



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

FORMALISMO DE CONTACTO EN LA
TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

HERNÁNDEZ JUÁREZ BRANDON ADRIÁN

TUTOR PRINCIPAL:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS, ICN, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA, ICN, UNAM

DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO, FC, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, OCTUBRE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Graduación con trabajo escrito)**

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la Institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado:

Formalismo de contacto en la termodinámica de agujeros negros

que presenté para obtener el grado de ~~Maestría~~ es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi programa de posgrado, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de graduación.

Atentamente

Hernández Juárez Brandon Adrián

311167577

(Nombre, firma y Número de cuenta de la persona alumna)

Agradecimientos

Concluir este trabajo fue todo un proceso lleno de altibajos que no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de muchas de las personas que permanecen a mi lado, no hacerles una mención sería dar por sentado mi aprecio, lo mínimo que merecen.

Para empezar quiero agradecerle a mi madre Beatríz por su infinita paciencia, mi pilar estos últimos años, sin ella definitivamente no estaría escribiendo este texto. Agradezco también a mi padre Perfecto y mis hermanos Karen y Bryan que siguen colmándome de buenos deseos para así cumplir mis metas.

Extiendo mi agradeciendo a mis valiosos amigos, no solo por mantenerse cerca sino también por ese constante impulso que muchas veces me hace falta para dar el siguiente paso. A Hodek y a Moises, no se en que caverna estaría sin ustedes. A Roger y a Johas por tantos días de gustos y disgustos. Y finalmente a César, a quien nunca he podido corresponder con tanto.

Le agradezco especialmente al Dr. Hernando Quevedo por su experiencia y tolerancia. Sin su guía este trabajo no habría visto su conclusión.

Antes de terminar agradezco la atención dada por los sinodales. Por haberse tomado el tiempo de leer mi trabajo y sobretodo por los fructuosos comentarios que me hicieron, en particular los del Dr. Alessandro Bravetti.

Finalmente aprovecho para agradecer al CONACyT, el apoyo económico que me brindo durante la maestría fue vital. Y al ICN, realmente me hubiera gustado completar toda mi formación ahí.

Índice

1. Introducción	3
2. La geometría de contacto	6
2.1. Distribuciones	6
2.2. La estructura de contacto	11
2.3. La estructura de contacto estándar en \mathbb{R}^{2n+1}	12
2.4. El espacio de los elementos de contacto	13
2.5. Simplectificación y contactificación	15
2.6. Contactomorfismos, campos vectoriales y hamiltonianos de contacto	19
2.7. Subvariedades de Legendre	24
3. Formulación geométrica de la termodinámica en equilibrio	25
3.1. El Espacio de Estados de Equilibrio Termodinámico (TES)	25
3.2. El Espacio Fase Termodinámico (TPS)	27
3.3. La termodinámica en el formalismo geométrico	28
3.4. Contactomorfismos y potenciales termodinámicos	29
3.5. Ecuaciones de movimiento	30
3.6. Ejemplo : Gas ideal	34
3.7. Ejemplo: Gas de Van der Waals	35
4. Termodinámica de agujeros negros	36
4.1. Las leyes de la termodinámica de agujeros negros	37
4.2. Ecuaciones termodinámicas de agujeros negros	42
4.3. Termodinámica hamiltoniana de agujeros negros	45
4.3.1. Agujero negro de Schwarzschild	46
4.3.2. Agujero negro de Reissner-Nordström	50
4.3.3. Agujero negro de Kerr	55
4.3.4. Agujero negro de Kerr-Newman	60
4.3.5. Transformaciones del agujero negro de Schwarzschild	67
4.3.6. Transformaciones del agujero negro de Schwarzschild en AdS	70
5. Conclusiones	75

1. Introducción

En el ámbito teórico la geometría diferencial ha demostrado ser una herramienta sumamente poderosa para la física. Muchas de las teorías con una representación matemática en este marco no solo han sido generalizadas con descripciones elegantes, en algunos casos incluso hemos obtenido una mayor comprensión de los fenómenos que intentamos explicar o predecir.

En el caso de la termodinámica clásica en equilibrio el primer acercamiento geométrico vio sus inicios en la formulación dada por Gibbs [26], mediante su método gráfico y la representación de sistemas termodinámicos por medio de superficies. Noción de lo que posteriormente denominaremos como Espacio de Estados de Equilibrio Termodinámico (TES). Dicho trabajo motivó la axiomatización matemática de la termodinámica hecha por Carathéodory [12], basada en las ecuaciones de Pfaff y el teorema de Frobenius [13] para la segunda ley de la termodinámica.

A pesar de esos avances, no fue sino hasta más de medio siglo después que la termodinámica finalmente alcanzó una descripción en el lenguaje de las variedades diferenciales, debido principalmente a los trabajos de Hermann y Mrugala [31, 37–40], que introdujeron el concepto Espacio Fase Termodinámico (TPS). Un espacio $(2n + 1)$ -dimensional dotado con una estructura de contacto dada por una 1-forma no degenerada α que incorpora de manera natural la primera ley de la termodinámica para sistemas termodinámicos de n -grados de libertad.

Una formulación basada en la geometría de contacto permitió desarrollar un formalismo para la termodinámica que en ciertos aspectos recuerda al de la geometría simpléctica de la mecánica hamiltoniana, esencialmente porque toda función continua $h \in C^\infty$ sobre el TPS tiene un campo vectorial de contacto asociado V_h . Este formalismo proporciona, bajo ciertas condiciones, una manera de establecer procesos termodinámicos a partir de relaciones termodinámicas ya conocidas e incluso nuevos sistemas deformando otros. En nuestro caso, lo aplicaremos a sistemas termodinámicos de agujeros negros.

La termodinámica de agujeros negros es relativamente reciente, originalmente comenzó como una asombrosa analogía dada por Bardeen, Carter y Hawking [4], entre las leyes mecánicas de los agujeros negros y las leyes macroscópicas de la termodinámica en equilibrio. No obstante, a pesar del increíble parecido la naturaleza tan distinta entre cada grupo leyes hacía pensar que este era un resultado más matemático que físico. Poco tiempo después Bekenstein, incentivado por el teorema del área del Hawking [30], mostró que los agujeros negros debían tener una cierta entropía estrechamente relacionada con el área del horizonte de eventos [5], e incluso basado en esta premisa propuso una generalización para la segunda ley [6]. Esto sugirió que la similitud entre las leyes era más que una analogía y motivó la forma de entender a los agujeros negros como sistemas termodinámicos.

La cuestión es que si bien los avances fueron notables la termodinámica de agujeros negros desde el punto de vista clásico no es posible, pues un agujero negro al ser prácticamente una región que absorbe todo y no emite nada debería tener un temperatura igual a cero. Este problema fue resuelto por Hawking en el ámbito cuántico al descubrir un fenómeno de creación de partículas en el horizonte de eventos que da como resultado una emisión neta de radiación desde el agujero negro con un espectro de cuerpo negro con temperatura T_H [28]. Valor que posteriormente permitió conocer de forma explícita la entropía propuesta por Bekenstein S_{BH} , también llamada entropía de Bekenstein-Hawking.

El descubrimiento de la radiación de Hawking fue una contribución enorme que ayudó a entender la termodinámica aplicada a agujeros negros. Basados en este contexto se han estudiado los agujeros negros como sistemas termodinámicos desde múltiples aproximaciones [19, 20, 25, 32, 44–47, 49, 53].

El objetivo de esta tesis será entonces la de describir la termodinámica asociada a sistemas de agujeros negros utilizando el formalismo de los hamiltonianos de contacto. Para alcanzar este propósito la tesis se estructurará en tres partes de la siguiente manera.

En la primera parte presentaremos los elementos matemáticos necesarios para definir una variedad de contacto y sus propiedades, en especial los hamiltonianos de contacto, campos vectoriales asociados y subvariedades de Legendre que serán fundamentales para el desarrollo de la tesis. La segunda parte será una revisión de la estructura de contacto aplicada a sistemas termodinámicos en equilibrio, aquí introduciremos el concepto de Espacio Fase Termodinámico (TPS) al igual que el planteamiento de los hamiltonianos de contacto como generadores de procesos termodinámicos. Finalmente en la tercera parte mostraremos los resultados de emplear el formalismo de contacto a los sistemas termodinámicos de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman, destacando la obtención de los hamiltonianos de contacto correspondientes a procesos termodinámicos y cuyo análisis permite identificar la transición de fase de estos sistemas así como el límite de aplicabilidad del formalismo. Adicionalmente en este capítulo se prueba llevar al agujero negro de Schwarzschild a otros sistemas termodinámicos aprovechando la posibilidad que nos ofrece el formalismo.

2. La geometría de contacto

La geometría de contacto es más conocida por su relación con la geometría simpléctica que por las características y aplicaciones que su estructura posee en sí misma. Esto es entendible considerando lo mucho que se han explotado las propiedades geométricas de la estructura simpléctica en sistemas físicos a través del formalismo hamiltoniano. Sin embargo, en las últimas décadas poco a poco ha recibido más atención pues su generalidad ha dado pie al estudio de sistemas físicos más complejos, como aquellos descritos por hamiltonianos que poseen una dependencia explícita del tiempo y términos disipativos o la base geométrica para la descripción de sistemas termodinámicos en equilibrio [8, 9, 31, 37–40]. Siendo esta última la que nos compete en este trabajo.

En esta primera sección nos centraremos en la descripción formal de una estructura de contacto sobre una variedad y sus propiedades.

2.1. Distribuciones

Para definir y entender que es una estructura de contacto, es conveniente revisar primero el concepto de distribución integrable. Es importante no confundir con el significado que se le da en análisis matemático para referirse a las llamadas distribuciones Schwartzianas o funciones generalizadas como la delta de Dirac [34].

Definición 2.1. [13, 50] *Una distribución suave k -dimensional en una variedad M es una colección de subespacios k -dimensionales $\xi_p^k \subset T_p M$ asignados de manera suave para cada $p \in M$. Es decir, para cualquier punto $p \in M$ existe una vecindad U tal que ξ_q^k es generado por los campos vectoriales suaves $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\} \forall q \in U$. Dichos campos vectoriales son llamados base local para ξ^k en U y se denota como*

$$\xi^k|_U \equiv \{X_1, \dots, X_k\}. \quad (1)$$

Los campos vectoriales (X_1, \dots, X_k) están determinados en ξ^k hasta una transformación

lineal no degenerada con coeficientes funcionales, por lo que si tenemos

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^k a_\alpha^\beta X_\beta, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \quad (2)$$

con a_α^β funciones suaves en U y el $\det(a_\alpha^\beta) \neq 0$ en cualquier punto de U , entonces $\xi^k|_U$ es también generado por los campos vectoriales Y_1, \dots, Y_k :

$$\xi^k|_U = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (3)$$

Una propiedad importante que puede tener una distribución es la llamada condición de Frobenius. Para enunciarla, recordemos que dados X y Y campos vectoriales suaves en M su corchete de Lie se define como

$$[X, Y] = XY - YX, \quad (4)$$

siendo también un campo vectorial suave en M [42].

Definición 2.2. [13] *Si una distribución k -dimensional $\xi^k = \{X_1, \dots, X_k\}$ es generada por los X 's y $[X_\alpha, X_\beta]$ es una combinación lineal de X_γ con $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq k$, se dice que la distribución satisface la condición de Frobenius¹.*

Mediante esta definición se establece el siguiente teorema:

Teorema 2.3. (Teorema de Frobenius) [13] *Supongamos que $\xi^k = \{X_1, \dots, X_k\}$ es una distribución k -dimensional en un conjunto abierto $U \in M$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un sistema local de coordenadas $(W; w^i)$, $W \subset U$ tal que*

$$\xi^k|_W = \{\partial_{w^1}, \dots, \partial_{w^k}\}, \quad (5)$$

es que ξ^k satisfaga la condición de Frobenius.

Este teorema es sumamente importante debido a sus múltiples aplicaciones, sin embargo, para fines prácticos es conveniente expresarlo en términos de formas diferenciales.

¹A la condición de Frobenius también se le suele llamar involutividad.

Supongamos que $\xi_p^k = \{X_1, \dots, X_k\}$ es una distribución suave k -dimensional en una variedad m -dimensional M , así que para cualquier punto $p \in M$, ξ_p^k es un subespacio de $T_p M$. Sea entonces

$$\left(\xi_p^k\right)^\perp = \left\{ \omega \in T_p^* M \mid \omega(X) = 0 \text{ para cualquier } X \in \xi_p^k \right\}, \quad (6)$$

un subespacio de $T_p^* M$ llamado subespacio aniquilador de ξ_p^k .

En una vecindad U de un punto arbitrario p , existen $(m - k)$ 1-formas diferenciales linealmente independientes $\{\omega_{k+1}, \dots, \omega_m\}$ que generan el subespacio aniquilador $\left(\xi_p^k\right)^\perp$ en cualquier punto de la vecindad. Esto se debe a que ξ_p^k es generado por k -campos vectoriales tangentes linealmente independientes $\{X_1, \dots, X_k\}$ también en la vecindad U , por lo que existen $(m - k)$ campos vectoriales tangentes X_{k+1}, \dots, X_m tal que $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_m$ son linealmente independientes en cualquier punto de dicha vecindad. Suponiendo que $\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_m$ son las 1-formas duales en esa vecindad, entonces en cada punto p , $\left(\xi_p^k\right)^\perp$ es generado por $\{\omega_{k+1}, \dots, \omega_m\}$. De esta manera localmente la distribución ξ^k es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\omega_s = 0, \quad k + 1 \leq s \leq m \quad (7)$$

también llamado sistema de ecuaciones Pfaffianas.

Para reexpresar la condición de Frobenius vamos a utilizar la siguiente relación [42]:

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]). \quad (8)$$

Pues si una distribución $\xi^k = \{X_1, \dots, X_k\}$ satisface la condición de Frobenius entonces

$$d\omega_s(X_\alpha, X_\beta) = X_\alpha[\omega_s(X_\beta)] - X_\beta[\omega_s(X_\alpha)] - \omega_s([X_\alpha, X_\beta]) \quad (9)$$

$$= -\omega_s([X_\alpha, X_\beta]) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Con lo cual

$$[X_\alpha, X_\beta] \in \xi^k \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k, \quad (12)$$

si y solo si

$$d\omega_s(X_\alpha, X_\beta) = 0 \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k \quad k+1 \leq s \leq m. \quad (13)$$

Esta condición es equivalente a escribir

$$d\omega_s \equiv 0 \pmod{(\omega_{k+1}, \dots, \omega_m)} \quad k+1 \leq s \leq m, \quad (14)$$

debido a que $d\omega_s$ puede ser definido en términos de ω_i ($1 \leq i \leq m$) como

$$d\omega_s = \sum_{t=k+1}^m \psi_{st} \wedge \omega_t + \sum_{\alpha, \beta=1}^k a_{\alpha\beta}^s \omega_\alpha \wedge \omega_\beta, \quad (15)$$

en donde ψ_{st} es una 1-forma diferencial y $a_{\alpha\beta}^s$ es una función suave antisimétrica respecto al par de índices inferior. Luego, como

$$\omega_j(X_i) = \delta_{ij}, \quad (16)$$

sustituyendo (15) en (13) tenemos que

$$a_{\alpha\beta}^s = 0 \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k \quad k+1 \leq s \leq m \quad (17)$$

y por consiguiente (14) toma la forma

$$d\omega_s = \sum_{t=k+1}^m \psi_{st} \wedge \omega_t, \quad (18)$$

usualmente expresada como

$$\omega_s \wedge d\omega_s = 0, \quad (19)$$

también llamada condición de Frobenius satisfecha por el sistema Pfaffiano (7).

Si existe un sistema local de coordenadas u^i tal que las subvariedades

$$u^s = \text{const} \quad k+1 \leq s \leq m \quad (20)$$

satisfacen el sistema Pfaffiano (7), entonces se dice completamente integrable. Así que para un sistema Pfaffiano (7) completamente integrable existe un sistema de coordenadas locales u^i tal que el sistema es equivalente a

$$du^i = 0 \quad k+1 \leq s \leq m. \quad (21)$$

En esta situación la distribución ξ^k es generada precisamente por los campos vectoriales $\xi^k = \{\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}\}$. El enunciado inverso también es verdadero [13].

Basado en lo anterior, el teorema de Frobenius puede reformularse como:

Teorema 2.4. (Teorema de Frobenius) [13] *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema Pfaffiano de ecuaciones*

$$\omega_\alpha = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq k \quad (22)$$

sea completamente integrable es

$$d\omega_\alpha \equiv 0 \text{ mod}(\omega_1, \dots, \omega_k) \quad 1 \leq \alpha \leq k. \quad (23)$$

Si bien el teorema de Frobenius es local, podemos partir de este para estudiar variedades integrales globales introduciendo una nueva topología en M . Supongamos que ξ^k es una distribución k -dimensional en M que satisface la condición de Frobenius, si se definen los abiertos de M como la unión de las variedades integrales de ξ^k , entonces la colección de todos esos abiertos forman una topología O en M .

Formalmente, lo anterior queda expuesto en el siguiente teorema:

Teorema 2.5. [13] *Supongamos que ξ^k es una distribución k -dimensional que satisface la condición de Frobenius en una variedad M . Entonces en cualquier punto $p \in M$, existe una máxima variedad integral $L(p)$ de ξ^k tal que cualquier variedad integral de ξ^k en p es una subvariedad abierta de $L(p)$ con respecto a la topología O .*

El término máxima variedad integral en el teorema se refiere a que no es un subconjunto propio de otra variedad integral [14].

Y para concluir, si una variedad M de dimensión m es orientable entonces una distribución k -dimensional ξ^k (con $k = m - 1$) en M se puede expresar mediante el kernel de una sola 1-forma global de máximo rango [24, 27].

Una vez revisado lo que es una distribución integrable podemos definir lo que es una estructura de contacto.

2.2. La estructura de contacto

Definición 2.6. [22,24] *Dada una variedad M de dimensión $2n + 1$, una estructura de contacto es una distribución $2n$ -dimensional $\xi = \ker \alpha \subset TM$ máximamente no integrable, i.e., existe una 1-forma α tal que satisface*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0. \quad (24)$$

Tal 1-forma es llamada forma de contacto y el par (M, α) es llamada variedad de contacto.

La condición $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ es independiente de la elección específica de α siendo una propiedad de la distribución $\xi = \ker \alpha$, cualquier otra 1-forma definiendo el mismo campo de hiperplanos debe ser de la forma $\lambda\alpha$ para cualquier función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, ya que

$$(\lambda\alpha) \wedge (d(\lambda\alpha))^n = \lambda\alpha \wedge (\lambda d\alpha + d\lambda \wedge \alpha)^n = \lambda^{n+1} \alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0, \quad (25)$$

también satisface la condición de máxima no integrabilidad.

Una formulación equivalente para definir una estructura de contacto es exigir que la distribución ξ sea no degenerada.

Definición 2.7. [3] *Una distribución $\xi = \ker \alpha$ se dice no degenerada en un punto si el rango de la 2-forma $d\alpha$ en la distribución que pasa por ese punto es igual a la dimensión de la distribución ξ . Naturalmente una distribución ξ es no degenerada en una variedad M si no es degenerada $\forall p \in M$.*

Es otra palabras, esto significa que para cualquier vector X distinto de cero en la distribución, podemos encontrar otro vector Y también en la distribución tal que el valor de la 2-forma $d\alpha(X, Y) \neq 0$. Notemos que esto solo puede pasar en variedades M de dimensión impar pues la dimensión de ξ es par. En el caso de una variedad par, la distribución ξ tendría dimensión impar y el rango de cada forma bilineal antisimétrica sobre un espacio de dimensión impar es siempre menor que la dimensión del espacio [3].

Del mismo modo, exigir que una distribución $\xi = \ker \alpha$ sea no degenerada en un variedad de contacto $(2n + 1)$ -dimensional, implica tener una 2-forma antisimétrica de rango máximo $2n$ en ξ , i.e., $(d\alpha)^n|_{\xi} \neq 0$ de tal manera que el par $(\xi_p, d\alpha|_{\xi_p})$ es de hecho un espacio vectorial simpléctico $\forall p \in M$.

Así mismo, la 2-forma $d\alpha|_{\xi}$ puede interpretarse como una medida de la integrabilidad de ξ , pues si $d\alpha|_{\xi} = 0$ entonces ξ es integrable. El que $d\alpha|_{\xi}$ sea de rango $2n$ en una variedad de dimensión $(2n+1)$ es equivalente a la condición $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$, en ese sentido es que se le denomina a una estructura de contacto una distribución maximamente no integrable.

2.3. La estructura de contacto estándar en \mathbb{R}^{2n+1}

Antes de iniciar con las propiedades de una estructura de contacto veamos el ejemplo estándar.

Sean $z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ coordenadas en \mathbb{R}^{2n+1} . La distribución ξ sobre \mathbb{R}^{2n+1} esta dada por el kernel de la siguiente 1-forma:

$$\alpha = dz - p_1 dx^1 - \dots - p_n dx^n = dz - p_i dx^i \quad i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

La dimensión de la distribución $\xi = \ker \alpha$ es de $2n$ debido a que es generada por los campos vectoriales:

$$D_{x^1}, \dots, D_{x^n}, \partial_{p_1}, \dots, \partial_{p_n} \quad (27)$$

en donde $D_{x^i} = \partial_{x^i} + p_i \partial_z$. Esto se puede comprobar fácilmente ya que son linealmente independientes y satisfacen

$$\alpha(D_{x^i}) = 0 \quad \alpha(\partial_{p_i}) = 0. \quad (28)$$

Notemos que usando la condición de Frobenius en α tenemos

$$\alpha \wedge d\alpha = (dz - p_i dx^i) \wedge (dx^i \wedge dp_i) = dz \wedge dx^i \wedge dp_i, \quad (29)$$

la cual es distinta de cero. La distribución ξ es entonces máximamente no integrable pues

$$(d\alpha)^n = n! dx^1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dp_n, \quad (30)$$

de forma que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = (dz - p_i dx^i) \wedge (d\alpha)^n \quad (31)$$

$$= n! dz \wedge dx^1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dp_n \neq 0. \quad (32)$$

Siendo ξ entonces una estructura de contacto en M .

Podemos comprobar este resultado usando la base local de campos vectoriales. Calculando los corchetes de Lie encontramos

$$[D_{x^i}, D_{x^j}] = 0 \quad [\partial_{p_i}, \partial_{p_j}] = 0 \quad [\partial_{p_i}, D_{x^j}] = \delta_i^j \partial_z, \quad (33)$$

cuyo último corchete de Lie muestra de ξ no es integrable, o equivalentemente, no existen las subvariedades integrales $2n$ -dimensionales.

2.4. El espacio de los elementos de contacto

El nombre “estructura de contacto” tiene sus orígenes en el estudio de los llamados espacios de elementos de contacto. Y es que así como para cualquier variedad M de dimensión n existe una variedad simpléctica canónica asociada de dimensión $2n$, constituida por el haz cotangente T^*M con la estructura simpléctica estándar, existe también una variedad de contacto canónica de dimensión $2n - 1$ asociada, formada por los elementos de contacto.

Definición 2.8. [3,16,24] *Sea M una variedad suave n -dimensional. Un elemento de contacto es un hiperplano en el espacio tangente de M . El espacio de los elementos de contacto de M es la colección de pares (q, V) que consisten en un punto² $q \in M$ y un elemento de contacto $V \subset T_q M$, i.e.,*

$$E = \{ (q, V_q) \mid q \in M \text{ y } V_q \in T_q M \}. \quad (34)$$

El espacio de los elementos de contacto E de M es naturalmente isomorfo a la proyección del haz cotangente $\mathbb{P}T^*M = (T^*M - \{0\}) / \sim$, definido como

$$\mathbb{P}T^*M = \{ (q, [\alpha]) \mid q \in M \text{ y } \alpha \in T_q^*M - \{0\} \}, \quad (35)$$

²Llamado punto de contacto.

con $(q, \alpha) \sim (q, \alpha')$ siempre que $\alpha = \lambda\alpha'$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es algo que se ha comentado con anterioridad, un hiperplano $V_q \subset T_q M$ está definido por el kernel de una 1-forma $\alpha_V \in T_q^* M$ distinta de cero y a su vez α_V está determinado por V hasta un $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Con lo cual se puede definir un difeomorfismo $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}T^* M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}T^* M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

en donde los mapeos verticales son las proyecciones ordinarias $\pi : (q, V_q) \rightarrow q$ y $\pi : (q, [\alpha]) \rightarrow q$.

El espacio de los elementos de contacto ciertamente está equipado con una estructura de contacto descrito de la siguiente manera:

Tomemos $\pi : \mathbb{P}T^* E \rightarrow E$. Para $\alpha = \alpha_V \in \mathbb{P}T_q^* E$ sea ξ_α el hiperplano en $T_\alpha(\mathbb{P}T^* E)$ tal que $T\pi(\xi_\alpha)$ es el hiperplano V en $T_{\pi(\alpha)} E = T_q E$ definido por α . Entonces ξ define una estructura de contacto en $\mathbb{P}T^* E$.

Para ver esto usemos (x^1, \dots, x^n) como coordenadas locales en E y sean (p_1, \dots, p_n) las coordenadas asociadas en las fibras del haz cotangente $T^* E$. De manera que en estas coordenadas algún $\alpha \in T_q^* E$ se expresa como

$$\alpha = p_i dx^i|_{(x^1, \dots, x^n)} \quad i = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Por consiguiente, un punto $(x^1, \dots, x^n, [p_1 : \dots : p_n])$ en la proyección del haz cotangente $\mathbb{P}T^* E$ define el hiperplano

$$p_i dx^i = 0 \quad (37)$$

en $T_q^* E$ con $q = (x^1, \dots, x^n)$, con lo cual la estructura de contacto natural ξ en $\mathbb{P}T^* E$ se define como

$$\xi = \ker(p_i dx^i). \quad (38)$$

Adicionalmente, si bien el kernel esta bien definido en términos de las coordenadas en $\mathbb{P}T^*E$ la 1-forma $p_i dx^i$ no. Restringiéndonos a un subespacio afín, consideremos un abierto U con $p_1 \neq 0$ donde definimos para las fibras las coordenadas inhomogeneas $[1 : p'_2 : \dots : p'_n]$ con $p'_j = \frac{p_j}{p_1}$ para $j = 2, \dots, n$. De modo que ξ se expresa en estas coordenadas como

$$\xi = \ker(dx^1 + p_j dx^j) \quad j = 2, \dots, n \quad (39)$$

forma que ya conocemos de la estructura de contacto estándar en \mathbb{R}^{2n+1} .

2.5. Simplectificación y contactificación

La simplectificación le asocia a una variedad de contacto una variedad simpléctica de una dimensión mayor. Para llevar a cabo su construcción recordemos que una forma de contacto α es una forma en el espacio tangente en el punto de contacto tal que su kernel es el plano de contacto ξ .

Sea M una variedad de contacto, consideremos el conjunto de todas las formas de contacto como el espacio de un haz fibrado S sobre la variedad original M , con la proyección $\pi : S \rightarrow M$ asociando cada forma de contacto al punto de contacto. Las fibras F en este haz están constituidas por el conjunto de todas las formas que comparten un mismo punto de contacto, lo que significa que todas se pueden obtener a partir de otra mediante la multiplicación de un valor $\lambda \neq 0$, así que determinan el mismo plano de contacto. La fibra F es unidimensional y el grupo de los reales menos el cero actúan mediante la operación de multiplicación dejando cada fibra fija en el haz.

La simplectificación $S = M \times (\mathbb{R} - \{0\})$ es entonces una subvariedad del haz cotangente T^*M que posee una estructura natural simpléctica. La proyección $\pi : S \rightarrow M$ dota a la simplectificación de una estructura de haz fibrado principal sobre M con el grupo de estructura $\mathbb{R} - \{0\}$.

Sobre un haz cotangente hay una 1-forma distinguida pdq , de forma análoga hay una 1-forma canónica sobre cualquier variedad obtenida mediante la simplectificación de una variedad de contacto.

Definición 2.9. [3] Sea S la simplectificación de una variedad de contacto, la 1-forma canónica θ^3 es aquella cuyo valor sobre cualquier vector ζ tangente al espacio simplectificado en algún punto p es igual al valor de la proyección del vector ζ sobre el plano tangente a la variedad de contacto de la 1-forma en este plano tangente que es el punto p

$$\theta(\zeta) = p(\pi_*\zeta), \quad (40)$$

siendo π la proyección del espacio simplectificado sobre la variedad de contacto.

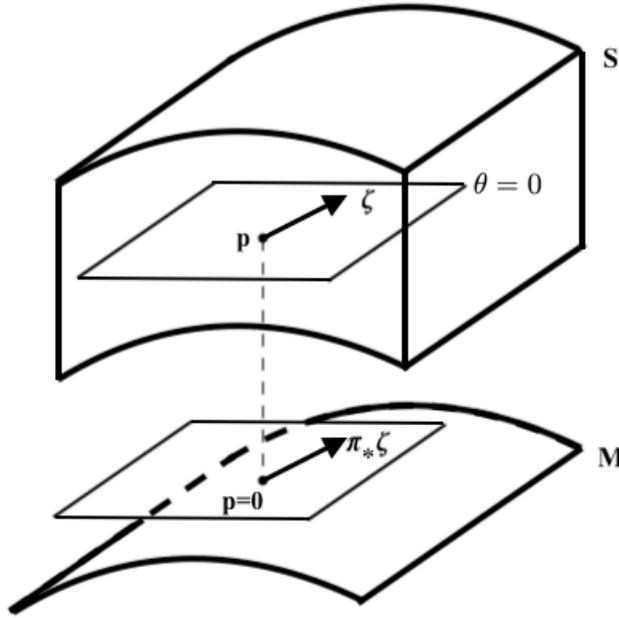


Figura 1: Simplectificación de una variedad de contacto

Teorema 2.10. [3] La derivada exterior de la 1-forma canónica en el espacio simplectificado de una variedad de contacto es una 2-forma no degenerada.

Prueba. Sea α la 1-forma en la variedad de contacto y escribamos la 1-forma canónica de la siguiente manera

$$\theta = \lambda\pi^*\alpha, \quad (41)$$

siendo $\lambda\alpha$ la 1-forma asociada al par (x, λ) , en donde x es un punto de la variedad de contacto y λ es un número distinto de cero. Calculando la derivada exterior de (41)

³También denominada 1-forma tautológica o 1-forma de Liouville es una 1-forma especial definida en el haz cotangente T^*S de una variedad S .

tenemos

$$d\theta = d\lambda \wedge \pi^* \alpha + \lambda \pi^* d\alpha. \quad (42)$$

Para verificar que la 2-forma $d\theta$ es no degenerada, vamos a identificar tres tipos de vectores tangentes a la simplectificación:

- Vertical si ζ es tangente a las fibras i.e. $\pi_* \zeta = 0$.
- Horizontal si es tangente a una superficie de nivel de la función λ i.e. si $d\lambda(\zeta) = 0$.
- De contacto si su proyección sobre la variedad de contacto esta en el plano de contacto i.e. si $\alpha(\pi_* \zeta) = 0$.

Dicho esto, calculemos el valor de la forma $d\alpha$ para distintos tipos de vectores (ζ, η) :

$$d\theta(\zeta, \eta) = (d\lambda \wedge \pi^* \alpha)(\zeta, \eta) + (\lambda \pi^* d\alpha)(\zeta, \eta). \quad (43)$$

Para empezar, supongamos que ζ no es un vector de contacto y η es un vector vertical. Con esta elección el segundo término de (43) es cero y del primero solo queda

$$-d\lambda(\eta)\alpha(\pi_* \zeta), \quad (44)$$

que no es cero debido a que η es un vector vertical y ζ no es un vector de contacto. Por otro lado, si ahora ζ es un vector de contacto pero no vertical y η es cualquier vector vertical, tenemos que el primer término de (43) es cero y del segundo resta

$$\lambda d\alpha(\pi_* \zeta, \pi_* \eta), \quad (45)$$

dado que ζ no es vertical, el vector $\pi_* \zeta$ se encuentra en el plano de contacto, donde la 2-forma es no degenerada por definición de la estructura de contacto⁴, así mismo, como $\lambda \neq 0$ tenemos que (45) es distinta de cero. Finalmente, si ζ es vertical, entonces podemos tomar η como cualquier vector que no sea de contacto. \square

De esta manera, para cualquier vector ζ tangente a la simplectificación podemos encontrar otro vector η tal que $d\theta(\zeta, \eta) \neq 0$, con lo cual el espacio simplectificado de una

⁴Este hecho también puede verificarse usando (8)

variedad de contacto tiene una estructura simpléctica que es canónicamente determinada por la estructura de contacto.

Considerando lo anterior, podemos definir la simplectificación de una variedad de contacto como a continuación:

Definición 2.11. [16] *La simplectificación de una variedad de contacto (M, ξ) con una forma de contacto α , esta dada por el par $(S, d(\lambda\pi^*\alpha))$. Siendo $S = M \times (\mathbb{R} - \{0\})$, $\pi : S \rightarrow M$ y λ una coordenada en \mathbb{R} .*

Así como existe la simplectificación de variedades de contacto, existe el concepto de contactificación de variedades simplécticas (M, ω) cuando la 2-forma ω es una forma exacta. La contactificación C de una variedad simpléctica $(M, d\theta)$ se construye como un haz fibrado con la fibra \mathbb{R} sobre M de la siguiente manera.

Sea U una vecindad suficientemente pequeña de un punto x en M . En esa vecindad existe un sistema de coordenadas canónico p, q con $\omega = dp \wedge dq$. Consideremos ahora el producto $U \times \mathbb{R}$ con coordenadas p, q, z y sea $V \times \mathbb{R}$ el mismo tipo de producto construido en una vecindad V con coordenadas P, Q, Z y en donde $\omega = dP \wedge dQ$. Si las dos vecindades U y V en M se intersectan, entonces identificamos las fibras sobre los puntos de la intersección en ambas representaciones tal que la 1-forma $dz + pdq = dZ + PdQ = \theta$ está definida en el conjunto, i.e., $PdQ - pdq$ es exacta en $U \cap V$. Haciendo este pegado tenemos un haz fibrado C en M con θ la 1-forma que define una estructura de contacto en C .

Teniendo en cuenta lo anterior, se define la contactificación de la siguiente manera:

Definición 2.12. [2, 3] *La contactificación de una variedad simpléctica (M, ω) con ω una 2-forma exacta, i.e., $\omega = d\theta$, esta dada por el par $(C, dz + \pi^*\theta)$. Siendo $C = M \times \mathbb{R}$, $\pi : C \rightarrow M$ y z una coordenada en \mathbb{R} .*

2.6. Contactomorfismos, campos vectoriales y hamiltonianos de contacto

La equivalencia natural entre estructuras de contacto son los difeomorfismos de contacto o contactomorfismos.

Definición 2.13. [24] *Dos variedades de contacto (M_1, ξ_1) y (M_2, ξ_2) se dice que son contactomórficas si hay un difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $f_*(\xi_1) = \xi_2$ donde $f_* : TM_1 \rightarrow TM_2$. Si $\xi_i = \ker \alpha_i$, $i = 1, 2$, entonces α_1 y $f^*\alpha_2$ determinan la misma distribución y por lo tanto es equivalente a la existencia de una función $\lambda : M_1 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f^*\alpha_2 = \lambda\alpha_1$. Adicionalmente, se le denomina contactomorfismo estricto si $\lambda = 1$ i.e. $f^*\alpha_2 = \alpha_1$.*

Todas las estructuras de contacto son localmente contactomórficas si son de la misma dimensión, como lo expresa el siguiente teorema:

Teorema 2.14. (Teorema de Darboux) [22] *Supongamos que ξ_i es una estructura de contacto en la variedad M_i , $i = 1, 2$, y tanto M_1 como M_2 tienen la misma dimensión. Dados cualesquiera dos puntos p_1 y p_2 en M_1 y M_2 respectivamente, existen vecindades U_i de p_i en M_i y un contactomorfismo de $(U_1, \xi_1|_{U_1})$ a $(U_2, \xi_2|_{U_2})$.*

Corolario 2.14.1. [24] *Sea α una forma de contacto en una variedad $(2n + 1)$ -dimensional M y p un punto en M . Entonces existen coordenadas $(z, x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$ en una vecindad $U \subset M$ de p tal que $p = (0, \dots, 0)$ y*

$$\alpha|_U = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx^i \quad i = 1, \dots, n \quad (46)$$

El resultado del corolario puede obtenerse usando la simplectificación de una variedad de contacto y el teorema de Darboux para variedades simplécticas que puede revisarse en [3]. Una demostración directa del teorema de Darboux para variedades de contacto es posible usando el denominado truco de Moser que no se abordó aquí [24].

El corolario de este teorema es de particular importancia debido a que, al menos localmente, todas las formas de contacto se ven como (46), de ahí el nombre de forma o

estructura estándar. A su vez, a las coordenadas $(z, x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$ se les denomina coordenadas de Darboux.

Una vez revisado lo que es un difeomorfismo de contacto, veamos como se define un campo vectorial de contacto.

Definición 2.15. [24] *Un campo vectorial X en una variedad de contacto arbitraria $(M, \xi = \ker \alpha)$ es llamado campo vectorial de contacto si es un automorfismo infinitesimal de ξ , es decir, si $\phi_{t*}(\xi) = \xi$ para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo ϕ_t el flujo local de X . Adicionalmente, se le llama campo vectorial de contacto estricto o automorfismo infinitesimal de α si $\phi_t^* \alpha = \alpha$ para todo t .*

Se puede reexpresar esta definición en términos de la derivada de Lie \mathcal{L}_X , separándolo en los siguientes casos:

- A.** Un campo vectorial X es un campo vectorial de contacto si y solo si $\mathcal{L}_X \alpha = \mu \alpha$ para alguna función. $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- B.** Un campo vectorial X es un campo vectorial de contacto estricto si y solo si $\mathcal{L}_X \alpha = 0$.

Antes de comprobar estos enunciados, recordemos que para una 1-forma α la derivada de Lie se define como [23, 42]:

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t)^* \alpha|_{\phi_t(x)} - \alpha|_x] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t^* \alpha). \quad (47)$$

Empezando por el primer caso,

- A.** Si X es un campo vectorial de contacto entonces $\phi_{t*}(\xi) = \xi$, condición que podemos reescribir en términos de la 1-forma de contacto α como $\phi_t^*(\alpha) = \lambda_t \alpha$ con

$\lambda_t : M \rightarrow \mathbb{R}^{+5}$. Así pues

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t)^* \alpha|_{\phi_t(x)} - \alpha|_x] \quad (48)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lambda_t \alpha|_x - \alpha|_x] \quad (49)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lambda_t - 1] \alpha|_x \quad (50)$$

$$= \mu \alpha, \quad (51)$$

con $\mu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\lambda_t - 1]$. Para el enunciado inverso, notemos que $\mathcal{L}_X \alpha$ por definición representa una 1-forma en x al parámetro $t = 0$, si queremos conocer un tiempo posterior s debemos calcular

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_t^* \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\phi_{t+s}^* \alpha)|_{\phi_{t+s}(x)} - \phi_s^* \alpha|_{s(x)}). \quad (52)$$

Como ϕ_t es un flujo, $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ así que $(\phi_t \circ \phi_s)^* = \phi_s^* \circ \phi_t^*$, con lo cual

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_t^* \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_s^* (\phi_t^* \alpha)|_{\phi_t(s(x))} - \phi_s^* \alpha|_{s(x)}) \quad (53)$$

$$= \phi_s^* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\phi_t^* \alpha)|_{\phi_t(s(x))} - \phi_s^* \alpha|_{s(x)}) \right) \quad (54)$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_t^* \alpha) = \phi_s^* (\mathcal{L}_X \alpha). \quad (55)$$

Con este resultado podemos sustituir $\mathcal{L}_X \alpha = \mu \alpha$ para obtener

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_t^* \alpha) = \phi_s^* (\mathcal{L}_X \alpha) = \phi_s^* (\mu \alpha) = (\mu \circ \phi_s(x)) \phi_s^* \alpha, \quad (56)$$

y si definimos la dependencia como $\phi_t^* \alpha = \alpha(t)$ tenemos la siguiente ecuación diferencial para $\phi_t^* \alpha$:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\alpha(t)) = (\mu \circ \phi_s(x)) \alpha(s), \quad (57)$$

cuya solución esta dada por

$$\alpha(t) = e^{\int_0^t (\mu \circ \phi_s(x)) ds} \alpha, \quad (58)$$

por consiguiente

$$\phi_t^* \alpha = \lambda_t \alpha \quad (59)$$

⁵Las funciones λ_t son distintas de cero con $\lambda_0 \equiv 1$ por lo que λ_t toma valores en \mathbb{R}^+

con $\lambda_t = e^{\int_0^t (\mu \circ \phi_s(x)) ds}$. Además, notemos que si X satisface $\mathcal{L}_X \alpha = \mu \alpha$ entonces

$$\mathcal{L}_X(\lambda \alpha) = (\mathcal{L}_X \lambda) \alpha + \lambda (\mathcal{L}_X \alpha) = (X(\lambda) + \lambda \mu) \alpha = \mu' \lambda, \quad (60)$$

para λ una función distinta de cero en M . Por lo que la condición $\mathcal{L}_X \alpha = \mu \alpha$ para alguna función μ en M es una condición en ξ , independiente de la elección de la 1-forma de contacto α .

Por otro lado,

B. Si X es un campo vectorial de contacto estricto entonces $\phi_t^*(\alpha) = \alpha$, por lo que

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t)^* \alpha|_{\phi_t(x)} - \alpha|_x] \quad (61)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\alpha|_x - \alpha|_x] \quad (62)$$

$$= 0. \quad (63)$$

De forma contraria si $\mathcal{L}_X \alpha = 0$, usando (55) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_t^* \alpha) = 0, \quad (64)$$

con lo cual

$$\phi_t^*(\alpha) = \alpha. \quad (65)$$

Un caso particular es el llamado campo vectorial de Reeb.

Definición 2.16. [24] *Sea α una forma de contacto, el campo vectorial de Reeb R_α satisface*

$$\alpha(R_\alpha) \equiv 1 \quad d\alpha(R_\alpha, \cdot) \equiv 0. \quad (66)$$

Estas dos condiciones caracterizan el campo vectorial de Reeb como un campo vectorial R_α que es transversal a la distribución ξ y cuyo flujo también preserva ξ , de hecho preserva α por lo que es un campo vectorial de contacto estricto. Esto se puede comprobar fácilmente haciendo uso de la fórmula de Cartan [42]:

$$\mathcal{L}_X \alpha = (di_X + i_X d)\alpha. \quad (67)$$

Sustituyendo en (67), el campo vectorial de Reeb se satisface

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = di_{R_\alpha}\alpha + i_{R_\alpha}d\alpha \quad (68)$$

$$= d(\alpha(R_\alpha)) + d\alpha(R_\alpha, \cdot) \quad (69)$$

$$= 0, \quad (70)$$

siendo efectivamente un campo vectorial de contacto estricto.

Finalmente, utilizando los conceptos anteriores podemos revisar lo que es un hamiltoniano de contacto.

Teorema 2.17. [24] *Con una elección fija de la forma de contacto α existe una correspondencia uno a uno entre los automorfismos infinitesimales X de $\xi = \ker \alpha$ y las funciones suaves $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. La correspondencia es dada por*

- $X \rightarrow -h_X = \alpha(X)$
- $h \rightarrow X_h$, definido únicamente por $\alpha(X_h) = -h$ y $i_{X_h}d\alpha = dh - dh(R_\alpha)\alpha$

El que X_h este definido únicamente por las ecuaciones anteriores se sigue del hecho de que $d\alpha$ es no degenerada en ξ y $R_\alpha \in \ker(dh - dh(R_\alpha)\alpha)$, como se puede ver a continuación usando la fórmula de Cartan (67).

Prueba. Sea X un automorfismo infinitesimal de ξ . Tomando $-h_X = \alpha(X)$ y sustituyendo en (67) tenemos

$$\mathcal{L}_X\alpha = -dh_X + i_Xd\alpha = \mu\alpha, \quad (71)$$

con $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora, evaluando esta ecuación sobre el vector de Reeb R_α obtenemos

$$-dh_X(R_\alpha) = \mu, \quad (72)$$

de manera que X satisface las ecuaciones $\alpha(X) = -h_X$ y $i_Xd\alpha = dh_X - dh_X(R_\alpha)\alpha$. Por otro lado, dado $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ y X_h definido como en el teorema, por (67) encontramos

$$\mathcal{L}_{X_h}\alpha = -dh + i_{X_h}d\alpha = -dh(R_\alpha)\alpha, \quad (73)$$

de manera que X_h es un automorfismo infinitesimal de ξ . □

2.7. Subvariedades de Legendre

Debido a su propia estructura, parte del estudio de las variedades de contacto se centra en una clase particular de subvariedades integrables.

Definición 2.18. [24] *Sea (M, ξ) una variedad de contacto, una subvariedad L de (M, ξ) es llamada subvariedad isotrópica si $T_p L \subset \xi_p$ para todos los puntos $p \in L$.*

Recordemos que en una variedad de contacto existe un espacio vectorial simpléctico dado por $(\xi_p, d\alpha|_{\xi_p})$ debido a la no degeneración de ξ . En este caso, si $T_p L$ es isotrópico entonces $d\alpha|_{T_p L} \equiv 0$, así que una forma alternativa de definir una subvariedad isotrópica es mediante la condición

$$\varphi^* d\alpha \equiv 0, \quad (74)$$

siendo $\varphi : L \hookrightarrow M$ un mapeo inclusión. De hecho, como la derivada exterior y el pullback conmutan [42], podemos describir a una subvariedad isotrópica simplemente como

$$\varphi^* \alpha \equiv 0. \quad (75)$$

Por otro lado, la condición (24) que define a las estructuras de contacto, limita la dimensión que pueden tener estas subvariedades como lo expresa el siguiente lema.

Lema 2.19. [24] *Sea (M, ξ) una variedad de contacto de dimensión $2n+1$ y $L \subset (M, \xi)$ una subvariedad isotrópica, entonces $\dim L \leq n$.*

Este es principalmente un resultado de algebra simpléctica⁶, en el que $T_p L$ al ser un subespacio isotrópico del espacio vectorial simpléctico $(\xi_p, d\alpha|_{\xi_p})$ se satisface que $\dim(T_p L) \leq (\dim(\xi_p))/2 = n$.

Definición 2.20. [24] *Una subvariedad isotrópica $L \subset (M, \xi)$ de la máxima dimensión posible n es llamada subvariedad de Legendre.*

⁶En algebra simpléctica los subespacios U de un espacio vectorial simpléctico (V, Ω) pueden ser clasificados en relación a su complemento ortogonal simpléctico U^\perp . U se llama isotrópico cuando $U \subseteq U^\perp$, por lo que apartir de la relación $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ se obtiene el resultado.

Por último, el siguiente teorema nos permite expresar de manera local las subvariedades de Legendre a través de una función generadora.

Teorema 2.21. [3] *Para cualquier partición $I \cup J$ del conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$ en dos subconjuntos disjuntos I y J , y para una función $\phi(x^J, p_I)$ de n variables x^j , $j \in J$ y p_i , $i \in I$ las $(n + 1)$ ecuaciones*

$$x^i = -\frac{\partial \phi}{\partial p_i} \quad p_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \quad z = \phi - p_i \frac{\partial \phi}{\partial p_i}, \quad (76)$$

definen una subvariedad de Legendre de \mathbb{R}^{2n+1} . De igual forma cada subvariedad de Legendre de \mathbb{R}^{2n+1} es definida localmente por estas ecuaciones en una vecindad de al menos una de las 2^n posibles elecciones del subconjunto I .

En ambas partes del teorema la prueba se basa en la sustitución. En la primera evaluando (76) en $\alpha = 0$ y en la segunda parametrizando localmente la subvariedad de Legendre L por las n -variables (x^J, p_I) e insertando en $\alpha = 0$.

3. Formulación geométrica de la termodinámica en equilibrio

En esta sección vamos a definir las distintas cantidades física dentro de un sistema termodinámico en equilibrio y establecer sus interpretaciones dentro del formalismo de la geometría de contacto que revisamos anteriormente.

3.1. El Espacio de Estados de Equilibrio Termodinámico (TES)

Los estados de un sistema termodinámico en equilibrio de n grados de libertad están caracterizados completamente por un conjunto de parámetros macroscópicos extensivos⁷ (x^1, \dots, x^n) . Dichos parámetros se denominan variables termodinámicas [11].

Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogénea de primer orden que relacione los parámetros (x^1, \dots, x^n) se conoce como relación fundamental termodinámica [26], ya que a partir

⁷Parámetros cuyos valores son iguales a la suma de los mismos en cada uno de sus subsistemas.

de esta se puede obtener toda la información termodinámica de un sistema particular.

Considerando la relación fundamental

$$\phi = \phi(x^1, \dots, x^n), \quad (77)$$

podemos calcular su diferencial para obtener

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) dx^1 + \dots + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) dx^n. \quad (78)$$

Las derivadas parciales $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)$ son llamadas parámetros intensivos duales⁸ que denotaremos como p_1, \dots, p_n respectivamente. Al ser estas derivadas de una función que depende de (x^1, \dots, x^n) también son funciones de (x^1, \dots, x^n) lo que establece relaciones funcionales denominadas ecuaciones de estado⁹. El conocimiento de todas las ecuaciones de estado de un sistema es equivalente a conocer la ecuación fundamental [11]. La ecuación (78) usualmente se escribe como

$$d\phi = p_1 dx^1 + \dots + p_n dx^n = p_i dx^i \quad (79)$$

y se interpreta como una ley de conservación de la energía.

El carácter extensivo de ϕ nos permite obtener algunas relaciones importantes entre las variables termodinámicas. Para ello notemos que al ser ϕ una función homogénea de primer orden se satisface

$$\phi(\lambda x^1, \dots, \lambda x^n) = \lambda \phi(x^1, \dots, x^n) \quad \lambda > 0, \quad (80)$$

si calculamos la derivada de (80) respecto a λ y evaluamos el resultado en $\lambda = 1$ obtenemos la identidad de Euler:

$$\phi = p_i x^i \quad i = 1, \dots, n \quad (81)$$

A su vez, si derivamos la identidad de Euler (81) y utilizamos la ecuación (78) encontramos la relación de Gibbs-Duhem:

$$x^i dp_i = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (82)$$

⁸Ya que se asocian a cada parámetro extensivo x^i y son homogéneas de grado 0.

⁹También son conocidas como condiciones de equilibrio debido a que si dos subsistemas están en equilibrio termodinámico entonces tienen los mismos parámetros intensivos.

Si bien todo el contenido expuesto anteriormente se hizo para la relación fundamental $\phi = \phi(x^1, \dots, x^n)$, es posible considerar representaciones alternativas equivalentes las cuales permiten intercambiar roles entre variables extensivas x^k por sus duales p_k . Esto se hace mediante la transformación de Legendre de la función ϕ :

$$\psi[p_1, \dots, p_n] = \phi - p_k x^k. \quad (83)$$

La función ψ es llamada potencial termodinámico y para llevar a cabo este tipo de transformaciones es necesario que ϕ sea una función con convexidad definida [3], lo cual esta garantizado por el criterio de estabilidad termodinámica $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$ [11].

Basado en lo anterior, establecemos el TES con la siguiente definición:

Definición 3.1. *El Espacio de Estados de Equilibrio (TES) es una variedad n -dimensional E con coordenadas dadas por los parámetros extensivos (x^1, \dots, x^n) . En donde se satisface*

$$d\phi = p_i dx^i \quad p_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (84)$$

El TES surge de otorgarle una topología y una estructura diferencial al conjunto de los estados de equilibrio de un sistema termodinámico representado por la relación fundamental $\phi = \phi(x^1, \dots, x^n)$ [37].

3.2. El Espacio Fase Termodinámico (TPS)

La construcción del TPS a partir del TES puede formularse de dos maneras. La primera fue originalmente propuesta por Mrugala en [37] y se basa en la variedad de contacto canónica asociada al (TES) formada por los elementos de contacto. La segunda y más reciente fue propuesta por Aragón en [1] y se basa en la contactificación del haz cotangente del TES. En ambos casos nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 3.2. *El Espacio Fase Termodinámico (TPS) es una variedad de contacto $(2n + 1)$ -dimensional (P, α) con coordendas $(\phi, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$, donde P es una variedad construida sobre el espacio base E y α es una 1-forma de contacto llamada*

1-forma de Gibbs expresada como

$$\alpha = d\phi + p_i dx^i \quad i = 1, \dots, n \quad (85)$$

Los puntos en el TPS representan los estados de un sistema termodinámico en equilibrio con una total independencia entre las variables termodinámicas, pues como veremos a continuación, los sistemas termodinámicos serán las subvariedades de Legendre de este espacio.

3.3. La termodinámica en el formalismo geométrico

Los procesos termodinámicos en el TES corresponden a algunas curvas suaves a trozos pero no al contrario, en principio no podríamos encontrar un proceso adecuado que corresponda a cualquier curva. Para establecer un significado físico razonable a las mismas es necesario imponer la condición precisada por la primera ley de la termodinámica, que en este nuevo contexto geométrico necesita ser reexpresada de forma apropiada en términos de la estructura de contacto.

Postulado 3.3. (Primera Ley de la Termodinámica) [37] *Cualquier sistema termodinámico en equilibrio es representado en una apropiada TPS (P, α) por la subvariedad de Legendre L de la ecuación $\varphi^* \alpha = 0$.*

Desde un punto de vista termodinámico es fácil notar que la dimensión de las subvariedades de Legendre coincide con el número de grados de libertad de un sistema en equilibrio. Más aún, del Teorema (2.21), podemos ver que en las coordenadas de contacto un L dado puede ser representado de manera equivalente hasta por 2^n funciones ϕ de n variables. Esas funciones corresponden justamente a distintos potenciales termodinámicos, de manera que para una ϕ fija el conjunto de ecuaciones (76) puede ser interpretado como la relación fundamental y las n ecuaciones de estado [11].

Como ejemplo tenemos el gas ideal, cuya ecuación fundamental esta dada por [10]:

$$U(S, V) = U_0 N^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2S}{3Nk_B}} \quad k_B = cte. \quad (86)$$

En este sistema 5-dimensional (asumiendo $N = cte$), con coordenadas locales

$$(\phi, x^1, x^2, p_1, p_2) \longleftrightarrow (U, S, V, -T, P), \quad (87)$$

en donde U es la energía interna, S la entropía, V el volumen, T la temperatura y P la presión. La 1-forma α se expresa como

$$\alpha = dU - TdS + PdV, \quad (88)$$

que con el mapeo

$$\varphi : (S, V) \rightarrow (U(S, V), S, V, T(S, V), P(S, V)), \quad (89)$$

y la condición

$$\varphi^* \alpha = 0, \quad (90)$$

obtenemos

$$dU = TdS - PdV \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{2U}{3Nk_B} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{2U}{3V}. \quad (91)$$

Como podemos ver un sistema termodinámico en equilibrio se representa de manera efectiva como una subvariedad de Legendre de la ecuación $\varphi^* \alpha = 0$, donde recuperamos las relaciones termodinámicas propias de la TES.

Esta formulación es más general pues como veremos a continuación las distintas representaciones que puede tener un sistema termodinámico en equilibrio no son más que cambios de variables en la TPS expresados a través de los contactomorfismos.

3.4. Contactomorfismos y potenciales termodinámicos

Recordemos que un difeomorfismo σ entre dos variedades de contacto (P, α) y (P', α') es llamado contactomorfismo si se preserva la estructura de contacto, i.e.,

$$\sigma^* \alpha' = \lambda \alpha, \quad (92)$$

siendo λ una función distinta de cero en P . Un contactomorfismo lleva por definición un hiperplano tangente determinado por la ecuación $\alpha = 0$ a otro descrito por la ecuación $\alpha' = 0$ y las subvariedades de Legendre de α a las subvariedades de Legendre de α' .

Teniendo esto en cuenta, definimos la transformación de contacto:

$$\sigma : (\phi, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (z, f^1, \dots, f^n, g_1, \dots, g_n) \quad (93)$$

en P . En donde al conjunto de funciones $(f^1, \dots, f^n, g_1, \dots, g_n)$ se les denomina canónicas con respecto a la 1-forma α si

$$d\alpha = dg_i \wedge df^i \quad i = 1, \dots, n, \quad (94)$$

y a la función z se le llama potencial de $(f^i, \dots, f^n; g_1, \dots, g_n)$ si

$$dz = \alpha - g_i df^i \quad i = 1, \dots, n. \quad (95)$$

Para el caso del gas ideal que vimos anteriormente, la transformación definida por las relaciones

$$z = U + PV \quad f^1 = S \quad f^2 = -P \quad g_1 = -T \quad g_2 = V \quad (96)$$

nos da

$$\alpha = dU - TdS + PdV = d(U + PV) - TdS - VdP \quad (97)$$

en donde reconocemos al potencial z como la entalpía.

Usando distintas transformaciones de contacto podemos obtener el resto de potenciales termodinámicos para este sistema, de modo que si la estructura de contacto permanece intacta entonces las propiedades físicas de un sistema termodinámico son independientes del potencial que se elija utilizar.

3.5. Ecuaciones de movimiento

Hemos visto la definición formal de un hamiltoniano de contacto, pero con la finalidad de poder realizar cálculos explícitos para un sistema termodinámico es conveniente revisar como se representa en un sistema de coordenadas.

Para un contactomorfismo $f : P_1 \rightarrow P_2$, si tomamos $(z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ como coordenadas de (P_1, α) y $(Z, X^i, \dots, X^n, P_i, \dots, P_n)$ como coordenadas de (P_2, α') se satisface

$$f^*(dZ - P_j dX^j) = \lambda(dz - p_i dx^i), \quad (98)$$

con $\lambda : P_1 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. Calculando el pullback y agrupando términos obtenemos las siguientes relaciones entre coordenadas

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} = P_j \frac{\partial X^j}{\partial p_i} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} + P_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = p_i \left[\frac{\partial Z}{\partial z} - P_j \frac{\partial X^j}{\partial z} \right] \quad (99)$$

$$\lambda = \frac{\partial Z}{\partial z} - P_j \frac{\partial X^j}{\partial z} \quad (100)$$

A las transformaciones $(z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (Z, X^1, \dots, X^n, P_1, \dots, P_n)$ que satisfacen estas condiciones se les llama transformaciones de Legendre. Los potenciales termodinámicos que vimos en la sección anterior son un caso particular para $\lambda = 1$, es decir, son contactomorfismos estrictos.

Ahora bien, un campo vectorial de contacto V es un automorfismo infinitesimal que deja invariante la estructura de contacto, por lo que una transformación infinitesimal

$$z \rightarrow z + tV^z \quad x^i \rightarrow x^i + tV^i \quad p_i \rightarrow p_i + tV_i \quad |t| \ll 1 \quad (101)$$

define un campo vectorial

$$V = V^z \frac{\partial}{\partial z} + V^i \frac{\partial}{\partial x^i} + V_i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (102)$$

cuyas componentes satisfacen (99)-(100),

$$\frac{\partial V^z}{\partial p_i} = p_j \frac{\partial V^j}{\partial p_i} - \frac{\partial V^z}{\partial x^i} + p_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i} = p_i \left[\frac{\partial V^z}{\partial z} - p_j \frac{\partial V^j}{\partial z} \right] \quad (103)$$

$$\lambda = \frac{\partial V^z}{\partial z} - p_j \frac{\partial V^j}{\partial z} \quad (104)$$

con $\lambda : P \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$.

Utilizando estas ecuaciones se puede deducir que todas las componentes de V se expresan en términos de una función $h = p_i V^i - V^z$ como

$$V^z = p_i \frac{\partial h}{\partial p_i} - h \quad V^i = \frac{\partial h}{\partial p_i} \quad V_i = - \left[\frac{\partial h}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial h}{\partial z} \right], \quad (105)$$

con lo cual una transformación infinitesimal de Legendre esta determinada por una función h llamada función generadora. Por el contrario, una función h define el campo vectorial

$$V_h = \left[p_i \frac{\partial h}{\partial p_i} - h \right] \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial h}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial h}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (106)$$

Adicionalmente, usando la fórmula de Cartan (67), tenemos

$$\mathcal{L}_{V_h}\alpha = d(i_{V_h}\alpha) + i_{V_h}(d\alpha) \quad (107)$$

$$= d(-h) + \left(\frac{\partial h}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx^i + \frac{\partial h}{\partial p_i} dp_i \quad (108)$$

$$= -\frac{\partial h}{\partial z}\alpha, \quad (109)$$

comprobando así que V_h deja intacta la estructura de contacto.

Por otra parte, si comparamos V_h con un campo vectorial general V en P con coordenadas $(z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$,

$$V = \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (110)$$

tenemos que las componentes de V_h definen un flujo en P a través de la ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p_i \frac{\partial h}{\partial p_i} - h \\ \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial h}{\partial z}, \end{aligned} \quad (111)$$

identificando con esto una transformación infinitesimal como un sistema de $2n + 1$ ecuaciones diferenciales determinado por las curvas integrales del campo V_h también llamadas curvas características de la función generadora h .

Las ecuaciones (111) son más generales en relación a las que se obtienen de la mecánica hamiltoniana en variedades simplécticas [3]. Recordemos que la dinámica de un sistema con una función hamiltoniana $H = H(p, q)$ está dada por un campo vectorial hamiltoniano X_H definido por H y la 2-forma simpléctica ω mediante la relación $i_{X_H}\omega = -dH$.

En coordenadas locales $(q^1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, X_H se expresa como

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (112)$$

de manera que el flujo Hamiltoniano está definido por las $2n$ ecuaciones

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (113)$$

Si bien podríamos pensar que de forma análoga al caso hamiltoniano, dada una función $h(z, x^i, p_i)$ tenemos ecuaciones hamiltonianas debido al flujo inducido por V_h , en general no podemos interpretarlos de la misma manera. Basta con revisar (111) para darse cuenta de que el flujo V_h no solo depende de las derivadas de h sino de h en sí. Y más importante aún h no siempre se conserva pues

$$\frac{dh}{dt} = V_h(h) = -h \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (114)$$

Notemos, sin embargo, que si el valor inicial de h es cero en (114), este se mantiene en cero. Para darle un significado entonces a estos sistemas hamiltonianos de contacto tomamos en cuenta esta característica a través del siguiente teorema.

Teorema 3.4. [41] *Sea L una subvariedad de Legendre de una variedad de contacto (P, α) . V_h es tangente a L si y solo si h se hace cero en L , i.e., $L \subset h^{-1}(0)$.*

Prueba. Por un lado, si V_h es tangente a L entonces por definición $\alpha(V_h) = -h = 0$, lo que prueba la ida. Por el otro, si $L \subset h^{-1}(0)$ entonces $\alpha(V_h) = 0$ en L . Luego, como L es n -dimensional sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de n -vectores linealmente independientes tangentes a L , i.e.,

$$\alpha(v_i)|_L = 0 \quad dh(v_i)|_L = 0 \quad d\alpha(v_i, v_j)|_L = 0 \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (115)$$

Queremos mostrar que V_h es una combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ en cada punto de $L \subset h^{-1}(0)$, sin embargo, esto es inmediato ya que

$$d\alpha(V_h, v_i) = (i_{V_h}\alpha)(v_i) = (dh - dh(R_\alpha)\alpha)(v_i) = 0, \quad (116)$$

en $h^{-1}(0)$. Por lo que usando la condición de no degeneración (24) y el Teorema de Frobenius tenemos que $V_h = \lambda^i v_i$ ($\lambda^i : P \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$), de forma que V_h es tangente a $L \subset h^{-1}(0)$. \square

Definición 3.5. *Sea L un sistema termodinámico y h una función en el TPS. Si el campo vectorial de contacto V_h asociado a h deja invariante L entonces lo interpretamos como un proceso termodinámico del sistema L .*

Formalmente el campo V_h genera transformaciones continuas en el TES, así que lo que tratamos de identificar son aquellas transformaciones que representen simetrías continuas para algún sistema termodinámico.

Para concluir, en general L no está contenida en la superficie de nivel cero $h^{-1}(0)$, con lo cual V_h es más bien un generador uniparamétrico de nuevos sistemas termodinámicos. Esto es particularmente útil pues nos permite mapear o deformar sistemas ya conocidos para obtener nuevas relaciones termodinámicas.

3.6. Ejemplo : Gas ideal

A continuación revisaremos un caso en el gas ideal (86) con el objetivo de ejemplificar el formalismo de los hamiltonianos de contacto aplicado a sistemas termodinámicos.

Para ello utilizaremos como hamiltoniano de contacto la identidad de Euler (81) en la representación de la energía:

$$h = TS - RNT + \mu N - U. \quad (117)$$

El campo vectorial V_h asociado a h de acuerdo con (106) está dado por

$$V_f = U \frac{\partial}{\partial U} + (S - RN) \frac{\partial}{\partial S} + N \frac{\partial}{\partial N} + P \frac{\partial}{\partial P} + RT \frac{\partial}{\partial \mu}. \quad (118)$$

De acuerdo con (111) determina el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= U & \frac{dS}{dt} &= S - RN & \frac{dN}{dt} &= N \\ \frac{dP}{dt} &= P & \frac{d\mu}{dt} &= RT & \frac{dT}{dt} &= \frac{dV}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (119)$$

que fácilmente podemos integrar para obtener

$$\begin{aligned} U &= Ue^t & S &= (S_0 - RN_0t)e^t & N &= N_0e^t \\ P &= P_0e^{-t} & \mu &= RT + \mu_0 & T &= T_0 & V &= V_0. \end{aligned} \quad (120)$$

Ahora el gas ideal corresponde a la subvariedad de Legendre L en donde $PV = NRT$, con lo cual $h = 0$ y V_h es tangente a L . Podemos entonces considerar la dinámica

anterior como un proceso termodinámico a temperatura T_0 y volumen V_0 constante en el que las relaciones termodinámicas se conservan i.e.,

$$PV = NRT \quad U = \frac{3}{2}NRT \quad U = TS - PV + \mu N \quad (121)$$

3.7. Ejemplo: Gas de Van der Waals

A diferencia del ejemplo anterior si ahora tenemos en cuenta un V_h que no es tangente a L^{10} , las relaciones termodinámicas no se mantienen durante la transformación. Usaremos esta característica para obtener una serie de ecuaciones de estado a través de distintos hamiltonianos entre la que destaca el gas de Van der Waals.

Para empezar, si tomamos el hamiltoniano $h_1 = bP$ con $b > 0$, el campo vectorial asociado es simplemente $V_{h_1} = b\frac{\partial}{\partial V}$ que naturalmente tiene un sistema fácilmente integrable cuya solución es

$$\begin{aligned} U &= U_0 & S &= S_0 & N &= N_0 \\ P &= P_0 & \mu &= \mu_0 & T &= T_0 & V &= V_0 + bt. \end{aligned} \quad (122)$$

Si ahora sustituimos la solución para valores $t \neq 0$ en la ecuación del gas ideal $P_0V_0 = N_0RT_0$ obtenemos una serie de nuevas ecuaciones de estado $P(V - bt) = NRT$ que describen a un gas sin interacción de esferas duras.

Así mismo, si consideramos ahora el hamiltoniano $h_2 = -\frac{a}{V}$ con $a > 0$, el campo vectorial asociado es $V_{h_2} = -\frac{a}{V}\frac{\partial}{\partial U} - \frac{a}{V^2}\frac{\partial}{\partial P}$ cuyas curvas integrales están dadas por

$$\begin{aligned} U &= U_0 - \frac{a}{V_0}\tau & S &= S_0 & N &= N_0 \\ P &= P_0 - \frac{a}{V_0^2}\tau & \mu &= \mu_0 & T &= T_0 & V &= V_0, \end{aligned} \quad (123)$$

sustituyendo esta solución para valores $t \neq 0$ nuevamente en la ecuación del gas ideal $P_0V_0 = N_0RT_0$ obtenemos otra serie de nuevas ecuaciones de estado $(P + \frac{a}{V^2}\tau)V = NRT$ que describen a un gas ideal más un término de interacción entre partículas.

¹⁰La subvariedad que representa el estado de equilibrio del gas ideal.

Ahora, combinando ambos hamiltonianos en uno $h_3 = bP - \frac{a}{V}$ podemos hacernos una idea del tipo de transformación que estamos llevando a cabo. Explícitamente la solución del sistema asociado a h_3 es

$$U = U_0 - \frac{a}{b} \ln \left(\frac{V_0 + bt}{V_0} \right) \quad S = S_0 \quad N = N_0 \quad (124)$$

$$P = P_0 - \frac{at}{V_0(V_0 + bt)} \quad \mu = \mu_0 \quad T = T_0 \quad V = V_0 + bt,$$

que sustituyendo para valores $t \neq 0$ en la ecuación del gas ideal $P_0V_0 = N_0RT_0$ nos da como resultado

$$\left(P + \frac{at}{V(V - bt)} \right) (V - bt) = NRT, \quad (125)$$

una ecuación de estado que para $t = 1$ se asemeja bastante a la de Van der Waals. Es cuanto menos destacable como a través de una transformación generada por un hamiltoniano o combinación de hamiltonianos podamos mapear los estados de equilibrio del gas ideal a otro sistema termodinámico, en este caso el gas de Van der Waals.

Para concluir, cabe mencionar que también podemos obtener relaciones similares a la de Van der Waals a partir del gas ideal usando no una sola transformación sino dos consecutivas [40], i.e., V_{h_1} seguida de V_{h_2} y viceversa. Si tomamos V_{h_1} seguida de V_{h_2} obtendríamos

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \tau \right) (V - bt) = NRT, \quad (126)$$

y si hacemos V_{h_2} seguida de V_{h_1} encontramos

$$\left(P + \frac{a}{(V - bt)^2} \tau \right) (V - bt) = NRT, \quad (127)$$

ambas desde luego ecuaciones de estado biparamétricas¹¹.

4. Termodinámica de agujeros negros

Los agujeros negros son, en términos simples, regiones del espacio-tiempo de donde no es posible salir una vez que se ha entrado. Físicamente resultan de interés los agujeros negros estacionarios pues se piensa ampliamente que su formación es el resultado

¹¹En $t = \tau = 1$ (126) reproduce exactamente la ecuación de estado de Van der Waals

de un colapso gravitacional y el estado final de la evolución natural de las estrellas masivas [18, 55]. De todas las soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell la más general¹² que contiene un agujero negro es la de Kerr-Newman que describe un agujero negro con rotación y carga eléctrica en un espacio-tiempo axisimétrico sin materia, el cual está completamente caracterizado por tres parámetros globales, independientes y observables de manera externa: masa M , carga eléctrica Q y momento angular J ¹³ [36].

La descripción macroscópica de los agujeros negros más otra serie de rigurosos teoremas de geometría diferencial derivaron en un conjunto de leyes o restricciones con un más que notable parecido a las leyes de la termodinámica en equilibrio [4]. Si bien en un inicio dicha analogía fue considerada un remarcable resultado matemático, el continuo avance en el tema y sobre todo debido a los trabajos de Hawking [28, 29] y Bekenstein [5, 6], se ha establecido una base para lo que denominamos termodinámica de agujeros negros.

A continuación daremos un repaso de las leyes de la termodinámica de agujeros negros que nos permitirá eventualmente utilizar el formalismo de la sección anterior en estos sistemas. Además, cabe destacar que en todas las ecuaciones presentadas a continuación se utilizarán las unidades $G = c = \hbar = k_B = 1$.

4.1. Las leyes de la termodinámica de agujeros negros

Ley 4.1. (La Ley Zero) [4] *La gravedad superficial κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos.*

La gravedad superficial¹⁴ κ es una cantidad definida en el horizonte de cualquier agujero negro estacionario derivado del campo vectorial de Killing χ normal a dicho horizonte

¹²Y también la única de acuerdo a los teoremas de unicidad [21, 55]

¹³Usualmente conocidos como teoremas de no pelo.

¹⁴En el caso de un agujero negro estático se puede interpretar como la fuerza necesaria que debe hacerse desde el infinito sobre una unidad de masa para mantenerla en el horizonte. Dicha fuerza cuenta con un factor de redshift que puede interpretarse como el tiempo de relajación en el que una estrella que colapsa se acerca al equilibrio [18].

[55]. Si consideramos esta magnitud como una propiedad del estado final de un colapso gravitacional independientemente de la composición, forma y estructura del cuerpo original, ya que no podemos distinguir entre dos agujeros negros estacionarios con los mismos parámetros M, Q y J , ciertamente nos hace pensar en la estacionariedad como un estado de equilibrio. En este sentido es que se puede interpretar a κ como una propiedad análoga a la temperatura, en la cual dado un estado de equilibrio existe un parámetro en común para todo el sistema y que comparten todos los sistemas con las mismas características.

Evidentemente desde un punto de vista clásico un agujero negro estacionario debería tener una temperatura de 0K en términos de la termodinámica ordinaria, pues todo lo que pasa por el horizonte no puede volver a salir. Sin embargo, de acuerdo con Hawking el efecto de creación de partículas cuánticas en el límite del horizonte de un agujero negro da como resultado una emisión efectiva de partículas con un espectro de cuerpo negro a temperatura [28]:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (128)$$

De tal forma que κ realmente puede representar de manera física la temperatura termodinámica de un agujero negro.

Ley 4.2. (La Primera Ley) [21] *Si un agujero negro estacionario con parámetros (M, Q, J) es perturbado a un nuevo estado estacionario entonces el cambio en (M, Q, J) satisface*

$$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Phi_H dQ + \Omega_H dJ, \quad (129)$$

en donde A es el área del horizonte, Ω_H es la velocidad angular del agujero negro y Φ_H es el potencial eléctrico superficial.

Originalmente esta ley, derivada por Bardeen, Carter y Hawking, fue resultado del cálculo variacional aplicado a la fórmula integral de la masa M para un espacio-tiempo estacionario, axisimétrico y asintóticamente plano con materia fluida fuera del agujero negro [4]. La versión de la primera ley presentada aquí es la correspondiente al espacio-

tiempo de Kerr-Newman¹⁵

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2 \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\phi \\ + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (130)$$

siendo $a = \frac{J}{M}$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$ y las componentes del potencial electromagnético son

$$A_t = \frac{Qr}{\Sigma} \quad A_\phi = -\frac{Qar \sin \theta}{\Sigma} \quad A_r = A_\theta = 0. \quad (131)$$

En donde

- κ es la gravedad superficial en el horizonte externo dada por

$$\kappa = \frac{(r_+ - r_-)}{2(r_+^2 + a^2)}. \quad (132)$$

- A es el área de la superficie del horizonte que se define a un tiempo t_0 como el área de la intersección de la hipersuperficie Σ en $t = t_0$ constante con el horizonte externo H definido por $r = r_+$. En este caso

$$A = \int_{\Sigma \cap H} \sqrt{h} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (r_+^2 + a^2) = 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (133)$$

- Ω_H es la velocidad angular que representa la constante no cero en $\chi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$ que hace al vector de Killing χ tangente a los generadores del horizonte

$$\Omega_H = \frac{a}{(r_+^2 + a^2)}. \quad (134)$$

- Φ_H es el potencial eléctrico definido como la diferencia de potencial entre el infinito y el horizonte

$$\Phi_H = (\chi^\mu A_\mu)|_{r=r_+} - (\chi^\mu A_\mu)|_{r=\infty} = (A_t + \Omega_H A_\phi)|_{r=r_+} = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (135)$$

¹⁵En coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) .

Dada la forma de (129), en analogía con la versión termodinámica, realmente la podemos interpretar como una ley de conservación ya que la masa M representa la energía total y los términos de $\Omega_H dJ$ y $\Phi_H dQ$ se pueden entender como el trabajo hecho por un cambio en el momento angular o la carga eléctrica respectivamente. En el segundo término κ está relacionado con la temperatura, como vimos en la ley cero y el área A estará relacionada con la entropía S como revisaremos en la segunda ley.

Ley 4.3. (La Segunda Ley) [4] *El área A del horizonte de eventos de cada agujero negro no decrece con el tiempo*

$$\delta A \geq 0. \quad (136)$$

Esta ley es en esencia el resultado de teorema del área de Hawking [30]. Este teorema también nos dice que si dos o más agujeros negros se fusionan para formar uno solo, el área del horizonte de este último será mayor que la suma de las áreas de los horizontes iniciales, i.e.

$$A_{total} > A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (137)$$

Para el agujero negro de Kerr-Newman

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (138)$$

así que sustituyendo r_+ en (133) obtenemos la relación para el área $A = A(M, Q, J)$ dada por Smarr [51]:

$$A = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2 \left(M^4 - M^2 Q^2 - J^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (139)$$

con $Q^2 < M^2$ y $J^2 < M^4$.

De (139) podemos ver de forma más o menos explícita como en una perturbación que involucre tanto a la masa M como la carga Q y el momento angular J , siempre se incrementa el área A . Un ejemplo muy conocido que involucra una perturbación tanto en la masa M como en el momento angular J es el proceso de Penrose, mediante el cual se puede extraer energía de un agujero negro en rotación, en específico de una región exterior al horizonte llamada ergosfera [55]. En este ejemplo existe un límite

para la cantidad de energía que se puede extraer mediante ese proceso [15], por lo que el resultado final es un incremento en el área.

La propia naturaleza atractiva y la incapacidad de escapar de un agujero negro una vez cruzado el horizonte de eventos es lo que establece una analogía entre el área del horizonte y la entropía. Sin embargo, para formalizar una relación directa Bekenstein notó que la segunda ley podría violarse si los agujeros negros carecían de una entropía particular [5]. La cuestión es que si un agujero negro absorbe una cantidad arbitraria de objetos con entropía, el resultado final es una disminución de entropía en el universo, lo cual viola la Segunda Ley de la Termodinámica. Su propuesta, conocida como Segunda Ley Generalizada [6], establece que

$$dS_{total} \geq 0 \quad S_{total} = S_{externa} + S_{BH}. \quad (140)$$

Comparando (128) en (129) notamos que la entropía de un agujero negro debe ser

$$S_{BH} = \frac{A}{4}, \quad (141)$$

curiosamente llamada entropía de Bekenstein-Hawking.

Ley 4.4. (La Tercera Ley) [4] *La gravedad superficial κ no puede ser reducida a cero mediante un número finito de procesos termodinámicos.*

Esta ley establece un límite que determina hasta qué punto la termodinámica de un agujero negro estaría bien definida. Para verlo de forma más clara veamos qué sucede en $\kappa = 0$.

Sustituyendo r_{\pm} de (138) en (132) encontramos que la gravedad superficial en un agujero negro de Kerr-Newman se expresa como

$$\kappa = \frac{(M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{\frac{1}{2}}}{2M[M^2 - Q^2 + (M^4 - M^2Q^2 - J^2)^{\frac{1}{2}}]}, \quad (142)$$

y notemos que κ se hace cero para el siguiente valor:

$$M^4 = M^2Q^2 + J^2. \quad (143)$$

Sin embargo, esta relación es precisamente la condición que caracteriza un agujero negro extremal de Kerr-Newman, pues representa el caso límite en el que un agujero negro aún puede poseer horizonte de eventos. Procesos con la finalidad de reducir κ a cero podrían derivar en la creación de singularidades desnudas y por ende en la desaparición del agujero negro, en especial el horizonte de eventos, que es donde hemos observado la conexión con la termodinámica¹⁶. Escenarios como este son explorados en detalle en [54] mediante experimentos pensados y muestran lo difícil que es aproximarse a este límite¹⁷.

4.2. Ecuaciones termodinámicas de agujeros negros

A partir de lo revisado en la sección anterior, consideremos al agujero negro de Kerr-Newman como un sistema termodinámico y establezcamos algunas relaciones básicas para el equilibrio.

Utilizando (141) en (139) y resolviendo para $M = M(S, Q, J)$ obtenemos la ecuación fundamental

$$M = \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{4S} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (144)$$

Podemos notar que a diferencia de un sistema termodinámico ordinario, la energía total M no es una función homogénea de primer orden de los parámetros extensivos. Esto se debe a la imposibilidad de dividir la masa de un agujero negro en subsistemas, recordemos que de acuerdo con la Segunda Ley la suma de las áreas de dos o más agujeros negros es siempre menor que el área del agujero negro fusionado, i.e., $(M_1 + \dots + M_n)^2 \geq M_1^2 + \dots + M_n^2$ usando (139)¹⁸.

¹⁶A decir verdad, la creación de singularidades desnudas se considera un caso hipotético y físicamente no razonable de un espacio-tiempo de acuerdo a la conjetura de la censura cósmica de Penrose [43].

¹⁷En realidad circunstancias de este tipo son bastante más graves pues la métrica de Kerr-Newman falla en ser fuertemente asintóticamente predecible, una propiedad que es la base de muchos de los teoremas de agujeros negros [55].

¹⁸Esto también demuestra que la fusión de agujeros negros es irreversible.

Calculando la diferencial de (144), obtenemos la forma convencional de la Primera Ley

$$dM = TdS + \Phi_H dQ + \Omega_H dJ \quad (145)$$

en donde

$$\begin{aligned} T = \frac{\partial M}{\partial S} &= \frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M} \\ &= \frac{\sqrt{M^4 - M^2 Q^2 - J^2}}{2SM} \end{aligned} \quad (146)$$

$$\Phi_H = \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{Q(S + \pi Q^2)}{2SM} \quad (147)$$

$$\Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{\pi J}{SM} \quad (148)$$

son las ecuaciones de estado. En donde la tercera igualdad de la ecuación (146) nos dice que en el límite (143), $T \rightarrow 0$, lo que significa que podemos enfriar al agujero negro cargándolo o rotándolo.

Adicionalmente, usando las ecuaciones (144) y (146) podemos calcular el calor específico del agujero negro de Kerr-Newman como

$$C_{Q,J} \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Q,J} = \frac{8\pi M^2 S^2 T}{\pi^2(Q^4 + 4J^2)(T + 2M) - TS^2}. \quad (149)$$

En el caso del agujero negro de Schwarzschild

$$C \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{Q=J=0} = -\frac{1}{8\pi T^2} = -8\pi M^2, \quad (150)$$

por lo que este se calienta conforme irradia energía, contrario a lo que sucede con los sistemas termodinámicos ordinarios pero hecho conocido en sistemas gravitantes [18].

Una propiedad importante a destacar de (149) es que cuando $T \rightarrow 0$, $C_{Q,J} \rightarrow 0$ desde valores positivos, pese a que para valores suficientemente pequeños de Q y J , $C_{Q,J}$ es negativo (150). En consecuencia, para ciertos valores de Q y J hay un cambio de signo debido a la anulación del denominador. Usualmente cuando el calor específico pasa por una discontinuidad infinita ésta se asocia con una transición de fase de segundo orden.

En [17,18], Davies encontró que dicha transición ocurre en $Q \approx 0,86M$ cuando $\Phi_H = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para un agujero negro sin rotación ($J = 0$) y en $J \approx 0,68M^2$ cuando $\Omega_H = 0,23T$ para un agujero negro sin carga ($Q = 0$).

Por otro lado notemos que M es una función homogénea de grado $\frac{1}{2}$ de los parámetros extensivos ($M = M(S, Q^2, J)$), con lo cual utilizando el teorema de Euler obtenemos la identidad

$$\frac{1}{2}M = TS + \Theta Q^2 + \Omega_H J = TS + \frac{1}{2}\Phi_H Q + \Omega_H J, \quad (151)$$

siendo

$$\Theta = \frac{\Phi_H}{2Q} = \frac{S + \pi Q^2}{4SM}. \quad (152)$$

Normalmente se escribe como

$$M = 2TS + \Phi_H Q + 2\Omega_H J, \quad (153)$$

deducida originalmente por Smarr [51]. Además si diferenciamos (151) y usamos la Primera Ley encontramos

$$-dM = 2SdT + Q^2d\Theta + Jd\Omega_H, \quad (154)$$

la relación de Gibbs-Duhem para agujeros negros con

$$\frac{\partial M}{\partial T} = -2S \quad \frac{\partial M}{\partial \Theta} = -2Q^2 \quad \frac{\partial M}{\partial \Omega_H} = -2J. \quad (155)$$

Finalmente, cabe señalar que al sustituir (139) en (141) podemos obtener la ecuación fundamental para la entropía $S = S(M, Q, J)$ como

$$S = \pi \left[2M^2 - Q^2 + 2 \left(M^4 - M^2 Q^2 - J^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (156)$$

en donde la primera ley ahora es de la forma

$$dS = \frac{1}{T}dM - \frac{\Phi_H}{T}dQ - \frac{\Omega_H}{T}dJ, \quad (157)$$

de donde podemos derivar todas las relaciones correspondientes. En esta representación la Segunda Ley es precisamente la condición de concavidad de la entropía $dS_{BH} \geq 0$.

4.3. Termodinámica hamiltoniana de agujeros negros

Utilizando el formalismo de la estructura de contacto, analicemos la dinámica de los sistemas termodinámicos de agujeros negros a través de distintas funciones hamiltonianas.

Para empezar, dada una ecuación fundamental $M = M(S, Q, J)$ con condiciones de equilibrio

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} \quad \Phi_H = \frac{\partial M}{\partial Q} \quad \Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J} \quad (158)$$

tenemos que el Espacio Fase Termodinámico (TPS) para la termodinámica de agujeros negros es 7-dimensional con coordenadas $(M, S, Q, J, T, \Phi_H, \Omega_H)$ y con una estructura de contacto determinada por la 1-forma de Gibbs

$$\alpha = dM - TdS - \Phi_H dQ - \Omega_H dJ. \quad (159)$$

El Espacio de Estados de Equilibrio (TES) es entonces 3-dimensional con coordenadas (S, Q, J) , definido por el mapeo

$$\varphi : (S, Q, J) \rightarrow \left(M(S, Q, J), S, Q, J, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial Q}, \frac{\partial M}{\partial J} \right). \quad (160)$$

Así mismo, es posible utilizar la representación equivalente de la entropía siendo la 1-forma de Gibbs esta vez de la forma

$$\alpha_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\Phi}{T}dQ + \frac{\Omega_H}{T}dJ, \quad (161)$$

con

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M} \quad \frac{\Phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q} \quad \frac{\Omega_H}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad (162)$$

y donde la (TES) ahora se define por el mapeo

$$\varphi_S : (M, Q, J) \rightarrow (M, S(M, Q, J), Q, J, T(M, Q, J), \Phi_H(M, Q, J), \Omega_H(M, Q, J)), \quad (163)$$

recuperando (157) de $\varphi_S^* \alpha_S = 0$.

Otras representaciones también pueden ser consideradas utilizando transformaciones de Legendre y definiendo en cada caso un mapeo ψ para el TES. No obstante en cualquier representación las propiedades termodinámicas de los agujeros negros son independientes de cualquier elección.

4.3.1. Agujero negro de Schwarzschild

En este sistema el estado de equilibrio esta determinado por las siguientes ecuaciones:

$$M = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \quad T = \frac{1}{8\pi M} \quad M = 2TS. \quad (164)$$

El TPS es 3-dimensional así que tomamos coordenadas $(\phi, x^1, p_1) \longleftrightarrow (M, S, T)$. De acuerdo con (111) el sistema de ecuaciones asociado a un hamiltoniano de contacto h esta dado por

$$\frac{dM}{dt} = T \frac{\partial h}{\partial T} - h \quad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial h}{\partial T} \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial S} - T \frac{\partial h}{\partial M}. \quad (165)$$

Con el objetivo de analizar la termodinámica de este sistema en el formalismo de contacto, utilizando las relaciones (164), proponemos los siguientes hamiltonianos de contacto

$$h_1 = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} - M \quad h_2 = T - \frac{1}{8\pi M} \quad h_3 = 2TS - M. \quad (166)$$

El sistema de ecuaciones asociado a h_1 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = M - \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad \frac{dT}{dt} = T - \frac{1}{4\sqrt{\pi S}}, \quad (167)$$

cuya solución es simplemente

$$M(t) = M_0 \quad S(t) = S_0 \quad T(t) = T_0, \quad (168)$$

considerando las ecuaciones (164) y siendo $M_0 = \sqrt{\frac{S_0}{4\pi}}$ y $T_0 = \frac{1}{4\sqrt{\pi S_0}}$ ¹⁹. Las gráficas de la solución se observan en la Fig. 2.

Como $\sqrt{\frac{S}{4\pi}} - M = 0$, debido a que es la ecuación fundamental del sistema, $h_1^{-1}(0)$ contiene la subvariedad Lagrangiana L que describe el estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild. L es invariante respecto al flujo de V_{h_1} o dicho de otra forma V_{h_1} es tangente a L . Es fácil ver de (168) que todas las relaciones entre las variables termodinámicas se preservan para $t \neq 0$.

¹⁹Nos situamos en la subvariad de Legendre propia del sistema.

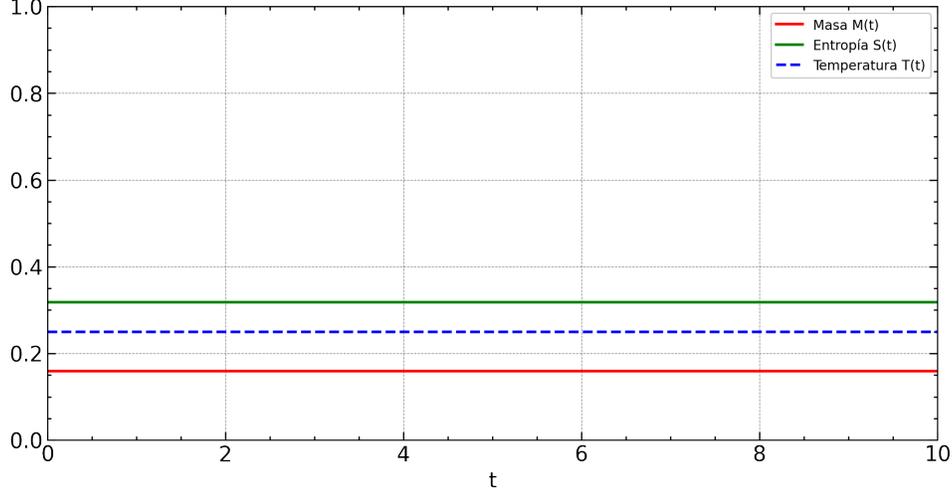


Figura 2: Gráfica de las curvas características de h_1 con $M_0 = \frac{1}{2\pi}$, $S_0 = \frac{1}{\pi}$ y $T_0 = \frac{1}{4}$.

A su vez, el sistema de ecuaciones asociado a h_2 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{8\pi M} \quad \frac{dS}{dt} = 1 \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{T}{8\pi M^2}, \quad (169)$$

cuya solución esta dada por la funciones

$$M(t) = \pm \sqrt{\frac{4M_0^2\pi + t}{4\pi}} \quad S(t) = S_0 + t \quad T(t) = \pm T_0 M_0 \sqrt{\frac{4\pi}{4M_0^2\pi + t}}. \quad (170)$$

Las gráficas de esta solución se pueden revisar en la Fig. 3.

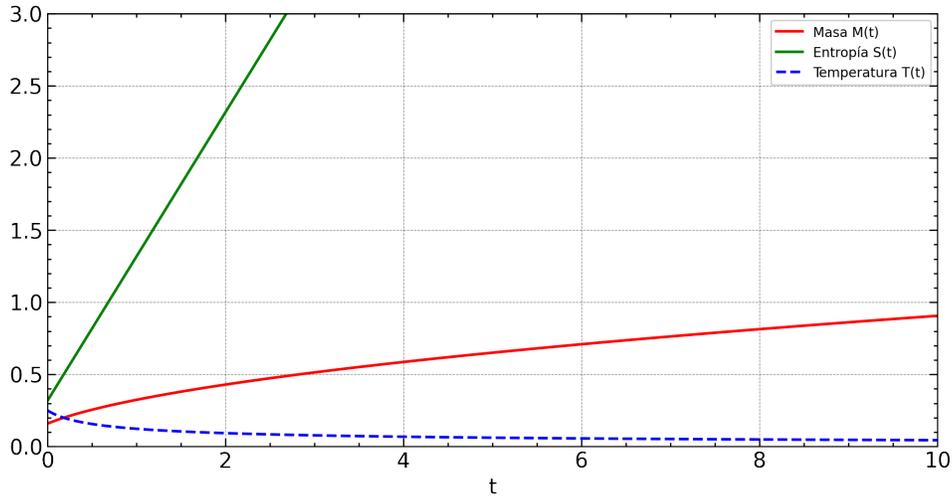


Figura 3: Gráfica de las curvas características de h_2 con $M_0 = \frac{1}{2\pi}$, $S_0 = \frac{1}{\pi}$ y $T_0 = \frac{1}{4}$.

Como $T - \frac{1}{8\pi M} = 0$, pues es la ecuación de estado del sistema, V_{h_2} es tangente a la subvariedad L que constituye el estado de equilibrio del sistema. Utilizando (170)

podemos comprobar que través de este proceso para valores $t \neq 0$ todas las relaciones entre las variables termodinámicas se preservan,

$$T(t) = \frac{1}{8\pi M(t)} \quad M(t) = \sqrt{\frac{S(t)}{4\pi}} \quad M(t) = 2T(t)S(t). \quad (171)$$

Por su parte, el sistema de ecuaciones asociado a h_3 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = M \quad \frac{dS}{dt} = 2S \quad \frac{dT}{dt} = -T, \quad (172)$$

que puede ser integrado fácilmente para obtener la solución

$$M(t) = M_0 e^t \quad S(t) = S_0 e^{2t} \quad T(t) = T_0 e^{-t}. \quad (173)$$

Las gráficas de la solución se representan en la Fig. 4.

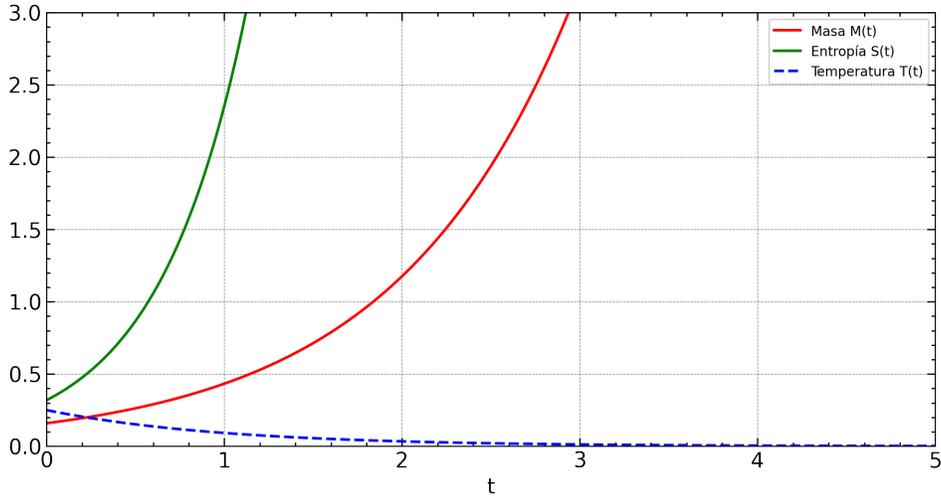


Figura 4: Gráfica de las curvas características de h_3 con $M_0 = \frac{1}{2\pi}$, $S_0 = \frac{1}{\pi}$ y $T_0 = \frac{1}{4}$.

Como $2TS - M = 0$, según la relación de Smarr, V_{h_3} es tangente a la subvariedad L que representa el estado de equilibrio del sistema. También de (173) es sencillo verificar que durante este proceso para valores $t \neq 0$ todas las relaciones entre las variables termodinámicas también se preservan.

Como pudimos ver, cada hamiltoniano de contacto que planteamos generó un proceso termodinámico distinto, en el sentido de que la subvariedad Lagrangiana L que equivale al estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild permaneció invariante ante

el flujo del campo vectorial asociando a cada hamiltoniano. Tomando esto en cuenta y revisando el sistema de ecuaciones (165), es posible mediante las relaciones (164) formular nuevos hamiltonianos y describir procesos termodinámicos específicos. Por ejemplo, tomando

$$h_4 = \frac{S}{4\pi M} - M, \quad (174)$$

que de acuerdo con (165) tiene asociado el sistema

$$\frac{dM}{dt} = M - \frac{S}{4\pi M} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad \frac{dT}{dt} = T \left(1 + \frac{S}{4\pi M^2} \right) - \frac{1}{4\pi M}, \quad (175)$$

tiene una solución dada por

$$M(t) = M_0 \quad S(t) = S_0 \quad T(t) = \frac{1 + (4\sqrt{\pi S_0} T_0 - 1)e^{2t}}{4\sqrt{\pi S_0}}, \quad (176)$$

con $M_0 = \sqrt{\frac{S_0}{4\pi}}$. Mediante (164) podemos comprobar que $h_4 = 0$ y por ende afirmar que este hamiltoniano describe entonces un proceso adiabático.

A través de las gráficas podemos ver que el comportamiento de las soluciones puede ser catalogado en tres conjuntos de funciones diferentes usando las mismas condiciones iniciales y satisfaciendo todas las relaciones termodinámicas que describen el estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild. El hamiltoniano h_4 es ejemplo de esto, pues aunque representa un proceso termodinámico distinto, el exigir que satisfaga las condiciones de equilibrio nos devuelve el mismo proceso que h_1 . Más aún, h_1 y h_4 son la transformación identidad pues durante este proceso no cambian los valores originales del agujero negro. Debido a lo anterior podemos decir que en el agujero negro de Schwarzschild no hay procesos puramente adiabáticos o isotérmicos.

En el caso de h_2 y h_3 las transformaciones establecen procesos en los cuales tanto la masa como la entropía aumentan, este es un comportamiento que esperaríamos de la entropía S en un proceso termodinámico ordinario pues en virtud de (156) con $J = Q = 0$, un aumento de masa aumenta la entropía. La temperatura por otro lado disminuye sin llegar a cero, manteniendo la relación entre la masa M y la temperatura T así como la concordancia con el calor específico (150).

4.3.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

En un agujero negro de Reissner-Nordström las relaciones que establecen el estado de equilibrio termodinámico están dadas por

$$M = \frac{1}{2\sqrt{\pi S}}(S + \pi Q^2) \quad T = \frac{S - \pi Q^2}{4\sqrt{\pi S^{\frac{3}{2}}}} \quad \Phi_H = \sqrt{\frac{\pi}{S}}Q \quad (177)$$

$$M = 2TS + \Phi_H Q$$

Con la finalidad de analizar la termodinámica de este sistema en el formalismo de contacto, usaremos las relaciones (177) para proponer los siguientes hamiltonianos de contacto:

$$h_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi S}}(S + \pi Q^2) - M \quad h_2 = T - \frac{S - \pi Q^2}{4\sqrt{\pi S^{\frac{3}{2}}}} \quad h_3 = \Phi_H - \sqrt{\frac{\pi}{S}}Q \quad (178)$$

$$h_4 = 2TS + \Phi_H Q - M$$

El sistema de ecuaciones asociado a h_1 de acuerdo con (111) es

$$\frac{dM}{dt} = M - \frac{1}{2\sqrt{\pi S}}(S + \pi Q^2) \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (179)$$

$$\frac{dT}{dt} = T - \frac{S - \pi Q^2}{4\sqrt{\pi S^{\frac{3}{2}}}} \quad \frac{d\Phi_H}{dt} = \Phi_H - \sqrt{\frac{\pi}{S}}Q$$

cuya solución es simplemente

$$M(t) = M_0 \quad S(t) = S_0 \quad Q(t) = Q_0 \quad T(t) = T_0 \quad \Phi_H(t) = \Phi_{H0}, \quad (180)$$

considerando las ecuaciones (177) con $M_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi S_0}}(S_0 + \pi Q_0^2)$, $T_0 = \frac{S_0 - \pi Q_0^2}{4\sqrt{\pi S_0^{\frac{3}{2}}}}$ y $\Phi_{H0} = \sqrt{\frac{\pi}{S_0}}Q_0$. Las gráficas de la solución se puede consultar en la Fig. 5.

Puesto que $h_1 = 0$, debido a que es la ecuación fundamental del sistema, $h_1^{-1}(0)$ contiene la subvariedad Lagrangiana L que constituye el estado de equilibrio del agujero negro de Reissner-Nordström. Es fácil ver que para $t \neq 0$ todas las relaciones termodinámicas se conservan.

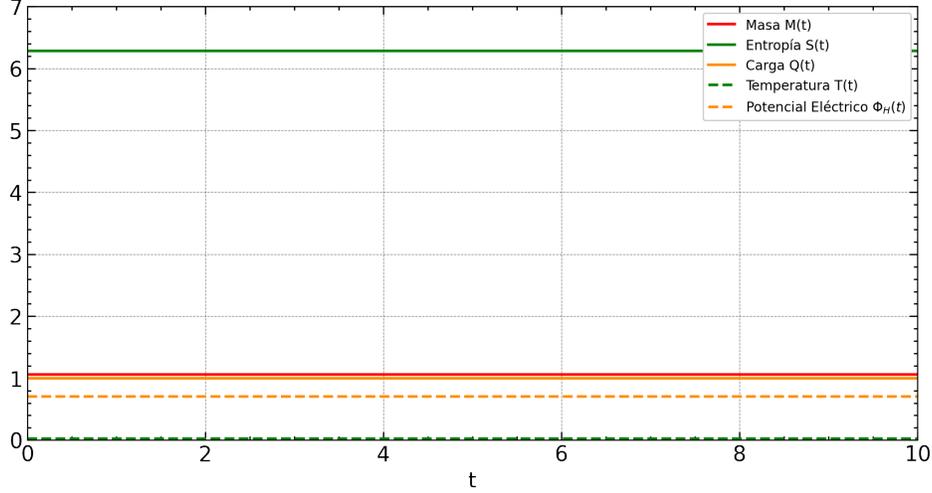


Figura 5: Gráfica de las curvas características de h_1 con $M(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S(0) = 2\pi$, $Q(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}$, $\Phi_H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por otro lado, para h_2 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{S - \pi Q^2}{4\sqrt{\pi}S^{\frac{3}{2}}} & \frac{dS}{dt} &= 1 & \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{3\pi Q^2 - S}{8\sqrt{\pi}S^{\frac{5}{2}}} & \frac{d\Phi_H}{dt} &= -\frac{\sqrt{\pi}Q}{2S^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (181)$$

cuya solución esta dada por la funciones

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{3\pi + t}{2\sqrt{\pi}(2\pi + t)} & S(t) &= 2\pi + t & Q(t) &= 1 \\ T(t) &= \frac{\pi + t}{4\sqrt{\pi}(2\pi + t)^{\frac{3}{2}}} & \Phi_H(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\pi + t}}. \end{aligned} \quad (182)$$

para $M(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S(0) = 2\pi$, $Q(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}$, $\Phi_H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Las gráficas de esta solución se observan en la Fig. 6.

Como $h_2 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_2} es tangente a la subvariedad L que representa el estado de equilibrio del sistema.

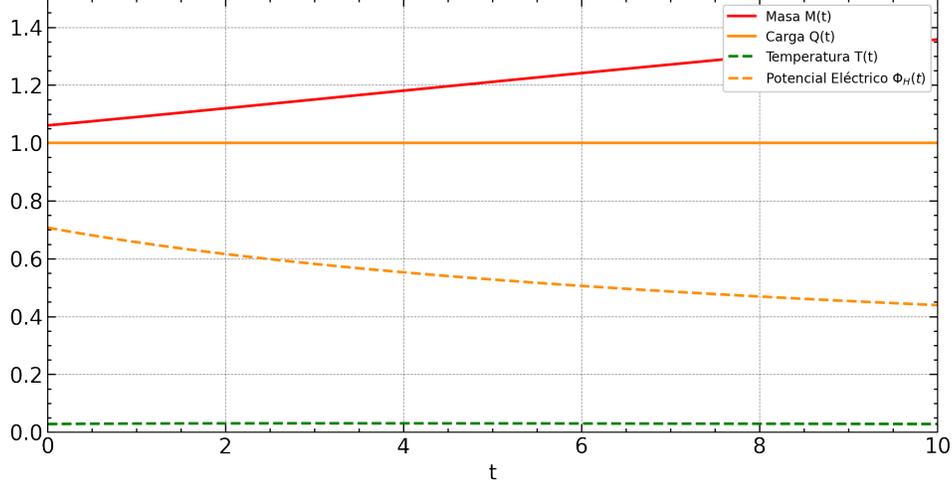


Figura 6: Gráfica de las curvas características de h_2 con $M(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S(0) = 2\pi$, $Q(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}$, $\Phi_H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En cambio, para h_3 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sqrt{\frac{\pi}{S}}Q & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dQ}{dt} &= 1 \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{\sqrt{\pi}Q}{2S^{\frac{3}{2}}} & \frac{d\Phi_H}{dt} &= \sqrt{\frac{\pi}{S}}, \end{aligned} \quad (183)$$

cuya solución esta dada por la funciones

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{2M_0Q_0 + \Phi_0(t^2 + 2Q_0t)}{2Q_0} & S(t) &= S_0 & Q(t) &= Q_0 + t \\ T(t) &= \frac{4S_0^{\frac{3}{2}}T_0 - \sqrt{\pi}t^2 - 2\sqrt{\pi}Q_0t}{4S_0^{\frac{3}{2}}} & \Phi_H(t) &= \frac{\Phi_{H0}(Q_0 + t)}{Q_0}. \end{aligned} \quad (184)$$

Las gráficas de la solución (184) están representadas en la Fig. 7.

Así mismo, dado que $h_3 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_3} es tangente a la subvariedad L que equivale al estado de equilibrio del sistema.

Finalmente, de acuerdo con (111) el sistema de ecuaciones asociado a h_4 es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= M & \frac{dS}{dt} &= 2S & \frac{dQ}{dt} &= Q \\ \frac{dT}{dt} &= -T & \frac{d\Phi_H}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (185)$$

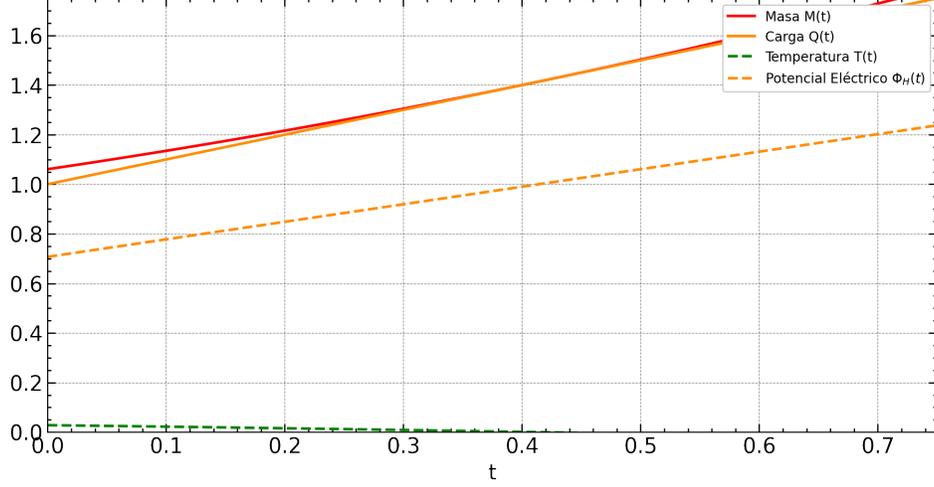


Figura 7: Gráfica de las curvas características de h_3 con $M(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S(0) = 2\pi$, $Q(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

que podemos integrar fácilmente para obtener

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 e^t & S(t) &= S_0 e^{2t} & Q(t) &= Q_0 e^t \\ T(t) &= T_0 e^{-t} & \Phi_H(t) &= \Phi_{H0}, \end{aligned} \quad (186)$$

y cuyas gráficas se pueden revisar en la Fig. 8.

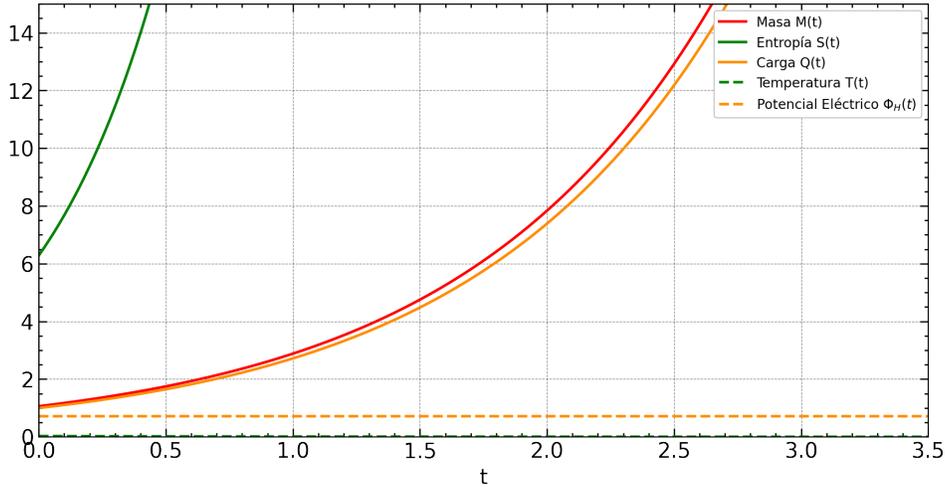


Figura 8: Gráfica de las curvas características de h_4 con $M(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S(0) = 2\pi$, $Q(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ya que $h_4 = 0$, debido a la relación de Smarr, V_{h_4} es tangente a la subvariedad L que describe el estado de equilibrio del sistema. En este caso también es fácil com-

probar usando (186) que para valores $t \neq 0$ todas las relaciones entre las variables termodinámicas se conservan.

Nuevamente cada hamiltoniano de contacto contemplado genera un proceso termodinámico distinto como resultado de la invariancia de la subvariedad Lagrangiana L que constituye el estado de equilibrio del agujero negro de Reissner-Nordström respecto al flujo del campo vectorial asociando a cada hamiltoniano. Además para elaborar las gráficas se utilizaron las mismas condiciones iniciales en cada solución, manteniendo todas las relaciones termodinámicas involucradas en el estado de equilibrio del sistema.

Una vez más h_1 es la transformación identidad, dejando durante este proceso los valores originales del agujero negro. Del mismo modo, el caso de h_4 es similar al proceso h_3 de Schwarzschild pues el comportamiento de la masa M , la entropía S y la temperatura T en ambos es el prácticamente el mismo, suponemos debido a que ambos se basan en la relación de Smarr.

El hamiltoniano h_3 se basa en la ecuación de estado para el potencial eléctrico Φ . De todos los hamiltonianos considerados es el único proceso adiabático y en el cual la temperatura T llega a cero. En este punto es posible ver de la Fig. 7 que $M \approx Q$, es decir el límite del agujero negro extremal (143) para $J = 0$. Desde el punto de vista de la física es remarcable que el formalismo de contacto sea congruente con este resultado, sin embargo, matemáticamente ese punto no representa un límite para el formalismo pues las funciones continúan tomando valores posteriores a este.

En el proceso h_2 el comportamiento más destacable es el de la temperatura T , que presenta un máximo antes de comenzar a disminuir sin llegar a cero, como puede verse en la Fig. 9. En este máximo se satisfacen las relaciones $Q \approx 0,86M$ y $\Phi_H = \frac{1}{\sqrt{3}}$ que de acuerdo con Davies [17, 18] corresponde a una transición de fase de segundo orden al diverger (149), lo cual explicaría este peculiar cambio en la temperatura. Más aún, si tomamos como valor inicial $\Phi_{H0} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ notamos que este máximo no está presente Fig. 10.

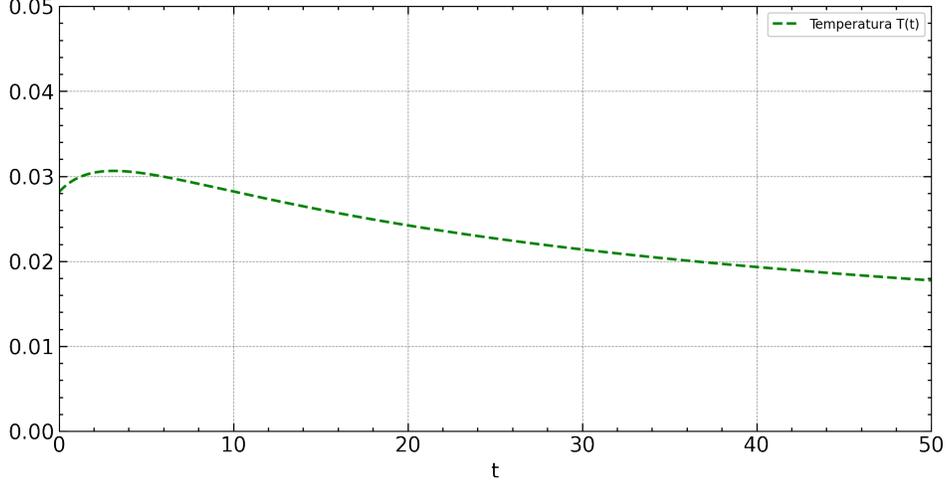


Figura 9: Gráfica centrada en la curva característica T de h_2 .

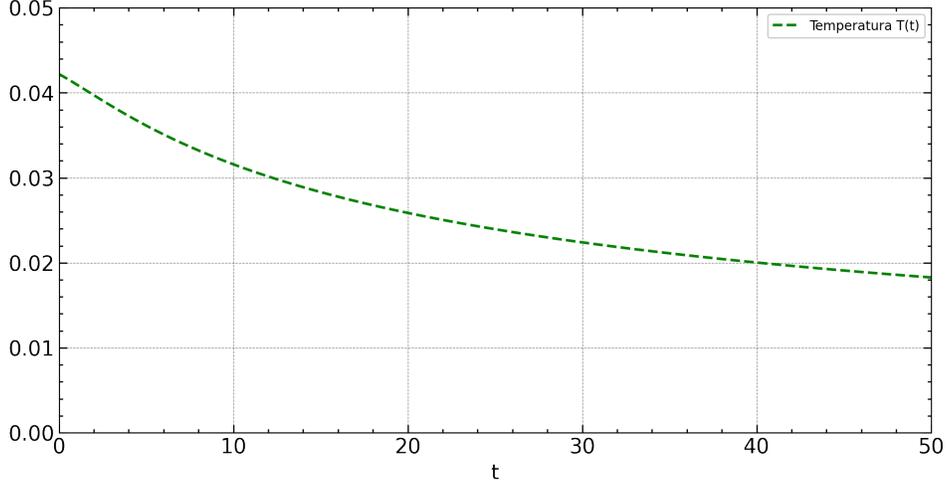


Figura 10: Gráfica centrada en la curva característica T de h_2 con $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

4.3.3. Agujero negro de Kerr

En un agujero negro de Kerr las relaciones que establecen el estado de equilibrio termodinámico están dadas por

$$M = \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}} \quad T = \frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M} \quad \Omega_H = \frac{\pi J}{SM} \quad (187)$$

$$M = 2TS + 2\Omega_H J.$$

De igual forma que los casos anteriores, para analizar la termodinámica de este sistema en el formalismo de contacto, consideramos las relaciones (187) para proponer los

siguientes hamiltonianos de contacto:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}} - M & h_2 &= T - \frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M} \\
h_3 &= \Omega_H - \frac{\pi J}{SM} & h_4 &= 2TS + 2\Omega_H J - M.
\end{aligned} \tag{188}$$

Antes de comenzar, cabe mencionar que debido a la complejidad de este agujero negro, algunos de los sistemas de ecuaciones fueron integrados de forma númerica utilizando el software *Mathematica*. Por consiguiente, no en todos los casos se cuenta con la forma explícita de las soluciones.

El sistema de ecuaciones asociado a h_1 de acuerdo con (111) es

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= M - \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}} & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dJ}{dt} &= 0 \\
\frac{dT}{dt} &= T - \frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M} & \frac{d\Omega_H}{dt} &= \Omega_H - \frac{\pi J}{SM},
\end{aligned} \tag{189}$$

cuya solución es simplemente

$$\begin{aligned}
M(t) &= M_0 & S(t) &= S_0 & Q(t) &= Q_0 \\
T(t) &= T_0 & \Omega_H(t) &= \Omega_{H0},
\end{aligned} \tag{190}$$

considerando las ecuaciones (187) con $M_0 = \left(\frac{S_0}{4\pi} + \frac{\pi J_0^2}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}}$, $T_0 = \frac{S_0^2 - 4\pi^2 J_0^2}{8\pi S_0^2 M_0}$ y $\Omega_{H0} = \frac{\pi J_0}{S_0 M_0}$. La gráfica de la solución se puede revisar en la Fig. 11.

Puesto que $h_1 = 0$, debido a que es la ecuación fundamental del sistema, $h_1^{-1}(0)$ contiene la subvariedad Lagrangiana L que representa el estado de equilibrio del agujero negro de Kerr. También para $t \neq 0$ todas las relaciones termodinámicas se conservan.

Por otro lado, para h_2 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M} & \frac{dS}{dt} &= 1 & \frac{dJ}{dt} &= 0 \\
\frac{dT}{dt} &= -T \left(\frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M^2} \right) \left(1 + \frac{2M}{ST} \right) + \frac{1}{4\pi MS} \\
\frac{d\Omega_H}{dt} &= -\Omega_H \left(\frac{S^2 - 4\pi^2 J^2}{8\pi S^2 M^2} \right) - \frac{\pi J}{S^2 M},
\end{aligned} \tag{191}$$

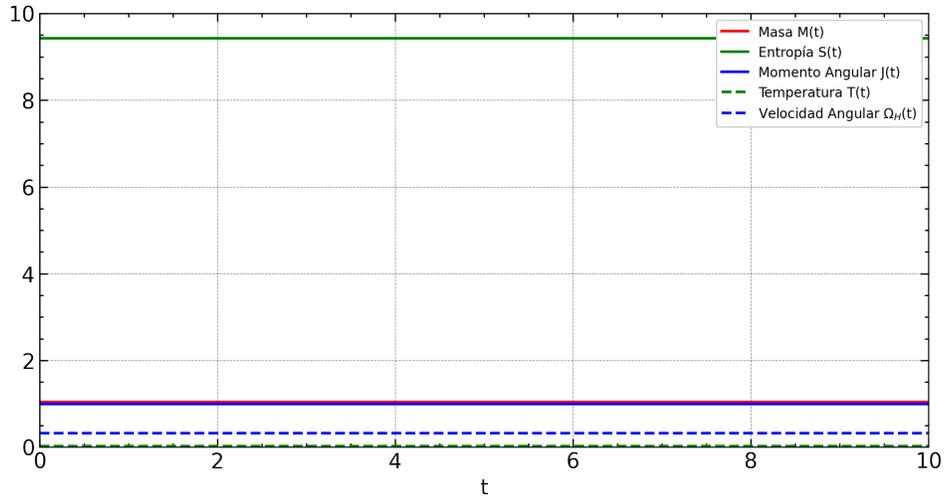


Figura 11: Gráfica de las curvas características de h_1 con $M(0) = \frac{\sqrt{39}}{6}$, $S(0) = 3\pi$, $J(0) = 1$, $T(0) = \frac{5}{12\sqrt{39}\pi}$, $\Omega_H(0) = \frac{2}{\sqrt{39}}$.

cuya solución puede verse gráficamente en la Fig. 12.

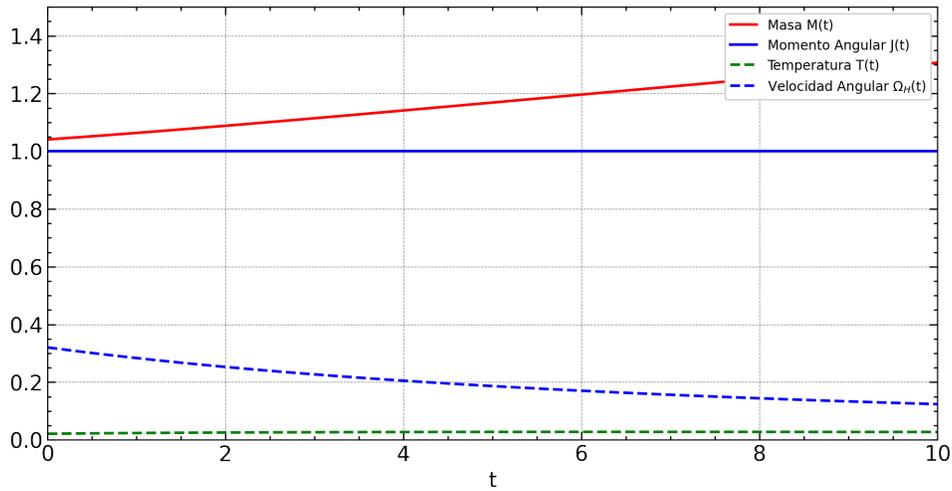


Figura 12: Gráfica de las curvas características de h_2 con $M(0) = \frac{\sqrt{39}}{6}$, $S(0) = 3\pi$, $J(0) = 1$, $T(0) = \frac{5}{12\sqrt{39}\pi}$, $\Omega_H(0) = \frac{2}{\sqrt{39}}$.

Como $h_2 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, X_{h_2} es tangente a la subvariedad L que representa el estado de equilibrio del sistema.

En cambio, para h_3 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{\pi J}{SM} & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dJ}{dt} &= 1 \\ \frac{dT}{dt} &= -(TS + M) \left(\frac{\pi J}{S^2 M^2} \right) & \frac{d\Omega_H}{dt} &= (M - \Omega_H J) \left(\frac{\pi}{SM^2} \right), \end{aligned} \quad (192)$$

cuya solución se encuentra gráficamente en la Fig. 13.

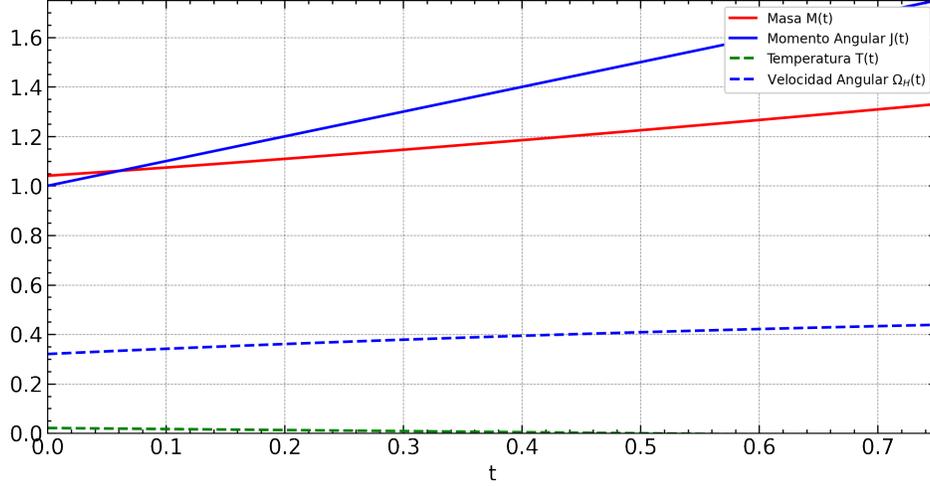


Figura 13: Gráfica de las curvas características de h_3 con $M(0) = \frac{\sqrt{39}}{6}$, $S(0) = 3\pi$, $J(0) = 1$, $T(0) = \frac{5}{12\sqrt{39}\pi}$, $\Omega_H(0) = \frac{2}{\sqrt{39}}$.

Además, dado que $h_3 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_3} es tangente a la subvariedad L del sistema.

Finalmente, de acuerdo con (111) el sistema de ecuaciones asociado a h_4 es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= M & \frac{dS}{dt} &= 2S & \frac{dJ}{dt} &= 2J \\ \frac{dT}{dt} &= -T & \frac{d\Omega_H}{dt} &= -\Omega_H, \end{aligned} \quad (193)$$

que a diferencia de los sistemas anteriores podemos integrar fácilmente para obtener

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 e^t & S(t) &= S_0 e^{2t} & J(t) &= J_0 e^{2t} \\ T(t) &= T_0 e^{-t} & \Omega_H &= \Omega_{H0} e^{-t}, \end{aligned} \quad (194)$$

y cuyas gráficas pueden consultarse en la Fig. 14.

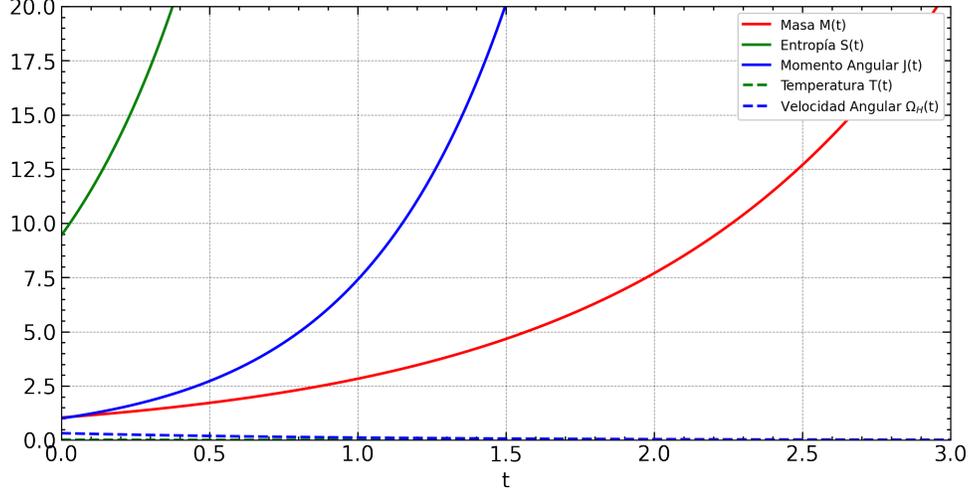


Figura 14: Gráfica de las curvas características de h_4 con $M(0) = \frac{\sqrt{39}}{6}$, $S(0) = 3\pi$, $J(0) = 1$, $T(0) = \frac{5}{12\sqrt{39}\pi}$, $\Omega_H(0) = \frac{2}{\sqrt{39}}$.

Ya que $h_4 = 0$, debido a la relación de Smarr, V_{h_4} es tangente a la subvariedad L que constituye el estado de equilibrio del sistema. En este caso particular también es fácil comprobar usando (194) que para valores $t \neq 0$ todas las relaciones entre las variables termodinámicas se conservan.

Una vez más cada hamiltoniano de contacto representa un proceso termodinámico distinto como resultado de la invariancia de la subvariedad Lagrangiana L que representa el estado de equilibrio del agujero negro de Kerr respecto al flujo del campo vectorial asociando a cada hamiltoniano. Así mismo para elaborar las gráficas se utilizaron las mismas condiciones iniciales en cada solución, manteniendo todas las relaciones termodinámicas involucradas en el estado de equilibrio del sistema.

De nueva cuenta h_1 es la transformación identidad, dejando durante este proceso los valores originales del agujero negro. De igual forma el caso de h_4 es similar al proceso h_3 de Schwarzschild siendo el comportamiento de la masa M , la entropía S y la temperatura T en ambos básicamente el mismo, pensamos también debido a la relación de Smarr.

El hamiltoniano h_3 se basa en la ecuación de estado para la velocidad angular Ω_H . Del

resto de los hamiltonianos considerados es el único proceso adiabático y en el cual la temperatura T llega a cero. En este punto $M^2 \approx J$, es decir el límite del agujero negro extremal (143) para $Q = 0$. Al igual que el sistema anterior, este resultado es coherente con la física pero no supone un límite para el formalismo de contacto.

En el proceso h_2 la temperatura T una vez más presenta un comportamiento notable al exponer un máximo antes de comenzar a disminuir sin llegar a cero, como puede verse en la Fig. 15. Algo peculiar de este máximo es que se satisface la relación $J \approx 0,68M^2$ pero no la relación $\Omega_H \approx 0,23T$ que de acuerdo con Davies [17, 18] corresponde a una transición de fase. Sin embargo, si tomamos el cociente $\frac{\Omega_H}{T}$ en (187) y sustituimos $J \approx 0,68M^2$ obtenemos $\frac{\Omega_H}{T} = cte \approx 5,82$ valor que si se corresponde con la gráfica.

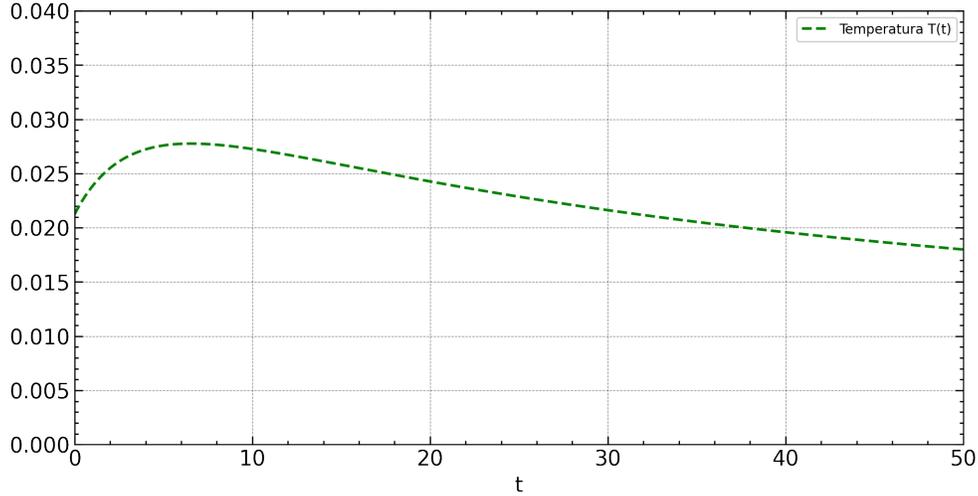


Figura 15: Gráfica centrada en la curva característica T de h_2 .

4.3.4. Agujero negro de Kerr-Newman

En un agujero negro de Kerr-Newman las relaciones que establecen el estado de equilibrio termodinámico están dadas por (144) y (146)-(153), debido a que se trata de del agujero negro más general. Con la finalidad de analizar la termodinámica de este sistema en el formalismo de contacto, utilizaremos estas relaciones para proponer los

siguientes hamiltonianos de contacto

$$\begin{aligned}
h_1 &= M - \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{4S} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}} \\
h_2 &= T - \frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M} & h_3 &= \Phi_H - \frac{Q(S + \pi Q^2)}{2SM} \\
h_4 &= \Omega_H - \frac{\pi J}{SM} & h_5 &= 2TS + \Phi_H Q + 2\Omega_H J - M.
\end{aligned} \tag{195}$$

Antes de comenzar, es preciso señalar que debido a la complejidad de este agujero negro, la mayoría de los sistemas de ecuaciones fueron integrados de forma numérica utilizando el software *Mathematica*. Por consiguiente, no en todos los casos se cuenta con la forma explícita de las soluciones.

El sistema de ecuaciones asociado a h_1 de acuerdo con (111) es

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{4S} + \frac{\pi J^2}{S} \right)^{\frac{1}{2}} - M & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dQ}{dt} &= 0 & \frac{dJ}{dt} &= 0 \\
\frac{dT}{dt} &= T - \frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M} & \frac{d\Phi_H}{dt} &= \Phi_H - \frac{Q(S + \pi Q^2)}{2SM} \\
\frac{d\Omega_H}{dt} &= \Omega_H - \frac{\pi J}{SM},
\end{aligned} \tag{196}$$

cuya solución es simplemente

$$\begin{aligned}
M(t) &= M_0 & S(t) &= S_0 & Q(t) &= Q_0 & J(t) &= J_0 \\
T(t) &= T_0 & \Phi_H(t) &= \Phi_{H0} & \Omega_H(t) &= \Omega_{H0},
\end{aligned} \tag{197}$$

considerando (144) y (146)-(153) con $M_0 = \left(\frac{S_0}{4\pi} + \frac{Q_0^2}{2} + \frac{\pi Q_0^4}{4S_0} + \frac{\pi J_0^2}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}}$, $T_0 = \frac{S_0^2 - \pi^2(Q_0^4 + 4J_0^2)}{8\pi S_0^2 M_0}$, $\Phi_{H0} = \frac{Q_0(S_0 + \pi Q_0^2)}{2S_0 M_0}$ y $\Omega_{H0} = \frac{\pi J_0}{S_0 M_0}$. La gráfica de la solución esta representada en la Fig. 16.

Puesto que $h_1 = 0$, debido a que es la ecuación fundamental del sistema, $h_1^{-1}(0)$ contiene la subvariedad Lagrangiana L del estado de equilibrio del agujero negro de Kerr-Newman. Notemos que para $t \neq 0$ todas las relaciones termodinámicas se conservan.

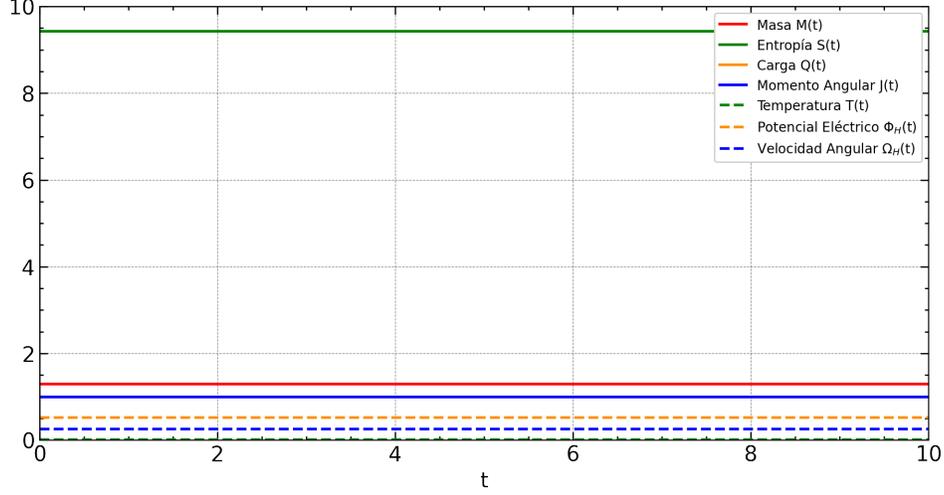


Figura 16: Gráfica de las curvas características de h_1 con $M(0) = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S(0) = 3\pi$, $Q(0) = J(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{6\sqrt{15}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\Omega_H(0) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Por otro lado, para h_2 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} &= \frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M} & \frac{dS}{dt} &= 1 & \frac{dQ}{dt} &= 0 & \frac{dJ}{dt} &= 0 \\
 \frac{dT}{dt} &= -T \left(\frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M^2} \right) \left(1 + \frac{2M}{ST} \right) + \frac{1}{4\pi MS} \\
 \frac{d\Phi_H}{dt} &= -\Phi_H \left(\frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M^2} \right) - \frac{\pi Q^3}{2S^2 M} \\
 \frac{d\Omega_H}{dt} &= -\Omega_H \left(\frac{S^2 - \pi^2(Q^4 + 4J^2)}{8\pi S^2 M^2} \right) - \frac{\pi J}{S^2 M},
 \end{aligned} \tag{198}$$

cuya solución puede verse gráficamente en la Fig. 17.

Además, como $h_2 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_2} es tangente a la subvariedad L que describe el estado de equilibrio del sistema.

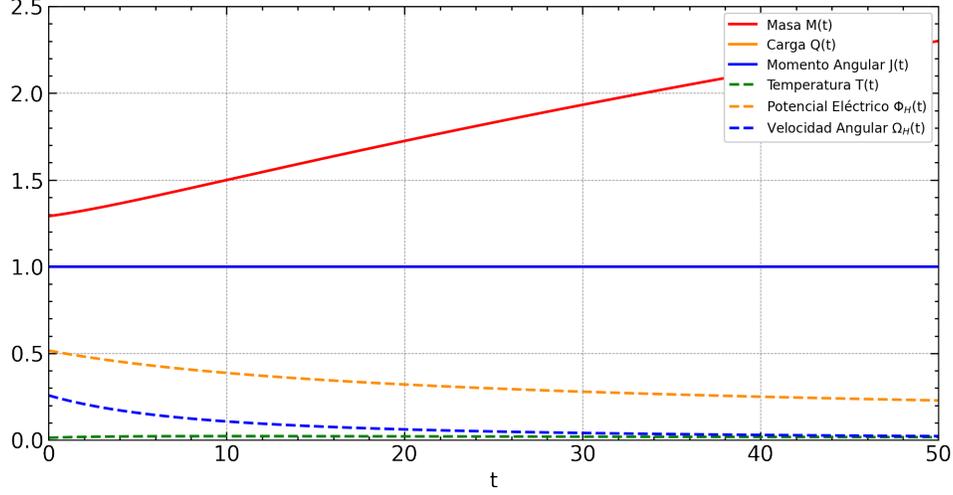


Figura 17: Gráfica de las curvas características de h_2 con $M(0) = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S(0) = 3\pi$, $Q(0) = J(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{6\sqrt{15}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\Omega_H(0) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

En cambio, para h_3 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dt} &= \frac{Q(S + \pi Q^2)}{2SM} & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dQ}{dt} &= 1 & \frac{dJ}{dt} &= 0 \\
 \frac{dT}{dt} &= -(TS + M) \left(\frac{Q(S + \pi Q^2)}{2S^2 M^2} \right) + \frac{Q}{2SM} \\
 \frac{d\Phi_H}{dt} &= (-\Phi_H Q + M) \left(\frac{S + \pi Q^2}{2SM^2} \right) + \frac{\pi Q^2}{SM} \\
 \frac{d\Omega_H}{dt} &= -\Omega_H \left(\frac{Q(S + \pi Q^2)}{2SM^2} \right)
 \end{aligned} \tag{199}$$

cuya solución puede consultarse en la Fig. 18.

Así mismo, dado que $h_3 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_3} es tangente a la subvariedad L que constituye el estado de equilibrio del sistema.

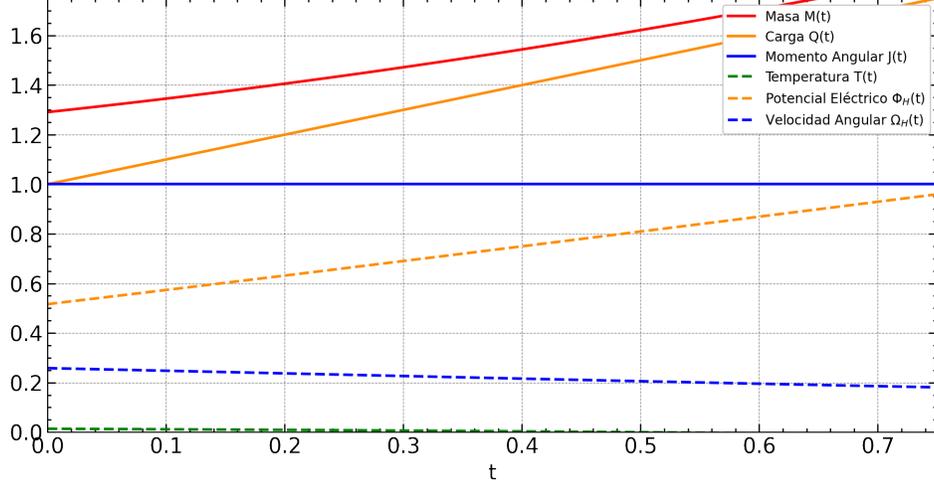


Figura 18: Gráfica de las curvas características de h_3 con $M(0) = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S(0) = 3\pi$, $Q(0) = J(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{6\sqrt{15}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\Omega_H(0) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Por su parte, para h_4 con base en (111) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{\pi J}{SM} & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dQ}{dt} &= 0 & \frac{dJ}{dt} &= 1 \\ \frac{dT}{dt} &= -(TS + M) \left(\frac{\pi J}{S^2 M^2} \right) \end{aligned} \quad (200)$$

$$\frac{d\Phi_H}{dt} = -\Phi_H \left(\frac{\pi J}{SM^2} \right) \quad \frac{d\Omega_H}{dt} = (-\Omega_H J + M) \left(\frac{\pi}{SM^2} \right),$$

cuya solución se puede revisar en la Fig. 19.

Más aún, como $h_4 = 0$, debido a que es una ecuación de estado del sistema, V_{h_4} es tangente a la subvariedad L que representa el estado de equilibrio del sistema.

Finalmente h_5 , de acuerdo con (111) tiene asociado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= M & \frac{dS}{dt} &= 2S & \frac{dQ}{dt} &= Q & \frac{dJ}{dt} &= 2J \\ \frac{dT}{dt} &= -T & \frac{d\Phi_H}{dt} &= 0 & \frac{d\Omega_H}{dt} &= -\Omega_H, \end{aligned} \quad (201)$$

que, a diferencia de los sistemas anteriores, podemos integrar fácilmente para obtener

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 e^t & S(t) &= S_0 e^{2t} & Q(t) &= Q_0 e^t & J(t) &= J_0 e^{2t} \\ T(t) &= T_0 e^{-t} & \Phi_H(t) &= \Phi_0 & \Omega_H &= \Omega_{H0} e^{-t}, \end{aligned} \quad (202)$$

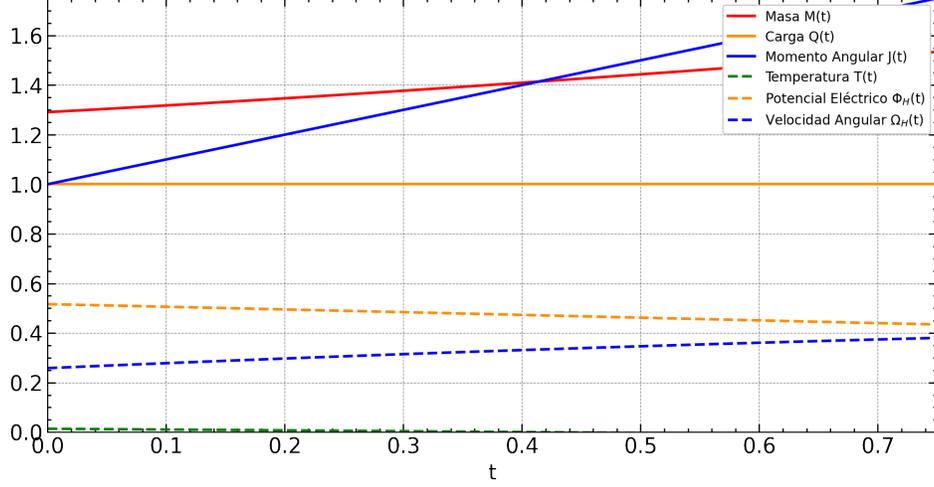


Figura 19: Gráfica de las curvas características de h_4 con $M(0) = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S(0) = 3\pi$, $Q(0) = J(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{6\sqrt{15}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\Omega_H(0) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

cuyas gráficas se observan en la Fig. 20.

Ya que $h_5 = 0$, debido a la relación de Smarr, V_{h_5} es tangente a la subvariedad L del estado de equilibrio del sistema. En este caso también es fácil comprobar usando (202) que para valores $t \neq 0$ todas las relaciones entre las variables termodinámicas se conservan.

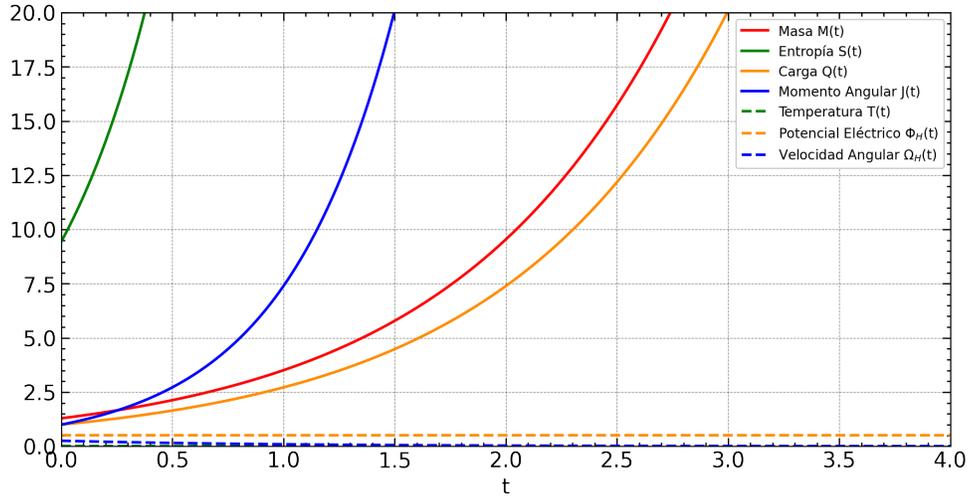


Figura 20: Gráfica de las curvas características de h_5 con $M(0) = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S(0) = 3\pi$, $Q(0) = J(0) = 1$, $T(0) = \frac{1}{6\sqrt{15}\pi}$, $\Phi_H(0) = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\Omega_H(0) = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Al igual que los sistemas anteriores cada hamiltoniano de contacto representa un proceso termodinámico distinto como resultado de la invariancia de la subvariedad Lagrangiana L que describe el estado de equilibrio del agujero negro de Kerr-Newman respecto al flujo del campo vectorial asociando a cada hamiltoniano. Del mismo modo para elaborar las gráficas se utilizaron las mismas condiciones iniciales en cada solución, manteniendo todas las relaciones termodinámicas involucradas en el estado de equilibrio del sistema.

Como en los otros sistemas h_1 es la transformación identidad. Así mismo, h_5 incorpora el comportamiento de todas las variables termodinámicas que ya hemos visto en los sistemas pasados para los hamiltonianos basados en la relación de Smarr.

En el proceso h_2 la temperatura T sigue presentando un máximo antes de comenzar a disminuir sin llegar a cero, como puede verse en la Fig. 15. En este máximo, basados en nuestra experiencia previa con el resto de sistemas, asumimos que ocurre una transición de fase en la cual se cumplen las siguientes relaciones $Q \approx 0,66M$, $\Phi_H = 16,77T$, $J \approx 0,44M^2$ y $\Omega_H \approx 4,66T$ que ya no corresponden a las encontradas por Davies [17,18] pues el agujero negro de Kerr-Newman tiene tanto carga como momento angular.

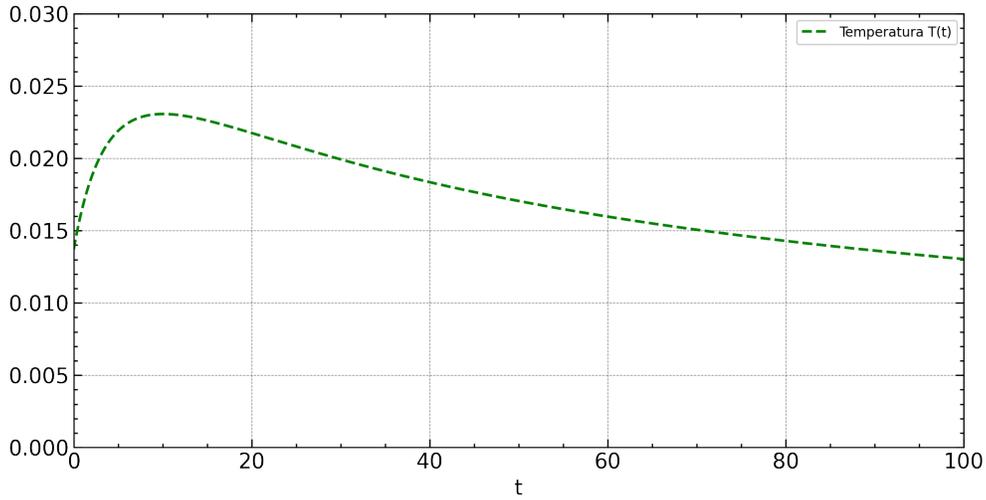


Figura 21: Gráfica centrada en la curva característica T de h_2 .

Los hamiltonianos h_3 y h_4 se basan en las ecuaciones de estado para el potencial eléctrico Φ_H y el momento angular Ω_H respectivamente. De forma análoga a los dos

sistemas previos, son procesos adiabáticos y en los cuales la temperatura T llega a cero. En este punto en ambos procesos se satisface el límite del agujero negro extremal $M^4 = M^2Q^2 + J^2$. Debido a que este sistema es el más general, este resultado es el mejor ejemplo de la consistencia que tiene el formalismo de contacto con la física de agujeros negros, no obstante, al igual que con los casos anteriores dicha condición no constituye un límite para el formalismo.

4.3.5. Transformaciones del agujero negro de Schwarzschild

A diferencia de los ejemplos de la sección 4.3.1, un campo vectorial X_h asociado a un hamiltoniano de contacto h que no es tangente a la subvariedad de Lagrange L que constituye el estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild, no puede ser tratado como un generador de un proceso termodinámico, sin embargo, si podemos tomar la transformación inducida como una forma de deformar el agujero negro de Schwarzschild en una familia uniparamétrica de nuevos sistemas termodinámicos con sus correspondientes ecuaciones de estado. Este procedimiento es de hecho el que se utilizó para obtener el gas de Van der Wall a partir de gas ideal, por lo que en este contexto nuestro objetivo será encontrar un hamiltoniano de contacto que nos permita pasar de un agujero negro de Schwarzschild a un agujero negro de Reissner-Nordström o Kerr.

Recordemos que en el agujero negro de Schwarzschild la única ecuación de estado es

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (203)$$

Si la comparamos con la correspondiente ecuación de estado en Kerr-Newman

$$T = \frac{1}{8\pi M} - \frac{\pi Q^4}{8S^2M} - \frac{\pi J^2}{2S^2M}, \quad (204)$$

podemos observar que la diferencia con un agujero negro con carga o momento angular es un término $\propto \frac{1}{S^2M}$. Tomando esto en consideración proponemos los siguientes hamiltonianos de contacto

$$h_1 = \frac{C}{T} \quad h_2 = \frac{C}{ST} \quad h_3 = \frac{CM}{S} \quad (205)$$

con C una constante distinta de cero.

El sistema de ecuaciones asociado a h_1 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2C}{T} \quad \frac{dS}{dt} = -\frac{C}{T^2} \quad \frac{dT}{dt} = 0, \quad (206)$$

cuya solución está dada por la funciones

$$M(t) = \frac{M_0 T_0 - 2Ct}{T_0} \quad S(t) = \frac{S_0 T_0^2 - Ct}{T_0^2} \quad T(t) = T_0. \quad (207)$$

En este hamiltoniano $h_1|_L = \frac{C}{T} \neq 0$, el campo vectorial X_{h_1} ya no es tangente a la subvariedad Lagrangiana L correspondiente al estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild. El flujo de X_{h_1} ya no deja invariante a L , así que permite llevar las ecuaciones de estado originales a nuevas relaciones uniparamétricas. Utilizando (207) en (164) para $t \neq 0$ obtenemos

$$T(t) = \frac{1}{8\pi M(t)} - \frac{2Ct}{M(t)}. \quad (208)$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones asociado a h_2 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2C}{ST} \quad \frac{dS}{dt} = -\frac{C}{ST^2} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{C}{S^2 T}, \quad (209)$$

cuya solución está dada por la funciones

$$M(t) = \frac{M_0 S_0 T_0 - 2Ct}{S_0 T_0} \quad S(t) = S_0 e^{-\frac{Ct}{S_0^2 T_0^2}} \quad T(t) = T_0 e^{\frac{Ct}{S_0^2 T_0^2}}. \quad (210)$$

En este hamiltoniano $h_2|_L = \frac{C}{ST} \neq 0$, así que el campo vectorial X_{h_2} no es tangente a la subvariedad Lagrangiana L correspondiente al estado de equilibrio sistema. De esta manera X_{h_2} también permite llevar las ecuaciones de estado originales a nuevas relaciones uniparamétricas. Utilizando (210) en (164) para $t \neq 0$ encontramos

$$T(t) = \frac{e^{\frac{Ct}{S(t)^2 T(t)^2}}}{8\pi M(t)} - \frac{2Ct}{S(t)M(t)}. \quad (211)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones asociado a h_3 según (165) es

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{CM}{S} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad \frac{dT}{dt} = \frac{C}{S} \left(\frac{M}{S} - T \right), \quad (212)$$

cuya solución esta dada por la funciones

$$M(t) = M_0 e^{-\frac{Ct}{S_0}} \quad S(t) = S_0 \quad T(t) = \left(\frac{CM_0 t + S_0^2 T(t)}{S_0^2} \right) e^{-\frac{Ct}{S_0}}. \quad (213)$$

En este hamiltoniano $h_3|_L = \frac{CM}{S} \neq 0$, el campo vectorial X_{h_3} tampoco es tangente a la subvariedad Lagrangiana L correspondiente al estado de equilibrio sistema, por lo que X_{h_3} de igual forma permite llevar las ecuaciones de estado originales a nuevas relaciones uniparamétricas. Utilizando (213) en (164) para $t \neq 0$ obtenemos

$$T(t) = \frac{e^{-\frac{Ct}{2}}}{8\pi M(t)} + \frac{CM(t)t}{S(t)^2}. \quad (214)$$

Si bien podemos ajustar la constante C de manera apropiada según sea el caso, es evidente que en ningún ejemplo el segundo término de $T(t)$ es de la forma $\frac{C}{S^2 M}$. El más parecido es el hamiltoniano h_3 , que además induce una transformación que deja invariante la entropía. Solo como agregado a este comportamiento tomemos $C = -\frac{\pi Q^4}{8}$ y $C = -\frac{\pi J^2}{2}$ para escribir explícitamente las ecuaciones de estado de un agujero negro transformado con carga Q o momento angular J , respectivamente. Esto es

$$\begin{aligned} M(t) &= \left(\frac{S(t)}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi Q^4 t}{4S(t)}} & M(t) &= \left(\frac{S(t)}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi J^2 t}{S(t)}} \\ T(t) &= \frac{e^{\frac{\pi Q^4 t}{16}}}{8\pi M(t)} - \frac{\pi Q^4 M(t)t}{8S(t)^2} & T(t) &= \frac{e^{\frac{\pi J^2 t}{4}}}{8\pi M(t)} - \frac{\pi J^2 M(t)t}{2S(t)^2} \\ M(t) &= 2T(t)S(t) + \frac{\pi Q^4 M(t)t}{4S(t)} & M(t) &= 2T(t)S(t) + \frac{\pi J^2 M(t)t}{S(t)}, \end{aligned} \quad (215)$$

gráficadas en la Fig. 22.

La transformación del hamiltoniano h_3 genera un comportamiento en la variables termodinámicas similar al que encontramos en los hamiltonianos h_4 correspondientes a las ecuaciones de estado para el potencial eléctrico Φ_H y la velocidad angular Ω_H de los agujeros negros de Reissner-Nordström y Kerr, sin embargo, el cero de la función $T(t)$ no reproduce en ningún caso el límite del agujero negro extremal (143).

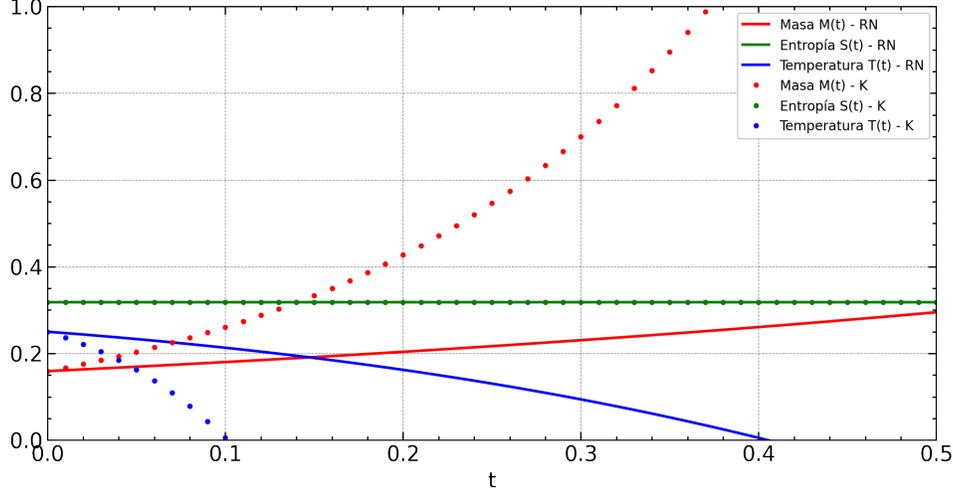


Figura 22: Gráfica de las curvas características de h_3 con $M(0) = \frac{1}{2\pi}$, $S(0) = \frac{1}{\pi}$, $T(0) = \frac{1}{4}$ para $Q = 1$ y $J = 1$.

4.3.6. Transformaciones del agujero negro de Schwarzschild en AdS

En la termodinámica de agujeros negros normalmente la masa M toma el papel de la energía interna U del sistema, sin embargo, para un agujero negro dentro de un espacio-tiempo de anti-de Sitter (AdS) se ha propuesto [32], que es más adecuado interpretar a la masa M como la entalpía H , i.e.

$$M = H(S, P) = U(S, V) + PV. \quad (216)$$

En donde PV se asume como la contribución a la masa-energía del agujero negro debido a la densidad de energía del vacío $\epsilon = -P = \frac{\Lambda}{8\pi}$, pues si este tiene un volumen V entonces la energía contenida es $\epsilon V = -PV$ y por ende la energía total corresponde a $U = M - PV$. En este marco, el volumen termodinámico se define como la variable conjugada de la presión dada la transformación de Legendre (216),

$$V \equiv \frac{\partial H}{\partial P}. \quad (217)$$

Como resultado la primera ley adopta la forma

$$dU = TdS + \Phi dQ + \Omega_H dJ - PdV, \quad (218)$$

obtenida a partir de la transformada de Legendre de

$$dM = dH = TdS + \Phi dQ + \Omega_H dJ + VdP. \quad (219)$$

La adición del término PV es una cuestión que ha sido abordada desde hace algunas décadas, con trabajos que han dado lugar a notables descubrimientos [19, 20, 25, 32, 49, 53]. En particular, la incorporación de Λ a lista de variables termodinámicas es justificada bajo argumentos de escala en [32], como un término necesario para la correcta definición de la relación de Smarr (153) sobre funciones termodinámicas. Dicha relación ahora se expresa como

$$(D - 3)M = (D - 2)TS + (D - 3)Q\Phi + (D - 2)\Omega_H J - 2PV, \quad (220)$$

con D la dimensión del espacio-tiempo.

Mencionado lo anterior, examinemos la termodinámica involucrada en esta nueva perspectiva para el agujero negro de Schwarzschild y Reissner-Nordström en AdS.

En un agujero negro de Schwarzschild en AdS el elemento de línea es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (221)$$

siendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (222)$$

El horizonte de eventos esta dado por

$$f(r_h) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\Lambda}{3}r_h^3 - r_h + 2m = 0, \quad (223)$$

y resolviendo para m tenemos

$$m = \frac{r_h}{2} \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r_h^2 \right). \quad (224)$$

Para una Λ negativa la masa ADM es $M = m$ [20], así que podemos identificarla con la entalpía $H(S, P) = M = m$ y obtener

$$H(S, P) = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{8SP}{3} \right). \quad (225)$$

con $S = \pi r_h^2$ y $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$.

Ahora que tenemos el potencial, calcular las ecuaciones de estado para la temperatura T y el volumen V se hace de la manera usual, i.e.

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi S} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 8SP) = \frac{1 - \Lambda r_h^2}{4\pi r_h} \quad (226)$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S = \frac{4}{3} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\pi r_h^3}{3}. \quad (227)$$

De donde a su vez obtenemos la ecuación para la presión P ,

$$P = \sqrt{\frac{\pi T}{S}} \frac{1}{2} - \frac{1}{8S}. \quad (228)$$

Del mismo modo, en un agujero negro de Reissner-Nordström en AdS [19,20], la entalpía está dada por

$$H(S, P) = M = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} S^{-\frac{1}{2}} (8S^2 P + 3S + 3\pi Q^2), \quad (229)$$

con lo cual las ecuaciones de estado son

$$T = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} S^{-\frac{3}{2}} (8S^2 P + S - \pi Q^2) \quad (230)$$

$$V = \frac{4}{3} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\pi r_h^3}{3} \quad (231)$$

$$P = \sqrt{\frac{\pi T}{S}} \frac{1}{2} - \frac{1}{8S} + \frac{\pi Q^2}{8S^2}. \quad (232)$$

Esta última ecuación se suele reescribir como

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4}, \quad (233)$$

siendo $v = 2r_h = 2 \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$ el volumen específico. El uso de este volumen en lugar del termodinámico es derivado del trabajo de [35], donde se le asocia a un fluido de Van de Waals debido al comportamiento tan similar que presenta (233) con dicho gas.

Ahora bien, utilizando el formalismo de los hamiltonianos de contacto veamos como a diferencia de la sección anterior 4.3.5, en este contexto sí es posible encontrar un hamiltoniano de contacto que nos permite pasar del agujero negro de Schwarzschild al agujero negro de Reissner-Nordström.

En [25] se propone el hamiltoniano

$$h = -\frac{C}{V^{\frac{1}{3}}} \quad C > 0 \quad (234)$$

con C una constante. El sistema de ecuaciones asociado a h según (165) es

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{4}{3} \frac{C}{V^{\frac{1}{3}}} & \frac{dS}{dt} &= 0 & \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{3} \frac{C}{V^{\frac{4}{3}}} \\ \frac{dT}{dt} &= 0 & \frac{dV}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (235)$$

cuya solución es simplemente

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + \frac{4}{3} \frac{C}{V_0^{\frac{1}{3}}} t & S(t) &= S_0 & P(t) &= P_0 + \frac{1}{3} \frac{C}{V_0^{\frac{4}{3}}} t \\ T(t) &= T_0 & V(t) &= V_0. \end{aligned} \quad (236)$$

Este hamiltoniano $h|_L = -\frac{C}{V^{\frac{1}{3}}} \neq 0$, así que el campo vectorial X_h no es tangente a la subvariedad Lagrangiana L que representa el estado de equilibrio del agujero negro de Schwarzschild en AdS. Por ende, como podemos ver de (236), el flujo de X_h transforma la presión P en la siguiente relación uniparamétrica

$$P = P_0 + \frac{16C}{3v^4} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} t, \quad (237)$$

en términos del volumen específico $v = 2 \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$. Si sustituimos a su vez este resultado en la ecuación de estado (228), para $t \neq 0$ obtenemos

$$P - \frac{16C}{3v^4} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} t = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2}. \quad (238)$$

De la cual, si elegimos la constante C de forma apropiada, i.e.

$$C = \frac{3Q^2}{8\pi} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (239)$$

encontramos exactamente la ecuación de estado para un agujero negro cargado en AdS (232):

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} t, \quad (240)$$

en realidad una serie de ecuaciones de estado debido a $t \in \mathbb{R}$. Más aún, si revisamos la ecuación de estado para V (227), notaremos que el volumen esta relacionado con la entropía²⁰ como

$$V = \frac{4}{3} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad (241)$$

razón por la cual un hamiltoniano un equivalente a (234) es

$$h' = -\frac{C}{S^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad C > 0. \quad (242)$$

En este ejemplo el sistema de ecuaciones asociado a h' de acuerdo con (165) es

$$\frac{dH}{dt} = \frac{C}{S^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad \frac{dP}{dt} = 0 \quad (243)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C}{S^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \frac{dV}{dt} = 0$$

y su solución

$$H(t) = H_0 + \frac{C}{S^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} t \quad S(t) = S_0 \quad P(t) = P_0 \quad (244)$$

$$T(t) = T_0 - \frac{1}{2} \frac{C}{S^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} t \quad V(t) = V_0.$$

Las variables termodinámicas transformadas ahora son H y T , no obstante, si de igual forma utilizando la constante C definida en (239) las sustituimos en las respectivas ecuaciones (225) y (226) del agujero negro de Schwarzschild en AdS, lo que obtendremos serán las correspondientes ecuaciones (229) y (230) del agujero negro de Reissner-Nordström en AdS. De modo que este hamiltoniano también permite pasar de un agujero a otro en AdS.

²⁰Esta relación se mantiene para agujeros negros sin rotación en cualquier dimensión [20].

5. Conclusiones

En este trabajo hemos abordado de manera satisfactoria la termodinámica en equilibrio de los agujeros negros a través del formalismo de los hamiltonianos de contacto. En concreto, analizamos los distintos procesos termodinámicos del agujero negro de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman generados por hamiltonianos basados en la ecuación fundamental, las ecuaciones de estado y la relación de Smarr de cada sistema. Adicionalmente debido al alcance del formalismo se examinaron también transformaciones del agujero negro de Schwarzschild a otras estructuras.

Si bien el comportamiento general de los procesos termodinámicos encontrados corresponde al que esperaríamos de un sistema ordinario, destacamos los hamiltonianos basados en las ecuaciones de estado pues presentan propiedades interesantes.

Para los agujeros negros de Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman los hamiltonianos basados en las ecuaciones de estado del potencial eléctrico y momento angular permitieron obtener procesos que corroboraba el límite del agujero negro extremal (143) cuando la temperatura $T(t)$ llegaba a cero. Por otra parte, de los hamiltonianos basados en la ecuación de estado de la temperatura, se encontraron procesos en donde fue posible identificar la transición de fase del agujero negro esta vez en el máximo de la función temperatura $T(t)$. Por último, el agujero negro de Schwarzschild al ser el más sencillo no cuenta con ninguna de estas peculiaridades, hecho que se ve reflejado en el proceso del hamiltoniano basado en su única ecuación de estado.

En cuanto a las transformaciones del agujero negro de Schwarzschild, se emplearon hamiltonianos de contacto con campos vectoriales asociados no tangentes a la subvariedad de Lagrange que describe el estado de equilibrio del sistema con la intención de transformarlo en un agujero negro que sí poseyera carga o momento angular. Desafortunadamente no se logró encontrar dicha transformación, sin embargo, de acuerdo con [25], es posible alcanzar tal objetivo en un espacio-tiempo AdS donde es posible definir variables termodinámicas presentes en sistemas termodinámicos ordinarios.

Dados los resultados obtenidos en este trabajo considero que el formalismo de los hamiltonianos de contacto es una herramienta útil y una buena alternativa para analizar la termodinámica de los sistemas en equilibrio termodinámico. Si bien nos hemos concentrado enteramente en los agujeros negros, lo que aquí se ha presentado es solo una muestra de la capacidad que tiene el abordar la termodinámica desde un enfoque geométrico. Quedan aún muchos sistemas por analizar y dentro de los mismo algunos aspectos a los cuales todavía podríamos darles una interpretación, no es exagerado pensar que resta mucho por explorar en este ámbito.

Referencias

- [1] Luis Aragón Muñoz and Hernando Quevedo. Symplectic structure of equilibrium thermodynamics. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 19(11):2250178, 2022.
- [2] V. Arnold and S. Novikov. *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*, volume 4. 01 2001.
- [3] V. I. Arnol'd, K. Vogtmann, and A. Weinstein. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997.
- [4] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2):161—170, 1973.
- [5] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333—2346, Apr 1973.
- [6] Jacob D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Phys. Rev. D*, 9:3292—3300, Jun 1974.
- [7] J. B. Boyling. Carathéodory's principle and the existence of global integrating factors. *Communications in Mathematical Physics*, 10(1):52—68, 1968.
- [8] Alessandro Bravetti, Hans Cruz, and Diego Tapias. Contact hamiltonian mechanics. *Annals of Physics*, 376:17–39, 2017.
- [9] Alessandro Bravetti, Cesar S. Lopez-Monsalvo, and Francisco Nettel. Contact symmetries and hamiltonian thermodynamics. *arXiv: Mathematical Physics*, 2014.
- [10] William L. Burke. *Applied Differential Geometry*. Cambridge University Press, 1985.
- [11] H. B. Callen and National Fund Raising Counsel of Australia. Research Division. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 1985.

- [12] Constantin Carathéodory. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. *Mathematische Annalen*, 67:355–386, 1909. Consulta de la versión traducida por D. H. Delphenich.
- [13] W. Chen, S. Chern, and K. S. Lam. *Lectures On Differential Geometry*. Series On University Mathematics. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [14] C. Chevalley. *Theory of Lie Groups*. Number v. 1 in Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1946.
- [15] Demetrios Christodoulou. Reversible and irreversible transformations in black-hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1596—1597, Nov 1970.
- [16] A. C. da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Number n. 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2001.
- [17] P. C. W. Davies. The thermodynamic theory of black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 353(1675):499–521, 1977.
- [18] P C W Davies. Thermodynamics of black holes. *Reports on Progress in Physics*, 41(8):1313, aug 1978.
- [19] Brian P Dolan. Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 28(23):235017, nov 2011.
- [20] Brian P. Dolan. Where is the $p dv$ term in the first law of black hole thermodynamics. *arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology*, 2012.
- [21] Fay Dowker. Black holes msc in quantum fields and fundamental forces academic year 2014 / 15. 2016.
- [22] John B. Etnyre. Introductory lectures on contact geometry, 2002.

- [23] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 3 edition, 2011.
- [24] Hansjörg Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [25] Aritra Ghosh and Chandrasekhar Bhamidipati. Contact geometry and thermodynamics of black holes in ads spacetimes. *Phys. Rev. D*, 100(12):126020, 2019.
- [26] J. Willard Gibbs. *The collected works of J. Willard Gibbs*. Number 2 v. Longmans, Green, New York, 1928.
- [27] John W. Gray. Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, 69(2):421–450, 1959.
- [28] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199—220, 1975.
- [29] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13:191—197, Jan 1976.
- [30] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [31] R. Hermann. *Geometry, Physics, and Systems*. Lecture notes in pure and applied mathematics. M. Dekker, 1973.
- [32] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(19):195011, sep 2009.
- [33] Ivan Kolář, Ivan, Peter Michor, Jan Slovák, and Jan Jeník. *Natural Operations in Differential Geometry*. 09 1996.
- [34] D. Krupka and D. Saunders. *Handbook of Global Analysis*. Elsevier Science, 2011.

- [35] David Kubizňák and Robert B. Mann. P v criticality of charged ads black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2012(7):33, 2012.
- [36] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and D. I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [37] R. MrugaŁa. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics. *Reports on Mathematical Physics*, 14(3):419–427, 1978.
- [38] R. MrugaŁa. Submanifolds in the thermodynamic phase space. *Reports on Mathematical Physics*, 21(2):197–203, 1985.
- [39] Ryszard Mrugała. On a special family of thermodynamic processes and their invariants. *Reports on Mathematical Physics*, 46, 12 2000.
- [40] Ryszard Mrugała. On contact and metric structures on thermodynamic spaces. *RIMS Kokyuroku*, 1142, 01 2000.
- [41] Ryszard Mrugała, James D. Nulton, J. Christian Schön, and Peter Salamon. Contact structure in thermodynamic theory. *Reports on Mathematical Physics*, 29(1):109–121, 1991.
- [42] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Taylor Francis Group, 2003.
- [43] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252—276, 1969.
- [44] Hernando Quevedo. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48(1):013506, 2007.
- [45] Hernando Quevedo. Geometrothermodynamics of black holes. *General Relativity and Gravitation*, 40(5):971—984, 2008.
- [46] Hernando Quevedo and Maria N. Quevedo. Fundamentals of geometrothermodynamics, 2011.

- [47] S. G. Rajeev. A hamilton-jacobi formalism for thermodynamics. *Annals of Physics (New York)*, 323(9), 9 2008.
- [48] Shigeo Sasaki. A characterization of contact transformations. *Tohoku Mathematical Journal*, 16(3):285–290, 1964.
- [49] Y. Sekiwa. Thermodynamics of de sitter black holes: Thermal cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 73:084009, Apr 2006.
- [50] R. W. Sharpe and S. S. Chern. *Differential Geometry: Cartan’s Generalization of Klein’s Erlangen Program*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.
- [51] Larry Smarr. Mass formula for kerr black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 30:71—73, Jan 1973.
- [52] I. N. Sneddon. *Elements of Partial Differential Equations*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2006.
- [53] Claudio Teitelboim. The cosmological constant as a thermodynamic black hole parameter. *Physics Letters B*, 158(4):293–297, 1985.
- [54] Robert Wald. Gedanken experiments to destroy a black hole. *Annals of Physics*, 82(2):548–556, 1974.
- [55] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.