Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Continuos Indescomponibles

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaría

PRESENTA:

Lizbeth Guadalupe Escobedo Castro

TUTORA

Dra. María Isabel Puga Espinosa

Ciudad Universitaria, CD. MX.
2024

Índice general

Introducción V

1. Preliminares **1**
1.1. Espacios Topológicos y Compacidad 1
1.2. Axiomas de Separación 3
1.3. Espacios Métricos 5
1.4. Conexidad 11
1.5. Cadenas 12

2. Continuos **15**
2.1. Compacidad y convergencia en el espacio 2^X 17
2.2. Convergencia en los hiperespacios de X 23
2.3. Componentes y Composantes 28
2.4. Continuos Indescomponibles y sus características 29
2.5. El Continuo de Knaster 35

3. El Pseudoarco **41**
3.1. Construcción del Pseudoarco 41
3.2. Propiedades del Pseudoarco 43

4. El Pseudocírculo **51**
4.1. Construcción del Pseudocírculo 51
4.2. Características del Pseudocírculo 52

5. Densidad de los continuos Indescomponibles **57**

Bibliografía **63**

Introducción

En topología, llamamos continuo a un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Cuando un continuo no puede ser expresado como unión de dos subcontinuos propios no degenerados lo llamamos indescomponible. Son este tipo de espacios el objeto de estudio de este trabajo. A primera vista el conjunto de continuos indescomponibles parece tratarse de un conjunto muy pequeño, ya que muchas veces la construcción de ejemplos resulta bastante compleja y elaborada. Sin embargo, una vez que se estudia a detalle a estos objetos matemáticos descubrimos que son más comunes de lo que nos podemos imaginar.

El objetivo principal de esta tesis es presentar a los continuos indescomponibles. Demostrar algunas propiedades referentes a sus composantes y accesibilidad, así como describir algunos ejemplos y propiedades utilizando cadenas. En particular mostramos la construcción del pseudoarco y pseudocírculo. Además demostraremos que los continnuos son un conjunto denso de segunda categoría en el cubo de Hilbert.

En el capítulo 1, abordaremos conceptos generales de topología, espacios métricos, compacidad y conexidad, y demostraremos teoremas relevantes para los siguientes capítulos.

En el capítulo 2, abordaremos la definición de continuos y enunciaremos algunas de sus propiedades. Demostraremos algunos resultados de convergencia en el hiperespacio 2^X de un continuo X. En la última sección del capítulo se definirá el concepto de composantes y de continuo indescomponibles. Se demostrarán sus propiedades y características, y por último describiremos el continuo Knaster y demostraremos que es indescomponible.

En los capítulos 3 y 4 construiremos el pseudoarco y el pseudocírculo, respectivamente, y exploraremos sus propiedades y diferentes caracterizaciones. Por último, en el capítulo 5 se demostrará que la colección de subcontinuos indescomponibles contenidos en una n-esfera o en el cubo de Hilbert es un conjunto denso de segunda categoría, y que el conjunto de pseudoarcos en el cubo de Hilbert es un conjunto denso de segunda categoría. Lo cuál nos dice que la mayoría de los continuos pertenecen al conjunto de pseudoarcos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos conceptos básicos de espacios topológicos y espacios métricos, daremos la definición de compacidad y conexidad y se enunciarán los axiomas de separación, se incluyen propiedades y resultados que serán utilizadas más adelante. Se definirá también el concepto de cadenas, las cuales serán utilizadas para construir continuos indescomponibles. Las referencias utilizadas en esta sección son [9] [15] [8].

1.1. Espacios Topológicos y Compacidad

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Llamamos una topología en X a la colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ y X son elementos de $\mathcal{T}$.*
2. *La unión de cualquier colección de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. (Cerrado bajo unión arbitraria).*
3. *La intersección de cualquier colección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. (Cerrado bajo intersección finita).*

A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama conjuntos abiertos. A la pareja $(X, \mathcal{T})$ se le llama espacio topológico, frecuentemente se utiliza únicamente X para denotar al espacio topológico, cuando no hay confusión acerca de la topología.

Dado un espacio topológico X, diremos que un subconjunto A de X es **cerrado** si $X - A$ es abierto en X. Un conjunto puede tener muchas topologías diferentes, en consecuencia diremos que dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son diferentes si existe un conjunto abierto en una que no lo es en la otra.

Definición 1.2 *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\beta \subset \mathcal{T}$ se dice que β es una* ***base*** *de $\mathcal{T}$ si todo elemento de $\mathcal{T}$ se puede expresar como unión de elementos de β.*

Definición 1.3 *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Definimos el* ***interior*** *de A, denotado por $int(A)$, como el abierto más grande contenido en A, la* ***cerradura*** *de A, denotada por $\overline{A}$, como el cerrado más pequeño que contiene a A y la* ***frontera*** *de A, denotada por $fr(A)$, como $\overline{A} - int(A)$.*

Definición 1.4 *Un subconjunto A de un espacio topológico X se llama* ***denso*** *en X si $\overline{A} = X$.*

Definición 1.5 *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es una* ***función continua*** *si la imagen inversa (denotada f^{-1}) de todo abierto de Y es abierto en X.*

Notemos que la definición es equivalente a decir que toda imagen inversa de un cerrado es cerrada.

Definición 1.6 *Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Una familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X es una cubierta de Y si $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ también es una cubierta de Y, entonces $\mathcal{U}'$ es una subcubierta de Y. Si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de Y son abiertos de Y entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Y.*

Definición 1.7 *Un espacio topológico X es* ***compacto*** *si cada cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita.*

En $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ consideramos la topología usual. Algunos ejemplos de conjuntos compactos son el segmento de recta $[0, 1]$, el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y la esfera $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

Lema 1.1 *Sea X un espacio compacto y $Y \subset X$ un conjunto cerrado. Entonces, Y es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de Y. Dado que Y es cerrado, entonces $X - Y$ es abierto y $\bigcup_{i \in I}\{U_i\} \cup (X - Y)$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $\bigcup_{j=1}^{n}\{U_{i_j}\} \cup (X - Y)$. Por lo tanto $\{U_{i_j}\}$ es una cubierta finita de Y, y en consecuencia Y es compacto. $\square$

Proposición 1.1 *Sean X un espacio compacto y $f : X \to Y$ una función continua tal que $f(X) = Y$. Entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe $I_0 \subset I$ finito, tal que $X = \bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(U_i)$. Por lo que

$$Y = \bigcup_{i\in I_0} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i\in I_0} U_i$$

Y por lo tanto Y es compacto. □

Definición 1.8 *Un espacio topológico X es localmente compacto en el punto $x \in X$, si existe un abierto U, tal que $x \in U$ y $\overline{U}$ es compacto. Decimos que X es un espacio localmente compacto, si es localmente compacto en todos sus puntos.*

1.2. Axiomas de Separación

A continuación enunciaremos los axiomas de separación de espacios topológicos. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que $(X, \mathcal{T})$ es:

a. $\boldsymbol{T_0}$ si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que ($x \in U$ y $y \notin U$) o ($x \notin U$ y $y \in U$).

b. $\boldsymbol{T_1}$ si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $x \notin V$, $y \notin U$ y $y \in V$ (U y V no necesitan ser ajenos).

c. $\boldsymbol{T_2}$ o **Hausdorff** si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

d. **Regular** si dados $C \subset X$ cerrado y $x \in X - C$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ ajenos tales que $x \in U$ y $C \subset V$.

e. **Completamente regular** si dados $C \subset X$ cerrado y $x \in X - C$, existe una función continua $f : (X, \mathcal{T}) \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(C) = \{0\}$.

f. **Normal** si dados $C, D \subset X$ cerrados ajenos, existen $U, V \in \mathcal{T}$ ajenos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$.

g. $\boldsymbol{T_3}$ si es regular y T_1.

h. De $\boldsymbol{Tychonoff}$ si es completamente regular y T_1.

i. $\boldsymbol{T_4}$ si es normal y T_1.

Proposición 1.2 *Sean X un espacio Hausdorff, y $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces K es un conjunto cerrado en X.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto en X, un espacio Hausdorff. Sea $x \notin K$. Para cada $y \in K$ existen abiertos U_y, V_y tales que $y \in U_y$, $x \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$ ya que X es Hausdorff. Entonces $\{U_y\}_{y \in K}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $U_{y_1}, ..., U_{y_m}$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$. Entonces $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i}$ es un abierto de X tal que $x \in V$ y

$$V \subset (X - \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}) \subset (X - K).$$

Por lo que $(X - K)$ es abierto, y por tanto K es cerrado en X. □

Proposición 1.3 *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces para todo $K \subset X$ cerrado, $f(K)$ es cerrado en Y. Además, si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $K \subset X$ cerrado, entonces por el Lema 1.1, K es compacto. Como f es continua, por la Proposición 1.1, $f(K)$ es compacto, por la Proposición 1.2, $f(K)$ es cerrado. Veamos ahora que $f^{-1} : Y \to X$ es continua. Como f es suprayectiva y X es compacto, por la Proposición 1.1, $f(X) = Y$ es compacto. Entonces para $L \subset X$ subconjunto cerrado, tenemos que L es compacto (Lema 1.1). Así, $f(L)$, la imagen inversa de un cerrado en X es cerrado en Y, y por lo tanto f^{-1} es una función continua. □

Definición 1.9 *Un espacio topológico X es un espacio de Baire si para cualquier familia numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos densos en X, se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es un conjunto denso en X.*

Proposición 1.4 *Todo espacio X localmente compacto y T_2 es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean X un espacio topológico localmente compacto, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos densos en X y V un conjunto abierto no vacío de X. Veamos que $V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es no vacío. Como U_0 es denso en X, entonces $V \cap U_0$ es un conjunto abierto, no vacío de X. Como X es localmente compacto, existe $B_0 \neq \emptyset$ abierto, tal que $\overline{B_0} \subset V \cap U_0$, y $\overline{B_0}$ es compacto. Ya que B_0 es abierto y U_1 es denso, a su vez existe un abierto $B_1 \neq \emptyset$ tal que

$\overline{B_1} \subset B_0 \cap U_1$. Continuando recursivamente, tenemos que para todo $n \in N$, existe B_n abierto tal que $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap U_n$. Además, dado que $\overline{B_0}$ es compacto, todo $\overline{B_n}$ también es compacto.
Sea, $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}$, por la propiedad de la intersección finita (Proposición 2.1), tenemos que $B \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in B \subset \bigcap_{n \in N} U_n$ y $x \in \overline{B_0} \subset V \cap U_0$. Con lo que demostramos que $V \cap \bigcap_{n \in N} U_n \neq \emptyset$ y, por tanto, es un conjunto denso en X, es decir, X es un espacio de Baire. □

1.3. Espacios Métricos

Definición 1.10 *Sea X un conjunto. Una métrica en X es una función $d : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para cualesquiera x, y, z en X se satisfacen las siguientes cuatro propiedades:*

i) $d(x, y) \geq 0$,

ii) $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$,

iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dada cualquier métrica podemos inducir una topología que depende de la métrica. Llamamos **bola abierta** al conjunto $B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ y decimos que un conjunto A es abierto si para cualquier punto x en A una bola abierta que contiene al punto x y se queda contenida en A. La colección de bolas abiertas es una **base** para una topología inducida por la métrica.

Dado un espacio topológico X, un **hiperespacio** de X es una colección de subconjuntos de X. A continuación definiremos una métrica para el hiperespacio $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado no vacío}\}$.

Definición 1.11 *Sea (X, d) espacio métrico. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la nube de radio ε alrededor de A como:*

$$N_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Definición 1.12 *Sea $H_d : 2^X \to \mathbb{R}$ la función dada por:*

$$H_d(A, B) = inf E(A, B)$$

donde,

$$E(A,B)=\{\varepsilon>0 \mid A\subset N_d(B,\varepsilon) \text{ y } B\subset N_d(A,\varepsilon)\}.$$

$H_d(A,B)$ se conoce como la métrica de Hausdorff.

Demostraremos que $H_d : 2^X \to \mathbb{R}$ es efectivamente una métrica para el hiperespacio 2^X.

Teorema 1.1 *$H_d : 2^X \to \mathbb{R}$ es una métrica.*

Demostración.
(i) Por definición $H_d(A,B)\geq 0$ para todo par de puntos A y B en 2^X.

(ii) Sean $A,B\in 2^X$. Entonces $H_d(A,B)=0$ si y solo si $A=B$.
Supongamos que $H_d(A,B)=0$. Sean $x\in A$ y $\varepsilon>0$ fijos. Tenemos que, $0=H_d(A,B)<\varepsilon$, entonces existe $\delta\in E(A,B)$ tal que $\delta<\varepsilon$ es decir, $A\subset N_d(B,\delta)$, y a su vez existe $y\in B$ tal que $d(x,y)\leq\delta<\varepsilon$, es decir, $B_\delta(x)\cap B\neq\emptyset$, como ε fue elegida arbitrariamente, tenemos que $x\in\overline{B}=B$. Y como x es arbitraria, $A\subset B$. Análogamente se demuestra que $B\subset A$ y por lo tanto $A=B$. Ahora supongamos que $A=B$. Es inmediato que su distancia es cero ya que para cualquier $\varepsilon>0$,

$$A\subset N_d(A,\varepsilon)=N_d(B,\varepsilon), \text{ y } B\subset N_d(B,\varepsilon)=N_d(A,\varepsilon).$$

(iii) $H_d(A,B)=H_d(B,A)$ se cumple por definición.

(iv) Por demostrar, $H_d(A,C)\leq H_d(A,B)+H_d(B,C)$, que equivale a demostrar

$$inf E(A,C)\leq inf E(A,B)+inf E(B,C).$$

Dado que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, esto equivale a demostrar que

$$inf E(A,C)\leq inf\{\delta+\eta:\delta\in E(A,B) \text{ y } \eta\in E(B,C)\}.$$

Sean dos elementos arbitrarios $\delta\in E(A,B)$ y $\eta\in E(B,C)$. Por definición $A\subset N_d(B,\delta)$ y $B\subset N_d(C,\eta)$. Dada $a\in A$, existe $b\in B$ tal que $d(a,b)<\delta$, además existe $c\in C$ tal que $d(b,c)<\eta$. Por la desigualdad del triángulo (en el espacio métrico (X,d)), tenemos que $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)<\delta+\eta$. Con esto demostramos que $A\subset N_d(\delta+\eta,C)$. De forma análoga, se demuestra que $C\subset N_d(\delta+\eta,A)$. Por lo que $\delta+\eta\in E(A,C)$, y por lo tanto $inf E(A,C)\leq\delta+\eta$. Entonces $inf E(A,C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta+\eta:\delta\in E(A,B) \text{ y } \eta\in E(B,C)\}$. $\square$

Lema 1.2 *Sea (X, d) espacio métrico. Sea $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d_1(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$. Entonces d_1 es una distancia que genera la misma topología que d. [8, pág 75]*

Proposición 1.5 *Sea (X, d) espacio métrico y $x_0 \in X$. Entonces la función $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.*

Demostración. Sean $x_0 \in (X, d)$ espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función definida como $f(x) = d(x, x_0)$. Veamos que f es continua.
Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Veamos que para $\delta = \epsilon$ se cumple que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, es decir, f es una función continua.
Notemos que $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0)$, es decir, $d(x, x_0) - d(y, x_0) \leq d(x, y)$. Análogamente se cumple que $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0)$ y por tanto $d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y)$. Por tanto, $|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$. Entonces se cumple que

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y) < \delta = \epsilon$$

y por tanto f es una función continua. □

Definición 1.13 *Un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto Y denso numerable, es decir, si $\overline{Y} = X$ y Y tiene a lo más una cantidad numerable de elementos.*

Proposición 1.6 *Sea X un espacio topológico separable, entonces toda familia de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos es a lo más numerable.*

Demostración. Sea D un conjunto numerable y denso en X. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos ajenos y disjuntos dos a dos. Como D es denso, para cada U_i, existe $d \in D$ tal que $d \in U_i$. Ya que la cardinalidad de $\{U_i\}_i$ es no numerable y la intersección de cada para de U_i, U_j en vacía, por lo que D es un conjunto no numerable, contradiciendo la hipótesis de que X es separable.
□

Teorema 1.2 *Sea X un espacio métrico separable. Entonces X está inmerso en el espacio $\prod_{n=1}^{\infty}[0, 1]$.*

Demostración. Sea X un espacio métrico separable. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $d(x, y) \leq 1$ para toda x y y en X. Sea $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ un subconjunto denso en X.
Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $d_n : X \to [0, 1]$ como $d_n(x) = d(x, \rho_n)$. Esta función es continua (Proposición 1.5).

Usando el Lema 2.2, la función $\iota : X \to \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n$ dada por $\iota(x) = (d(x,\rho_n)_{n\in\mathbb{N}})$, es continua ya que cada función d_n es continua.
Veamos que ι es inyectiva. Sean x, y en X, $x \neq y$. Sea $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ entonces existe ρ_k en $B_\varepsilon(x)$, ρ_k en el conjunto denso. Entonces

$$d(x,y) \leq d(x,\rho_k) + d(\rho_k,y)$$

$$d(\rho_k,y) \geq d(x,y) - \varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$$

Por lo tanto, $d(\rho_k,x) < \varepsilon$ y $d(\rho_k,y) \geq \varepsilon$. Entonces $\iota(x) \neq \iota(y)$, es decir, ι es inyectiva.

Veamos que $\iota^{-1} : \iota(X) \to X$ es continua. Definimos a $h(x) = \iota^{-1}(x)$. Sea $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\rho_m \in B_{\epsilon/3}(x)$. Definimos $\delta = \frac{\epsilon}{(3)(2^m)}$. Si $|h(x) - h(y)| < \delta$, en particular $(d(y,\rho_m) - d(x,\rho_m))/2^m < \delta$, lo que implica que $d(y,\rho_m) - d(x,\rho_m) < \epsilon/3 + \epsilon/3$. Entonces $d(x,y) \leq d(x,\rho_m) + d(\rho_m,y) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$. Por lo que ι^{-1} es continua.

Con lo que demostramos que $\iota : X \to \iota(X)$ es un homeomorfismo, es decir, X está inmerso en $\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n$. □

Demostraremos ahora que todo espacio métrico es normal. Para ello, primero probaremos la siguiente proposición.

Proposición 1.7 *Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $f_A : X \to \mathbb{R}$ una función definida por $f_A(x) = d(x,A) = inf\{d(x,a) : a \in A\}$. Entonces f_A es continua.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $f_A^{-1}(B_\epsilon(y))$ es abierto en X.
Notemos que $f_A^{-1}(y) = \{x \in X : d(x,A) = y\}$ y $f_A^{-1}(B_\epsilon(y)) = \{x \in X : y - \epsilon < d(x,A) < y + \epsilon\}$.
Sea $x_0 \in f_A^{-1}(B_\epsilon(y))$ y sea $\delta = min\{d(x_0,A) - (y-\epsilon), y + \epsilon - d(x_0,A)\}$.
Veamos que $B_\delta(x_0) \subset f_A^{-1}(B_\epsilon(y))$.
Sea $x \in B_\delta(x_0)$ entonces se cumple lo siguiente:
$d(x,x_0) < (y+\epsilon) - d(x_0,A)$, es decir, $d(x,A) \leq d(x,x_0) + d(x_0,A) < (y+\epsilon)$.
$d(x,x_0) < d(x_0,A) - (y-\epsilon)$, es decir, $(y-\epsilon) < d(x_0,A) - d(x,x_0) \leq d(x,A)$, ya que $d(x_0,A) \leq d(x_0,x) + d(x,A)$, por la desigualdad del triángulo. Por tanto $x \in f_A^{-1}(B_\epsilon(y))$, con lo que demostramos que f_A es continua. □

Lema 1.3 *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sea X espacio métrico, sean $A, B \subset X$ cerrados ajenos y sea $f : X \to [0,1]$ una función definida por $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$. Entonces se

cumple que f es una función continua, y $A \subset f^{-1}([0,1/4)), B \subset f^{-1}((3/4,1])$ y $f^{-1}([0,1/4) \cap f^{-1}((3/4,1]) = \emptyset$. La función f está bien definida ya que si $a \in A$, entonces $d(a,B) > 0$ y análogamente, para toda $b \in B$ se tiene que $d(b,A) > 0$ por lo que el denominador nunca es cero. Notemos además que f es continua pues f_A y f_B lo son. Sea $a \in A$, entonces $0 \leq d(a,A) \leq d(a,a) = 0$. Es decir, $f(a) = \frac{f_A(a)}{f_A(a)+f_B(a)} = 0$ para toda $a \in A$. Análogamente para toda $b \in B$ tenemos que $d(b,B) = 0$ y por tanto $f(b) = \frac{f_A(a)}{f_A(a)+f_B(b)} = \frac{f_A(a)}{f_A(a)} = 1$. Por lo que $A \subset f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}([0,1/4))$ y $B \subset f^{-1}(\{1\}) \subset f^{-1}((3/4,1])$.
Supongamos que existe $x \in f^{-1}([0,1/4)) \cap f^{-1}((3/4,1])$.
Entonces $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)} < 1/4$ y $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)} > 3/4$, lo que es una contradicción ya que $f(x)$ no puede tomar más de un valor. Entonces $f^{-1}([0,1/4))$ es un abierto de X que contiene a A y $f^{-1}((3/4,1])$ es un abierto que contiene a B y su intersección es vacía, por lo que X es normal. $\square$

Definición 1.14 *Sea X espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es denso en ninguna parte, si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

Definición 1.15 *Se dice que un conjunto es de primera categoría en el espacio topológico X si se puede expresar como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Si un conjunto no es de primera categoría, se dice que es de segunda categoría.*

Definición 1.16 *Sea X un espacio topológico, decimos que $A \subset X$ es un conjunto G_δ, si A es la intersección numerable de conjuntos abiertos.*

A continuación definiremos el concepto de punto límite y veremos algunos resultados de convergencia de sucesiones.

Definición 1.17 *Sea X un espacio topológico y $S \subset X$. Decimos que el punto $p \in X$ es un punto límite de S si para todo U conjunto abierto tal que $p \in U$, entonces el conjunto $(U - \{p\}) \cap S \neq \emptyset$.*

Notemos que p no necesariamente es un punto en S, y que lo podemos pensar como un punto de acumulación del conjunto S. Por ejemplo, en la recta real, los puntos límite del conjunto de los números racionales es toda la recta real, mientras que el conjunto de los números naturales no tiene puntos límite.

Lema 1.4 *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces todo subconjunto infinito S de X tiene un punto límite en X.*

Demostración.

Demostraremos el lema por contradicción. Sea X un espacio topológico compacto y S un subconjunto infinito de X. Supongamos que S no tiene puntos límite en X, entonces para todo $x \in X$ existe U_x conjunto abierto en X, con $x \in U_x$ y, tal que la cardinalidad de $U_x \cap S$ consta a lo más de un elemento (denotado por $|U_x \cap S| \leq 1$). Entonces $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de X, como X es compacto existe una subcubierta finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$, lo que supone que solo un conjunto finito de S está contenido en $\mathcal{U}'$, lo que contradice el hecho de que S es infinito.

□

Definición 1.18 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es primero numerable (o satisface el primer axioma de numerabilidad) si tiene bases locales numerables.*

Notemos que todo espacio métrico es primero numerable, ya que para cualquier punto x, el conjunto $\{B_{1/n}\}$ es una base local numerable de x.

Definición 1.19 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio topológico X. Se dice que $\{x_n\}$ es convergente si existe un punto $p \in X$ tal que, para cualquier abierto U que contiene a p, existe N tal que, para todo $n \geq N$, $x_n \in U$. En este caso decimos que $\{x_n\}$ converge a p.*

Lema 1.5 *Sea X un espacio primero numerable. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X y p un punto límite de $\{x_n\}$. Entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a p.*

Demostración. Sea $B = \{U_1, U_2, ...\}$ una base local numerable de p. Podemos suponer que $U_n \supset U_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como p es punto límite de $\{x_n\}$, existe n_1 tal que $x_{n_1} \in U_1$. A su vez, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $x_{n_2} \in U_2 \subset U_1$, y así sucesivamente para cada U_n. Entonces la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ converge a p, ya que B es una base local numerable de p, y por tanto se cumple que para cualquier U conjunto abierto en X, existe $U_N \subset U$, tal que $x_{n_k} \in U_N \subset U$ para todo $n_k \geq N$. □

Teorema 1.3 *Todo sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico compacto X, tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X.
Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto finito, entonces existe x_0 que se repite una cantidad numerable de veces, y por tanto la subsucesión $\{x_{n_k} : x_{n_k} = x_0\}$ converge a

x_0.
Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito, por el Lema 1.4 existe p punto límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ya que todo espacio métrico es primero numerable, y por el Lema 1.5, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. $\square$

1.4. Conexidad

Definición 1.20 *Un espacio topológico X es conexo si no existen un par de conjuntos abiertos no vacíos, U y V de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Notemos que en este caso U y V son también cerrados en X, pues sus complementos son abiertos.

Lema 1.6 *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto, Y, de X es conexo si y solo si no existen dos subconjuntos, A y B, de Y tales que $Y = A \cup B$ y $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset$.*

Demostración. Sea Y un subconjunto conexo de X. Supongamos que $Y = A \cup B$ y $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset$. Entonces $X - \overline{A}$ es un conjunto abierto que contiene a B y $X - \overline{B}$ es un conjunto abierto que contiene a A. Por tanto

$$Y = [(X - \overline{A}) \cap Y] \cup [(X - \overline{B}) \cap Y]$$

con $Y = [(X - \overline{A}) \cap Y] \cup [(X - \overline{B}) \cap Y]$ abiertos en Y. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
[(X - \overline{A}) \cap Y] \cap [(X - \overline{B}) \text{ y } Y] &= [(X - \overline{A}) \cap (X - \overline{B})] \cap Y \\
&= [X - (\overline{A} \cup \overline{B})] \cap Y \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

entonces Y es la unión de dos abiertos no vacíos cuya intersección es vacía, esto es una contradicción ya que Y es conexo.
$\square$

Lema 1.7 *Sea X espacio topológico y sea $Y \subset A \cup B$, con A, B conjuntos abiertos ajenos de X. Si Y es conexo, entonces $Y \subset A$ o $Y \subset B$.*

Demostración. Supongamos que Y no está contenido en A. Entonces, como $Y \subset A \cup B$, si $Y \subset B$ queda demostrado el lema. Si Y no está contenido en B, entonces $Y \cap A$ y $Y \cap B$ son no vacíos. Entonces Y es disconexo ya que $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, con $Y \cap A, Y \cap B$ abiertos ajenos no vacíos, lo que contradice el supuesto de que Y es conexo. $\square$

Lema 1.8 *Sean X un espacio topológico conexo y Y un subconjunto conexo de X. Si $X-Y$ es disconexo, digamos que $X-Y = M \cup N$, entonces $Y \cup M$ y $Y \cup N$ son conexos. Más aún, si Y es cerrado entonces $Y \cup M$ y $Y \cup N$ son conjuntos cerrados también.*

Demostración. Por el Lema 1.6, existen dos subconjuntos no vacíos M y N de X tales que $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$ y $X - Y = M \cup N$. Supongamos que $Y \cup M$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos no vacíos, A y B, de $Y \cup M$ tales que $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ y $Y \cup M = A \cup B$. Como Y es conexo $Y \subset A$ ó $Y \subset B$, podemos suponer que $Y \cap A = \emptyset$, de donde $A \subset M$. Ahora vamos a desconectar a X. Para esto, notemos que $X = (Y \cup M) \cup N = A \cup (B \cup N)$, tanto A como $B \cup N$ son no vacíos y, además:

$$A \cap (\overline{B \cup N}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cup \overline{N}) \subset (A \cap \overline{B}) \cup (M \cup \overline{N}) = \emptyset,$$

$$\overline{A} \cap (B \cup N) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap N) \subset (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{M} \cap N) = \emptyset.$$

Así, X no es conexo, lo cual es una contradiccón. Por tanto, $Y \cup M$ es conexo. Análogamente se tiene que $Y \cup N$ es conexo.
Por último, supongamos que Y es cerrado en X. Entonces $\overline{(Y \cup M)} = \overline{Y} \cup \overline{M} = Y \cup \overline{M} = (Y \cup \overline{M}) \cap (Y \cup M \cup N) = Y \cup M$, ya que $\overline{M} \cap N = \emptyset$. Por lo tanto $Y \cup M$ es cerrado. De la misma manera se muestra que $Y \cup N$ es un conjunto cerrado. □

Lema 1.9 *Sea X un espacio topológico y, sean A, B en X tales que A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo. Entonces existen U, V abiertos ajenos no vacíos tales que $B = U \cup V$. Como $A \subset B$, por el Lema 1.8, $A \subset U$ o $A \subset V$. Supongamos que $A \subset U$, entonces $\overline{A} \subset \overline{U}$. Por el Lema 1.6, $\overline{U} \cap V$ es vacío, como $B \subset \overline{A}$, entonces $B \cap V$ es vacío, lo que es una contradicción. Por los tanto B es conexo. □

1.5. Cadenas

Definición 1.21 *Sea X un espacio topológico. Una cadena en X es una colección $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ de conjuntos abiertos, $D_1, \ldots, D_n$, de X tales que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$.*

Notación 1.1 *El elemento D_i es el i-ésimo eslabón de la cadena $\mathcal{D}$. A los eslabones D_1 y D_n se les llama eslabones finales. Eslabones que no son eslabones finales se les llama eslabones interiores. Dos eslabones son adyacentes si* *se intersectan. Si $r < s < t$, se dice que el eslabón D_s está entre los eslabones D_r y D_t. Si p y q son puntos que pertenecen a D_1 y D_n, respectivamente, pero a ningún otro eslabón en la cadena, entonces se dice que $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ es una cadena de p a q. Por último, $\mathcal{D}^*$ denota a la unión de los eslabones de la cadena $\mathcal{D}$.*

Definición 1.22 *Sea X un espacio topológico, y sea $M \subset X$. Se dice que la cadena $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ cubre al conjunto M si $M \subset \mathcal{D}^*$. Se dice que la cadena $\mathcal{D}$ cubre propiamente a M si $M \cap D_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se dice que la cadena $\mathcal{D}$ cubre irreduciblemente a M si $\mathcal{D} - \{D_j\}$ no cubre a M para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Definición 1.23 *Si $\mathcal{U}$ es una familia de conjuntos en un espacio métrico X, definimos la malla de $\mathcal{U}$ como:*

$$malla(\mathcal{U}) = sup\{diam(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Definición 1.24 *Decimos que una cadena $\mathcal{D}$ es una ε-cadena si $malla(\mathcal{D}) < \varepsilon$.*

Definición 1.25 *Se dice que un conjunto M es encadenable si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena que cubre a M. Si p y q son puntos de M, $p \neq q$, y para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ tal que $p \in U_1$ y $q \in U_n$. Entonces se dice que M es encadenable de p a q.*

Para que un conjunto sea encadenable tienen que ser *delgado*, algunos ejemplos de conjuntos encadenables son el arco y la gráfica de $sen(1/x)$, con $x \in [0, 1]$, conocida como la curva senoidal o la curva del topólogo (Figura 1.1). En cambio un triodo (figura con tres segmentos coincidentes en un vértice) no es encadenable. En general, cualquier gráfica que contenga un vértice con más de dos aristas adyacentes no es encadenable.

Definición 1.26 *Sea M un conjunto y p en M. Se dice que p es un punto final de M si para cada $\varepsilon > 0$ hay una ε-cadena que cubre a M tal que solamente el primer eslabón de la ε-cadena contiene a p.*

Definición 1.27 *Si $\mathcal{E}$ es una cadena para la cual cada uno de sus eslabones es un eslabón de la cadena $\mathcal{D}$ entonces se dice que que la cadena $\mathcal{E}$ es una subcadena de la cadena $\mathcal{D}$. Si los eslabones finales de la cadena $\mathcal{E}$ son el i-ésimo y el j-ésimo de $\mathcal{D}$, con $i < j$, denotamos a $\mathcal{E}$ como $\mathcal{D}(i, j)$. Además, $\mathcal{D}^*(i, j)$ denota la unión de los eslabones de la subcadena $\mathcal{D}(i, j)$.*

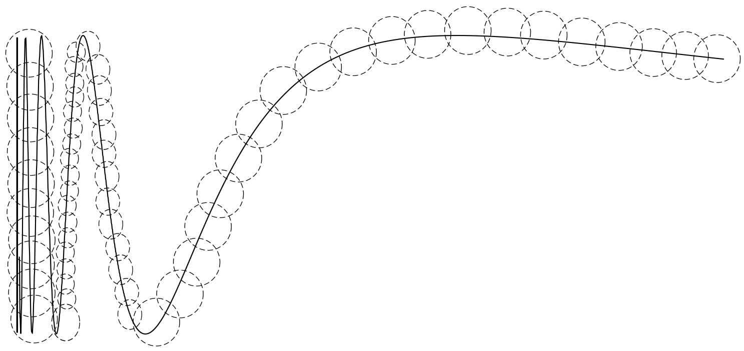


Figura 1.1: Cadena para el continuo $sen(1/x)$.

Definición 1.28 *Decimos que la cadena $\mathcal{E}$ refina a la cadena $\mathcal{D}$ si cada eslabón de $\mathcal{E}$ está contenido en un eslabón de $\mathcal{D}$. En este caso decimos que $\mathcal{E}$ es un refinamiento de $\mathcal{D}$.*

Definición 1.29 *Decimos que la cadena $\mathcal{E}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}$ si la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{E}$ está contenida en un eslabón de $\mathcal{D}$.*

Definición 1.30 *Se dice que la cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ si $\mathcal{E}^* \subset \mathcal{D}^*$ y $\mathcal{E}$ es tal que si $\mathcal{E}(i,j)$ es una subcadena, E_i y E_j intersectan a D_h y D_k, respectivamente, y $|h-k| > 2$, entonces $\mathcal{E}(i,j)$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{E}(i,r)$, $\mathcal{E}(r,s)$ y $\mathcal{E}(s,j)$ tal que $(s-r)(j-i) > 0$ y E_r, E_s son subconjuntos de los eslabones adyacentes a D_k y D_h, respectivamente.*

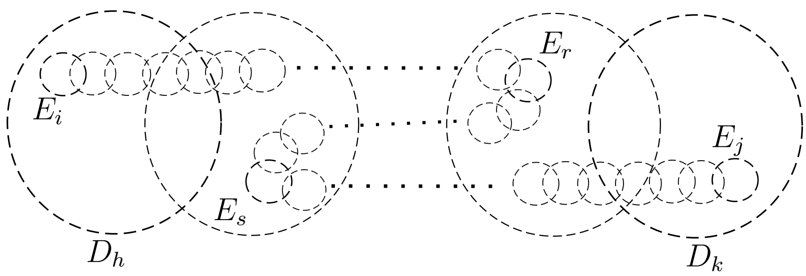


Figura 1.2: Cadena que se tuerce.

Capítulo 2

Continuos

La definición original de continuo fue dada por G. Cantor en 1883. Establece que un continuo es un subconjunto perfecto (cerrado y denso en sí mismo) y conexo de un espacio Euclidiano ([14, páginas 225-264]). La teoría de continuos es un campo de investigación muy activo, y es que es posible estudiar una gran diversidad de propiedades topológicas.

Definición 2.1 *Le llamamos continuo a un espacio X que es métrico, compacto, conexo y no vacío. Si A, subconjunto de X, es también un continuo, decimos que A es un subcontinuo de X*

Observación 2.1 *Notemos que, por el Lema 1.1, que todo subconjunto cerrado y conexo de un continuo es un subcontinuo. Aún más, por el Lema 1.9 la cerradura de cualquier conjunto conexo de un continuo es un subcontinuo.*

Una forma de caracterizar a los conjuntos compactos es a través de la siguiente propiedad.

Definición 2.2 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.*

Proposición 2.1 *X es un espacio compacto si y solo si, toda familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de conjuntos cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sean X compacto y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita. Supongamos que

$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Entonces

$$X = X - (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I}(X - F_i).$$

Por lo que $\{X-F_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X. Como X es un conjunto compacto, existe una subcubierta finita $\{F_1, ..., F_n\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n}(X - F_i) = X$. Por lo que, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$, lo que contradice la hipótesis de que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo que $\bigcap_{i\in I}\{F_i\} \neq \emptyset$.

Sea X un espacio topológico tal que para toda familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de conjuntos cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita se cumple que $\bigcap_{i\in I}\{F_i\} \neq \emptyset$. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X.
Supongamos que X no es compacto, es decir, para toda subcubierta finita $\{A_j\}_{j\in J}$,se tiene que

$$X \neq \bigcup_{j\in J} A_j, \ \textit{con } J \textit{ un conjunto finito y } A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$$

Sean $x \in X - \bigcup_{j\in J} A_j$ y, $B_j = X - A_j$. Notemos que B_j es cerrado, y $x \in \bigcap_{j\in J} B_j$. Es decir, la familia $\{B_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que $\bigcap_{i\in I}\{B_i\} \neq \emptyset$, es decir, $\bigcap_{i\in I}\{B_i\} = \bigcap_{i\in I}\{X - A_i\} = X - \bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una cubierta de X, y por lo tanto X es compacto. □

Teorema 2.1 *Sea K_1 un continuo, y $K_2 \supset K_3 \supset .... \supset K_n \supset ....$, una sucesión anidada de subcontinuos de K_1. Entonces la intersección $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es un continuo.*

Demostración. Ya que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado, K es un conjunto cerrado en K_1 y por lo tanto K es compacto. Supogamos que K no es conexo, es decir, existen $A, B \subset K$ abiertos, ajenos y no vacíos, tales que $K = A \cup B$. Entonces, A y B son también cerrados en K y K es cerrado en K_1, por lo que A, B son cerrados en K_1. Ya que $A \cap B = \emptyset$ y K_1 es normal (es espacio métrico), existen U, V abiertos, ajenos, con $A \subset U$ y $B \subset V$.
Demostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $K_n \subset U \cup V$. Supongamos por el contrario que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \cap (K_1 - (U \cup V)) \neq \emptyset$. Veamos que la familia $\{K_n \cap (K_1 - (U \cup V))\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $N = \{n_1, n_2, ..., n_m : n_i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto finito y n_m el máximo de N. Entonces,

$$\bigcap_{n\in N}(K_n \cap (K_1 - (U \cup V))) = \bigcap_{n\in N}(K_n) \cap (K_1 - (U \cup V)) = K_{n_m} \cap (K_1 - (U \cup V)) = \emptyset.$$

Así, tenemos que K_1 es un compacto y $\{K_n \cap (K_1 - (U \cup V))\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos cerrados de K_1, por la Observación 2.1 tenemos que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(K_n\cap(K_1-(U\cup V))) = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n)\cap(K_1-(U\cup V)) = K\cap(K_1-(U\cup V)) \neq \emptyset,$$

lo cual contradice que $K \subset U\cup V$. Por lo que, $K_n \subset U\cup V$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además $K_n \cap U \supset A \neq \emptyset$ y $K_n \cap V \supset B \neq \emptyset$, lo que muestra que K_n es disconexo, ya que $K_n = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$. Con lo que queda demostrado el teorema. $\square$

Proposición 2.2 *Todo continuo es un espacio de Baire.*

Demostración. Si X es un continuo, X es T_2 por ser espacio métrico. Y ya que es regular, para cualquier conjunto abierto V existe U abierto tal que $U \subset \overline{U} \subset V$, con $\overline{U}$ compacto ya que X es compacto. Por lo tanto X es T_2 y localmente compacto. Por la Proposición 1.4 tenemos que X es un espacio de Baire. $\square$

2.1. Compacidad y convergencia en el espacio 2^X

En el capítulo 1 hablamos del hiperespacio 2^X y demostramos que la métrica de Hausdorff, H_d, es en efecto una métrica para el subespacio de conjuntos cerrados. Otro hiperespacio de interés es $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$. En esta sección demostraremos las propiedades de convergencia en 2^X y la compacidad de $C(X)$, cuando X es un espacio compacto. Notemos que cuando X es un continuo, 2^X consta de los subconjuntos compactos y $C(X)$ es el conjunto de subcontinuos de X. Las definiciones y teoremas de esta sección se tomaron de Nadler [13, Capítulo IV].

Definición 2.3 *Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Entonces llamamos topología producto a la topología Π que tiene como base a la familia*

$$\beta_\Pi = \{U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_i} X_\alpha : U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Lema 2.1 *Sea $\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$ el cubo de Hilbert con la topología producto. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$ es separable (Definición 1.13).*

Demostración. El conjunto $D = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n : x_k = 0 \text{ para todo } k \geq m, m \in \mathbb{N} \text{ y } x_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ es un conjunto denso numerable. $\square$

Lema 2.2 *Sean X espacio topológico, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios topológicos y $f_n : X \to X_n$ funciones continuas. Sea $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ con la topología producto y $F : X \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definida por $F(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Entonces F es continua.*

Demostración. Sea W un conjunto abierto en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Demostraremos que $F^{-1}(W)$ es abierto en X.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$W = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times \prod_{N=m+1}^{\infty} X_N,$$

donde cada U_i es abierto en X, con $1 \leq i \leq m$.
Sea x_0 en $F^{-1}(W)$. Entonces x_0 está en $f_i^{-1}(U_i)$ con $f_i^{-1}(U_i)$ abierto en X_i para $1 \leq i \leq m$. Por lo que $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i)$, para $1 \leq i \leq m$
Sea $V = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i)$, es un conjunto abierto en X y además cumple que para todo z en V, $f_i(z) \in U_i$ para $1 \leq i \leq m$. De donde se sigue que $F(z) \in W$, es decir, $x_0 \in V \subset F^{-1}(W)$. Por lo tanto $F^{-1}(W)$ es un conjunto abierto en X. $\square$

Notación 2.1 *Sea X un espacio métrico compacto con topología $\mathcal{T}$. Para cada $U \in \mathcal{T}$ sean:*

(a) $\Gamma(U) = \{A \in 2^X : A \subset U\}$.

(b) $\Lambda(U) = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$.

(c) *Para $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, sea*
$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq n\}$.

Lema 2.3 *Sean X un espacio métrico compacto con topología $\mathcal{T}$ y $U \in \mathcal{T}$. Entonces se cumple:*

(1) $\Gamma(U) = \langle U \rangle$ *y* $\Lambda(U) = \langle X, U \rangle$.

(2) $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = [\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)] \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)]$.

(3) *Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, entonces*
$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(1)\ \Gamma(U) &= \{A \in 2^X : A \subset U\}\\ &= \{A \in 2^X : A \subset U, A \cap U \neq \emptyset\}\\ &= \langle U \rangle.\\ \Lambda(U) &= \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}\\ &= \{A \in 2^X : A \subset U \cup X, A \cap U \neq \emptyset, A \cap X \neq \emptyset\}\\ &= \langle X, U \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \langle U_1, \ldots, U_n \rangle &= \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada i}\}\\ &= \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada i}\}\\ &= \left[\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].\end{aligned}$$

(3)*Sean* U $= \bigcup_{i=1}^n U_i$, $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$ y $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Por demostrar $A \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$, es decir, $A \in (\cup_{i=1}^n (U_i \cap V)) \cup (\cup_{j=1}^m (U \cap V_j))$ y $A \cap U_i \neq \emptyset, A \cap V_j \neq \emptyset$ para toda $i \leq n, j \leq m$. Notemos que $A \subset U \cap V$, entonces:

$$\begin{aligned}&A \subset (\cup_{i=1}^n U_i) \cap V,\\ &A \subset (\cup_{i=1}^n U_i \cap V),\\ &A \subset (\cup_{i=1}^n U_i \cap V) \cup (\cup_{j=1}^m (U \cap V_j)).\end{aligned}$$

Ahora notemos que $A \cap (U \cap V_j) = (A \cap U) \cap V_j = A \cap V_j$, ya que $A \subset U$, y por definición $A \cap V_j \neq \emptyset$. Análogamente se demuestra que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$

Sean $U = \bigcup_{i=1}^n U_i, V = \bigcup_{j=1}^m V_j$ y $A \in \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle$. Por demostrar, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$.

Por definición, $A \in \bigcup_{j=1}^m (U \cap V_j) \cup \bigcup_{i=1}^n (V \cap U_i)$ y $A \cap (U \cap V_j)$ y $A \cap (V \cap U_i)$ son no vacíos para $i \leq n$ y $j \leq m$. Ya que $A \cap (U \cap V_j) \subset A \cap V_j$ y $A \cap (V \cap U_i) \subset A \cap U_i$, tenemos que $A \cap V_j$ y $A \cap U_i$ son no vacíos.

Además tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A &\subset (\bigcup_{j=1}^{m}(U \cap V_j) \cup \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap V)) \\
&= (U \cap \bigcup_{j=1}^{m} V_j) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} U_i \cap V) \\
&= (U \cap V) \cup (U \cap V) = U \cap V
\end{aligned}
$$

Por lo que $A \subset U$ y $A \subset V$, es decir, $A \subset U \cap V$. Por lo tanto $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ □

Teorema 2.2 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y compacto con topología* $\mathcal{T}$. *Y sean:*

$$\mathcal{C} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_i \in \mathcal{T} \text{ para cada } i \},$$

$$\mathcal{P} = \{\Gamma(U) : U \in \mathcal{T}\} \cup \{\Lambda(U) : U \in \mathcal{T}\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ *es una base para la topología obtenida con la métrica de Hausdorff* H_d *para* 2^X, *y* $\mathcal{P}$ *es una sub-base para esta topología.*

Demostración. Por (3) del Lema 2.3, tenemos que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, y ya que

$$\langle X \rangle = \Gamma(X) = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X,$$

entonces $\mathcal{C}$ es base de alguna topologia $\mathcal{T}_V$ para 2^X.
Sean

$$[\mathcal{P}] = \{\cap\mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{P}\},$$

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \mathcal{C}.$$

Por (2),

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left[\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \in [\mathcal{P}].$$

Entonces $\mathcal{C} \subset [\mathcal{P}]$. Por (2) tenemos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$, pero $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones finitas (3), entonces $[\mathcal{P}] \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto $[\mathcal{P}] = \mathcal{C}$, es decir, $[\mathcal{P}]$ es sub-base para la topología $\mathcal{T}_V$.
Ya demostramos que $\mathcal{C}$ es base para una topología $\mathcal{T}_V$ y $\mathcal{P}$ es una sub-base, sea $\mathcal{T}_H$ la topología generada por la métrica de Hausdorff, nos basta demostrar

que $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_H$.
Sean A en 2^X y $\varepsilon > 0$. La bola de radio ε con centro en A en 2^X es

$$B_H(A,\varepsilon) = \{K \in 2^X : H_d(A,K) < \varepsilon\}$$

y para L, M en 2^X sea

$$d(L,M) = inf\{d(x,y) : x \in L, y \in M\}.$$

Veamos que $T_V \subset T_H$. Sea U en $\mathcal{T}$ tal que $U \neq X$. Sean $A \in \Gamma(U)$ y $\varepsilon = d(A, X-U)$. Notemos que ε es positivo, ya que X es normal por ser espacio métrico y A, $X-U$ son ajenos. Veamos que $B_H(A,\varepsilon) \subset \Gamma(U)$. Sea K en $B_H(A,\varepsilon)$. Por definición $H_d(K,A) < \varepsilon$. Sea x en K, entonces existe a_x en A tal que $d(x,a_x) < \varepsilon$. Como $d(A,X-U) = \varepsilon$ tenemos que $x \in U$. Como x es un elemento arbitrario de K, tenemos que $K \subset U$. Por lo tanto $B_H(A,\varepsilon) \subset \Gamma(U)$, es decir, $\Gamma(U)$ es abierto en T_H
Ahora supongamos que $A \in \Lambda(U)$. Por definición $A \cap U \neq \emptyset$. Sean p en $A \cap U$ y $\varepsilon = d(\{p\}, X-U)$. Como $X-U$ es cerrado y la distancia de un punto a un cerrado es positiva, $\varepsilon > 0$. Veamos que $B_H(A,\varepsilon) \subset \Lambda(U)$. Sea K en $B_H(A,\varepsilon)$. Por definición $H_d(K,A) < \varepsilon$. Entonces para toda a en A se cumple que $d(a,k_a)$ para alguna k_a en K. Entonces $d(p,k_p) < \varepsilon$, es decir, $k_p \in U$. Por lo tanto $K \cap U \neq \emptyset$. Así tenemos que $K \in \Lambda(U)$, es decir, $\Lambda(U)$ es abierto en T_H.
Hemos demostrado que tanto $\Gamma(U)$, como $\Lambda(U)$ están en T_H cuando $U \in \mathcal{T}$ y $U \neq X$. Como $\Gamma(X) = 2^X$, tenemos que $\mathcal{P} \subset T_H$. Como $\mathcal{P}$ es base de T_V, concluimos que $T_V \subset T_H$.
Ya sólo nos falta demostrar que $T_H \subset T_V$. Para ello, basta demostrar que para cualquier bola abierta $B_H(A,\varepsilon)$ en 2^X, existen $U_1,\ldots,U_n \in \mathcal{T}$ tales que

$$A \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subset B_H(A,\varepsilon).$$

Sean A en 2^X y $\varepsilon > 0$. Como A es un subconjunto compacto y no vacío de X, existe una subcubierta finita de A, de abiertos $U_1,\ldots,U_n$ en X, tales que, para cada i, $U_i \cap A \neq \emptyset$ y el diámetro de U_i es menor a ε. Claramente $A \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Veamos que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subset B_H(A,\varepsilon)$. Sea K en $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Sea $k \in K$. Por definición $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$. Entonces $k \in U_j$ para alguna j. Como $A \cap U_j \neq \emptyset$ y el diámetro de U_j es menor a ε, existe $a \in U_j \cap A$ tal que $d(a,k) < \varepsilon$. Por lo tanto $k \in N_d(A,\varepsilon)$ para toda $k \in K$. Por lo tanto, $K \subset N_d(A,\varepsilon)$. Ahora empecemos con $a \in A$. Entonces $a \in U_j$ para alguna j. Como $U_j \cap K \neq \emptyset$, existe $k \in K \cap U_j$, entonces $d(a,k) < \varepsilon$. Por lo tanto $a \subset N_d(K,\varepsilon)$ para toda $a \in A$.
Con lo cual concluímos que $H_d(A,K) < \varepsilon$ para toda $K \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Así hemos demostrado que $T_H \subset T_V$. Con lo cual concluimos la demostración del teorema. $\square$

Corolario 2.1 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces la topología obtenida por la métrica de Hausdorff para 2^X depende solamente de la topología de X, es decir, si d y D son métricas para X cada una generando la topología $\mathcal{T}$) en X, entonces la topología para 2^X obtenida de H_d y la obtenida de H_D son idénticas.*

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.2, ya que la base para las topologías obtenidas de H_d y H_D depende solamente de la topología de X generada por las métricas d y D que es la misma. □

Lema 2.4 (Lema de Lebesgue) *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{C}$ un cubierta abierta de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\{x, y\} \subset \mathcal{C}$*

Demostración. Supongamos que no se cumple el teorema, es decir, para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x_n, y_n \in X$ tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ no existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\{x_n, y_n\} \subset C$. Por el Teorema 1.3 existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a $a \in X$, y por tanto $\{y_{n_k}\}$ también converge a a. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $a \in C$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset C$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N$ se cumple que $\{x_{n_k}, y_{n_k}\} \subset B_\epsilon(a) \subset C$. Lo que contradice la suposición inicial y demuestra el lema. □

Definición 2.4 *Sean (X, d), (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$. Decimos que f es uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x, y \in Y$, si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Teorema 2.3 (Heine-Cantor) *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio métrico. Entonces toda función continua $f : X \to Y$ es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y sea $\epsilon > 0$, entonces para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B_{\delta_x}(x)) \subset B_{\epsilon/2}(f(x))$. Entonces $\{B_{\delta_x}(x) | x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por el Lema de Lebesgue 2.4, ya que X es espacio métrico compacto, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\{x, y\} \subset B_{\delta_{x_0}}(x_0)$. Entonces se cumple que

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_0)) + d'(f(x_0), f(y)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Con lo que se demuestra el teorema. □

Teorema 2.4 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, compactos, homeomorfos y sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces existe un homeomorfismo h^* de 2^X en 2^Y tal que $h^*(C(X)) = C(Y)$, donde $C(X)$ es el hiperespacio de los subconjuntos conexos de X.*

Demostración. Definimos $h^* : 2^X \to 2^Y$ como $h^*(A) = h(A)$.Veamos que h^* está bien definida. Sea A en 2^X, entonces A es cerrado en X. Como X es compacto, A también lo es. Ya que h es continua, tenemos que $h(A)$ es compacto en Y. Por último como Y es métrico, entonces $h(A)$ es cerrado, y por lo tanto h^* está bien definida. Veamos que h^* es biyectiva. Sean A y B en 2^X tales que $h^*(A) = h^*(B)$. Por definición de h^*, $h(A) = h(B)$ y por ser h un homeomorfismo $A = h^{-1}(h(A)) = h^{-1}(h(B)) = B$, por tanto h^* es inyectiva. Ahora tomamos C en 2^Y. Como h es continua, $h^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado en X, es decir, $h^{-1}(C) \in 2^X$. Así $C = h(h^{-1}(C)) = h^*(h^{-1}(C))$. Por lo tanto h^* es biyectiva.

Ahora veamos que h^* y h^{*-1} son continuas. Ya que h es una función continua en un conjunto compacto, entonces por el Teorema de Heine-Cantor 2.4, h es uniformemente continua. Veamos que h^* es continua. Sea $\epsilon > 0$, definimos a δ como $\delta(h, \epsilon)$ que existe por el teorema para la función h. Veamos que se cumple que si $H_d(A, B) < \delta$, entonces $\mathrm{H}_{d'}(h^*(A), h^*(B)) < \epsilon$. Sea $h(a) \in h(A) = h^*(A)$, entonces $a \in A$ y existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$ y por tanto $d'(h(a), h(b)) < \epsilon$. Así, $h(a) \in N_{H_d}(B, \epsilon)$ y por lo tanto, $h^*(A) = h(A) \subset N_{H_{d'}}(h^*(B), \epsilon)$. Análogamente se tiene que $h^*(B) \subset N_{H_{d'}}(h^*(A), \epsilon)$, por lo que concluimos que $H_{d'}(h^*(A), h^*(B)) < \epsilon$.
De la misma forma podemos demostrar que h^{*-1} es continua, ya que Y es un espacio métrico compacto y h^{-1} es continua.
Así queda demostrado que h^* es un homeomorfismo. □

Una vez expresada la topología de la métrica de Hausdorff para 2^X en términos de conjuntos abiertos en X, en la siguiente sección veremos una equivalencia de convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff, con lo cual podremos demostrar resultados concernientes con la compacidad y conexidad en los hiperespacios de X.

2.2. Convergencia en los hiperespacios de X

En esta sección definiremos los conceptos de límite y sucesiones convergentes en el hiperespacio de un espacio métrico X. Demostraremos que si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X y $C(X)$ son compactos. El objetivo final será demostrar que toda sucesión de de subcontinuos de X tiene una subsucesión covergente con un continuo como su límite.

Definición 2.5 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el límite inferior,* $\liminf A_i$*, y el límite* *superior,* $\limsup A_i$*, de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\liminf A_i = \{x \in X : &\textit{para cada } U \in \mathcal{T} \textit{ tal que } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ &\textit{para todos salvo una cantidad finita de índices}\}.\\ \limsup A_i = \{x \in X : &\textit{para cada } U \in \mathcal{T} \textit{ tal que } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ &\textit{para una cantidad infinita numerable de índices}\}.\end{aligned}$$

Definición 2.6 *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *y* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *como en la definición anterior, y sea* $A \subset X$*. Decimos que* $\lim A_i = A$ *siempre que se cumpla* $\liminf A_i = \limsup A_i = A$*.*

Lema 2.5 *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X *y* $A \subset X$*. Entonces son equivalentes:*
(i) $\lim A_i = A$
(ii) $A \subset \liminf A_i$ *y* $\limsup A_i \subset A$

Demostración. El lema es inmediato de las Definiciones 2.5 y 2.6, ya que claramente $\liminf A_i \subset \limsup A_i$. □

Ya estamos listos para demostrar el siguiente teorema fundamental.

Teorema 2.5 *Sea* X *un espacio métrico compacto, y sea* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de* X*. Entonces* $\lim A_i = A$ *si y sólo si* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a* A *en* 2^X *con respecto a la métrica de Hausdorff* H*.*

Demostración. Supongamos que $\lim A_i = A$. Primero mostraremos que $A \in 2^X$. Veamos que $\lim A_i = \limsup A_i \neq \emptyset$. Supongamos que $\limsup A_i = \emptyset$, entonces para cada x en X, existe U_x abierto tal que $U_x \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad finita de índices. El conjunto $\{U_x\}_{x \in X}$ forma una cubierta abierta de X que no tiene una subcubierta finita, ya que de tenerla sólo intersectaría a una cantidad finita de $A_i's$, lo cual contradice que X es un conjunto compacto. Por tanto $\lim A_i \neq \emptyset$.
Veamos ahora que $\limsup A_i$ es cerrado. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en A convergente a x. Sea U un abierto que contiene a x. Entonces existe k_0 tal que $x_k \in U$ para toda $k \geq k_0$. Como $x_k \in A = \liminf A_i$, entonces $U \cap A_i \neq \emptyset$ para todos excepto una catidad numerable de índices, entonces $x \in \liminf A_i = A$, por tanto A es cerrado.

Ahora demostraremos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a la métrica de H, para ello utilizaremos el Teorema 2.2. Sean $U_1, \ldots U_n$ abiertos de X

tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Veamos que existen N_1 y N_2 números naturales tales que se cumple:

(i) $A_i \cap U_j \neq \emptyset$ para todo $i \geq N_1$ y para $j = 1, .., n$

(ii) $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ para todo i $\geq N_2$

El punto (i) se cumple ya que $A \cap U_j \neq \emptyset$ para cada j y $\liminf A_i = A$, entonces para cada U_j existe un natural n_j tal que $U_j \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \geq n_j$, tomamos N_1 como el máximo de los $n_i's$.
Supongamos que (ii) no se cumple, es decir, para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $i_N > N$ tal que $A_{i_N} \cap (X - \bigcup_{j=1}^{n} U_j) \neq \emptyset$. Sea $x_{i_n} \in A_{i_N} \cap (X - \bigcup_{j=1}^{n} U_j)$, entonces por el Teorema 1.3, la sucesión $\{x_{i_n}\}$ tiene una subsucesión convergente a $x \in A$, ya que X es un espacio métrico y compacto. Además se cumple que $x \in X - \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ ya que es un conjunto cerrado, lo cual contradice el supuesto y por tanto se cumple el punto (ii).

Entonces para $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$ se tiene que $A_i \cap U_j \neq \emptyset$ para todo $i \geq N$ y todo $j \leq n$, y $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ para todo $i \geq$, es decir, $A_i \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ para todo $i \geq N$. Por lo tanto $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a H.

Probemos ahora el regreso del teorema. Supongamos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a H. Demostraremos que $\lim A_i = A$ mostrando (ii) del Lema 2.5.

Para ver que $A \subset \liminf A_i$, sea p en A y U un conjunto abierto en X tal que $p \in U$.
En el caso en el que $A = \{p\}$, como $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A existe N tal que para toda $i \geq N$, se tiene que $A_i \subset U$, por lo que $A_i \cap U \neq \emptyset$ para todas excepto una cantidad finita de índices, por lo que $\{p\} \subset \liminf A_i$.
Si $A \neq \{p\}$. Entonces $A \in \langle U, X - \{p\} \rangle$. Como $\langle U, X - \{p\} \rangle$ es un abierto de 2^X, existe N tal que $A_i \in \langle U, X - \{p\} \rangle$ para toda $i \geq N$. Así $A_i \cap U \neq \emptyset$ para todo $i \geq N$. Entonces $p \in \liminf A_i$ y por tanto $A \subset \liminf A_i$.

Para demostrar que $\limsup A_i \subset A$, sea x en $X - A$ (si $A = X$ el resultado es inmediato). Ya que X es regular, existe W subconjunto abierto de X tal que $A \subset W$ y x no se encuentra en $\overline{W}$. Como $A \in \langle W \rangle$ y $\langle W \rangle$ es abierto en 2^X, existe N tal que $A_i \in \langle W \rangle$ para toda $i \geq N$. Es decir, $A_i \subset W$, entonces $A \cap (X - \overline{W}) = \emptyset$ para todo $i \geq N$. Ya que $X - \overline{W}$ es abierto en

X y $x \in X - \overline{W}$, vemos que x no se encuentra en $\limsup A_i$. Por lo tanto $\limsup A_i \subset A$. Lo cual completa la demostración del teorema. $\square$

Notación 2.2 *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de X. Decimos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A y lo denotamos por $A_i \to A$ para referirnos, sin confusión, a* $\lim A_i = A$ *ó bien* $\lim_{n\to\infty} H(A_i, A) = 0$*, donde H es la métrica de Hausdorff*

Ahora que tenemos claro el concepto de convergencia en 2^X nos interesa la existencia de subsucesiones convergentes, así como saber qué condición es suficiente para garantizar la conexidad del límite, así podemos hablar de límites de sucesiones de conjuntos continuos. El siguiente teorema nos habla de la compacidad en 2^X.

Teorema 2.6 *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ como en el Teorema 2.2. Por el lema de sub-bases de Alexander ([10, pág 4]) y por el Teorema 2.2, basta demostrar que toda cubierta de 2^X por elementos de $\mathcal{P}$ tiene una subcubierta finita. Para este fin supongamos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$,

$$\mathcal{L} = \{\Gamma(U_\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \cup \{\Lambda(V_\omega) : \omega \in \Omega\}$$

y es tal que $2^X = \bigcup \mathcal{L}$, es decir

$$2^X = \left[\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \Gamma(U_\sigma)\right] \cup \left[\bigcup_{\omega\in\Omega} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Sea $Y = X - \bigcup_{\omega\in\Omega}\{V_\omega\}$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $Y = \emptyset$. Entonces $X = \bigcup_{\omega\in\Omega}\{V_\omega\}$. Ya que X es compacto, existe un subconjunto finito Ω_0 de Ω tal que

$$X = \bigcup_{\omega\in\Omega_0}\{V_\omega\}.$$

Ya que $\Lambda(V) = \{A \in 2^X | A \cap V \neq \emptyset\}$, y para cualquier $A \in 2^X$ existe V_ω tal que $A \cap V_\omega \neq \emptyset$, entonces

$$2^X = \bigcup_{\omega\in\Omega_0} \Lambda(V_\omega).$$

Es decir, tenemos la subcubierta finita de $\mathcal{L}$ deseada.

Caso 2. $Y \neq \emptyset$. Ya que $2^X = \bigcup \mathcal{L}$, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $Y \in \Gamma(U_\alpha)$. Entonces $Y \subset U_\alpha$. Así

$$X - U_\alpha \subset X - Y \subset \bigcup_{\omega \in \Omega} \{V_\omega\}.$$

Como $X - U_\alpha$ es compacto, existe un subconjunto finito Ω_1 de Ω tal que

$$X - U_\alpha \subset \bigcup_{\omega \in \Omega_1} \{V_\omega\}.$$

Entonces,

$$2^X = \Gamma(U_\alpha) \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega_1} \Lambda(V_\omega) \right]$$

ya que para todo $B \in 2^X$, si B no está contenido en U_α, para $b \in B - U_\alpha$, existe V_β, con $\beta \in \Omega_1$ tal que $b \in V_\beta$, entonces $B \cap V_\beta \neq \emptyset$, por tanto $B \in \Lambda(V_\beta)$. Así queda demostrado que $\Gamma(U_\alpha) \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega_1} \Lambda(V_\omega)\right]$ es efectivamente una subcubierta finita de $\mathcal{L}$ y queda demostrado el teorema. □

Corolario 2.2 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Por el Teorema 1.1, 2^X es un espacio métrico, y acabamos de demostrar que es compacto, entonces, por el Teorema 1.3, toda sucesión tiene una subsucesión convergente. □

Nuestro siguiente resultado es respecto a la conexidad de $\lim A_i$. En particular veremos que $C(X)$ es compacto.

Teorema 2.7 *Si X es un espacio métrico compacto, entonces el hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Por el Teroema 2.6, basta demostrar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Sea $\{C_n\} \subset 2^X$ una sucesión de subconjuntos conexos que convergen a $C \in 2^X$. Veamos que C es conexo. Supongamos que C no es conexo, es decir, $C \subset H \cup K$, con H, K subconjuntos cerrados y ajenos de C y por tanto de X. Demostraremos que $C \cap H$ o $C \cap K$ es vacíos.
Ya que X es normal, existen $U, V \subset X$ con $U \cap V \neq \emptyset$, tales que $H \subset U$ y $K \subset V$, lo que implica que $C \in \Gamma(U \cup V)$. Supongamos que $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$, entonces por el Teorema 2.5, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap U \neq \emptyset$ y $C_n \cap V \neq \emptyset$ para toda $n > N$. Como cada C_n es conexo, se tiene que

$C_n \cap (X - (U \cup V)) \neq \emptyset$. Sea $x_n \in C_n \cap (X - (U \cup V))$. Por la compacidad de 2^X, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente y su límite es un elemento de C, lo que contradice el supuesto de que $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$. Entonces, $C \cap U = \emptyset$ o $C \cap V = \emptyset$, y en consecuencia $C \cap H$ o $C \cap K$ es vacío, con lo que se demuestra que C es conexo y por tanto el hiperespacio $C(X)$ es cerrado. $\square$

Corolario 2.3 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, cada sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión convergente a un continuo de X, y así, cada subsucesión convergente de subcontinuos de X tiene un subcontinuo de X como su límite.*

2.3. Componentes y Composantes

Definición 2.7 *Sea x un elemento de X espacio topológico. La componente de x es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x.*

Definición 2.8 *Sea X un continuo no degenerado y $p \in X$. La composante de p en X, denotada por κ_p, es*
$\kappa_p = \{x \in X :$ *existe un subcontinuo propio A de X con* $\{p, x\} \subset A\}$.

Notemos que para un continuo no degenerado X, y $p \in X$, la composante de p en X es un subconjunto conexo de X, pues

$$\kappa_p = \bigcup \{A \subset X : A \text{ es un subcontinuo propio de } X \text{ y } p \in A\},$$

es decir, es la unión de conexos que tienen al punto p en común.

Tomemos como ejemplo a $X = [0, 1]$, entonces tenemos las siguientes 3 composantes:

$$\begin{aligned} &\kappa_0 = [0, 1), \\ &\kappa_1 = (0, 1], \\ &\kappa_x = [0, 1] \text{ } \textit{cuando } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Enunciaremos sin demostración el siguiente resultado conocido como primer teorema de golpes en la frontera, que utilizaremos para demostrar que las composantes de los continuos no degenerados son conjuntos densos, teorema fundamental para caracterizar a los conjuntos indescomponibles. La demostración de Sam B. Nadler se puede consultar en [13, pág. 84].

Teorema 2.8 (Primer teorema de golpes en la frontera) *Sean X un continuo, A un subconjunto cerrado propio de X y C una componente de A. Entonces $C \cap \overline{(X - A)} \neq \emptyset$, es decir, $\overline{C} \cap fr(A) \neq \emptyset$*

Teorema 2.9 *Sea X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante κ_p de p en X es un subconjunto denso en X.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío en X. Veremos que $U \cap \kappa_p \neq \emptyset$. Por regularidad de X, existe un abierto no vacío V en X tal que $\overline{V} \subset U$. Si $p \in \overline{V}$ entonces $p \in U \cap \kappa_p$ y se cumple el teorema. Ahora, supongamos que $p \notin \overline{V}$. Denotamos $E = X - \overline{V}$. Sea C la componente de E que contiene a p. Por el Teorema 2.8, se tiene que $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Por otra parte, $\overline{C} \subset \kappa_p$. Entonces $\kappa_p \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Como $\overline{V} \subset U$, se concluye que $\kappa_p \cap U \neq \emptyset$

□

2.4. Continuos Indescomponibles y sus características

Abordamos ahora el tema principal de este trabajo, los continuos indescomponibles. Para entender a los continuos indescomponibles, un matemático debe estar dispuesto a desarrollar una intuición que es, por su naturaleza, muy poco euclidiana ([14, pág 266]). El primer continuo indescomponible se remonta a 1910, y surgió como contraejemplo a la conjetura de Schoenflies de que en el plano la frontera común entre dos conjuntos abiertos, ajenos y conexos debe ser descomponible. La descripción de este tipo de objetos era aquella de un ejemplo patológico para refutar alguna conjetura, hasta que a mediados de 1920, los matemáticos polacos iniciaron el estudio de estos objetos como entidades en sí mismas.
En este capítulo demostraremos algunas de las muchos propiedad tan interesantes de estos objetos matemáticos.

Definición 2.9 *Sea X un continuo. Decimos que X es descomponible si existe un par de subcontinuos propios no vacíos, A y B, de X tales que $X = A \cup B$. Decimos que X es indescomponible si no es descomponible.*

Definición 2.10 *Sea X un continuo y $A \subset X$. Se dice que X es irreducible respecto a A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A. Si existen dos puntos p y q en X tales que X es irreducible con respecto a $\{p, q\}$ entonces se dice que X es irreducible.*

Teorema 2.10 *Sea X un continuo. Entonces X es indescomponible si y solo si cada subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible y que existe A subcontinuo propio de X con interior no vacío. Entonces $int(A)$ es abierto y $X - int(A)$ es un cerrado no vacío de X y por lo tanto, compacto. Notemos que $X - int(A)$ no puede ser conexo ya que X es indescomponible y $X = A \cup (X - int(A))$.
Como $X - int(A)$ es disconexo, existen dos conjuntos cerrados ajenos, U y V, de $X - int(A)$ tales que $X - int(A) = U \cup V$. Por el Lema 1.8, tenemos que $A \cup U$ y $A \cup V$ son conexos y ya que $X - int(A)$ es cerrado en X, U y V también son cerrados en X. Entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos propios de X, lo cual es una contradicción, por lo tanto todo subcontinuo de X tiene interior vacío.

Por otro lado, si X se puede descomponer en subcontinuos propios A y B, entonces $X - A$ es abierto no vacío de X que está contenido en B, lo que contradice la hipótesis de que B tiene interior vacío por ser subcontinuo propio. Por lo tanto X es indescomponble. $\square$

Teorema 2.11 *Sea X un continuo indescomponible no degenerado. Entonces las composantes de X son ajenas o iguales.*

Demostración. Sean κ_1 y κ_2 dos composantes distintas de X. Entonces existe $x \in \kappa_1$ tal que $x \notin \kappa_2$. Si κ_2 es la composante de $x^* \in X$ entonces no existe un subcontinuo propio de X que contenga a x y x^*. Supongamos que κ_1, κ_2 no son ajenas y sea $z \in \kappa_1 \cap \kappa_2$. Entonces existen G, H subcontinuos propios de X tales que $\{x, z\} \subset G$ y $\{x^*, z\} \subset H$, entonces $G \cup H$ es un continuo que contiene a x y x^*, por lo que $X = G \cup H$, lo que contradice que X es indescomponible. $\square$

Proposición 2.3 *Si X es un continuo no degenerado, entonces las composante κ_p de cualquier punto p en X es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios de X que contienen a p.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base numerable para $X - \{p\}$ tal que cada $U_i \neq \emptyset$. Para cada i, sea C_i la componente de $X - U_i$ que contiene a p. Ya que cada U_i es no vacío, $C_i \neq X$ para cada i. Así, ya que U_i es abierto, tenemos que C_i es un cerrado en X, que además es conexo por tratarse de una componente, por lo tanto cada C_i es un subcontinuo propio de X que contiene a p. Además ya que $p \in C_i$ para cada i, $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset \kappa_p$.
Veamos que la contención contraria también se cumple. Sea x en κ_p. Por

definición, existe A subcontinuo propio de X tal que x y p están en A. Ya que A es subcontinuo propio y $\{U_i\}$ es una base numerable de $X-\{p\}$, existe U_k tal que $A \cap U_k = \emptyset$, es decir, $A \subset X - U_k$. Entonces $A \subset C_k$, ya que C_k es el conexo más grande de $X - U_k$ que contiene a p. Entonces $x \in C_k$ y por lo tanto $\kappa_p \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Con lo cual obtenemos que κ_p es la unión numerable de subcontinuos propios de X. □

Corolario 2.4 *Si X es un continuo indescomponible y $p \in X$, entonces κ_p es de la primera categoría, es decir, se puede expresar como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Donde A es denso en ninguna parte si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

Demostración. Por la Proposición 2.10, tenemos que todo subcontinuo propio A de X tiene interior vacío, y ya que todo subcontinuo es cerrado, entonces $int(\overline{A}) = int(A) = \emptyset$. Además por la Proposición 2.3, κ_p es la unión numerable de subcontinuos propios. Por lo tanto κ_p es de primera categoría. □

Teorema 2.12 *Para cualquier punto a de un continuo indescomponible X, κ_a es un conjunto frontera de X, es decir, $\kappa_a \subset \overline{(X - \kappa_a)}$.*

Demostración. Por el Corolario 2.4, $\kappa_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}$, con K_n subcontinuos propios de X densos en ninguna parte. Entonces, $X - \kappa_a = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - \overline{K_n})$, con $(X - \overline{K_n})$ abiertos y densos. Por la Proposición 2.2, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - \overline{K_n})$ es denso. Por otra parte, como κ_a es denso, entonces $\kappa_a \subset X = \overline{(X - \kappa_a)}$. □

Teorema 2.13 *X es un continuo indescomponible si y solo si existe $a \in X$, tal que κ_a es un conjunto frontera en X.*

Demostración. Sea X un continuo indescomponible. El hecho de que existe $a \in X$ tal que κ_a es un conjunto frontera, se sigue del Teorema 2.12.
Por otro lado, supongamos ahora que X es descomponible, es decir existen X_1, X_2 subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$, y que existe $a \in X$ tal que κ_a es un conjunto frontera en X. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \in X_1$. Como $X_1 \subset \kappa_a$, entonces $X - \kappa_a \subset X - X_1 \subset X_2$. Como X_2 es cerrado, tenemos que $\overline{X - \kappa_a} \subset X_2$. Como κ_a es un conjunto frontera, $\kappa_a \subset \overline{X - \kappa_a}$, por lo que $X_1 \subset \kappa_a \subset X_2$, es decir, $X_1 \subset X_2$, esto implica que $X_2 = X$. Lo que contradice la hipótesis de que X es descomponible. □

Teorema 2.14 *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración. Sabemos que X es la unión de sus composantes, y cada una de ellas es la unión numerable de subcontinuos propios de X, los cuales son cerrados y tienen interior vacío, es decir, son densos en ninguna parte. Si X tuviese una cantidad numerable de composantes, se podría representar como unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte, lo cual no es posible, ya que X es un espacio de Baire. Por lo tanto X tiene una cantidad no numerable de composantes. $\square$

De los resultados anteriores, podemos describir intuitivamente a los continuos indescomponibles como aquellos que tienen la propiedad de que si se "rompen", entonces de manera obligada se partirían en una cantidad no numerable de "pedazos" cada uno de ellos denso en ninguna parte en el continuo original [14, pág 266].

Teorema 2.15 *Un continuo X es indescomponible si y solo si existen tres puntos $a, b, c \in X$ tales que X es irreducible entre cada par de ellos.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible, por el Teorema 2.14 existen κ_a, κ_b y κ_c composantes distintas de X. Si K es un subcontinuo propio de X que contiene a a y b entonces $K \subset \kappa_a \cap \kappa_b$, lo cual es una contradicción ya que las composantes de un continuo indescomponible son ajenas (Teorema 2.11). Análogamente se tiene que x es irreducible entre b y c y entre a y c.

Ahora supongamos que X es descomponible y sean a, b, c tres puntos en X tales que X es irreducible entre cada par de ellos. Como X es descomponible existen K y L subcontinuos propios de X tales que $X = K \cup L$. Pero esto implica que K ó L contiene a dos de los tres puntos a, b y c, por lo que X no es irreducible entre dos de esos puntos. $\square$

Teorema 2.16 *Sea X un continuo. Entonces X es indescomponible si y solo si para cada $a \in X$, existe $b \in X$ tal que X es irreducible entre a y b.*

Demostración. Sean X un continuo indescomponible y $a \in X$. Por el Teorema 2.15, sabemos que existen $\{x_1, x_2, x_3\} \subset X$ tales que X es irreducible entre cada par de ellos.
Supongamos que para todo $x \in X$ existe A_x subcontinuo propio de X tal que $\{a, x\} \subset A_x$. En particular existen A_{x_1}, A_{x_2} y A_{x_3} tales que $\{a, x_i\} \subset A_{x_i}$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces $A_{x_1} \cup A_{x_2}$ es un subcontinuo de X no vacío, que contiene a a, ya que $a \in A_{x_1} \cap A_{x_2}$. Supongamos que $x_3 \in A_{x_1} \cup A_{x_2}$. Entonces $x_3 \in A_{x_1}$ o $x_3 \in A_{x_2}$. Supongamos que $x_3 \in A_{x_1}$, entonces A_{x_1} es un subcontinuo propio de X y $\{x_1, x_3\} \subset A_{x_1}$, lo que contradice la hipótesis de que X es irreducible entre x_1 y x_3. Análogamente, si suponemos que $x_3 \in A_{x_2}$

llegamos a una contradicción, ya que X es irreducible entre x_2 y x_3. Por lo tanto, $x_3 \notin A_{x_1} \cup A_{x_2}$, es decir, $A_{x_1} \cup A_{x_2}$ es un subcontinuo propio de X que contiene a x_1 y x_2, contradiciendo el supuesto de que X es irreducible entre x_1 y x_2. Por lo que demostramos la existencia de $b \in X$ tal que X es irreducible entre a y b.

Sean X un continuo, supongamos que para todo $a \in X$ existe $b \in X$ tal que X es irreducible de a a b. Demostraremos por contradiccón que X es indescomponible. Supongamos que X es descomponible, entonces existen X_1 y X_2 subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $a \in$X$_1 \cap X_2$, y sea $b \in X$ tal que X es irreducible entre a y b. Como $X = X_1 \cup X_2$, entonces $b \in X_1 \cup X_2$. Es decir, $b \in X_1$ o $b \in X_2$. Supongamos que $b \in X_1$, entonces X_1 es un subcontinuo propio de X tal que $\{a, b\} \subset X_1$, lo que contradice la hipótesis de que X es irreducible entre a y b. Análogamente, si suponemos que $b \in X_2$ llegamos a la misma contradicción. Con lo que demostramos que $b \notin X_1 \cup X_2$, es decir X no es descomponible.

□

Corolario 2.5 *Sea X un continuo. Entonces, X es un continuo indescomponible si y solo si es irreducible entre algún punto $a \in X$ y cada punto $b \in D$, donde D es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Sean X un continuo indescomponible y $a \in X$. Por el Teorema 2.12, $X = \overline{(X - \kappa_a)}$, es decir, $\overline{(X - \kappa_a)}$ es denso en X. Sea $D = (X - \kappa_a)$, entonces X es irreducible entre a y todo punto $b \in D$, ya que $b \notin \kappa_a$, es decir, no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga a $\{a, b\}$. Sea X un continuo y D un conjunto denso en X, supongamos que existe $a \in X$ tal que X es indescomponible entre a y b, para todo $b \in D$. Demostraremos que X es indescomponible. Notemos que $D \subset X - \kappa_a$, ya que para todo $b \in D$, $b \notin \kappa_a$ pues X es irreducible entre a y b. Entonces, $X = \overline{D} \subset \overline{(X - \kappa_a)}$. En particular, se tiene que $\kappa_a \subset \overline{(X - \kappa_a)}$, por el Teorema 2.13, tenemos que X es indescomponible. □

Teorema 2.17 *Para que un continuo X sea indescomponible es necesario y suficiente que contenga dos composantes disjuntas.*

Demostración. Por la Proposición 2.3 y el Teorema 2.11, X tiene una cantidad no numerable de composantes disjuntas, y por tanto tiene dos.
Inversamente, supogamos que κ_a y κ_b son dos composantes disjuntas de X, y supongamos que X es descomponible. Entonces existen X_1 y X_2 subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Notemos que $X_1 \subset \kappa_a$ o $X_1 \subset \kappa_b$. En cualquier caso, tenemos que $X_1 \cap X_2 \subset \kappa_a$, y análogamente $X_1 \cap X_2 \subset \kappa_b$.

Por lo que $X_1 \cap X_2 \subset \kappa_a \cap \kappa_b$. Es decir, $\kappa_a \cap \kappa_b \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto X es indescomponible. $\square$

Veamos que el Teorema 2.15 reduce el problema de encontrar un continuo indescomponble a empezar con tres puntos y construir un continuo que sea irreducible entre cada par de ellos, lo cual es muy fácil de hacer con el uso de cadenas, ya que si un continuo es encadenable entre dos puntos, también es ireducible entre ellos. Veamos un ejemplo.
Sean a, b y c tres puntos en el plano. Construimos una sucesión de cadenas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ conformadas por bolas abiertas de tal forma que $diam(\mathcal{D}_i) < 1/i$, $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{D}_i$ y cumplen la siguiente propiedad:

1. $\mathcal{D}_{3n+1}$ es una cadena que va de a a c y pasa por b.

2. $\mathcal{D}_{3n+2}$ es una cadena que va de b a c y pasa por a.

3. $\mathcal{D}_{3n+3}$ es una cadena que va de b a a y pasa por c.

El continuo deseado es $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$.

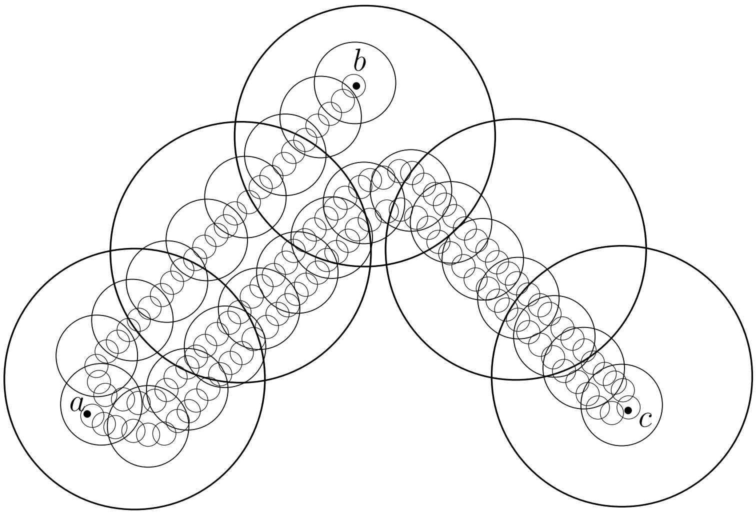


Figura 2.1: Construcción de los tres primeros pasos

Demostración. Veamos que efectivamente el continuo $\mathcal{D}$ es indescomponible, para lo cual nos basta probar que $\mathcal{D}$ es irreducible entre cada par de puntos del conjunto $\{a, b, c\}$.
Supongamos que a, c son puntos en el subcontinuo K de $\mathcal{D}$. Notemos que $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{3n+1}$ ya que la unión de las cadenas son conjuntos anidados. Entonces K está contenido en la unión las cadenas de la forma

$\mathcal{D}_{3n+1}$, es decir, cadenas que van de a a c pasando por b. Además K intersecta al primer y último eslabón de $\mathcal{D}_{3n+1}$ por contener a los puntos a, c que se encuentran en el primer y último eslabón, respectivamente. Ya que K es continuo, K intersecta a todos los eslabones de las cadenas $\mathcal{D}_{3n+1}$.
Veamos que $K = \mathcal{D}$. Sea x en $\mathcal{D} - K$. Tanto $\{x\}$ como K son conjuntos compactos en el plano, entonces son separables, es decir, $d(x, K) > 0$. Sea n_0 tal que $1/n_0 < d(x, K)$.
Denotemos por $D(i)_r$ al r-ésimo eslabón de la cadena $\mathcal{D}_i$. Como x se encuentra en $\mathcal{D}$, para la cadena $\mathcal{D}_{3n_0+1}$ existe un eslabón $D(3n_0 + 1)_{i_0}$ que contiene a x. Además, ya que todo eslabón de las cadenas de la forma $\mathcal{D}_{3n+1}$ intersecta a K, existe un punto k en $K \cap D(3n_0 + 1)_{i_0}$. Lo cual implica que $d(x, k) < 1/(3n_0 + 1)$, entonces $d(x, K) < 1/(3n_0 + 1)$, entonces $x \in K$. Por lo tanto $D = K$, es decir, D es irreducible de a a c. Análogamente se demuestra que D es irreducible de b a c y de a a b haciendo uso de las cadenas de la forma $\mathcal{D}_{3n+2}$ y $\mathcal{D}_{3n+3}$, respectivamente. Así, por el Teorema 2.15, demostramos que D es un continuo indescomponible. □

2.5. El Continuo de Knaster

El continuo de Knaster fue descrito por Bronislaw Knaster en 1922. Es uno de los primeros continuos indescomponibles. A continuación presentaremos la construcción del continuo de Knaster a través de cadenas.

Sea $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cadenas encajadas en el plano, con $\mathcal{E}_n = \{E_1^n, ..., E_{m_n}^n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que se cumplen las siguiente propiedades:

1. Cada eslabón E_j^n de $\mathcal{E}_n$ es un disco cerrado con $diam(E_j^n) < 1/2^n$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la cadena $\mathcal{E}_{n+1} \subset \mathcal{E}_n$ empieza y termina en el primer eslabón, es decir, $E_1^{n+1} \subset E_1^n$ y $E_{m_{n+1}}^{n+1} \subset E_1^n$.
3. Los eslabones de la cadena $\mathcal{E}_{n+1}$, recorren todos los eslabones de $\mathcal{E}_n$ en orden, de ida y vuelta, es decir, para todo eslabón E_j^n con $j < m_n$, existen $E_a^{n+1}, E_b^{n+1}, E_c^{n+1}$, con $a < b < c$ tales que:
   a) $E_a^{n+1} \subset E_j^n$, $E_c^{n+1} \subset E_j^n$ y $E_b^{n+1} \subset E_{m_n}^n$.
   b) Para todo i tal que $a < i < b$, si $E_i^{n+1} \subset E_k^n$, con $j < k$, entonces $\mathcal{E}_{n+1}(a, i)$ solo intersecta a eslabones de la subcadena $\mathcal{E}_n(j, k)$. Cuando $b < i < c$, si $E_i^{n+1} \subset E_k^n$, la subcadena $\mathcal{E}_{n+1}(i, c)$ solo intersecta a los eslabones de la subcadena $\mathcal{E}_n(j, k)$.

Definimos a $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n^*$.

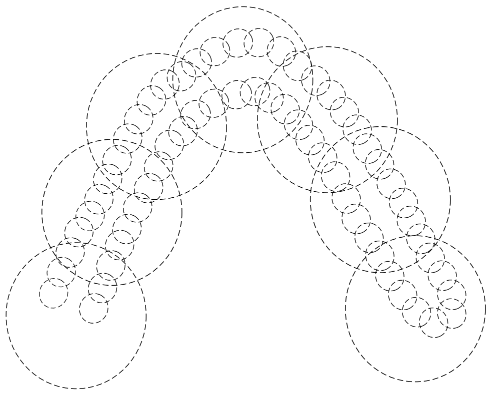


Figura 2.2: Construcción del continuo de Knaster con cadenas

Teorema 2.18 *El continuo de Knaster, K, es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que K no es indescomponible. Entonces existen G, H subcontinuos propios de K tales que $K = G \cup H$.
Como G, H son subcontinuos propios de K, existen $h \in H - G \subset K$ y $g \in G - H \subset K$. Sea $\epsilon = min\{d(h, G), d(g, H)\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \epsilon$.

Afirmamos que se cumplen los siguientes tres puntos.

(1) Existen $E^n_{j_1}, E^n_{j_2}$ eslabones de $\mathcal{E}_n$ tales que $K \cap E^n_{j_1} \subset H$ y $K \cap E^n_{j_2} \subset G$.

(2) Si $K \cap E^n_{j_1} \subset H$, entonces $H \cap E^n_k \neq \emptyset$ para todo $k \geq j_1$. Análogamente, si $K \cap E^n_{j_2} \subset G$, entonces $G \cap E^n_k \neq \emptyset$ para todo $k \geq j_2$.

(3) Sea $\mathcal{E}_p$ una cadena con $p \geq n$. Si para algún i se cumple que $H \cap E^p_i \neq \emptyset$, entonces $g \notin E^p_i$.

Veamos que las afirmaciones son ciertas.
(1) Como $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^*_n$, $K \subset \mathcal{E}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existen $E^n_{j_1}, E^n_{j_2}$ eslabones de $\mathcal{E}_n$ tales que $h \in K \cap E^n_{j_1}$ y $g \in K \cap E^n_{j_2}$.
Por la forma en la que definimos n, tenemos que $G \cap E^n_{j_1} = \emptyset$, ya que $1/2^n < \epsilon \leq d(h, G)$. Por tanto, $K \cap E^n_{j_1} \subset H$.
Análogamente, tenemos que $H \cap E^n_{j_2} = \emptyset$, ya que $1/2^n < \epsilon \leq d(g, H)$. Por tanto, $K \cap E^n_{j_2} \subset G$.
(2) Por definición, $E^n_{m_n}$ es el último eslabón de la cadena $\mathcal{E}_n$. Notemos que si $E^n_{j_1} = E^n_{m_n}$, entonces nuestro supuesto se cumple. Sea $j_1 < m_n$ y supongamos que existe $k_1 > j_1$ tal que $E^n_{k_1} \cap H = \emptyset$. Tomemos la cadena $\mathcal{E}_{n+1}$. Por definición existen $r < s < t$ tales que (Figura 2.3):

i $E^{n+1}_r \subset E^n_{j_1}$ y $E^{n+1}_t \subset E^n_{j_1}$

ii $E_s^{n+1} \subset E_{k_1}^n$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} H &= H \cap (\mathcal{E}_{n+1}^*(1,s) \cup \mathcal{E}_{n+1}^*(s, m_{n+1})) \\ &= (H \cap \mathcal{E}_{n+1}^*(1,s)) \cup (H \cap \mathcal{E}_{n+1}^*(s, m_{n+1})) \\ &= (H \cap \mathcal{E}_{n+1}^*(1,s-1)) \cup (H \cap \mathcal{E}_{n+1}^*(s+1, m_{n+1})) \end{aligned}$$

Ya que $H \cap E_s^{n+1} \subset H \cap E_{k_1}^n = \emptyset$. Lo cual contradice el hecho de que H es conexo, ya que $\mathcal{E}_{n+1}(1, s-1) \cap \mathcal{E}_{n+1}(s+1, m) = \emptyset$ por la definición de $\mathcal{E}_{n+1}$. De la misma manera, podemos demostrar que si $K \cap E_{j_2}^n \subset G$, entonces $G \cap D_k^n \neq \emptyset$ para todo $k \geq j_2$

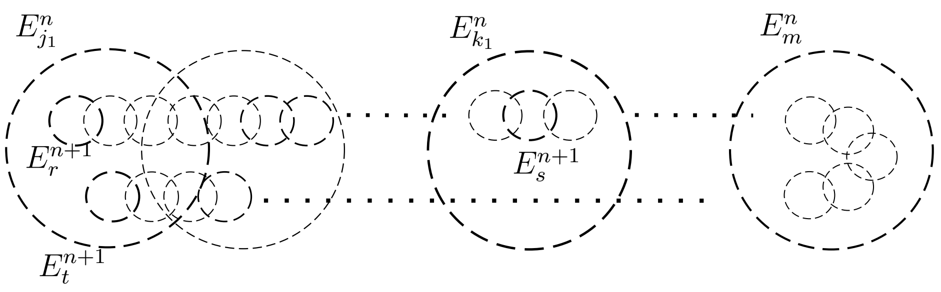


Figura 2.3: Ejemplo subcadena $\mathcal{E}_{n+1}(r,t)$

(3) Supongamos que $g \in E_i^p$, entonces

$$d(g,h) \leq diam(E_i^p) < \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2^n} < \epsilon \leq d(g,H)$$

lo cuál es una contradicción, por lo que $g \notin E_i^p \cap H$.

Ya mostramos que las afirmaciones se cumplen. Sean $E_{j_1}^n, E_{j_2}^n$ eslabones de $\mathcal{E}_n$ tales que $h \in E_{j_1}^n$ y $g \in E_{j_2}^n$.
Por (1), se cumple que $K \cap E_{j_1}^n \subset H$ y $K \cap E_{j_2}^n \subset G$. Por (2) tenemos que $H \cap E_k^n \neq \emptyset$ para toda $k \geq j_1$, por lo que $j_2 < j_1$. Análogamente, por (2) tenemos que $G \cap E_k^n \neq \emptyset$ para toda $k \geq j_2$, por lo que $j_1 < j_2$, lo cual contradice el punto anterior. Por tanto, los eslabones E_i^n intersectan solo a

H o solo G para todo $i \leq m_n$. Entonces, por (3), tenemos que para todo $m \geq n$, g no se encuentra en ningún eslabón de la cadena $\mathcal{E}_m$. Es decir,

$$G \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n = \bigcap_{n\geq m} \mathcal{E}_n = \emptyset$$

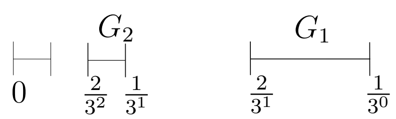
contradiciendo la hipoótesis de que K es descomponible. Por lo que demostramos que K es indescomponible. $\square$

Presentamos a continuación la construcción del continuo de Knaster que fue utilizada originalmente partiendo del conjunto de Cantor. Para ello utilizamos la descripción de Kuratowski en [10, págs. 204-205] con cambios en notación tomados de Jones, F. en [9, págs. 7, 19]. Se puede demostrar que el continuo resultante es homeomorfo a la descripcón anterior con cadenas.

Denotamos como C al conjunto de Cantor construido de la manera tradicional. Sea $I = [0, 1]$, construiremos el conjunto de Cantor quitando los tercios medios de I. En el primer paso quitamos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y dejamos los intervalos cerrados $J_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$ y $J_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$. Sea $C_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$ Así en el n-ésimo paso $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, donde $J_{n,1}, ..., J_{n,2^n}$ son intervalos cerrados de longitud 3^{-n}. Encontes $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$

Consideremos los siguientes subconjuntos del conjunto de Cantor para cada $n \geq 1$.

$$G_n = \left\{ x \in C : \left(\frac{2}{3^n}\right) \leq x \leq \left(\frac{1}{3^{n-1}}\right) \right\}$$



A continuación conectamos los puntos del conjunto de Cantor C con semicírculos de la siguiente manera:

1. Paso 0. Utilizando al punto $(\frac{1}{2}, 0)$ como centro, construimos el conjunto de semicírculos con ordenada no negativa y con puntos extremos en el conjunto de Cantor C (Figura 2.4)

2. Paso n. Para cada n natural, se contruye el conjunto de semicírculos con ordenada no positiva que tienen como centro al punto $((\frac{5}{2})(\frac{1}{3^n}), 0)$ y como puntos extremos a los elementos de G_n (Figura 2.5)

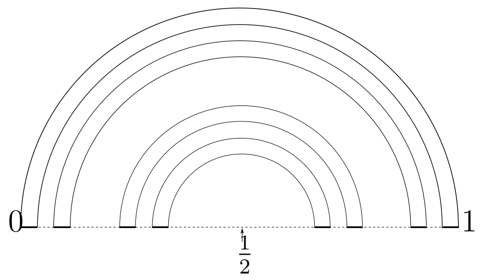


Figura 2.4: Paso 0

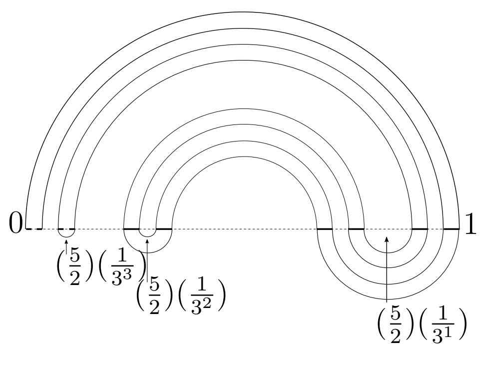


Figura 2.5: Pasos 1 a 3

La cerradura de la unión de todos los semicírculos da como resultado el Continuo de Knaster, también conocido como el arcoíris de Knaster (Figura 2.6).

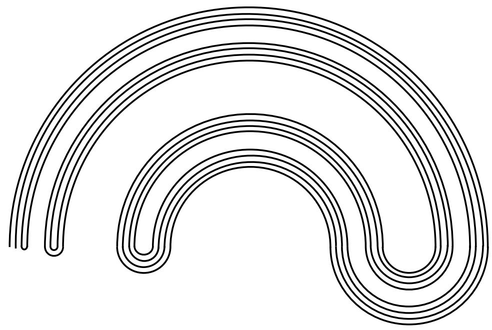


Figura 2.6: Continuo de Knaster

Capítulo 3

El Pseudoarco

Un arco es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. ¿Si un continuo del plano es homeomorfo a todos sus subcontinuos no degenerados, entonces es un arco? Esta pregunta realizada por Mazurkiewicz en 1921 (Probleme 14 Fund Math.) fue contestada de manera negativa en 1948 en la tesis de E. E. Moise cuando describió un continuo plano, hereditariamente indescomponible y homogéneo que es homeomorfo a cada uno de sus subcontinuos propios no degenerados [11, págs. 581-594], el *pseudoarco* nombrado así por compartir dicha propiedad con el arco. Más tarde R. H. Bing demostraría que este continuo es homeomorfo al continuo descrito por Knaster en 1922, motivado por demostrar la existencia de un continuo hereditariamente indescomponible. [9, pág 148]
A partir de entonces el pseudoarco ha sido ampliamente estudiado por Bing y Moise, entre otros. En este capítulo daremos la construcción del pseudoarco, demostraremos que es un continuo hereditariamente indescomponible y reproduciremos diversos resultados relevantes sobre este peculiar continuo.

3.1. Construcción del Pseudoarco

Definición 3.1 *Seann p, q dos puntos en el plano. Sea $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ una sucesión de cadenas en el plano entre los puntos p y q tales que para cada entero positivo i se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Cada eslabón de $\mathcal{D}_i$ es un disco cerrado de diámetro menor a $\frac{1}{i}$.*
2. *$\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$.*
3. *La cadena $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_i$.*

Entonces definimos el pseudoarco P como

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$$

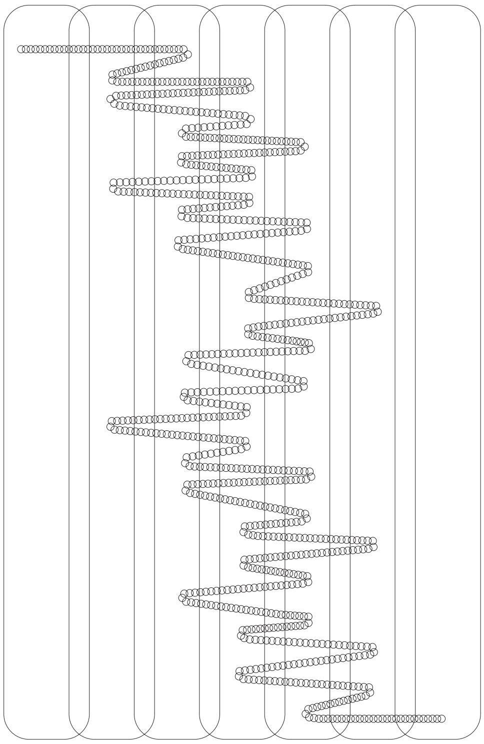


Figura 3.1: Construcción del pseudoarco [6]

Veamos que el pseudoarco P que construimos efectivamente es un continuo. Utilizaremos el resultado del Teorema 2.1.
Demostración. Afirmamos que cada $\mathcal{D}_i^*$ es conexo. De no ser así existe i_0 número natural tal que la cadena $\mathcal{D}_{i_0}$ tiene un eslabón $D(l)_{i_0}$ disconexo. Ya que $\mathcal{D}_{i_0+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{D}_{i_0}$ hay un eslabón $D(m)_{i_0+1}$ de $\mathcal{D}_{i_0+1}$ tal que su cerradura se queda contenida en $D(l)_{i_0}$, y $D(m)_{i_0+1}$ es la unión de dos cerrados K y L ajenos. Ya que K y L son acotados, éstos son compactos, entonces la distacia, r, entre ellos es positiva. Con esto ya llegamos a una contradicción, ya que si j es tal que $1/j < r$, no se podrá construir la $1/j$ cadena que refine a $\mathcal{D}_{i_0}$. Por lo tanto cada $\mathcal{D}_i^*$ es conexo.
Ya que cada eslabón de $\mathcal{D}_i$ es un disco cerrado, entonces $\mathcal{D}_i^*$ es un conjunto cerrado en el plano, y por tanto es un continuo ya que cada $\mathcal{D}_i^*$ es conexo. Entonces $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$, es una intersección anidada de continuos, por lo que P es un continuo (Teorema 2.1). $\square$

3.2. Propiedades del Pseudoarco

Teorema 3.1 *El pseudoarco P es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Sea P' un subcontinuo propio de P tal que P' es no degenerado. Supongamos que el subcontinuo P' de P es la unión de H y K subcontinuos propios de P'. Ya que H, K son subcontinuos propios y $P = H \cup K$, existen $p \in H - K \subset P$, $q \in K - H \subset P$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $2/j < min\{d(p,K), d(q,H)\}$. Sea $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ una sucesión de cadenas que cubren a P tales que $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$, la malla de $\mathcal{D}_i$ es menor a $1/i$ y $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{D}_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$.
Sean $\mathcal{D}_j(l,m), \mathcal{D}_{j+1}(u,v)$ subcadenas de $\mathcal{D}_j$ y $\mathcal{D}_{j+1}$, respectivamente, tales que p y q están en los eslabones finales de cada una de ellas.
Como P' es continuo, cada eslabón de $\mathcal{D}_j(l,m)$ tiene puntos de P', pero $\mathcal{D}_j(l+1)$ no contiene ningún punto de K ya que $diam(\mathcal{D}_j(l) \cup \mathcal{D}_j(l+1)) < 2/j$ y $d(p,K) > 2/j$. Por lo tanto $\mathcal{D}_j(l+1) \cap H \neq \emptyset$. Análogamente, $\mathcal{D}_j(m-1) \cap H = \emptyset$ y $\mathcal{D}_j(m-1) \cap K \neq \emptyset$, es decir, $\mathcal{D}_j(l, l+1)$ solo contiene puntos de H y $\mathcal{D}_j(m-1, m)$ solo contiene puntos de K. De esto último obtenemos que $l+1 \neq m-1$, entonces $|l-m| > 2$, así, como $\mathcal{D}_{j+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_j$, existen $r < s < t$ tales que $\mathcal{D}_{j+1}(r) \cup \mathcal{D}_{j+1}(t) \subset \mathcal{D}_j(m-1)$ y $\mathcal{D}_{j+1}(s) \subset \mathcal{D}_j(l+1)$. Esto implica que K es disconexo, ya que tanto $\mathcal{D}_{j+1}(r)$ como $\mathcal{D}_{j+1}(t)$ tienen puntos de K, pero $\mathcal{D}_{j+1}(s)$ es un eslabón intermedio que no tiene ningún punto de K, lo cual es una contradicción. Por lo tanto P' es indescomponible y así queda demostrado que el pseudoarco P es hereditariamente indescomponible. □

Corolario 3.1 *Un pseudoarco es un continuo encadenable, no degenerado y hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Ya demostramos que el pseudoarco es hereditariamente indescomponible. Bing demuestra en [1, pág 739] que dos continuos, M_1, M_2 no degenerados, hereditariamente indescomponibles son homeomorfos si son encadenables, de hecho si $p, q \in M_1$ y $p', q' \in M_2$ pertenecen a diferentes composantes, existe un homeomorfismo h de M_1 en M_2 tal que $h(p) = p'$ y $h(q) = q'$. □

Definición 3.2 *Sea M un conjunto y p en M. Se dice que p es un punto final de M si para cada $\varepsilon > 0$ hay una ε-cadena que cubre a M tal que solamente el primer eslabón de la ε-cadena contiene a p.*

A continuación mostraremos algunos resultados preliminares para caracterizar al pseudoarco a través de puntos finales, con lo que demostraremos que todo punto en el pseudoarco es un punto final.

Teorema 3.2 *Para cada subconjunto propio R de un continuo M, hay un punto p en $M-R$ tal que la unión de todos los continuos que están en $M-\{p\}$ e intersectan a R es densa en M, [3, págs. 500-501].*

Demostración. Sean M un continuo y R un subconjunto propio de M. Sea N un subcontinuo de M tal que N es irreducible con respecto a R.

Primero supongamos que $M = N$, es decir, supongamos que M es irreducible con respecto a R. Sea $p \in M - R$. Supongamos que el teorema es falso, es decir, supongamos que que M contiene un subconjunto abierto $S \neq \emptyset$ tal que $S \cap H = \emptyset$, para todo subcontinuo H tal que $H \cap R \neq \emptyset$ y p no está en H. Como M es regular, existe un subconjunto abierto E de M tal que $\overline{E} \subset S$. Entonces $\overline{E} \cap H = \emptyset$ para todo continuo H tal que $H \cap R \neq \emptyset$ y p no está en H. Es decir, M contiene un subconjunto abierto E tal que cada subcontinuo de M que intersecte a R y a $\overline{E}$ al mismo tiempo contiene a p. Entonces cada componente de $M - E$ que contiene un punto de R también contiene a p, de donde tenemos que, la componente de $M - E$ que contiene a p, es un continuo propio de M que contiene a R, pero esto no puede ser ya que M es irreducible con respecto a R.

Ahora consideremos el caso en que $M \neq N$. Como M es métrico y compacto, entonces es segundo numerable y, por lo tanto, todos sus subespacios lo son. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable de $M - N$.
Construiremos ahora una sucesión $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos propios de M tales que N_{i+1} contenga un subconjunto abierto que, a su vez, contenga a $N_i \cup U_i$. Si un subconjunto abierto de un subcontinuo propio de M contiene a $N \cup U_1$, sea N_2 este subcontinuo, $N_2 = N$ en otro caso. Si un subconjunto abierto de un subcontinuo propio de M contiene a $N_2 \cup U_2$, sea N_3 este subcontinuo, $N_3 = N_2$ en otro caso. De forma similar obtenemos $N_4, N_5, \ldots$ Notemos que si W_i es un abierto de N_{i+1} que contiene a $N_i \cup U_i$, como se cumple que $W_i \subset W_j$ si $i \leq j$, entonces $(M - W_j) \subset (M - W_i)$. Entonces $\{M - W_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de cerrados con la propiedad de la intersección finita y, así, $\bigcap_{i=1}^{\infty}(M - W_i) \neq \emptyset$. Es decir, existe, por lo menos, un punto en $M - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. De esta forma, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ es densa en M, un punto de $M - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ es el punto requerido.

Supongamos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ no es densa en M. Entonces existe un entero positivo k tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$. Ya que, de lo contrario, $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ sería densa en M. En efecto, si E es un subconjunto abierto no vacío de $M - N$, entonces $U_j \subset E$ para alguna j y existe un continuo N_{j+1} tal que $U_j \cup N_j \subset N_{j+1}$. Se sigue de aquí que $(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) \cap E \neq \emptyset$. Sea $H = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$. Notemos que H es conexo, pues es unión de conexos con intersección no vacía., y H no pertenece a ningún subconjunto abierto de ningún subcontinuo propio de M.
Sean E_i la componente de $M - U_i$ que contiene a H y $F_i = \overline{M - E_i}$. Como $E_i \cap F_i$ tiene interior vacío, el Teorema de Baire nos asegura que existe $p \in M - H$ tal que p no se encuentra en $\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cap F_i)$.

Veremos ahora que $F_i \cup H$ es conexo. Supongamos que $F_i \cup H = X \cup Y$, con X y Y cerrados en $F_i \cup H$ (que como $F_i \cup H$ es cerrado en M también X y Y son cerrados en M), no vacíos tales que $X \cap Y = \emptyset$ y supongamos que $H \subset X$. Notamos que $H \subset (M - Y)$ y, además, $M - Y \subset X \cup E_i$. Ya que, si $x \in M - Y$ y $x \in F_i \cup H$, entonces $x \in X$, o si $x \in M - Y$ y x no está en $F_i \cup H$ entonces $x \in E_i$.
Como $H \subset M - Y \subset X \cup E_i \subset M$, bastará ver que $X \cup E_i$ es un subcontinuo propio de M, y así, H está contenido en un subconjunto abierto, $M - Y$, de un subcontinuo propio de M, $X \cup E_i$, lo cual contradice el hecho de que H no está contenido en ningún subconjunto abierto de ningún subcontinuo propio de M.

Veamos que $X \cup E_i$ es cerrado ya que X y E_i son cerrados. Para ver que $X \cup E_i$ es conexo notemos que $X = H \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha\right)$, donde C_α es una componente de F_i y $Y = \bigcup_{\beta \in J} C_\beta$, donde C_β es una componente de F_i. Por el Teorema 2.8, tenemos que $C_\alpha \cap (\overline{M - F_i}) \neq \emptyset$, pero $C_\alpha \cap (\overline{M - F_i}) = C_\alpha \cap \overline{M - (\overline{M - E_i})} = C_\alpha \cap \overline{int(M - (M - E_i))} = C_\alpha \cap \overline{int(E_i)} \subset C_\alpha \cap \overline{E_i} = C_\alpha \cap E_i$. Esto quiere decir que $C_\alpha \cap E_i \neq \emptyset$ para cada componente C_α de F_i que está en X y, como E_i es cerrado y conexo, entonces $X \cup E_i$ es conexo.

Ahora, para ver que $X \cup E_i$ es propio, sea $y \in Y$ y supongamos que $y \in E_i$. Como $y \in F_i$, tenemos que $y \in E_i \cap F_i \subset Fr(U_i)$, ya que si $y \in E_i \cap F_i$, $y \in Fr(E_i)$ y como $y \in Fr(E_i)$, entonces para todo abierto V de M tal que $y \in V$ se tiene que existen dos puntos $y_1, y_2 \in V$ tales que $y_1 \in V \cap E_i$ y $y_2 \in V \cap (M - E_i)$, pero esto último implica que y_1 no está en U_i y $y_2 \in U_i$, es decir, $y \in Fr(U_i)$. Como Y es abierto en $F_i \cup H$, entonces $Y = W \cap (F_i \cup H)$, con W un abierto en M. Para este abierto W, como Y no está contenido en H y $F_i \cap W \neq \emptyset$, entonces existe $w_1 \in (W \cap U_i) \cap F_i$. Entonces w_1 no se encuentra en E_i, pero $w_1 \in W$ y $w_1 \in F_i \cup H$, y como $Y = W \cap (F_i \cup H)$, entonces $w_1 \in Y$, es decir, w_1 no está en X y así $X \cup E_i$ es propio.

De lo anterior tenemos que $F_i \cup H$ es un subcontinuo de M. Definamos G_i como el continuo E_i o el continuo $F_i \cup H$ que no contiene a p. Ahora $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es densa en M. Ya que si U es abierto de M, primero supongamos que $U \subset N$, entonces $U \subset E_i$, lo que implica que $U \cap F_i = \emptyset$ y, como p no está en U, ya que $p \in M - N$, entonces tenemos que, en este caso, $G_i = E_i \cap U \neq \emptyset$. Ahora, si $U \cap N \neq \emptyset$ pero U no es un subconjunto de N entonces sea $w \in U - N$. De esta forma existe un número natural i tal que $w \in U_i \subset \overline{U_i} \subset (U - N)$. Como $E_i \cap F_i \subset Fr(U_i)$, entonces $E_i \cap U \neq \emptyset$ y $F_i \cap U \neq \emptyset$. Por último, si $U \cap H = \emptyset$, entonces existe un número natural i tal que $U_i \subset \overline{U_i} \subset U$ y, como $E_i \cap F_i \subset Fr(U_i)$, $E_i \cap U \neq \emptyset$ y $F_i \cap U \neq \emptyset$. Por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es densa en M y p no se encuentra en $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. □

Para demostrar el Teorema 3.3 utilizaremos el Lema de Zorn, para lo cual utilizaremos el concepto de cadena parcialmente ordenada de la teoría de conjuntos, enunciados a continuación.

Definición 3.3 *Una cadena en un conjunto parcialmente ordenado* $(X, \geq)$ *es un subconjunto* A *de* X *que satisface que para cualesquiera* $x, y \in A$ *se tiene que* $x \geq y$ *o* $y \geq x$*, es decir,* A *está totalmente ordenado por* $\geq$.

En el caso de conjuntos, la relación $(X, \supset)$ es un orden parcial, y para una colección de subconjuntos anidados, se tiene una cadena totalmente ordenada.

Lema 3.1 (Lema de Zorn) *Si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado y no vacío* (X, R) *tiene una cota inferior, entonces* X *contiene un elemento minimal.*

Teorema 3.3 *Si* $\mathcal{D}$ *es una cadena que cubre a un continuo* M *y* p *es un punto de* M *tal que cada subcontinuo* M' *no degenerado de* M *que contiene a* p *es irreducible de* p *a algún otro punto de* M'*, entonces hay una cadena* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots\}$ *que cubre a* M *tal que* $\mathcal{E}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{D}$ *y* $E_1 - \overline{E}_2$ *contiene a* p.

Demostración. Supongamos que el teorema es falso. Hay que ver entonces que existe un subcontinuo M' en M que contiene a p tal que M' es irreducible de p a algún otro punto de M' pero el teorema es falso para esta cadena dada $\mathcal{D}$. Por conveniencia supongamos que $M' = M$, pero como queremos que cualquier subcontinuo propio de M sí cumpla la conclusión del teorema consideremos la siguiente familia $\mathcal{F} = \{M' \subset M | p \in M', M' \text{ no satisface el teorema}\}$

y ordenemos a $\mathcal{F}$ por inclusión. Sea $\mathcal{C} = \{M'_j\}_{j\in J}$ tal que $\mathcal{C}$ está totalmente ordenada. Hay que ver que $\mathcal{C}$ está acotada inferiormente y, así, podemos utilizar el Lema de Zorn para ver que hay un elemento minimal. Afirmamos que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ es una cota inferior de $\mathcal{C}$ y que está en $\mathcal{F}$.

1. Notemos que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ es un subcontinuo ya que $\mathcal{C}$ está totalmente ordenada (Teorema 2.1)

2. Como $p \in M'_j$ para todo $j \in J$, entonces $p \in \bigcap_{j\in J} M'_j$

3. Vemos que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ no satisface la conclusión del teorema. Supongamos que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ sí satsface el teorema. Sea K un subconjunto numerable de J tal que M'_k converge a $\bigcap_{j\in J} M'_j$ con $k \in K$. Como estamos suponiendo que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ sí satisface la conclusión del teorema, entonces existe una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ tal que $\bigcap_{j\in J} M'_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} E'_i$, donde $E'_i = E_i \cap (\bigcap_{j\in J} M'_j)$ y E_i es abierto en M. Entonces existe k_0 tal que $\bigcap_{j\in J} M'_j \subset M'_{k_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, lo cual es una contradicción ya que M'_{k_0}no satisfacía la conclusión del teorema.

Entonces, aplicando el Lema de Zorn 3.1, a la familia $\mathcal{F}$ vemos que existe un elemento minimal en $\mathcal{F}$. Es decir, existe un elemento minimal M_0 tal que M_0 no satisface la conclusión del teorema. Podemos suponer entonces que $M = M_0$ y supongamos que M intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$. Entonces, como la composante de p es un conjunto denso en M (Teorema 2.9), M contiene un subcontinuo propio M'' que intersecta a cada eslabón de $\mathcal{D}$. Como M'' es un subconjunto propio de M, entonces existe una cadena $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_j\}$ que cubre a M'' tal que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{D}$ y $p \in F_1 - \overline{F_2}$ y ninguna cadena con menos eslabones tiene estas propiedades ya que el número de eslabones de la cadena $\mathcal{D}$ es una cota inferior para el número de eslabones del conjunto de cadenas que refinan a $\mathcal{D}$.
Entonces el último eslabón de $\mathcal{F}$ intersecta a $M'' \cap (D_1 \cup D_m)$, pues de otro modo, alguna cadena con menos elementos que $\mathcal{F}$ (con las propiedades requeridas) cubriría a M''. Supongamos que $(M'' \cap \mathcal{F}) \cap D_1 \neq \emptyset$ y N es un conjunto abierto tal que $N \cap M'' \neq \emptyset$ y $\overline{N} \subset (D_1 \cap F_j) - \{p\}$.
Como p satisface la condición de que cada subcontinuo M' que lo contiene es irreducible de p a algún otro punto de M', la componente de $M - N$ que contiene a p es un subconjunto de M'' y está cubierto por $\mathcal{F}$. Entonces existen dos conjuntos separados H y K tales que $M - N = H \cup K$, $p \in H$ y $H \subset \bigcup_{r=1}^{j} F_r$.
Como M es normal, entonces existen conjuntos abiertos ajenos O_H y O_K tales que $H \subset O_H$ y $K \subset O_K$. Sea $\mathcal{E} = \{O_H \cap F_1, O_H \cap F_2, \ldots, O_H \cap (F_{j-1} - \overline{N}), (D_1 - \overline{O_H}) \cup N, O_K \cap D_2, O_K \cap D_3, \ldots, O_K \cap D_m\}$. Entonces, la cadena $\mathcal{E}$

cubre a M, es un refinamiento de la cadena $\mathcal{D}$ y $p \in ((O_H \cap F_1) - (O_H \cap F_2))$, lo cual es una contradicción.La contradicción viene de suponer que el teorema es falso para M. $\square$

Teorema 3.4 *Sea M un continuo y p un punto en M, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) Cada subcontinuo no degenerado, H de M, que contiene a p es irreducible de p a algún otro punto de H.

(b) Si dos subcontinuos de M contienen a p, entonces uno está contenido en el otro.

Demostración. Veamos que (a) implica (b). Sean H y K subcontinuos de Mcon $p \in H \cap K$. Entonces $H \cup K$ es un continuo, ya que es unión de cerrados en un compacto, su intersección es no vacía y es conexo ya que H y K son conexos y tienen al punto p en común. Entonces, por hipótesis, para algún punto q en $H \cup K$, $H \cup K$ es irreducible de p a q. Luego, q se encuentra en H ó q está en K, supongamos que q está en H, entonces $\{p, q\} \subset H$, como $H \cup K$ es irreducible de p a q, entonces $H = H \cup K$, es decir, $K \subset H$. Análogamente, si suponemos que $q \in K$, se tiene que $H \subset K$. Por lo tanto (a) implica (b).
Ahora demostraremos la otra implicación. Sea M' subcontinuo no degenerado de M con p en M'. Por el Teorema 3.2, existe q en $M' - \{p\}$ tal que si $\mathcal{C}$ es la unión de todos los subcontinuos contenidos en $M' - \{q\}$ que intersectan a $\{p\}, \mathcal{C}$ es denso en M'. Entonces M' es irreducible de p a q. De no ser así, existe K subcontinuo propio de M' tal que $\{p, q\} \in K$. Entonces, por la densidad de $\mathcal{C}$, $M' - K$ es un abierto no vacío de M' contenido en $M' - \{q\}$. Entonces existe H subcontinuo de $M' - \{q\}$ que intersecta a $M' - K$ tal que p está en H, pero como q no está en H, $H \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq H$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto M' es irreducible de p a q. $\square$

Teorema 3.5 *Sea M un continuo encadenable y p en M. Entonces p es un punto final de M si y solo si p satisface las condiciones (a) ó (b) del Teorema 3.4.*

Demostración. Demostraremos que se satisface la condición (b) del Teorema. Sea p un punto final de M, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ que cubre a M, tal que $p \in D_1 - D_2$. Supongamos que H y K son subcontinuos tales que $p \in H \cap K$. Si $H \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq H$, existen $\varepsilon > 0$, $h \in H$ y $k \in K$ tales que $d(h, K) = \varepsilon$ y $d(k, H) = \varepsilon$. $H \cup K$ es un subcontinuo

de M que contiene a p. Sea D_j el último eslabón de la ε-cadena que intersecta a $H \cup K$. Si D_j tiene un punto de K entonces $D_1, \dots, D_j$ tienen puntos de K, ya que D_1 tiene a p que es un punto en K, entonces ningún punto de H dista más que ε de K, lo cual es una contradicción. Análogamente si D_j tiene un punto de H, ningún punto de K dista más que ε de K. Por lo tanto $K \subset H$ ó $H \subset K$.
Supongamos ahora que se satisface la condición (a) ó (b) del teorema anterior, en particular se satisface (a). Entonces por el Teorema 3.3, p es un punto final.
□

Usando la caracterización de pseudoarco como el continuo no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible, demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.6 *Cada continuo M homogéneo, no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible es homeomorfo a el pseudoarco.*

Demostración. Primero veamos que M tiene un punto final. Sea $\{\mathcal{D}_n\}$ una sucesión de $1/n$-cadenas que cubren a M y q_n un punto en un eslabón final de $\mathcal{D}_n$. Entonces $\{q_n\}$ tiene una subsucesión $\{q_{n_k}\}$ convergente a algún punto q. Además q tiene la propiedad de que para toda vecindad U de q, existe $\varepsilon > 0$ tal que hay una ε-cadena que cubre a M y uno de sus eslabones finales se queda contenido en U. Como M es homogéneo, cada punto de M tiene la propiedad de q.
Sean D_1 un eslabón final de una 1-cadena que cubre a M y p_1 que solamente se encuentra en el eslabón D_1. Ya que D_1 es abierto, entonces existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que la ε_2-cadena tiene un eslabón final D_2 que cumple que $\overline{D}_2 \subset D_1$, tomamos p_2 un punto que solamente se encuentra en el eslabón D_2. Continuamos con este proceso hasta obtener una sucesión tal que ε_n converge a cero y $p_n \in D_n$. Entonces $p = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n$ es un punto final. Como M es homogéneo, todo punto en M es un punto final.

Ahora veamos que M es hereditariamente indescomponible. Supongamos que no lo es, es decir, existe M' suncontinuo no degenerado de M tal que $M = H \cup K$, con H y K subcontinuos propios de M'. Sea $p \in H \cap K$, como M es homogeneo, p es un punto final de M pero por el teorema anterior tenemos que $H \subset K$ ó $K \subset H$, lo cual contradice que M' es descomponible. Por lo tanto M es hereditariamente indescomponible, y como por hipótesis es no degenerado y encadenable, M es homeomorfo a un pseudoarco. □

Teorema 3.7 *Sea X un continuo no degenerado y encadenable. Entonces X es un pseudoarco si y solo si cada punto de X es un punto final de X.*

Demostración. Supongamos que X es un pseudoarco, entonces X es no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible. Sea p en X. Supongamos que p no es un punto final. Entonces existen dos subcontinuos de X, H y K tales que $p \in H \cap K$, $H \not\subset K$ y $K \not\subset H$. Entonces $H \cup K$ es un subcontinuo descomponible contenido en X, lo cual es una contradiccón.

Ahora supongamos que cada punto de p es un punto final. Sea X' un subcontinuo de X tal que $X' = H \cup K$ con H y K subcontinuos de X'. Ya que $H \cap K$ es no vacío tomamos un punto $p \in H \cap K$, como p es punto final, por el Teorema 3.5, $H \subset K$ ó $K \subset H$, es decir, $K = X'$ o $H = X'$, por lo tanto X' es indescomponible. Por lo tanto X es hereditariamente indescomponible, y en consecuencia un pseudoarco. $\square$

Capítulo 4

El Pseudocírculo

En este capítulo, daremos un esbozo de la construcción de un continuo que es circularmente encadenable. Fue descrito en 1951 por R. H. Bing [2, pág. 48] y es conocido como el pseudocŕculo.

4.1. Construcción del Pseudocírculo

Definición 4.1 *Una cadena circular es una colección* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ *de abiertos* $D_1, \ldots, D_n$ *tales que* $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$ *ó* $i = 1$ *y* $j = n$*. Es decir, difiere de una cadena en el hecho de que el primer y el último eslabón se intersectan.*

Definición 4.2 *Sean* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$ *una sucesión de cadenas circulares en el plano tales que:*

1. *Cada eslabón de* $\mathcal{D}_i$ *es el interior de una bola de diámetro menor a* $1/i$*.*

2. *La cerradura de cada elemento de* $\mathcal{D}_{i+1}$ *se encuentra en un eslabón de* $\mathcal{D}_i$*.*

3. $\mathcal{D}_i^*$ *es homeomorfo al interior de un anillo, es decir, un conjunto homeomorfo al conjunto* $\{\ A = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < ||(x,y)|| < 2\}$*Si* E_i *es una subcadena propia de* $\mathcal{D}_i$ *y* $\mathcal{E}_{i+1}$ *es una subcadena de* $\mathcal{D}_{i+1}$ *contenida en* $\mathcal{E}_i$*, entonces* $\mathcal{E}_{i+1}$ *se tuerce en* $\mathcal{E}_i$*.*

El continuo $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_i^*$ *es el pseudocírculo.*

Veamos que para cada $\mathcal{D}_i$ existe $\mathcal{D}_{i+1}$ que cumple las condiciones requeridas.
Supongamos que la cadena circular $\mathcal{D}_i = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ satisface las condiciones anteriores. Consideremos una cadena $\mathcal{D}'_i = \{D'_1, D'_2, \ldots, D'_{3n}\}$ contenida en $\mathcal{D}_i$ que sigue el siguiente patrón: $D'_1, D'_{n+1}, D'_{2n+1}$ son eslabones de $\mathcal{D}_1$. D'_2, D'_{n+2}, D'_{3n} son eslabones de $\mathcal{D}_2$. $D'_3, D'_{n+3}, D'_{3n-1}$ son eslabones de $\mathcal{D}_3 \ldots D'_n, D'_{2n}, D'_{2n+1}$ son eslabones de $\mathcal{D}_n$. Es decir, $\mathcal{D}'_i$ recorre $\mathcal{D}_i$ dos veces en una dirección y una vez en la dirección contraria (Figura 4.1). Entonces la cadena circular $\mathcal{D}_{i+1}$ que satisface las condiciones requeridas, es la unión de dos cadenas, la primera de ellas se tuerce en $\mathcal{D}'(1, 2n+1)$ y la segunda se tuerce en $\mathcal{D}'(2n+1, 3n)$.

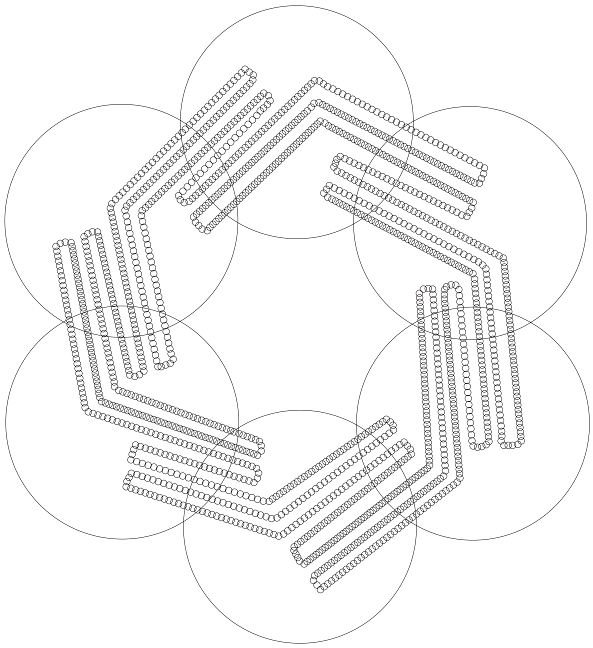


Figura 4.1: Construcción del pseudocírculo [5]

4.2. Características del Pseudocírculo

4. **Proposición 4.1** *El pseudocírculo separa al plano [2, pág. 48].*

Demostración. Sea C un pseudocírculo en el plano. Demostraremos que $\mathbb{R}^2 - C = U \cup V$, con U y V abiertos no vacíos, ajenos y conexos.
Como C es un pseudocírculo, existe $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \ldots$ una sucesión de cadenas circulares que cumplen los puntos (1) a (4) de la Definición 4.2. Por el punto

(3), para cada i, $\mathcal{D}_i^*$ es homeomorfo al interior de un anillo, entonces $\overline{\mathcal{D}}_i^*$ separa al plano en dos abiertos, U_i y V_i, no vacíos ajenos. Además, por el punto (4), $\mathbb{R}^2 - \mathcal{D}_i^* \subset \mathbb{R}^2 - \mathcal{D}_{i+1}^*$, entonces $\mathbb{R}^2 - \overline{\mathcal{D}}_i^* \subset \mathbb{R}^2 - \overline{\mathcal{D}}_{i+1}^*$. Así

$$U_i \cup V_i = \mathbb{R}^2 - \overline{\mathcal{D}}_i^* \subset \mathbb{R}^2 - \overline{\mathcal{D}}_{i+1}^* = U_{i+1} \cup V_{i+1},$$

es decir, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ son dos sucesiones crecientes de abiertos en $\mathbb{R}^2$. Sean $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Entonces U y V son dos abiertos en $\mathbb{R}^2$, son no vacíos ya que $U_1 \subset U$ y $V_1 \subset V$. Además U y V cumplen que

$$U \cup V = \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \cup V_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R}^2 - \overline{\mathcal{D}}_i^*) = \mathbb{R}^2 - \bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{\mathcal{D}}_i^* = \mathbb{R}^2 - \bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{D}_i^* = \mathbb{R}^2 - C$$

Ya sólo nos falta demostrar que U y V son ajenos. Supongamos que no es así. Sea p en $U \cap V$. Entonces $p \in \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ y $p \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, es decir, existen k_1 y k_2 naturales tales que $p \in U_{k_1}$ y $p \in V_{k_2}$. Como $U_i \subset U_{i+1}$ y $V_i \subset V_{i+1}$, $p \in U_i$ para toda $i \geq k_1$ y $p \in V_i$ para toda $i \geq k_2$. Si $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, tenemos que $p \in U_i \cap V_i$ para toda $i \geq k_0$, lo cual es una contradicción, pues U_i y V_i son ajenos. Por tanto $U \cap V = \emptyset$. Así queda demostrado que el pseudocírculo separa al plano. □

El pseudocírculo es el único continuo (salvo homeomorfismos) plano circularmente encadenable, no encadenable, hereditariamente indescomponible que no es homogéneo y separa al plano. Lawrence Fearnley (1969) [7, págs. 554-558] demostró que es un continuo no homogéneo.

Proposición 4.2 *Todo subcontinuo propio, no degenerado, del pseudocírculo C es un pseudoarco.*

Demostración. Sea C' subcontinuo propio no degenerado de C. Ya que $C' \neq C$ existe k_0 natural tal que C' es cubierto por una subcadena propia $\mathcal{E}_k$ de $\mathcal{D}_k$ para todo $k \geq k_0$. Entonces la sucesión $\mathcal{E}_{k_0}, \mathcal{E}_{k_0+1}, \mathcal{E}_{k_0+2}, \ldots$ es una sucesión de cadenas tales que $\mathcal{E}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{E}_i$ por (5) en la definición de pseudocírculo. La malla de $\mathcal{E}_i$ es menor a $1/i$ por (1) y $\mathcal{E}_{i+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{E}_i$ por (2) en la Definición 4.2. Por lo tanto $M' = \bigcap_{k \geq N} \mathcal{E}_k^*$ es un pseudoarco. □

Teorema 4.1 *El pseudocírculo C es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Ya que cada subcontinuo propio de C es un pseudoarco, el cual es indescomponible, basta demostrar que C es indescomponible. Supongamos que C es descomponible, por el Teorema 2.10, existe A subcontinuo de C con interior no vacío. Entonces para todo subcontinuo A' tal que $A \subset A' \subset C$, tenemos que $int(A') \neq \emptyset$. Así $A' \cap int(A) \subset A$ es abierto en A', es decir, $int_{A'}(A) \neq \emptyset$ pero, por la Proposición 4.2, A' es un pseudoarco, entonces $int_{A'}(A) = \emptyset$. Esto es una contradicción. Por lo tanto C es indescomponible. □

Definición 4.3 *Sean X un continuo, A y B dos subcontinuos no vacíos de X. Decimos que un subcontinuo C de X es irreducible de A a B siempre que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$ y ningún subcontinuo propio de C intersecta tanto a A como a B.*

Definición 4.4 *Sean K un subcontinuo de X, donde X es un continuo en $\mathbb{R}^2$. Decimos que K es accesible si existe un continuo L en $\mathbb{R}^2$ tal que $L \cap X = K$ y $L - K \neq \emptyset$. [9, pág 115]*
Decimos que un punto $p \in K$ es accesible desde el conjunto L si existe un continuo K tal que $p \in K \subset L \cup \{p\}$ y $K \neq \{p\}$ [10, pág 175].

Definición 4.5 *Sea X un espaci topológico. Un conjunto abierto y conexo es llamado un dominio. Si S es un subconjunto cerrado y propio de X entonces a cada componente de $X - S$ se le llama un dominio complementario de S.*

Proposición 4.3 *Sea W un continuo plano indescomponible. Entonces contiene un subcontinuo H no degenerado tal que ningún punto de H es accesible desde el complemento de W [2, pág. 49].*

Demostración. Sea W un continuo plano indescomponible. Si $d = diam(W)$, entonces existen $a_1, a_2 \in W$ tales que $d(a_1, a_2) = d$. Tomamos dos rectas paralelas L_1 y L_2 perpendiculares al segmento de recta que une a_1 con a_2 tales que $\{a_1, a_2\} \cap L_1 = \emptyset$ y $\{a_1, a_2\} \cap L_2 = \emptyset$.
Veamos que L_1, L_2 intersectan a todas las componentes de W. Supongamos que existe κ_x tal que $\kappa_x \cap L_i = \emptyset$, con $i \in \{1, 2\}$. Entonces $W - L_i$ es la unión de U, V abiertos en W tales que $U \cap V = \emptyset$. Po el Teorema 2.9, κ_x es densa, es decir, $\kappa_x \cap U \neq \emptyset$ y $\kappa_x \cap V \neq \emptyset$. Además κ_x es conexo, por lo que se cumple $\kappa_x = (\kappa_x \cap U) \cup (\kappa_x \cap V)$. Lo cual es una contradiccón. Por lo tanto $\kappa_x \cap L_i \neq \emptyset$ para todo $x \in W$ y para $i \in \{1, 2\}$.

Entonces por cada composante podemos elegir un punto en x en $L_1 \cap \kappa_x$ y definimos el conjunto

$$\mathcal{G}_x = \{G : G \in \kappa_x, x \in L_1 \cap \kappa_x, \kappa_x \cap L_2 \neq \emptyset\}.$$

Sea $\mathcal{C}_x = \{G_j^x : G_j^x \in \mathcal{G}_x\}_{j \in J}$ una cadena totalmente ordenada (Definición 3.3). Afirmamos que $\bigcap_{j \in J} G_j^x$ es una cota inferior.
Notemos que $\bigcap_{j \in J} G_j^x$ es un continuo, ya que es la intersección de una sucesión de continuos ordenados por inclusión. Además $x \in G_j^x$ para cada $j \in J$ por lo que $x \in \bigcap_{j \in J} G_j^x$. Y por lo tanto $\bigcap_{j \in J} G_j^x \in \kappa_x$ ya que $x \bigcap_{j \in J} G_j^x$ que es continuo. Por lo que $\bigcap_{j \in J} G_j^x$ es una cota inferior, así, utilizando el Lema de Zorn 3.1, tenemos que para cada x existe G_x un elemento minimal. Entonces $\{G_x : x \in L_1 \cap W\}$ es una colección no numerable de subcontinuos irreducibles

de x a L_2.
Ahora definimos el conjunto,

$$\mathcal{G} = \{G'_x : G'_x \subset G_x, G'_x \text{ es irreducible de } L_1 \text{ a } L_2\}.$$

Sea $\mathcal{C}'_x = \{G'^x_j : G^x_j \subset G_x\}_{j\in J}$ una cadena totalmente ordenada, entonces $\cap_{j\in J} G'^x_j$ es una cota inferior. Esto se cumple ya que para cada x, existe $l_x \in L_2$ tal que G_x es irreducible de x a l_x, es decir $l_2 \in G'^x_j$ para toda $j \in J$. Utilizando nuevamente el Lema de Zorn 3.1, tenemos que $\{G'_x : G'_x \subset G_x, G'_x \text{ es irreducible de } L_1 \text{ a } L_2\}$ es una colección no numerable de subcontinuos irreducibles de L_1 a L_2.

Sea $K = L_1 \cup L_2 \cup \overline{\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G}$. Si D es un dominio complementario de K entre L_1 y L_2 su cerradura no intersecta a tres elementos de $\mathcal{G}$ ya que D es conexo y los elementos de $\mathcal{G}$ son irreducibles entre L_1 y L_2. Entonces algún elemento G no es accesible desde ningún dominio complementario de K entre L_1 y L_2, ya que por la Proposición 1.6, existe a lo más una cantidad numerable de conjuntos abiertos ajenos, y la cardinalidad de $\mathcal{G}$ es la de los reales, lo cual, aunado a que cada dominio complementario intersecta a lo más a dos elementos de $\mathcal{G}$, nos dice que algún G no es accesible. Si H es un subcontinuo de este continuo G que no intersecta a L_1 ni a L_2, ningún punto de H es accesible desde el complemento de W. □

Proposición 4.4 *Si W es un continuo plano hereditariamente indescomponible, entonces existe un punto p de W tal que si W' es un subcontinuo no degenerado de W que contiene a p, entonces p no es accesible desde el complemento de W'.*

Demostración. Sea $W_1, W_2, \ldots$ una sucesión de continuos tales que W_{i+1} es un subcontinuo de W_i que no es accesible desde el complemento de W_i y la $malla(W_i) < 1/i$, los cuales existen por la Proposición 4.3. Entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ es un punto p que no es accesible desde el complemento de ningún subcontinuo propio de W que lo contiene.

Construiremos ahora un subcontinuo hereditariamente indescomponible con la propiedad de que sólo una de sus composantes contiene un subcontinuo homeomorfo al pseudocírculo. [2, págs. 49-50]
Sean P un pseudoarco, C un pseudocírculo y C_o el interior de C. Como P es hereditariamente indescomponible, por el Teorema 4.4, existe un punto p en P que no es accesible desde el complemento de ningún subcontinuo no degenerado de P que lo contenga. R. L. Moore demuestra en [12], que existe una función continua T del plano en el mismo tal que $T^{-1}(p) = C \cup C_o$ y $T^{-1}(q)$

es un punto, para todo q distinto de p. Mostraremos que $X = T^{-1}(p) - C_o$ es hereditariamente indescomponible.
C no es homeomorfo a X ya que C es irreducible con respecto a la propiedad de separar el plano, sin embargo, si X' es un subcontinuo de P que contiene a p entonces $T^{-1}(X') - C_o$ separa al plano y contiene al subcontinuo $T^{-1}(p) - C_o$ que también separa al plano. Si W es un subcontinuo de X que intersecta a C y contiene un punto de $X - C$, C esta contenido en W. Supongamos que no es así, entonces existe y en $C - W$. Como la distancia de W a y es positiva, existe U abierto que contiene a y y no intersecta a W, entonces hay un continuo L no degenerado contenido en U tal que $y \in L$. Pero $T(L) \cup T(W)$ sería un continuo que contiene a p tal que $(T(L) \cup T(W)) \cap T(W) = \{p\}$ y $(T(L) \cup T(W)) - T(W) \neq \emptyset$, lo cual contradice que p es un punto inaccesible desde el complemento de $T(W)$.
Con las propiedades anteriores probaremos que X en efecto es hereditariamente indescomponible. Sea X' subcontinuo de X descomponible en $X' = A \cup B$. Ya que C es hereditariamente indescomponible, X' no es un subconjunto de C. Como $X' = A \cup B$ y T es continua, entonces $T(X') = T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$ son subcontinuos de P, pero P es hereditarimente indescomponible, entonces $T(A)$ ó $T(B)$ es igual a $T(X')$. Supongamos que $T(X') = T(A)$. Entonces $A = X'$, ya que T es uno a uno en el exterior de C y A contiene a C si lo intersecta. $\square$

Capítulo 5

Densidad de los continuos Indescomponibles

En este capítulo hablaremos de la densidad de los continuos indescomponibles en el hiperespacio de los subcontinuos del cubo de Hilbert. Mostraremos que el conjunto de Pseudoarcos es denso y de segunda categoría. Utilizando el Teorema de Categorías de Baire, mostraremos que el conjunto de continuos que no son homeomorfos al Pseudoarco es de primera categoría.

Teorema 5.1 *Sea X un espacio de segunda categoría y A un subconjunto G_δ y denso de X . Entonces $X - A$ es de primera categoría.*

Demostración.
Ya que A es un conjunto G_δ se puede expresar como intersección numerable de abiertos, digamos $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces cada $X - A_n$ es cerrado. Ya que A es denso en X y $A \subset A_n$ para cada n, A_n es denso en X. Para demostrar que $X - A_n$ es denso en ninguna parte en X, debemos mostrar que $X - A_n \subset \overline{X - (X - A_n)}$. Notemos que $\overline{X - (X - A_n)} = \overline{A_n} = X$, por lo que se cumple que $X - A_n \subset \overline{X - (X - A_n)} = X$. Por tanto $X - A_n$ es denso en ninguna parte en X. Entonces $X - A = X - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X - A_n$. Es decir, $X - A$ se puede expresar como unión numerable de densos en ninguna parte. Por lo tanto $X - A$ es de primera categoría.

Definición 5.1 *Un cubo de Hilbert es un espacio homeomorfo a $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$ con la topología producto, donde cada $I_i = [0, 1]$.*

Utilizando el resultado del Teorema 5.1, mostraremos que el conjunto de continuos homeomorfos al Pseudoarco es denso y G_δ en el hiperespacio de subcontinuos del cubo de Hilbert. Para ello, primero mostraremos que es cierto para continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles.

Teorema 5.2 *Sea M una n-celda, $n \geq 2$, ó un cubo de Hilbert, y denotemos por d a una métrica para M. Sea*

$$\mathcal{L} = \{X \in C(M) : X \text{ es un continuo indescomponible no degenerado}\}.$$

Entonces $\mathcal{L}$ es un conjunto G_δ denso en $C(M)$ con la métrica de Hausdorff.

Demostración. Veamos que $\mathcal{L}$ es un G_δ . Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n = \{X \in C(M) : X = A \cup B; A, B & \text{ subcontinuos de } X \text{ tales que} \\ A \not\subseteq N_d(B, 1/n) \text{ y } & B \not\subseteq N_d(A, 1/n)\}. \end{aligned}$$

Demostraremos que $\mathcal{C}_n$ es cerrado y $\mathcal{L} = \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Sea $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_n$ convergente a X. Nos basta demostrar que $X \in \mathcal{C}_n$. Para cada k en los naturales tenemos que $X_k = A_k \cup B_k$, donde A_k, B_k son subcontinuos de X_k. Como $C(M)$ es compacto, existen subsucesiones convergentes $\{A_{k_l}\}$ y $\{B_{k_l}\}$ tales que

$$X = \lim_{l \to \infty} X_{k_l} = \lim_{l \to \infty} A_{k_l} \cup B_{k_l} = \lim_{l \to \infty} A_{k_l} \cup \lim_{l \to \infty} B_{k_l} = A \cup B.$$

Por lo tanto, X se puede descomponer en los subcontinuos A y B.
Demostremos ahora que $A \not\subseteq N_d(B, 1/n)$ y $B \not\subseteq N_d(A, 1/n)$.
Supongamos que $A \subset N_d(B, 1/n)$. Sea $\delta > 0$. Como $\{A_{k_l}\}$ converge a A y $\{B_{k_l}\}$ converge a B. Existe k_0 natural, tal que $H_d(A_{k_0}, A) < \delta$ y $H_d(B_{k_0}, B) < \delta$. Entonces existen $x \in A_{k_0}$, $a \in A$, $y \in B_{k_0}$ y $b \in B$ tales que $d(x, a) < \delta$ y $d(y, b) < \delta$. Así tenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < 1/n + 2\delta$$

para todo $\delta > 0$. Lo que implica que $A_{k_0} \subset N_d(B_{k_0}, \delta)$, lo cual es una contradicción. Análogamente obtenemos que $B_{k_0} \subset N_d(A_{k_0}, \delta)$. Por lo tanto $\mathcal{C}_n$ es cerrado.

Demostremos ahora que $\mathcal{L} = \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces X es indescomponible, es decir, no se puede expresar como unión de dos subcontinuos propios, por lo tanto X no pertenece a ningún $\mathcal{C}_n$. Así $X \in \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Ahora, sea $X \in \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$. Supongamos que X no se encuentra en $\mathcal{L}$, entonces $X = A \cup B$, con A, B subcontinuos propios de X. Sean $a \in$

$A - B, b \in B - A$ y $\delta = min\{d(a,B), d(b,A)\}$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \delta$. Entonces $a \notin N_d(B, 1/n_0)$ y $b \notin N_d(A, 1/n_0)$. Es decir, $X \in C_{n_0}$, por lo que $X \notin \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$. Por lo tanto $X \in \mathcal{L}$.
Por lo tanto $\mathcal{L}$ es un G_δ.

Ahora demostraremos que $\mathcal{L}$ es denso, para ello utilizaremos el pseudoarco, que como ya vimos, es indescomponible.
Sean $\mathcal{U}$ abierto no vacío de $C(M)$ y $A \in C(M)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Como ya vimos, existen $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X, tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es un abierto básico contenido en $\mathcal{U}$ que contiene a A. Entonces $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una cubierta para A, ya que por definición $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$. Entonces cada U_i se intersecta con al menos un U_j, para $j \neq i$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Sea k tal que $malla(\mathcal{U}) > 1/k$, entonces podemos construir una sucesión de cadenas $\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_{k+1}, \ldots$ que empiezan en U_1, terminan en U_n e intersectan a cada U_i, tales que $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{D}_i$ y la malla de $\mathcal{D}_i$ es $\frac{1}{i}$. Haciendo $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$, tenemos que $P \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ ya que intersecta a cada U_i y se encuentra contenido en su unión. Por lo tanto $P \in \mathcal{U}$, es decir, los continuos indescomponibles (y en particular los pseudoarcos) son densos en $C(M)$. $\square$

Teorema 5.3 *Sea M una n-celda, $n \geq 2$, ó un cubo de Hilbert, y denotemos por d a una métrica para M. Sea*

$$\mathcal{L} = \{X \in C(M) : X \text{ es un continuo hereditariamente indescomponible no degenerado}\}.$$

Entonces $\mathcal{L}$ es un conjunto G_δ denso en $C(M)$ con la métrica de Hausdorff.

Demostración. En el Teorema 5.2 demostramos que el conjunto de pseudoarcos es denso en $C(M)$ y el pseudoarco es un continuo hereditariamentre indescomponible, por lo tanto basta demostrar que $\mathcal{L}$ es un G_δ . Sea

$$\mathcal{C}_n = \{X \in C(M) : \text{ existe } X' \subset X, X' = A \cup B; A, B \text{ subcontinuos de } X' \text{ tales que } A \nsubseteq N_d(B, 1/n) \text{ y } B \nsubseteq N_d(A, 1/n)\}$$

Similar al Teorema 5.2, demostraremos que $\mathcal{C}_n$ es cerrado y $\mathcal{L} = \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Sea $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_n$ convergente a X. Para cada k natural existe X'_k descomponible en $A_k \cup B_k$ subcontinuos. Como $\{X'_k\}, \{A_k\}$ y $\{B_k\}$ son sucesiones en $C(M)$, existe una subsucesión convergente tal que:

$$X' = \lim_{l \to \infty} X'_{k_l} = \lim_{l \to \infty} A_{k_l} \cup B_{k_l} = \lim_{l \to \infty} A_{k_l} \cup \lim_{l \to \infty} B_{k_l} = A \cup B$$

Además el hecho de que $A \nsubseteq N_d(B, 1/n)$ y $B \nsubseteq N_d(A, 1/n)$ se demuestra igual que en el Teorema 5.2. Por tanto X está en $\mathcal{C}_n$, es decir, $\mathcal{C}_n$ es cerrado.
Por último demostraremos que $\mathcal{L} = \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces X es hereditariamente indescomponible, es decir, ningún subcontinuo propio X' de X se puede expresar como unión de dos subcontinuos propios de X', por lo tanto X no pertenece a ningún $\mathcal{C}_n$. Así $X \in \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$.
Ahora, sea $X \in \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$. Supongamos que X no se encuentra en $\mathcal{L}$, entonces existe X' subcontinuo propio de X tal que $X' = A \cup B$. Sean $a \in A - B, b \in B - A$ y $\delta = min\{d(a, B), d(b, A)\}$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \delta$. Entonces $a \notin N_d(B, 1/n_0)$ y $b \notin N_d(A, 1/n_0)$. Es decir, $X \in C_{n_0}$, por lo que $X \notin \cap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{C}_n$. Por lo tanto $X \in \mathcal{L}$.
Por lo tanto $\mathcal{L}$ es un G_δ. $\square$

Teorema 5.4 *Sea M una n-celda, $n \geq 2$, ó un cubo de Hilbert, y denotemos por d a una métrica para M. Sea*

$$\mathcal{P} = \{P \in C(M) : P \text{ es un pseudoarco}\}.$$

Entonces $\mathcal{P}$ es un conjunto G_δ denso en $C(M)$ con la métrica de Hausdorff.

Demostración. Por lo visto anteriormente, basta demostrar que $\mathcal{P}$ es un G_δ. Consideremos los siguiente conjuntos:

$$\mathcal{F}_n = \{X \in C(M) : X \text{ no puede ser cubierto por una } 1/n - \text{cadena}\}.$$

$$\mathcal{G}_n = \{X \in C(M) : \text{ existe } X' \subset X, X' = A \cup B; A, B \text{ subcontinuos de } X'. \\ \text{tales que } A \nsubseteq N_d(B, 1/n) \text{ y } B \nsubseteq N_d(A, 1/n)\ \}.$$

$$\mathcal{H} = \{\{x\} \in C(M) : x \in M\}$$

Veamos que cada conjunto es cerrado. Sea $\{F_k\}$ una sucesión en $\mathcal{F}_n$ convergente a F. Si F no se encuentra en $\mathcal{F}_n$ entonces F puede ser cubierto por una $1/n$-cadena, pero la unión de los eslabones de la $1/n$-cadena es un abierto U en M, entonces $\langle U \rangle$ es un abierto en $C(M)$ que contiene a F. Ya que F_k converge a F, existe k_0 a partir de la cual $F_k \in \langle U \rangle$ si $k \geq k_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}_n$ es cerrado. El hecho de que $\mathcal{G}_n$ es cerrado ya se demostró en el teorema anterior. Por último para ver que $\mathcal{H}$ es

cerrado, notemos que si $\{x_k\}$ es una sucesión convergente a X, entonces X es un singulete. De no ser así, existirían y_1, y_2 puntos diferentes en X, como M es métrico existen U y V abiertos que separan a y_1 y y_2, respectivamente. Entonces $\langle U\rangle, \langle V\rangle$ son abiertos en $C(M)$ no vacíos y disjuntos con puntos de convergencia, pero la sucesión consta de singuletes, entonces no se puede quedar contenida en ambos abiertos. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es cerrado.
Por último veamos que

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{F}_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{G}_n\right) \cap (C(M) - \mathcal{H}).$$

Notemos que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{F}_n)$ es el conjunto de los continuos encadenables. Y como vimos en el teorema anterior $(\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{G}_n)$ es el conjunto de los continuos hereditariamente indescomponibles.
Por lo tanto $(\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{F}_n) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} C(M) - \mathcal{G}_n) \cap (C(M) - \mathcal{H})$ es el conjunto de los continuos encadenables hereditariamente indescomponibles no degenerados, que por el Teorema 3.6 , es justamente el conjunto de pseudoarcos $\mathcal{P}$. □

Utilizando los resultados de los Teoremas 5.1, 5, obtenemos que el conjunto de Pseudoarcos es denso de segunda catgería, lo que nos dicen que los continuos indescomponibles no sólo no son ejemplos raros de continuos, sino que son *la gran mayoría*. Y entre ellos mismos los que conforman el *grueso* son los pseudoarcos, formando los demás un conjunto *flaco* en $C(M)$.

Bibliografía

[1] R. H. Bing. “A homogeneous indecomposable plane continuum”. En: *Duke Mathematical Journal* 15.3 (1948), págs. 729 -742.

[2] R. H. Bing. “Concerning hereditarily indecomposable continua.” En: *Pacific Journal of Mathematics* 1.1 (1951), págs. 43-51.

[3] R. H. Bing. “Some Characterizations of Arcs and Simple Closed Curves.” En: *American Journal of Mathematics* 70.3 (1948), págs. 497-506.

[4] R. H. Bing y col. *The Collected Papers of R. H. Bing*. The Collected Papers of R.H. Bing v. 1-2. American Mathematical Society, 1988.

[5] Janusz J. Charatonik, Pawel Krupski y Pavel Pyrih. *Examples in Continuum Theory*. 2001. URL: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/e2001v2/c/ect/node108.html` (visitado 05-08-2023).

[6] Janusz J. Charatonik, Pawel Krupski y Pavel Pyrih. *Pseudo-arc*. 2001. URL: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/e/e2001v2/c/ect/node104.html`.

[7] Lawrence Fearnley. “The Pseudo-Circle is not homogeneous”. En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 75.3 (1969), págs. 554 -558.

[8] D. Hinrichsen. *Topología general*. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[9] F. L. Jones. *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*. Aportaciones Matemáticas. Serie textos. Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[10] K. Kuratowski. *Topology, Volume II*. Academic Press, 1968.

[11] E.E. Moise. “An Indecomposable Plane Continuum which is homeomorphic to each of its non degenerate sub continua”. En: Trans. American Mathematical Society, 1948, págs. 581-594.

[12] R. L. Moore. *Concerning Upper Semi-continuous Collections of Continua*. American Mathematical Society, 1925.

[13] S. Nadler. *Continuum Theory: An Introduction*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1992.

[14] Escobedo Raúl, Macías Sergio y Méndez Héctor. *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[15] G. Salicrup, J. Rosenblueth y C. Prieto. *Introducción a la topología*. Aportaciones Matemáticas: Textos. Sociedad Matemática Mexicana, 1993.