mu}\alpha_2^2\alpha_{10}\sqrt{\mu\alpha_4^2 + 4\mu\alpha_4\alpha_{10} - 4\alpha_1\alpha_{10}^2}}{2\alpha_2^2\alpha_{10}^2} \\ \frac{-\mu\alpha_2^2\alpha_4\alpha_{10} + \sqrt{\mu}\alpha_2^2\alpha_{10}\sqrt{\mu\alpha_4^2 + 4\mu\alpha_4\alpha_{10} - 4\alpha_1\alpha_{10}^2}}{2\alpha_2^2\alpha_{10}^2} \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de estabilidad y oscilación asociadas a este punto de equilibrio son: $\mu\alpha_8 > \alpha_6\alpha_{10}$ y $\mu\alpha_4^2 + 4\mu\alpha_4\alpha_{10} < 4\alpha_1\alpha_{10}^2$, mismas que pueden cumplirse a la vez sin ningún inconveniente. Es este el punto de equilibrio al cual se asocia el modelo de tipo depredador presa desarrollado por Carreras-Diamond-Terry y que se discutió en la sección 3.2 y que además se analizó en [20].

8.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_1 \\ \frac{\alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_8}{\alpha_4} \\ \frac{-\mu\alpha_4 + \alpha_1\alpha_{10}}{\alpha_4} \end{pmatrix}.$$

Puede notarse que el punto es estable si se cumple que $\alpha_1\alpha_8 > \alpha_4\alpha_6$ y $\mu\alpha_4 > \alpha_1\alpha_{10}$. Debido a que este punto no cuenta con partes imaginarias, los estados asociados al mismo no oscilan a lo largo del tiempo. Este caso es comparable a los estados finales de la simulación presentada en la sección 5.1.2.

Parte de la riqueza las ecuaciones (4.16) radica en la existencia de subsistemas, cuyo comportamiento se encuentran asociados a casos extremos del modelo principal, esto debido a la reducción de su dimensionalidad, por lo cual al referirnos a los puntos de equilibrio de dichos subsistemas (véase casos 5 y 6), se consideraran los obtenidos y numerados en el apéndice D.

5.3. Modelado de Casos Específicos

Un detalle importante a resaltar es que para realizar la evolución temporal de las ecuaciones (4.16), los resultados obtenidos mediante el método de Euler y el método de Runge-Kutta (Apéndice B) son indistinguibles, por lo cuál se optó por realizar las simulaciones empleando RK4.

5.3.1. Caso 1

La imagen 5.3 representa el caso en el que se emplearon los parámetros $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.009, \alpha_3 = 0.003, \alpha_4 = 0.008, \alpha_5 = 0.009, \alpha_6 = 0.08, \alpha_7 = 0.05, \alpha_8 = 0.095, \alpha_9 = 0.02, \alpha_{10} = 0.03, \alpha_{11} = 0.01, \alpha_{12} = 0.05, \mu = 0.6, U_0 = 1, \mathcal{E}_0 = 100, E_{A,0} = 100, E_{b,0} = 0.1$ y $\Delta t = 0.001$ en la simulación. Como se aprecia, la dinámica de esta simulación replica de manera casi exacta el comportamiento cualitativo de la figura 5.2, con esto se comprueba que el modelo de Carreras-Diamond-Terry se encuentra contenido dentro del sistema desarrollado. Vale la pena resaltar que para el modelo discutido en la sección 3.2 se trabaja

bajo variables con una denominación diferente, siendo las cantidades análogas entre sí la estrofia \mathcal{E} y E el cuadrado de las fluctuaciones de densidad de los iones en el plasma, mientras que U es una cantidad promedio no fluctuante, siendo para Carreras-Diamond-Terry proporcional al campo eléctrico promedio (que da la velocidad de deriva eléctrica $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$), mientras que para el modelo aquí presentado U es proporcional a la velocidad del fluido neutro promediada.

Notemos además, que para el caso en el que las fluctuaciones magnéticas tienen un crecimiento moderado las mismas tienden a amortiguarse y disiparse rápidamente. Esto, aunado al crecimiento lento del campo zonal, provoca que la parte cinética y magnética del sistema se desacople, lo que ocasiona que las del campo zonal, el flujo zonal y la enstrofia alcancen valores constantes en el tiempo.

Al evaluar los puntos equilibrio obtenidos en la sección anterior empleando los parámetros usados para este caso, se encuentra que solamente existen dos puntos estables, el primero, cuyos eigenvalores son reales negativos, y el séptimo, cuyos valores propios son complejos con parte real negativa. Con lo anterior puede interpretarse que el sistema transiciona de un estado oscilatorio al rededor del séptimo punto de equilibrio, hacia un equilibrio estable dado por el primer punto de equilibrio.

1.

$$\begin{pmatrix} -9.00333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0.0 \end{pmatrix}.$$

7.

$$\begin{pmatrix} -1.82 \\ -0.08 + i0.507543 \\ -0.08 - i0.507543 \\ 0.0 \end{pmatrix}.$$

5.3.2. Caso 2

En el caso mostrado en la figura 5.4, se aprecia que para tiempos cortos las fluctuaciones magnéticas tienden a crecer de manera abrupta, para posteriormente ser amortiguadas por efecto de las fluctuaciones cinéticas y el crecimiento del campo zonal. De igual manera, debido a que la energía de las fluctuaciones magnéticas presenta un decremento pequeño para tiempos menores a 50, el crecimiento del campo zonal es mínimo, sin embargo al acercarse a valores cercanos a 100, el campo comienza a crecer de manera abrupta. Una vez alcanzado dicho valor, el sistema parece alcanzar un estado de equilibrio, esto marca un cambio en la dinámica del sistema, por lo que se le considera una transición entre diferentes estados. La dinámica del sistema se vuelve a modificar, debido al crecimiento abrupto del flujo zonal, dando como resultado oscilaciones entre la enstrofia y la energía del campo zonal, lo que permite un leve incremento en la energía de las fluctuaciones magnéticas, que a su vez incrementa la energía del campo zonal. Seguido a esto, el sistema alcanza el equilibrio, mismo que se asocia al primer punto de equilibrio, debido a que las fluctuaciones magnéticas tienden a 0. Los parámetros utilizados para esta simulación fueron $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.009, \alpha_3 = 0.003, \alpha_4 = 0.008, \alpha_5 = 0.009, \alpha_6 = 1.5, \alpha_7 = 0.01, \alpha_8 = 0.015, \alpha_9 = 0.02, \alpha_{10} = 0.03, \alpha_{11} = 0.4, \alpha_{12} = 0.006, \mu = 0.6, U_0 = 1, \mathcal{E}_0 = 100, E_{A,0} = 100, E_{b,0} = 0.1$ y $\Delta t = 0.001$.

A diferencia del sistema anterior, el único punto de equilibrio estable es el primero, sin embargo, la vecindad al rededor de dicho punto no presenta un carácter oscilatorio, por lo que este es el punto de equilibrio hacia el cual el sistema tiende en sus estadios finales.

1.

$$\begin{pmatrix} -0.236667 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0.0 \end{pmatrix}.$$

5.3.3. Caso 3

En este caso, ilustrado en la figura 5.5, el crecimiento de las fluctuaciones magnéticas es mucho mayor al crecimiento del resto de las variables del sistema. Notamos, a partir de

la figura a) , que para tiempos menores a 250 el sistema parece encontrarse en equilibrio, sin embargo, después de dicho tiempo el flujo zonal incrementa, volviéndose uno de los principales reservorios de energía para el sistema, lo que reduce la enstrofia del sistema, hecho que a su vez permite un incremento en las fluctuaciones magnéticas y posteriormente el del campo zonal. Para tiempos entre 180 y 220, observamos pequeñas oscilaciones magnéticas que intensifican la amplitud máxima de la energía de la enstrofia y la energía del flujo zonal. Posteriormente notamos que la dinámica del sistema se comporta de manera análoga a la presentada en la figura 5.4. Como podemos apreciar, este sistema presenta al menos dos transiciones entre estados, la primera pasando del estado dominado por la enstrofia y las componentes magnéticas del sistema, el segundo, que actúa como estado meta estable que posteriormente da lugar a la dinámica estable del sistema, por lo cual, es posible anticipar que el incremento de las cantidades zonales del sistema modifica la dinámica del mismo una vez que se alcanza un valor crítico que da lugar a un fenómeno de crecimiento desbocado para dichas cantidades. En este caso los parámetros empleados fueron $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.009, \alpha_3 = 0.003, \alpha_4 = 0.008, \alpha_5 = 0.009, \alpha_6 = 4.5, \alpha_7 = 0.05, \alpha_8 = 0.045, \alpha_9 = 0.02, \alpha_{10} = 0.03, \alpha_{11} = 0.4, \alpha_{12} = 0.006, \mu = 0.6, U_0 = 1, \mathcal{E}_0 = 100, E_{A,0} = 100, E_{b,0} = 0.1$ y $\Delta t = 0.001$. Estos parámetros tienen como consecuencia que sólo exista un punto de equilibrio estable, el primero.

1.

$$\begin{pmatrix} -3.58333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.3.4. Caso 4

Para la figura 5.6, los parámetros empleados fueron $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.009, \alpha_3 = 0.003, \alpha_4 = 0.008, \alpha_5 = 0.009, \alpha_6 = 4.5, \alpha_7 = 0.05, \alpha_8 = 0.095, \alpha_9 = 0.02, \alpha_{10} = 0.03, \alpha_{11} = 0.4, \alpha_{12} = 0.006, \mu = 0.6, U_0 = 1, \mathcal{E}_0 = 100, E_{A,0} = 100, E_{b,0} = 0.1$ y $\Delta t = 0.001$. Como podemos apreciar, en esta ocasión el parámetro α_8 fue incrementado respecto al empleando

en la figura 5.5, con lo cual se aprecia que un incremento en la tasa de transferencia de la energía magnética hacia la enstrofia evita el crecimiento abrupto del campo zonal, por lo que permite la aparición de oscilaciones en el resto de las componentes del sistema. El comportamiento que se observa a tiempos más grandes corrobora que cuando el campo zonal alcanza un valor critico, el mismo amortigua las fluctuaciones magnéticas haciéndolas tender a 0, provocando así el desacople del sistema en sus partes magnéticas y cinéticas, evitando el intercambio de energía de una fuente a otra, lo que permite recuperar la dinámica del modelo de Carreras-Diamond-Terry. En adición, es apreciable que el ancho de las crestas de la enstrofia es proporcional al máximo previo de la energía de las fluctuaciones magnéticas, mientras que el campo zonal actúa como un término de amortiguamiento que disminuye las oscilaciones en el sistema. Para este punto del análisis, resulta sensato afirmar que debido a la falta de un término de amortiguamiento para E_b , los subsistemas que incluyan la presencia de un campo zonal terminan en el estado descrito por el punto de equilibrio 1. Lo anterior se corrobora al evaluar los puntos de equilibrio con los parámetros elegidos para este caso, sin embargo, no existe un punto de equilibrio estable el cual oscile.

1.

$$\begin{pmatrix} -4.58333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0.0 \end{pmatrix}.$$

5.3.5. Caso 5

Para los resultados mostrados en la figura 5.7, los parámetros empleados fueron los mismos que en la figura anterior, sin embargo, esta vez se empleó $E_b = 0$. Como se aprecia, la energía del flujo zonal, la enstrofia y la energía de las fluctuaciones magnéticas pueden generar un sistema oscilante, análogo a la interacción de un modelo de tipo depredador-presa de tres especies.

De igual manera, se aprecia que el ancho de las crestas de enstrofia son proporcionales al valor máximo de las crestas de E_A , este fenómeno es más claro al inicio de la simulación.

En general, el sistema presenta el siguiente comportamiento: Existe un intervalo de tiempo donde las fluctuaciones magnéticas son el principal reservorio de energía del sistema, la cual se transfiere a las fluctuaciones cinéticas en forma de enstrofia, misma que se mantiene constante hasta que la energía del flujo zonal incrementa, provocando una disminución en \mathcal{E} , esto a su vez permitiendo el incremento posterior de E_A .

Mientras tanto, el efecto de disipación y de cascada directa (hacia las fluctuaciones magnéticas) asociada al flujo zonal provoca la disminución del mismo, lo que permite un incremento posterior de la enstrofia. Con lo anterior, aunado a los resultados arrojados por el código presente en el apéndice D, resulta factible afirmar que este sistema se encuentra oscilando al rededor del sexto punto de equilibrio, el cual es el único punto de equilibrio estable con un comportamiento oscilatorio en sus alrededores. Al analizarse este caso en conjunto con el caso 4, resulta claro que la presencia y crecimiento del campo zonal evitan que la dinámica de tipo depredador-presa exista de manera perpetua en el sistema.

6.

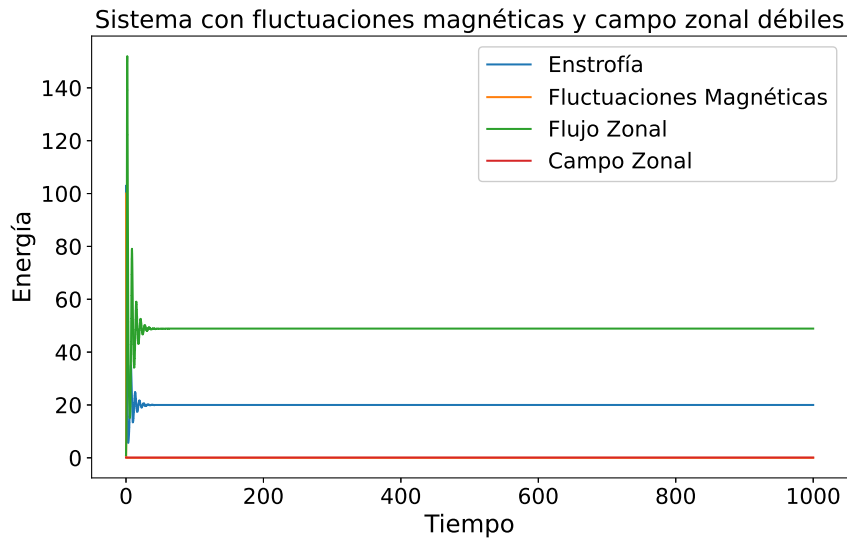
$$\begin{pmatrix} -4.18407 \\ -0.530973 + i0.744547 \\ -0.530973 - i0.744547 \end{pmatrix}.$$

5.3.6. Caso 6

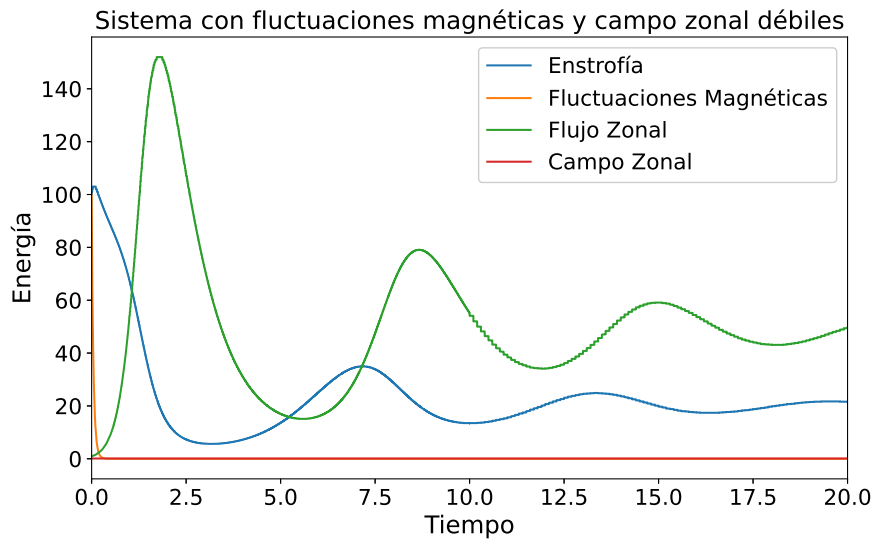
Por último, en la figura 5.8, cuyos parámetros empleados fueron $\alpha_1 = 0.03, \alpha_4 = 0.008, \alpha_5 = 0.009, \alpha_6 = 9.0, \alpha_8 = 0.095, \alpha_9 = 0.02, U_0 = 0, \mathcal{E}_0 = 1, E_{A,0} = 100, E_{b,0} = 0$ $\Delta t = 0.0001$, se estudió el subsistema existente para la enstrofia y la energía de las fluctuaciones magnéticas, obteniéndose un sistema que presenta ligeras oscilaciones iniciales y posteriormente tiende a valores de equilibrio $\mathcal{E} = -\alpha_1\alpha_9 - \alpha_5\alpha_6/\alpha_4\alpha_9 + \alpha_5\alpha_8 = 80.3941$ y $E_A = -(\alpha_4\alpha_6 + \alpha_1\alpha_8)/(\alpha_5\alpha_8 + \alpha_4\alpha_9) = 68.1281$, como se aprecia en la figura 5.8 b) . Esto coincide con el comportamiento esperado cerca de la región asociada al cuarto punto de equilibrio de este subsistema, el cuál es un atractor que presenta un comportamiento oscilatorio.

4.

$$\begin{pmatrix} -1.00286 + i2.1339 \\ -1.00286 - i2.1339 \end{pmatrix}.$$

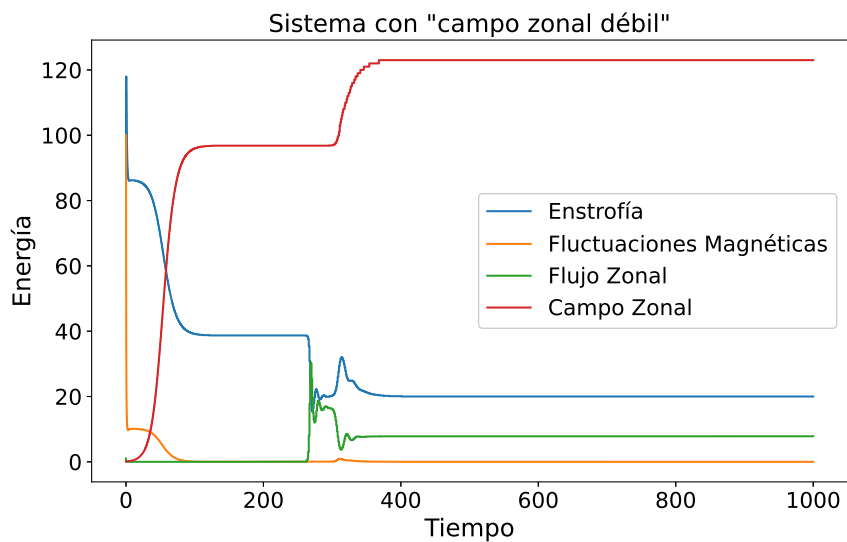


(a) Dinámica del sistema

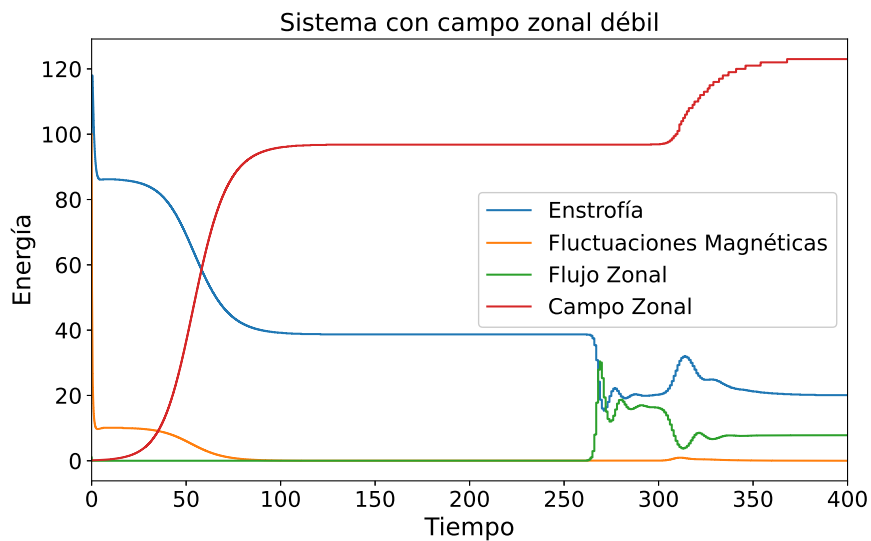


(b) Dinámica del sistema ampliada.

Figura 5.3: Campo zonal y fluctuaciones magnéticas débiles.

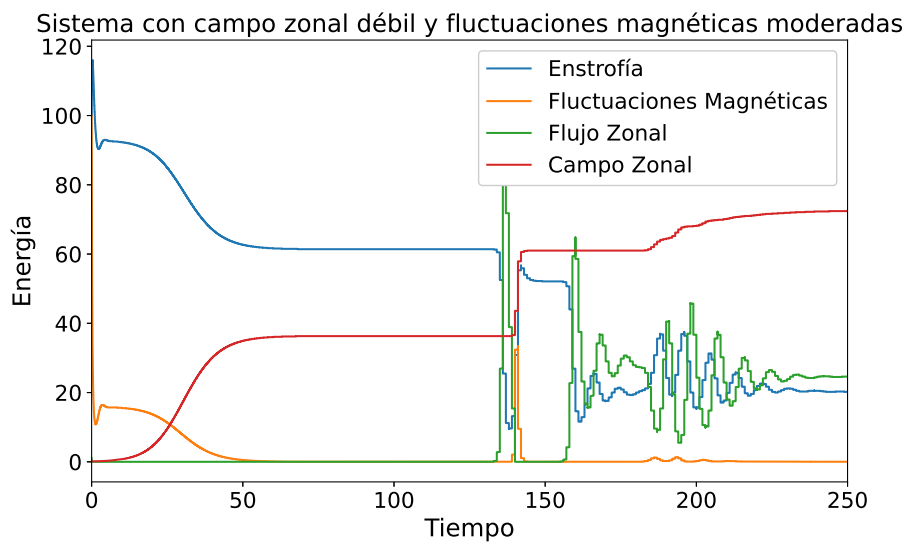


(a) Evolución del sistema a tiempos largos.

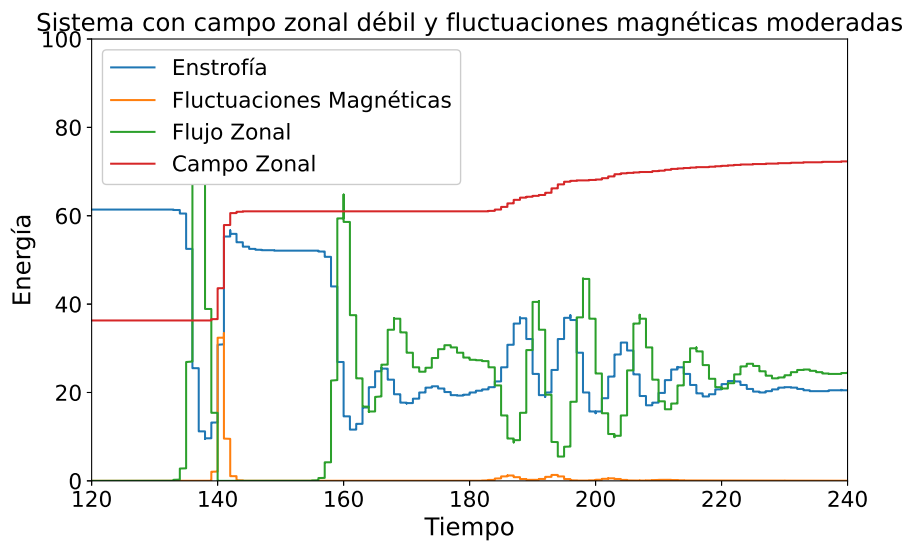


(b) Comportamiento a tiempos cortos.

Figura 5.4: Campo zonal débil.

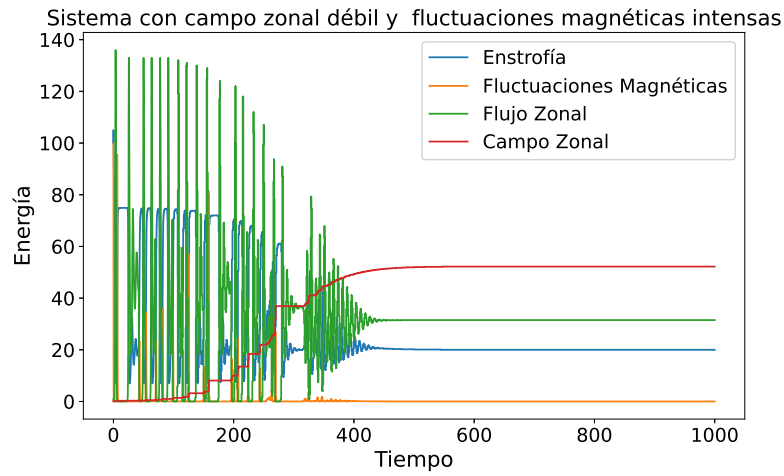


(a) Evolución del sistema a tiempos largos.

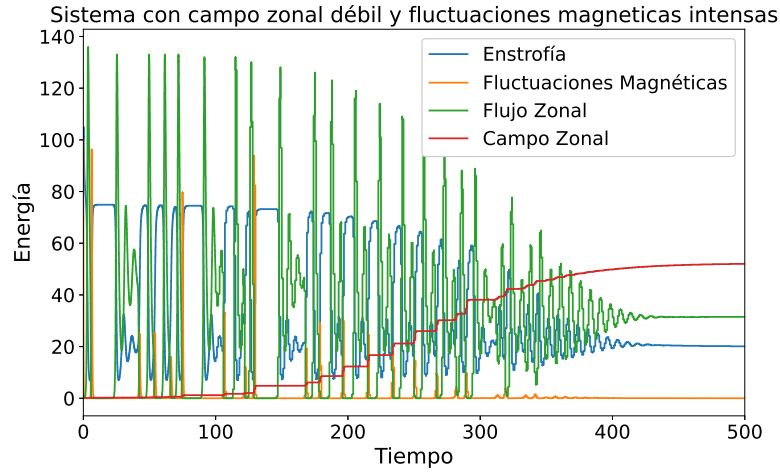


(b) Acercamiento del comportamiento del sistema.

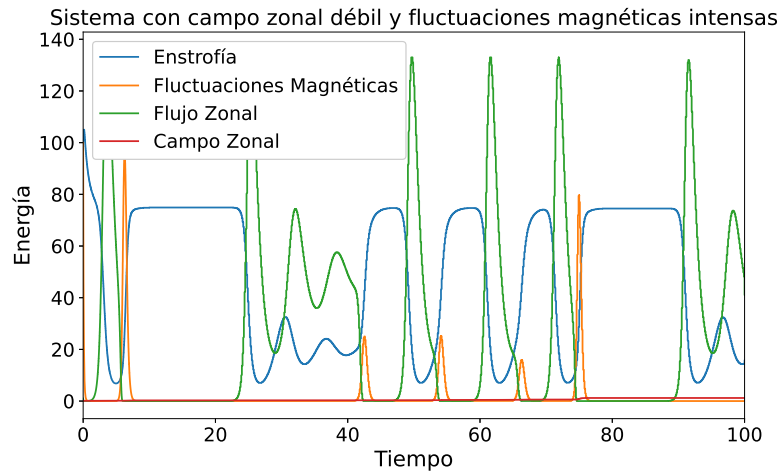
Figura 5.5: Campo zonal débil y fluctuaciones magnéticas moderadas.



(a) Representa la simulación a una escala temporal grande.

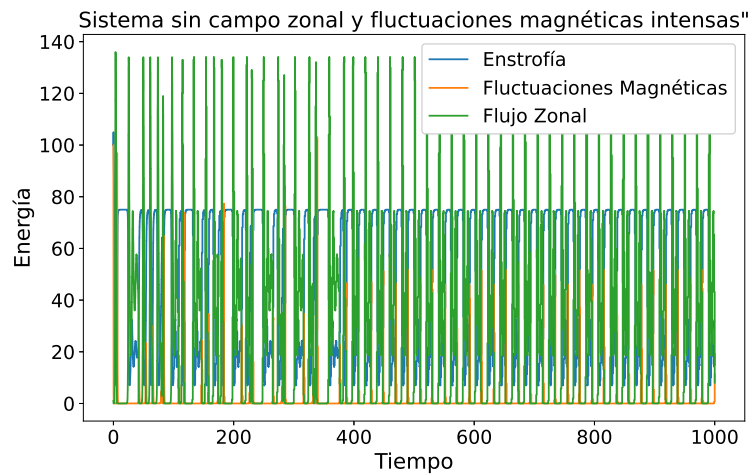


(b) Comportamiento a tiempos cortos.

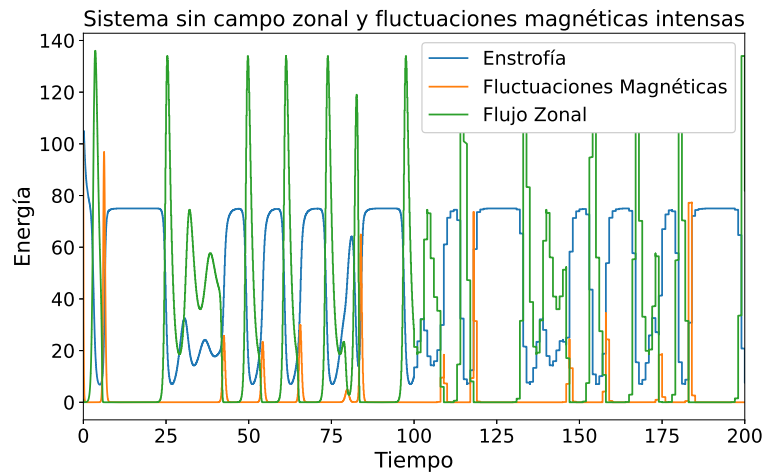


(c) Evolución del sistema a tiempos cortos en la región inicial.

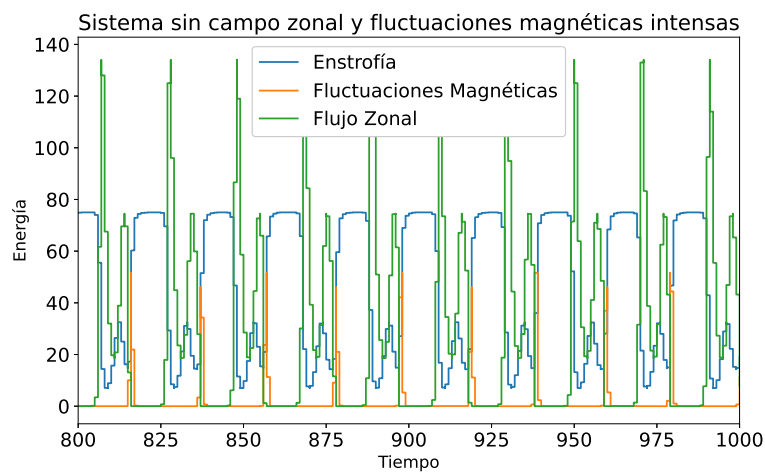
Figura 5.6: Campo zonal débil y fluctuaciones magnéticas intensas



(a) Representa la simulación para grandes escalas de tiempo

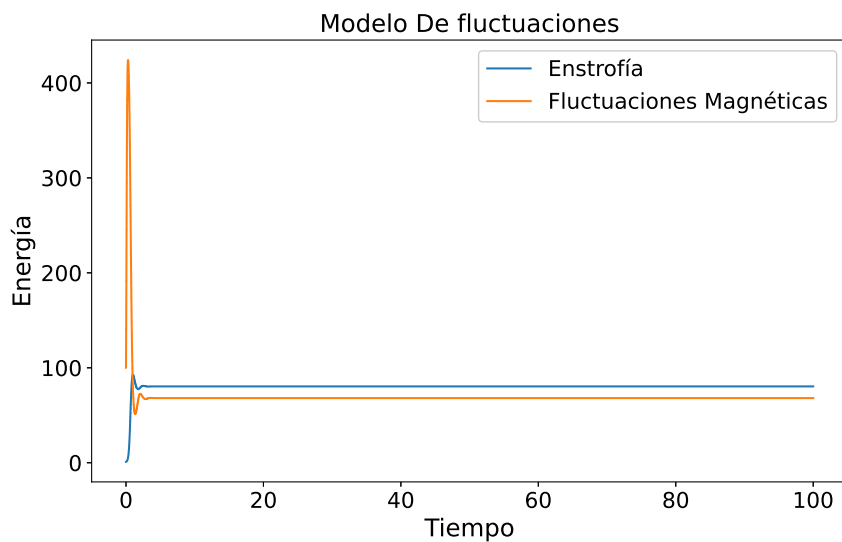


(b) Representa el comportamiento inicial del sistema a una escala de tiempo menor.

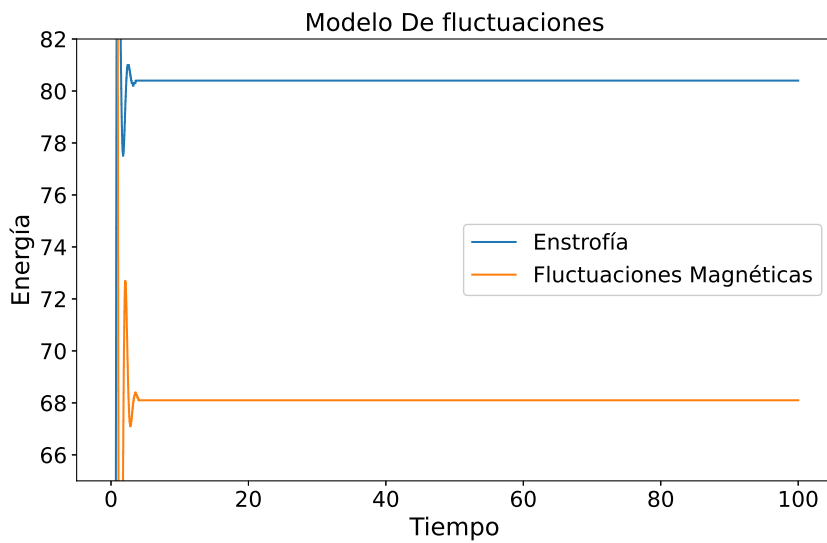


(c) Evolución del comportamiento del sistema hacia el final de la simulación.

Figura 5.7: Modelo sin campo zonal.



(a) Simulación Completa.



(b) Acercamiento del comportamiento del sistema.

Figura 5.8: Modelo de fluctuaciones.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se mostró que es posible partir de la ley de Ohm generalizada, misma que representa la ecuación de movimiento para los electrones, junto con la ecuación de momento para un fluido diluido débilmente ionizado (característico de la capa E de la ionosfera), generar un conjunto de ecuaciones que describan el comportamiento cualitativo de la dinámica existente entre los diferentes reservorios de energía, siendo las variables asociadas la energía del campo zonal (E_b), la energía contenida en el flujo zonal (U), la enstrofia (\mathcal{E}) y la energía asociada a las fluctuaciones de origen magnético (E_A). Para lograr esto, se realizó la separación entre escalas, las pequeñas describen las oscilaciones, mientras que las grandes representan los flujos y campos promedio. Sin embargo, fue necesario aplicar una serie de cerraduras al conjunto de ecuaciones, mismas que involucran el efecto del flujo y campo zonal sobre las fluctuaciones, y derivados de la interacción no local entre las fluctuaciones presentes en el medio (ondas de Alfvén, Rossby y Khantadze).

Dicho modelo permite replicar la dinámica obtenida y descrita por el modelo de Carreras-Diamond-Terry, siendo este un sub-modelo del sistema analizado.

El papel general del campo zonal es el de amortiguar las fluctuaciones del sistema. Una vez que el mismo alcanza un valor crítico provoca el amortiguamiento total de las fluctuaciones magnéticas, lo que produce un desacople entre las componentes cinéticas, y magnéticas del sistema. Lo anterior genera que las componentes cinéticas reduzcan su comportamiento al mismo que presenta el modelo de Carreras-Diamond-Terry, mientras que el campo zonal remanente permanece constante en el tiempo.

Por otra parte, cuando el crecimiento de las fluctuaciones magnéticas es un orden de magnitud mayor al de la enstrofia, el desarrollo de un sistema oscilatorio entre la energía del flujo zonal, la enstrofia y las fluctuaciones magnéticas es posible, mismo que, sin la presencia del campo zonal genera un comportamiento periódico en las cantidades.

Por otra parte, cinco posibles investigaciones que se desprenden del presente trabajo y que a su vez, son complementarias al mismo son las que se enumeran a continuación:

1. Llevar a cabo un análisis y representación visual de las cuencas de atracción resultantes del sistema, permitiendo así una descripción más clara de la dinámica completa presente en el mismo.
2. Realizar la búsqueda de una base de datos que contenga mediciones adecuadas de la capa E de la ionosfera, para corroborar con datos de campos la validez del modelo. Lo anterior sería útil para brindar una cota en los parámetros y de igual manera permitiría la realización de un proceso de cerradura más certero sobre las ecuaciones.
3. Investigar y desarrollar con una mayor formalidad una serie de criterios de cerradura aplicables al sistema de ecuaciones, dejando así de lado o corroborando, las cerraduras semi-heurísticas aplicadas en el presente estudio.
4. Explorar la posibilidad de aplicar el tratamiento aquí planteado para sistemas de confinamiento magnético.
5. Y realizar un análisis sobre las propiedades caóticas del modelo, lo que podría dar lugar a propiedades emergentes no anticipadas con posibles aplicaciones en ambos campos, la física ionosférica y los sistemas de confinamiento magnético.

Bibliografía

- [1] A. Calles and R. Espejel. *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales. Con ejemplos de Python*. Prensas de Ciencias, 2019.
- [2] B. A. Carreras, K. Sidikman, P. H. Diamond, P. W. Terry, and L. Garcia. Theory of shear flow effects on long-wavelength drift wave turbulence. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 4(10):3115–3131, 1992.
- [3] C. Connaughton, S. Nazarenko, and B. Quinn. Rossby and drift wave turbulence and zonal flows: the charney–hasegawa–mima model and its extensions. *Physics Reports*, 604:1–71, 2015.
- [4] M. G. Cordero Tercero, A. Lara Sánchez, M. D. Maravilla Meza, E. B. Ortega Mendoza, and J. F. Valdés Galicia. *Introducción a la física espacial*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [5] P. A. Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2015.
- [6] R. L Dewar and R. F. Abdullatif. Zonal flow generation by modulational instability. In *Frontiers in Turbulence and Coherent Structures*, pages 415–430. World Scientific, 2007.
- [7] P. H. Diamond, J. Fleischer, M. Rosenbluth, F. L. Hinton, M. Malkov, and A. Smolyakov. Dynamics of zonal flows and self-regulating drift-wave turbulence. Technical report, 2001.

- [8] P. H. Diamond, A. Hasegawa, and K. Mima. Vorticity dynamics, drift wave turbulence, and zonal flows: a look back and a look ahead. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(12):124001, 2011.
- [9] P. H. Diamond, S. I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm. Zonal flows in plasma—a review. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47(5):R35, 2005.
- [10] P. H. Diamond, Y-M. Liang, B. A. Carreras, and P. W. Terry. Self-regulating shear flow turbulence: A paradigm for the l to h transition. *Physical review letters*, 72(16):2565, 1994.
- [11] M. Dobrowolny. *Advanced plasma physics*. Youcanprint, 2019.
- [12] P. N. Guzdar, R. G. Kleva, A. Das, and P. K. Kaw. Zonal flow and field generation by finite beta drift waves and kinetic drift-alfven waves. *Physics of Plasmas*, 8(9):3907–3912, 2001.
- [13] J. R. Holton. *An introduction to dynamic meteorology*. Elsevier, 2004.
- [14] A. Iserles. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Number 44. Cambridge university press, 2009.
- [15] K. Itoh, S-I. Itoh, P. H. Diamond, T. S. Hahm, A. Fujisawa, G. R. Tynan, M. Yagi, and Y. Nagashima. Physics of zonal flows. *Physics of plasmas*, 13(5), 2006.
- [16] T. D. Kaladze, W. Horton, L. Z. Kahlon, O. Pokhotelov, and O. Onishchenko. Generation of zonal flow and magnetic field by coupled rossby–alfvén–khantadze waves in the earth’s ionospheric e-layer. *Physica Scripta*, 88(6):065501, 2013.
- [17] T. D. Kaladze and L. V. Tsamalashvili. Nonlinear alfvén–rossby vortical structures in the earth’s ionosphere. *Physics Letters A*, 287(1):137–142, 2001.
- [18] M. C. Kelley. *The Earth’s ionosphere: Plasma physics and electrodynamics*. Academic press, 2009.
- [19] M. G. Kivelson and C.T. Russell. *Introduction to space physics*. Cambridge university press, 1995.

- [20] S. Kobayashi, Ö. D. Gürçan, and P. H. Diamond. Direct identification of predator-prey dynamics in gyrokinetic simulations. *Physics of Plasmas*, 22(9), 2015.
- [21] R. Mansilla, J. M. Nieto-Villar, J. Betancourt-Mar, C. Germinal, N. Palma, A. Durán, I. Santamaria Holek, K. Michaelian, S. Montero, and R. Martín. *La Termodinámica de los sistemas complejos*. 01 2017.
- [22] M. Materassi, B. Forte, A. J. Coster, and S. Skone. *The dynamical ionosphere: A systems approach to ionospheric irregularity*. Elsevier, 2019.
- [23] J. D. Murray. *Mathematical Biology: I: An Introduction*, volume 3. Springer, 2002.
- [24] J. B-C. Parker. *Zonal flows and turbulence in fluids and plasmas*. PhD thesis, Princeton University, 2014.
- [25] A. Piel et al. *An introduction to laboratory, space, and fusion plasmas*. Springer, 2010.
- [26] M. N. Rosenbluth. *New ideas in Tokamak confinement*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [27] R. Schunk and A. Nagy. *Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry*. Cambridge university press, 2009.
- [28] B. K. Shivamoggi. Charney-hasegawa-mima equation: A general class of exact solutions. *Physics Letters A*, 138(1-2):37–42, 1989.
- [29] N. Shukla and P. K. Shukla. Generation of zonal magnetic fields by drift waves in a current carrying nonuniform magnetoplasma. *Physics Letters A*, 374(24):2461–2463, 2010.
- [30] P. K. Shukla. Excitation of zonal flows by kinetic alfven waves. *Physics of plasmas*, 12(1), 2005.
- [31] D. Spohn, T. Breuer and T. Johnson. *Encyclopedia of the solar system*. Elsevier, 2014.

- [32] P. W. Terry. Suppression of turbulence and transport by sheared flow. *Reviews of Modern Physics*, 72(1):109, 2000.

Apéndice A

Notación

Nomenclatura	
Elemento descrito	Símbolo
Vector	\mathbf{X}
Norma de un vector	$ \mathbf{X} $
Parte real de X	$Re(X)$
Parte imaginaria de X	$Im(X)$
Parte fluctuante X	\tilde{X}
Parte promedio de X	X_0
Derivada de X respecto a x	$X_{,x}$
Jacobiano de X con Y	$J(X, Y) = X_{,x}Y_{,y} - X_{,y}Y_{,x}$
Laplaciano perpendicular de X	$\nabla_{\perp}^2 X = X_{,x^2} + X_{,y^2}$
Promedio respecto al ensamble de X	$\langle X \rangle$
Enstrofia	\mathcal{E}
Energía del campo Zonal	U
Energía de las fluctuaciones magnéticas	E_A
Energía del campo zonal	E_b
Frecuencia angular de la Tierra	Ω_{0z}
Campo geomagnético Terrestre	B_{0z}
Parámetro de Rossby	$\beta = 2\Omega_{0z,y}$
Variación del campo geomagnético en la dirección norte-sur	$c_B = 2B_{0z,y}$
Vorticidad	ξ

Nomenclatura	
Elemento descrito	Símbolo
Función de flujo	ψ
Potencial vectorial magnético	A
Potencial eléctrico	ϕ
Campo magnético	\mathbf{B}
Velocidad	\mathbf{v}
Número de iones	n
Densidad de masa	ρ
Masa	m
Carga del electrón	e
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0
Componente del número de onda en la dirección i	k_i
Frecuencia de oscilación de las componentes fluctuantes	ω
Frecuencia de oscilación de las componentes promedio	Ω

Apéndice B

Código para las simulaciones numéricas escrito en *C++*

```
1 #include <iostream>
2 #include <armadillo>
3 #include <string>
4 #include <fstream>
5
6 arma::Mat<double> SetICandEq(arma::Col<double> alpha, double Dt,
7     arma::Col<double> Ic, int l, double nu, int metodo) {
8
9     //Si metodo == 1 se usa Runge-Kutta
10    //Definimos variables
11
12    int i; //contador
13
14    arma::Col<double> t, ep, ea, u, eb; //Seran las variables
15
16    arma::Mat<double> data(1,5);
17
18    t= arma::zeros(1);
19    ep = arma::zeros(1);
```

```

20  ea = arma::zeros(1);
21  u = arma::zeros(1);
22  eb = arma::zeros(1);
23
24  // Condiciones iniciales
25
26  t(0) = 0;
27  ep(0) = Ic(0);
28  ea(0) = Ic(1);
29  u(0) = Ic(2);
30  eb(0) = Ic(3);
31
32
33  //Runge-Kutta
34
35  if(metodo==1) {
36
37  for (i = 1; i < l; ++i) {
38      t(i) = i * Dt;
39
40      // definicioon de coeficientes de Runge-Kutta
41      double k1ep, k2ep, k3ep, k4ep, k1ea, k2ea, k3ea,
42      k4ea, k1u, k2u, k3u, k4u, k1eb, k2eb, k3eb, k4eb;
43
44      //k1
45
46      k1ep = 2*Dt*(ep(i-1))*((alpha(0))-((alpha(1))*(u(i-1))))
47      -((alpha(2))*(eb(i-1))) - ((alpha(3))*(ep(i-1)))
48      +((alpha(4))*(ea(i-1))) ); //Enstrofia
49
50
51      k1ea = 2*Dt*(ea(i-1))*((alpha(5)) - ((alpha(6))*(eb(i-1))))

```

```

52         -((alpha(7))*(ep(i-1))) - ((alpha(8))*(ea(i-1))) );
53         //Fluctuaciones magneticas
54
55
56         k1u = 2*Dt*(u(i-1))*((alpha(9))*(ep(i-1))
57             - ((alpha(10))*(ea(i-1))) - nu); //Flujo Zonal
58
59         k1eb = 2*Dt*(eb(i-1))*(ea(i-1))*(alpha(11));
60         //Campo Zonal
61
62         //k2
63
64         k2ep =2*Dt*(ep(i-1)+ 0.5*k1ep)*( (alpha(0))
65             -((alpha(1))*(u(i-1)+0.5*k1u))
66             -((alpha(2))*(eb(i-1)+0.5*k1eb))
67             -((alpha(3))*(ep(i-1)+0.5*k1ep))
68             +((alpha(4))*(ea(i-1)+0.5*k1ea)) );
69         //Enstrofia
70
71
72         k2ea = 2*Dt*(ea(i-1)+0.5*k1ea)*( (alpha(5))
73             - ((alpha(6))*(eb(i-1)+0.5*k1eb))
74             - ((alpha(7))*(ep(i-1)+0.5*k1ep))
75             - ((alpha(8))*(ea(i-1)+k1ea)) );
76         //Fluctuaciones magneticas
77
78
79         k2u = 2*Dt*(u(i-1)+0.5*k1u)*((alpha(9))*(ep(i-1)+k1ep)
80             - ((alpha(10))*(ea(i-1)+k1ea)) - nu);
81         //Flujo Zonal
82
83         k2eb = 2*Dt*(eb(i-1)+k1eb)*(ea(i-1)+0.5*k1ea)*(alpha(11));

```

```

84     //Campo Zonal
85
86
87     //k3
88
89     k3ep = 2*Dt*(ep(i-1)+ 0.5*k2ep)*( (alpha(0))
90         -((alpha(1))*(u(i-1)+0.5*k2u))
91         -((alpha(2))*(eb(i-1)+0.5*k2eb))
92         -((alpha(3))*(ep(i-1)+0.5*k2ep))
93         +((alpha(4))*(ea(i-1)+0.5*k2ea)));
94     //Enstrofia
95
96
97     k3ea = 2*Dt*(ea(i-1)+0.5*k2ea)*( (alpha(5))
98         -((alpha(6))*(eb(i-1)+0.5*k2eb))
99         - ((alpha(7))*(ep(i-1)+0.5*k2ep))
100        - ((alpha(8))*(ea(i-1)+k2ea)) );
101     //Fluctuaciones magneticas
102
103
104     k3u = 2*Dt*(u(i-1)+0.5*k2u)*((alpha(9))*(ep(i-1)+k2ep)
105        - ((alpha(10))*(ea(i-1)+k2ea)) - nu); //Flujo Zonal
106
107     k3eb = 2*Dt*(eb(i-1)+k2eb)*(ea(i-1)+0.5*k2ea)*(alpha(11));
108     //Campo Zonal
109
110     //k4
111
112     k4ep = 2*Dt*(ep(i-1)+ 0.5*k3ep)*( (alpha(0))
113         -((alpha(1))*(u(i-1)+0.5*k3u))
114         -((alpha(2))*(eb(i-1)+0.5*k3eb))
115         -((alpha(3))*(ep(i-1)+0.5*k3ep))

```

```

116         +((alpha(4))*(ea(i-1)+0.5*k3ea)));
117         //Enstrofia
118
119
120     k4ea = 2*Dt*(ea(i-1)+0.5*k3ea)*( (alpha(5))
121         - ((alpha(6))*(eb(i-1)+0.5*k3eb))
122         - ((alpha(7))*(ep(i-1)+0.5*k3ep))
123         - ((alpha(8))*(ea(i-1)+k3ea)) );
124         //Fluctuaciones magneticas
125
126
127     k4u = 2*Dt*(u(i-1)+0.5*k3u)*((alpha(9))*(ep(i-1)+k3ep)
128         - ((alpha(10))*(ea(i-1)+k3ea)) - nu); //Flujo Zonal
129
130     k4eb = 2*Dt*(eb(i-1)+k3eb)*(ea(i-1)+0.5*k3ea)*(alpha(11));
131     //Campo Zonal
132
133     //Ecuaciones finales
134
135     ep(i) = ep(i - 1) + (k1ep + 2 * k2ep + 2 * k3ep + k4ep) / 6.0;
136     //Enstrofia
137
138     ea(i) = ea(i - 1) + (k1ea + 2 * k2ea + 2 * k3ea + k4ea) / 6.0;
139     //Fluctuaciones magneticas
140
141     u(i) = u(i - 1) + (k1u + 2 * k2u + 2 * k3u + k4u) / 6.0;
142     //Flujo zonal
143
144     eb(i) = eb(i - 1) + (k1eb + 2 * k2eb + 2 * k3eb + k4eb) / 6.0;
145     //Campo zonal
146
147

```

```

148
149     if ((ep(i) < 0.0) || (ep(i) == 0)) {
150 std::cout << "Simulation has failed at t = " << t(i) << std::endl;
151         break;
152     }
153 }
154     std::cout << "R-K" << std::endl;
155 }
156 //Metodo de Euler
157
158 else {
159 // Ecuaciones
160
161 for (i=1; i < l; ++i) {
162
163     t(i) = i *Dt;
164
165
166     ep(i) = ep(i-1) + 2*Dt*(ep(i-1))*( (alpha(0))
167         -((alpha(1))*(u(i-1))) -((alpha(2))*(eb(i-1)))
168         -((alpha(3))*(ep(i-1)))+((alpha(4))*(ea(i-1))));
169         //Presas 1
170
171
172     ea(i) = ea(i-1) + 2*Dt*(ea(i-1))*( (alpha(5))
173         - ((alpha(6))*(eb(i-1))) - ((alpha(7))*(ep(i-1)))
174         - ((alpha(8))*(ea(i-1))) ); //Presas 2
175
176
177     u(i) = u(i-1) + 2*Dt*(u(i-1))*((alpha(9))*(ep(i-1))
178         - ((alpha(10))*(ea(i-1))) - nu); //Depredador 1
179

```



```

180     eb(i) = eb(i-1) + 2*Dt*(eb(i-1))*(ea(i-1))*(alpha(11));
181     //Depredador 2
182
183     if( (ep(i) < 0.0) || (ep(i) == 0) ) {
184
185     std::cout << "Simulation has failed at t = " << t(i) << std::endl;
186         break;
187     }
188 }
189 std::cout << "Euler" << std::endl;
190 }
191
192
193 data.col(0) = t;
194 data.col(1) = ep;
195 data.col(2) = ea;
196 data.col(3) = u;
197 data.col(4) = eb;
198
199 if (metodo == 1){
200     data.save("prey_predator_3_rk.csv", arma::arma_ascii);
201
202     std::cout << "prey_predator_3_rk.csv" << std::endl;
203 }
204
205 else {
206     data.save("prey_predator.csv", arma::arma_ascii);
207
208     std::cout << "prey_predator.csv" << std::endl;
209 }
210 return data;
211 }

```

```

212
213 int main () { //Pruebas
214
215     int l = 1000000;
216
217     arma::Mat<double> datos ;
218
219     arma::Col<double> alpha, Ic;
220
221     double nu;
222
223     nu = 0.6;
224     std::cout << "Friccion\n" << nu << std::endl;
225
226     //Para el modelo de Terry-Carreras-Diamond se pone
227     //alpha 2,5,6,7,8,9,11,12 = 0
228     //          1          2          3          4          5
229     alpha = {{0.030},{0.009},{0.003},{0.008},{0.009},
230             {9.000},{0.050},{0.095},{0.020},{0.030},{0.400},{0.006}};
231     // 6          7          8          9          10          11          12
232     std::cout << "alfa\n" << alpha << std::endl;
233
234     double Dt = 0.001;
235
236     //Para el modelo de Terry-Carreras-Diamond se toma ea0
237     //y eb0 = 0 y para el de fluctuaciones u0 y eb0 = 0
238     //          ep          ea          u          eb
239     Ic = {{100.0},{100.0}, {0.0}, {0.0}};
240
241     std::cout << "Condiciones iniciales\n" << Ic << std::endl;
242
243     datos = SetICandEq( alpha, Dt, Ic, l, nu, 1);

```

APÉNDICE B. CÓDIGO PARA LAS SIMULACIONES NUMÉRICAS ESCRITO EN C++81

244

245

246 `return 0;`

247 }

Apéndice C

Código para el análisis de las simulaciones escrito en *Python*

```
1 #!/usr/bin/env python
2 # coding: utf-8
3
4 # In[1]:
5
6
7 import numpy as np
8 import matplotlib.pyplot as plt
9
10
11 # In[2]:
12
13
14 plt.rc('axes', titlesize=18)
15 plt.rc('axes', labelszize=18)
16 plt.rc('xtick', labelszize=16)
17 plt.rc('ytick', labelszize=16)
18 plt.rc('legend', fontsize=16)
19
```

```
20
21 # # Analisis de Lotka-Volterra
22
23 # In[3]:
24
25
26 prey_predator = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis/\
27 lotka_volterra_data.csv', delimiter=' ')
28
29
30 # In[4]:
31
32
33 t = prey_predator[:,0]
34 p = prey_predator[:,1]
35 h = prey_predator[:,2]
36
37
38 # In[5]:
39
40
41 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
42
43 plt.figure(figsize=(10,6))
44 plt.plot(t,p, label='Presa')
45 plt.plot(t,h, label='Depredador')
46 plt.xlabel('Tiempo')
47 plt.ylabel(r'Poblacion')
48 plt.title('Modelo Lotka-Volterra')
49 plt.legend()
50 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras/\
51 Lotka-Volterra.eps', format='eps')
```

APÉNDICE C. CÓDIGO PARA EL ANÁLISIS DE LAS SIMULACIONES ESCRITO EN PYTHON84

```
52 plt.show()
53
54
55 # # Modelo de Diamon-Terry-Carreras
56
57 # $ \mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_{n} +
58 # 2 \Delta t \left( \alpha_1 \mathcal{E}_{n}
59 #- \alpha_2 U_{n} \mathcal{E}_{n}
60 #- \alpha_4 \mathcal{E}^2_{n} \right), $
61 #
62 #
63 #
64 # $U_{n+1} = U_{n}
65 #+ 2 \Delta t \left( \alpha_{10} U_{n} \mathcal{E}_{n}
66 #- \mu U_{n} \right), $
67 #
68 # $ \alpha_1 = 0.6$, $ \alpha_2 = 0.03,
69 # \alpha_4 = 0.003, \alpha_{10} = 0.3, \mu = 0.1, \Delta t = 0.01$
70 #
71
72 # In[6]:
73
74
75 terry_diamond = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis/\
76 Terry_Diamond.csv', delimiter=' ')
77
78
79 # In[7]:
80
81
82 t_t = terry_diamond[:,0]
83 ep_t = terry_diamond[:,1]
```

```

84 u_t = terry_diamond[:,3]
85
86
87 # In[8]:
88
89
90 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
91
92 plt.figure(figsize=(10,6))
93 plt.plot(t_t,u_t, label='Flujo Zonal')
94 plt.plot(t_t, ep_t, label='Enstrofia')
95 plt.xlabel('Tiempo')
96 plt.ylabel(r'Energia')
97 plt.title('Modelo de Terry-Diamond')
98 #plt.xlim(right=0.4)
99 #plt.ylim(left =0.04)
100 plt.legend()
101 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras/\
102 Diamond_Terry.eps')
103 plt.show()
104
105
106 # # Analisis del Modelo
107
108 # $ \mathcal{E}_{,n+1} = \mathcal{E}_{,n} +
109 #2 \Delta t \left( \alpha_1 \mathcal{E}_{,n}
110 #- \alpha_2 U_{,n} \mathcal{E}_{,n}
111 #- \alpha_3 E_b \mathcal{E} - \alpha_4 \mathcal{E}^2_{,n}
112 #+ \alpha_5 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n} \right), $
113 #
114 # $E_{A,n+1} = E_{A,n} + 2 \Delta t \left( \alpha_6 E_{A,n}
115 #- \alpha_7 E_b E_A - \alpha_8 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n}

```

APÉNDICE C. CÓDIGO PARA EL ANÁLISIS DE LAS SIMULACIONES ESCRITO EN PYTHON86

```
116 #- \alpha_{ 9}E^{2}_{A,n} \right), $
117 #
118 # $U_{,n+1} = U_{,n}
119 #+ 2 \Delta t \left( \alpha_{10} U_{,n} \mathcal{E}_{,n}
120 #- \alpha_{11} U_{,n}E_{A,n} -\mu U_{,n} \right),$
121 #
122 # $E_{b,n+1} = E_{b,n}
123 #+2 \Delta t\left(\alpha_{12} E_{A,n}E_{b,n} \right),$
124 #
125 #
126
127 # ## Modelo Completo (crecimiento de campo zonal y
128 #fluctuaciones magneticas debiles )
129
130 # In[9]:
131
132
133 prey_predator = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis\
134 /prey_predator.csv',
135     delimiter=' ')
136
137
138 # In[10]:
139
140
141 t = prey_predator[:,0]
142 ep = prey_predator[:,1]
143 ea = prey_predator[:,2]
144 u = prey_predator[:,3]
145 eb= prey_predator[:,4]
146
147
```



```
148 # In[11]:
149
150
151 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
152
153 plt.figure(figsize=(10,6))
154 plt.plot(t,ep, label='Enstrofia')
155 plt.plot(t,ea, label='Fluctuaciones Magneticas')
156 plt.plot(t, u, label='Flujo Zonal')
157 plt.plot(t, eb, label='Campo Zonal')
158 plt.xlabel('Tiempo')
159 plt.ylabel(r'Energia')
160 plt.title('Sistema con fluctuaciones magneticas y \
161 campo zonal debiles')
162 plt.legend()
163 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
164 /Prey-Predator.eps', format='eps')
165 plt.show()
166
167
168 # In[12]:
169
170
171 #Grafica la condicion inicial y el primer
172 # paso de tiempo ampliada
173
174 plt.figure(figsize=(10,6))
175 plt.plot(t,ep, label='Enstrofia')
176 plt.plot(t,ea, label='Fluctuaciones Magneticas')
177 plt.plot(t, u, label='Flujo Zonal')
178 plt.plot(t, eb, label='Campo Zonal')
179 plt.xlim(0.0,20.0)
```

```
180 #plt.ylim(-0.1,10.0)
181 plt.xlabel('Tiempo')
182 plt.ylabel(r'Energia')
183 plt.title('Sistema con "fluctuaciones magneticas y \
184 campo zonal debiles"')
185 plt.legend()
186 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
187 /Prey-Predator_ampliada.eps', format='eps')
188 plt.show()
189
190
191 # ## Modelo Completo (crecimiento de campo zonal debil )
192
193 # In[13]:
194
195
196 prey_predator_1 = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis/\
197 prey_predator_1.csv',delimiter=' ')
198 t_1 = prey_predator_1[:,0]
199 ep_1 = prey_predator_1[:,1]
200 ea_1 = prey_predator_1[:,2]
201 u_1 = prey_predator_1[:,3]
202 eb_1= prey_predator_1[:,4]
203
204
205 # In[14]:
206
207
208 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo ampliada
209
210 plt.figure(figsize=(10,6))
211 plt.plot(t_1,ep_1, label='Enstrofia')
```

```
212 plt.plot(t_1, ea_1, label='Fluctuaciones Magneticas')
213 plt.plot(t_1, u_1, label='Flujo Zonal')
214 plt.plot(t_1, eb_1, label='Campo Zonal')
215 plt.xlabel('Tiempo')
216 plt.ylabel(r'Energia')
217 plt.title('Sistema con campo zonal debil')
218 plt.legend()
219 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
220 /Prey-Predator_1.eps', format='eps')
221 plt.show()
222
223
224 # In[15]:
225
226
227 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
228
229 plt.figure(figsize=(10,6))
230 plt.plot(t_1, ep_1, label='Enstrofia')
231 plt.plot(t_1, ea_1, label='Fluctuaciones Magneticas')
232 plt.plot(t_1, u_1, label='Flujo Zonal')
233 plt.plot(t_1, eb_1, label='Campo Zonal')
234 plt.xlim(0.0,400.0)
235 #plt.ylim(-0.1,10.0)
236 plt.xlabel('Tiempo')
237 plt.ylabel(r'Energia')
238 plt.title('Sistema con campo zonal debil')
239 plt.legend()
240 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras/\
241 Prey-Predator_1_Ampliada.eps', format='eps')
242 plt.show()
243
```

```
244
245 # In[16]:
246
247
248 prey_predator_11 = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis\
249 /prey_predator_11.csv', delimiter=' ')
250 t_11 = prey_predator_11[:,0]
251 ep_11 = prey_predator_11[:,1]
252 ea_11 = prey_predator_11[:,2]
253 u_11 = prey_predator_11[:,3]
254 eb_11= prey_predator_11[:,4]
255 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo ampliada
256
257 plt.figure(figsize=(10,6))
258 plt.plot(t_11,ep_11, label='Enstrofia')
259 plt.plot(t_11,ea_11, label='Fluctuaciones Magneticas')
260 plt.plot(t_11, u_11, label='Flujo Zonal')
261 plt.plot(t_11, eb_11, label='Campo Zonal')
262 plt.xlim(0.0,250.0)
263 plt.xlabel('Tiempo')
264 plt.ylabel(r'Energia')
265 plt.title('Sistema con campo zonal debil y \
266 fluctuaciones magneticas moderadas')
267 plt.legend()
268 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
269 /Prey-Predator_11.eps', format='eps')
270 plt.show()
271
272
273 # In[17]:
274
275
```

```
276 plt.figure(figsize=(10,6))
277 plt.plot(t_11,ep_11, label='Enstrofia')
278 plt.plot(t_11,ea_11, label='Fluctuaciones Magneticas')
279 plt.plot(t_11, u_11, label='Flujo Zonal')
280 plt.plot(t_11, eb_11, label='Campo Zonal')
281 plt.xlim(120.0,240.0)
282 plt.ylim(0.0,100.0)
283 plt.xlabel('Tiempo')
284 plt.ylabel(r'Energia')
285 plt.title('Sistema con campo zonal debil y \
286 fluctuaciones magneticas moderadas')
287 plt.legend()
288 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
289 /Prey-Predator_11_apliada.eps', format='eps')
290 plt.show()
291
292
293 # In[18]:
294
295
296 prey_predator_12 = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis\
297 /prey_predator_12.csv', delimiter=' ')
298 t_12 = prey_predator_12[:,0]
299 ep_12 = prey_predator_12[:,1]
300 ea_12 = prey_predator_12[:,2]
301 u_12 = prey_predator_12[:,3]
302 eb_12= prey_predator_12[:,4]
303 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo ampliada
304
305 plt.figure(figsize=(10,6))
306 plt.plot(t_12,ep_12, label='Enstrofia')
307 plt.plot(t_12,ea_12, label='Fluctuaciones Magneticas')
```

```
308 plt.plot(t_12, u_12, label='Flujo Zonal')
309 plt.plot(t_12, eb_12, label='Campo Zonal')
310 plt.xlabel('Tiempo')
311 plt.ylabel(r'Energia')
312 plt.title('Sistema con campo zonal debil y \
313 fluctuaciones magneticas intensas')
314 plt.legend()
315 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
316 /Prey-Predator_12.eps',
317 format='eps')
318 plt.show()
319
320
321 # In[19]:
322
323
324 plt.figure(figsize=(10,6))
325 plt.plot(t_12,ep_12, label='Enstrofia')
326 plt.plot(t_12,ea_12, label='Fluctuaciones Magneticas')
327 plt.plot(t_12, u_12, label='Flujo Zonal')
328 plt.plot(t_12, eb_12, label='Campo Zonal')
329 plt.xlim(0.0,500)
330 plt.xlabel('Tiempo')
331 plt.ylabel(r'Energia')
332 plt.title('Sistema con campo zonal debil y \
333 fluctuaciones magneticas intensas')
334 plt.legend()
335 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
336 /Prey-Predator_12_ampliada.eps', format='eps')
337 plt.show()
338
339
```

```
340 # In[20]:
341
342
343 plt.figure(figsize=(10,6))
344 plt.plot(t_12,ep_12, label='Enstrofia')
345 plt.plot(t_12,ea_12, label='Fluctuaciones Magneticas')
346 plt.plot(t_12, u_12, label='Flujo Zonal')
347 plt.plot(t_12, eb_12, label='Campo Zonal')
348 plt.xlim(0.0,100)
349 plt.xlabel('Tiempo')
350 plt.ylabel(r'Energia')
351 plt.title('Sistema con campo zonal debil y \
352 fluctuaciones magneticas intensas')
353 plt.legend()
354 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
355 /Prey-Predator_12_ampliada2.eps', format='eps')
356 plt.show()
357
358
359 # ## Modelo sin campo zonal
360 # (poco amortiguamiento de fluctuaciones magneticas)
361
362 # In[21]:
363
364
365 prey_predator_2 = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis\
366 /prey_predator_2.csv', delimiter=' ')
367
368
369 # In[22]:
370
371
```

```
372 t_2 = prey_predator_2[:,0]
373 ep_2 = prey_predator_2[:,1]
374 ea_2 = prey_predator_2[:,2]
375 u_2 = prey_predator_2[:,3]
376
377
378 # In[23]:
379
380
381 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
382
383 plt.figure(figsize=(10,6))
384 plt.plot(t_2,ep_2, label='Enstrofia')
385 plt.plot(t_2,ea_2, label='Fluctuaciones Magneticas')
386 plt.plot(t_2, u_2, label='Flujo Zonal')
387 #plt.xlim(0.0,100.0)
388 #plt.ylim(-0.1,10.0)
389 plt.xlabel('Tiempo')
390 plt.ylabel(r'Energia')
391 plt.title('Sistema sin campo zonal y \
392 fluctuaciones magneticas intensas"')
393 plt.legend()
394 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
395 /Prey-Predator_2.eps', format='eps')
396 plt.show()
397
398
399 # In[24]:
400
401
402 plt.figure(figsize=(10,6))
403 plt.plot(t_2,ep_2, label='Enstrofia')
```



```
404 plt.plot(t_2, ea_2, label='Fluctuaciones Magneticas')
405 plt.plot(t_2, u_2, label='Flujo Zonal')
406 plt.xlim(800.0,1000.0)
407 #plt.ylim(-0.1,10.0)
408 plt.xlabel('Tiempo',fontsize=14)
409 plt.ylabel(r'Energia',fontsize=14)
410 plt.title('Sistema sin campo zonal y \
411 fluctuaciones magneticas intensas')
412 plt.legend()
413 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
414 /Prey-Predator_2ampliadaf.eps', format='eps')
415 plt.show()
416
417
418 # In[25]:
419
420
421 plt.figure(figsize=(10,6))
422 plt.plot(t_2,ep_2, label='Enstrofia')
423 plt.plot(t_2,ea_2, label='Fluctuaciones Magneticas')
424 plt.plot(t_2, u_2, label='Flujo Zonal')
425 plt.xlim(0.0,200.0)
426 #plt.ylim(-0.1,10.0)
427 plt.xlabel('Tiempo')
428 plt.ylabel(r'Energia')
429 plt.title('Sistema sin campo zonal y \
430 fluctuaciones magneticas intensas')
431 plt.legend()
432 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
433 /Prey-Predator_2ampliadaai.eps', format='eps')
434 plt.show()
435
```

```

436
437 # ## Modelo de fluctuaciones
438
439 # $ \mathcal{E}_{,n+1} = \mathcal{E}_{,n}
440 #+ 2 \Delta t \left( \alpha_1 \mathcal{E}_{,n}
441 # -\alpha_4 \mathcal{E}^2_{,n}
442 # + \alpha_5 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n} \right), $
443 #
444 # $E_{A,n+1} = E_{A,n} + 2 \Delta t \left( \alpha_6 E_{A,n}
445 #- \alpha_8 \mathcal{E}_{,n} E_{A,n}
446 #- \alpha_{9} E^2_{A,n} \right), $
447 #
448 #
449
450 # In [26]:
451
452
453 prey_predator_3 = np.loadtxt(fname='/home/ismael/Downloads/Tesis\
454 /prey_predator_3.csv', delimiter=' ')
455
456
457 # In [27]:
458
459
460 t_3 = prey_predator_3[:,0]
461 ep_3 = prey_predator_3[:,1]
462 ea_3 = prey_predator_3[:,2]
463
464
465 # In [28]:
466
467

```

```
468 #Grafica la condicion inicial y el primer paso de tiempo
469
470 plt.figure(figsize=(10,6))
471 plt.plot(t_3,ep_3, label='Enstrofia')
472 plt.plot(t_3,ea_3, label='Fluctuaciones Magneticas')
473
474 #plt.xlim(0.0,100.0)
475 #plt.ylim(-0.1,10.0)
476 plt.xlabel('Tiempo')
477 plt.ylabel(r'Energia')
478 plt.title('Modelo De fluctuaciones')
479 plt.legend()
480 plt.savefig('/home/ismael/Downloads/Tesis/Figuras\
481 /Prey-Predator_3.eps', format='eps')
482 plt.show()
```

Apéndice D

Código para la obtención y análisis de
los puntos de equilibrio escrito en
Mathematica

Puntos de Equilibrio

Obtención de los puntos de equilibrio

1- Definimos las funciones, para términos de este documento se considera “ep” es la estrofia, “ea” la energía de las fluctuaciones magnéticas, “u” la energía del flujo zonal y “eb” la energía del campo zonal.

```
In[34]= f1[ep_, ea_, u_, eb_] :=  $\alpha_1 * ep - \alpha_2 * u * ep - \alpha_3 * ep * eb - \alpha_4 * ep^2 + \alpha_5 * ep * ea$ ;  
f2[ep_, ea_, u_, eb_] :=  $\alpha_6 * ea - \alpha_7 * eb * ea - \alpha_8 * ea * ep - \alpha_9 * ea^2$ ;  
f3[ep_, ea_, u_, eb_] :=  $\alpha_{10} * u * ep - \alpha_{11} * u * ea - \mu * u$ ;  
f4[ep_, ea_, u_, eb_] :=  $\alpha_{12} * eb * ea$ ;
```

2-Igualamos a 0 y obtenemos los puntos de equilibrio

```
In[38]= Solve[{f1[ep, ea, u, eb] == 0, f2[ep, ea, u, eb] == 0,  
f3[ep, ea, u, eb] == 0, f4[ep, ea, u, eb] == 0}, {ep, ea, u, eb}]
```

Solve: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

```
Out[38]= Solve[{False, True, True, True}, {80.3941, 68.1281, 0, 0}]
```

Notemos que el sistema contiene a su vez los puntos de equilibrio correspondientes al modelo de Terry, sin embargo los mismos no se calculan explícitamente al ejecutar el código anterior, por lo tanto si se reescribe se tiene:

```
In[39]= T1[ep_, u_] :=  $\alpha_1 * ep - \alpha_2 * u * ep - \alpha_4 * ep^2$ ;  
T2[ep_, u_] :=  $\alpha_{10} * u * ep - \mu * u$ ;  
Solve[{T1[ep, u] == 0, T2[ep, u] == 0}, {ep, u}]
```

Solve: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

```
Out[41]= Solve[{False, True}, {80.3941, 0}]
```

Además del sistema anterior, también existe 2 subsistemas, el primero consiste en el caso para el cual $eb=0$ para todo estado, el presente sistema sólo es importante para darle consistencia a los puntos de equilibrio existentes y evitar la existencia de incoherencias en análisis posteriores

```
In[42]:= SCZ1[ep_, ea_, u_] :=  $\alpha_1 * ep - \alpha_2 * u * ep - \alpha_4 * ep^2 + \alpha_5 * ep * ea$ ;
SCZ2[ep_, ea_, u_] :=  $\alpha_6 * ea - \alpha_8 * ea * ep - \alpha_9 * ea^2$ ;
SCZ3[ep_, ea_, u_] :=  $\alpha_{10} * u * ep - \alpha_{11} * u * ea - \mu * u$ ;
Solve[{SCZ1[ep, ea, u] == 0, SCZ2[ep, ea, u] == 0, SCZ3[ep, ea, u] == 0}, {ep, ea, u}]
```

⋯ Solve: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

```
Out[45]= Solve[{False, False, True}, {80.3941, 68.1281, 0}]
```

Por último se tomará el sistema de puntos de equilibrio para el caso del subsistema de fluctiaciones

```
In[46]:= flU1[ep_, ea_] :=  $\alpha_1 * ep - \alpha_4 * ep^2 + \alpha_5 * ep * ea$ ;
flU2[ep_, ea_] :=  $\alpha_6 * ea - \alpha_8 * ea * ep - \alpha_9 * ea^2$ ;
Solve[{flU1[ep, ea] == 0, flU2[ep, ea] == 0}, {ep, ea}]
```

⋯ Solve: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

```
Out[48]= Solve[{False, False}, {80.3941, 68.1281}]
```

Análisis de puntos de equilibrio

Definimos la función Jacobiano

```
In[49]:= Jacobian[{f1[ep, ea, u, eb], f2[ep, ea, u, eb], f3[ep, ea, u, eb], f4[ep, ea, u, eb]},
{ep, ea, u, eb}] == {{D[f1[ep, ea, u, eb], ep], D[f1[ep, ea, u, eb], ea],
D[f1[ep, ea, u, eb], u], D[f1[ep, ea, u, eb], eb]}, {D[f2[ep, ea, u, eb], ep],
D[f2[ep, ea, u, eb], ea], D[f2[ep, ea, u, eb], u], D[f2[ep, ea, u, eb], eb]},
{D[f3[ep, ea, u, eb], ep], D[f3[ep, ea, u, eb], ea], D[f3[ep, ea, u, eb], u],
D[f3[ep, ea, u, eb], eb]}, {D[f4[ep, ea, u, eb], ep],
D[f4[ep, ea, u, eb], ea], D[f4[ep, ea, u, eb], u], D[f4[ep, ea, u, eb], eb]}}
```

⋯ General: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

⋯ General: 68.12807881773399` is not a valid variable. [i](#)

⋯ General: 0 is not a valid variable. [i](#)

⋯ General: Further output of General::ivar will be suppressed during this calculation. [i](#)

```
Out[49]= Jacobian[{{6.66134 × 10-15, 0., 0., 0.}, {80.3941, 68.1281, 0, 0}] ==
{{ $\partial_{80.3941} 6.66134 \times 10^{-15}$ ,  $\partial_{68.1281} 6.66134 \times 10^{-15}$ ,  $\partial_0 6.66134 \times 10^{-15}$ ,  $\partial_0 6.66134 \times 10^{-15}$ },
{ $\partial_{80.3941} 0.$ ,  $\partial_{68.1281} 0.$ ,  $\partial_0 0.$ ,  $\partial_0 0.$ },
{ $\partial_{80.3941} 0.$ ,  $\partial_{68.1281} 0.$ ,  $\partial_0 0.$ ,  $\partial_0 0.$ }, { $\partial_{80.3941} 0.$ ,  $\partial_{68.1281} 0.$ ,  $\partial_0 0.$ ,  $\partial_0 0.$ }}
```

Ya se tienen los elementos de la Matriz jacobiana, entonces ahora se puede evaluar punto por punto.

Para una mejor visualización definimos cada renglón obtenido anteriormente como una entrada de una matriz

```
In[50]:= J1[ep_, ea_, u_, eb_] := {α1 - u α2 - eb α3 - 2 ep α4 + ea α5, ep α5, -ep α2, -ep α3};
J2[ep_, ea_, u_, eb_] := {-ea α8, α6 - eb α7 - ep α8 - 2 ea α9, 0, -ea α7};
J3[ep_, ea_, u_, eb_] := {u α10, -u α11, -μ + ep α10 - ea α11, 0};
J4[ep_, ea_, u_, eb_] := {0, eb α12, 0, ea α12};
J = {J1[ep, ea, u, eb], J2[ep, ea, u, eb], J3[ep, ea, u, eb], J4[ep, ea, u, eb]};
J // MatrixForm
```

Out[55]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 & -80.3941 \alpha_2 & -80.3941 \alpha_3 \\ -6.47217 & -1.36256 & 0 & -68.1281 \alpha_7 \\ 0 & 0 & 80.3941 \alpha_{10} - 68.1281 \alpha_{11} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 68.1281 \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

Análisis de los puntos de equilibrio (sistema completo)

Primer Punto

$$\left\{ ep \rightarrow \frac{\mu}{\alpha_{10}}, ea \rightarrow 0, eb \rightarrow -\frac{u \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_3 \alpha_{10}} \right\}$$

```
In[56]:= Jp1 = {J1[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}$ , 0, u,  $-\frac{u \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_3 \alpha_{10}}$ ], J2[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}$ , 0, u,  $-\frac{u \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_3 \alpha_{10}}$ ],
J3[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}$ , 0, u,  $-\frac{u \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_3 \alpha_{10}}$ ], J4[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}$ , 0, u,  $-\frac{u \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_3 \alpha_{10}}$ ]};
```

```
Jp1 // MatrixForm
Eigenvalues[Jp1] // MatrixForm
```

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.03 + \frac{-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu}{\alpha_{10}} - \frac{0.016 \mu}{\alpha_{10}} & \frac{0.009 \mu}{\alpha_{10}} & -\frac{\alpha_2 \mu}{\alpha_{10}} - \frac{\alpha_3 \mu}{\alpha_{10}} \\ 0. & 9. + \frac{\alpha_7 (-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu)}{\alpha_{10} \alpha_3} - \frac{0.095 \mu}{\alpha_{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{12} (-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu)}{\alpha_{10} \alpha_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ -\frac{0.008 \mu}{\alpha_{10}} \\ \frac{9. (1. \alpha_{10} \alpha_3 - 0.00333333 \alpha_{10} \alpha_7 - 0.0105556 \alpha_3 \mu + 0.00088889 \alpha_7 \mu)}{\alpha_{10} \alpha_3} \end{pmatrix}$$

Para acotar los valores posibles, con lo cual vale la pena aplicar la función “Reduce” con el objetivo de realizar un análisis más completo

```
In[59]:= Reduce[{ $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0, \alpha_6 > 0, \alpha_7 > 0, \alpha_8 > 0, \alpha_{10} > 0, \mu > 0,$ 
 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{10} + \mu \alpha_3 \alpha_8 > \mu \alpha_4 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_6 \alpha_{10} + u \alpha_2 \alpha_7 \alpha_{10}, \mu^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 < 4 u \mu \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_{10}^2$ },
{ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{10}, \mu$ }]
```

Reduce: 0.03` is not a valid variable.

```
Out[59]= Reduce[{True,  $\alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, True, True, True, \alpha_7 > 0, True, \alpha_{10} > 0,$ 
 $\mu > 0, 0.03 \alpha_{10} \alpha_2 + 0.095 \alpha_3 \mu > 9. \alpha_{10} \alpha_3 + 0.008 \alpha_7 \mu, 0.000064 \alpha_3^2 \mu^2 < 0$ },
{0.03,  $\alpha_2, \alpha_3, 0.008, 0.009, 9., \alpha_7, 0.095, \alpha_{10}, \mu$ }]
```


In[60]:=

Segundo Punto $\left\{ea \rightarrow 0, u \rightarrow 0, eb \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{ep \alpha_4}{\alpha_3}\right\}$

In[61]:= $Jp2 = \left\{J1\left[ep, 0, 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{ep \alpha_4}{\alpha_3}\right], J2\left[ep, 0, 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{ep \alpha_4}{\alpha_3}\right], J3\left[ep, 0, 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{ep \alpha_4}{\alpha_3}\right], J4\left[ep, 0, 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{ep \alpha_4}{\alpha_3}\right]\right\};$

Jp2 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp2] // MatrixForm

Out[62]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 & -80.3941 \alpha_2 & -80.3941 \alpha_3 \\ 0. & 1.36256 + \frac{0.613153 \alpha_7}{\alpha_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80.3941 \alpha_{10} - \mu & 0 \\ 0 & -\frac{0.613153 \alpha_{12}}{\alpha_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. \\ -0.643153 \\ \frac{1.36256(1. \alpha_3 + 0.45 \alpha_7)}{\alpha_3} \\ 80.3941(1. \alpha_{10} - 0.0124387 \mu) \end{pmatrix}$$

Tercer Punto $\{ep \rightarrow 0, ea \rightarrow 0, u \rightarrow 0\}$

In[64]:= Jp3 = {J1[0, 0, 0, eb], J2[0, 0, 0, eb], J3[0, 0, 0, eb], J4[0, 0, 0, eb]};

Jp3 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp3] // MatrixForm

Out[65]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0. & 0 & 0 \\ 0. & 9. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[66]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 9. \\ 0.03 \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto

$$\left\{ ep \rightarrow -\frac{-\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11}}, ea \rightarrow -\frac{\mu \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_{10}}{\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11}}, u \rightarrow -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_8 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{10} - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})}, eb \rightarrow 0 \right\}$$

```
In[67]:= Jp4 = {J1[- $\frac{-\mu * \alpha_9 - \alpha_6 * \alpha_{11}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{\mu * \alpha_8 - \alpha_6 * \alpha_{10}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})}$ ],
  (μ * α5 * α8 + μ * α4 * α9 - α5 * α6 * α10 - α1 * α9 * α10 + α4 * α6 * α11 - α1 * α8 * α11), 0],
  J2[- $\frac{-\mu * \alpha_9 - \alpha_6 * \alpha_{11}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{\mu * \alpha_8 - \alpha_6 * \alpha_{10}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})}$ ],
  (μ * α5 * α8 + μ * α4 * α9 - α5 * α6 * α10 - α1 * α9 * α10 + α4 * α6 * α11 - α1 * α8 * α11), 0],
  J3[- $\frac{-\mu * \alpha_9 - \alpha_6 * \alpha_{11}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{\mu * \alpha_8 - \alpha_6 * \alpha_{10}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})}$ ],
  (μ * α5 * α8 + μ * α4 * α9 - α5 * α6 * α10 - α1 * α9 * α10 + α4 * α6 * α11 - α1 * α8 * α11), 0],
  J4[- $\frac{-\mu * \alpha_9 - \alpha_6 * \alpha_{11}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{\mu * \alpha_8 - \alpha_6 * \alpha_{10}}{\alpha_9 * \alpha_{10} + \alpha_8 * \alpha_{11}}$ , - $\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})}$ ], (μ * α5 * α8 +
  μ * α4 * α9 - α5 * α6 * α10 - α1 * α9 * α10 + α4 * α6 * α11 - α1 * α8 * α11), 0]};
```

```
Jp4 // MatrixForm
Eigenvalues[Jp4] // MatrixForm
```

```
Out[68]//MatrixForm=

$$\left( \begin{array}{ccc} 0.03 + \frac{0.016(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} - \frac{0.009(-9. \alpha_{10} + 0.095 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_2(-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu)}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})} & - \frac{0.009(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} & \\ & \frac{0.095(-9. \alpha_{10} + 0.095 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} & 9. + \frac{0.095(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_{11}(-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu)}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})} \\ & - \frac{\alpha_{10}(-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu)}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_8 \alpha_{11})} & \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

```

```
Out[69]//MatrixForm=

$$\left( \begin{array}{l} \text{Root}\left[\#1^3 + 21150.7 \alpha_{10}^4 \alpha_{11} \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 183008. \alpha_{10}^3 \alpha_{11}^2 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 306938. \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^3 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 - 404403. \alpha_{10} \alpha_{11}^4 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 47.0016 \alpha_{11}^5 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2, \#1\right] \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 21150.7 \alpha_{10}^4 \alpha_{11} \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 183008. \alpha_{10}^3 \alpha_{11}^2 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 306938. \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^3 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 - 404403. \alpha_{10} \alpha_{11}^4 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 47.0016 \alpha_{11}^5 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2, \#1\right] \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 21150.7 \alpha_{10}^4 \alpha_{11} \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 183008. \alpha_{10}^3 \alpha_{11}^2 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 306938. \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^3 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 - 404403. \alpha_{10} \alpha_{11}^4 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 + 47.0016 \alpha_{11}^5 \alpha_2 \alpha_3^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2, \#1\right] \end{array} \right)$$

```

Ahora intentamos resolver la ecuación

$$\text{In[70]:= Solve}\left[x^3 + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9^3 \alpha_{10} - 2 \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 - \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 \alpha_{10}^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8 \alpha_9^3 \alpha_{10}^2 + \mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^3 + \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_9^3 \alpha_{10}^3 + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_8^3 \alpha_9 \alpha_{11} + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} + \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} - 2 \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8^2 \alpha_9^2 \alpha_{10} \alpha_{11} - \mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} - 2 \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} + \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} + \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} + \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} + \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^3 \alpha_{11}^2 + 2 \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_8^3 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - 2 \mu \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 + \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_8 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 - \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 + \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{11}^3 - \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6 \alpha_8^3 \alpha_{11}^3 - \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^3 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 + \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_6^2 \alpha_8^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 + \chi^2 \left(\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 - \mu \alpha_2 \alpha_8 \alpha_9 + \alpha_2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} \right) + \chi \left(-\mu^2 \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_8^2 \alpha_9 - \mu^2 \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9^2 \alpha_{10} - \mu^2 \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} + \mu \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} - \mu^2 \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_9^2 \alpha_{10} + \mu \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^2 \alpha_{10} + \mu \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10}^2 + \mu \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_9^2 \alpha_{10}^2 - \mu \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8^2 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11} + \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11} - 2 \mu \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} + \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} + \mu \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} + \alpha_2^2 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_{10} \alpha_{11} + \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} - \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 + \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_8 \alpha_{10} \alpha_{11}^2 \right) = 0, \chi \Big]$$

Out[70]=

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{3} \left(-\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 + \mu \alpha_2 \alpha_8 \alpha_9 - \alpha_2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10} - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} \right) - \frac{2^{1/3} \left(-\left(\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 - \dots + \dots + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} \right)^2 + 3 \left(\dots + \dots \right) \right)}{3 \left(-9 \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8^2 + \dots + \dots \right)^{1/3}} + \frac{\left(-9 \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_8^2 + \dots + \dots + \sqrt{\left(\dots \right)^2 + 4 \dots} \right)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \dots \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{3} \left(-\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 + \mu \alpha_2 \alpha_8 \alpha_9 - \alpha_2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{10} - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} \right) + \frac{\dots}{\dots} - \frac{\left(1 + \dots \right) \dots}{6 \cdot 2 \dots} \right\} \right\}$$

Size in memory: 0.9 MB [+ Show more](#) [⋮ Show all](#) [☰ Iconize](#) [Store full expression in notebook](#)

consideremos lo mismo pero esta vez considerando $\alpha_{10} = \alpha_2$, $\alpha_8 = \alpha_5$, $\alpha_{12} = \alpha_7$

$$\begin{aligned} \text{In[71]}:= \text{J1a[ep_, ea_, u_, eb_] } &:= \{ \alpha_1 - u \alpha_2 - eb \alpha_3 - 2 ep \alpha_4 + ea \alpha_5, ep \alpha_5, -ep \alpha_2, -ep \alpha_3 \}; \\ \text{J2a[ep_, ea_, u_, eb_] } &:= \{ -ea \alpha_5, \alpha_6 - eb \alpha_7 - ep \alpha_5 - 2 ea \alpha_9, 0, -ea \alpha_7 \}; \\ \text{J3a[ep_, ea_, u_, eb_] } &:= \{ u \alpha_2, -u \alpha_{11}, -\mu + ep \alpha_2 - ea \alpha_{11}, 0 \}; \\ \text{J4a[ep_, ea_, u_, eb_] } &:= \{ 0, eb \alpha_7, 0, ea \alpha_7 \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jp4a} = \left\{ \text{J1a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J2a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \right. \\ \left. \text{J3a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J4a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right] \right\}; \end{aligned}$$

Jp4a // MatrixForm
Eigenvalues[Jp4a] // MatrixForm

Out[76]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha_1 - \frac{\alpha_5 (\mu \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{2 \alpha_4 (-\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\mu \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & -\frac{\alpha_5 (-\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_5 (\mu \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \alpha_6 + \frac{2 (\mu \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6) \alpha_9}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_5 (-\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ -\frac{\mu \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \frac{\alpha_{11} (\mu \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 (\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11})} \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Out[77]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}[\#1^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_3^3 \alpha_9^2 - 2 \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + \mu \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_3^3 - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^6 \alpha_5^2 \alpha_3^2 \\ \text{Root}[\#1^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_3^3 \alpha_9^2 - 2 \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + \mu \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_3^3 - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^6 \alpha_5^2 \alpha_3^2 \\ \text{Root}[\#1^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_3^3 \alpha_9^2 - 2 \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + \mu \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_3^3 + \mu \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_3^3 - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_3^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_3^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^6 \alpha_5^2 \alpha_3^2 \end{array} \right)$$

In[78]:= Solve[$x^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 2 \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + \mu \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + \mu^3 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + \mu \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - \mu^2 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_5^4 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu^2 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{11} + \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{11} - 2 \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^4 \alpha_5^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} + \mu^3 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} + \mu \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9^2 \alpha_{11} + \mu^2 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9^2 \alpha_{11} + \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} - 2 \mu \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9^2 \alpha_{11} + \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5^4 \alpha_6 \alpha_{11}^2 - 2 \mu \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_6^2 \alpha_{11}^2 + \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6^3 \alpha_{11}^2 - \mu^2 \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_5^3 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_1 \alpha_2^4 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11}^2 + 2 \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11}^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6^3 \alpha_9 \alpha_{11}^2 - \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_5^3 \alpha_6 \alpha_{11}^3 + \alpha_1 \alpha_2^4 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_{11}^3 + \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_{11}^3 - \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6^3 \alpha_{11}^3 + x^2 (\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 - \mu \alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 + \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_9 + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}) + x (-\mu^2 \alpha_2^3 \alpha_5^2 \alpha_9 - \mu^2 \alpha_2^2 \alpha_5^3 \alpha_9 + \mu \alpha_2^4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9 + \mu \alpha_2^3 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9 + \mu \alpha_1 \alpha_2^4 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_9^2 - \mu^2 \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^2 + \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^2 - \mu \alpha_2^3 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^2 \alpha_5^3 \alpha_6 \alpha_{11} + \alpha_2^4 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_{11} + \alpha_2^3 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_{11} + \mu \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{11} + \alpha_1 \alpha_2^4 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - 2 \mu \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} - \mu \alpha_2^2 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_9 \alpha_{11} + \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_9 \alpha_{11} + \alpha_1 \alpha_2^3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{11}^2 - \alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_6^2 \alpha_{11}^2) == 0, x]$

Out[78]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{3} (-\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 + \mu \alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 - \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_9 - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}) - \frac{2^{1/3} \left(-\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 - \mu \alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 + \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_9 + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} \right)^2 + 3 \left(\dots \right)}{3 \left(\dots \right)^{1/3}} + \frac{\left(\dots \right)^{1/3} + \sqrt{\left(\dots \right)^2 + 4 \left(\dots \right)^2}}{3 \cdot 2^{1/3}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \dots \right\} \right\}$

$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{3} (-\mu \alpha_2 \alpha_4 \alpha_9 + \mu \alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 - \alpha_2^2 \alpha_6 \alpha_9 - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}) + \frac{(1-i\sqrt{3}) \left(\dots \right)^2 + \left(\dots \right)}{3 \cdot 2^{2/3}} - \frac{(1+i\sqrt{3}) \left(\dots \right)^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3}} \right\}$

Size in memory: 0.8 MB [+ Show more](#) [⋮ Show all](#) [☰ Iconize](#) [Store full expression in notebook](#)

Quinto Punto $\left\{ ep \rightarrow -\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, ea \rightarrow -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, u \rightarrow 0, eb \rightarrow 0 \right\}$

$$\text{In[79]:= Jp5} = \left\{ \text{J1} \left[-\frac{-\alpha_5 * \alpha_6 - \alpha_1 * \alpha_9}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 * \alpha_6 + \alpha_1 * \alpha_8}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, 0, 0 \right], \right. \\ \text{J2} \left[-\frac{-\alpha_5 * \alpha_6 - \alpha_1 * \alpha_9}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 * \alpha_6 + \alpha_1 * \alpha_8}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[-\frac{-\alpha_5 * \alpha_6 - \alpha_1 * \alpha_9}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, \right. \\ \left. -\frac{-\alpha_4 * \alpha_6 + \alpha_1 * \alpha_8}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[-\frac{-\alpha_5 * \alpha_6 - \alpha_1 * \alpha_9}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 * \alpha_6 + \alpha_1 * \alpha_8}{\alpha_5 * \alpha_8 + \alpha_4 * \alpha_9}, 0, 0 \right] \left. \right\};$$

```
Jp5 // MatrixForm
Eigenvalues[Jp5] // MatrixForm
```

Out[80]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 & -80.3941 \alpha_2 & -80.3941 \alpha_3 \\ -6.47217 & -1.36256 & 0 & -68.1281 \alpha_7 \\ 0 & 0 & 80.3941 \alpha_{10} - 68.1281 \alpha_{11} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 68.1281 \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

Out[81]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.00286 + 2.1339 i \\ -1.00286 - 2.1339 i \\ 68.1281 \alpha_{12} \\ 80.3941 \alpha_{10} - 68.1281 \alpha_{11} - \mu \end{pmatrix}$$

Ahora buscaremos las condiciones para que el sistema sea estable y ademas oscile. Dichas condiciones para quinto punto son:



$$\left(\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_4 \alpha_9 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_9 \right)^2 < \\ 4 \left(\alpha_4 \alpha_5^2 \alpha_6^2 \alpha_8 - \alpha_1 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_8^2 + \alpha_4^2 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9 - \alpha_1^2 \alpha_5 \alpha_8^2 \alpha_9 + \alpha_1 \alpha_4^2 \alpha_6 \alpha_9^2 - \alpha_1^2 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9^2 \right)$$

$$\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_4 \alpha_9 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9 > \alpha_1 \alpha_8 \alpha_9$$

$$\mu \alpha_5 \alpha_8 + \mu \alpha_4 \alpha_9 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} > +\alpha_5 \alpha_6 \alpha_{10} + \alpha_1 \alpha_9 \alpha_{10} + \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}$$

$$\alpha_1 \alpha_8 > \alpha_4 \alpha_6$$

```
In[82]:= Reduce[{{0 < α1, 0 < α4, 0 < α5, 0 < α6, 0 < α9, (α4 α5 α6 + α1 α4 α9 + α4 α6 α9 - α1 α8 α9)2 <
  4 (α4 α52 α62 α8 - α1 α52 α6 α82 + α42 α5 α62 α9 - α12 α5 α82 α9 + α1 α42 α6 α92 - α12 α4 α8 α92),
  α4 α5 α6 + α1 α4 α9 + α4 α6 α9 > α1 α8 α9,
  μ α5 α8 + μ α4 α9 + α4 α6 α11 > + α5 α6 α10 + α1 α9 α10 + α1 α8 α11, α1 α8 > α4 α6}},
  {μ, α1, α4, α5, α6, α8, α9, α10, α11}]
```

 Reduce: 0.03` is not a valid variable. 

```
Out[82]:= Reduce[{{True, True, True, True, True, True,
  True, 0.072 α11 + 0.001015 μ > 0.0816 α10 + 0.00285 α11, False}},
  {μ, 0.03, 0.008, 0.009, 9., 0.095, 0.02, α10, α11}]
```

Sexto Punto $\{ep \rightarrow 0, ea \rightarrow \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, u \rightarrow 0, eb \rightarrow 0\}$

```
In[83]:= Jp6 = {J1[0,  $\frac{\alpha_6}{\alpha_9}$ , 0, 0], J2[0,  $\frac{\alpha_6}{\alpha_9}$ , 0, 0], J3[0,  $\frac{\alpha_6}{\alpha_9}$ , 0, 0], J4[0,  $\frac{\alpha_6}{\alpha_9}$ , 0, 0]};
Jp6 // MatrixForm
Eigenvalues[Jp6] // MatrixForm
```

Out[84]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4.08 & 0. & 0 & 0 \\ -42.75 & -9. & 0 & -450. \alpha_7 \\ 0 & 0 & -450. \alpha_{11} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450. \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

Out[85]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -9. \\ 4.08 \\ 450. \alpha_{12} \\ -450. \alpha_{11} - \mu \end{pmatrix}$$

Septimo punto $\left\{ ep \rightarrow \frac{\mu}{\alpha_{10}}, ea \rightarrow 0, u \rightarrow -\frac{\mu \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_{10}}{\alpha_2 \alpha_{10}}, eb \rightarrow 0 \right\}$

$$\text{In[86]:= Jp7} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right] \right\};$$

Jp7 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp7] // MatrixForm

Out[87]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.03 + \frac{-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu}{\alpha_{10}} - \frac{0.016 \mu}{\alpha_{10}} & \frac{0.009 \mu}{\alpha_{10}} & -\frac{\alpha_2 \mu}{\alpha_{10}} & -\frac{\alpha_3 \mu}{\alpha_{10}} \\ 0. & 9. - \frac{0.095 \mu}{\alpha_{10}} & 0 & 0 \\ -\frac{-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu}{\alpha_2} & \frac{\alpha_{11}(-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu)}{\alpha_{10} \alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[88]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. \\ \frac{9. (1. \alpha_{10} - 0.0105556 \mu)}{\alpha_{10}} \\ \frac{0.5 (-0.008 \alpha_2^2 \mu - \sqrt{-0.12 \alpha_{10}^2 \alpha_2^4 \mu + 0.000064 \alpha_2^4 \mu^2 + 0.032 \alpha_{10} \alpha_2^4 \mu^2})}{\alpha_{10} \alpha_2^2} \\ \frac{0.5 (-0.008 \alpha_2^2 \mu + \sqrt{-0.12 \alpha_{10}^2 \alpha_2^4 \mu + 0.000064 \alpha_2^4 \mu^2 + 0.032 \alpha_{10} \alpha_2^4 \mu^2})}{\alpha_{10} \alpha_2^2} \end{pmatrix}$$

Busquemos las condiciones para que el sistema oscile


In[89]= $\mu \alpha_8 > \alpha_6 \alpha_{10}$

$4 \alpha_1 \alpha_{10}^2 > \mu \alpha_4^2 + 4 \mu \alpha_4 \alpha_{10}$

Out[89]= $\mu \alpha_8 > \alpha_6 \alpha_{10}$

Out[90]= $4 \alpha_1 \alpha_{10}^2 > \mu \alpha_4^2 + 4 \mu \alpha_4 \alpha_{10}$

In[91]= $\text{Reduce}\left[\left\{0 < \mu < 1, 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1, 0 < \alpha_4 < 1, 0 < \alpha_6 < 1, 0 < \alpha_8 < 1, 0 < \alpha_{10} < 1, \mu \alpha_8 > \alpha_6 * \alpha_{10}, 4 \alpha_1 \alpha_{10}^2 > \mu \alpha_4^2 + 4 \mu \alpha_4 \alpha_{10}\right\}, \{\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}\}\right]$

Reduce: 0.03` is not a valid variable. 

Out[91]= $\text{Reduce}\left[\left\{0 < \mu < 1, \text{True}, 0 < \alpha_2 < 1, \text{True}, \text{False}, \text{True}, 0 < \alpha_{10} < 1, 0.095 \mu > 9. \alpha_{10}, 0.12 \alpha_{10}^2 > 0.000064 \mu + 0.032 \alpha_{10} \mu\right\}, \{\mu, 0.03, \alpha_2, 0.008, 9., 0.095, \alpha_{10}\}\right]$

In[92]=

Octavo punto $\left\{ ep \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_4}, ea \rightarrow 0, u \rightarrow 0, eb \rightarrow 0 \right\}$

```
In[93]:= Jp8 = {J1[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0, 0, 0], J2[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0, 0, 0], J3[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0, 0, 0], J4[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0, 0, 0]};
```

```
Jp8 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp8] // MatrixForm
```

```
Out[94]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.03 & 0.03375 & -3.75 \alpha_2 & -3.75 \alpha_3 \\ 0. & 8.64375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 \alpha_{10} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Out[95]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 8.64375 \\ -0.03 \\ 0 \\ 3.75 \alpha_{10} - \mu \end{pmatrix}$$

```
In[96]:=
```

Sistema sin Campo Zonal

```
In[97]:= Jacobian[{SCZ1[ep, ea, u], SCZ2[ep, ea, u], SCZ3[ep, ea, u]}, {ep, ea, u}] ==
  {{D[SCZ1[ep, ea, u], ep], D[SCZ1[ep, ea, u], ea], D[SCZ1[ep, ea, u], u]},
   {D[SCZ2[ep, ea, u], ep], D[SCZ2[ep, ea, u], ea], D[SCZ2[ep, ea, u], u]},
   {D[SCZ3[ep, ea, u], ep], D[SCZ3[ep, ea, u], ea], D[SCZ3[ep, ea, u], u]}}
```

General: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

General: 68.12807881773399` is not a valid variable. [i](#)

General: 0 is not a valid variable. [i](#)

General: Further output of General::ivar will be suppressed during this calculation. [i](#)

```
Out[97]= Jacobian[{{6.66134 × 10-15, 2.84217 × 10-14, 0.}, {80.3941, 68.1281, 0}] ==
  {{ $\partial_{80.3941} 6.66134 \times 10^{-15}$ ,  $\partial_{68.1281} 6.66134 \times 10^{-15}$ ,  $\partial_0 6.66134 \times 10^{-15}$ }, { $\partial_{80.3941} 2.84217 \times 10^{-14}$ ,
    $\partial_{68.1281} 2.84217 \times 10^{-14}$ ,  $\partial_0 2.84217 \times 10^{-14}$ }, { $\partial_{80.3941} 0.$ ,  $\partial_{68.1281} 0.$ ,  $\partial_0 0.$ }}
```

```
In[98]:= JSc1[ep_, ea_, u_] := { $\alpha_1 - u \alpha_2 - 2 ep \alpha_4 + ea \alpha_5$ ,  $ep \alpha_5$ ,  $-ep \alpha_2$ };
```

```
JSc2[ep_, ea_, u_] := {-ea  $\alpha_8$ ,  $\alpha_6 - ep \alpha_8 - 2 ea \alpha_9$ , 0};
```

```
JSc3[ep_, ea_, u_] := {u  $\alpha_{10}$ ,  $-u \alpha_{11}$ ,  $ep \alpha_{10} - \mu - ea \alpha_{11}$ };
```

Punto 1 $ep \rightarrow \frac{\mu}{\alpha_{10}}$, $ea \rightarrow 0$, $u \rightarrow -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2}$

$$\text{In}[101]:= \text{Js1} = \left\{ \text{JSc1} \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2} \right], \right. \\ \left. \text{JSc2} \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2} \right], \text{JSc3} \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2} \right] \right\};$$

Js1 // MatrixForm

Eigenvalues[Js1] // MatrixForm

Out[102]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.03 + \frac{-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu}{\alpha_{10}} - \frac{0.016 \mu}{\alpha_{10}} & \frac{0.009 \mu}{\alpha_{10}} & -\frac{\alpha_2 \mu}{\alpha_{10}} \\ 0. & 9. - \frac{0.095 \mu}{\alpha_{10}} & 0 \\ -\frac{-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu}{\alpha_2} & \frac{\alpha_{11}(-0.03 \alpha_{10} + 0.008 \mu)}{\alpha_{10} \alpha_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Out[103]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{9. (1. \alpha_{10} - 0.0105556 \mu)}{\alpha_{10}} \\ \frac{0.5 (-0.008 \alpha_2^2 \mu - \sqrt{-0.12 \alpha_{10}^2 \alpha_2^4 \mu + 0.000064 \alpha_2^4 \mu^2 + 0.032 \alpha_{10} \alpha_2^4 \mu^2})}{\alpha_{10} \alpha_2^2} \\ \frac{0.5 (-0.008 \alpha_2^2 \mu + \sqrt{-0.12 \alpha_{10}^2 \alpha_2^4 \mu + 0.000064 \alpha_2^4 \mu^2 + 0.032 \alpha_{10} \alpha_2^4 \mu^2})}{\alpha_{10} \alpha_2^2} \end{pmatrix}$$

Punto 2 $ep \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $ea \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$

$$\text{In}[104]:= \text{Js2} = \left\{ \text{JSc1} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0 \right], \text{JSc2} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0 \right], \text{JSc3} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0 \right] \right\};$$

Js2 // MatrixForm

Eigenvalues[Js2] // MatrixForm

Out[105]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.03 & 0.03375 & -3.75 \alpha_2 \\ 0. & 8.64375 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 \alpha_{10} - \mu \end{pmatrix}$$

Out[106]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 8.64375 \\ -0.03 \\ 3.75 \alpha_{10} - \mu \end{pmatrix}$$

Punto 3 $ep \rightarrow 0$, $ea \rightarrow \frac{\alpha 6}{\alpha 9}$, $u \rightarrow 0$

```
In[107]:= Js3 = {JSc1[0,  $\frac{\alpha 6}{\alpha 9}$ , 0], JSc2[0,  $\frac{\alpha 6}{\alpha 9}$ , 0], JSc3[0,  $\frac{\alpha 6}{\alpha 9}$ , 0]};
```

```
Js3 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Js3] // MatrixForm
```

```
Out[108]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4.08 & 0. & 0 \\ -42.75 & -9. & 0 \\ 0 & 0 & -450. \alpha 11 - \mu \end{pmatrix}$$

```
Out[109]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -9. \\ 4.08 \\ -450. \alpha 11 - \mu \end{pmatrix}$$

Punto 4 $ep \rightarrow -\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}$, $ea \rightarrow -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}$, $u \rightarrow -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})}$

In[110]:=
$$Js4 = \left\{ JSc1 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right. \right.$$

$$\left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right], JSc2 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right.$$

$$\left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right],$$

$$JSc3 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right.$$

$$\left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right] \};$$

Js4 // MatrixForm

Eigenvalues[Js4] // MatrixForm

Out[111]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.03 + \frac{0.016(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} + \frac{-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} - \frac{0.009(-9. \alpha_{10} + 0.095 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} & & -\frac{0.009(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} \\ & \frac{0.095(-9. \alpha_{10} + 0.095 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} & 9. + \frac{0.095(-9. \alpha_{11} - 0.02 \mu)}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} + \frac{0.04 \mu}{0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}} \\ & -\frac{\alpha_{10}(-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu)}{(0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11}) \alpha_2} & \frac{\alpha_{11}(-0.0816 \alpha_{10} + 0.06915 \alpha_{11} + 0.001015 \mu)}{(0.02 \alpha_{10} + 0.095 \alpha_{11})} \end{array} \right)$$

Out[112]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}[1.05754 \times 10^6 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} \alpha_2^3 + 4.12711 \times 10^6 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 \alpha_2^3 - 4.25687 \times 10^6 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 \alpha_2^3 + 2350.08 \alpha_{10}^3 \alpha_2^3 \mu - 15145.9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \alpha_2^3 \mu - 115507. \alpha_1 \mu, \alpha_2] \\ \text{Root}[1.05754 \times 10^6 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} \alpha_2^3 + 4.12711 \times 10^6 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 \alpha_2^3 - 4.25687 \times 10^6 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 \alpha_2^3 + 2350.08 \alpha_{10}^3 \alpha_2^3 \mu - 15145.9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \alpha_2^3 \mu - 115507. \alpha_1 \mu, \alpha_2] \\ \text{Root}[1.05754 \times 10^6 \alpha_{10}^3 \alpha_{11} \alpha_2^3 + 4.12711 \times 10^6 \alpha_{10}^2 \alpha_{11}^2 \alpha_2^3 - 4.25687 \times 10^6 \alpha_{10} \alpha_{11}^3 \alpha_2^3 + 2350.08 \alpha_{10}^3 \alpha_2^3 \mu - 15145.9 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} \alpha_2^3 \mu - 115507. \alpha_1 \mu, \alpha_2] \end{array} \right)$$

Punto 5 $ep \rightarrow 0, ea \rightarrow 0, u \rightarrow 0$

```
In[113]:= Js5 = {JSc1[0, 0, 0], JSc2[0, 0, 0], JSc3[0, 0, 0]};
```

```
Js5 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Js5] // MatrixForm
```

```
Out[114]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0. & 0 \\ 0. & 9. & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

```
Out[115]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 9. \\ 0.03 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

Punto 6 $ep \rightarrow -\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, ea \rightarrow -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, u \rightarrow 0$

```
In[116]:= Js6 = {JSc1[-\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, 0],
```

```
JSc2[-\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, 0], JSc3[-\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}, 0]};
```

```
Js6 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Js6] // MatrixForm
```

```
Out[117]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 & -80.3941 \alpha_2 \\ -6.47217 & -1.36256 & 0 \\ 0 & 0 & 80.3941 \alpha_{10} - 68.1281 \alpha_{11} - \mu \end{pmatrix}$$

```
Out[118]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1.00286 + 2.1339 i \\ -1.00286 - 2.1339 i \\ 80.3941 \alpha_{10} - 68.1281 \alpha_{11} - \mu \end{pmatrix}$$

Modelo de fluctuaciones

```
In[119]:= Jacobian[{flu1[ep, ea], flu2[ep, ea]}, {ep, ea}] ==
  {{D[flu1[ep, ea], ep], D[flu1[ep, ea], ea]},
   {D[flu2[ep, ea], ep], D[flu2[ep, ea], ea]}}
```

General: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

General: 68.12807881773399` is not a valid variable. [i](#)

General: 80.39408866995073` is not a valid variable. [i](#)

General: Further output of General::ivar will be suppressed during this calculation. [i](#)

Out[119]=

```
Jacobian[{7.10543 × 10-15, 2.84217 × 10-14}, {80.3941, 68.1281}] ==
  {{∂80.39417.10543 × 10-15, ∂68.12817.10543 × 10-15},
   {∂80.39412.84217 × 10-14, ∂68.12812.84217 × 10-14}}
```

```
In[120]:= Jf1[ep_, ea_] := {α1 - 2 ep α4 + ea α5, ep α5};
  Jf2[ep_, ea_] := {-ea α8, α6 - ep α8 - 2 ea α9};
```

Punto 1 $ep \rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $ea \rightarrow 0$

```
In[122]:= Jf1 = {Jf1[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0], Jf2[ $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$ , 0]};
  Jf1 // MatrixForm
  Eigenvalues[Jf2] // MatrixForm
```

Out[123]//MatrixForm=

```
(-0.03  0.03375)
 (  0.   8.64375)
```

Out[124]//MatrixForm=

```
Eigenvalues[Jf2]
```

Punto 2 $ep \rightarrow 0$, $ea \rightarrow 0$

```
In[125]:= Jf2 = {Jf1[0, 0], Jf2[0, 0]};
  Jf2 // MatrixForm
  Eigenvalues[Jf2] // MatrixForm
```

Out[126]//MatrixForm=

```
(0.03  0.)
 (  0.   9.)
```

Out[127]//MatrixForm=

```
( 9. )
 (0.03)
```

Punto 3 $ep \rightarrow 0$, $ea \rightarrow \frac{\alpha 6}{\alpha 9}$

$$\text{In[128]:= Jf3} = \left\{ \text{Jf11}\left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}\right], \text{Jf12}\left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}\right] \right\};$$

Jf3 // MatrixForm

Eigenvalues[Jf3] // MatrixForm

Out[129]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4.08 & 0. \\ -42.75 & -9. \end{pmatrix}$$

Out[130]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -9. \\ 4.08 \end{pmatrix}$$

Punto 4 $ep \rightarrow -\frac{-\alpha 5 \alpha 6 - \alpha 1 \alpha 9}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}$, $ea \rightarrow -\frac{-\alpha 4 \alpha 6 + \alpha 1 \alpha 8}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}$

$$\text{In[131]:= Jf4} = \left\{ \text{Jf11}\left[-\frac{-\alpha 5 \alpha 6 - \alpha 1 \alpha 9}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 \alpha 6 + \alpha 1 \alpha 8}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}\right], \text{Jf12}\left[-\frac{-\alpha 5 \alpha 6 - \alpha 1 \alpha 9}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 \alpha 6 + \alpha 1 \alpha 8}{\alpha 5 \alpha 8 + \alpha 4 \alpha 9}\right] \right\};$$

Jf4 // MatrixForm

Eigenvalues[Jf4] // MatrixForm

Out[132]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 \\ -6.47217 & -1.36256 \end{pmatrix}$$

Out[133]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.00286 + 2.1339 i \\ -1.00286 - 2.1339 i \end{pmatrix}$$

Comportamiento de los Puntos de equilibrio

Caso 1

```
In[134]:=  $\alpha_1 = 0.6;$ 
 $\alpha_2 = 0.009;$ 
 $\alpha_3 = 0.003;$ 
 $\alpha_4 = 0.008;$ 
 $\alpha_5 = 0.009;$ 
 $\alpha_6 = 0.08;$ 
 $\alpha_7 = 0.05;$ 
 $\alpha_8 = 0.095;$ 
 $\alpha_9 = 0.02;$ 
 $\alpha_{10} = 0.03;$ 
 $\alpha_{11} = 0.01;$ 
 $\alpha_{12} = 0.05;$ 
 $\mu = 0.6;$ 
 $ep = 100;$ 
 $ea = 100;$ 
 $u = 1;$ 
 $eb = 0.1;$ 
```

Primer punto de equilibrio

$$\text{In[151]:= } Jp1 = \left\{ J1 \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}} \right], J2 \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}} \right], \right. \\ \left. J3 \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}} \right], J4 \left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}} \right] \right\};$$

`Jp1 // MatrixForm`

`Eigenvalues[Jp1] // MatrixForm`

Out[152]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & -9.00333 & 0 & 0. \\ 0.03 & -0.01 & 0. & 0 \\ 0 & 7.18333 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[153]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -9.00333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

$$\text{In[154]:= Jp2} = \left\{ \text{J1}\left[\text{ep}, 0, 0, \frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{\text{ep} * \alpha 4}{\alpha 3}\right], \text{J2}\left[\text{ep}, 0, 0, \frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{\text{ep} * \alpha 4}{\alpha 3}\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\text{ep}, 0, 0, \frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{\text{ep} * \alpha 4}{\alpha 3}\right], \text{J4}\left[\text{ep}, 0, 0, \frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{\text{ep} * \alpha 4}{\alpha 3}\right] \right\};$$

Jp2 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp2] // MatrixForm

Out[155]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.9 & -0.9 & -0.3 \\ 0. & -6.08667 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 2.4 & 0 \\ 0 & -3.33333 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[156]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -6.08667 \\ 2.4 \\ -0.8 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

$$\text{In[157]:= Jp3} = \{\text{J1}[0, 0, 0, \text{eb}], \text{J2}[0, 0, 0, \text{eb}], \text{J3}[0, 0, 0, \text{eb}], \text{J4}[0, 0, 0, \text{eb}]\};$$

Jp3 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp3] // MatrixForm

Out[158]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.5997 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.075 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[159]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.5997 \\ 0.075 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio

$$\text{In[160]:= Jp4a} = \left\{ \text{J1a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J2a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \\ \text{J3a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J4a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right] \};$$

Jp4a // MatrixForm

Eigenvalues[Jp4a] // MatrixForm

Out[161]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 - \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{2 \alpha_4 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & & -\frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \alpha_6 + \frac{2 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6) \alpha_9}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & -\frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \frac{\alpha_{11} (0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11})}{\alpha_2 (\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11})} \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Out[162]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0. \\ \text{Root}[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0. \\ \text{Root}[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0. \end{array} \right)$$

Quinto punto de equilibrio

$$\text{In[163]:= Jp5} = \left\{ \text{J1} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \right. \\ \text{J2} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, \right. \\ \left. -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right] \left. \right\};$$

Jp5 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp5] // MatrixForm

Out[164]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.100256 & 0.112788 & -0.112788 & -0.0375961 \\ 5.27507 & 1.11054 & 0 & 2.77635 \\ 0. & 0. & 0.331232 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & -2.77635 \end{pmatrix}$$

Out[165]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2.77635 \\ 1.48569 \\ -0.475405 \\ 0.331232 \end{pmatrix}$$

Sexto punto de equilibrio

$$\text{In[166]:= Jp6} = \left\{ \text{J1} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J2} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right] \right\};$$

Jp6 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp6] // MatrixForm

Out[167]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.636 & 0. & 0. & 0. \\ -0.38 & -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0. & 0. & -0.64 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Out[168]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.64 \\ 0.636 \\ 0.2 \\ -0.08 \end{pmatrix}$$

Septimo punto de equilibrio

$$\text{In[169]:= Jp7} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right] \right\};$$

Jp7 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp7] // MatrixForm

Out[170]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & -1.82 & 0 & 0. \\ 1.46667 & -0.488889 & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[171]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.82 + 0. i \\ -0.08 + 0.507543 i \\ -0.08 - 0.507543 i \\ 0. + 0. i \end{pmatrix}$$

Octavo punto de equilibrio

$$\text{In[172]:= Jp8} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J3}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right] \right\};$$

Jp8 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp8] // MatrixForm

Out[173]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.675 & -0.675 & -0.225 \\ 0. & -7.045 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 1.65 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[174]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -7.045 \\ 1.65 \\ -0.6 \\ 0. \end{pmatrix}$$

In[175]:= **Clear**[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, \text{ep}, \text{ea}, \text{u}, \text{eb}$]

Caso 2

```
In[176]:=  $\alpha_1 = 0.6;$ 
 $\alpha_2 = 0.009;$ 
 $\alpha_3 = 0.003;$ 
 $\alpha_4 = 0.008;$ 
 $\alpha_5 = 0.009;$ 
 $\alpha_6 = 1.5;$ 
 $\alpha_7 = 0.01;$ 
 $\alpha_8 = 0.015;$ 
 $\alpha_9 = 0.02;$ 
 $\alpha_{10} = 0.03;$ 
 $\alpha_{11} = 0.4;$ 
 $\alpha_{12} = 0.006;$ 
 $\mu = 0.6;$ 
 $ep = 100;$ 
 $ea = 100;$ 
 $u = 1;$ 
 $eb = 0.1;$ 
```

Primer punto de equilibrio

```
In[193]:= Jp1 = {J1[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J2[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ],
J3[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J4[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ]};
```

Jp1 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp1] // MatrixForm

Out[194]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & -0.236667 & 0 & 0. \\ 0.03 & -0.4 & 0. & 0 \\ 0 & 0.862 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[195]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.236667 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

```
In[196]:= Jp2 = {J1[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J2[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ],
  J3[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J4[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ]};
```

```
Jp2 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp2] // MatrixForm
```

```
Out[197]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.9 & -0.9 & -0.3 \\ 0. & 0.666667 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 2.4 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[198]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2.4 \\ -0.8 \\ 0.666667 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

```
In[199]:= Jp3 = {J1[0, 0, 0, eb], J2[0, 0, 0, eb], J3[0, 0, 0, eb], J4[0, 0, 0, eb]};
```

```
Jp3 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp3] // MatrixForm
```

```
Out[200]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.5997 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1.499 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[201]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1.499 \\ -0.6 \\ 0.5997 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio

$$\text{In}[202]:= \text{Jp4a} = \left\{ \text{J1a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J2a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \\ \text{J3a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J4a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right] \};$$

Jp4a // MatrixForm

Eigenvalues[Jp4a] // MatrixForm

Out[203]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 - \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{2 \alpha_4 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & & -\frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \alpha_6 + \frac{2 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6) \alpha_9}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & -\frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \frac{\alpha_{11} (0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 (\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11})} \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Out[204]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \end{array} \right)$$

Quinto punto de equilibrio

$$\text{In[205]:= Jp5} = \left\{ \text{J1} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \right. \\ \text{J2} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, \right. \\ \left. -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right] \left. \right\};$$

Jp5 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp5] // MatrixForm

Out[206]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.691525 & 0.777966 & -0.777966 & -0.259322 \\ -0.152542 & -0.20339 & 0 & -0.101695 \\ 0. & 0. & -2.07458 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0.0610169 \end{pmatrix}$$

Out[207]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2.07458 + 0. i \\ -0.447458 + 0.243113 i \\ -0.447458 - 0.243113 i \\ 0.0610169 + 0. i \end{pmatrix}$$

Sexto punto de equilibrio

$$\text{In[208]:= Jp6} = \left\{ \text{J1} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J2} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right] \right\};$$

Jp6 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp6] // MatrixForm

Out[209]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.275 & 0. & 0. & 0. \\ -1.125 & -1.5 & 0 & -0.75 \\ 0. & 0. & -30.6 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Out[210]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -30.6 \\ -1.5 \\ 1.275 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Septimo punto de equilibrio

$$\text{In[211]:= Jp7} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right] \right\};$$

Jp7 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp7] // MatrixForm

Out[212]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & 1.2 & 0 & 0. \\ 1.46667 & -19.5556 & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[213]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.2 + 0. i \\ -0.08 + 0.507543 i \\ -0.08 - 0.507543 i \\ 0. + 0. i \end{pmatrix}$$

Octavo punto de equilibrio

$$\text{In[214]:= Jp8} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J3}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right] \right\};$$

Jp8 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp8] // MatrixForm

Out[215]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.675 & -0.675 & -0.225 \\ 0. & 0.375 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 1.65 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[216]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.6 \\ 0.375 \\ 0. \end{pmatrix}$$

In[217]:= **Clear**[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, \text{ep}, \text{ea}, \text{u}, \text{eb}$]

Caso 3

```

In[218]:=  $\alpha_1 = 0.6;$ 
 $\alpha_2 = 0.009;$ 
 $\alpha_3 = 0.003;$ 
 $\alpha_4 = 0.008;$ 
 $\alpha_5 = 0.009;$ 
 $\alpha_6 = 4.5;$ 
 $\alpha_7 = 0.05;$ 
 $\alpha_8 = 0.045;$ 
 $\alpha_9 = 0.02;$ 
 $\alpha_{10} = 0.03;$ 
 $\alpha_{11} = 0.4;$ 
 $\alpha_{12} = 0.006;$ 
 $\mu = 0.6;$ 
 $ep = 100;$ 
 $ea = 100;$ 
 $u = 1;$ 
 $eb = 0.1;$ 

```

Primer punto de equilibrio

```

In[235]:= Jp1 = {J1[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J2[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ],
J3[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J4[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ]};

```

Jp1 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp1] // MatrixForm

Out[236]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & -3.58333 & 0 & 0. \\ 0.03 & -0.4 & 0. & 0 \\ 0 & 0.862 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[237]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -3.58333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

```
In[238]:= Jp2 = {J1[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J2[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ],
  J3[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J4[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ]};
```

```
Jp2 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp2] // MatrixForm
```

```
Out[239]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.9 & -0.9 & -0.3 \\ 0. & 3.33333 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 2.4 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[240]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 3.33333 \\ 2.4 \\ -0.8 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

```
In[241]:= Jp3 = {J1[0, 0, 0, eb], J2[0, 0, 0, eb], J3[0, 0, 0, eb], J4[0, 0, 0, eb]};
```

```
Jp3 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp3] // MatrixForm
```

```
Out[242]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.5997 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 4.495 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[243]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4.495 \\ -0.6 \\ 0.5997 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio

$$\text{In[244]:= Jp4a} = \left\{ \text{J1a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J2a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \\ \text{J3a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J4a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right] \};$$

Jp4a // MatrixForm

Eigenvalues[Jp4a] // MatrixForm

Out[245]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 - \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{2 \alpha_4 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & & -\frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \alpha_6 + \frac{2 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6) \alpha_9}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & -\frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \frac{\alpha_{11} (0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11})}{\alpha_2 (\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11})} \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Out[246]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 \alpha_{11} - 0. \right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 \alpha_{11} - 0. \right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 \alpha_{11} - 0. \right. \end{array} \right)$$

Quinto punto de equilibrio

$$\text{In[247]:= Jp5} = \left\{ \text{J1} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \right. \\ \text{J2} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, \right. \\ \left. -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right] \left. \right\};$$

Jp5 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp5] // MatrixForm

Out[248]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.743363 & 0.836283 & -0.836283 & -0.278761 \\ -0.716814 & -0.318584 & 0 & -0.79646 \\ 0. & 0. & -4.18407 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0.0955752 \end{pmatrix}$$

Out[249]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -4.18407 + 0. i \\ -0.530973 + 0.744547 i \\ -0.530973 - 0.744547 i \\ 0.0955752 + 0. i \end{pmatrix}$$

Sexto punto de equilibrio

$$\text{In[250]:= Jp6} = \left\{ \text{J1} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J2} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right] \right\};$$

Jp6 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp6] // MatrixForm

Out[251]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.625 & 0. & 0. & 0. \\ -10.125 & -4.5 & 0 & -11.25 \\ 0. & 0. & -90.6 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 1.35 \end{pmatrix}$$

Out[252]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -90.6 \\ -4.5 \\ 2.625 \\ 1.35 \end{pmatrix}$$

Septimo punto de equilibrio

$$\text{In[253]:= Jp7} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right] \right\};$$

Jp7 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp7] // MatrixForm

Out[254]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & 3.6 & 0 & 0. \\ 1.46667 & -19.5556 & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[255]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3.6 + 0. i \\ -0.08 + 0.507543 i \\ -0.08 - 0.507543 i \\ 0. + 0. i \end{pmatrix}$$

Octavo punto de equilibrio

$$\text{In[256]:= Jp8} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J3}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right] \right\};$$

Jp8 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp8] // MatrixForm

Out[257]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.675 & -0.675 & -0.225 \\ 0. & 1.125 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 1.65 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[258]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.65 \\ 1.125 \\ -0.6 \\ 0. \end{pmatrix}$$

In[259]:= **Clear**[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, \text{ep}, \text{ea}, \text{u}, \text{eb}$]

Caso 4

```
In[260]:=  $\alpha_1 = 0.6;$ 
 $\alpha_2 = 0.009;$ 
 $\alpha_3 = 0.003;$ 
 $\alpha_4 = 0.008;$ 
 $\alpha_5 = 0.009;$ 
 $\alpha_6 = 4.5;$ 
 $\alpha_7 = 0.05;$ 
 $\alpha_8 = 0.095;$ 
 $\alpha_9 = 0.02;$ 
 $\alpha_{10} = 0.03;$ 
 $\alpha_{11} = 0.4;$ 
 $\alpha_{12} = 0.006;$ 
 $\mu = 0.6;$ 
 $ep = 100;$ 
 $ea = 100;$ 
 $u = 1;$ 
 $eb = 0.1;$ 
```

Primer punto de equilibrio

```
In[277]:= Jp1 = {J1[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J2[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ],
J3[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ], J4[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, u, -\frac{u * \alpha_2}{\alpha_3} - \frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_3 * \alpha_{10}}$ ]};
```

Jp1 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp1] // MatrixForm

Out[278]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & -4.58333 & 0 & 0. \\ 0.03 & -0.4 & 0. & 0 \\ 0 & 0.862 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[279]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -4.58333 \\ -0.111623 \\ -0.0483772 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

```
In[280]:= Jp2 = {J1[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J2[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ],
  J3[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ], J4[ep, 0, 0,  $\frac{\alpha 1}{\alpha 3} - \frac{ep * \alpha 4}{\alpha 3}$ ]};
```

```
Jp2 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp2] // MatrixForm
```

```
Out[281]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.9 & -0.9 & -0.3 \\ 0. & -1.66667 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 2.4 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[282]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2.4 \\ -1.66667 \\ -0.8 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

```
In[283]:= Jp3 = {J1[0, 0, 0, eb], J2[0, 0, 0, eb], J3[0, 0, 0, eb], J4[0, 0, 0, eb]};
```

```
Jp3 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jp3] // MatrixForm
```

```
Out[284]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.5997 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 4.495 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[285]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4.495 \\ -0.6 \\ 0.5997 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio

$$\text{In[286]:= Jp4a} = \left\{ \text{J1a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J2a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \\ \text{J3a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right], \text{J4a} \left[-\frac{\mu \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{\mu \alpha_5 - \alpha_6 \alpha_2}{\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11}}, -\frac{\mu \alpha_5 \alpha_5 + \mu \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_9 \alpha_2 + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_9 \alpha_2 + \alpha_5 \alpha_{11})}, 0 \right] \};$$

Jp4a // MatrixForm

Eigenvalues[Jp4a] // MatrixForm

Out[287]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 - \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{2 \alpha_4 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & & -\frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & \frac{\alpha_5 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6)}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \alpha_6 + \frac{2 (0.6 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6) \alpha_9}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} + \frac{\alpha_5 (-0.6 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} \\ & -\frac{0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11}} & \frac{\alpha_{11} (0.6 \alpha_5^2 - \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_9 + 0.6 \alpha_4 \alpha_9 - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11})}{\alpha_2 (\alpha_2 \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_{11})} \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Out[288]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{l} \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \\ \text{Root}\left[\#1^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^3 \alpha_9^2 - 0.72 \alpha_2^5 \alpha_5^2 \alpha_6 \alpha_9^2 + 0.6 \alpha_2^6 \alpha_5 \alpha_6^2 \alpha_9^2 - 0.36 \alpha_1 \alpha_2^5 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_9^3 + 0.6 \alpha_1 \alpha_2^6 \alpha_6 \alpha_9^3 - 0.36 \alpha_2^5 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_9^3 + 0.216 \alpha_2^4 \alpha_5^4 \alpha_9 - \alpha_{11} - 0.\right. \end{array} \right)$$

Quinto punto de equilibrio

$$\text{In[289]:= Jp5} = \left\{ \text{J1} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \right. \\ \text{J2} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, \right. \\ \left. -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[-\frac{-\alpha 5 * \alpha 6 - \alpha 1 * \alpha 9}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, -\frac{-\alpha 4 * \alpha 6 + \alpha 1 * \alpha 8}{\alpha 5 * \alpha 8 + \alpha 4 * \alpha 9}, 0, 0 \right] \left. \right\};$$

Jp5 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp5] // MatrixForm

Out[290]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.413793 & 0.465517 & -0.465517 & -0.155172 \\ 1.96552 & 0.413793 & 0 & 1.03448 \\ 0. & 0. & 9.22759 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & -0.124138 \end{pmatrix}$$

Out[291]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 9.22759 \\ 1.04221 \\ -1.04221 \\ -0.124138 \end{pmatrix}$$

Sexto punto de equilibrio

$$\text{In[292]:= Jp6} = \left\{ \text{J1} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J2} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J3} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right], \text{J4} \left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0, 0 \right] \right\};$$

Jp6 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp6] // MatrixForm

Out[293]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.625 & 0. & 0. & 0. \\ -21.375 & -4.5 & 0 & -11.25 \\ 0. & 0. & -90.6 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 1.35 \end{pmatrix}$$

Out[294]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -90.6 \\ -4.5 \\ 2.625 \\ 1.35 \end{pmatrix}$$

Septimo punto de equilibrio

$$\text{In[295]:= Jp7} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \right. \\ \left. \text{J3}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{\mu * \alpha_4 - \alpha_1 * \alpha_{10}}{\alpha_2 * \alpha_{10}}, 0\right] \right\};$$

Jp7 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp7] // MatrixForm

Out[296]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 & -0.06 \\ 0. & 2.6 & 0 & 0. \\ 1.46667 & -19.5556 & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[297]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.6 + 0. i \\ -0.08 + 0.507543 i \\ -0.08 - 0.507543 i \\ 0. + 0. i \end{pmatrix}$$

Octavo punto de equilibrio

$$\text{In[298]:= Jp8} = \left\{ \text{J1}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J3}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right], \text{J4}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, 0, 0, 0\right] \right\};$$

Jp8 // MatrixForm

Eigenvalues[Jp8] // MatrixForm

Out[299]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.675 & -0.675 & -0.225 \\ 0. & -2.625 & 0 & 0. \\ 0. & 0. & 1.65 & 0 \\ 0 & 0. & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Out[300]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2.625 \\ 1.65 \\ -0.6 \\ 0. \end{pmatrix}$$

In[301]:= **Clear**[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, \text{ep}, \text{ea}, \text{u}, \text{eb}$]

Caso 5

```
In[302]:=  $\alpha_1 = 0.6;$ 
 $\alpha_2 = 0.009;$ 
 $\alpha_3 = 0.003;$ 
 $\alpha_4 = 0.008;$ 
 $\alpha_5 = 0.009;$ 
 $\alpha_6 = 4.5;$ 
 $\alpha_7 = 0.05;$ 
 $\alpha_8 = 0.045;$ 
 $\alpha_9 = 0.02;$ 
 $\alpha_{10} = 0.03;$ 
 $\alpha_{11} = 0.4;$ 
 $\alpha_{12} = 0.00;$ 
 $\mu = 0.6;$ 
 $ep = 100;$ 
 $ea = 100;$ 
 $u = 1;$ 
 $eb = 0;$ 
```

Primer punto de equilibrio

```
In[319]:= Js1 = { JSc1[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2}$ ],
  JSc2[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2}$ ], JSc3[ $\frac{\mu}{\alpha_{10}}, 0, -\frac{-\alpha_1 \alpha_{10} + \alpha_4 \mu}{\alpha_{10} \alpha_2}$ ]};
```

```
Js1 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Js1] // MatrixForm
```

```
Out[320]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.16 & 0.18 & -0.18 \\ 0. & 3.6 & 0 \\ 1.46667 & -19.5556 & 0. \end{pmatrix}$$

```
Out[321]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 3.6 + 0. i \\ -0.08 + 0.507543 i \\ -0.08 - 0.507543 i \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

$$\text{In[322]:= Js2} = \left\{ \text{JSc1}\left[\frac{\alpha 1}{\alpha 4}, 0, 0\right], \text{JSc2}\left[\frac{\alpha 1}{\alpha 4}, 0, 0\right], \text{JSc3}\left[\frac{\alpha 1}{\alpha 4}, 0, 0\right] \right\};$$

Js2 // MatrixForm

Eigenvalues[Js2] // MatrixForm

Out[323]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.675 & -0.675 \\ 0. & 1.125 & 0 \\ 0. & 0. & 1.65 \end{pmatrix}$$

Out[324]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.65 \\ 1.125 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

$$\text{In[325]:= Js3} = \left\{ \text{JSc1}\left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0\right], \text{JSc2}\left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0\right], \text{JSc3}\left[0, \frac{\alpha 6}{\alpha 9}, 0\right] \right\};$$

Js3 // MatrixForm

Eigenvalues[Js3] // MatrixForm

Out[326]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.625 & 0. & 0. \\ -10.125 & -4.5 & 0 \\ 0. & 0. & -90.6 \end{pmatrix}$$

Out[327]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -90.6 \\ -4.5 \\ 2.625 \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio

$$\begin{aligned}
 \text{In[328]:= } Js4 = & \left\{ JSc1 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right. \right. \\
 & \left. \left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right], JSc2 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right. \right. \\
 & \left. \left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right], \right. \\
 & JSc3 \left[-\frac{-\alpha_9 \mu - \alpha_6 \alpha_{11}}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, -\frac{-\alpha_{10} \alpha_6 + \alpha_8 \mu}{\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11}}, \right. \\
 & \left. \left. -\frac{-\alpha_{10} \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_5 \alpha_8 \mu + \alpha_4 \alpha_9 \mu + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{11}}{\alpha_2 (\alpha_{10} \alpha_9 + \alpha_8 \alpha_{11})} \right] \right\};
 \end{aligned}$$

Js4 // MatrixForm

Eigenvalues[Js4] // MatrixForm

Out[329]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.779355 & 0.876774 & -0.876774 \\ -0.26129 & -0.116129 & 0 \\ -0.423656 & 5.64875 & -8.88178 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Out[330]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.888769 + 0.852128 i \\ -0.888769 - 0.852128 i \\ 0.882054 + 0. i \end{pmatrix}$$

Quinto punto de equilibrio

$$\text{In[331]:= } Js5 = \{JSc1[0, 0, 0], JSc2[0, 0, 0], JSc3[0, 0, 0]\};$$

Js5 // MatrixForm

Eigenvalues[Js5] // MatrixForm

Out[332]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0. & 0. \\ 0. & 4.5 & 0 \\ 0. & 0. & -0.6 \end{pmatrix}$$

Out[333]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4.5 \\ -0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Sexto punto de equilibrio

```
In[334]:= Js6 = {JSc1[- $\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , - $\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , 0],
  JSc2[- $\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , - $\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , 0], JSc3[- $\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , - $\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , 0]};
```

```
Js6 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Js6] // MatrixForm
```

```
Out[335]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.743363 & 0.836283 & -0.836283 \\ -0.716814 & -0.318584 & 0 \\ 0. & 0. & -4.18407 \end{pmatrix}$$

```
Out[336]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -4.18407 + 0. i \\ -0.530973 + 0.744547 i \\ -0.530973 - 0.744547 i \end{pmatrix}$$

```
In[337]:= Clear[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, ep, ea, u, eb ]
```

Caso 6

```
In[338]:= \alpha_1 = 0.03;
```

```
\alpha_4 = 0.008;
```

```
\alpha_5 = 0.009;
```

```
\alpha_6 = 9.0;
```

```
\alpha_8 = 0.095;
```

```
\alpha_9 = 0.02;
```

$$ep = -\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9};$$

$$ea = -\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9};$$

```
In[346]:= ep
```

```
Out[346]=
```

```
80.3941
```

```
In[347]:= ea
```

```
Out[347]=
```

```
68.1281
```

Primer punto de equilibrio

```
In[348]:= Jf1 = {Jf11[ $\frac{\alpha 1}{\alpha 4}$ , 0], Jf12[ $\frac{\alpha 1}{\alpha 4}$ , 0]};
```

```
Jf1 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jf1] // MatrixForm
```

```
Out[349]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.03 & 0.03375 \\ 0. & 8.64375 \end{pmatrix}$$

```
Out[350]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 8.64375 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

Segundo punto de equilibrio

```
In[351]:= Jf2 = {Jf11[0, 0], Jf12[0, 0]};
```

```
Jf2 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jf2] // MatrixForm
```

```
Out[352]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0. \\ 0. & 9. \end{pmatrix}$$

```
Out[353]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 9. \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

Tercer punto de equilibrio

```
In[354]:= Jf3 = {Jf11[0,  $\frac{\alpha 6}{\alpha 9}$ ], Jf12[0,  $\frac{\alpha 6}{\alpha 9}$ ]};
```

```
Jf3 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jf3] // MatrixForm
```

```
Out[355]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4.08 & 0. \\ -42.75 & -9. \end{pmatrix}$$

```
Out[356]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -9. \\ 4.08 \end{pmatrix}$$

Cuarto Punto de equilibrio


```
In[357]:= Jf4 = {Jf11[- $\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , - $\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ ], Jf12[- $\frac{-\alpha_5 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_9}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ , - $\frac{-\alpha_4 \alpha_6 + \alpha_1 \alpha_8}{\alpha_5 \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_9}$ ]};
```

```
Jf4 // MatrixForm
```

```
Eigenvalues[Jf4] // MatrixForm
```

```
Out[358]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.643153 & 0.723547 \\ -6.47217 & -1.36256 \end{pmatrix}$$

```
Out[359]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1.00286 + 2.1339 i \\ -1.00286 - 2.1339 i \end{pmatrix}$$

```
In[360]:= Clear[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \mu, ep, ea, u, eb ]
```