Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# INTRODUCCIÓN A LOS HIPERESPACIOS DE GROMOV-HAUSDORFF

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Fernán Ulises Castelán Acastenco

TUTOR

Dr. Sergey Antonyan

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

*Dedicatoria ...*

*A todos aquellos que me acompañaron en el camino.*

# Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que contribuyeron a la realización de esta tesis. Sin su apoyo, dedicación y orientación, este logro no habría sido posible.

A mis padres, Juan Antonio y Dulce, quienes siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo constante. Este logro es un testimonio de su inmenso amor y dedicación. Agradezco por las lecciones de vida que me han impartido y por el cariño que siempre me han dado. Mi gratitud hacia ustedes es imposible de expresar completamente. Esta tesis es un tributo a su legado y a la eterna admiración que siento por ustedes.

A mi hermana Marianne, cuya paciencia y ojo meticuloso ayudaron a corregir la escritura y pulir los detalles de este trabajo. Gracias por ser mi compañera en este viaje académico.

A mi tía Diana, quien me recibió en la ciudad con los brazos abiertos. Su apoyo y hospitalidad hicieron posible que me adaptara.

A mis compañeros, sobre todo a mis compañeros de de estudio, Ricardo, Kevin, Luis y Julio. Juntos compartimos no solo conocimientos, sino también risas, desafíos y momentos inolvidables. Nuestras discusiones matemáticas y nuestras tardes resolviendo problemas fueron fundamentales para mi crecimiento.

A mis estimados profesores, quienes me guiaron con sabiduría y paciencia. Sus conocimientos y consejos fueron fundamentales para mi crecimiento académico. Esta tesis es un reflejo de su influencia en mi formación, sobre todo, a mi asesor, el Dr.

Sergey Antonyan, cuya guía fue esencial en todo el proceso. Gracias por compartir su conocimiento y por motivarme a dar lo mejor de mí.

A mis sinodales, la Dra. Natalia, el Dr. Pierre, el Dr. Vinicio y la Dra. Sonia. Sus comentarios, correcciones y sugerencias enriquecieron este trabajo y me ayudaron a alcanzar un nivel superior. Aprecio su compromiso con la excelencia académica.

Finalmente, mi gratitud hacia PAPIIT, por la beca que recibí de su parte. Sin su apoyo financiero, este trabajo no habría sido posible.

# Resumen

Este trabajo, como su nombre ya lo anuncia, busca poder dar una introducción a los Hiperespacios de Gromov-Hausdorff, los cuales son herramientas muy útiles para el estudio de familias de espacios métricos. Principalmente, se enfocará en el Espacio o Hiperespacio de Gromov-Hausdorff ($\mathbb{GH}$, $d_{GH}$), la métrica que este posee ($d_{GH}$), y una de las formas en que se relaciona con el Espacio Universal de Urysohn (a través del espacio de órbitas de su hiperespacio, generado por el grupo de isometrías del Espacio Universal de Urysohn actuando en él). Para poder llegar a esto, primero se hará una breve presentación del Espacio Universal de Urysohn y de los G-espacios, luego, se abordará la distancia de Hausdorff y los Hiperespacios, para así poder pasar a la distancia de Gromov-Hausdorff y a la convergencia de espacios métricos en términos de ésta. Por último, teniendo estás nociones se podrá hacer la introducción al Hiperespacio de Gromov-Hausdorff.

# Introducción

*Mathematics is concerned with understanding the differences between similar things, and what is shared by different things.*

James Joseph Sylvester, *English mathematician*, 1814–1897

Las matemáticas son algo mucho más grande y hermoso de lo que la mayor parte de la gente suele pensar, y los matemáticos hacen mucho más de lo que se cree comúnmente. Aún recuerdo mi curso de Geometría Analítica I, en el que el profesor nos incitaba a ponernos *los lentes de clases de equivalancia* para después señalar dos flechas en el pizarrón y decir que con estos *lentes* las flechas eran indistinguibles y representaban al mismo vector. También nos contó que los matemáticos se dedicaban a clasificar y contar. En ese momento no entendí aquellas palabras, no fue así hasta que con el paso del tiempo y mi eventual mayor interacción con las matemáticas, estudiando áreas como el álgebra y la topología, que pude encontrar mayor sentido a estas palabras.

Aunque reconozco que la labor matemática va mucho más allá de solo clasificar y contar, también soy conciente de la particular importancia de este par de actividades. Centrándonos principalmente en la actividad de clasificar, un pregunta que podemos plantearnos es ¿bajo qué criterios se clasifican los objetos matemáticos? Entonces, procedemos a buscar las características que comparten o distinguen a estos objetos, como señala la frase de James Joseph Sylvester, citada al principio. En el proceso de clasificación de los diversos objetos matemáticos y el estudio de sus propiedades y características surgen conceptos y herramientas que son esenciales en la realización de esta tarea.

En este trabajo los objetos de interés son los espacios métricos, especialmente los espacios compactos. Como objetivo final vamos a hacer una introducción a los Hiperespacios de Gromov-Hausdorff. La principal herramienta a utilizar es la distancia de Gromov-Hausdorff $d_{GH}$, la cual resulta muy conveniente en el estudio de propiedades topológicas de familias de espacios métricos. Es por eso que, en gran parte, nos vamos a dedicar a hablar de este maravilloso instrumento que introdujo Gromov en el Congreso Internacional de Matemáticas que se celebró en Helsinki, Finlandia, en 1978; concepto que dos años después retomaría en su libro [6].

La metodología será, en principio, introducir la distancia Hausdorff ($d_H$) y los hiperespacios. La primera nos dice cuan parecidos son dos subconjuntos de un mismo espacio métrico. Los hiperespacios serán el conjunto de subconjuntos compactos no vacíos de un espacio, conjunto que, dotado con $d_H$ resulta también en un espacio métrico, pero no queremos estar restringidos a subconjuntos de un espacio métrico, así que, con el fin de generalizar la distancia Hausdorff, es como llegaremos a la distancia de Gromov-Hausdorff, que nos ayudará a comparar cualesquiera dos espacios métricos compactos. Al cabo de tener esta distancia definida y estudiarla, nuestro objetivo será encontar un espacio para el que esta sea una métrica. Con lo que obtendremos el hiperespacio de Gromov-Hausdorff ($\mathbb{GH}$).

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo daremos un breve repaso a conceptos que serán de utilidad posteriormente; abordaremos definiciones y propiedades de estos sin hacerlo de manera exhaustiva (no mostraremos de manera explícita su construcción ni demostraremos sus propiedades), con la única intención de tener el entendimiento necesario cuando sea requerido.

## 1.1. Espacio Universal de Urysohn

En esta sección nos encargaremos de dar a conocer al espacio universal de Urysohn, mostrar sus características y propiedades.

Para empezar, diremos que, dado un espacio métrico (X,d), este es un *espacio métrico polaco* si es completo y separable. Los espacios métricos polacos se denominan así porque fueron extensamente estudiados principalmente por varios matemáticos polacos como Banach, Sierpiński , Kuratowski, Ulam, Tarski, entre otros.

La propiedad de ser *universal* también es un concepto interesante. Diremos que un espacio métrico (X,d) es universal (para la clase de espacios métricos separables) si cualquier otro espacio métrico separable (Y,d) se puede encajar de manera isométrica en él. Un ejemplo de un espacio métrico con esta propiedad es $\ell^\infty$ (espacio métrico de las sucesiones acotadas con la métrica del supremo) [3]. Sin embargo, este espacio no es separable, por lo que tampoco es polaco.

Una propiedad más que veremos antes de presentar el espacio universal de Urysohn es la de ser *ultrahomogéneo*. Diremos que un espacio métrico (X,d) es ultrahomogéneo si cualesquier isometría entre dos subespacios métricos finitos de X puede ser extendida a una isometría de todo el espacio X.

**Teorema 1.1.1** *(de Urysohn) Existe un único (salvo isometría) espacio métrico* $\mathbb{U}$ *que satisface las siguientes propiedades:*

**(1)** $\mathbb{U}$ *es polaco.*

**(2)** $\mathbb{U}$ *es universal (para la clase de espacios métricos separables).*

**(3)** $\mathbb{U}$ *es ultrahomogéneo.*

Urysohn introdujo este espacio poco antes de su muerte en 1924. Sus resultados se publicaron de manera póstuma en [14] y [15].

Hay ejemplos de espacios con estas propiedades, principalmente de espacios polacos que tienen la segunda o la tercera propiedad, pero no las tres. Por mencionar algunos podemos señalar C[0,1] para el que el teorema de Banach-Manzur muestra que es universal para la clase de espacios métricos separables, pero no cuenta con la propiedad de ser ultrahomogéneo. Otro espacio que cabe destacar es $\ell^2$, el cual es ultrahomogéneo, sin embargo no es universal. Entonces, lo que hace especial a $\mathbb{U}$ es la conjunción de estas tres propiedades.

Aunque Urysohn hizo la primera construcción de este espacio, posteriormente se hicieron otras, como las dadas por Felix Hausdorff y Miroslav Katětov. La construcción hecha por Katětov dio pie a un mayor interés por parte de la comunidad matemática en el espacio universal de Urysohn, pues era más simple trabajar con esta. Mayor información sobre estas construcciones se puede consultar en [8] y [10].

Una vez introducido el espacio de Urysohn, ahora señalaremos algunas de sus propiedades, pues aunque desde hace tiempo se convirtió en un objeto de estudio importante, aún no se ha mostrado un ejemplo que modele este espacio. No obstante, su topología ya fue descrita en 2004 por Vladimir Uspenskij [16], quien mostró que $\mathbb{U}$ es homeomorfo al espacio de Hilbert $\ell^2$, por lo que este hereda sus propiedades topológicas. Ahora lo enunciaremos como teorema para poder usarlo después.

**Teorema 1.1.2** $\mathbb{U}$ *es homeomorfo al espacio de Hilbert,* $\ell^2$.

Por último cabe destacar la *homogeneidad compacta*, expuesta por Huhunaishvili en [7], y la enunciaremos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.3** *(Huhunaishvili). El espacio universal de Urysohn* $\mathbb{U}$ *es compactamente homogéneo, es decir, dados cualesquiera dos subconjuntos compactos isométricos* $A, B \subset \mathbb{U}$*, toda isometría* $f : A \to B$ *se extiende a una isometría global* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$*.*

## 1.2. G-espacios

En la parte final del trabajo hablaremos de espacios de órbitas por lo que en esta sección nos encargaremos de recordar los conceptos necesarios para poder abordarlos.

### 1.2.1. Grupo topológico

Antes de definir las acciones de grupo determinaremos qué es un grupo topológico.

A la terna $(G, \tau, \circ)$ (donde $G$ es un conjunto, $\circ$ es una operación binaria de $G$, y $\tau$ es una topolgía en $G$) la llamamos grupo topológico si cumple las siguientes propiedades:

- $(G, \circ)$ es un grupo.

- $(G, \tau)$ es un espacio topológico.
- $\circ : G \times G \to G$ es continua.
- $(\ )^{-1} : G \to G$ (la inversión) es continua.

A continuación algunos ejemplos de grupos topológicos:

- Todo grupo $G$ equipado con la topología discreta es un grupo topológico.
- $\mathbb{R}$ con la suma y la topología usual es un grupo topológico.

A partir de aquí, si no hay ambigüedad, simplemente diremos que G es un grupo topológico.

No debería sorprendernos que la continuidad de las operaciones del grupo dote al espacio de propiedades topológicas muy interesantes . A continuación enunciamos algunos teoremas que ilustran esto.

**Teorema 1.2.1** *Si $G$ es un grupo topológico y $g \in G$ un elemento arbitrario, entonces las siguientes funciones son homeomorfismos:*

1. *$\phi_g : G \to G$ tal que $\phi_g(x) = gx$ (traslación izquierda).*
2. *$\sigma_g : G \to G$ tal que $\sigma_g(x) = xg$ (traslación derecha).*

**Teorema 1.2.2** *Todo grupo topológico $G$ es un espacio homogéneo (es decir, para cualesquiera $g$ y $h$ elementos de $G$ existe un homeomorfismo $f$ tal que f(g)=h)*

Este par de teoremas nos muestran una de las ventajas que tenemos al conjugar las estructuras de grupo y de espacio topológico, la cual es que el estudio de propiedades locales del espacio se puede restringir al estudio de estas en un punto en particular (que puede ser el neutro del grupo para hacer el trabajo más sencillo). Al ser suficiente esta introducción para los fines de este trabajo, el lector más interesado en este tema puede consultar [13].

### 1.2.2. Acciones de grupos

Ahora que ya sabemos lo que es un grupo topológico podemos definir las acciones de grupo y los conceptos que derivan de estas, entre ellos el espacio de órbitas.

Dados $G$ un grupo topológico (con neutro $e$) y $X$ un espacio topológico, una acción de $G$ en $X$ es una función continua $\Theta : G \times X \to X$ que cumple las siguientes propiedades:

1 $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$

2 $\Theta(e, x) = x$

Si existe una acción $\Theta$ de $G$ en $X$, diremos que $G$ actúa en $X$ (por medio de la acción $\Theta$), y lo denotaremos como: $G \curvearrowright_{\Theta} X$. Además, en este caso, diremos que $X$ es un *$G$-espacio* (bajo la acción $\Theta$). Para simplificar la notación, escribiremos $gx$ en vez de $\Theta(g, x)$.

El estabilizador y la órbita de un punto, por su parte, son dos conjuntos importantes que surgen de las acciones de grupo. Entonces, dado $x$ un punto de $X$ los siguientes conjuntos se definen de la siguiente manera:

1) $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ la *órbita de $x$*.

2) $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ el *estabilizador de $x$* o *grupo estacionario de $x$*.

A partir de la definición no es difícil observar que las órbitas del espacio son iguales o tienen intersección vacía, por lo que estas forman una partición del espacio. Entonces podemos considerar el conjunto cociente

$$X/G := \{G(x) \mid x \in X\}.$$

Además si a este conjunto lo dotamos de la topología cociente y definimos la función $\rho : X \to X/G$ tal que $\rho(x) := G(x)$, resulta que esta última es continua y abierta. A $\rho$ se le conoce como *proyección orbital* y a $X/G$ espacio de órbitas .

Ahora, del hecho de que $\rho$ es abierta se sigue el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.3** *Se cumplen las siguientes proposiciones.*

*(1) Si $X$ es conexo, localmente conexo, compacto o localmente compacto también lo es $X/G$ en cada caso.*

*(2) Si $X$ es I o II numerable entonces $X/G$ también lo es en ambos casos respectivamente.*

Por último, señalaremos la relación entre un $G-$espacio métrico y su espacio de órbitas.

Dado un $G-$espacio métrico $(X, d)$ diremos que este es *G-invariante* si para cada $g \in G$ y para todas $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d(gx, gy)$. Esto quiere decir que $g$ es una isometría para $X$ respecto a la métrica $d$.

**Teorema 1.2.4** *Si $(X, d)$ es un $G-$espacio cuya métrica lo hace $G-$invariante, y cualquier órbita es cerrada en $X$, entonces*

$$\hat{d}(G(x), G(y)) = \inf_{g \in G} \{d(x, gy) \mid G(x), G(y) \in X/G\}$$

*es una métrica para $X/G$.*

Una demostración de este teorema la podemos encontrar en [12] como parte de la demostración del teorema 4.3.4.

## 1.3. El grupo de isometrías del espacio universal de Urysohn

Otra de las características que nos interesa del espacio universal de Urysohn es su grupo de isometrías $ISO(\mathbb{U})$. Donde este está definido como:

$$ISO(\mathbb{U}) := \{f : \mathbb{U} \to \mathbb{U} \mid f \text{ es isometría}\}.$$

Este conjunto es grupo si lo dotamos con la operación composición y, además, lo equipamos con la topología de la convergencia puntual, que es la topología generada por la sub-base formada por elementos de la siguiente manera:

$$M(x, U) := \{f \in ISO(\mathbb{U}) \mid f(x) \in U\}$$

Donde $x$ es un punto de $\mathbb{U}$ y U es un subconjunto abierto de $\mathbb{U}$.

Otra topología útil es la compacto-abieta, en la que los conjuntos sub-básicos son de la forma:

$$M(K, V) := \{f \in ISO(\mathbb{U}) \mid f(K) \subset V\}$$

donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{U}$, y V es un subconjunto abierto.

Como consecuencia de que $ISO(\mathbb{U})$ es una familia equicontinua tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.1** *La topología de convergencia puntual y la topología compacto-abierta coinciden en* $ISO(\mathbb{U})$.

El teorema anterior se puede ver con mayor detalle en la página 229 de [11].

Además, si equipamos al grupo de isometrías $ISO(\mathbb{U})$ con alguna de estas topologías, resulta en un grupo topológico. Esto lo enunciamos en el siguiente teorema, que podemos consultar en [17].

**Teorema 1.3.2** $ISO(\mathbb{U})$ *equipado con la topología de la convergencia puntual es un grupo topológico, es polaco, y cuenta con una base numerable.*

**Corolario 1.3.3** $ISO(\mathbb{U})$ *es I-numerable.*

Este resultado es una consecuencia inmediata de la existencia de una base numerable para $ISO(\mathbb{U})$.

# Capítulo 2

# Distancia de Hausdorff e hiperespacios

En este capítulo haremos una introducción a lo que es la distancia de Hausdorff, la cual es importante para posteriormente definir la distancia de Gromov-Hausdorff. También hablaremos del hiperespacio de un espacio métrico, el cual es un concepto íntimamente ligado a esta distancia, puesto que probaremos que la distancia de Hausdorff es una métrica para este.

## 2.1. Distancia de Hausdorff

La distancia de Hausdorff mide la distancia entre subconjuntos de un mismo espacio métrico. Consideremos, pues, un espacio métrico $(X, d)$ y sea $S$ un subconjunto arbitrario de $X$. Denotaremos como $U_r(S)$ a la vecindad de radio $r$ alrededor de $S$. Es decir, los puntos $x$ tales que la distancia de $x$ a $S$ es menor a $r$,

$$U_r(S) = \{x \epsilon X | d(x, S) < r\}.$$

Además, podemos ver que claramente se cumple la siguiente igualdad: $U_r(S) := \bigcup_{x \epsilon S} B_r(x)$.

Ahora, dados A y B subconjuntos de un mismo espacio métrico, definimos la *distancia de Hausdorff* entre ellos (que se denota $d_H(A,B)$) como:

$$d_H(A,B) = inf\{r > 0 : A \subseteq U_r(B) \ \ y \ \ B \subseteq U_r(A)\}$$

Ahora probaremos una equivalencia que nos hará más fácil trabajar con esta distancia.

**Proposición 2.1.1** *Dado (X,d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$, entonces se cumple lo siguiente:*

$$d_H(A,B) = \text{máx}\{\sup_{a \epsilon A} d(a,B), \sup_{b \epsilon B} d(b,A)\}.$$

**Demostración:**

Llamemos $\lambda$ a $\text{máx}\{\sup_{a \epsilon A} d(a,B), \sup_{b \epsilon B} d(b,A)\}$. Vamos a probar que $\lambda$ es el ínfimo del conjunto $R := \{r > 0 : A \subseteq U_r(B) \ \ y \ \ B \subseteq U_r(A)\}$.

Primero probaremos que $\lambda$ es una cota inferior para $R$. Es decir, que para todo elemento $r$ en el conjunto $R$ se tiene que $\lambda \leq r$. En este caso, procederemos a probar que si $r < \lambda$, entonces $r$ no está en $R$, lo cual es equivalente.

Sea $r < \lambda$, entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r < \sup_{a \epsilon A} d(a,B)$, por lo que existe $a \in A$ tal que $r < d(a,B)$, y por consiguiente no existe $b \in B$ de tal manera que $a \in B_r(b)$, así $A \nsubseteq U_r(B)$. Por lo tanto $r$ no está en $R$ y así $\lambda$ es cota inferior.

Ahora probaremos que $\lambda$ es la cota inferior más grande. Para hacer esto, mostraremos que cualquier número mayor a $\lambda$ se encuentra dentro del conjunto $R$. Esto es suficiente porque de suponer a $\lambda'$ otra cota inferior más grande, entonces tenemos que cualquier número entre $\lambda$ y esta cota $\lambda'$ también está en $R$. Por ello, $\lambda'$ no podría ser cota inferior.

Sea $r > \lambda$. Entonces, $r > \sup_{a \epsilon A} d(a, B)$. Consecuentemente, para cualquier $a \in A$ tenemos que $r > d(a, B)$. Se sigue que $A \subseteq U_r(B)$; de manera similar $B \subseteq U_r(A)$. Por lo tanto, $r \in R$ y $\lambda$ es la cota inferior más grande de $R$.

Así, tenemos que $\lambda$ es el ínfimo de $R$, y por cómo definimos la distancia de Hausdorff, se cumple que:

$$d_H(A, B) = \text{máx}\{\sup_{a \epsilon A} d(a, B), \sup_{b \epsilon B} d(b, A)\}.$$

□

**Corolario 2.1.2** *$d_H(A, B) \leq r$ si y solo si para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ sucede que $d(a, B) \leq r$ y $d(b, A) \leq r$.*

**Demostración:**

Supongamos que $d_H(A, B) \leq r$. Por la Proposición 2.1.1 tenemos que:

$$\text{máx}\{sup_{a \epsilon A}\, d(a, B), sup_{b \epsilon B}\, d(b, A)\} \leq r$$

Entonces $\sup_{a \epsilon A} d(a, B) \leq r$, por lo que $d(a, B) \leq r$ para toda $a \in A$. Similarmente, $d(b, A) \leq r$ para toda $b \in B$.

Ahora, si suponemos que $d(a, B) \leq r$ para toda $a \in A$ y que $d(b, A) \leq r$ para toda $b \in B$, tendremos que $sup_{a \epsilon A}\, d(a, B) \leq r$ y que $sup_{b \epsilon B}\, d(b, A) \leq r$. Entonces de nuevo por la Proposición 2.1.1 se cumple que $d_H(A, B) \leq r$. □

Es inevitable pensar que $d_H$ es una métrica de algún espacio, pues, hasta ahora, hemos pensado esta función como una distancia, que además, claramente cumple con ser no negativa y simétrica. Y, dado que esta función depende del espacio métrico $(X, d)$, el primer candidato para el que $d_H$ es métrica debe ser $\mathbb{P}(X)$ (el conjunto potencia de $X$) ya que en él los subconjuntos de $X$ son elementos. Sin embargo, la siguiente proposición nos muestra que la distancia de Hausdorff a lo más que aspira en $\mathbb{P}(X)$ es a ser una pseudo-métrica.

**Proposición 2.1.3** *$d_H(A, \overline{A}) = 0$ para todo $A \subseteq X$, donde $\overline{A}$ denota a la cerradura de $A$.*

**Demostración:**

Por la Proposición 2.1.1 basta ver que se cumple la siguiente igualdad:

$$\text{máx}\{\sup_{a \epsilon A} d(a, \overline{A}), \sup_{a' \epsilon \overline{A}} d(a', A)\} = 0.$$

Evidentemente, $\sup_{a \epsilon A} d(a, \overline{A}) = 0$. Entonces, probaremos que $sup_{a' \epsilon \overline{A}} d(a', A) = 0$. Tomemos $a' \in \overline{A} \setminus A$ pues en el caso de que $a'$ estuviera en la intersección sería claro que $d(a', A) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, como $a' \in \overline{A}$, existe un elemento $a$ tal que $a \in A \cap B_\varepsilon(a')$. Luego, $d(a, a') < \varepsilon$, y, como $a'$ y $\varepsilon$ fueron arbitrarios, deducimos que $sup_{a' \epsilon \overline{A}} d(a', A) = 0$.

□

**Proposición 2.1.4** *(Desigualdad del triángulo) Dados $A, B, C \subseteq X$ y (X,d) un espacio métrico, se cumple la siguiente desigualdad: $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$.*

**Demostración:**

Para probar esta proposición veremos que si $r > d_H(A, B) + d_H(B, C)$, entonces $A \subseteq U_r(C)$ y $C \subseteq U_r(A)$. De aquí se sigue que $d_H(A, B) + d_H(B, C) \not< d_H(A, C)$, pues lo opuesto contradice la cualidad de ínfimo por la que está definida $d_H(A, C)$.

Sea $r > d_H(A, B) + d_H(B, C)$, entonces $r = d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$.

Es claro que si $r_1 := d_H(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $r_2 := d_H(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos las siguientes contenciones:

1. $A \subseteq U_{r_1}(B)$,
2. $B \subseteq U_{r_2}(C)$.

Sea $a \in A$. En consecuencia de las contenciones 1 y 2 existen $b \in B$ y $c \in C$ tales que: $d(a,b) < r_1$ y $d(b,c) < r_2$. Luego, por la desigualdad del triángulo de la métrica $d$, se deduce que $d(a,c) < r_1 + r_2$. Finalmente, como $a$ fue un punto arbitrario, $A \subseteq U_{r_1+r_2}(C)$.

Análogamente se prueba que $C \subseteq U_{r_1+r_2}(A)$. Por otra parte, recordemos que $r_1 + r_2 = d_H(A,B) + d_H(B,C) + \varepsilon = r$, y entonces, $A \subseteq U_r(C)$ y $C \subseteq U_r(A)$, que era lo que queríamos probar, por lo tanto:

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

. □

**Corolario 2.1.5** *Sea (X,d) un espacio métrico y* $A, B \subseteq X$*, entonces* $\overline{A} = \overline{B}$ *si y solo si* $d_H(A,B) = 0$*.*

**Demostración:**

1. $\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d_H(A,B) = 0$ es un resultado directo de aplicar las proposiciones 2.1.3 y 2.1.4.

2. Ahora, supongamos que $d_H(A,B) = 0$, entonces, para toda $r > 0$ se tiene que $d_H(A,B) < r$. Luego, por el Corolario 2.1.2, $d(a,B) \leq r$ y $d(b,A) \leq r$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, entonces, $d(a,B) = 0$ y $d(b,A) = 0$. Es decir, todo punto de A es punto de adherencia de B y viceversa. Por lo tanto, $\overline{A} = \overline{B}$. □

**Corolario 2.1.6** *Si (X,d) es un espacio métrico y* $A, B \subseteq X$ *cerrados tales que* $d_H(A,B) = 0$*, entonces A=B.*

Con estos resultados, si denotamos como $\mathfrak{M}(X)$ al conjunto de subconjuntos cerrados de X, es claro que $(\mathfrak{M}(X), d_H)$ sí es un espacio métrico, sin embargo, hay que notar que hay conjuntos que pudieran distar infinito, por ejemplo si tomamos $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$ y $B = \mathbb{R}$ la distancia Hausdorff entre $A$ y $B$ sería infinito. Además, esto nos permite restringir el espacio en el que estamos trabajando. Más aún, si consideramos el espacio cociente ${}^{\mathbb{P}(X)}/_{d_H}$, este se identifica naturalmente con $\mathfrak{M}(X)$.

**Proposición 2.1.7** *Dada una sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mathfrak{M}(X)$ que converge a $A \in \mathfrak{M}(X)$, entonces:*

1. A es el conjunto de todos los límites de sucesiones convergentes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X tales que $a_i \in A_i$.
2. $A = \cap_{n=1}^{\infty}(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m})$.

**Demostración:**

1. Sea $B = \{b \mid a_i \to b, a_i \in A_i\}$, ahora probaremos que A=B.

Tomemos una sucesión de elementos de $B$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $b_i \to \beta$.

Como cada $b_i \in B$, existen sucesiones $(a_j^i)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $a_j^i \to b_i$. Ahora, construiremos una sucesión de elementos $a_i \in A_i$ que converja a $\beta$. La construiremos de forma recursiva. Primero, para $b_i$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_i$ entonces $d(a_n^i, b_i) < 1/i$. Después, definimos una sucesión de naturales $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tal que:

- $m_1 = n_1$.
- $m_{j+1} = \begin{cases} n_{j+1} & si \quad n_{j+1} > m_j \\ \\ m_j + 1 & si \quad n_{j+1} \leq m_j. \end{cases}$

Así, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y, además, $m_j \geq n_j$.

Ahora definiremos nuestra sucesión $(\alpha_k)$ de la siguiente forma:

$$\alpha_k = a_k^i \text{ para } m_i \leq k < m_{i+1} \text{ y } \alpha_k = a_k^1 \text{ para } k \leq m_1.$$

Por cómo está definida la sucesión y por la convergencia de $(b_i)$ a $\beta$, no es difícil probar que $(\alpha_k)$ converge a $\beta$. Por lo tanto, $B \in \mathfrak{M}(X)$.

Ahora probaremos que $d_H(A, B) = 0$. Teniendo esto, en virtud del corolario anterior, tendremos la igualdad buscada.

Sea $\epsilon > 0$. Para cualquier $b \in B$ podemos considerar $B_{\epsilon/2}(b)$. Entonces por la manera en la que son los elementos de $B$, existe una $i$ a partir de la cual $A_i \cap B_{\epsilon/2}(b) \neq \emptyset$. Entonces, tenemos que $d(A_i, b) < \epsilon/2$. De forma similar para $a_i \in A_i$, tenemos $d(a_i, B) < \epsilon/2$, pues podemos elegir una sucesión convergente de términos de $A_i$ en la que $a_i$ forme parte y aplicar un argumento como el anterior. Luego, en consecuencia del Corolario 2.1.2, se cumple que $d_H(A_i, B) < \epsilon/2$, siempre que $i$ sea lo suficientemente grande.

También, si $i$ es suficientemente grande, tendremos que $d(A_i, A) < \epsilon/2$, puesto que $A_i \to A$.

Y, gracias a la Proposición 2.1.4 (*Desigualdad del triángulo*), tenemos que

$$d(A, B) < d(A, A_i) + d(A_i, B)$$
$$d(A, B) < \epsilon/2 + \epsilon/2$$
$$d(A, B) < \epsilon$$

Y, como $\epsilon$ es arbitraria positiva, entonces:

$$d_H(A, B) = 0.$$

2. Para este punto probaremos la doble contención.

Sea $x \in A$. Entonces, por el punto anterior existe $(a_i)$ con $a_i \in A_i$ tal que $a_i \to x$. Esto quiere decir que $x \in \overline{\cup_{i=1} A_i}$. Luego, podemos construir sucesiones $(a_i^n)$ tales que para cada $n$ fija:

$$a_i^n = \begin{cases} a_i & si \quad i \geq n \\ \\ a_n & si \quad i < n. \end{cases}$$

No es difícil notar que $a_i^n \to x$, y además, $(a_i^n) \subset \cup_{i=n} A_i$ para cada una de las $n$. Por lo tanto, $x \in \overline{\cup_{i=n} A_i}$ para toda $n$. Con esto concluimos que $x \in \cap_{n=1}^{\infty}(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m})$, y, así, $A \subset \cap_{n=1}^{\infty}(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m})$.

Sea $x \in \cap_{n=1}^{\infty}(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m})$. Podemos construir $(x_{j_k})$ tal que: $x_{j_k} \to x$, $j_k$ es creciente y $x_{j_k} \in A_{j_k}$. Luego, como $A_i \to A$ respecto a $d_H$, para cada $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ que cumple que $d(A_p, A_q) < \epsilon$ si $m, n > N$. Entonces, definimos $\epsilon_k = \text{máx}_{j_k < l < j_{k+1}}\{d_H(A_{j_k}, A_l)\}$, y esta sucesión es no creciente y converge a 0. Así, podemos definir $(x_j)$ tal que $(x_{j_k}) \subset (x_j)$ eligiendo los puntos de tal manera que $x_j \in A_j$ mientras que para $j_k < l < j_{k+1}$ tengamos $d(x_{j_k}, x_l) < \epsilon_k$. Claramente, esta sucesión converge a $x$ y por sus características tenemos $x \in A$.

Por lo tanto, $A = \cap_{n=1}^{\infty}(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m})$. $\square$

## 2.2. Hiperespacios

Dado $(X, d)$ un espacio métrico, al conjunto de todos los subconjuntos compactos no vacíos de este lo denotaremos por $2^X$, mientras que a $(2^X, d_H)$ lo llamaremos hiperespacio de $X$. Por otra parte, si no hay confusión, solamente escribiremos $2^X$ cuando queramos referirnos a este.

$$2^X = \{A \subset X | \text{A es compacto y no vacío } \}.$$

Si recordamos que todo subespacio compacto de un espacio métrico es también cerrado, tenemos que los teoremas sobre la distancia Hausdorff que probamos en la sección anterior se siguen cumpliendo. Con esto tenemos que el par $(2^X, d_H)$ es un espacio métrico.

Probaremos algunas relaciones entre un espacio métrico $X$ y su hiperespacio $2^X$ que nos serán de ayuda en el estudio de las propiedades topológicas de este último (ver [19]). Pero, primero nos enfocaremos en otras propiedades.

Primero, veamos algunas funciones que serán necesarias más adelante.

**Proposición 2.2.1** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ dada por: $2^f(A) = f(A)$, es continua.*

**Demostración:**

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $2^X$ tal que converge a $A \in 2^X$.

Observemos que $\bar{A} := \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ es igual a $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y que además, $\bar{A}$ es compacto. Para esto tomemos $U$ una cubierta abierta de $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Luego, como $A$ es compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{U}$ para este. Además, debe existir $c > 0$ tal que $B_c(A) \subset \mathcal{U}$ y como $A_n \to A$ y cada $A_n$ es compacto, es fácil deducir que para $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ existe una subcubierta finita también. Después, por la Proposición

2.1.7 es evidente que $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bar{A}$, pero como $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ que es denso en $\bar{A}$, está contenida en $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bar{A}$ (compacto), entonces $\bar{A} \subset A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y por lo tanto son iguales.

Así, la restricción de $f$ a $\bar{A}$ es uniformemente continua y para $x, y \in \bar{A}$, existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

Ahora, sean $E, D \subset \bar{A}$ compactos no vacíos, se sigue que $d_{X_H}(D, E) < \delta$ implica $d_{X_H}(f(D), f(E)) < \varepsilon$. Por lo que $2^f(A_n) \to 2^f(A)$. $\square$

Ahora, introduzcamos una notación que ocuparemos enseguida. Consideremos un espacio métrico $X$. Denotaremos por $2^{2^X}$ al hiperespacio de todos los subconjuntos compactos de $2^X$. Si $\mathcal{A}$ es un elemento de $2^{2^X}$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ denotará el siguiente subconjunto de X:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

**Proposición 2.2.2** *Sea $X$ un espacio métrico y $\mathcal{A}$ un elemento de $2^{2^X}$. Entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto en $X$.*

**Demostración:**

Consideremos a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\bigcup \mathcal{A}$. Probaremos que esta tiene una subsucesión convergente en $\bigcup \mathcal{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $x_n \in A_n$. Luego, por la compacidad de $\mathcal{A}$ en $2^X$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a algún $A \in \mathcal{A}$. Por el lema 1.11.3 (ver [19]) tenemos que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es compacto. Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, supongamos, sin pérdida de generalidad, que converge al elemento $x$. Además, como $A$ es el conjunto de todos los límites de sucesiones convergentes de elementos de los $A_n$ (Proposición 2.1.7), entonces, podemos concluir que $x \in A \subset \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto en $X$. $\square$

**Proposición 2.2.3** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces el operador unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ es continuo.*

**Demostración:**

Primero, notemos que $\bigcup$ está bien definido, pues, por la proposición anterior para un $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ $\bigcup \mathcal{A}$ es un compacto en $X$, por lo que $\mathcal{A} \in 2^X$.

Para simplificar la notación, la métrica de Hausdorff en $2^{2^X}$ la escribiremos como $\overline{d}_H$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sean $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in 2^{2^X}$ tales que $\overline{d}_H(\mathcal{E}, \mathcal{F}) < \varepsilon$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{E}$, entonces existe $E \in \mathcal{E}$ de tal forma que $x \in E$. Como $\overline{d}_H(\mathcal{E}, \mathcal{F}) < \varepsilon$, existe $F \in \mathcal{F}$ que cumple con que $d_H(E, F) < \varepsilon$, por lo que $E \subset B_\varepsilon(F)$. Así, debe existir $y \in F$ cuya distancia a $x$ es menor a $\varepsilon$. Evidentemente, $y \in \bigcup \mathcal{F}$, y, por consiguiente

$$\bigcup \mathcal{E} \subset B_\varepsilon(\mathcal{F}).$$

Analogamente

$$\bigcup \mathcal{F} \subset B_\varepsilon(\mathcal{E}).$$

Esto implica que $\overline{d}_H(\bigcup \mathcal{E}, \bigcup \mathcal{F}) < \varepsilon$. Esto quiere decir que el operador unión es una función Lipschitz de constante 1 y, por lo tanto, continua.

□

**Corolario 2.2.4** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $g : X \to 2^Y$ una función continua. Entonces, $\overline{g} : 2^X \to 2^Y$ dada por $\overline{g}(A) = \bigcup_{x \in A} g(x)$ es continua.*

**Demostración:**

$\overline{g}$ es composición de la función $2^g : 2^X \to 2^{2^Y}$ con el opereador unión $U : 2^{2^Y} \to 2^Y$, los cuales son continuos por las proposiciones 2.2.1 y 2.2.3. De aquí se sigue que $\overline{g}$ es continuo. □

Sea $X$ es un espacio métrico. Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente subconjunto de $2^X$:

$$\mathcal{F}_n = \{A \subset X| \ |A| \leq n\}.$$

Observemos que, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ...\mathcal{F}_n \subset ...$

**Proposición 2.2.5** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces, $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ es denso en $2^X$.*

**Demostración:**

Sea $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como $A$ es compacto, existe $\{B_\varepsilon(a_i) | a_i \in A \ y \ \varepsilon > 0\}$ una cubierta finita (supongamos de $n$ elementos). Entonces, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(a_i) = U_\varepsilon(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Además, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A \subset U_\varepsilon(A)$. En consecuencia del corolario 2.1.2 tenemos que $d_H(A, \{a_1, \ldots, a_n\}) < \varepsilon$, por lo que $\{a_1, \ldots, a_n\} \in B_\varepsilon(A) \bigcap \mathcal{F}_\infty$, y, por lo tanto, $\mathcal{F}_\infty$ es denso en $2^X$. □

**Proposición 2.2.6** *Sea $(X, d)$ es un espacio métrico. Si definimos la función $\Phi_n : X^n \to 2^X$ por $\Phi_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$.*

*Entonces:*

*(1) $\Phi_n$ Es continua.*

*(2) $\Phi_n(X^n) = \mathcal{F}_n$.*

*(3) $X$ es homeomorfo a $F_1(X)$.*

**Demostración:**

(1) Sean $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos el abierto básico en $X^n$ dado por $\mathcal{O}_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Tomemos $y \in \mathcal{O}_\varepsilon$, entonces, $d(x_i, y_i) < \varepsilon$, por lo que $\Phi_n(y) \subset U_\varepsilon(x)$ y $\Phi_n(x) \subset U_\varepsilon(y)$. Por lo tanto:

$$d_H(\Phi_n(x), \Phi_n(y)) < \varepsilon.$$

Así, concluimos que $\Phi_n$ es continua, pues $\mathcal{O}_\varepsilon \subset \Phi_n^{-1}(B_\varepsilon(\Phi_n(x)))$.

(2) Claramente, $\Phi_n(X^n) = F_n(X)$, pues cada $\{x_1, ..., x_n\}$ es la imagen bajo $\Phi_n$ de un $(x_1, ..., x_n)$. Si quisieramos un conjunto de menos de $n$ elementos, bastaría repetir

coordenadas en el punto de $X^n$, de tal modo que solo aparecieran (todas) las $x_i$ del conjunto deseado.

(3)Ya tenemos que $\Phi_n$ es continua y suprayectiva. Para el caso $n = 1$ es evidente que también es inyectiva. Veamos que $\Phi_1^{-1}$ es continua. Sea $\{x\} \in F_1(X)$, consideremos $B_\varepsilon(\{x\})$ abierto respecto a $F_1(X)$. Sea $\{y\} \in B_\varepsilon(\{x\})$, entonces $d_H(\{x\}\,\{y\}) < \varepsilon$ y, por como definimos la distancia Hausdorff, tenemos que $y \in U_\varepsilon(\{x\})$ y $x \in U_\varepsilon(\{y\})$, que no es otra cosa que $y \in B_\varepsilon(x)$ y $x \in B_\varepsilon(y)$. Por lo tanto, $d(x, y) < \varepsilon$ y, así, $\Phi_1^{-1}(B_\varepsilon(\{x\})) \subset B_\varepsilon(x)$. Esta contención prueba la continuidad de $\Phi_1^{-1}$.

Entonces, existe un encaje topológico de $X$ en $2^X$ a través de $\Phi_1$. $\square$

**Corolario 2.2.7** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico, y sean $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ subconjuntos no vacíos de $2^X$. Entonces, la función $f : \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \to 2^X$, definida por, $f(A_1, ..., A_n) = A_1 \cup ... \cup A_n$, es continua.*

**Demostración:**

Consideremos al operador unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$. Por la proposición anterior, $g : \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \to 2^{2^X}$, definida como $g(A_1, ..., A_n) = \{A_1, ..., A_n\}$ es continua. Luego, $f = \bigcup \circ g$, y, por lo tanto $f$ es continua. $\square$

Para cada colección de subconjuntos $\mathcal{A}$ de $X$ denotaremos por $\langle \mathcal{A} \rangle$ a la siguiente familia:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \{B \in 2^X \mid B \subset \bigcup \mathcal{A} \text{ y, para cada } A \in \mathcal{A}, A \cap B \neq \emptyset\}.$$

**Proposición 2.2.8** *Si $X$ es un espacio métrico y $\mathcal{A}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos de $X$, entonces $\langle \mathcal{A} \rangle$ es abierto en $2^X$.*

**Demostración:**

Sea $D \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ elegimos un punto $x_A \in A \cap D$. Como $\mathcal{A}$ es finito y cada uno de sus elementos es abierto en $X$, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que

$B_\varepsilon(x_A) \subset A$. Además, como $D \subset \bigcup \mathcal{A}$, podemos escoger $\varepsilon$ suficientemente pequeña para que $B_\varepsilon(D) \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Ahora, si tomamos $E \in 2^X$ tal que $d_H(E, D) < \varepsilon$, enseguida observamos que $E \subset B_\varepsilon \subset \bigcap \mathcal{A}$. Después elegimos un $A \in \mathcal{A}$ arbitrario y, dado que $D \subset B_\varepsilon(E)$, podemos encontrar un $x \in E$ de tal manera que $d(x, x_A) < \varepsilon$, por lo que $x \in B_\varepsilon(x_A)$ y, a su vez, $E \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $E \in \langle \mathcal{A} \rangle$. $\square$

**Proposición 2.2.9** *Si* $(X, d)$ *es un espacio métrico la colección*

$$\mathcal{B}(X) = \{\langle \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{A} \textit{ es una familia finita de conjuntos abiertos de } X\}$$

*es una base de conjuntos abiertos en* $2^X$*.*

**Demostración:**

De la Proposición 2.2.8 se sigue que $\mathcal{B}(X)$ es una colección de abiertos de $2^X$, por lo que solamente hace falta probar que esta es base.

Sea $D \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces, para cada $x \in D$, se cumple que

$$x \in B_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(D).$$

Luego, como $D$ es compacto, podemos encontrar una subcubierta finita $\mathcal{A}$ de la cubierta $\{B_{\varepsilon/4}(x)\}_{x \in D}$.

Claramente, $D \in \langle A \rangle$, por lo que $\langle A \rangle$ es vecindad de $D$. Sea $F \in \langle A \rangle$, veamos que su *distancia Hausdorff* a $D$ es menor que $\epsilon$. Dado $x \in D$ podemos encontrar $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, y, como $F \in \langle A \rangle$, $F \cap A \neq \emptyset$. Pero su diámetro es menor que $2\epsilon$ (recordemos que el diámetro de un conjunto es el supremo de las distancias entre dos punto cuales quiera de este) $diam(A) < 2\varepsilon$ y por lo tanto podemos encontrar un punto $y \in F \cap A$, Con esto probamos que $D \subset U_\varepsilon(F)$. Además, como $F \in \langle A \rangle$, entonces

$$F \subset \bigcup \mathcal{A} \subset U_\varepsilon(D).$$

Por lo tanto, $d_H(D, F) < \varepsilon$. De aquí concluimos que $\langle A \rangle$ es una vecindad de $D$ contenida en $B_\varepsilon(D)$, un bierto en $2^X$, y por lo tanto $\mathcal{B}(X)$ es base para la topología de $2^X$. $\square$

Ahora probaremos que un espacio induce las propiedades de conexidad y conexidad local a su hiperespacio.

**Teorema 2.2.10** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. $2^X$ es conexo si y solo si $X$ lo es.*

**Demostración:**

Primero supongamos que $X$ es conexo y demostraremos que $2^X$ lo es. Para ello, consideremos el subespacio $F_\infty(X)$, como este es denso en $2^X$, es suficiente demostrar que $F_\infty(X)$ es conexo. Por lo que, es suficiente demostrar que cada $F_n(X)$ es conexo.

Por la Proposición 2.2.6 tenemos que $F_n(X)$ es la imagen continua de $X^n$, el cual es conexo, y, por lo tanto, cada $F_n(X)$ lo es.

Ahora, probemos que si $2^X$ es conexo, $X$ también lo es. Para esto, probemos la contrapuesta, es decir, supongamos que $X$ no es conexo y encontremos una separación de $2^X$.

Ahora, como $X$ no es conexo existen, $U$ y $V$, dos abiertos no vacíos y disjuntos, que separan a $X$, es decir, tales que $X = U \cup V$. Luego, por la Proposición 2.2.8 $\langle \{U\} \rangle$, $\langle \{V\} \rangle$ y $\langle \{U, V\} \rangle$ son abiertos. Además, son disjuntos, pues $U \cap V = \emptyset$, y, como $X = U \cup V$, también se sigue que $X = \langle \{U\} \rangle \cup \langle \{V\} \rangle \cup \langle \{U, V\} \rangle$. Así, hemos encontrado una separación de $2^X$. $\square$

**Teorema 2.2.11** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. $2^X$ es localmente conexo si y solo si $X$ lo es.*

**Demostración:**

Primero supongamos que $X$ es localmente conexo. Sea $A \in 2^X$ y $U$ una vecindad de $A$ en $2^X$. Además, por la Proposición 2.2.9, existe una familia finita $\mathcal{V}$ de abiertos de $X$ tal que

$$A \in \langle \mathcal{V} \rangle \subset U.$$

Por consiguiente, para cada $x \in A$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}$ de tal manera que $X \in V$.

Luego, como X es espacio métrico, en particular, es regular, y, como también es localmente conexo, podemos encontrar un abierto conexo $W_x$ con la propiedad de que

$$x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset V.$$

Así, $\{W_x\}$ forma una cubierta abierta del compacto $A$, por lo que, existe una subcubierta abierta finita $\mathcal{W}$. Notemos que cada $W \in \mathcal{W}$ es abierto, conexo, tiene intersección no vacía con $A$ y para cada uno de estos existe un $V \in \mathcal{V}$ de tal modo que $\overline{W} \subset V$. Luego, si definimos $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W}\}_{\{W \in \mathcal{W}\}}$ observemos que

$$A \in \langle \mathcal{W} \rangle \subset \langle \overline{\mathcal{W}} \rangle \subset \langle \mathcal{V} \rangle \subset U.$$

Por la Proposición 2.2.8, $\langle \overline{\mathcal{W}} \rangle$ es una vecindad abierta de $A$, por lo que es suficiente mostrar que $\langle \overline{\mathcal{W}} \rangle$ es conexo. Como $\mathcal{W}$ es finito, podemos escribir $\overline{\mathcal{W}} = \{D_1, \ldots, D_n\}$, donde cada $D_i$ es compacto y conexo. Luego, para cada $i = 1, 2, ..., n$, el hiperespacio $2^{D_i}$ será compacto y, por lo tanto, un cerrado en $2^X$. Así mismo, por el Teorema 2.2.10, tenemos que cada $2^{D_i}$ es conexo. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^{n} 2^{D_i}$ es un espacio conexo y compacto. Consideremos la función $\Phi : \prod_{i=1}^{n} 2^{D_i} \to 2^X$ dada por

$$\Phi(A_1, ..., A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

esta función es continua por el corolario 2.2.7, por lo que basta demostrar que su imagen es $\langle \overline{\mathcal{W}} \rangle$, pues sería imagen continua de un conexo, y por consiguiente, también conexo.

Es claro que para $(A_1, ..., A_n) \in \prod_{i=1}^{n} 2^{D_i}$ tenemos que $\Phi(A_1, ..., A_n) \in \langle\overline{\mathcal{W}}\rangle$. Sea $B \in \langle\overline{\mathcal{W}}\rangle$, para cada $i = 1, 2, ..., n$ definamos $B_i = B \cap D_i$, por lo que cada $B_i$ es un subconjunto compacto y no vacío de $D_i$. Además, como $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, tenemos que

$$\Phi(B_1, B_2, ..., B_n) = B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$$

por lo que $B$ está en la imágen de $\Phi$. Por lo tanto la imagen de $\Phi$ coincide con $\langle\overline{\mathcal{W}}\rangle$. Entonces, $\langle\overline{\mathcal{W}}\rangle$ es conexo y por lo tanto $2^X$ es localmente conexo.

Supongamos que $2^X$ es localmente conexo; probaremos que $X$ lo es. Recordemos que, por la Proposición 2.2.6, podemos identificar a $X$ con $F_1(X)$ (cuando hablemos de que un punto $x$ de $X$ está en $2^X$, nos referimos al singulete $\{x\}$). Sea $x \in X$ y $O$, un abierto de $X$ que tiene a $x$. Por la Proposición 2.2.7 $\langle\{O\}\rangle$ es una vecindad en $2^X$ que tiene a $x$, y, como el hiperespacio es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{B}$ de tal manera que $x \in \mathcal{B} \subset \langle\{O\}\rangle$. Entonces, la propuesta para abierto conexo en $X$ contenido en $O$ que tenga a $x$ es $\bigcup \mathcal{B}$, este es abierto, pues $X \cap \mathcal{B}$ es abierto en $X$ y está contenido en $\bigcup \mathcal{B}$. Ahora solo basta mostrar que $B := \bigcup \mathcal{B}$ es conexo. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, que existen dos subconjuntos abiertos de $B$ vacíos y disjuntos $U$ y $V$ que lo separan. Definamos $U'$ y $V'$ de la siguiente manera:

$$U' = \{x \in X \mid d(x, U) < d(x, B \setminus U)\},$$
$$V' = \{x \in X \mid d(x, V) < d(x, B \setminus V)\}.$$

Es evidente que estos conjuntos son abiertos ajenos, además de que $U' \cap B = U$ y $V' \cap B = V$. Por otra parte como $U'$ y $V'$ son ajenos, entonces, $\langle\{U'\}\rangle$, $\langle\{V'\}\rangle$ y $\langle\{U', V'\}\rangle$ también lo son. Luego, observemos que $\langle\{U'\}\rangle \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\langle\{V'\}\rangle \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, y, además:

$$\mathcal{B} = \langle\{U'\}\rangle \cup \langle\{V'\}\rangle \cup \langle\{U', V'\}\rangle.$$

De esta manera, $\mathcal{B}$ no sería conexo, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $B$ sí es conexo y, por consiguiente, $X$ es localmente conexo. $\square$

Concluimos el capítulo con estas relaciones respecto a la conexidad entre un espacio y su hiperespacio, que nos serán de utilidad posteriormente.

# Capítulo 3

# Distancia de Gromov-Hausdorff

Después de haber visto la distancia Hausdorff, estamos preparados para definir la *distancia de Gromov-Hausdorff*, ya que esta última es una generalización de la primera, que nos permitirá medir la distancia entre espacios métricos. Así, el propósito de este capítulo es introducir el concepto de esta distancia, sus propiedades y notar que tendremos un particular interés en calcular esta distancia entre espacios métricos compactos.

El motivo por el que haremos esto es porque la distancia Hausdorff no es suficiente en algunos casos. La distancia Hausdorff nos ayuda a ver cuán cerca están dos subconjuntos de un mismo espacio métrico de ser iguales. Sin embargo, nos gustaría hacer algo más general, como comparar conjuntos que se encuentran en distintos espacios métricos, ya sea porque los espacios donde se encuentran son conjuntos diferentes o porque tienen distintas métricas.

Además, nos gustaría que la distancia sea invariante bajo isometrías. Es decir, queremos que esta distancia que vamos a definir sea aún más precisa en cuanto a comparar cuan parecidos son dos subconjuntos, ya que a veces los dos subconjuntos pueden verse similares pero encontrarse lejos.

En otras palabras, si la distancia de Gromov-Hausdorff cumple estas características, entonces permitirá comparar distintos espacios métricos y no solamente subespacios métricos de un mismo espacio. Más particularmente, hablando de comparar conjuntos como imágenes, la distancia de Gromov-Hausdorff admitirá la rotación y la traslación de los conjuntos, mientras que la distancia de Hausdorff no. Para más información de cómo se ocupan estas distancias en la comparación y reconocimiento de imágenes se puede consultar [9].

## 3.1. Definición

Para lograr la definición la idea es hacer uso de la distancia de Hausdorff. Primero, la distancia de Gromov-Hausdorff entre dos subespacios de un mismo espacio métrico no será mayor a la distancia Hausdorff existente entre ellos en el espacio original. Esto quiere decir que, si están cerca en el sentido de la distancia Hausdorff, también lo estarán en términos de la distancia de Gromov Hausdorff. Segundo, la distancia entre espacios isométricos será cero. Procedamos a la definición:

Dados $X$ y $Y$, la distancia de Gromov-Hausdorff entre ellos, denotada como $d_{GH}(X, Y)$ está definida por la siguiente relación: para $r > 0$ diremos que $d_{GH}(X, Y) < r$ si y solo si existe $Z$ espacio métrico con subespacios $X'$ y $Y'$ isométricos a $X$ y $Y$ repectivamente, tales que $d_H^Z(X', Y') < r$. Es decir, si $i : X \hookrightarrow Z$ y $j : Y \hookrightarrow Z$ son encajes isométricos, entonces, la distancia de Gromov-Hausdorff es el ínfimo de las distancias Hausdorff $d_H^Z(i(X), j(Y))$ entre todos los espacios métricos $Z$ y todos los encajes isométricos $i : X \hookrightarrow Z$ y $j : Y \hookrightarrow Z$. Se pudiera pensar que un espaacio $Z$ así podría no existir, pero más adelante veremos una forma de construir uno a partir de $X$ y $Y$.

Entonces esta forma de medir consiste en meter los espacios en un espacio más grande, donde no se alteren las distancias originales y se pueda tomar la distancia Hausdorff entre ellos (de todas las posibles maneras de encajarlos ahí). El repetir esto en cada espacio “mayor” en los que podamos identificarlos isométricamente. Así, esta forma de medir claramente cumple los dos puntos que habíamos propuesto para la definición.

Ahora veremos algunas propiedades de la distancia de Gromov-Hausdorff. Por ejemplo, por como está definida una $\varepsilon - red$, es claro que si $A$ es una $\varepsilon - red$ de $X$, entonces $d_{GH}(A, X) \leq \varepsilon$.

**Proposición 3.1.1** *Si $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ son espacios métricos acotados, entonces $d_{GH}(X, Y) < \infty$.*

**Demostración:**

Como $X$ y $Y$ son acotados existen $M_X$ y $M_Y$ cotas para las distancias entre los puntos de cada espacio respectivamente. Definamos una constante $C := \max\{M_X, M_Y\}$ y notemos que acota las distancias de ambos espacios. Luego consideremos al espacio $(Z, d_Z)$ donde $Z = X \sqcup Y$ y $d_Z$ es tal que:

$$d_Z(z_1, z_2) = \begin{cases} d_X(z_1, z_2) & si \quad z_1, z_2 \in X \\ \\ d_Y(z_1, z_2) & si \quad z_1, z_2 \in Y \\ \\ C & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

$d_Z$ es una métrica, cuyas propiedades las hereda de $d_X$ y $d_Y$, por lo que $X \subset U_C(Y)$ y $Y \subset U_C(X)$. Entonces, como subespacios de $Z$, tenemos que la distancia Hausdorff ahí es tal que $d_H^Z(X, Y) \leq C$, por lo tanto, $d_{GH}(X, Y) \leq C < \infty$. □

De este resultado se sigue inmediatamente el siguiente:

**Corolario 3.1.2** *Si $X$ y $Y$ son espacios métricos compactos, entonces $d_{GH}(X, Y) < \infty$.*

Ahora veamos otra afirmación que solamente requiere que uno de los espacios tenga diámetro acotado.

**Proposición 3.1.3** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos tales que $diam(X) < \infty$. Entonces se tiene que $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2}|diam(X) - diam(Y)|$.*

**Demostración:**

Dividiremos la demostración en dos casos, cuando $Y$ tiene diámetro acotado y cuando no lo tiene.

(i) Primero, supongamos que $diam(Y) = \infty$. Este caso es sencillo, pues si $Z$ es un espacio métrico que acepta copias isómetricas de $X$ y $Y$, digamos $X'$ y $Y'$, entonces, en $Z$ tenemos que $d_H(X', Y') = \infty$, pues si suponemos que no es así, existiría $0 < r < \infty$ de tal modo que $Y' \subset U_r(X')$, lo que implica que $diam(Y') < diam(X') + 2r$, y eso contradice nuestra hipótesis inicial. Por otra parte, como no importó quién era $Z$ ni la manera en la que encajamos a los espacios $X$ y $Y$, entonces, $d_{GH}(X, Y) = \infty$. Así mismo, es evidente que se cumple la desigualdad buscada.

(ii) Ahora veamos el caso en el que $diam(Y) < \infty$. Empecemos considerando de nuevo un espacio $Z$ donde podemos encajar a $X$ y $Y$. A partir de aquí en esta prueba nos será indistinto hablar de estos espacios y sus copias isométricas). También tomemos $y_1, y_2 \in Y$ y $x_1, x_2 \in X$. Entonces, por la desigualdad del triángulo en $Z$ tenemos que

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2).$$

Enseguida, como $diam(X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} d(x_1, x_2)$

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_1) + diam(X) + d(x_2, y_2),$$

Por lo que podemos despejar la desigualdad de la siguiente manera

$$d(y_1, y_2) - diam(X) - d(x_2, y_2) \leq d(y_1, x_1).$$

y como esto se cumple para cualquier $x_1 \in X$, también se cumple para el infimo, es decir

$$d(y_1, y_2) - diam(X) - d(x_2, y_2) \leq d(y_1, X)$$

Después, con un razonamiento análogo vemos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(y_1, y_2) - diam(X) - d(y_1, X) \leq d(y_2, X).$$

Luego despejando y sacando supremos sobre $y_1$ y $y_2$

$$diam(Y) - diam(X) \leq \sup_{y_1 \in Y} d(y_1, X) + \sup_{y_2 \in Y} d(y_2, X).$$

Teniendo esto y por la Proposición 2.1.1, entonces,

$$diam(Y) - diam(X) \leq 2d_H(X, Y)$$

Además, es claro que también $diam(X) - diam(Y) \leq 2d_H(X, Y)$, por lo que

$$\tfrac{1}{2}|diam(X) - diam(Y)| \leq d_H(X, Y).$$

Finalmente, como $Z$ fue un espacio arbitrario que adminte encajes isométricos, entonces:

$$\tfrac{1}{2}|diam(X) - diam(Y)| \leq d_{GH}(X, Y).$$

□

Ahora, probaremos la desigualdad del triángulo para la distancia de Gromov-Hausdorff. Antes de proceder a demostrarla, haremos una observación; la definición de la distancia de Gromov-Hausdorff entre un espacio $X$ y un espacio $Y$ nos pide trabajar con todos los espacios $Z$ que admitan un encaje isométrico de los anteriores, lo que podría ser muy grande. Por otra parte, veamos que podemos restringirnos a trabajar con las semimétricas de la unión disjunta de $X$ y $Y$ que extienden a las métricas de estos. Más específicamente, la distancia de Gromov-Hausdorff será igual al ínfimo de las distancia Hausdorff tomadas respecto a las semimétricas que extienden las métricas de $X$ y $Y$.

Para probar esto, simplemente identificamos a $X \cup Y$ con la unión de sus copias isométricas $X' \cup Y' \subset Z$. Más formalmente, consideramos $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ isometrías, por lo que definimos la distancia entre $x \in X$ y $y \in Y$ como $d(x, y) = d_Z(f(x), g(y))$. Esto nos deja con una semimétrica que extiende a las métricas de $X$ y $Y$. Además $(X \cup Y)/d$ es isométrico a $X' \cup Y'$. Por otra parte, para tener una métrica en $X \sqcup Y$ y no una semimétrica podemos considerar $d(x, y) = d(f(x), g(y)) + \delta$, donde $\delta$ es una constante positiva arbitraria. Y respecto a la métrica anterior $d_H(X.Y) < r + \delta$ si $d_H^Z(X, Y) < r$.

**Nota:** *En el parráfo anterior, tenemos una semimétrica porque puede suceder que $f(x) = g(y)$, haciendo que la distancia entre $x$ y $y$ sea cero, y, en general, $x$ y $y$ no son el mismo punto.*

**Proposición 3.1.4** *$d_{GH}$ satisface la desigualdad del triángulo. Es decir, para $X_1$, $X_2$ y $X_3$ espacios métricos sucede que*

$$d_{GH}(X_1, X_3) < d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3).$$

**Demostración:**

Sean $d_{12}$ y $d_{23}$ métricas en $X_1 \cup X_2$ y $X_2 \cup X_3$ respectivamente, que extienden a las métricas de $X_1$, $X_2$ y $X_3$, y definamos la distancia en $X_1 \cup X_3$ como:

$$d_{13}(x_1, x_3) = \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x_1, x_2) + d_{23}(x_2, x_3)\}.$$

Veamos ahora que $d_{13}$ cumple la desigualdad del triángulo. Sean $x, y, z \in X_1 \cup X_3$, trabajaremos los casos de como se distribuyen $x, y$ y $z$ en $X_1$ o $X_3$ . Primero, supongamos $x, y \in X_1$ y $z \in X_3$. Por la desigualdad del triángulo en $X_1 \cup X_2$, para $x_2 \in X_2$ sucede que $d_{12}(x, x_2) \leq d_{12}(x, y) + d_{12}(y, x_2)$, luego,

$$\begin{aligned}
d_{13}(x, z) &= \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&\leq \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x, y) + d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&\leq d_{12}(x, y) + \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&= d_{12}(x, y) + d_{13}(y, z) \\
&= d_{13}(x, y) + d_{13}(y, z).
\end{aligned}$$

Los otros casos se resuelven de manera análoga. Así, es claro que $d_{13}$ es una métrica, y por cómo está definida tenemos que

$$d_H(X_1, X_3) \leq d_H(X_1, X_2) + d_H(X_2, X_3).$$

Así mismo, podemos encontrar una métrica así para cada par de métricas de $X_1 \cup X_2$ y $X_2 \cup X_3$, así que, tomando ínfimos, notamos que

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3)$$

con lo que concluimos la demostración. □

Después de lo trabajado hasta ahora, podemos ver que, para trabajar con la distancia de Gromov-Hausdorff, requerimos construir un nuevo espacio métrico $Z$ o una métrica para $X \sqcup Y$. Esto es incoveniente incluso para los casos más sencillos, por lo que en las siguientes secciones veremos criterios para calcular o estimar la distancia de Gromov-Hausdorff entre dos espacios.

## 3.2. Correspondencias

El primer criterio que veremos es la correspondencia entre espacios métricos (o, simplemente, entre conjuntos). La idea será corresponder a cada punto del espacio $X$ con uno o más puntos del espacio $Y$, y viceversa. Comenzaremos viendo la definición de correspondencia y, luego, pasaremos a ver cómo se relaciona con el cálculo de la distancia de Gromov-Hausdorff.

**Definición 3.2.1** *Dados dos espacios métricos $X$ y $Y$, diremos que $\mathfrak{R} \subset X \times Y$ es una* correspondencia *entre $X$ y $Y$ si cumple con la siguiente condición: para cada $x \in X$ existe un $y \in Y$, de tal modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}$, y, similarmente para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$, de tal modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}$.*

Así, si no hay confusión diremos que $x$ y $y$ se *corresponden*, en vez de escribir $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Por otra parte, notemos los siguientes puntos que nos ayudan a relacionar las correspondencias entre dos conjuntos $X$ y $Y$ con funciones entre estos:

1) Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces

$$\mathfrak{R} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

es una correspondencia, y la llamamos la correspondencia asociada a $f$.

2) Si $Z$ es algún conjunto tal que existen $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, entonces podemos construir la siguiente corespondencia:

$$\mathfrak{R} = \{(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}.$$

El primer punto es útil cuando ya tenemos una función, pero, si partimos del hecho de tener una correspondencia, no siempre será sencillo asociarla a una función. Sin embargo, es sencillo probar que toda correspondecia se puede obtener a partir de una construcción como la señalada en el segundo punto, para esto, basta con fijarnos en $Z = \mathfrak{R}$ y en las proyecciones $\pi_x : Z \to X$ y $\pi_y : Z \to Y$.

Ahora veamos el concepto de distorsión que nos ayudará a conectar las correspondencias con la distancia de Gromov-Hausdorff.

En principio, la distorsión está definida para funciones.

**Definición 3.2.2** *Si $X$ y $Y$ son espacios métricos y $f : X \to Y$ una función, la distorsión de $f$, denotada como $dis(f)$, está definida como*

$$dis(f) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|.$$

Entonces, es claro que si $f$ es una isometría, su distorsión es 0. Por lo que, de algún modo, entre menor sea la distorsión más parecida es $f$ a una isometría. A su vez, si recordamos la distancia de Gromov-Hausdorff, esta nos da una pauta de cuán cerca están dos espacios métricos de ser isométricos. Entonces, es posible que haya relación entre la distorsión de una correspondencia entre dos espacios y la distancia de Gromov-Hausdorff entre ellos. No obstante, una correspondencia no siempre es una función, por lo que es preciso definir la distorsión de una correspondencia y es lo que haremos a continuación.

**Definición 3.2.3** *Dada $\mathfrak{R}$ una correspondencia entre espacios métricos $X$ y $Y$, definimos la distorsión de $\mathfrak{R}$ como*

$$dis(\mathfrak{R}) = \{\sup |d_Y(y_1, y_2) - d_X(x_1, x_2)| \mid (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{R}\}.$$

Ahora veamos que la distorsión de las funciones que nos ayudan a construir correspondencias y la distorsión de estas últimas están relacionadas.

**Proposición 3.2.4** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $\mathfrak{R}$ una correspondencia entre ellos asociada a la función $f$. Entonces, $dis(f) = dis(\mathfrak{R})$.*

**Demostración:**

Partamos de la definición de distorsión de $\mathfrak{R}$. Tenemos que

$$dis(\mathfrak{R}) = \{\sup |d_Y(y_1, y_2) - d_X(x_1, x_2)||(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{R}\}.$$

Notemos, entonces, que, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{R}$, y como $\mathfrak{R}$ está asociada a $f$, sucede que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Por lo tanto, sustituyendo esto en la definición

$$dis(\mathfrak{R}) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|.$$

Luego:

$$dis(\mathfrak{R}) = dis(f).$$

□

**Proposición 3.2.5** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $Z$ algún conjunto tal que existen $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, de modo que $\mathfrak{R} = \{(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}$ es una correspondencia. Entonces*

$$dis(\mathfrak{R}) = \sup_{z_1,z_2 \in Z} |d_Y(g(z_1), g(z_2)) - d_X(f(z_1), f(z_2))|.$$

La demostración de esta proposición es una calca de la de la Proposición 3.2.4, pues basta con sustituir la manera en que escribimos la correspondencia (ahora en términos de $f$ y $g$) en la definición de distorsión para llegar a la expresión buscada.

Así, con lo que hemos observado acerca de correspondencias y su distorsión, parece casi obligatorio notar la proposición que se presenta a continuación.

**Proposición 3.2.6** *Sea $\mathfrak{R}$ una correspondencia entre espacios métricos $X$ y $Y$. Entonces, $dis(\mathfrak{R}) = 0$ si y solo si $\mathfrak{R}$ está asociada a una isometría.*

**Demostración:**

Primero, supongamos que $\mathfrak{R}$ está asociada a una isometría $f$. Entonces, por la proposición 3.2.1

$$dis(\mathfrak{R}) = dis(f),$$

luego,

$$dis(\mathfrak{R}) = \sup_{x_1,x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|.$$

Y, como $f$ es isometría, se cumple que $|d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)| = 0$ para todo par de puntos, por lo que

$$dis(\mathfrak{R}) = 0.$$

Ahora, supongamos que $dis(\mathfrak{R}) = 0$, por lo que

$$\{\sup |d_Y(x_1', x_2') - d_X(x_1, x_2)| |(x_1, x_1'), (x_2, x_2') \in \mathfrak{R}\} = 0.$$

Entonces, $|d_Y(y_1, y_2) - d_X(x_1, x_2)| = 0$ y, por consiguiente, $d_Y(y_1, y_2) = d_X(x_1, x_2)$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$. Por lo que si $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathfrak{R}$, entonces $d_Y(y_1, y_2) = d_X(x, x) = 0$, es decir, $y_1 = y_2$.

Ahora, como para cada $x \in X$ existe un único $x' \in Y$ tal que $(x, x') \in \mathfrak{R}$, definimos $f : X \to Y$ como $f(x) = x'$. Por lo ya señalado, $f$ es una biyección que preserva distancias ($f$ es una isometría) y, claramente, $\mathfrak{R}$ está asociada a $f$. $\square$

Después de eso ya tenemos lo necesario para entrelazar las correspondencias con la distancia de Gromov-Hausdorff. La relación será tal que tendremos una forma para calcular la distancia de Gromov-Hausdorff en términos de correspondencias, algunas propiedades serán más sencillas de calcular de este modo y, con el simple hecho de tener una correspondencia entre los espacios, seremos capaces de acotar la distancia de Gromov-Hausdorff entre ellos.

**Teorema 3.2.7** *Para cualesquiera dos espacios métricos $X$ y $Y$,*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathfrak{R}} dis(\mathfrak{R}),$$

*donde el ínfimo se toma de todas las correspondencias $\mathfrak{R}$ entre $X$ y $Y$. En otras palabras, $d_{GH}(X, Y)$ es igual al ínfimo de las $r > 0$, para las que existe una correspondencia $\mathfrak{R}$ entre $X$ y $Y$, de tal modo que $dis(\mathfrak{R}) < 2r$.*

**Demostración:**

Haremos la demostración en dos partes. Primero, veremos que $d_{GH}$ es una cota inferior para $\frac{1}{2}dis(\mathfrak{R})$. Luego, veremos que para cada $r > d_{GH}(X, Y)$ existe una correspondencia tal que $dis(\mathfrak{R}) < 2r$, con lo que probaremos que es la cota inferior más grande.

1. Sea $\mathfrak{R}$ una correspondencia entre $X$ y $Y$ de tal modo que $dis(\mathfrak{R}) = 2r$. Para ello, basta probar que $d_{GH}(X, Y) \leq r$. Ahora, consideremos la unión disjunta $X \sqcup Y$ en la que definiremos una semimétrica que extiende a las métricas de $X$ y $Y$. Con esto, la idea será establecer que siempre que $x$ y $y$ se corresponden, la distancia entre estos puntos será $r$, y, luego tomar la mínima métrica generada por esta condición. Entonces, definimos

$$d(x,y) = \text{ínf}\{d_X(x,x') + d_Y(y,y') + r | (x',y') \in \mathfrak{R}\}.$$

Por otra parte, es claro que $d_X(x,x') + d_Y(y,y') + r \geq r$. Además, si $(x,y) \in \mathfrak{R}$, se da la igualdad. Ahora, repecto a esta distancia para cada $x \in X$ tenemos $d(x,Y) = r$, puesto que, $\mathfrak{R}$ es correspondencia y, por lo tanto, para cada $x$ existirá una $y \in Y$ que le corresponda. Similarmente para cada $y \in Y$ tenemos $d(y,X) = r$, y, así $d_H(X,Y) = r$ y, por lo que $d_{GH}(X,Y) \leq r$.

2. Sea $r$ tal que $d_{GH}(X,Y) < r$. Ahora, buscamos una correspondencia $\mathfrak{R}$ con $dis(\mathfrak{R}) < 2r$. Podemos asumir que $X$ y $Y$ son subespacios de un espacio $Z$ donde $d_H(X,Y) < r$, dado que $d_{GH}(X,Y) < r$. Así, definimos el siguiente conjunto

$$\mathfrak{R} = \{(x,y) | x \in X, y \in Y \ y \ d(x,y) < r\}.$$

donde $d$ es la métrica en $Z$, mientras que $\mathfrak{R}$ es una correspondencia en consecuencia de que $d_H(X,Y) < r$ y de la Proposición 2.1.1. Luego, la desigualdad deseada la obtenemos al aplicar la desigualdad del triángulo a los pares $(x,y), (x',y') \in \mathfrak{R}$ de la siguiente manera

$$|d(x,x') - d(y,y')| \leq |d(x,x')| + |d(y,y')| < 2r.$$

$\square$

Con esto vemos que, para acotar la distancia de Gromov-Hausdorff, bastará que demos una correspondencia y calculemos su distorsión.

Por otra parte, considerando que el diámetro de un espacio de un punto es cero, y, que dado $X$ un espacio métrico compacto y $P$ un espacio de un punto, $P \times X$ es una correspondencia. Entonces, de este último teorema y de la Proposición 3.1.3 se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

**Corolario 3.2.8** *Sea $P$ un espacio que consta de un solo punto. Entonces, $d_{GH}(X,P) = \frac{1}{2}diam(X)$ para cualquier espacio métrico $X$.*

Ahora, daremos una demostración alterna de la desigualdad del triángulo usando correspondencias.

**Proposición 3.2.9** *Sean $X$, $Y$ y $Z$ espacios métricos, $\mathfrak{R}_1$ una correspondencia entre $X$ y $Y$, y $\mathfrak{R}_2$ una correspondencia entre $Y$ y $Z$. Una composición entre $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ denotada como $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$, es el conjunto de todos los pares $(x, z) \in X \times Z$ para los cuales existe $y \in Y$ de tal modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}_1$ y $(y, z) \in \mathfrak{R}_2$. Entonces*

1. *$\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ es una correspondencia.*
2. *$dis(\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2) \leq dis(\mathfrak{R}_1) + dis(\mathfrak{R}_2)$.*
3. *Desigualdad del triángulo para la distancia de Gromov-Hausdorff.*

**Demostración:**

1. Sea $x \in X$. Como $\mathfrak{R}_1$ es una correspondencia entre $X$ y $Y$, existe $y \in Y$, de tal modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}_1$ y, como $\mathfrak{R}_2$ es una correspondencia entre $Y$ y $Z$, existe $z \in Z$, de tal modo que $(y, z) \in \mathfrak{R}_2$, y por ello, $(x, z) \in \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$. De forma similar, si tomamos $z \in Z$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $(x, z) \in \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$. Por lo tanto, $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ es una correspondencia.

2. $$\begin{aligned} dis(\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2) &= sup\{|d_X(x, x') - d_Z(z, z')|\} \\ &= sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y') + d_Y(y, y') - d_Z(z, z')|\} \\ &\leq sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| + sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(z, z')|\} \\ &= dis(\mathfrak{R}_1) + dia(\mathfrak{R}_2). \end{aligned}$$

3. Definamos los siguientes conjuntos

   i) $R_{XY} = \{\mathfrak{R} \subset X \times Y \mid \mathfrak{R} \textit{ es una correspondencia entre } X \textit{ y } Y\}$.

   ii) $R_{XY} \circ R_{YZ} = \{\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2 \mid \mathfrak{R}_1 \in R_{XY} \textit{ y } \mathfrak{R}_2 \in R_{YZ}\}$.

   Así, es claro que $R_{XY} \circ R_{YZ} \subset R_{XZ}$, por lo que

$$\inf_{\mathfrak{R}\in R_{XZ}} dis(\mathfrak{R}) \leq \inf_{\mathfrak{R}\in R_{XY}\circ R_{YZ}} dis(\mathfrak{R}).$$

Además, por el punto anterior, también tenemos que

$$\inf_{\mathfrak{R}_1\circ\mathfrak{R}_2\in R_{XY}\circ R_{YZ}} dis(\mathfrak{R}_1\circ\mathfrak{R}_2) \leq \inf_{\mathfrak{R}\in R_{XY}} dis(\mathfrak{R}) + \inf_{\mathfrak{R}\in R_{YZ}} dis(\mathfrak{R}).$$

Así mismo, de estas dos desigualdades obtenemos la siguiente

$$\inf_{\mathfrak{R}\in R_{XZ}} dis(\mathfrak{R}) \leq \inf_{\mathfrak{R}\in R_{XY}} dis(\mathfrak{R}) + \inf_{\mathfrak{R}\in R_{YZ}} dis(\mathfrak{R}).$$

Finalmente, por el Teorema 3.2.7 tenemos la desigualdad buscada.

□

## 3.3. $\varepsilon$-isometrías

Ahora abordaremos el concepto de $\varepsilon$-isometría, que nos será de útilidad para el estudio de la convergencia de espacios métricos respecto a la distancia de Gromov-Hausdorff (tema que estudiaremos en el capítulo 4), aunque, por el momento, solo introduciremos el concepto y su relación con la distancia de Gromov-Hausdorff.

Empecemos definiendo las $\varepsilon$-isometrías. Para esto, nos apoyaremos en los conceptos de $\varepsilon - red$ y distorsión que ya hemos visto.

**Definición 3.3.1** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Diremos que una función $f : X \to Y$ es una $\varepsilon$-isometría si cumple las siguientes condiciones:*

- $dis(f) \leq \varepsilon$.
- $f(X)$ *es una $\varepsilon$-red en $Y$.*

Veamos un par de propiedades que, gracias a lo que hemos trabajado, son consecuencias directas de la definición.

**Proposición 3.3.2** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Entonces* *i) Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, existe una $2\varepsilon$-isometría de $X$ en $Y$.*

*ii) Si existe una $\varepsilon$-isometría de $X$ en $Y$, entonces, $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.*

**Demostración:**

i) Por el teorema 3.2.7, podemos tomar $\mathfrak{R}$ una correspondencia entre $X$ y $Y$, de modo que $dis(\mathfrak{R}) < 2\varepsilon$. Ahora, a partir de esta, definiremos una función $f : X \to Y$, que cumple que, para cada $x \in X$, su imagen $f(x)$ es de tal forma que $(x, f(x)) \in \mathfrak{R}$. Luego, notemos la siguiente desigualdad, que es consecuencia del hecho de que $X \times f(X) \subset \mathfrak{R}$:

$\sup_{x,x' \in X} |d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| \leq \sup_{x,x' \in X} \{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| \mid (x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}\}$.

Así, $dis(f) \leq dis(\mathfrak{R}) < 2\varepsilon$. Por lo que, solo nos falta ver que $f(X)$ es una $2\varepsilon$-red. Sea $y \in Y$, como $\mathfrak{R}$ es correspondencia, debe existir $x \in X$, de tal modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}$. A su vez, sucede que $(x, f(x)) \in \mathfrak{R}$, por lo que tenemos la siguiente desigualdad:

$$d_Y(y, f(x)) - d_X(x, x) \leq |d_Y(y, f(x)) - d_X(x, x)| \leq dis(\mathfrak{R}) < 2\varepsilon.$$

Luego,

$$d_Y(y, f(x)) < d_X(x, x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Esto implica que $d(y, f(X)) < 2\varepsilon$. Por su parte, como $y$ fue arbitrario, $f(X)$ es una $\varepsilon$-red en Y.

ii) Supongamos que existe $f$, una $\varepsilon$-isometría entre $X$ y $Y$. Posteriormente, notemos que, como para cada $y \in Y$ se cumple que $d_(y, f(X)) < \varepsilon$, existe $x \in X$ tal que $d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon$. Así, podemos definir el siguiente conjunto que, por la observación recien hecha, resulta en una correspondencia:

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) \in X \times Y | d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Luego, si $(x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}$, se sigue la cadena de desigualdades que presentamos a continuación:

$$\begin{aligned}
|d_Y(y, y') - d_X(x, x')| &\leq |d_Y(y, f(x)) + d_Y(f(x), y') - d_X(x, x')| \\
&\leq |d_Y(y, f(x)) + d_Y(f(x), f(x')) + d_Y(f(x'), y') - d_X(x, x')| \\
&\leq |d_Y(y, f(x)) + d_Y(f(x'), y')| + |d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| \\
&\leq 2\varepsilon + dis(f) \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces, $dis(\mathfrak{R}) \leq 3\varepsilon$. Finalmente, en consecuencia del teorema 3.2.1, tenemos que $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} dis(\mathfrak{R}) = \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon$, que es la desigualdad buscada.

□

## 3.4. La clase de espacios métricos compactos

A lo largo del capítulo ya probamos que la distancia de Gromov-Hausdorff cumple la desigualdad del triángulo, y, claramente, es mayor o igual a cero y simétrica. Sin embargo, tenemos un problema similar al del capítulo pasado, donde dos espacios con misma cerradura distaban cero respecto a la distancia Hausdorff, pero eran distintos. Aquí, por otra parte, lo que sucede es que, $X$ y $Y$ son isométricos si y solo si $d_{GH}(X, Y) = 0$ aunque sean distintos. A continuación probaremos esto, cuando $X$ y $Y$ son compactos.

**Teorema 3.4.1** *Si $X$ y $Y$ son espacios métricos compactos, entonces, $d_{GH}(X, Y) = 0$ si y solo si $X$ y $Y$ son isométricos.*

**Demostración:**

Primero, si $X$ y $Y$ son isométricos, $Z$ es un espacio donde los podemos encajar isométricamente, por lo que existen $i : Y \hookrightarrow Z$ y $j : X \hookrightarrow Z$, de tal modo que $i(Y) = j(X)$. Así, en $Z$ tenemos que $d_H(i(Y), j(Z)) = 0$, y por consiguiente, $d_{GH}(X, Y) = 0$.

Ahora, supongamos que $d_{GH}(X, Y) = 0$. Después, notemos que por la proposición 3.3.2, debe existir una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\varepsilon$-isometrías de $X$ en $Y$ que cumple que $dis(f_n) \to 0$. Luego, como $X$ es compacto y en consecuencia separable, entonces, podemos tomar $S \subset X$ denso y numerable. Podemos escribir $s := \{x_1, x_2, x_{3,...}\}$. Ahora, para $x_1$ consideremos $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$, como $Y$ es compacto, existe una subsucesión $(f_{n_{(k,1)}}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $y_1$ en $Y$. Luego, podemos considerar $(f_{n_{(k,1)}}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$, y, para esta sucesión existe una subsucesión $(f_{n_{(k,2)}}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $y_2$ en $Y$. Podemos repetir este proceso recursivamente tal que para cada $x_i$ existe $(f_{n_{(k,i)}}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $y_i$ en $Y$, de tal forma, que por la manera en que las construimos , $(f_{n_{(k,i)}}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge siempre que $i > j$. Así, utilizando el procedimiento de diagonales de Cantor, podemos encontrar una subsucesión $(f_{n_{(k,k)}})$ tal que, para cada $x \in S$, la sucesión $(f_{n_{(k,k)}}(x))$ converge en $Y$.

Así mismo, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, de hecho, $(f_n)$ es convergente. A partir de esto definimos la función $f : S \to Y$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ahora, como $|d(f_n(x), f_n(y)) - d(x, y)| \leq dis(f_n)$ y $dis(f_n) \to 0$, podemos deducir que $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y)$, es decir, que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, por lo que $f$ preserva las distancias de $S$ en $Y$. Por otra parte, es fácil notar que, dado que $Y$ es compacto y por lo tanto completo, existe $\hat{f} : X \to Y$ que extiende a $f$.

Análogamente, existe $\hat{g} : Y \to X$, que preserva distancias. Así, si definimos $F : Y \to Y$ tal que

$$F(y) = \hat{f} \circ \hat{g}(y),$$

tenemos una función que preserva distancias de $Y$ en $Y$. El hecho de que preserve distancias, implica que esta función es inyectiva. Ahora, veamos que es, además, suprayectiva.

Para empezar, supongamos que $F$ no es suprayectiva y, por ello, existe $y \in Y \setminus F(Y)$. Luego, como $Y$ es compacto, $F(Y)$ también lo es, y, por lo tanto, $F(Y)$ es cerrado. Así, para $p \in Y \setminus F(Y)$, que es abierto, hay una $\varepsilon > 0$, de tal modo que $B_\varepsilon(p)$ está completamente contenida en el complemento de $F(Y)$. Ahora, sea $n$ la cardinalidad del mayor subconjunto $S \subset Y$ tal que para cada par $y_1, y_2 \in S$ sucede que $d(y_1, y_2) \geq \varepsilon$. Así, $S$ es un subconjunto cerrado en $Y$ y, por tal motivo, compacto. Además, este debe ser finito, si no, no podríamos encontrar una subcubierta abierta finita de la cubierta $\{B_\varepsilon(s)|s \in S\}$. Por otra parte, $d(p, f(S)) \geq d(p, f(Y))$ y, además, $d(f(y_1), f(y_2)) \geq \varepsilon$, de lo que se sigue que $f(S) \bigcup \{p\}$ es un conjunto de cardinalidad $n+1$, cuyos elementos distan más que $\varepsilon$ entre sí, lo que contradice el que $S$ fuera el mayor subconjunto que cumplía esta propiedad. Por lo tanto, $F$ debe ser suprayectiva.

Así, por consiguiente, $F$ es biyectiva y obliga a $f$ a ser suprayectiva y, por lo tanto isometría.

□

Ahora veremos una versión más general de este teorema.

**Proposición 3.4.2** *Si $X$ y $Y$ son espacios métricos tales que $d_{GH}(X,Y) = 0$, $X$ es compacto y $Y$ es completo, entonces, $X$ y $Y$ son isométricos.*

**Demostración:**

La demostración se puede llevar a cabo probando que, si se cumplen las hipótesis entonces, $Y$ es compacto, esto reduce la situación al teorema 3.4.1.

Primero, sean $X$ y $Y$ espacios métricos tales que $d_{GH}(X,Y) = 0$, $X$ es compacto y $Y$ es completo. Además, consideremos $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo será construir una $\varepsilon-$red finita para esta $\varepsilon$ arbitraria, pues, dada la completez de $Y$ es suficiente mostrar que es un espacio totalmente acotado para tener la compacidad.

Como $d_{GH}(X,Y) = 0$, en particular, tenemos que $d_{GH}(X,Y) < \frac{\varepsilon}{6}$, entonces, por la proposición 3.3.2, existe $f$ una $\frac{\varepsilon}{3}$-isometría de $X$ en $Y$. Después, consideremos la cubierta abierta $\{B_{\varepsilon/3}(x) \mid x \in X\}$, y, por la compacidad de $X$, podemos considerar la subcubierta finita $\{B_{\varepsilon/3}(x_i)\}_{i=1}^{n}$. Ahora, sea $y_i = f(x_i)$, de modo que podemos tomar el conjunto $\{y_i\}_{i=1}^{n}$. Sea $y \in Y$, como $f(X)$ es una $\frac{\varepsilon}{3}$-red, existe $x \in X$ tal que $d(y, f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Además, para esta $x$ debe existir $x_i$ (con $1 \leq i \leq n$), que cumple que $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned}
&d(y, f(x_i)) \leq d(y, f(x)) + d(f(x), f(x_i)) \\
&\leq \varepsilon/3 + dis(f) + d(x, x_i) \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Y, como $y$ fue arbitrario, esto se cumple para cada punto de $Y$. Así tenemos que $(y_i)_{i=1}^{n}$ es una $\varepsilon$-red en $Y$. □

Con esto tenemos que, si consideramos a las clases de isometría de espacios métricos compactos, entonces $d_{GH}$ se comporta, efectivamente, como una métrica. El problema ahora es que pensar en todas las clases de isometría de espacios métricos compactos podría parecer algo demasiado grande, algo que se escape de la teoría de conjuntos. Sin embargo, tenemos herramientas suficientes para sustentar el hecho de trabajar con estas. En el Capítulo 5 abordaremos esto de nuevo usando el material estudiado en el capítulo uno. Por el momento, con el siguiente teorema veamos que la cardinalidad de la colección de las clases de isometría de espacios métricos compactos es, de hecho, la cardinalidad del continuo (en el siguiente teorema $\mathcal{M}$ representa la colección de las clases de isometría).

**Teorema 3.4.3** *La colección de las clases de isometría de espacios métricos compactos $\mathcal{M}$ tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$.*

**Demostración:**

Probaremos este teorema usando una doble desigualdad.

1) Tomemos la siguiente subcolección de $\mathcal{M}$, $\{[0, \alpha] \mid \alpha \in \mathbb{R} \;\; y \;\; \alpha > 0\}$. Observemos que cada uno de estos intervalos los podemos considerar espacios métricos con la métrica heredada de $\mathbb{R}$. Además, cada uno de estos pertenece a una clase de isometría distinta, y, claramente, esta subcolección tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Así, concluimos que $|\mathcal{M}| \geq |\mathbb{R}|$.

2) Ahora, pensemos en $(X, d)$ un espacio métrico compacto. En particular, $X$ debe ser separable, por lo que existe $S \subset X$ subconjunto denso y numerable. No es difícil observar que, de hecho, la métrica de $X$ queda definida por los valores que toma su restricción a $S$. Es decir, la cantidad de espacios métricos compactos que podemos tener con métrica distinta queda acotada por la cantidad de métricas que le podemos asignar a un conjunto numerable. A su vez, esta cantidad queda acotada por el número de funciones que hay de $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que es $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|$, y, por consiguiente $|\mathcal{M}| \leq |\mathbb{R}|$.

Por lo tanto, $|\mathcal{M}| = |\mathbb{R}|$.

$\square$

# Capítulo 4

# Convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff

En este capítulo analizaremos con detenimiento la convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff. Esta convergencia nos brindará información sobre la métrica de Gromov-Hausdorff y sobre la secuencia de espacios que estemos analizando.

Para empezar, diremos que una sucesión de espacios métricos compactos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en el sentido de Gromov-Hausdorff* a un espacio métrico $X$ si $d_{GH}(X_n, X) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En ese caso escribiremos también $X_n \to_{GH} X$.

Ahora, compararemos con otros conceptos de convergencia de espacios métricos y buscaremos relación con estos. A continuación, enunciamos las definiciones de convergencia que utilizaremos:

**Definición 4.0.1** *Hausdorff Diremos que una sucesión de subespacios métricos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en el sentido de Hausdorff a un subespacio métrico $X$ si $d_H(X_n, X) \to$ cuando $n \to \infty$. En ese caso, escribiremos $X_n \to_H X$.*

**Definición 4.0.2** *Diremos que una sucesión de espacios métricos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a un espacio métrico $X$ si existen homeomorfismos $f_n : X_n \to X$ tales que $dis(f_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.En ese caso, escribiremos $X_n \to_{Unif} X$.*

**Definición 4.0.3** *$dil(f)$ es llamada dilatación de $f$ y se define como*

$$dil(f) = \sup_{x,x' \in X} \frac{d_y(f(x), f(x'))}{d_X(x,x')}.$$

**Definición 4.0.4** *$d_L$ es la distancia Lipschitz y se define de la siguiente manera:*

$$d_L(X,Y) = \inf_{f:X \to Y} log(dil(f), dil(f^{-1})).$$

Esto significa que tomamos el ínfimo sobre todos los homeomorfismos bi-Lipschitz $f : X \to Y$. Recordemos que ser bi-Lipschitz significa que tanto $f$ como $f^{-1}$ son funciones Lipschitz, es decir $d_Y(f(x), f(x')) \leq C d_X(x,x')$ y $d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leq C' d_Y(y,y')$ con $C$ y $C'$ constantes positivas.

**Definición 4.0.5** *Diremos que una sucesión de espacios métricos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en el sentido de Lipschitz a un espacio métrico $X$ si $d_L(X_n, X) \to 0$ cuando $n \to 0$. En ese caso escribiremos $X_n \to_L X$.*

No obstante, aquí solamente hemos definido la convergencia uniforme y la convergencia en el sentido Lipschitz para compararlas con la convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff. En resumen, podríamos decir que estas distancias comparan las funciones que existen entre los espacios dados (una lo hace con los homeomorfismos y la otra con las funciones bi-Lipschitz), pero, para profundizar en estas, se puede consultar las secciones 7.1.5 y 7.2 de [2].

Antes de empezar con las comparaciones entre convergencias, observemos la siguiente propiedad de la convergencia: Como consecuencia de la proposición 3.3.2, una sucesión de espacios métricos $(X_n)\_n = 1^{\infty}$ converge en el sentido de Gromov-Hausdorff si y solo si existe una sucesión de números $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que cada $f_n : X_n \to X$ es $\varepsilon_n$-isometría de modo que $\varepsilon_n \to 0$.

**Proposición 4.0.6** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si una sucesión de subespacios métricos $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $X$ en el sentido de Hausdorff, también lo hace en el sentido de Gromov-Hausdorff.*

2. *Si una sucesión de espacios métricos $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $X$ uniformemente, también lo hace en el sentido de Gromov-Hausdorff.*

3. *Si una sucesión de espacios métricos $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $X$ en el sentido de Lipschitz, también lo hace en el sentido de Gromov-Hausdorff.*

**Demostración:**

1. Supongamos que una sucesión de subespacios métricos $(X_n)n = 1^{\infty}$ converge a $X$ en el sentido de Hausdorff, por lo que $d_H(X_n, X) \to 0$. Además, como $d_{GH}(X_n, X) \leq d_H(X_n, X)$, a su vez también $d_{GH}(X_n, X) \to 0$.

2. Supongamos que una sucesión de espacios métricos $(X_n)n = 1^{\infty}$ converge a $X$ uniformemente. Así, existe una sucesión de homeomorfismos $f_n : X_n \to X$ tales que $dis(f_n) \to 0$. A su vez, podemos considerar la correspondencia asociada a cada $f_n$ que denotaremos como $\mathfrak{R}_\mathfrak{n} = \{(x, f_n(x)|x \in X_n\}$, ya que cada homeomorfismo es suprayectivo. Luego, en virtud del Teorema 3.2.7 y de la Proposición 3.2.2, sucede que $d_{GH}(X_n, X) \leq dis(\mathfrak{R}_\mathfrak{n}) = dis(f_n) \to 0$. Así, $X_n \to_{GH} X$.

3. Supongamos que una sucesión de espacios métricos $(X_n)n = 1^{\infty}$ converge a $X$ en el sentido de Lipschitz. De esta manera, $d_L(X_n, X) \to 0$. Así mismo, podemos tomar sucesión de homeomorfismos bi-Lipschitz, $f_n : X_n \to X$, tales que $dil(f_n) \to 1$. Ahora, basta probar que su distorsión tiende a 0, pues esto nos lleva al punto anterior. Entonces, recordemos que en este caso

$$dil(f_n) = \sup_{x,x' \in X_n} \frac{d_X(f_n(x), f_n(x'))}{d_{X_n}(x, x')},$$

por lo tanto, para cada $x, x' \in X_n$ se cumple que

$$\frac{d_X(f_n(x), f_n(x'))}{d_{X_n}(x, x')} \to 1,$$

por lo que $d_X(f_n(x), f_n(x')) \to d_{X_n}(x, x')$ y, por consiguiente, $dis(f_n) \to 0$. Esto significa que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $X$ uniformemente y, por el punto anterior, también converge en el sentido de Gromov-Hausdorf. $\square$

**Proposición 4.0.7** *Sea $X$ un conjunto fijo y, $(d_n)_{i=1}^{\infty}$, una sucesión de métricas en $X$ tales que convergen uniformemente a $d : X \times X \to \mathbf{R}$. Entonces, el espacio cociente inducido por esta función $X/d$, equipado con $d$, es el límite en el sentido de Gromov-Hausdorff de la sucesión $((X, d_n))_{i=1}^{\infty}$.*

**Demostración:**

Sea $X$ un conjunto fijo y, $(d_n)_{i=1}^{\infty}$, una sucesión de métricas en este tales que convergen uniformemente a $d : X \times X \to \mathbf{R}$. Claramente, $d$ es una semimétrica en $X$ por lo que al considerar al espacio cociente $X/d$ que surge al relacionar y pegar a los puntos $x, y \in X$ tales que $d(x, y) = 0$ y equiparlo con $d$, el par $(X/d, d)$ es un espacio métrico. Después, consideremos $\pi_n : (X, d_n) \to (X/d, d)$, defininidas como $\pi_n(x) = [x]$; de hecho, por la convergencia uniforme de las semimétricas a $d$, tenemos que, para cada $x, y \in X$, sucede que $|d_n(x, y) - d(\pi_n(x), \pi_n(y))| \to 0$, y de esto se sigue que $dis(\pi_n) \to 0$. Por lo tanto, $d_{GH}((X, d_n), (X/d, d)) \to 0$. $\square$

**Corolario 4.0.8** *Sea $X$ un conjunto finito fijo y $(d_n)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de métricas en este, tales que convergen puntualmente a $d : X \times X \to \mathbf{R}$. Entonces, el espacio cociente inducido por esta función $X/d$, equipado con $d$, es el límite en el sentido de Gromov-Hausdorff de la sucesión $((X, d_n))_{i=1}^{\infty}$.*

**Demostración:**

La convergencia puntual en espacios finitos implica la convergencia uniforme. $\square$

Ahora, empecemos por notar ciertas propiedades de la convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff que suceden con espacios finitos (ya sea como elementos en la sucesión o como el espacio límite). El hecho de que un espacio sea finito es una hipótesis que suele hacer más sencillo algunos aspectos de análisis.

**Proposición 4.0.9** *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de espacios métricos de cardinalidad fija $N$. Entonces, existe una sucesión de métricas $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ para un conjunto fijo $X$, que convergen a una semimétrica, de tal modo que $(X, d_n)$ es isométrico a $X_n$. En particular, el límite de $X_n$ es un espacio métrico finito de cardinalidad menor o igual a $N$.*

**Demostración:**

Supongamos que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de espacios métricos de cardinalidad fija $N$. Además, sea $X = \{1, 2, ..., N\}$. Así, para cada $X_n$ existe $f_n : X \to X_n$ una función biyectiva. Dicho eso, podemos definir $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$d_n(i, j) = d_{X_n}(f_n(i), f_n(j))$$

donde $d_{X_n}$ es la métrica de $X_n$. Así, claramente, cada $d_n$ define una métrica en $X$. Más aún, esto fuerza a que $(X, d_n)$ sea isométrico a $X_n$ (a partir de ahora, ocuparemos la notación $x_n^i$ para denotar a $f_n^{-1}(i)$). Entonces, si $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ es el límite de $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, observemos que existen $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\varepsilon$-isometrías tales que $|d_{X_n}(x_n^i, x_n^j) - d_{\mathcal{X}}(g_n(x_n^i), g_n(x_n^j))| \to 0$, por lo que $|d_n(i, j) - d_{\mathcal{X}}(g_n(x_n^i), g_n(x_n^j))| \to 0$. De esta manera, podemos definir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$d(i, j) = \lim_{n\to\infty}(d_n(i, j)).$$

Y por lo observado anteriormente $d$ está bien definida, ya que existen estos límites puntuales, y, a su vez, definen una semi-métrica. Así mismo, por el Corolario 4.0.8, tenemos que $\mathcal{X}$ es isométrico a $(X/d, d)$, por lo que debe tener cardinalidad menor o igual a $N$. $\square$

**Proposición 4.0.10** *Una secuencia de espacios métricos $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un espacio de un solo punto si y solo si $diam(X_n) \to 0$.*

**Demostración:**

Denotemos por $P$ al espacio de un solo punto. Probemos ambas implicaciones.

- Supongamos que $X_n \to_{GH} P$. Luego, por el Corolario 3.2.8 tenemos que $d_{GH}(X_n, P) = \frac{1}{2}diam(X_n)$, y, por consiguiente $diam(X_n) \to 0$.
- Ahora, supongamos que $diam(X_n) \to 0$. De nuevo por el Corolario 3.2.8 tenemos que $d_{GH}(X_n, P) = \frac{1}{2}diam(X_n)$, de modo que, $d_{GH}(X_n, P) \to 0$, y por lo tanto, $X_n \to_{GH} P$.

$\square$

La siguiente proposición da una forma general de cómo se comporta una secuencia que converge a un espacio finito.

**Proposición 4.0.11** *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de espacios métricos y, $X$, un espacio finito de cardinalidad $N$, donde $X = \{x_i | 1 \leq n \leq N\}$, entonces:*

1. *Si $X_n \to_{GH} X$, para $n$ suficientemente grande, la cardinalidad de $X_n$ es al menos $N$.*
2. *$X_n \to_{GH} X$ si y solo si para todo $n$ suficientemente grande, $X_n$ se puede dividir en la unión disjunta de $N$ conjuntos no vacíos $X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,N}$, de modo que, para todas $i$, $j$ sucede que*

$$diam(X_{n,i}) \to 0 \text{ y } d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d(x_i, x_j) \qquad \text{(cuando } n \to \infty\text{)}.$$

**Demostración:**

1. Supongamos que $X_n \to_{GH} X$ y que no hay ninguna $n$ suficientemente grande tal que la cardinalidad de $X_n$ sea al menos $N$. Por ello, podemos crear una subsucesión $(X_{n_k})$ de cardinalidad fija menor a $N$, de modo que, por la proposición 4.0.9, el límite $X$ no puede tener cardinalidad $N$, lo cual es una contradicción.
2. 
   - Supongamos que $X_n \to_{GH} X$. Por lo que, debe existir una sucesión de reales positivas $(\varepsilon_n)$ y una de $\varepsilon_n$-isometrías $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\varepsilon_n \to 0$.

     Ahora, definamos $X_{n,i} = f_n^{-1}(x_i)$. Es claro que $X_n = \bigcup_{i=1}^{N} X_{n,i}$. Luego, veamos que para $i \neq j$ los espacios son disjuntos, es decir $X_{n,i} \bigcap X_{n,j} = \emptyset$.

Ahora, supongamos que no es así, entonces existe $y \in X_{n,i} \bigcap X_{n,j}$, y eso quiere decir que $f_n(y) = x_i$ y que $f_n(y) = x_j$, pero $f$ era función lo cual es una contradicción, por lo que deben ser disjuntos. Además, no pueden ser vacíos porque debe existir $\varepsilon < \min\limits_{i \neq j}\{d(x_i, x_j)\}$, porque de no ser así, $f_n$ no sería $\varepsilon$-isometría. De modo que, $X_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} X_{n,i}$.

Ahora, veamos que $diam(X_{n,i}) \to 0$. Para ello, consideremos la sucesión de restricciones $(f_n \mid_{X_{n,i}})_{n=1}^{\infty}$. Evidentemente, $f_n \mid_{X_{n,i}} (X_{n,i})$ es una $\varepsilon$-red en $\{x_i\}$ y, además, $dis(f_n \mid_{X_{n,i}}) \to 0$, por lo que tenemos una sucesión de $\varepsilon_n$-isometrías tales que $\varepsilon_n \to 0$, así $(X_{n,i}) \to x_i$. Así, por la proposición anterior tenemos que $diam(X_{n,i}) \to 0$.

Ahora, para $x \in X_{n,i}$ y $y \in X_{n,j}$ por la definición de distorsión y por ser $f_n$ $\varepsilon_n$-isometría, tenemos la siguiente desigualdad:

$$|d_{X_n}(x, y) - d_X(x_i, x_j)| \leq dis(f_n) \leq \varepsilon_n.$$

Por otra parte, como $x$ y $y$ fueron arbitarias podemos tomar ínfimos sobre estos y, por lo tanto, se cumple la siguiente desigualdad:

$$|d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) - d_X(x_i, x_j)| \leq dis(f_n) \leq \varepsilon_n.$$

Así, cuando consideramos que $\varepsilon_n \to 0$, podemos deducir que,

$$d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i, x_j),$$

con lo que concluimos la primer implicación.

- Supongamos que $X_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} X_{n,i}$ con $diam(X_{n,i}) \to 0$ y $d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i, x_j)$. Primero, vamos a construir una sucesión de $\varepsilon_n$-isometrías, tales que $f_n : X_n \to X$ y $\varepsilon_n \to 0$. Las definamos de la sigiente manera:

$$f_n : X_n \to X \text{ y } f_n(x) = x_i \text{ si } x \in X_{n,i}.$$

Ahora, para definir las épsilon adecuadas, notemos la siguiente igualdad:

$$dis(f_n) = \sup_{x,y \in X} |d_X(x,y) - d_X(f_n(x), f_n(y))|.$$

Luego, para cualesquiera $x, y \in X$

$$|d_{X_n}(x,y) - d_X(x_i, x_j)| \leq dis(f_n) \leq \varepsilon_n,$$
$$-\varepsilon_n \leq d_{X_n}(x,y) - d_X(x_i, x_j) \leq \varepsilon_n.$$

Entonces, tomando ínfimos para $x \in X_{n,i}$ y $y \in X_{n,j}$, se sigue que:

$$-\varepsilon_n \leq d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) - d_X(x_i, x_j) \leq \varepsilon_n.$$

Así, cuando $n$ tiende a infinito, concluimos que

$$d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i, x_j).$$

$\square$

A continuación, una observación sencilla pero que muestra la importancia de los espacios métricos finitos ya que estos son densos en nuestro espacio ambiente.

**Proposición 4.0.12** *Todo espacio métrico compacto es límite de espacios métricos finitos.*

**Demostración:**

Sea $X$ una espacio compacto. Consideremos una sucesión de reales positivos $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\varepsilon_n \to 0$. Ahora, como $X$ es compacto para cada $\varepsilon_n$ existe $S_n \subset X$ finito, que cumple con ser $\varepsilon_n$-red en $X$. Entonces, $S_n \to_{GH} X$ por el único hecho de que $d_{GH}(S_n, X) \leq d_H(S_n, X) \leq \varepsilon_n$. $\square$

Como hemos visto, las $\varepsilon$-redes han resultado muy importantes al estudiar la distancia de Gromov-Hausdorff. En este caso, las ocuparemos para reducir la convergencia de espacios métricos compactos a la convergencia de sus subconjuntos finitos.

Para ello, veamos primero la siguiente definición.

**Definición 4.0.13** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos compactos, y $\varepsilon$, $\delta > 0$. Así, diremos que $X$ y $Y$ son* $(\varepsilon, \delta)$-aproximaciones *uno del otro si existen colecciones finitas de puntos $\{x_i\}_{i=1}^N$ y $\{y_i\}_{i=1}^N$ en $X$ y $Y$, respectivamente, tales que:*

*(1) El conjunto $\{x_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ es una $\varepsilon-$red en $X$, y $\{y_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ es una $\varepsilon-$red en $Y$.*

*(2) $|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| < \delta$ para todas $i, j \in \{1, ..., N\}$.*

*Si $\varepsilon = \delta$, solo diremos que es una $\varepsilon$-aproximación.*

Con la siguiente proposición haremos la reformulación de la convergencia en término de sus subconjuntos finitos:

**Proposición 4.0.14** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos compactos, se cumple lo siguiente*

*i) Si $Y$ es una $(\varepsilon, \delta)$-aproximación de $X$, entonces, $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon + \delta$,*

*ii) Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, entonces, $Y$ es una $5\varepsilon$-aproximación de $X$.*

Demostración:

i) Supongamos que $Y$ es una $(\varepsilon, \delta)$-aproximación de $X$. Sean $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ y $Y_0 = \{y_i\}_{i=1}^N$ las $\varepsilon-$ redes en $X$ y $Y$, respectivamente, de la definición de $(\varepsilon, \delta)-$aproximación. Luego, por la segunda condición de ser $(\varepsilon, \delta)$-aproximación, es claro que $\mathfrak{R} = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq N\}$ es una correspondencia entre $X_0$ y $Y_0$ tal que $dis(\mathfrak{R}) \leq \delta$. Por otra parte, en virtud del Teorema 3.2.7, tenemos que $d_{GH}(X_0, Y_0) \leq \delta/2$. Además, dado que $X_0$ y $Y_0$ son $\varepsilon-$redes en $X$ y $Y$, tenemos que $d_{GH}(X_0, X) \leq \varepsilon$ y $d_{GH}(Y_0, Y) \leq \varepsilon$. Después, aplicando la desigualdad del triángulo, obtenemos lo siguiente

$$d_{GH}(X, Y) \leq d_{GH}(X, X_0) + d_{GH}(X_0, Y_0) + d_{GH}(Y_0, Y) < 2\varepsilon + \delta/2,$$

por lo que

$$d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon + \delta$$

ii) Supongamos que $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$. Así, por la proposición 3.3.2, existe una $2\varepsilon$-isometría $f : X \to Y$. Ahora, consideremos $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ una $\varepsilon$-red finita en $X$ y sea $Y_0 = \{y_i \in Y \mid y_i = f(x_i),\ 1 \leq i \leq N\}$. Por lo tanto, como $dis(f) < 2\varepsilon$, $|d_X(x_i,x_j) - d_Y(y_i,y_j)| < 2\varepsilon < 5\varepsilon$ para todas $i,j \in \{1,2,...,N\}$. Ahora, solo falta probar que $Y_0$ es una $5\varepsilon$-red en $Y$.

Sea $y \in Y$. Luego, existe $x \in X$ tal que $d_Y(y, f(x)) \leq 2\varepsilon$, dado que $f(X)$ es una $2\varepsilon$-red en $Y$. Así mismo, como $X_0$ es una $\varepsilon$-red en $X$, existe $x_i \in X_0$ tal que $d_X(x,x_i) \leq \varepsilon$. Por lo que,

$$d_Y(y,y_i) = d_Y(y, f(x_i)) \leq d_Y(y, f(x)) + d_Y(f(x), f(x_i)).$$

Así,

$$d_Y(y,y_i) \leq 2\varepsilon + d_X(x,x_i) + dis(f).$$

Por lo tanto, $d_Y(y,y_i)2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon$ $\square$.

**Proposición 4.0.15** *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos y $X$ un espacio métrico compacto, $X_i \to_{GH} X$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon$-red finita $S$ en $X$ y $\varepsilon$-redes finitas $S_n$ en cada $X_n$, tales que $S_n \to_{GH} S$. Más aún, para $n$ suficientemente grande las $\varepsilon$-redes pueden ser tomadas de tal modo que $S_n$ y $S$ tengan la misma cardinalidad.*

**Demostración:**

- Supongamos que tales $\varepsilon$-redes existen $S_n \to_{GH} S$, entonces, para $n$ suficientemente grande, $X_n$ es $\varepsilon$-aproximación de $X$ (las $\varepsilon$-redes elegidas son $S_n$ y $S$ para cada $n$), pues $S_n \to_{GH} S$ y, por la proposición 3.3.1, existe una sucesión de $\varepsilon_n$-isometrías tales que $\varepsilon_n \to 0$, mientras que, $\varepsilon_n < \varepsilon$ para $n$ suficientemente grande. Así, para $x_{n,i}, x_{n,j} \in S_n$ y $x_i, x_j \in S$ sucede que

$$|d_{X_n}(x_{n,i}, x_{n,j}) - d_X(x_i, x_j)| \leq dis(f_n) < \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Entonces, por la proposición anterior tenemos que $d_{GH}(X_n, X) < 3\varepsilon$, y, como esto aplica para cualquier $\varepsilon$, la cual podemos hacer tender a 0 y, por lo tanto, $X_n \to_{GH} X$.

- Ahora, supongamos que $X_n \to_{GH} X$. Primero, tomemos $S$ una $\varepsilon/2$-red finita en $X$. Así, por la convergencia deben existir $f_n : X \to X_n$ $\varepsilon_n$-isometrías tales que $\varepsilon_n \to 0$. Luego, consideremos $S_n = f_n(S)$. De este modo podemos definir $\hat{f}_n : S \to S_n$ como $\hat{f}_n = f_n|_S$, por lo que es claro que estas son $\varepsilon_n$-isometrías. Además, ya sabíamos que $\varepsilon_n \to 0$, esto implica que $S_n \to_{GH} S$.

  Veamos que para $n$ suficientemente grande $S_n$ es una $\varepsilon$-red en $X_n$. Consideremos $n$ de tal forma que a partir de este $\varepsilon_n < \varepsilon/4$ y sea $x_n \in X_n$. Como $f_n(X)$ es $\varepsilon_n$-red, hay $y \in f_n(X)$ de tal forma que $d_{X_n}(x_n, y) \leq \varepsilon$, existe $x \in X$ tal que $y = f_n(x)$ y como $S$ es una $\varepsilon/2$-red en $X$ existe $x' \in S$ tal que $d_X(x, x') < \varepsilon/2$. Entonces:

$$d_{X_n}(x_n, f_n(x')) \leq d_{X_n}(x_n, f_n(x)) + d_{X_n}(f_n(x), f_n(x')).$$

  Luego,

$$\begin{aligned} d_{X_n}(x_n, f_n(x')) &< d_{X_n}(x_n, f_n(x)) + dis(f_n) + d_X(x, x') \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_n + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

  por lo que, efectivamente, $S_n$ es una $\varepsilon$-red en $X_n$ para $n$ suficientemente grande. Además, por la Proposición 4.0.11 tenemos que, a partir de cierta $n$, la cardinalidad de $S_n$ es igual a la de $S$. □

Finalmente, el uso de sucesiones para estudiar propiedades topológicas de un espacio es algo bastante común. Sin embargo, a veces no podemos encontrar sucesiones convergentes. Afortunadamente, en algunos casos, hay teoremas que nos aseguran la existencia de una subsucesión convergente, y tal es la naturaleza del último teorema de este capítulo. Aunque antes debemos dar la siguiente definición.

**Definición 4.0.16** *Dada una clase de espacios métricos compactos $\mathfrak{X}$, diremos que esta es* uniformemente totalmente acotada *si cumple las siguientes condiciones:*

*(1) Existe una constante $D$ tal que $diam(X) < D$ para toda $X \in \mathfrak{X}$.*

*(2) Para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que toda $X \in \mathfrak{X}$ contiene una $\varepsilon-$red que consiste en no más de $N$ puntos.*

**Teorema 4.0.17** *Cualquier clase de espacios métricos compactos $\mathfrak{X}$ uniformemente totalmente acotada es pre-secuencialmente compacta en la topología de Gromov-Hausdorff. Es decir, cualquier sucesión de elementos de $\mathfrak{X}$ contiene una subsucesión convergente.*

**Demostración:**

Supongamos que $\mathfrak{X}$ es una clase de espacios métricos compactos uniformemente totalmente acotada. Primero, dada $\varepsilon > 0$ sean $D$ y $N(\varepsilon)$ constantes como las que se piden en la definición inmediatamente anterior. Luego, definamos $N_1 = N(1)$ y $N_k = N_{k-1} + N(1/k)$ para toda $k \geq 2$. Finalmente, sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos de $\mathfrak{X}$, y en cada $X_n$ consideremos la union de las $1/k$-redes, llamemosla $S_n$.

Así, $S_n$ es una colección de puntos densa y numerable, por lo que podemos escribirla como $S_n = \{x_{i,n}\}_{i=1}^{\infty}$ cuyos primeros $N_k$ puntos forman una $1/k$-red en $X_n$ para cada $k$ natural. Además, las distancias $d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n})$ son menores o iguales que $D$, para cualesquiera $i, j$. Es decir, estas distancias pertenecen a un intervalo compacto. Luego, aplicando una diagonal de Cantor podemos obtener una subsucesión de $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n}))_{n=1}^{\infty}$ converja para toda $i, j$. Así, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la misma $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple esto.

Ahora, construyamos el espacio límite. Para ello, consideremos $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto numerable y definamos en él la semimétrica $d$ como:

$$d(x_i, x_j) = \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n}).$$

Así, al considerar el espacio cociente inducido por la semimétrica y equiparlo con la misma $(X/d, d)$, obtenemos un espacio métrico. Luego, denotaremos por $\hat{x_i}$ a la clase que se obtiene de $x_i$. Este espacio podría no ser completo por lo que consideramos su completación, que escribiremos como $\hat{X}$. Ahora, probaremos que $X_n \to_{GH} \hat{X}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos los conjuntos:

- $S^{(k)} = \{\hat{x_i} | 1 \leq i \leq N_k\}$.
- $S_n^{(k)} = \{x_{i,n} | 1 \leq i \leq N_k\}$.

Claramente, $S_n^{(k)}$ es una $(1/k)-$red en $X_n$. Y en adición, para $x_{i,n}$ existe $j \leq N_k$ tal que $d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n}) \leq 1/k$ pues $x_{i,n} \in S_n$, y esto sucede para un número infinito de índices, dado que $N_k$ no depende de $n$. Ahora, tomando el límite obtenemos que $d_{\hat{X}}(x_i, x_j) \leq 1/k$ para esta $j$. Por lo tanto, $S^{(k)}$ resulta ser una $(1/k)-$red en $\hat{X}$. Puesto que $\hat{X}$ es completo y que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una $(1/k)-$red en $\hat{X}$, de este modo, concluimos que $\hat{X}$ es compacto.

Más aún, cada $S^{(k)}$ es el límite en el sentido de Gromov-Hausdorff de la sucesión $\{S_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, cuyos elementos son de cardinalidad $N_k$ y las distancias de estos convergen. En virtud de la proposición 4.0.14, se sigue que $X_n \to_{GH} \hat{X}$ $\square$

# Capítulo 5

# El Hiperespacio de Gromov-Hausdorff

En este capítulo terminaremos de definir el espacio de clases de espacios métricos en el que hemos estado trabajando. Además, de relacionar este con el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$, ya que, como lo mencionamos en el Teorema 1.1.1, este es universal para la clase de espacios métricos separables. En particular, a cada espacio métrico compacto lo podemos encajar en $\mathbb{U}$. Procedamos con la definición.

Para empezar, denotaremos al conjunto de clases de isometría de espacios métricos compactos por $\mathbb{GH}$. Así, llamaremos *hiperespacio de Gromov-Hausdorff* al espacio métrico conformado por el par $(\mathbb{GH}, d_{GH})$.

Lo primero que debemos notar es que, gracias al espacio universal de Urysohn podemos reformular la definición de la distancia de Gromov-Hausdorff de la siguiente manera

$$d_{GH}(X,Y) = \text{ínf}\{d_H(i(X), j(Y)) | i : X \hookrightarrow \mathbb{U}\ j : Y \hookrightarrow \mathbb{U}\}.$$

Con esto, además, podemos notar que la clase de isometría de algún espacio métrico compacto tiene un representante en $2^{\mathbb{U}}$. Sin embargo, estos representates no son necesariamente únicos. Para *pegar* de algún modo esto vamos a recurrir a un espacio de órbitas, así que, empecemos a trazar el camino para hacer esto. A partir de aquí $d$ será la métrica de $\mathbb{U}$ y $d_H$ la métrica de $2^{\mathbb{U}}$.

**Proposición 5.0.1** *$ISO(\mathbb{U})$ actúa en $\mathbb{U}$.*

**Demostración:**

Como lo señalamos en el capítulo 1, $ISO(\mathbb{U})$ es un grupo topológico, cuando es equipado con la topología de la convergencia puntual. Entonces, definamos la acción $\theta : ISO(\mathbb{U}) \times \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ de la siguiente manera:

$$\theta(g, x) = g(x).$$

Veamos que, efectivamente, es una acción. Primero probemos que es continua. Sea $x \in \mathbb{U}$ y $\varepsilon > 0$, consideremos $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{U}$ la bola abierta. Consideremos $M(x, B_{\varepsilon/2}(x)) \times B_{\varepsilon/2}(x))$ . Es claro que este es un abierto en $ISO(\mathbb{U}) \times \mathbb{U}$ por ser producto de abiertos, veamos que este es un subconjunto de $\theta^{-1}(B_\varepsilon(x))$. Sea $(g, y) \in M(x, B_{\varepsilon/2}(x)) \times B_{\varepsilon/2}(x)$. Por la desigualdad del triángulo tenemos la siguiente desigualdad:

$$d(g(y), x) \leq d(g(y), g(x)) + d(g(x), x).$$

Luego, del hecho de que $g$ isometría y de que $g(x), y \in B_{\varepsilon/2}(x)$ deducimos que:

$$d(g(y), x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto $(g, y) \in \theta^{-1}(B_\varepsilon(x))$, así este último es abierto y $\theta$ continua.

Ahora probemos que $\Theta$ cumple las propiedades de ser acción, sean $g, h \in ISO(\mathbb{U})$ y $x \in \mathbb{U}$.

- $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(g, h(x)) = g(h(x)) = g \circ h(x) = \theta(g \circ h, x)$.
- $\theta(Id, x) = Id(x) = x$.

□

Sin embargo, necesitamos más que esto por lo que es necesario probar la siguiente proposición.

**Proposición 5.0.2** *$ISO(\mathbb{U})$ actúa en $2^{\mathbb{U}}$.*

Como lo señalamos en el capítulo 1, $ISO(\mathbb{U})$ es un grupo topológico con la topología de la convergencia puntual, pero también con la topología compacto-abierta. Entonces, definamos la acción $\Theta : ISO(\mathbb{U}) \times 2^{\mathbb{U}} \to 2^{\mathbb{U}}$ de la siguiente manera:

$$\Theta(g, A) = g(A).$$

La demostración de que $\Theta$ es acción es análoga a la hecha en la proposición anterior para $\theta$, por ello, solo escribiremos la parte de continuidad para señalar algunos detalles

Sea $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^{\mathbb{U}}$, entonces consideremos $B_\varepsilon(A) = U \subset \mathbb{U}$ un abierto. Ahora, veamos que $\Theta^{-1}(U)$ es abierto. Sea $g \in V \subset M(A, U_{\varepsilon/2}(A))$ de tal modo que $V$ sea una vecindad simétrica (es decir, si $g \in V$ también $g^{-1}$ lo está, este tipo de abiertos siempre se pueden encontrar en grupos topológicos, ver [13]). Por lo tanto, claramente $g(A) \subset U_{\varepsilon/2}(A)$ y $g^{-1}(A) \subset U_{\varepsilon/2}(A)$, lo que implica que, de igual forma, $A \subset U_{\varepsilon/2}(g(A))$, y, así, tenemos que $d_H(A, g(A)) < \varepsilon/2$. Luego, es evidente que $M(A, U_{\varepsilon/2}(A)) \times B_{\varepsilon/2}(A)$ es un abierto .

Ahora, veamos que este es un subconjunto de $\Theta^{-1}(B_\varepsilon(A))$.

Sea $(g, B) \in M(A, B_{\varepsilon/2}(A)) \times B_{\varepsilon/2}(A))$, por la desigualdad del triángulo tenemos la siguiente desigualdad:

$$d(g(B), A) \leq d(g(B), g(A)) + d(g(A), A).$$

Luego, del hecho de que $g$ es isometría, que $B \in B_{\varepsilon/2}(A)$ y de que $d_H(A, g(A)) < \varepsilon/2$ deducimos que:

$$d(g(B), A) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

por lo tanto, $(g, B) \in \Theta^{-1}(B_\varepsilon(A))$, y, así, este último es abierto, y $\theta$, continua. $\square$

Por otra parte, dado $A \in 2^{\mathbb{U}}$ a la orbita que le corresponde en $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$, la denotaremos por $A^*$. Así, notemos que dados $A, B \in 2^{\mathbb{U}}$ si, $A^* = B^*$, entonces $A$ y $B$ son isométricos, es decir, que hemos logrado lo que buscabamos en cuanto a *pegar* los puntos que representan a la misma clase.

Ahora, si llamamos $G$ a $ISO(\mathbb{U})$, tenemos que $2^{\mathbb{U}}$ es un $G - espacio$. Además, claramente es un espacio $G - invariante$, pues los elementos de $G$ son isometrías. Entonces para dotar a $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$ de una métrica como la señalada en el Teorema 1.2.4, basta probar la propiedad que se desarrolla a continuación.

**Proposición 5.0.3** *Cada $ISO(\mathbb{U})$-órbita es cerrada en $2^{\mathbb{U}}$.*

**Demostración:**

Sean $A, B \in 2^{\mathbb{U}}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset ISO(\mathbb{U})$ tales que $g_n(A) \to B$ en $2^{\mathbb{U}}$. Equivalentemente, podemos decir que $d_H(g_n(A), B) \to 0$. Ahora, probemos que $B = g(A)$ para alguna $g \in ISO(\mathbb{U})$. Esto será suficiente para probar que cada $ISO(\mathbb{U})$-órbita es cerrada, ya que por el Corolario 1.3.3 $ISO(\mathbb{U})$ es I-numerable.

Sea $\varepsilon > 0$, existe un natural $n \geq 1$ tal que $d_H(g_n(A), B) < \varepsilon$. Denotemos por $i : B \hookrightarrow \mathbb{U}$ y $j : A \hookrightarrow \mathbb{U}$ a los encajes isométricos que existen para $A$ y $B$. Posteriormente, la composición $j_n = g_n \circ j : A \hookrightarrow \mathbb{U}$ es un encaje isométrico para $A$ tal que $d_H(j_n(A), i(B)) < \varepsilon$. Dado que $\varepsilon$ fue arbitraria podemos concluir que $d_{GH}(A, B) = 0$. Así, gracias a esto y al teorema 3.4.1 deducimos que $A$ y $B$ son isométricos, y por el Teorema 1.1.3 debe existir $g \in ISO(\mathbb{U})$ tal que $g(A) = B$. Por lo tanto, con esto tenemos que $gA$ es cerrada en $2^{\mathbb{U}}$. $\square$

Gracias al Teorema 1.2.4 y al resultado que acabmos de probar, concluimos lo siguiente.

**Corolario 5.0.4** $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$ *es metrizable y su topología esta inducida por la siguiente métrica:*

$$\hat{d}_H(A^*, B^*) = inf\{d_H(A, gB) | g \in ISO(\mathbb{U})\}.$$

*Además,*

$$\hat{d}_H(A^*, B^*) \leq d_H(A, B).$$

Con este corolario podemos relacionar el espacio de órbitas $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$ con el hiperespacio de Gromov-Hausdorff de una forma muy interesante, pues, la relación existente entre ellos es de isometría, pero esto no nos sorprende, ya que, es lo que hemos preparado; lo haremos a través del siguiente teorema.

**Teorema 5.0.5** $\mathbb{GH}$ *es isométrico al espacio de órbitas* $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$.

**Demostración:**

Sea $[X] \in \mathbb{GH}$. En virtud del Teorema 1.1.1 (de Urysohn) existe un encaje isométrico $j : X \hookrightarrow \mathbb{U}$. Luego, si $[Y] = [X]$, como consecuencia del Teorema 1.1.3, para cuales quiera dos encajes isométricos $j : X \hookrightarrow \mathbb{U}$ y $k : Y \hookrightarrow \mathbb{U}$, las imágenes $j(X)$ y $k(Y)$ tienen la misma $ISO(\mathbb{U})$-órbita en $2^{\mathbb{U}}$. Por lo tanto, tenemos que $j(X)^* = k(Y)^*$. Así la función $f : \mathbb{GH} \to 2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$ dada por $f([X]) = j(X)^*$, donde $j : X \hookrightarrow \mathbb{U}$, es un encaje isométrico, está bien definida.

Ahora, afirmamos que $f$ es isometría. Evidentemente $f$ es biyectiva y se cumple la siguiente desigualdad (donde $\hat{d}_{GH}$ es la métrica definida en el Corolario 5.0.4):

$$d_{GH}([X],[Y]) \leq \hat{d}_H(f([X]), g([Y])).$$

Para ver la otra desigualdad, tomemos $\varepsilon > 0$ y denotemos por $r = d_{GH}([X],[Y])$. Así, en consececuencia de la definición de la distancia de Gromov-Hausdorff existen encajes isométricos $i : X \hookrightarrow M$ y $l : Y \hookrightarrow M$, en algún espacio métrico $(M, \eta)$ tal que $\eta_H(i(X)), l(Y)) < r + \varepsilon$. Así, el Teorema 1.1.1 (de Urysohn) nos asegura la existencia de un encaje isométrico $\xi : M \hookrightarrow \mathbb{U}$, entonces, las composiciones $\phi = \xi \circ i : X \hookrightarrow \mathbb{U}$ y $\psi = \xi \circ l : Y \hookrightarrow \mathbb{U}$ son encajes isométricos que cumplen con lo siguiente:

$$d_H(\phi(X), \psi(Y)) = \eta_H(i(X), l(Y)) < r + \varepsilon.$$

Ahora, observemos que $f([X]) = \phi(X)^*$ y $f([Y]) = \psi(Y)^*$. Luego, debido al corolario 5.0.3.1 tenemos la desigualdad que se muestra a continuación:

$$\hat{d}_H(\phi(X)^*, \psi(Y)^*) \leq d_H(\phi(X), \psi(Y)).$$

Así, de esta desigualdad y la anterior obtenemos:

$$\hat{d}_H(f([X]), f([Y])) = \hat{d}_H(\phi(X)^*, \psi(Y)^*) \leq d_H(\phi(X), \psi(Y)) < r + \varepsilon.$$

Y, como $\varepsilon$ fue arbitraria, resulta que $\hat{d}_H(f([X]), f([Y])) \leq r$, tal como buscábamos. Por lo tanto, $\hat{d}_H(f([X]), f([Y])) = d_{GH}([X], [Y])$. □

Esta relación es sumamente interesante ya que con ella hemos conectado al espacio universal de Urysohn con el hiperespacio de Gromov-Hausdorff, lo que nos da una visión más general de este. Ahora, tenemos otra persepectiva para estudiarlo, pues el espacio Universal de Urysohn es un espacio del cual conocemos todo respecto a su topología.

Así, podemos estudiar a $\mathbb{GH}$ con la distancia de Gromov-Hausdorff o estudiando el espacio de órbitas de $2^{\mathbb{U}}$. También nos da un punto de vista geométrico distinto, pues como vimos en el capítulo 2, un espacio y su hiperespacio están fuertemente conectados.

Una posible aplicación de esto lo vemos en el siguiente teorema.

**Teorema 5.0.6** $\mathbb{GH}$ *es conexo.*

**Demostración:**

Para realizar la demostración primero probaremos que $\ell^2$ es conexo. Recoredemos que $\ell^2$ es el espacio de la sucesiones cuadrado sumables, y que para $v = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ y $w = (w_1, w_2, w_3, \dots)$ elementos de $\ell^2$, la distancia está definida como:

$$d_{\ell^2}(v, w) = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{\infty}(v_i - w_i)^2}$$

Sea $v \in \ell^2$. Definamos la función $f_v : \mathbb{R} \to \ell^2$ como $f_v(c) = cv$. Veamos que $f_v$ es continua. Esta afirmación es evidente para $v = 0$. Entonces, consideremos el caso en el que $v$ es didstinto de cero. Sean $\varepsilon > 0$ y $v_0 \in \ell^2$. Probaremos que la preimagen de $B := B_\varepsilon(v_0)$ es abierta. Tomemos $c \in f_v^{-1}(B)$ y definamos $\delta := \dfrac{\varepsilon - d_{\ell^2}(cv - v_0)}{||v||}$. Ahora, sea $c_0 \in B_\delta(c)$. Basta ver que $f_v(c_0) \in B$ para probar la continuidad.

$$\begin{aligned}
&d_{\ell^2}(f_v(c_0), v_0)\\
&= d_{\ell^2}(c_0 v, v_0)\\
&\leq d_{\ell^2}(c_0 v, cv) + d_{\ell^2}(cv, v_0)\\
&\leq |c_0 - c| \cdot ||v|| + d_{\ell^2}(cv, v_0)\\
&\leq \delta \cdot ||v|| + d_{\ell^2}(cv, v_0) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $f_v(c_0) \in B$ y, por lo tanto, $f_v$ es continua. Esto sucede para cualquier $v \in \ell^2$, y, por el teorema de la imagen continua, tenemos que $f_v(\mathbb{R})$ es conexa. Luego, todas estas imagenes conexas se intersecan, dado que coinciden en el valor que toman en cero. Además, $\ell^2 = \bigcup_{v \in \ell^2} f_v(\mathbb{R})$, por lo que, $\ell^2$ resulta ser conexo.

Ahora, veamos la cadena de teoremas que nos llevan al resultados final.

Dado que $\ell^2$ es conexo, como consecuencia del Teorema 1.1.2, tenemos que $\mathbb{U}$ es conexo. Luego, por el Teorema 2.2.10, obtenemos que $2^{\mathbb{U}}$ es conexo. Después, en virtud del Teorema 1.2.3, deducimos que $2^{\mathbb{U}}/ISO(\mathbb{U})$ es conexo. Finalmente, utilizando el teorema 5.0.5, concluimos que $\mathbb{GH}$ es conexo.

$\square$

# Bibliografía


[1] S. A. Antonyan, *The Gromov-Hausdorff hyperspace of a euclidean space*, Advances in Mathematics, 363 (2020) 106977.

[2] D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, A.M.S., Providence, RI, 2001.

[3] M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*. Math. Ann. 68, (1910) 145–168.

[4] J.G. Guerrero Mojica, *Espacios polacos universales*. Universidad Industrial de Santander, Colombia, 2021.

[5] M. Gromov, *Metric structures for riemannian and non-riemannian Spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser, 1999.

[6] M. Gromov, *Structures métriques pour les varits riemanniennes*, Textes Mathématiques (Mathematical Texts), vol. 1, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu

[7] G.E. Huhunaishvili, *On a property of Urysohn's universal metric space*, Dokl. Acad. Nauk SSSR (N. S.) 101 (1955) 332–333 (in Russian).

[8] M. Husek, *Urysohn universal space, its development and Hausdorff's approach*. Topology and Its Applications, 155 (14) (2008) 1493–1501.

[9] D. P. Huttenlocher, G. A. Klanderman, W. J. Rucklidge. *Comparing images using the Hausdorff distance*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 15(9) (1993) 850-863.

[10] M. Katetov, *On universal metric spaces*, in: Frolik (Ed.), Proc. of the 6th Prague Topological Symposium (1986), Heldermann, Berlin, 1988, 323–330.

[11] J.L Kelley, *General Topology*, Springer, 1999.

[12] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math. 73 (2) (1961) 295–323.

[13] M. Tkachenko, L.M. Villegas Silva, C. Hernández García, O.J. Rendón Gómez, *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Iztapalapa, Ciudad de México, 1997.

[14] P.S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, C. R. Acad. Sci. Paris 180 (1925) 803-806.

[15] P.S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. 51 (1927) 43-64 et 74-90.

[16] V. Uspenskij, *The Urysohn universal metric space is homeomorphic to a Hilbert space*, Topology and its Applications 139 (2004) 145–149.

[17] V. Uspenskij, *On the group of isometries of the Urysohn universal metric space*, Comment. Math. Carolinae 31(1) (1990), 181-182.

[18] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology.* Prerequisites and Introduction, North-Holland Publ.Co., Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1989.

[19] J. Van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, Volume 64, North-Holland, Oxford, England, 2002.

# Índice alfabético