UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una mirada al cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Alonso Rizo González

TUTOR

M. en C. Raúl Rodríguez Barrrera

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2024

1. Datos del alumno
Rizo
González
Alonso
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
418003963

2. Datos del tutor
M. en C.
Raúl
Rodríguez
Barrera

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Francisco Javier
Torres
Ayala

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Oscar Alberto
Garrido
Jiménez

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Pavel
Ramos
Martínez

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Jonathan Giovanni
Gil
Juárez

7. Datos del trabajo escrito
Una mirada al cálculo funcional
holomorfo de Riesz-Dunford
80 p
2023

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y a mi hermano, por su apoyo a lo largo de mi carrera. A mi padre por ser un buen ejemplo de trabajo y dedicación constante en mi vida, a mi madre por su presencia y su apoyo en los momentos más difíciles y a mi hermano, por recordarme que cualquier logro es mejor cuando se tiene con quien compartirlo.

También quiero agradecer a mi asesor y buen amigo el M. en C. Raúl Rodríguez Barrera por su apoyo, confianza y paciencia en la elaboración de esta tesis, la cual debe su forma y contenido principalmente a sus ideas y a su atenta dirección. Aún más, porque mi carrera y la de muchos de sus alumnos, congregados en la (bien) llamada "oficina", se han enriquecido de su atención y calidad humana.

Finalmente, agradezco a los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM por su calidad en la docencia, y a los sinodales Francisco Javier Torres Ayala, Oscar Alberto Garrido Jiménez, Pavel Ramos Martínez, y Jonathan Giovanni Gil Juárez por su tiempo y sus valiosos comentarios.

Índice general

Introducción

Dado un operador T lineal y acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una función holomorfa f definida en una vecindad del espectro de T, el operador $f(T)$ se define mediante la integral de Riemann-Stieltjes, sobre el álgebra $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, de la función $f(\lambda)(\lambda - T)^{-1}$. Dicha integral está basada en la fórmula integral de Cauchy. El mapeo $f \mapsto f(T)$ es un homomorfismo continuo entre el álgebra de funciones holomorfas sobre cualquier abierto que contenga al espectro de T y un álgebra de operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{H}$, que además satisface otras propiedades que veremos en el último capítulo de esta tesis.

El primero en desarrollar estas ideas fue el matemático húngaro F. Riesz (1880-1956), sin embargo, las aportaciones del matemático inglés N. Dunford (1906-1986) complementaron este trabajo. En particular, Dunford fue el primero en demostrar el teorema del mapeo espectral. Por estas razones, el mapeo anterior conocido en la actualidad como "cálculo funcional" es llamado por algunos autores como "cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford".

El objetivo de esta tesis es desarrollar este cálculo funcional. Con esta finalidad, presentaremos en el primer capítulo una extensión de algunos resultados clásicos del análisis complejo a funciones que toman valores en espacios de Banach. En particular, pondremos especial atención en algunos resultados análogos a la fórmula integral de Cauchy.

En el segundo capítulo demostraremos algunos de los resultados básicos de la teoría de las álgebras C^*. En particular, nos interesa probar el teorema de Gelfand-Naimark para establecer un isomorfismo continuo entre la álgebra C^* generada por un operador normal y acotado T, y el álgebra de funciones continuas sobre el espectro de T, lo que en este caso nos permitirá dar sentido a la expresión $f(T)$.

En el último capítulo estudiaremos a detalle este isomorfismo, llamado "cálculo funcional continuo", así como algunas aplicaciones dentro de la teoría de operadores. Finalmente, veremos el cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford, algunas aplicaciones y probaremos que, en efecto, extiende al cálculo funcional continuo.

Capítulo 1

Análisis complejo en espacios de Banach

Durante la primera mitad del siglo XIX, el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), desarrolló de forma rigurosa los fundamentos del cálculo de funciones de variable compleja y, con esto, sentó las bases para el desarrollo de lo que en la actualidad conocemos como análisis complejo.

Los resultados y técnicas del análisis complejo, como los teoremas de Cauchy, la teoría de residuos, las series de potencias, etc., siguen siendo objeto de estudio e investigación. Además, esta es una rama de las matemáticas que tiene aplicaciones en diversas áreas, como son la teoría analítica de números, la física teórica, la geometría hiperbólica, entre otras.

A lo largo de este trabajo, $\mathcal{X}$ denotará un $\mathbb{C}$-espacio de Banach, $\mathcal{D}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y dado un conjunto A, entenderemos por $\mathscr{C}(A, \mathcal{X})$ a las funciones continuas de A en $\mathcal{X}$ y por $\mathscr{B}(A, \mathcal{X})$ a las funciones lineales y acotadas definidas en A y que toman valores en $\mathcal{X}$, respectivamente. Finalmente, denotaremos por $\mathcal{X}^*$ al espacio dual de $\mathcal{X}$, dado por $\mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, el cual es un espacio de Banach con la norma dada por $\|\ell\| := \sup\{|\ell(x)| : x \in \mathcal{X}, \|x\| \leq 1\}$. A los elementos de $\mathcal{X}^*$ se les llama funcionales.

1.1. Funciones holomorfas

Uno de los conceptos fundamentales dentro del análisis complejo es el de función holomorfa. A continuación definimos un concepto análogo para funciones que toman valores en espacios de Banach.

Definición 1.1. *Sea* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *y* $z_0 \in \mathcal{D}$.

a) Decimos que f *es holomorfa en* z_0 *si existe (respecto a la norma de* $\mathcal{X}$*) el siguiente límite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En tal caso denotaremos al valor del límite por $f'(z_0)$.

b) Decimos que f *es débilmente holomorfa en* z_0 *si para cada* $\ell \in \mathcal{X}^*$ *existe el siguiente límite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ell(f(z)) - \ell(f(z_0))}{z - z_0}.$$

De manera equivalente, f *es débilmente holomorfa en* z_0 *si para cada* $\ell \in \mathcal{X}^*$*, la función* $F_\ell : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *dada por* $F_\ell(z) = \ell(f(z))$ *es holomorfa en el sentido usual en* z_0.

Definición 1.2. *Dada una función* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *y* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$*, decimos que* f *es holomorfa en* $\mathcal{B}$ *si para cada* $z_0 \in \mathcal{B}$*,* f *es holomorfa en* z_0.

Antes de demostrar nuestro primer teorema, haremos uso del principio de acotación uniforme, también llamado teorema de Banach-Steinhaus, que se puede encontrar con una demostración en [7], p. 95.

Teorema 1.1 (Banach-Steinhaus). *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach y* $\mathcal{Y}$ *un espacio normado. Si* $\mathcal{F} \subset \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es tal que para cada* $x \in \mathcal{X}$*, se satisface* $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$*, entonces* $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.

El teorema que presentamos a continuación será la base para extender algunas nociones del análisis complejo.

Teorema 1.2. *Sea* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ *una función. Entonces,* f *es holomorfa en* $\mathcal{D}$ *si y sólo si* f *es débilmente holomorfa en* $\mathcal{D}$.

Demostración. Primero, supongamos que f es holomorfa en $\mathcal{D}$. Sean $\ell \in \mathcal{X}^*$ y $z_0 \in \mathcal{D}$ arbitrario. Veamos que $F_\ell = \ell \circ f$ es holomorfa en z_0.

Si $\|\ell\| = 0$ entonces ℓ es la funcional lineal constante 0 y para cada $z \in \mathcal{D}$, tenemos $F_\ell(z) = \ell(f(z)) = 0$, por lo que F_ℓ es holomorfa.

Si $\|\ell\| \neq 0$ y $\varepsilon > 0$, como f es holomorfa en z_0, para el número positivo $\dfrac{\varepsilon}{2||\ell||}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2||\ell||}.$$

Para todo $z \in \mathcal{D}$ con $|z - z_0| < \delta$. Así, para todo $z \in B_\delta(z_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ell(f(z)) - \ell(f(z_0))}{z - z_0} - \ell(f'(z_0)) \right| &= \left| \ell\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \right| \\ &\leq \|\ell\| \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es débilmente holomorfa en $\mathcal{D}$.

Ahora, supongamos que f es débilmente holomorfa en $\mathcal{D}$ y sea $z_0 \in \mathcal{D}$. Mostraremos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = x,$$

para algún $x \in \mathcal{X}$.

Sea $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ y $\Gamma = \gamma([0,1])$ y sean $z, z' \in \mathbb{C}$ en el interior de Γ.

Luego, para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$,

$$\begin{aligned} \ell\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} \right) &= \frac{F_\ell(z) - F_\ell(z_0)}{z - z_0} - \frac{F_\ell(z') - F_\ell(z_0)}{z' - z_0} \\ &= \frac{1}{z - z_0}(F_\ell(z) - F_\ell(z_0)) - \frac{1}{z' - z_0}(F_\ell(z') - F_\ell(z_0)). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a $F_\ell(z)$, $F_\ell(z')$ y $F_\ell(z_0)$, la expresión anterior se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) - \frac{1}{z'-z_0}\left(\frac{1}{\zeta - z'} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)\right] F_\ell(\zeta)d\zeta \\
= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z')(\zeta - z_0)}\right] \ell(f(\zeta))d\zeta \\
= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z-z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')(\zeta - z_0)}\ell(f(\zeta))d\zeta.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\ell\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(z')-f(z_0)}{z'-z_0}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z-z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')(\zeta - z_0)}\ell(f(\zeta))d\zeta. \tag{1.1}$$

Ahora, notemos que $f(\zeta)$ es la funcional en $(\mathcal{X}^*)^*$ que mapea $\ell \in \mathcal{X}^*$ a $\ell(f(\zeta)) \in \mathbb{C}$. A esta funcional la denotaremos $\widehat{f(\zeta)}$. Es decir, $\widehat{f(\zeta)} : \mathcal{X}^* \to \mathbb{C}$, dada por $\widehat{f(\zeta)}(\ell) := \ell(f(\zeta))$. Como F_ℓ es holomorfa, es continua, y como Γ es compacto, la imagen $F_\ell(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y entonces existe C_ℓ tal que, para cada $\zeta \in \Gamma$, $|\ell(f(\zeta))| \leq C_\ell$.

De aquí, se sigue que la familia de funcionales $\mathcal{F} = \{\, \widehat{f(\zeta)} \mid \zeta \in \Gamma \,\} \subset (\mathcal{X}^*)^*$ es acotada puntualmente; es decir que para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$ se tiene

$$\sup_{\widehat{f(\zeta)} \in \mathcal{F}} |\widehat{f(\zeta)}(\ell)| = \sup_{\zeta\in\Gamma} |\ell(f(\zeta))| \leq C_\ell < \infty.$$

Así, debido a que $(\mathcal{X}^*)^*$ es un espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus existe $C < \infty$ tal que

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} \|\widehat{f(\zeta)}\|_{(\mathcal{X}^*)^*} \leq C.$$

Por lo tanto

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} |\ell(f(\zeta))| = \sup_{\zeta\in\Gamma} |\widehat{f(\zeta)}(\ell)| \leq \sup_{\zeta\in\Gamma} \|f(\zeta)\|_{(\mathcal{X}^*)^*} \|\ell\|_{\mathcal{X}^*} \leq C\|\ell\|. \tag{1.2}$$

Por 1.1 y 1.2, se sigue que, para $|z-z_0| \leq \frac{r}{2}$ y $|z'-z_0| \leq \frac{r}{2}$,

$$\left|\ell\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(z')-f(z_0)}{z'-z_0}\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{|z-z'|}{\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot r}C\|\ell\|\, 2\pi r = \frac{4C}{r^2}|z-z'|\|\ell\|.$$

Luego,

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} \right\| \leq \frac{4C}{r^2}|z - z'|. \tag{1.3}$$

Tenemos entonces por 1.3 que para toda sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tal que $z_n \to z_0$, la sucesión en $\mathcal{X}$ dada por

$$\left(\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \right)$$

es de Cauchy en $\mathcal{X}$, y dado que $\mathcal{X}$ es completo, dicha sucesión es convergente. Como esto pasa para cualquier sucesión z_n tal que $z_n \to z_0$ en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Ya que $z_0 \in \mathcal{D}$ fue escogido de manera arbitraria, concluimos que f es holomorfa en $\mathcal{D}$. □

Notación 1.1. *Denotaremos por* $\mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ *al conjunto de las funciones holomorfas de* $\mathcal{D}$ *en* $\mathcal{X}$*, y escribiremos simplemente* $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ *si* $\mathcal{X} = \mathbb{C}$.

Del Teorema 1.2, tenemos lo siguiente,

Observación 1.1. *Si* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ *y* $\ell \in \mathcal{X}^*$*, entonces* $(\ell \circ f)' = \ell \circ f'$.

A continuación veremos que la caracterización de las funciones holomorfas dada por el Teorema 1.2, nos permite extender varios teoremas importantes del análisis complejo a funciones valuadas en espacios de Banach.

Proposición 1.1. *Si* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ *y* $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ *es compacto, entonces* $\|f\|$ *es acotada en* $\mathcal{K}$.

Demostración. Por el Teorema 1.2 f es débilmente holomorfa, por lo que para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, F_ℓ es holomorfa sobre $\mathcal{D}$.

Luego, como $F_\ell : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ es holomorfa, tenemos que es continua, y sabemos que la imagen continua de conjuntos compactos es compacta, además de que los conjuntos compactos en espacios métricos son cerrados y acotados. Por lo tanto, para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, $F_\ell(\mathcal{K})$ es acotado.

Así, para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, existe C_ℓ tal que para todo $z \in \mathcal{K}$, $|\ell(f(z))| \leq C_\ell$. Considerando a $\widehat{f(z)} \in \mathcal{X}^{**}$ dado por $\widehat{f(z)}(\ell) := \ell(f(z))$, podemos fijar la familia de funcionales $\mathcal{F} := \{\widehat{f(z)} : z \in \mathcal{K}\}$ y tenemos entonces que para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$:

$$\sup_{\widehat{f(z)} \in \mathcal{F}} |\widehat{f(z)}(\ell)| = \sup_{z \in \mathcal{K}} |\ell(f(z))| \leq C_\ell < \infty.$$

Se sigue que $\mathcal{F}$ es acotado puntualmente, y por el teorema de Banach-Steinhaus:

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \|\widehat{f(z)}\| < \infty.$$

Como $\|\widehat{f(z)}\|_{\mathcal{X}^{**}} = \|f(z)\|_{\mathcal{X}}$, tenemos que $\|f\|$ es acotada en $\mathcal{K}$.

$\square$

Al igual que en el análisis complejo, las funciones holomorfas con valores en un espacio de Banach son infinito derivables, como mostramos en el siguiente teorema.

Proposición 1.2. *Si f es holomorfa en $\mathcal{D}$, entonces f' es holomorfa en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sea $\ell \in \mathcal{X}^*$ fijo. Como f es holomorfa, $\ell \circ f$ es holomorfa.

Además, del Teorema 1.2 sabemos que $(\ell \circ f)' = \ell \circ f'$, por lo que existe $x_\ell \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ell(f'(z)) - \ell(f'(z_0))}{z - z_0} = x_\ell.$$

Ya que $\ell \in \mathcal{X}^*$ es arbitrario, se sigue que f' es débilmente holomorfa en $\mathcal{D}$ y entonces por el Teorema 1.2 es holomorfa en $\mathcal{D}$.

$\square$

Como es de esperarse, todas las funciones holomorfas de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ son continuas.

Proposición 1.3. *Si $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$, entonces f es continua en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathcal{D}$. Como f es holomorfa en z_0, tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathcal{X}.$$

Ahora sea $\varepsilon > 0$ Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $z \neq z_0$ con $|z - z_0| < \delta$,

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| \leq \varepsilon,$$

de donde

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right\| \leq \varepsilon + \|f'(z_0)\|$$

Luego, existe $C > 0$ tal que $\varepsilon/C < \delta$ y $\varepsilon + \|f'(z_0)\| \leq C$, y entonces para los $z \neq z_0$ tales que $|z - z_0| < \varepsilon/C$, tenemos que

$$\|f(z) - f(z_0)\| \leq (\varepsilon + \|f'(z_0)\|)|z - z_0| \leq C|z - z_0| < \varepsilon$$

de donde se sigue que f es continua. □

Un resultado básico del análisis complejo establece que el conjunto de funciones holomorfas en el sentido usual es un espacio vectorial. Este resultado se puede extender de manera natural para el conjunto de funciones holomorfas con valores en un espacio de Banach.

Teorema 1.3. *Si* $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$*, y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, entonces* $\alpha f + \beta g$ *es holomorfa en* $\mathcal{D}$*.*

Demostración. Supongamos que α y β son distintas de 0. Sean $z_0 \in \mathcal{D}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen δ_1 y δ_2 tales que para todo $z \in B_{\delta_1}(z_0)$,

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|},$$

y además, para todo $z \in B_{\delta_2}(z_0)$,

$$\left\| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}.$$

Por lo tanto, para todo $z \in B_{\delta_1}(z_0) \cap B_{\delta_2}(z_0)$,

$$\left\| \frac{\alpha f(z) - \alpha f(z_0)}{z - z_0} - \alpha f'(z_0) + \frac{\beta g(z) - \beta g(z_0)}{z - z_0} - \beta g'(z_0) \right\|$$

$$\leq |\alpha| \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| + |\beta| \left\| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right\| < \varepsilon.$$

Además, de esta desigualdad obtenemos que el resultado también es válido si α o β son 0, con lo que concluimos la demostración.

□

A continuación, veremos que el producto de funciones holomorfas, cuando una toma valores en $\mathbb{C}$ y la otra en un espacio de Banach $\mathcal{X}$, resulta una función holomorfa.

Teorema 1.4. *Si $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{O}, \mathcal{X})$ y $g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$, entonces $f \cdot g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D} \cap \mathcal{O}, \mathcal{X})$.*

Demostración. Tenemos que f es débilmente holomorfa en $\mathcal{O}$. Sea $\ell \in \mathcal{X}^*$. Como g toma valores en $\mathbb{C}$, tenemos que, para todo $z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{D}$:

$$\ell(fg(z)) = \ell(f(z)g(z)) = f(z)\ell(g(z)).$$

Es decir, $\ell \circ f \cdot g = f \cdot (\ell \circ g)$. Como el producto de funciones holomorfas con valores en $\mathbb{C}$ es de nuevo una función holomorfa, tenemos que $f \cdot (\ell \circ g) = \ell \circ (f \cdot g)$ es holomorfa, y por lo tanto $f \cdot g$ es débilmente holomorfa en $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$. De aquí obtenemos que $f \cdot g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{O} \cap \mathcal{D}, \mathcal{X})$.

□

Para concluir esta sección, mostraremos que la convergencia puntual se comporta bien para las funciones en $\mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$, en el siguiente sentido:

Teorema 1.5. *Si una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ es uniformemente acotada en $\mathcal{D}$ y converge puntualmente a una función f, entonces f es holomorfa.*

Demostración. Como $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $\mathcal{D}$, tenemos que $C = \sup_{z \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}} \|f_n(z)\|_{\mathcal{X}} < \infty$. Además se tiene que para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$,

1. $\ell(f_n(z))$ es holomorfa en $\mathcal{D}$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

2. $|\ell(f_n(z))| \leq \|\ell\| |f_n(z)| \leq C\|\ell\|$ para todo $z \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Luego, debido a que $f_n(z)$ converge puntualmente a $f(z)$, se sigue que $\ell(f_n(z)) \to \ell(f(z))$ en $\mathcal{D}$, y entonces como cada $\ell \circ f_n$ es holomorfa, la función a la que convergen, $\ell \circ f$ es holomorfa. Dado que esto es para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, f es débilmente holomorfa y por lo tanto es holomorfa sobre $\mathcal{D}$

$\square$

1.2. La fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy es un resultado fundamental en el análisis complejo, ya que establece una relación entre los valores de una función holomorfa en el interior de una curva cerrada y su integral a lo largo de dicha curva.

En 1825, Cauchy demostró una primera versión de esta fórmula para curvas cerradas simples. Durante años posteriores, Cauchy siguió trabajando en refinar este resultado hasta extenderlo a curvas más generales.

En esta sección, presentamos una extensión de la fórmula integral de Cauchy para funciones que toman valores en un espacio de Banach. Esta generalización será de vital importancia para el desarrollo del cálculo funcional holomorfo, el cual abordaremos en el último capítulo de esta tesis.

Para dar esta extensión de la formula integral de Cauchy, primero definiremos la integral sobre curvas para funciones que toman valores en espacios de Banach. Con este objetivo en mente introducimos los siguientes conceptos.

Definición 1.3. *Una partición del intervalo* $[0, 1]$ *es una colección de números reales* $t_0, t_1, \ldots, t_n$ *tal que* $t_0 = 0$*,* $t_n = 1$*, y* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$*. Denotaremos por* $\mathcal{P}$ *al conjunto de particiones del intervalo* $[0, 1]$.

Definición 1.4. *Dada* $P = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1\} \in \mathcal{P}$*, definimos su norma de la siguiente manera:*

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} \{t_j - t_{j-1}\}.$$

Basados en la teoría de integración del análisis complejo, partiremos definiendo curvas "sencillas" en el siguiente sentido.

Definición 1.5. *Una curva es una función continua $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Si γ satisface $\gamma(0) = \gamma(1)$, diremos que es una curva cerrada. Si además γ es inyectiva en $[0, 1)$, diremos que es una curva cerrada simple.*

En general, denotaremos por Γ a su imagen en $\mathbb{C}$, esto es, $\Gamma := \gamma([0, 1])$ y, además, dada una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}$, le llamaremos "poligonal de γ respecto de P" a la curva formada por los segmentos que unen a los puntos $\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\}$.

Definición 1.6. *Dada una curva γ y una partición $P \in \mathcal{P}$ definimos la longitud de la poligonal de γ respecto de P, denotada $s(\gamma, P)$ como la siguiente suma*

$$s(\gamma, P) := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Definición 1.7. *Dada una curva γ, definimos su variación total, denotada $\nu(\gamma)$, de la siguiente manera:*

$$\nu(\gamma) := \sup\{s(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Y además, decimos que γ es de variación acotada si $\nu(\gamma)$ es finita.

Observación 1.2. *Si una curva γ es de variación acotada, y existe otra curva α tal que $\alpha([0, 1]) = \gamma([0, 1])$, entonces α es de variación acotada.*

Las nociones anteriores son de gran utilidad para definir el tipo de curvas con las que trabajaremos durante el resto de esta tesis.

Definición 1.8. *Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ y γ una curva. Decimos que γ es una parametrización de Γ si $\gamma([0, 1]) = \Gamma$.*

Observación 1.3. *Dada una curva γ, haremos un abuso del lenguaje y llamaremos curva a su imagen Γ.*

Definición 1.9. *Dada una curva Γ, decimos que es rectificable si tiene una parametrización de variación acotada. En este caso, por la observación 1.2 cualquier parametrización γ de Γ satisface $\sup\{s(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}\} < \infty$.*

Observación 1.4. *Por el momento diremos que una curva cerrada simple Γ es orientada positiva si sigue la orientación contraria a las manecillas del reloj, y negativa en el otro caso. También diremos que una curva cerrada es orientada si tiene una orientación ya sea positiva o negativa, y se entiende además que será una curva cerrada simple.*

Con todo lo anterior, podemos definir las sumas de Riemann-Stieltjes.

Definición 1.10. *Sea $f : \Gamma \to \mathcal{X}$ una función acotada, $\gamma : [0,1] \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ una parametrización de una curva orientada Γ y $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0,1]$. Una suma de Riemann-Stieltjes para la función f respecto de γ basada en la partición P, es un elemento de $\mathcal{X}$ que denotamos por $S(f,\gamma,P)$ y que está dado por la suma*

$$S(f,\gamma,P) = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

con $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

A continuación presentamos un primer resultado para este tipo de sumas.

Definición 1.11. *Dadas dos curvas rectificables $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ con la misma imagen Γ, diremos que tienen la misma orientación si existe una función $\beta : [0,1] \to [0,1]$ continua y biyectiva tal que $\beta(0) = 0$ y $\beta(1) = 1$, y además cada $t \in [0,1]$ satisface $\gamma_2(t) = \gamma_1(\beta(t))$.*

Lema 1.1. *Si $f : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ es continua y γ_1, γ_2 son dos curvas rectificables con la misma imagen Γ y la misma orientación, entonces para cada $\delta > 0$ existen particiones P_1 y P_2 con $\|P_1\|, \|P_2\| < \delta$ tal que $S(f,\gamma_1,P_1) = S(f,\gamma_2,P_2)$.*

Demostración. Dado que γ_1 y γ_2 tienen la misma imagen, tenemos $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Además, como tienen la misma orientación, existe $\beta : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\beta(t))$ para todo $t \in [0,1]$. Es decir, $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \beta$.

Tenemos que si $\beta(t) > t$ entonces $\beta^{-1}(t) < t$.

Para cada $t \in [0,1]$, tenemos tres casos:

1. $\beta(t) = t$

2. $\beta(t) < t$

3. $\beta(t) > t$

Sea $0 < \delta \leq 1$ y fijamos $\varepsilon \in (0, \delta)$. Veamos que existen $t_1, s_1 \in (0, \delta)$ tales que $\gamma_2(s_1) = \gamma_1(t_1)$, con s_1 o t_1 en $[\varepsilon, \delta)$. Si ε cae en el primer o el segundo caso, entonces fijamos $t_1 = \beta(\varepsilon)$ y $s_1 = \varepsilon$. De lo contrario, tenemos que $\beta(\varepsilon) > \varepsilon$ y entonces $\beta^{-1}(\varepsilon) < \varepsilon$. Fijamos en este caso $t_1 = \varepsilon$ y $s_1 = \beta^{-1}(\varepsilon)$. Así, siempre tenemos $\gamma_2(s_1) = \gamma_1(t_1)$, con $s_1, t_1 \in (0, \delta)$ y s_1 o t_1 en $[\varepsilon, \delta)$.

Si $s_1 + \varepsilon$ y $t_1 + \varepsilon$ están en el intervalo $[0, 1]$, repitiendo este proceso para los puntos $s_1 + \varepsilon$ y $t_1 + \varepsilon$, obtenemos s_2 y t_2 tales que $\gamma_2(s_2) = \gamma_1(t_2)$, con $s_2 \in (s_1, s_1 + \delta)$ y $t_2 \in (t_1, t_1 + \delta)$, y alguno de s_2 o t_2 de hecho satisface $s_2 \in (s_1 + \varepsilon, s_1 + \delta)$, o $t_2 \in (t_1 + \varepsilon, t_1 + \delta)$.

Tenemos $\beta(1) = 1$, y repitiendo el proceso anterior para s_k, t_k, tenemos que eventualmente $t_k + \varepsilon$ o $s_k + \varepsilon$ son mayores que 1. En este caso, fijamos t_{k+1} o s_{k+1} (o ambos) como 1. Entonces

$$\beta(t_{k+1}) = \beta(1) = 1 = t_{k+1}$$

y por lo tanto $s_{k+1} = t_{k+1}$, de donde $t_{k+1} = 1 = s_{k+1}$.

De esta manera podemos construir dos particiones $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1$ y $s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = 1$ tales que $t_i - t_{i-1} < \delta$ y $s_j - s_{j-1} < \delta$, y $\gamma_2(s_i) = \gamma_1(t_i)$. Definimos $P_1 := \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y $P_2 := \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$. Tenemos:

$$S(f, \gamma_2, P_2) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_2(s_j))(\gamma_2(s_j) - \gamma_2(s_{j-1}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_1(t_j))(\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})) = S(f, \gamma_1, P_1).$$

Con lo que concluimos la prueba. $\square$

Finalmente estamos listos para definir la integral sobre una curva.

Definición 1.12. *Dadas una función $f : \Gamma \to \mathcal{X}$ y γ una parametrización de Γ, la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto de γ se define como el límite (en caso de existir) de $S(f, \gamma, P)$ en $\mathcal{X}$ cuando $\|P\| \to 0$.*

Es decir, el único $S \in \mathcal{X}$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}$ satisface $\|P\| \leq \delta_\varepsilon$, entonces $\|S(f, \gamma, P) - S\| < \varepsilon$.

En este caso, denotamos a $S \in \mathcal{X}$ como

$$S = \int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \int_0^1 f(\gamma(t)) d\gamma(t).$$

Veamos que el valor de la integral de Riemann-Stieltjes no depende de la elección de la parametrización de la curva.

Teorema 1.6. *Sean Γ una curva orientada y rectificable, γ_1, γ_2 parametrizaciones de Γ con la misma orientación, y $f : \Gamma \to \mathcal{X}$ una función tal que existe su integral de Riemann-Stieltjes respecto de γ_1 y γ_2. Entonces la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de γ_1 coincide con la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de γ_2.*

Demostración. Sean γ_1, γ_2 curvas rectificables con la misma orientación tales que $\gamma_1([0,1]) = \gamma_2([0,1])$ y sea $f : \Gamma \to \mathcal{X}$ tal que existe la integral de Riemann-Stieltjes respecto de γ_1 y γ_2, denotadas S_1 y S_2, respectivamente. Además, para cada $\delta > 0$ sea $\mathcal{P}_\delta = \{P \in \mathcal{P} : \|P\| < \delta\}$.

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ con la propiedad de que, si $P \in \mathcal{P}_{\delta_\varepsilon}$, se tiene que

$$\|S(f, \gamma_1, P) - S_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \|S(f, \gamma_2, P) - S_2\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por el Lema 1.1, existen P_1 y P_2 en $\mathcal{P}_{\delta_\varepsilon}$ tales que $S(f, \gamma_1, P_1) = S(f, \gamma_2, P_2)$.

Luego:

$$\begin{aligned} \|S_2 - S_1\| &= \|S_2 - S(f, \gamma_2, P_2) + S(f, \gamma_1, P_1) - S_1\| \\ &\leq \|S(f, \gamma_2, P_2) - S_2\| + \|S(f, \gamma_1, P_1) - S_1\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como esto es para cada $\varepsilon > 0$, se sigue que $S_1 = S_2$.

□

Teorema 1.7. *Si f y g son funciones tales que existe su integral de Riemann-Stieltjes respecto de una curva rectificable $\Gamma \subset \mathbb{C}$, y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\int_{\Gamma} f + \lambda g = \int_{\Gamma} f + \lambda \int_{\Gamma} g$$

Demostración. Sean f, g funciones que cumplan las hipótesis, con $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva rectificable, y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 positivos tales que para cada partición $P_1 \in \mathcal{P}_{\delta_1}$ y $P_2 \in \mathcal{P}_{\delta_2}$, se tiene

$$\|S(f, \gamma, P_1) - \textstyle\int_\Gamma f\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \|S(g, \gamma, P_2) - \textstyle\int_\Gamma g\| < \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}.$$

Luego, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $P \in \mathcal{P}_\delta$, tenemos:

$$\begin{aligned}&\|S(f + \lambda g, \gamma, P) - (\textstyle\int_\Gamma f + \lambda \int_\Gamma g)\| \\ &\leq \|S(f, \gamma, P_1) - \textstyle\int_\Gamma f\| + |\lambda| \|S(g, \gamma, P_2) - \int_\Gamma g\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.8. *Si Γ es una curva rectificable y $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$, entonces existe la integral de Riemann-Stieltjes de f sobre la curva Γ.*

Demostración. La demostración es análoga al caso en que $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ y por lo tanto la omitiremos. Sin embargo, este caso se puede consultar en [2], p. 60. □

Además, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.5. *Si Γ es una curva rectificable y existe la integral sobre Γ de $f : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$, entonces, para cada partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in P$ y cada curva γ con $\gamma([0, 1]) = \Gamma$, se satisface:*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|f(\gamma(\tau_j))\| |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|,$$

y por lo tanto

$$\left\| \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \right\| \leq \int_0^1 \|f(\gamma(t))\| d|\gamma(t)|,$$

donde la integral de la derecha es una integral de Riemann-Stieltjes real. Se sigue que

$$\left\| \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \right\| \leq \int_\Gamma \|f(\lambda)\| d|\lambda|.$$

Dada una función $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$ donde Γ es una curva rectificable, podemos pensar a la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de Γ como un operador. Partiendo de esto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Si Γ es una curva rectificable en $\mathbb{C}$, entonces el operador $T : \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ que asigna a cada $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$ su integral sobre Γ en $\mathcal{X}$, es lineal y acotado.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$. Tenemos:

$$\left\| \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \right\| \leq \int_\Gamma \|f(\lambda)\| d|\lambda| \leq \sup_{\lambda \in \Gamma} \|f(\lambda)\| \int_0^1 |d\gamma(t)| = \|f\|_\infty \ell(\Gamma),$$

donde $\ell(\Gamma)$ denota la longitud de Γ. Por lo tanto T es acotado, y la linealidad se tiene por el Teorema 1.7.

□

Este operador satisface diversas propiedades, en particular, la siguiente será de gran importancia en este trabajo.

Teorema 1.10. *Si Γ es una curva rectificable en $\mathbb{C}$, entonces para cada $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$ y cada $L \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, donde $\mathcal{Y}$ es un espacio de Banach, se tiene que*

$$L \left(\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda \right) = \int_\Gamma (L \circ f)(\lambda) d\lambda.$$

Demostración. Como f es continua, $L \circ f$ es continua y entonces por el Teorema 1.8 su integral en $\mathcal{Y}$ existe. Sea $S = \displaystyle\int_\Gamma L(f(\lambda)) d\lambda$. Dada $P \in \mathcal{P}$, $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} L(S(f, \gamma, P)) &= L \left(\sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n L(f(\gamma(\tau_i)))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) = S(L \circ f, \gamma, P). \end{aligned}$$

Luego, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda P con $\|P\| < \delta$, $\|S(Lf, \gamma, P) - S\| < \varepsilon$. Sustituyendo $S(Lf, \gamma, P)$ por $L(S(f, \gamma, P))$, obtenemos el resultado. □

Nuestro siguiente objetivo es dar la demostración de la fórmula integral de Cauchy, para funciones que toman valores en espacios de Banach. Para esto, retomaremos la definición de índice de un punto $\zeta \in \mathbb{C}$ respecto de una curva Γ.

Definición 1.13. *Si Γ es una curva cerrada orientada y rectificable en $\mathbb{C}$ y $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, definimos el índice de ζ respecto de Γ:*

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \zeta} d\lambda.$$

Sabemos por el análisis complejo que $\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta)$ es un número entero, que es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ y de valor cero en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Además, ya que estamos considerando únicamente curvas simples, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ tiene dos componentes conexas, sólo una de ellas es acotada y Γ es su frontera común.

En este caso, al fijar una curva Γ, $\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta)$ sólo toma dos valores. En la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ se tiene $\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) = 1$, en cuyo caso se dice que Γ es orientada positiva, o bien $\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) = -1$, y en este caso se dice que es orientada negativa. Para ζ en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ siempre se tiene $\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) = 0$.

Definición 1.14. *Definimos la parte interior, que denotaremos $\mathrm{ins}\,\Gamma$, y la parte exterior, denotada $\mathrm{out}\,\Gamma$, de una curva cerrada simple Γ, como los conjuntos*

$$\mathrm{ins}\,\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) = \pm 1\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{out}\,\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) = 0\}$$

Pasamos ahora a demostrar una primera versión de la formula integral de Cauchy, para curvas cerradas simples.

Teorema 1.11 (Fórmula integral de Cauchy para curvas). *Sea f una función en $\mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ y Γ una curva cerrada simple en $\mathcal{D}$ orientada positiva. Entonces, para cada $\zeta \in \ \mathrm{ins}\,\Gamma$:*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda.$$

Demostración. Sea Γ una curva cerrada simple de orientación positiva en $\mathcal{D}$. Para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, tenemos $\ell \circ f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$, y por lo tanto satisface, para cada $\zeta \in \operatorname{Ins}\Gamma$:

$$\ell(f(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ell(f(\lambda))}{\lambda-\zeta}d\lambda$$

Como $\ell \in \mathcal{X}^* = \mathscr{B}(\mathcal{X},\mathbb{C})$, y $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, tenemos por el Teorema 1.10:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ell(f(\lambda))}{\lambda-\zeta}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ell\left(\frac{f(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right)d\lambda = \ell\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda\right).$$

De donde

$$\ell(f(\zeta)) = \ell\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda\right).$$

Como esto es para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$ y $\mathcal{X}^*$ separa puntos (consultar [6]), tenemos:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda.$$

$\square$

Otro resultado fundamental que queremos generalizar, es el teorema de Fubini. Para extender este teorema del análisis complejo a espacios de Banach, será necesario dotar de un producto al espacio de Banach $\mathcal{X}$. En general, los espacios de este tipo que resultan de interés son las álgebras de Banach.

Por el momento nos bastará con saber que un álgebra de Banach es un espacio de Banach $\mathcal{X}$ dotado de una operación binaria $\cdot : \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, llamada producto, que satisface, para cada $x, y \in \mathcal{X}$, la desigualdad:

$$\|x\cdot y\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Por simplicidad, denotaremos por xy al producto $x \cdot y$.

Observación 1.6. *Si $\mathcal{X}$ es una álgebra de Banach y existe una unidad $1_\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$, se satisface que $\|1_\mathcal{X}\| = 1$.*

A continuación demostraremos que para la integral doble en este contexto, el orden de integración es intercambiable. Para una demostración de la existencia de esta integral se puede consultar [5], p. 94.

Teorema 1.12 (Fubini para curvas). *Si $f, g \in \mathscr{C}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ un álgebra de Banach, y Γ_1, Γ_2 son dos curvas rectificables contenidas en $\mathcal{D}$, entonces:*

$$\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 = \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Demostración. Para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, por el teorema de Fubini del análisis complejo:

$$\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \ell(f(\lambda_1) g(\lambda_2)) d\lambda_2 d\lambda_1 = \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \ell(f(\lambda_1) g(\lambda_2)) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Luego, por el Teorema 1.13:

$$\ell\left(\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1\right) = \ell\left(\int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2\right).$$

Como esto es válido para cada $\ell \in \mathcal{X}^*$, se sigue que

$$\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 = \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

$\square$

1.3. La fórmula integral de Cauchy para trayectorias

Ahora, nos enfocaremos en extender la integral que acabamos de definir al caso más general, en el que Γ no es una curva cerrada simple rectificable, si no que es la unión de varias curvas ajenas de este tipo. De manera formal, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.15. *Una trayectoria* $\Gamma = \cup_{j=1}^{m} \Gamma_j$ *es una unión finita donde* Γ_j *es una curva cerrada rectificable orientada simple para toda* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *y además* $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ *siempre que* $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Ahora, de manera natural, definimos el índice para este tipo de curvas.

Definición 1.16. *Para una trayectoria* $\Gamma = \cup_{j=1}^{m} \Gamma_j$ *el índice respecto de* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *se define como la suma de los índices de* ζ *respecto de las curvas* Γ_j. *Es decir,*

$$\operatorname{ind}_\Gamma(\zeta) := \sum_{j=1}^{m} \operatorname{ind}_{\Gamma_j}(\zeta).$$

Este concepto nos permite definir la orientación positiva o negativa para este tipo de curvas.

Definición 1.17. *Una trayectoria* $\Gamma = \cup_{j=1}^{m} \Gamma_j$ *es orientada positiva si para cada* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *se tiene* $\operatorname{ind}_\Gamma(\zeta) \in \{0, 1\}$ *y orientada negativa si para cada* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *se tiene* $\operatorname{ind}_\Gamma(\zeta) \in \{0, -1\}$.

Dada una trayectoria, se define la parte interior y exterior como sigue:

Definición 1.18. *Definimos la parte interior, que denotaremos* $\operatorname{ins} \Gamma$*, y la parte exterior, denotada* $\operatorname{out} \Gamma$*, de una trayectoria* Γ*, como los conjuntos*

$$\operatorname{ins} \Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{ind}_\Gamma(\zeta) = \pm 1\} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{out} \Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{ind}_\Gamma(\zeta) = 0\}.$$

Ahora, definiremos la integral sobre este tipo de trayectorias.

Definición 1.19. *Sean* $\Gamma = \cup_{j=1}^{m} \Gamma_j$ *una trayectoria y* $f \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathcal{X})$. *Definimos la integral de* f *sobre* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *como*

$$\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} f(\lambda) d\lambda.$$

A continuación, demostraremos el análogo al Teorema 1.10.

Teorema 1.13. *Sean* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ *y* $\Gamma = \cup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ *una trayectoria. Para cada* $L \in \mathscr{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*, donde* $\mathcal{Y}$ *es un espacio de Banach, tenemos que*

$$L \int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} L f(\lambda) d\lambda.$$

Demostración. Por el Teorema 1.10 y como cada Γ_j es una curva cerrada simple, tenemos

$$\begin{aligned} L \int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda &= L \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^{n} L \int_{\Gamma_j} f(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} L f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} L f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es un resultado del análisis complejo, por lo que omitiremos su demostración. Sin embargo, esta se puede encontrar en [1].

Teorema 1.14. *Si* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ *y* Γ *es una trayectoria con* $\mathrm{ins}\, \Gamma \subseteq \mathcal{D}$*, entonces, para cada* $\zeta \in \mathcal{D} \setminus \Gamma$*:*

$$\mathrm{ind}_{\Gamma}(\zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda.$$

Además

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Este teorema se puede extender de manera natural para funciones holomorfas de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ de la siguiente manera.

Teorema 1.15 (Fórmula integral de Cauchy para trayectorias).
Si $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ *y* Γ *es una trayectoria con* $\mathrm{ins}\, \Gamma \subseteq \mathcal{D}$*, entonces para cada* $\zeta \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{ind}_{\Gamma}(\zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda.$$

Además

$$\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda = 0.$$

Demostración. Si $\ell \in \mathcal{X}^*$, entonces $\ell \circ f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ y por el Teorema 1.14 tenemos, para cada $\zeta \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta)\ell(f(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ell(f(\lambda))}{\lambda - \zeta} d\lambda.$$

Luego, por el Teorema 1.13

$$\ell(\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) f(\zeta)) = \mathrm{ind}_\Gamma(\zeta)\ell(f(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ell(f(\lambda))}{\lambda - \zeta} d\lambda = \ell \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda \right).$$

Como esto es para todo $\ell \in \mathcal{X}^*$, obtenemos

$$\mathrm{ind}_\Gamma(\zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda,$$

y dado que $\zeta \in \mathcal{D}$ es arbitrario, la ecuación anterior es válida para todo $\zeta \in \mathcal{D}$. □

Para finalizar esta sección, mostraremos el teorema de Fubini para trayectorias.

Teorema 1.16 (Fubini para trayectorias). *Si $f, g \in \mathscr{C}(\mathcal{D}, \mathcal{X})$, donde $\mathcal{X}$ es un álgebra de Banach, y $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$, $\Lambda = \cup_{j=1}^m \Lambda_j$ son dos trayectorias contenidas en $\mathcal{D}$, entonces:*

$$\int_\Gamma \int_\Lambda f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 = \int_\Lambda \int_\Gamma f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Demostración. Por la definición de integral sobre trayectorias y la linealidad de la integral, tenemos que

$$\int_\Gamma \int_\Lambda f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_i} \int_{\Lambda_j} f(\lambda_1) g(\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1.$$

Luego, del Teorema 1.12 se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_i}\int_{\Lambda_j} f(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_2 d\lambda_1 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Lambda_j}\int_{\Gamma_i} f(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Y por último

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Lambda_j}\int_{\Gamma_i} f(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 = \int_{\Lambda}\int_{\Gamma} f(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2,$$

de donde se tiene el resultado. $\square$

Capítulo 2

Álgebras C^*

En este capítulo haremos una breve introducción a la teoría de álgebras C^*, que culminará con la demostración del teorema de Gelfand-Naimark, también llamado teorema espectral abstracto, y uno de los teoremas espectrales conocido como teorema espectral versión funciones continuas, estos serán fundamentales para definir el cálculo funcional continuo. Debido a que las álgebras C^* son un caso particular de álgebras de Banach, primero veremos algunos resultados que son válidos en este contexto.

Dentro del análisis funcional, el estudio de las álgebras de Banach y álgebras C^* es parte de la teoría de las álgebras de operadores, cuyo origen se remonta al menos a tres sucesos en la historia de las matemáticas y de la física cuántica, de acuerdo con [14], p. 5

1. El trabajo de Hilbert y sus discípulos en Gotinga sobre ecuaciones integrales, teoría espectral y formas cuadráticas de dimensión infinita (1904);

2. El descubrimiento de la mecánica cuántica por Heisenberg (1925) en Gotinga y de manera independiente por Schrödinger en Zürich (1926);

3. La llegada de John von Neumann a Gotinga (1926) para asumir el cargo de asistente de Hilbert.

Heisenberg introdujo una formulación de la mecánica cuántica, en esa época llamada "matrix mechanics"; por otro lado, Schrödinger llegó a una formulación diferente de esta teoría, que él mismo llamó "wave mechanics".

La relación y posible equivalencia entre estas formulaciones, aparentemente distintas era un amplio tema de debate para la época.

Fue von Neumann quien en una serie de artículos escritos entre 1927 y 1932, formuló el concepto abstracto de espacio de Hilbert, además de que desarrolló la teoría espectral de operadores normales acotados y no acotados en estos espacios, y finalmente demostró la equivalencia matemática entre las dos formulaciones de la mecánica cuántica desarrolladas por Heisenberg y Schrödinger.

2.1. Algunos resultados básicos en álgebras de Banach

Entre 1936 y 1953, von Neumann escribió 5 artículos (3 de ellos en colaboración con Murray) en los cuales inició el estudio de las estructuras conocidas en esa época como "anillos de operadores", según [14], p. 8.

En este periodo, Gelfand comenzó un estudio por separado combinando las álgebras de operadores con la teoría de espacios de Banach. En 1941 definió el concepto de álgebra de Banach. Después, desarrolló una teoría espectral intrínseca en álgebras de Banach, y demostró la mayoría de resultados que en la actualidad conforman la teoría clásica de álgebras de Banach conmutativas.

Un ejemplo clásico de álgebra de Banach y de álgebra C^* es, precisamente, el espacio de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, razón por la cual en esta sección haremos un breve estudio de estas estructuras para posteriormente dar paso al desarrollo de la teoría espectral en este contexto.

Antes de introducir el concepto de "álgebra de Banach", se requiere lo siguiente:

Definición 2.1 (Álgebra sobre un campo). *Un álgebra sobre un campo* $\mathbb{F}$ *es un espacio vectorial* $(V_{\mathbb{F}}, +)$ *dotado además de una operación binaria*

$\cdot : V_{\mathbb{F}} \times V_{\mathbb{F}} \to V_{\mathbb{F}}$ *que es bilineal; es decir, que para cada* $u, v, w \in V_{\mathbb{F}}$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$*:*

1. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
3. $u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$.

Denotamos a dicha álgebra como $\mathcal{A} = (V_{\mathbb{F}}, +, \cdot)$.

En lo sucesivo, fijaremos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y siempre que se mencione un álgebra, será un álgebra asociativa, es decir que además de la definición anterior satisface $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Por simplicidad, escribiremos ab en vez de $a \cdot b$ para el producto en álgebras sobre un campo $\mathbb{F}$.

Definición 2.2. *un álgebra* $\mathcal{A}$ *se llama normada si está dotada de una norma* $\|\cdot\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ *que satisface, para cualesquiera* $a, b \in \mathcal{A}$*:*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|. \tag{2.1}$$

Si el álgebra tiene unidad $1_{\mathcal{A}}$*, además se debe cumplir que* $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$ *.*

Ahora, podemos introducir el concepto de álgebra de Banach.

Definición 2.3 (Álgebra de Banach). *Si el espacio vectorial* $V_{\mathbb{F}}$ *de un álgebra normada* $\mathcal{A} = (V_{\mathbb{F}}, +, \cdot)$ *es un espacio de Banach, decimos que* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de Banach.*

Consideramos importante dar algunos ejemplos de álgebras de Banach, en particular el siguiente será de gran importancia.

Ejemplo 2.1. *Sea* X *un espacio de Hausdorff compacto y* $\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ *con las operaciones usuales de espacio vectorial, el producto*

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

y con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Entonces $\mathscr{C}(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con $1_{\mathscr{C}(X)}$, pues $\mathscr{C}(X)$ es un espacio de Banach, la función constante $\mathbf{1} \in \mathscr{C}(X)$ satisface $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ y además, si $f, g \in \mathscr{C}(X)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_\infty &= \sup\{|f(x)||g(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Aún si X no es compacto, la discusión anterior sigue siendo válida para las funciones continuas y acotadas sobre X.

Ejemplo 2.2. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Decimos que una función $f : X \to \mathbb{C}$ se anula en el infinito si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus K$.*

Definimos el espacio $\mathscr{C}_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} :\ f \text{ se anula en el infinito}\}$ con la suma y productos usuales, y la norma $\|\cdot\|_\infty$. Entonces tenemos que $\mathscr{C}_0(X)$ es un álgebra de Banach.

Ejemplo 2.3. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ el espacio de operadores lineales y acotados de $\mathcal{X}$. Observemos que $Id_{\mathcal{X}} \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$. Luego, dotamos a $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ con la suma y multiplicación por escalar usuales, y del producto dado por la composición, es decir, $T \cdot S = T \circ S \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, además de la norma $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_{\mathcal{X}} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1\}$. Con esta estructura se tiene que $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ es un álgebra de Banach compleja.*

Ejemplo 2.4. *Dadas dos álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, el espacio de operadores lineales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, con la norma*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_{\mathcal{B}} : \|x\|_{\mathcal{A}} \leq 1\},$$

y el producto $T \cdot S(x) = T(x) \cdot S(x)$ es un álgebra de Banach. En particular, el espacio dual de un álgebra de Banach, $\mathcal{A}^*$, es también un álgebra de Banach.

Ejemplo 2.5. *Dado un conjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, el espacio de funciones holomorfas y acotadas sobre $\mathcal{U}$, denotado $H^\infty(\mathcal{U})$, es un álgebra de Banach con la norma*

$$\|f\|_{H^\infty} := \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathcal{U}} |f(z)|.$$

y las operaciones usuales de espacio vectorial y producto usuales.

En el caso en que un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ no tenga unidad, esta se puede encajar en un álgebra de Banach con unidad, denotada como $\mathcal{A}^\dagger$, de la siguiente manera

Sean $\mathcal{A}^\dagger := \mathcal{A}\times\mathbb{C}$, con la suma coordenada a coordenada, el producto dado por

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \tag{2.2}$$

y la norma

$$\|(a,\lambda)\| = \sup\{\|ax + \lambda x\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Entonces $(0,1)$ actúa como unidad de $\mathcal{A}^\dagger$ y el mapeo de $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\dagger$ dado por $a \mapsto (a,0)$ es inyectivo. Al álgebra $\mathcal{A}^\dagger$ se la conoce como la unitización de $\mathcal{A}$.

Continuando con la teoría de álgebras de Banach, tenemos la siguiente proposición que da una muestra de la relevancia de la desigualdad 2.1 en la definición de álgebra normada.

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada. Entonces, el producto en $\mathcal{A}$ es continuo.*

Demostración. Sea $((a_n,b_n))_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ tal que $(a_n,b_n) \to (a,b)$ cuando $n\to\infty$. Tenemos que mostrar que $a_nb_n \to ab$ en $\mathcal{A}$. Como $(a_n,b_n)\to(a,b)$, se tiene que $\|a_n-a\|+\|b_n-b\| \to 0$. Además, del hecho de que $\|a_n-a\|\to 0$ se sigue que $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|ab - a_nb_n\| &\leq \|ab - a_nb\| + \|a_nb - a_nb_n\| \\ \text{(por ser álgebra normada)} &\leq \|a-a_n\|\|b\| + \|a_n\|\|b-b_n\| \\ \text{(por definición de } M) &\leq \|b\|\|a_n - a\| + M\|b_n - b\| \\ &\leq \max(\|b\|, M)(\|a_n-a\| + \|b_n - b\|) \end{aligned}$$

Así, $\|a_nb_n - ab\| \to 0$ cuando $n\to\infty$.

□

El siguiente lema será fundamental para entender y demostrar varios resultados de esta sección. Este establece que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad, entonces todos los elementos dentro de la bola unitaria con centro en $1_\mathcal{A}$ son invertibles y además, nos proporciona una cota para su inverso.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Si $a \in \mathcal{A}$ y $\|1_{\mathcal{A}} - a\| < 1$, entonces a es invertible. Además, en este caso tenemos*

$$\|a^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1_{\mathcal{A}} - a\|}.$$

Demostración. Sea $b = 1_{\mathcal{A}} - a$. Entonces $\|b\| < 1$ y como $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, se sigue que:

$$\sum_{n=0}^{N} \|b^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|b\|^n.$$

Ya que $\|b\| < 1$, tenemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|b_n\|$ converge y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|b^n\| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|b^n\| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|b\|^n = \frac{1}{1 - \|b\|}.$$

Además, por ser $\mathcal{A}$ espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es convergente, y entonces existe $a' \in \mathcal{A}$ tal que

$$a' = \sum_{n=0}^{\infty} b^n.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a'a = a'(1_{\mathcal{A}} - b) &= \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} b^n \right) (1_{\mathcal{A}} - b) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} b^n - \sum_{n=0}^{N} b^{n+1} \right) = \lim_{N\to\infty} (1_{\mathcal{A}} - b^{N+1}) = 1_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Si cambiamos a por a' en el argumento anterior tenemos $aa' = 1_{\mathcal{A}}$, por lo que a es invertible y $a^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1_{\mathcal{A}} - a)^n$.

Además,

$$\begin{aligned} \|a^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathcal{A}} - a)^n \right\| &= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} (1_{\mathcal{A}} - a)^n \right\| \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|1_{\mathcal{A}} - a\|^n = \frac{1}{1 - \|1_{\mathcal{A}} - a\|} \end{aligned}$$

□

Es necesario distinguir y estudiar al conjunto de elementos invertibles en un álgebra de Banach. En particular, esto será de utilidad en la siguiente sección.

Notación 2.1. *Denotaremos por $G_{\mathcal{A}}$, o simplemente G, al conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{A}$.*

Observación 2.1. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$, entonces $G_{\mathcal{A}}$, con la operación dada por el producto de $\mathcal{A}$, es un grupo, ya que en este caso hereda la asociatividad y la existencia del neutro de $\mathcal{A}$, todo elemento tiene inverso por definición de $G_{\mathcal{A}}$, y además el producto es cerrado ya que si $a, b \in G_{\mathcal{A}}$ se sigue que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in G_{\mathcal{A}}$ por lo que $ab \in G_{\mathcal{A}}$.*

Además, como veremos a continuación $G_{\mathcal{A}}$ es abierto con la topología inducida por la norma de $\mathcal{A}$.

Proposición 2.2. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, entonces $G_{\mathcal{A}}$ es abierto en $\mathcal{A}$. Además, para cada $a \in G_{\mathcal{A}}$*

$$B\left(a, \|a^{-1}\|^{-1}\right) \subseteq G_{\mathcal{A}}.$$

Demostración. Sea $a_0 \in G$. Para cada $a \in \mathcal{A}$ con $a \in B\left(a_0, \|a_0^{-1}\|^{-1}\right)$, tenemos:

$$\|a_0^{-1}a - 1_{\mathcal{A}}\| = \|a_0^{-1}(a - a_0)\| \leq \|a_0^{-1}\|\|a - a_0\| < 1.$$

Del Lema 2.1, se sigue que $a_0^{-1}a \in G_{\mathcal{A}}$. Como $G_{\mathcal{A}}$ es un grupo, $a = a_0(a_0^{-1}a)$ es un elemento de $G_{\mathcal{A}}$. Ya que a es un elemento arbitrario de $B\left(a_0, \|a_0^{-1}\|^{-1}\right)$, tenemos el resultado. □

A raíz de esta proposición obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.1. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad $1_{\mathcal{A}}$, la función definida en G dada por $a \mapsto a^{-1}$ es continua.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in G,$$

y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, se satisface la desigualdad:

$$\|a_n - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}.$$

Entonces, para cada $n \geq N$, tenemos:

$$\|a^{-1}a_n - 1_{\mathcal{A}}\| = \|a^{-1}(a_n - a)\| \leq \|a^{-1}\|\|a_n - a\| < \frac{1}{2},$$

y por lo tanto $a^{-1}a_n \in G$. Más aún, lo anterior implica que

$$\|(a^{-1}a_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1_{\mathcal{A}} - (a^{-1}a_n)\|} \leq 2,$$

puesto que $1 - \|1_{\mathcal{A}} - (a^{-1}a_n)\| > \dfrac{1}{2}$.

Así, tenemos que $\|(a^{-1}a_n)^{-1}\| \leq 2$ para todo $n \geq N$. Además,

$$\begin{aligned}
\|a_n^{-1}\| &= \|a_n^{-1}aa^{-1}\| \\
&= \|(a^{-1}a_n)^{-1}a^{-1}\| \\
&\leq \|(a^{-1}a_n)^{-1}\|\|a^{-1}\| \\
&\leq 2\|a^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Por último, usando lo anterior, para $n \geq N$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\|a_n^{-1} - a^{-1}\| &= \|a_n^{-1}(a - a_n)a^{-1}\| \\
&\leq \|a_n^{-1}\|\|a - a_n\|\|a^{-1}\| \\
&\leq 2\|a^{-1}\|^2\|a_n - a\|,
\end{aligned}$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$. $\square$

Ahora, fijaremos nuestra atención en un subconjunto importante del dual de un álgebra de Banach con unidad.

Definición 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Una funcional lineal $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ se llama multiplicativa si:*

1. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ *para todo* $a, b \in \mathcal{A}$.

2. $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$.

Observación 2.2. *La condición $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ es equivalente a $\varphi \neq 0$, pues $\varphi \neq 0$ implica que existe $a \in \mathcal{A}$ con $\varphi(a) \neq 0$, de donde $\varphi(a) = \varphi(1_{\mathcal{A}}a) = \varphi(1_{\mathcal{A}})\varphi(a)$ y entonces $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$. Además, si $a \in \mathcal{A}$ es invertible entonces*

$$1 = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}),$$

por lo que $\varphi(a)$ es invertible.

Notación 2.2. *Al conjunto de funcionales lineales multiplicativas lo denotaremos por $M_{\mathcal{A}}$, es decir*

$$M_{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \varphi \textit{ es lineal multiplicativa}\}.$$

Ya que este conjunto será de gran importancia, daremos un ejemplo.

Ejemplo 2.6. *Sea X un espacio compacto y $\mathcal{A} := \mathscr{C}(X)$. Dado $x_0 \in X$, la funcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(f) = f(x_0)$ es multiplicativa, pues:*

1. $\varphi(fg) = (fg)(x_0) = f(x_0)g(x_0) = \varphi(f)\varphi(g)$.
2. $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}(x_0) = 1$.

El conjunto $M_{\mathcal{A}}$ cumple diversas propiedades que dependen de la estructura de $\mathcal{A}$. Entre estas tenemos la siguiente.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Si $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$, entonces φ es acotada y $\|\varphi\| = 1$.*

Demostración. Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda| > \|a\|$, entonces

$$\left\|1_{\mathcal{A}} - \left(1_{\mathcal{A}} - \frac{a}{\lambda}\right)\right\| = \left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < 1,$$

por lo que $1_{\mathcal{A}} - a\lambda^{-1}$ es invertible, debido al lema 2.1.

Luego, $-\lambda(1_{\mathcal{A}} - a\lambda^{-1}) = a - \lambda$ es invertible y se sigue que $\varphi(a) - \lambda \neq 0$, ya que es invertible. Así, $\varphi(a) \neq \lambda$ para todo λ con $|\lambda| > \|a\|$, y tenemos

$$\sup_{\|a\|=1} |\varphi(a)| \leq \sup_{\|a\|=1} \|a\| = 1.$$

Como $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$, concluimos que $\|\varphi\| = 1$. □

Ahora analizaremos brevemente la estructura topológica de $M_{\mathcal{A}}$. Dado que $\mathcal{A}^*$ puede ser dotada con una estructura de espacio topológico por tener una norma, y $M_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$, es natural pensar en dotar a $M_{\mathcal{A}}$ de la topología heredada por $\mathcal{A}^*$. Sin embargo, en este caso resultará más útil asociar al conjunto $M_{\mathcal{A}}$ con una topología alternativa.

Definición 2.5 (Topología débil-$*$). *Sea X un espacio de Banach. Se define la topología débil-$*$ en X^* como la topología más débil tal que para todo $x \in X$ la aplicación evaluación*

$$\begin{aligned} ev_x : & X^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \ell \longmapsto \ell(x) \end{aligned}$$

es continua. Esta también se denota como topología ω^*.

En particular, con esta topología $M_{\mathcal{A}}$ es un espacio topológico compacto. Para demostrar esta proposición, hará falta usar el Teorema de Banach-Alaoglu, del cual se puede encontrar una prueba en [6], p. 94.

Teorema 2.2 (Banach-Alaoglu). *Si $\mathcal{A}$ es un espacio normado, entonces la bola cerrada unitaria del espacio dual de $\mathcal{A}$, dada por $\{y \in \mathcal{A}^* : \|y\| \leq 1\}$ y denotada por $(\mathcal{A}^*)_1$, es compacta respecto a la topología débil-$*$.*

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Entonces $M_{\mathcal{A}}$ es un espacio compacto Hausdorff respecto a la topología débil-$*$.*

Demostración. Primero probaremos que $M_{\mathcal{A}}$ es Hausdorff bajo la topología débil-$*$:

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{A}^*$, tales que $\varphi \neq \psi$. Existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x) \neq \psi(x)$, de donde $ev_x(\varphi) \neq ev_x(\psi)$.

Además, como $\mathbb{C}$ es Hausdorff, existen U y V abiertos ajenos tales que $ev_x(\varphi) \in U$ y $ev_x(\psi) \in V$. Ya que ev_x es continua con la topología débil-$*$, tenemos que $ev_x^{-1}(U)$ y $ev_x^{-1}(V)$ son abiertos en $\mathcal{A}^*$, pero además son ajenos ya que de existir $\omega \in ev_x^{-1}(U) \cap ev_x^{-1}(V)$, tendríamos que $ev_x(\omega) \in U \cap V$, lo cual es una contradicción.

Por construcción, tenemos que $\varphi \in ev_x^{-1}(U)$ y $\psi \in ev_x^{-1}(V)$, por lo que $\mathcal{A}^*$ es Hausdorff. Como $M_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$, $M_{\mathcal{A}}$ también es Hausdorff.

Ahora, por el teorema de Banach-Alaoglu, $(\mathcal{A}^*)_1$ es compacta, y como $M_A \subseteq (\mathcal{A}^*)_1$, basta con probar que $M_\mathcal{A}$ es cerrado.

Consideremos una red $\{\varphi_j\}_{j\in J} \subseteq M_\mathcal{A}$ y $\varphi \in (\mathcal{A}^*)_1$ tal que $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ en la topología ω^*. Tenemos entonces que $ev_x(\varphi_j) \longrightarrow ev_x(\varphi)$, pues respecto a la topología ω^*, ev_x es continua para cada $x \in \mathcal{A}$. Es decir, que para cada $x \in \mathcal{A}$, $\varphi_j(x) \longrightarrow \varphi(x)$, con lo que tenemos convergencia puntual en $\mathcal{A}$.

Ahora, como $\varphi \in \mathcal{A}^*$, es lineal, por lo que solo resta mostrar que es multiplicativa y unitaria. Para esto, sean $x, y \in \mathcal{A}$, por la convergencia puntual tenemos que:

$$\varphi(ab) = \lim_{j\in J} \varphi_j(ab) = \lim_{j\in J} \varphi_j(a)\varphi_j(b) = \left(\lim_{j\in J} \varphi_j(a)\right)\left(\lim_{j\in J} \varphi_j(b)\right) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Por lo tanto φ es multiplicativa. Además,

$$\varphi(1_\mathcal{A}) = \lim_{j\in J} \varphi_j(1_\mathcal{A}) = \lim_{j\in J} 1_\mathbb{C} = 1_\mathbb{C},$$

y así, $\varphi \in M_\mathcal{A}$. De esta manera probamos que $M_\mathcal{A}$ es cerrado, y en consecuencia, compacto.

$\square$

En el caso en que $\mathcal{A}$ sea un álgebra de Banach sin unidad, se puede demostrar que $M_\mathcal{A}$ es Hausdorff y localmente compacto. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [14], p. 24.

Antes de pasar al siguiente resultado, haremos uso de una caracterización de espacios topológicos compactos que mencionamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si cualquier familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita*[1] *tiene intersección no vacía.*

Concluimos esta sección con la siguiente proposición.

[1]Dada una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados en un espacio topológico X, decimos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita si cada subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. En este caso diremos que $\mathcal{F}$ tiene la P.I.F.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Si $\varphi \in M_{\mathscr{C}(X)}$, entonces existe un único $x_0 \in X$ tal que, para toda $f \in \mathscr{C}(X)$, $\varphi(f) = f(x_0)$.*

Demostración. Sea $I = \ker \varphi \subset \mathscr{C}(X)$ y notemos que si $f \in \mathscr{C}(X)$ y $g \in \ker \varphi$, entonces $fg \in \ker \varphi$.

Definimos para cada $f \in \mathscr{C}(X)$, $K_f := \{x \in X : f(x) = 0\}$. Como f es continua, $K_f = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado. Veamos ahora que $\cap_{g \in I} K_g \neq \emptyset$. Dado que X es compacto, bastará con ver que la familia $\mathcal{F} = \{K_g : g \in I\}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Supongamos que $\cap_{i=1}^{n} K_{g_i} = \emptyset$ para algunos $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{F}$. Entonces para todo $x \in X$ existe $i_x \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g_{i_x}(x) \neq 0$. Luego, si definimos

$$g(x) := \sum_{i=0}^{n} |g_i(x)|^2 = \sum_{i=0}^{n} \overline{g_i(x)} g_i(x)$$

tenemos que $g(x) > 0$ y por lo tanto tiene inversa. Ya que $g_i \in I$, lo anterior implica que $g \in I = \ker \varphi$, de donde $1_{\mathscr{C}(X)} = g^{-1} g \in I$. Así, llegamos al absurdo $1 = \varphi(1_{\mathscr{C}(X)}) = \varphi(g^{-1}g) = 0$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ tiene la P.I.F y como X es compacto, $\cap_{g \in I} K_g \neq \emptyset$.

Sea $x_0 \in \cap_{g \in I} K_g$ y $f \in \mathscr{C}(X)$. Definimos $g := f - \varphi(f) 1_{\mathscr{C}(X)}$, tenemos que $\varphi(g) = \varphi(f) - \varphi(f)\varphi(1_{\mathscr{C}(X)}) = 0$ y por lo tanto $g \in I$. Luego,

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - (\varphi(f) 1_{\mathscr{C}(X)}(x_0)) = f(x_0) - \varphi(f),$$

de donde $\varphi(f) = f(x_0)$. Ya que la elección de $f \in \mathscr{C}(X)$ fue arbitraria, hemos probado que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda $f \in \mathscr{C}(X)$.

Ahora, supongamos que existe $x_1 \in X$, $x_1 \neq x_0$, con la misma propiedad. Ya que X es de Hausdorff, existen $U, V \subset X$ abiertos ajenos tales que $x_1 \in V$ y $x_0 \in U$, y por lo tanto existe $h \in \mathscr{C}(X)$ tal que $h(x_0) \neq h(x_1)$. Luego, $\varphi(h) = h(x_0)$ y $\varphi(h) = h(x_1)$, una contradicción. Por lo tanto, $x_1 = x_0$. □

2.1.1. Teoría espectral en álgebras de Banach

En la sección anterior introdujimos las nociones básicas de invertibilidad en álgebras de Banach. Gracias a estos conceptos podemos estudiar la teoría espectral en este contexto. Si bien nos interesa la teoría espectral en álgebras C^*, algunos resultados importantes de esta teoría no son exclusivos de este tipo de estructura, si no que son válidos en general para las álgebras de Banach.

Notación 2.3. *Dada un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, si tiene unidad la denotaremos por $1_{\mathcal{A}}$ y diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach unitaria.*

Notación 2.4. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria y $a \in \mathcal{A}$. Denotamos por $a - \lambda$ al elemento $a - \lambda 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.*

Definición 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Dado $a \in \mathcal{A}$, definimos su espectro, denotado por $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ o $\sigma(a)$, como sigue*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

- *Definimos el radio espectral de a, denotado por $r_\sigma(a)$, como:*

$$r_\sigma(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

- *Definimos el conjunto resolvente de a, denotado por $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ o $\rho(a)$, como:*

$$\rho_{\mathcal{A}}(a) = \rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

Notemos que $\rho_{\mathcal{A}}(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Proposición 2.6. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$ y $a \in \mathcal{A}$. Si $\sigma(a) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(a)$ es compacto y $r_\sigma(a) \leq \|a\|$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$, consideremos $F : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, $F(\lambda) = a - \lambda$. Tenemos que F es continua. Recordemos que G denota al conjunto de los elementos invertibles de $\mathcal{A}$. Entonces,

$$F^{-1}(G) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ es invertible en } \mathcal{A}\} = \rho(a).$$

Como G es abierto y F es continua, $\rho(a)$ es abierto, por lo que $\sigma(a) = \rho(a)^C$ es cerrado.

Dado que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$, para probar su compacidad basta con ver que es un conjunto acotado.
Sea $\lambda \in \sigma(a)$ y supongamos que $|\lambda| > \|a\|$. Note que $\lambda \neq 0$. Entonces:

$$\left\|1_{\mathcal{A}} - \left(1_{\mathcal{A}} - \frac{a}{\lambda}\right)\right\| = \left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < 1,$$

de modo que $1_{\mathcal{A}} - \lambda^{-1}a \in G$. Luego, $\lambda(1_{\mathcal{A}} - \lambda^{-1}a) = \lambda - a \in G$.

Multiplicando por -1, obtenemos que $a - \lambda \in G$ y entonces $\lambda \in \rho(a)$, una contradicción. Así, para todo $\lambda \in \sigma(a)$, $|\lambda| \leq \|a\|$. Por lo tanto $\sigma(a)$ es acotado. Luego, es compacto y $r_\sigma(a) \leq \|a\|$.

□

Un resultado importante establece que en toda álgebra de Banach con unidad, el espectro de cada elemento es no vacío. Antes de demostrar esto es necesario introducir una equivalencia conocida como la "identidad resolvente".

Lema 2.2 (Identidad resolvente). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con $1_{\mathcal{A}}$ y $a \in \mathcal{A}$. Dados $\lambda, \mu \in \rho(a)$, se satisface:*

$$\begin{aligned}
(a-\lambda)^{-1} - (a-\mu)^{-1} &= (\lambda-\mu)(a-\lambda)^{-1}(a-\mu)^{-1}, \\
(a-\lambda)^{-1} - (a-\mu)^{-1} &= (\lambda-\mu)(a-\mu)^{-1}(a-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}$$

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned}
(a-\lambda)^{-1} - (a-\mu)^{-1} &= (a-\lambda)^{-1}(1_{\mathcal{A}} - (a-\lambda)(a-\mu)^{-1}) \\
&= (a-\lambda)^{-1}((a-\mu) - (a-\lambda))(a-\mu)^{-1} \\
&= (a-\lambda)^{-1}(\lambda-\mu)(a-\mu)^{-1} \\
&= (\lambda-\mu)(a-\lambda)^{-1}(a-\mu)^{-1}.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
(a-\lambda)^{-1} - (a-\mu)^{-1} &= (a-\mu)^{-1}((a-\mu)(a-\lambda)^{-1} - 1_{\mathcal{A}}) \\
&= (a-\mu)^{-1}((a-\mu)(a-\lambda)^{-1} - (a-\lambda)(a-\lambda)^{-1}) \\
&= (a-\mu)^{-1}((a-\mu) - (a-\lambda))(a-\lambda)^{-1} \\
&= (\lambda-\mu)(a-\mu)^{-1}(a-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos la prueba. □

Como consecuencia de la identidad resolvente y el teorema de Liouville, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con $1_{\mathcal{A}}$. Para todo $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ es no vacío.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$. Consideremos la función $G : \rho(a) \to \mathcal{A}$ dada por $G(\lambda) = (a - \lambda)^{-1}$. Entonces, para $\lambda, \lambda_0 \in \rho(a)$, $\lambda \neq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\frac{G(\lambda) - G(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{(a-\lambda)^{-1} - (a-\lambda_0)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \frac{(\lambda - \lambda_0)(a-\lambda)^{-1}(a-\lambda_0)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \\ &= (a-\lambda)^{-1}(a-\lambda_0)^{-1}\end{aligned}$$

Como la inversión es continua, tenemos que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{G(\lambda) - G(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (a-\lambda)^{-1}(a-\lambda_0)^{-1} = (a-\lambda_0)^{-2}.$$

Por lo tanto G es holomorfa en $\rho(a)$. Ahora, sea $\varphi \in \mathcal{A}^*$ y $F : \rho(a) \to \mathbb{C}$ dada por $F(\lambda) = \varphi(G(\lambda))$. Entonces, por el Teorema 1.2, F es holomorfa sobre $\rho(a)$.

Luego, F es acotada:
Para λ tal que $|\lambda| > \|a\|$, de la demostración del Lema 2.1, tenemos que

$$\left(1_{\mathcal{A}} - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n},$$

y como

$$-\lambda G(\lambda) = \lambda(\lambda - a)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}(\lambda - a)\right)^{-1} = \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1},$$

obtenemos:

$$G(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}$$

Además, dado que $\|a\||\lambda|^{-1} < 1$, se tiene que

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}}.$$

Entonces

$$\|G(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|},$$

y por lo tanto

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \|G(\lambda)\| \leq \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} = 0.$$

De aquí que G sea acotada. Como $|F(\lambda)| = |\varphi(G(\lambda))| \leq \|\varphi\|\|G(\lambda)\|$, obtenemos también que F es acotada.

Ahora, supongamos que $\sigma(a) = \emptyset$. Entonces $\rho(a) = \mathbb{C}$ y $F : \rho(a) \to \mathbb{C}$ es entera y acotada, y por el Teorema de Liouville F es constante, es decir, $F(\lambda) = \varphi(G(\lambda)) = c$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Además, como $|F(\lambda)| \leq \|\varphi\|\|G(\lambda)\| \to 0$ cuando $|\lambda| \to \infty$, se tiene $c = 0$.

Por ser $\varphi \in \mathcal{A}^*$ es arbitraria, necesariamente $G(\lambda)$ se anula bajo cualquier funcional lineal, y entonces $(a - \lambda)^{-1} = G(\lambda) = 0$ lo cual es una contradicción, ya que $Dom(G) = \rho(a)$, por lo que todos los elementos de su imagen son invertibles.

Concluimos que $\sigma(a) \neq \emptyset$. $\square$

Observación 2.3. *De la demostración de la Proposición 2.7, tenemos que, si* $a \in \mathcal{A}$ *y* λ *es tal que* $|\lambda| > \|a\|$*, entonces*

$$\|(a - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}. \tag{2.3}$$

Al igual que en teoría de anillos, las álgebras de Banach se pueden clasificar de acuerdo a su estructura algebraica. Con esto en mente, definimos lo siguiente

Definición 2.7. *Un álgebra de Banach con unidad se llama con división si todo elemento distinto de* 0 *es invertible.*

Las álgebras de Banach con división se pueden caracterizar por el siguiente teorema

Teorema 2.4 (Gelfand-Mazur). *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach con división. Entonces* $\mathcal{A}$ *es isométricamente isomorfa a* $\mathbb{C}$*.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ tiene $1_{\mathcal{A}}$, sabemos que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Luego, dado $\lambda \in \sigma(a)$, $a - \lambda$ no es invertible, y dado que $\mathcal{A}$ es un álgebra con división, tenemos que $a - \lambda = 0$, por lo que $a = \lambda$. Además, si existe otro $z \in \sigma(a)$, tenemos $\lambda 1_{\mathcal{A}} = a = z 1_{\mathcal{A}}$, de donde $\lambda = z$. Así, se sigue que, para cada $a \in \mathcal{A}$, existe un único λ_a con $\sigma(a) = \{\lambda_a\}$ y $a = \lambda_a 1_{\mathcal{A}}$.

Ahora definimos $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dada por $\Phi(a) = \lambda_a$. Entonces, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ únicos tales que $a = \lambda_a 1_{\mathcal{A}}$ y $b = \lambda_b 1_{\mathcal{A}}$. Luego, $a + b = (\lambda_a + \lambda_b) 1_{\mathcal{A}}$, por lo que $\sigma(a+b) = \{\lambda_a + \lambda_b\}$, y entonces,

$$\Phi(a+b) = \lambda_a + \lambda_b = \Phi(a) + \Phi(b).$$

De manera similar, $ab = (\lambda_a \lambda_b) 1_{\mathcal{A}}$, de donde $\sigma(ab) = \{\lambda_a \lambda_b\}$, por lo que

$$\Phi(ab) = \lambda_a \lambda_b = \Phi(a)\Phi(b).$$

Además, dado $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $za = (z\lambda_a) 1_{\mathcal{A}}$, $\sigma(za) = \{z\lambda_a\}$ y luego,

$$\Phi(za) = z\lambda_a = z\Phi(a).$$

Así, tenemos que Φ es un homomorfismo de álgebras de Banach.

Por último, se tiene que $\|a\|_{\mathcal{A}} = |\lambda_a| \|1_{\mathcal{A}}\| = |\lambda_a| = \|\Phi(a)\|_{\mathbb{C}}$, y por lo tanto Φ es una isometría. De aquí se sigue, además, que Φ es inyectiva, y como es suprayectiva, tenemos que es un isomorfismo isométrico. $\square$

2.2. Álgebras C^*

En 1943, Israel Gelfand (1913-2009) y Mark Naimark (1909-1978) definieron lo que ahora conocemos como álgebra C^* y demostraron que toda álgebra C^* es isomorfa a una subálgebra-$*$ del álgebra de operadores en un espacio de Hilbert, cerrada con la norma de operadores.

Como mencionamos al inicio del capítulo, las álgebras C^* estuvieron ligadas desde un inicio al desarrollo de la mecánica cuántica, gracias al trabajo de John von Neumann entre 1927 y 1932.

Además, de acuerdo con [13], desde la década de 1960 han servido como un modelo matemático natural para la teoría cuántica de campos, y, sobre todo en las últimas décadas, el estudio de las álgebras C^* se ha convertido en una área activa de investigación con amplias conexiones hacia otras áreas de las matemáticas, entre ellas la topología, teoría de números, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, geometría diferencial y la teoría de matrices aleatorias.

Antes de introducir la noción de álgebra C^* es necesario definir el concepto de álgebra$-*$ de Banach. Este tipo de álgebras son simplemente álgebras de Banach dotadas con una involución, por lo que definiremos antes esta operación.

Definición 2.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Una involución en $\mathcal{A}$ es una operación, denotada por $*$, que satisface, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:*

1. $(a^*)^* = a$
2. $(ab)^* = b^*a^*$
3. $(a + \alpha b)^* = a^* + \bar{\alpha}b^*$.

un álgebra$-*$ es un álgebra dotada de una involución.

Con esto en mente podemos definir el concepto de álgebra C^*. La estructura adicional que este tipo de álgebras poseen nos permitirá obtener resultados de importancia fundamental para el desarrollo del capítulo 3.

Definición 2.9. *un álgebra C^* es un álgebra-$*$ que es además un álgebra de Banach y que satisface, para cualquier elemento a, la identidad*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

A esta indentidad la llamaremos identidad C^*.

Otro teorema debido a Gelfand y Naimark, distinto del que mostraremos en este capítulo, establece que si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, entonces es isométricamente isomorfa a una C^*-subálgebra de operadores de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ ([16] p. 109). Por esta razón, una definición alternativa de las álgebras C^* es precisamente la de aquellas subálgebras de algún $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ cerradas con la norma de operador.

Además, de acuerdo con [13], el término "álgebra C^*" fue introducido en 1947 por Irving E. Segal (1918–1998), y estaba reservado para las álgebras C^* "concretas", es decir, aquellas que son una subálgebra cerrada del álgebra $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. La "C" en C^* significaba "closed" en la topología dada por la norma de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, por lo que la idea detrás de este nombre era referir a que estas álgebras son cerradas en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, es decir, completas.

Dado que un álgebra-$*$ es simplemente un álgebra con una involución, consideramos pertinente comenzar esta sección mostrando algunas de las propiedades de esta operación.

Proposición 2.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$. Tenemos:*

1. *Si $\mathcal{A}$ es unitaria, entonces $1_{\mathcal{A}}^* = 1_{\mathcal{A}}$.*
2. *Para todo $a \in \mathcal{A}$, a es invertible si y sólo si a^* es invertible.*

Demostración. 1.- Notemos que, para todo $a \in \mathcal{A}$

$$1_{\mathcal{A}}^* a = (a^* 1_{\mathcal{A}})^* = (a^*)^* = a,$$

además

$$a 1_{\mathcal{A}}^* = (1_{\mathcal{A}} a^*)^* = (a^*)^* = a,$$

y por lo tanto $1_{\mathcal{A}}^* = 1_{\mathcal{A}}$.

2.- Si a es invertible, existe a^{-1}. Luego,

$$(a^{-1})^* a^* = (a a^{-1})^* = (1_{\mathcal{A}})^* = 1_{\mathcal{A}},$$

y también

$$a^* (a^{-1})^* = (a^{-1} a)^* = (1_{\mathcal{A}})^* = 1_{\mathcal{A}},$$

por lo que a^* es invertible y además $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

Por otro lado, si a^* es invertible, existe $(a^*)^{-1}$, de donde

$$a((a^*)^{-1})^* = ((a^*)^{-1}a^*)^* = (1_{\mathcal{A}})^* = 1_{\mathcal{A}},$$

y también

$$((a^*)^{-1})^*a = (a^*(a^*)^{-1})^* = (1_{\mathcal{A}})^* = 1_{\mathcal{A}}, \tag{2.4}$$

por lo que a es invertible.

$\square$

Además de las propiedades anteriores, la involución es compatible con la norma del álgebra en el siguiente sentido.

Lema 2.3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, entonces la involución es una isometría.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$.

Si $a = 0$, para todo $b \in \mathcal{A}$ se tiene $b + 0^* = (b^* + 0)^* = (b^*)^* = b$ y $0^* + b = (0 + b^*)^* = (b^*)^* = b$, y por lo tanto $a^* = 0^* = 0 = a$, de donde $\|a^*\| = \|0^*\| = \|0\| = \|a\|$.

Ahora, si $a \neq 0$, tenemos que $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$, de donde $\|a\| \leq \|a^*\|$.

Cambiando a por a^*, obtenemos $\|a^*\|^2 = \|aa^*\| \leq \|a\|\|a^*\|$, con lo que $\|a^*\| \leq \|a\|$, y finalmente $\|a^*\| = \|a\|$. $\square$

Observación 2.4. *Como las isometrías son continuas, tenemos que la involución en un álgebra C^* es continua.*

Ahora, veamos algunos ejemplos de álgebras C^*.

Ejemplo 2.7. *El conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$, es un álgebra C^*. De hecho, la identidad C^* es una generalización de la identidad $|z\bar{z}| = |z|^2$.*

Demostración. Claramente $\mathbb{C}$ es un álgebra de Banach. Además, es álgebra-$*$ si consideramos la involución dada por la conjugación, y satisface la identidad $|\overline{z}z| = |z|^2$

$\square$

Ejemplo 2.8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. El álgebra $\mathcal{A} := \mathscr{B}(\mathcal{H})$, con la involución dada por el adjunto, es un álgebra C^*:*

Demostración. Sean $T, S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Sabemos:

1. $(T^*)^* = T$
2. $(TS)^* = S^*T^*$
3. $(T + \lambda S)^* = T^* + \overline{\lambda}S^*$

Y por lo tanto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra-$*$. Además, como satisface la identidad C^*, es un álgebra C^*. □

Ejemplo 2.9. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. El álgebra $\mathcal{A} = \mathscr{C}(X)$, con la involución dada por la conjugación compleja, $f^* = \bar{f}$, es un álgebra C^* conmutativa con unidad.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, por lo que basta con ver que es un álgebra-$*$ y que satisface la identidad C^*.
La propiedad de ser álgebra-$*$ es heredada de $\mathbb{C}$ ya que las funciones de $\mathcal{A}$ toman valores complejos. Lo mismo ocurre con la identidad C^*:

$$\|f^*f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\overline{f}(x)f(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)|^2 = \left(\sup_{x\in X} |f(x)|\right)^2 = \|f\|_\infty^2$$

□

Ejemplo 2.10. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. El álgebra $\mathscr{C}_0(X)$ de funciones sobre X que se anulan en el infinito, con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y la involución dada por la conjugación compleja, es un álgebra C^*.*

Como último ejemplo, introducimos el espacio de funciones $f : G \to \mathbb{C}$, donde G es un grupo abeliano localmente compacto y Hausdorff, tales que

$$\int_G |f| d\mu < \infty,$$

donde μ es la medida de Haar izquierda (indistintamente derecha) sobre G. La importancia de este ejemplo radica en que este espacio, denotado como $L^1(G)$, tiene estructura de álgebra-$*$ de Banach, pero no de álgebra C^*, ya que no satisface la identidad C^*.

Ejemplo 2.11. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto y Hausdorff. Entonces $L^1(G)$ es un álgebra de Banach con la norma*

$$\|f\|_1 := \int_G |f| d\mu,$$

y el producto

$$f * g(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s).$$

Además, con la involución

$$f^*(x) = f(x^{-1}),$$

es una $*$-álgebra de Banach. Sin embargo, $L^1(G)$ no es un álgebra C^* a menos que G sea trivial. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [18], proposición 2.6.2.

Al igual que ocurre con las álgebras de Banach, las álgebras C^* sin unidad se pueden unitizar. Es decir, si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, entonces $\mathcal{A}^\dagger := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, con la suma coordenada a coordenada, el producto dado por 2.2 y la involución

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}),$$

es una $*$-álgebra de Banach con unidad, y se vuelve álgebra C^* con la norma

$$\|(a, \lambda)\| = \sup_{\|b\|=1} \|ab + \lambda b\|.$$

Más aún, el mapeo $a \mapsto (a, 0)$ es inyectivo y preserva la norma.

2.2.1. Teoría espectral en álgebras C^*

Al agregar la involución a un álgebra de Banach, podemos generalizar nociones de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert. En particular, veremos esta extensión para las propiedades del espectro de operadores unitarios y autoadjuntos.

Definición 2.10. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$, definimos:*

1. $\overline{\sigma(a)} := \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.

2. $\sigma(a)^{-1} := \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Además, si f es una función en $\mathbb{C}$ entera, con representación en serie de potencias

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \lambda^n,$$

definimos

$$f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} z_n a^n.$$

Proposición 2.9. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ con $1_{\mathcal{A}}$ y $a \in \mathcal{A}$ arbitrario. Entonces*

$$\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}.$$

Demostración. Recordemos que a es invertible si y sólo si a^* es invertible, por lo que también a no es invertible si y sólo si a^* no es invertible.

Como $(a - \lambda)^* = a^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{A}}$, tenemos que $a - \lambda$ no es invertible si y sólo si $a^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{A}}$ no es invertible.

Entonces $\lambda \in \sigma(a)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \in \sigma(a^*)$, y de aquí que $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ □

La involución nos permite generalizar a los operadores unitarios como sigue.

Definición 2.11. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con $1_{\mathcal{A}}$. Un elemento $u \in \mathcal{A}$ se llama unitario si $uu^* = u^*u = 1_{\mathcal{A}}$.*

Al igual que los operadores unitarios, para los elementos unitarios en álgebras C^*, tenemos que su espectro está contenido en $\mathbb{S}^1$. Para demostrar esto requeriremos del siguiente resultado.

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con $1_{\mathcal{A}}$ y $u \in \mathcal{A}$. Si u es invertible, entonces*

$$\sigma(u^{-1}) = \sigma(u)^{-1}$$

Demostración. Notemos que u es invertible si y sólo si $0 \notin \sigma(u)$, por lo que el conjunto $\sigma(u)^{-1}$ está bien definido.

Además, notemos que $u^{-1} - \lambda^{-1} = u^{-1}(\lambda - u)\lambda^{-1}$.

Por lo tanto, dado que u es invertible, tenemos que $u^{-1} - \lambda^{-1}$ no es invertible si y sólo si $\lambda - u$ no es invertible; es decir, $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ si y sólo si $\lambda \in \sigma(u)$, de donde $\sigma(u^{-1}) = \sigma(u)^{-1}$. $\square$

Lema 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Si $u \in \mathcal{A}$ es unitario, entonces*

$$\sigma(u) \subseteq \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{A}$ unitario y sea $\lambda \in \sigma(u)$.

Notemos que $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1_{\mathcal{A}}\| = 1$.

Ahora, supongamos $|\lambda| < 1$. Entonces $(\bar{\lambda})^{-1} \in \sigma(u)$, ya que

$$\bar{\lambda} \in \overline{\sigma(u)} = \sigma(u^*) = \sigma(u^{-1}) = \sigma(u)^{-1}$$

Como $r_\sigma(u) \leq \|u\| = 1$, tenemos que $|(\bar{\lambda})^{-1}| = |\bar{\lambda}|^{-1} < 1$, de donde $|\lambda| = |\bar{\lambda}| > 1$, lo cual es una contradicción, y así $|\lambda| \geq 1$.

Sin embargo, como $\sigma(u) \subseteq B(0, \|u\|)$ y $\|u\| = 1$, tenemos que $|\lambda| = 1$.

$\square$

De la misma manera que con los operadores unitarios, podemos generalizar la noción de operador autoadjunto de la manera siguiente

Definición 2.12. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con $1_{\mathcal{A}}$. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se llama autoadjunto si $a = a^*$.*

Esta generalización nos permite ver que al igual que con los operadores autoadjuntos, el espectro de elementos autoadjuntos en álgebras C^* está contenido en la recta real. Para ver esto haremos uso de la función exponencial definida sobre $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, de la siguiente manera:

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!},$$

y nos bastará con saber que, si $a, b \in \mathcal{A}$ conmutan, entonces se satisface $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Además, haremos uso del teorema del mapeo espectral, el cual sólo mencionaremos, sin embargo, se puede consultar [8], p. 41, para una demostración.

Teorema 2.5. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, $a \in \mathcal{A}$ y f es una función entera en $\mathbb{C}$, entonces:*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

Teorema 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Si $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunto, entonces*

$$\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Definimos $u = \exp(ia)$. Entonces:

$$u^* = \exp(ia)^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((ia)^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n a^n}{n!} = \exp(-ia),$$

donde la tercera igualdad se debe a la continuidad de la involución, y la siguiente a que $((ia)^n)^* = ((ia)^*)^n = (\bar{i}a^*)^n = (-ia)^n$. Así, por las propiedades de la función exponencial, tenemos:

$$uu^* = \exp(ia)\exp(-ia) = 1_{\mathcal{A}} = \exp(-ia)\exp(ia) = u^*u,$$

por lo que u es unitario.

Notemos que $ia - \lambda$ no es invertible si y sólo si $i\left(a - i^{-1}\lambda\right)$ no es invertible, y esto pasa si y sólo si $a - i^{-1}\lambda$ no es invertible, por lo que $\lambda \in \sigma(ia)$ si y sólo si $i^{-1}\lambda \in \sigma(a)$, es decir, $\sigma(ia) = i\sigma(a)$.

Además, por el Lema 2.5 tenemos que $\sigma(u) \subseteq \mathbb{S}^1$, y por el teorema del mapeo espectral, $\sigma(u) = \sigma(\exp(ia)) = \exp(\sigma(ia)) = \exp(i\sigma(a))$.

Finalmente, sea $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$. Entonces $\exp(i\lambda) = \exp(-y+ix) \in \sigma(u)$. Como $\exp(-y+ix) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$, y $\sigma(u) \subseteq \mathbb{S}^1$, necesariamente $y = 0$. $\square$

El siguiente teorema será de utilidad en la demostración del teorema de Gelfand-Naimark. Además, nos permitirá ver que la norma en un álgebra C^* está determinada de manera única. Utilizaremos la fórmula de Gelfand, también conocida como la fórmula del radio espectral, de la cual se puede encontrar una demostración en [6], p. 253.

Teorema 2.7 (Fórmula de Gelfand). *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$r_\sigma(a) = \lim_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Teorema 2.8. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunto, entonces:*

$$\|a\| = r_\sigma(a).$$

Demostración. Por la identidad C^*, para cada $n \geq 1$:

$$\|a^{2^n}\| = \|a^{2^{n-1}}a^{2^{n-1}}\| = \|(a^{2^{n-1}})^* a^{2^{n-1}}\| = \|a^{2^{n-1}}\|^2. \tag{2.5}$$

Además, para $n = 1$, se satisface

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}. \tag{2.6}$$

Luego, supongamos que se satisface 2.6 para $n \geq 1$, por la identidad 2.5 tenemos que

$$\|a^{2^{n+1}}\| = \|a^{2^n}\|^2 = (\|a\|^{2^n})^2 = \|a\|^{2^{n+1}},$$

y por inducción, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ para todo n.

Por último, usando la fórmula de Gelfand para el radio espectral, obtenemos el resultado:

$$r_\sigma(a) = \lim_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \|a\| = \|a\|.$$

□

Corolario 2.9. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, entonces, para todo $a \in \mathcal{A}$, tenemos:*

$$\|a\| = \sqrt{r_\sigma(a^*a)}$$

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces, $(a^*a)^* = a^*(a^*)^* = a^*a$, por lo que a^*a es autoadjunto. Por el Teorema 2.8 tenemos que:

$$r_\sigma(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

de donde

$$\|a\| = \sqrt{r_\sigma(a^*a)}.$$

$\square$

Para poder estudiar a las álgebras C^*, es necesario introducir a los morfismos que respetan su estructura, es decir, los homomorfismos-$*$

Definición 2.13. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras C^*. Un homorfismo-$*$ es una función $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que satisface:*

1. *Φ es lineal.*

2. *Φ es multiplicativa.*

3. *Φ respeta la involución, es decir, $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$.*

Además, su norma se define de la misma manera que para transformaciones lineales entre espacios de Banach, es decir,

$$\|\Phi\| := \sup_{\|a\| \leq 1} \|\Phi(a)\|_{\mathcal{B}}.$$

Cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras unitarias, llamamos a Φ unitario si $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Observación 2.5. *Si Φ es un homomorfismo-$*$ biyectivo, entonces Φ^{-1} también es homomorfismo-$*$.*

Teorema 2.10. *Si $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo-$*$ unitario entre dos álgebras C^* con unidad, entonces Φ es continua con $\|\Phi\| = 1$.*
Además, si Φ es biyectiva, entonces es una isometría.

Demostración. Como Φ es unitario, mapea elementos invertibles en elementos invertibles:

Dados $a, b \in \mathcal{A}$ con $ab = ba = 1_{\mathcal{A}}$, tenemos que $1_{\mathcal{B}} = \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ y también que $1_{\mathcal{B}} = \Phi(ba) = \Phi(b)\Phi(a)$.

De aquí que, si $\Phi(a) - \lambda 1_{\mathcal{B}} = \Phi(a - \lambda)$ es no invertible, entonces $a - \lambda$ es no invertible. Es decir, $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$.

Por otro lado, si $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunto, tenemos que $\Phi(a)$ también lo es, ya que $\Phi(a) = \Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ por ser homomorfismo-$*$. Entonces, como el radio espectral de $\Phi(a)$ es igual a su norma, y su espectro está contenido en el de a, tenemos

$$\|\Phi(a)\| = r_\sigma(\Phi(a)) \leq r_\sigma(a) = \|a\|.$$

Ya que lo anterior se satisface para cada elemento autoadjunto, y dado $a \in \mathcal{A}$ arbitrario, a^*a es autoadjunto, tenemos:

$$\|\Phi(a)\|^2 = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\| = \|\Phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Como $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, obtenemos que $\|\Phi\| = 1$.

Por último, si Φ es biyectiva, entonces Φ^{-1} también es homorfismo-$*$ unitario, y por lo que acabamos de mostrar, tenemos:

$$\|a\| = \|\Phi^{-1}(\Phi(a))\| \leq \|\Phi(a)\| \leq \|a\|.$$

Por lo tanto, en este caso, $\|\Phi(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$.

$\square$

2.2.2. El teorema de Gelfand-Naimark

En el artículo de 1943 de Gelfand y Naimark, titulado "*On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*", aparecieron por primera vez las álgebras C^* en la literatura. En ese artículo, demostraron que toda álgebra C^* conmutativa con unidad es isomorfa a $\mathscr{C}(X)$ para algún espacio compacto Hausdorff X, y usaron este resultado como un lema para demostrar que si el álgebra C^* no es conmutativa, el isomorfismo se da con una subálgebra de operadores acotados en algún espacio de Hilbert. Ambos teoremas son centrales para la teoría de álgebras C^*; en particular, en esta sección mostraremos el primero de ellos conocido como teorema de Gelfand-Naimark, o teorema espectral abstracto.

Definición 2.14. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Definimos la transformada de Gelfand sobre $\mathcal{A}$, de la siguiente manera:*

$$\Gamma : \mathcal{A} \to \mathscr{C}(M_{\mathcal{A}}), \qquad \Gamma(a) := ev_a|_{M_{\mathcal{A}}} = \widehat{a}$$

Dado $a \in \mathcal{A}$, denotaremos por Γ_a a su valor bajo la transformada de Gelfand.

Observación 2.6. *La Definición 2.14 también es válida para álgebras de Banach conmutativas con unidad. Sin embargo, en este trabajo nos interesa particularmente la transformada de Gelfand en álgebras C^*.*

En el caso del álgebra C^* $L^1(G)$ del ejemplo 2.11, cuando G está dado por $\mathbb{R}$ con la suma, la transformada de Gelfand es precisamente la transformada de Fourier, y de manera más general, muchas de las transformaciones integrales del análisis clásico se pueden ver como casos especiales de la transformada de Gelfand ([14], p. 23).

La transformada de Gelfand cumple diversas propiedas, entre las que nos interesa su relación con el espectro, que estudiamos a continuación.

Lema 2.6. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\sigma(\Gamma_a) = \Gamma_a(M_{\mathcal{A}}).$$

Demostración. Notemos que $\Gamma_a - \lambda : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ no es invertible si y sólo si existe $\omega \in M_{\mathcal{A}}$ tal que $(\Gamma_a - \lambda)(\omega) = \omega(a) - \lambda$ no es invertible.

Pero $\omega(a) - \lambda \in \mathbb{C}$ no es invertible únicamente cuando $\lambda = \omega(a)$.

Con esto, tenemos que $\lambda \in \sigma(\Gamma_a)$ si y sólo si $\lambda = \omega(a) = \Gamma_a(\omega)$ para algún $\omega \in M_{\mathcal{A}}$. Es decir, $\lambda \in \Gamma_a(M_{\mathcal{A}})$.

□

Haremos uso del siguiente teorema, mismo que se puede encontrar en [8], p. 41:

Teorema 2.11. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de C^* conmutativa con unidad y $a \in \mathcal{A}$, entonces a es invertible si y sólo si Γ_a es invertible.*

Teorema 2.12. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y $a \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\sigma(a) = \sigma(\Gamma_a).$$

Demostración. Por el Teorema 2.11 sabemos que a es invertible si y sólo si Γ_a es invertible.

Por lo tanto, $a - \lambda$ no es invertible si y sólo si $\Gamma_{a-\lambda} = \Gamma_a - \lambda\Gamma_{1_{\mathcal{A}}} = \Gamma_a - \lambda$ no es invertible, de donde obtenemos el resultado. $\square$

Recordaremos el teorema de Stone-Weierstrass, el cual se puede consultar en [7], p.122.

Teorema 2.13. *Sea X un espacio topológico compacto y $\mathscr{A}$ una subálgebra cerrada bajo las operaciones de $\mathscr{C}(X)$ tal que:*

1. $1_{\mathscr{C}(X)} \in \mathscr{A}$
2. *$\mathscr{A}$ separa puntos*
3. *Si $f \in \mathscr{A}$ entonces $\overline{f} \in \mathscr{A}$.*

Entonces, $\mathscr{A}$ es densa en $\mathscr{C}(X)$.

A continuación, demostraremos el teorema de Gelfand-Naimark.

Teorema 2.14 (Gelfand-Naimark). *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa con $1_{\mathcal{A}}$, entonces la transformada de Gelfand $\Gamma : A \to \mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$ es un isomorfismo-$*$ isométrico unitario.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\omega \in M_{\mathcal{A}}$. Entonces:

1. $\Gamma_{\lambda a+b}(\omega) = \omega(\lambda a + b) = \lambda\omega(a) + \omega(b) = \lambda\Gamma_a(\omega) + \Gamma_b(\omega)$.
2. $\Gamma_{xy}(\omega) = \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) = \Gamma_x(\omega)\Gamma_y(\omega)$.
3. $\Gamma_{x^*}(\omega) = \omega(x^*) = \overline{\omega(x)} = \overline{\Gamma_x(\omega)}$.
4. $\Gamma_{1_{\mathcal{A}}}(\omega) = \omega(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})}(\omega)$.

Por lo tanto, la transformada de Gelfand es un homomorfismo-$*$ unitario.

Luego, dado $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto, sabemos que su radio espectral es igual a su norma y que Γ_a también es autoadjunto, además de que $\sigma(a) = \sigma(\Gamma_a)$. En este caso, $\|\Gamma_a\| = r_\sigma(\Gamma_a) = r_\sigma(a) = \|a\|$.

Ahora, si a es un elemento arbitrario de $\mathcal{A}$, tenemos que a^*a es autoadjunto y entonces:

$$\|a\|_{\mathcal{A}}^2 = \|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \|\Gamma_{a^*a}\|_{\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})} = \|\overline{\Gamma}_a\Gamma_a\|_{\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})} = \|\Gamma_a\|_{\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})}^2,$$

por lo que Γ es una isometría.

Además, dados $\omega, \psi \in M_{\mathcal{A}}$ con $\omega \neq \psi$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\omega(a) \neq \psi(a)$, es decir, tal que $\Gamma_a(\omega) \neq \Gamma_a(\psi)$. Así, $\Gamma(\mathcal{A})$ es una $\mathbb{C}$-subálgebra con unidad de $\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$ que separa puntos, y por el teorema de Stone-Weierstrass, tenemos que $\Gamma(\mathcal{A})$ es denso en $\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$.

Ahora, como $\mathcal{A}$ es completo y la transformada de Gelfand es una isometría, tenemos que $\Gamma(\mathcal{A})$ es cerrado:

Sean (Γ_{x_j}) una sucesión en $\Gamma(\mathcal{A})$ y $f \in \mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$ tales que $\Gamma_{x_j} \to f$ en la norma de $\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$. Entonces (Γ_{x_j}) es de Cauchy y como la transformada de Gelfand es una isometría, (x_j) también es de Cauchy.

Además, como $\mathcal{A}$ es completo, existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $x_j \to x$, y usando de nuevo que Γ es una isometría, tenemos que $\Gamma_{x_j} \to \Gamma_x$, de donde $f = \Gamma_x \in \Gamma(\mathcal{A})$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{A})$ es cerrado.

Entonces $\Gamma(\mathcal{A}) = \overline{\Gamma(\mathcal{A})} = \mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$ y así, la transformada de Gelfand es suprayectiva.

De esta manera, concluimos que la transformada de Gelfand es un isomorfismo-$*$ isométrico unitario.

$\square$

De manera más general, si $\mathcal{A}$ es un álgebra-$*$ de Banach conmutativa y simétrica[2], entonces $\Gamma(\mathcal{A})$ es una sub-álgebra densa de $C_0(M_{\mathcal{A}})$. Si además $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo-$*$ isométrico entre $\mathcal{A}$ y $C_0(M_{\mathcal{A}})$. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [19], p. 8.

[2]Decimos que $\mathcal{A}$ es simétrica si para cada $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$ y $a \in \mathcal{A}$ se tiene $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.

54

Capítulo 3

Una mirada al cálculo funcional

El 7 de noviembre de 1925, Paul Dirac publicó su primer artículo sobre mecánica cuántica: "*The Principles of Quantum Mechanics*". En este, propuso un esquema conceptual general para entender las teorías cuánticas, que consistía de las nociones de "equivalencia algebraica" y "cuantización de cantidades clásicas" ([20], p. 8).

El problema de cuantización, de acuerdo con [21], se puede reformular matemáticamente como el problema de la construcción de un cálculo funcional.

En general, un cálculo funcional (también llamado cálculo simbólico), es un homomorfismo entre un álgebra de funciones, como $\mathscr{C}(X)$ y un álgebra de Banach, por ejemplo, $\mathscr{B}(\mathcal{H})$[1].

Si χ es un elemento de un álgebra de Banach con unidad $\mathcal{A}$, y

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$$

es un polinomio con coeficientes complejos α_i, es claro que podemos definir el significado del símbolo $f(\chi)$, de la siguiente manera

$$f(\chi) = \alpha_0 1_{\mathcal{A}} + \alpha_1\chi + \cdots + \alpha_n\chi^n.$$

[1]En este capítulo, $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert y $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{H}$.

La pregunta que surge es si el símbolo $f(\chi)$ puede ser definido como elemento de $\mathcal{A}$ para otras clases de funciones.

Tenemos otro ejemplo de esta relación, dado por la función meromorfa,

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}.$$

En este caso, la definición natural de $f(\chi)$ está dada por

$$f(\chi) = (\alpha 1_{\mathcal{A}} - \chi)^{-1},$$

y esta expresión tiene sentido para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\chi \in \mathcal{A}$ que satisfacen $\alpha \in \rho(\chi)$. Notemos que en este caso, f es holomorfa en un abierto que contiene a $\sigma(\chi)$. Como veremos más adelante, esta propiedad es la que nos permitirá desarrollar el cálculo funcional holomorfo para operadores lineales y acotados.

Además, si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es normal, bastará con que f sea una función continua sobre $\sigma(T)$ para que el símbolo $f(T)$ pueda ser interpretado como un operador normal y acotado en $\mathcal{H}$.

3.1. Cálculo funcional continuo

A lo largo de esta sección, centraremos nuestra atención en el álgebra C^* dada por los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert, y algunas de sus sub-álgebras, por lo que introduciremos los siguientes conceptos.

Definición 3.1. *Sean T un operador normal en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. Definimos el álgebra C^* con unidad generada por T, que denotamos $C^*(T)$, como el álgebra C^* más chica en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ que contiene a T y al operador identidad.*

Definición 3.2. *Dado un operador $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, definimos el conjunto $A_0(T)$, como sigue*

$$A_0(T) := \left\{ \sum_{k=0}^{N} a_k T^{n_k} (T^*)^{m_k} : N \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{C}, n_k, m_k \in \mathbb{N} \right\}.$$

A los elementos de $A_0(T)$ los denotaremos por $\mathcal{P}(T, T^*)$.

A continuación, veremos la relación que existe entre $A_0(T)$ y $C^*(T)$. Esto será de gran importancia para poder demostrar el teorema espectral que será la base para definir el cálculo funcional continuo.

Lema 3.1. *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es normal, entonces $C^*(T)$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y además, $C^*(T) = \overline{A_0(T)}$.*

Demostración. Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, y $A_0 = A_0(T)$. Entonces $A_0 \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una subálgebra con unidad ya que la multiplicación y suma entre elementos de A_0 es de nuevo un elemento de A_0. Además, es conmutativa pues $T^*T = TT^*$ y es cerrada bajo la involución ya que $(T^*)^* = T$.

Ahora, como $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es completo, y $\mathcal{A} := \overline{A_0}$ es cerrado, tenemos que $\mathcal{A}$ es completo, por lo que es un álgebra C^* conmutativa con $1_{\mathcal{A}}$. Para ver que $\mathcal{A} = C^*(T)$, notemos que por definición $C^*(T) \subseteq \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* que contiene a T y al $1_{\mathcal{A}}$.

Además, si $\mathcal{B}$ es un álgebra C^* que contiene a T y a $1_{\mathcal{A}}$, tenemos que $A_0 \subseteq \mathcal{B}$, pero como $\mathcal{B}$ es completo y $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$, tenemos que $\mathcal{B}$ es cerrado, por lo que $\overline{A_0} \subseteq \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ está contenido en cada álgebra C^* que contenga a T y al $1_{\mathcal{A}}$, y concluimos que $\mathcal{A} \subseteq C^*(T)$, por lo que $\mathcal{A} = C^*(T)$.

$\square$

Con esto, hemos desarrollado toda la herramienta necesaria para poder probar el teorema espectral que a continuación enunciamos.

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ normal. Entonces*

1. *$M_{C^*(T)}$ con la topología ω^*, es homeomorfo a $\sigma(T)$.*
2. *La transformada de Gelfand induce un homomorfismo-$*$*

$$\tilde{\Gamma} : C^*(T) \longrightarrow \mathscr{C}(\sigma(T))$$

que es una isometría suprayectiva y además satisface

a) $\tilde{\Gamma}_T = Id_{\sigma(T)}$.

b) $\tilde{\Gamma}_{T^*} = \overline{Id_{\sigma(T)}}$.

c) $\tilde{\Gamma}_{1_{C^*(T)}} = 1_{\sigma(T)}$.

Demostración. Denotaremos por M a $M_{C^*(T)}$. Además, definimos

$$\begin{aligned} F : M &\longrightarrow \sigma(T) = \sigma_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}(T) \\ \omega &\longmapsto \Gamma_T(\omega) = \omega(T). \end{aligned}$$

F está bien definida y es suprayectiva por el Lema 2.6 y el Teorema 2.14.

Ahora, si $\omega_1, \omega_2 \in M$ son tales que $F(\omega_1) = F(\omega_2)$, por definición tenemos $\Gamma_T(\omega_1) = \Gamma_T(\omega_2)$, de donde $\overline{\Gamma_T(\omega_1)} = \overline{\Gamma_T(\omega_2)}$, y como la transformada de Gelfand preserva adjuntos, se sigue que $\Gamma_{T^*}(\omega_1) = \Gamma_{T^*}(\omega_2)$.

Por lo tanto, $\omega_1(T) = \omega_2(T)$ y $\omega_1(T^*) = \omega_2(T^*)$. Además, ya que ω_1, ω_2 son multiplicativas, para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\omega_1(T^n(T^*)^m) = \omega_1(T)^n\omega_1(T^*)^m = \omega_2(T)^n\omega_2(T^*)^m = \omega_2(T^n(T^*)^m)$$

Así, $\omega_1 = \omega_2$ sobre A_0. Dado que son continuas y $\overline{A_0} = C^*(T)$, se tiene que $\omega_1 = \omega_2$ en $C^*(T)$ y por lo tanto $\omega_1 = \omega_2$, por lo que F es inyectiva.

Ahora, veamos que $F : (M, \omega^*) \longrightarrow (\mathbb{C}, \tau)$ es continua, donde τ es la topología usual de $\mathbb{C}$.

Sea $(\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset M$ una red tal que $\lim\limits_{\alpha} \omega_\alpha = \omega$ en la topología ω^* para alguna $\omega \in M$. Sabemos que la convergencía en la topología débil-$*$ implica convergencia puntual, por lo que

$$\lim_{\alpha} F(\omega_\alpha) = \lim_{\alpha} \Gamma_T(\omega_\alpha) = \lim_{\alpha} \omega_\alpha(T) = \omega(T) = \Gamma_T(\omega) = F(\omega).$$

Luego, como F es continua, biyectiva y su dominio es compacto y Hausdorff, tenemos que F es cerrada, por lo que su inversa es continua y por lo tanto es un homeomorfismo.

Para la última parte de la prueba, definimos

$$\begin{aligned} F^* : \mathscr{C}(M) &\longrightarrow \mathscr{C}(\sigma(T)) \\ g &\longmapsto g \circ F^{-1} \end{aligned}$$

Entonces, dadas $g, h \in \mathscr{C}(M)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos

1. $F^*(g + \lambda h) = (g + \lambda h) \circ F^{-1} = g \circ F^{-1} + \lambda(h \circ F^{-1}) = F^*(g) + \lambda F^*(h)$
2. $F^*(gh) = (gh) \circ F^{-1} = (g \circ F^{-1})(h \circ F^{-1}) = F^*(g)F^*(h)$
3. $F^*(\overline{g}) = \overline{g} \circ F^{-1} = \overline{g \circ F^{-1}} = \overline{F^*(g)}$.

Así, F^* es un homomorfismo-$*$, y como veremos a continuación, es un isomorfismo.

Dada $h \in \mathscr{C}(\sigma(T))$, tenemos que $h \circ F \in \mathscr{C}(M)$ y además

$$F^*(h \circ F) = (h \circ F) \circ F^{-1} = h,$$

por lo que F^* es suprayectiva.

Luego, si $g, h \in \mathscr{C}(M)$ son distintas, existe $\omega \in M$ tal que $g(\omega) \neq h(\omega)$, y como F es homeomorfismo, existe $\lambda \in \sigma(T)$ con $\omega = F^{-1}(\lambda)$, de donde $(g \circ F^{-1})(\lambda) \neq (h \circ F^{-1})(\lambda)$, y por lo tanto F^* es inyectiva.

Además, ya que F es un homeomorfismo entre M y $\sigma(T)$, tenemos que

$$\|g\|_{\mathscr{C}(M)} = \sup_{\omega\in M} |g(\varphi)| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |g(F^{-1}(\lambda))| = \|g \circ F^{-1}\|_{\mathscr{C}(\sigma(T))}$$

Y por lo tanto, F^* es un isomorfismo-$*$ isométrico.

Con esto, la transformada de Gelfand $\Gamma : C^*(T) \longrightarrow \mathscr{C}(M)$ induce el homomorfismo

$$\begin{aligned} F^* \circ \Gamma : C^*(T) \longrightarrow &\mathscr{C}(M) \longrightarrow \mathscr{C}(\sigma(T)) \\ S \longmapsto &\Gamma_S \longmapsto \Gamma_S \circ F^{-1} \end{aligned}$$

Denotando $\tilde{\Gamma} = F^* \circ \Gamma$, ya que Γ y F^* son homomorfismos-$*$ isométricos y suprayectivos, tenemos que $\tilde{\Gamma}$ también lo es.

Por último, dado $\lambda \in \sigma(T)$, se tiene $\lambda = F(\omega)$ para algún $\omega \in M$, y entonces

1. $\tilde{\Gamma}_T(\lambda) = \Gamma_T(F^{-1}(\lambda)) = \Gamma_T(\omega) = F(\omega) = \lambda = Id_{\sigma(T)}(\lambda)$.
2. $\tilde{\Gamma}_{T^*}(\lambda) = \overline{\Gamma_T(F^{-1}(\lambda))} = \overline{Id_{\sigma(T)}(\lambda)}$.
3. $\tilde{\Gamma}_{1_{C^*(T)}}(\lambda) = \Gamma_{1_{C^*(T)}}(\omega) = \omega(1) = 1 = 1_{\sigma(T)}(\lambda)$.

Como se quería demostrar. $\square$

Observación 3.1. *El homomorfismo dado por el Teorema 3.1 es único.*

Corolario 3.2. *Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Existe un único isomorfismo $\Phi : C^*(T) \longrightarrow \mathscr{C}(\sigma(T))$ tal que*

1. $\Phi(T) = Id_{\sigma(T)}$.
2. $\Phi(T^*) = \overline{Id_{\sigma(T)}}$.
3. $\Phi(1) = 1_{\sigma(T)}$.

Demostración. La existencia está dada por el Teorema 3.1. Ahora, si Φ es otra función que satisface las propiedades mencionadas, y $\mathcal{P}(T, T^*) \in A_0(T)$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{P}(T, T^*)) &= \mathcal{P}(\Phi(T), \Phi(T^*)) \\ &= \mathcal{P}(\tilde{\Gamma}(T), \tilde{\Gamma}(T^*)) \\ &= \tilde{\Gamma}(\mathcal{P}(T, T^*)). \end{aligned}$$

Y como $A_0(T)$ es denso en $C^*(T)$, tenemos que $\Phi = \tilde{\Gamma}$.

$\square$

Antes de definir el cálculo funcional continuo, partiremos del cálculo funcional para polinomios. Para esto, sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$. Definimos el cálculo funcional de polinomios como el mapeo

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}[z] &\longrightarrow \mathscr{B}(X) \\ p &\longmapsto p(T), \end{aligned}$$

que a cada polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \ \in \mathbb{C}[z],$$

le asigna el operador acotado

$$p(T) := a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_n T^n \ \in \mathscr{B}(X).$$

Este mapeo es un homomorfismo de álgebras.

Ahora, dado un operador normal y acotado, definimos su cálculo funcional continuo, haciendo uso del Teorema 3.1 como sigue

Definición 3.3. *Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Definimos el cálculo funcional continuo de T, como el mapeo*

$$\begin{aligned} \Phi_T : \mathscr{C}(\sigma(T)) &\longrightarrow C^*(T) \\ f &\longmapsto f(T) := \tilde{\Gamma}^{-1}(f). \end{aligned}$$

Donde $\tilde{\Gamma}$ es la transformada de Gelfand del Teorema 3.1, la cual establece un isomorfismo-$*$ isométrico entre $C^*(T)$ y $\mathscr{C}(\sigma(T))$.

Observación 3.2. *Consideremos el polinomio*

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n, \quad \lambda \in \sigma(T).$$

Entonces, para el operador

$$S = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n \in C^*(T),$$

tenemos

$$\tilde{\Gamma}(S) = F^*(\Gamma(S)) = \Gamma_S \circ F^{-1} \in \mathscr{C}(\sigma(T))$$

y además, para cada $\lambda \in \sigma(T)$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(S)(\lambda) = \Gamma_S(F^{-1}(\lambda)) &= a_0 + a_1\Gamma_T(F^{-1}(\lambda)) + \ldots + a_n(\Gamma_T(F^{-1}(\lambda)))^n \\ &= a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n.\end{aligned}$$

De esta manera, $\tilde{\Gamma}(S) = f$, por lo que $S = \tilde{\Gamma}^{-1}(f)$, y entonces, el cálculo funcional continuo extiende al cálculo funcional de polinomios.

Observación 3.3. *Si S es un operador en $\mathcal{H}$ que conmuta con T y T^*, entonces conmuta con cada operador de A_0, y por lo tanto con cada operador en $\overline{A_0} = C^*(T)$. En particular, en este caso se tiene que S conmuta con $\varphi(T)$ para cada $\varphi \in \mathscr{C}(\sigma(T))$.*

A continuación presentaremos algunos resultados sobre operadores en espacios de Hilbert usando este cálculo funcional.

Notación 3.1. *Por simplicidad, denotaremos por Γ a la transformada de Gelfand del Teorema 3.1.*

Proposición 3.1. *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es normal, entonces T es positivo si y sólo si $\sigma(T)$ es no negativo. Por otro lado, T es autoadjunto si y sólo si $\sigma(T)$ es real.*

Demostración. Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un operador normal; veamos que T es positivo si y sólo si $\sigma(T)$ es no negativo:

Sabemos que si T es positivo entonces $\sigma(T)$ es no negativo. Por otro lado, si $\sigma(T)$ es no negativo y Γ es la transformada de Gelfand de $C^*(T)$ en $\mathscr{C}(\sigma(T))$, como $\Gamma(T) = Id_{\sigma(T)}$, tenemos que $\Gamma(T) \geq 0$. Por lo tanto existe una función φ continua en $\sigma(T)$ y tal que $\Gamma(T) = |\varphi|^2 = \overline{\varphi}\varphi$. Luego

$$T = \Gamma^{-1}(\overline{\varphi})\Gamma^{-1}(\varphi) = \varphi(T)^*\varphi(T),$$

y entonces, para cada $f \in \mathcal{H}$

$$< Tf, f >=< \varphi(T)^*\varphi(T)f, f >=< \varphi(T), \varphi(T) >= \|\varphi(T)\|^2 \geq 0.$$

Por lo que T es un operador positivo.

Ahora, veamos que T es autoadjunto si y sólo si $\sigma(T)$ es real:

Si T es autoadjunto, por la proposición 2.6 sabemos que $\sigma(T)$ es real. Ahora, si $\sigma(T)$ es real, entonces $\Gamma(T) = Id_{\sigma(T)}$ es una función real-valuada, y por lo tanto $T = \Gamma^{-1}(Id_{\sigma(T)}) = \Gamma^{-1}(\overline{Id_{\sigma(T)}}) = \Gamma^{-1}(Id_{\sigma(T)})^* = T^*$. $\square$

A continuación, probaremos la existencia y unicidad de la "raíz cuadrada de un operador positivo".

Teorema 3.3. *Si P es un operador positivo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe un único operador positivo Q tal que $Q^2 = P$. Además, Q conmuta con cada operador que conmuta con P.*

Demostración. Como P es positivo, tenemos que $\sigma(P)$ es no negativo, y entonces la función $\varphi(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre $\sigma(P)$. Por lo tanto,

$$\sqrt{P} := \varphi(P) = \Gamma^{-1}(\varphi),$$

es un operador bien definido en $\mathcal{H}$ (donde Γ es la transformada de Gelfand entre $C^*(P)$ y $\mathscr{C}(\sigma(P))$) que es positivo, ya que $\sigma(\sqrt{P}) = \sqrt{\sigma(P)}$, por el teorema del mapeo espectral.

Además,

$$(\sqrt{P})^2 = \Gamma^{-1}(\varphi) \circ \Gamma^{-1}(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi\varphi) = \Gamma^{-1}(Id_{\sigma(P)}) = P$$

Y como $\sqrt{P} = \Gamma^{-1}(\varphi)$, con $\varphi \in C(\sigma(P))$, por la Observación 3.3, tenemos que $\sqrt{P}$ conmuta con cada operador que conmute con P.

Por último, veamos que $\sqrt{P}$ es el único operador positivo Q tal que $Q^2 = P$.

Sea Q un operador positivo con dicha propiedad. Entonces

$$QP = QQ^2 = Q^2Q = PQ,$$

por lo que Q y P conmutan. De aquí que $\sqrt{P}$ conmuta con Q y la álgebra C^* generada por $P, \sqrt{P}$ y Q, que denotaremos por $\mathcal{A}$, es conmutativa.

Luego, tomando la transformada de Gelfand Γ de $\mathcal{A}$ en $\mathscr{C}(M_{\mathcal{A}})$, tenemos que $\Gamma(\sqrt{P})$ y $\Gamma(Q)$ son funciones no negativas, debido a que la imagen de

$\Gamma(\sqrt{P})$ es $\sqrt{\sigma(P)}$ y la imagen de $\Gamma(Q)$ es $\sigma(Q)$. Además, como la transformada de Gelfand es un homorfismo, se sigue que $\Gamma(\sqrt{P})^2 = \Gamma(P) = \Gamma(Q)^2$, de donde obtenemos $\Gamma(\sqrt{P}) = \Gamma(Q)$ y por la inyectividad de Γ, $Q = \sqrt{P}$.

$\square$

Corolario 3.4. *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, entonces T es positivo si y sólo si existe un operador $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ tal que $T = S^*S$.*

Demostración. Si T es positivo, entonces $S = \sqrt{T}$ es autoadjunto ya que su espectro es real; se sigue que $T = S^2 = S^*S$.
Si $T = S^*S$, tenemos $< Tf, f >=< S^*Sf, f >=< Sf, Sf >= \|Sf\|^2 \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{H}$, por lo que T es positivo.

$\square$

3.2. Cálculo funcional holomorfo

En esta última sección, trataremos dos versiones del cálculo funcional holomorfo de Riesz. En ambas, fijamos un operador lineal y acotado, T, en un espacio de Banach arbitrario, $\mathcal{X}$.

En la primera versión, que llamaremos *simple*, partimos de un disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ para definir un homomorfismo continuo entre el álgebra de funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$ y el álgebra de operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{X}$.

La segunda versión, que llamaremos *completa*, considera, en vez de un disco, un conjunto abierto arbitrario $\mathcal{U}$ tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$, con el objetivo de establecer un homomorfismo continuo entre el álgebra de funciones holomorfas sobre $\mathcal{U}$ y el álgebra de operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{X}$.

3.2.1. Versión simple

Recordemos que, en general, cuando $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, $\mathscr{B}(\mathcal{X})$, es un álgebra de Banach. Particularmente, en la sección 2.1.1 desarrollamos la teoría espectral para álgebras de Banach que usaremos en esta sección.

Este estudio lo hicimos en base al elemento asociado $(a-\lambda)$ de un elemento a arbitrario en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$. Sin embargo, las definiciones (de espectro y conjunto resolvente) son equivalentes, y los resultados son los mismos, cuando se utiliza el elemento $(\lambda - a) = -(a - \lambda)$.

La ventaja de utilizar esta última definición, radica en el uso de la fórmula integral de Cauchy para espacios de Banach, que probamos en el primer capítulo, como base para el cálculo funcional holomorfo que veremos más adelante.

Notación 3.2. *Dado un operador $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\lambda - T$ al operador $\lambda 1_{\mathscr{B}(\mathcal{X})} - T$.*

Definición 3.4. *Dado un operador $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, definimos al mapeo resolvente* *como*

$$
\begin{aligned}
R_T &: \rho(T) \to \mathscr{B}(\mathcal{X}) \\
R_T(\lambda) &:= (\lambda - T)^{-1}
\end{aligned}
$$

La siguiente propiedad nos permitirá utilizar la fórmula integral de Cauchy para el mapeo resolvente.

Lema 3.2. *El mapeo resolvente $R_T : \rho(T) \to \mathscr{B}(\mathcal{X})$ es holomorfo sobre $\rho(T)$.*

Demostración. Por la identidad resolvente, dados $\lambda, \nu \in \rho(T)$, con $\lambda \neq \nu$, tenemos que

$$R_T(\lambda) - R_T(\nu) = -(\lambda - \nu)R_T(\lambda)R_T(\nu)$$

Dividiendo por $\lambda - \nu$ y sumando $R_T(\nu)^2$ en ambos lados

$$\frac{R_T(\lambda) - R_T(\nu)}{\lambda - \nu} + R_T(\nu)^2 = (R_T(\nu) - R_T(\lambda))R_T(\nu)$$

Luego, como R_T es continua sobre $\rho(T)$

$$\lim_{\lambda \to \nu} \left\| \frac{R_T(\lambda) - R_T(\nu)}{\lambda - \nu} + R_T(\nu)^2 \right\| \leq \lim_{\lambda \to \nu} \|R_T(\nu) - R_T(\lambda)\| \|R_T(\nu)\| = 0$$

Por lo tanto $R_T \in \mathrm{Hol}(\rho(T), \mathscr{B}(\mathcal{X}))$.

$\square$

Otra propiedad del mapeo resolvente que nos será de utilidad es la siguiente desigualdad:

Observación 3.4. *Notemos que, por la Observación 2.3, para λ con $|\lambda| > \|T\|$, tenemos que*

$$\|R_T(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \tag{3.1}$$

Con estas propiedades en mente, definimos a continuación el operador $f(T)$, cuando f es holomorfa sobre un disco que contiene a $\sigma(T)$.

Definición 3.5. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$. Además, sea $s > r_\sigma(T)$, de manera que $\sigma(T) \subset \mathbb{D}_s$. Para cada función $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$, definimos*

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda \tag{3.2}$$

Donde $r \in (r_\sigma(T), s)$ es tal que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}_r$, y $\gamma_r := re^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$.

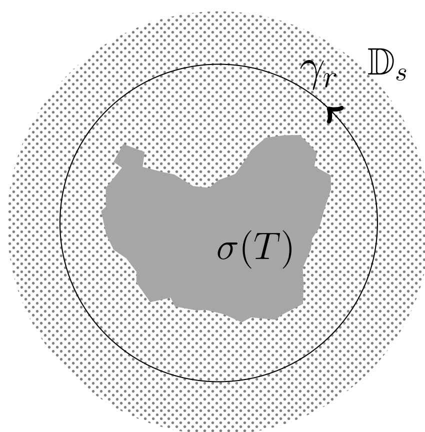

Figura 3.1. Por el Teorema 2.7 el espectro de T es no vacío, y además es compacto. Fijamos un disco abierto $\mathbb{D}_s$ que lo contenga y luego seleccionamos $r \in (r_\sigma(T), s)$ de manera que $\sigma(T)$ está contenido en la curva γ_r, de orientación positiva.

Observación 3.5. *Por el Teorema 1.4, tenemos que para cada $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$, el producto $fR_T : \mathbb{D}_s \cap \rho(T) \to \mathscr{B}(\mathcal{X})$ es una función holomorfa y entonces, por el teorema de Cauchy para espacios de Banach, la integral 3.2 no depende de la elección de $r \in (r_\sigma(T), s)$.*

Ahora, por el teorema de Cauchy del análisis complejo, sabemos que si $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ y $r \in (|a|, s)$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(\lambda)(\lambda - a)^{-1}d\lambda$$

Notemos que, sustituyendo $f(T)$ por $f(a)$ y $R_T(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$ por $(\lambda - a)^{-1}$, obtenemos la integral dada en la definición 3.2.

Ahora, veremos que el mapeo $f \mapsto f(T)$ es un homomorfismo continuo de álgebras de Banach con unidad entre las álgebras $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ y $\mathscr{B}(\mathcal{X})$. Este homomorfismo es conocido como el cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford, en su versión "simple".

Teorema 3.5. *Sean T un operador acotado sobre un espacio de Banach $\mathcal{X}$ y $s > 0$ tales que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}_s$. Entonces, el mapeo*

$$\begin{aligned} \Psi_T : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s) &\longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{X}) \\ f &\mapsto f(T), \end{aligned}$$

definido en 3.2, es un homomorfismo de álgebras con unidad tal que $\Psi_T(Id_{\mathbb{C}}) = T$. Además, es continuo respecto a la convergencia local uniforme[2].

Demostración. Sean $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Por la linealidad de la integral, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} (\alpha f + g)(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\left(\alpha \int_{\gamma_r} f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda + \int_{\gamma_r} g(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda\right)$$

Y por lo tanto $\Psi_T(\alpha f + g) = \alpha \Psi_T(f) + \Psi_T(g)$, de donde Ψ_T es lineal.

Ahora, sea (f_n) una sucesión en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ que converge uniformemente a f de manera local en $\mathbb{D}_s$.

Ya que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} R_T(z) dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{1}{|z| - \|T\|} dz = \mathrm{ind}_{\gamma_r}(\|T\|) \in \{0, 1\},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|\Psi_T(f_n) - \Psi_T(f)\| &= \frac{1}{2\pi i}\left\| \int_{\gamma_r} (f_n(z) - f(z)) R_T(z) dz \right\| \\ &\leq \sup_{z \in \Gamma_r} |f_n(z) - f(z)| \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} R_T(z) dz \right\| \\ &\leq \sup_{z \in \Gamma_r} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

[2]Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ que converge uniformemente a f de manera local en $\mathbb{D}_s$, entonces $\Psi_T(f_n) \longrightarrow \Psi_T(f)$ respecto a la norma de operadores de $\mathscr{B}(\mathcal{X})$.

Donde $|f_n(z) - f(z)|$ converge a 0 sobre Γ_r, esto pues si nos restringimos a Γ_r, donde Γ_r tiene la topología de subespacio, tenemos que Γ_r es compacto y además f_n converge uniformemente de manera local a f, por lo que la cubierta abierta

$$\mathcal{F} := \{\mathbb{D}_\nu(z) \cap \Gamma_r : z \in \Gamma_r \text{ y } f_n \text{ converge unif. en } \mathbb{D}_\nu(z)\}$$

tiene una subcubierta finita, de manera que f_n converge uniformemente a f sobre una cantidad finita de abiertos que cubren a Γ_r, y entonces converge uniformemente a f sobre Γ_r.

Ahora, para ver que Ψ_T es multiplicativa, sean $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$ y sea $r' \in (r, s)$, entonces, por la Definición 3.2 y el Lema 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi_T(f)\Psi_T(g) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_r}\int_{\gamma_{r'}} f(z)g(w)R_T(z)R_T(w)dwdz \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_r}\int_{\gamma_{r'}} f(z)g(w)\frac{1}{w-z}(R_T(z) - R_T(w))dwdz\end{aligned}$$

Distribuyendo $(R_T(z) - R_T(w))$ y usando el Teorema 1.12

$$\begin{aligned}\Psi_T(f)\Psi_T(g) = \frac{1}{(2\pi i)^2}&\int_{\gamma_r} f(z)\int_{\gamma_{r'}}\frac{g(w)}{w-z}dwR_T(z)dz \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{r'}}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{w-z}dzg(w)R_T(w)dw.\end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Cauchy, para cada $z \in \Gamma_r$ tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}}\frac{g(w)}{w-z}dw = g(z)$$

ya que $r' > r$ y z está en el interior de $\Gamma_{r'}$.

Además, para cada $w \in \Gamma_{r'}$, como $r < r'$, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{w-z}dz = 0$$

Y por lo tanto,

$$\Psi_T(f)\Psi_T(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)g(z)R_T(z)dz = \Psi_T(fg).$$

Ahora, para ver que $\Psi_T(Id_{\mathbb{C}}) = T$, notemos que, para cada $z \in \rho(T)$,

$$I + TR_T(z) - zR_T(z) = I - (z - T)R_T(z) = I - I = 0$$

Y por lo tanto

$$zR_T(z) = I + TR_T(z) \tag{3.3}$$

Luego,

$$\Psi_T(Id_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} zR_T(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} I + TR_T(z)dz$$

Por la fórmula integral de Cauchy del Teorema 1.11 aplicada a $K \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s, \mathscr{B}(\mathcal{X}))$ dada por $K(z) = zI$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} Idz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{zI}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{K(z)}{z-0}dz = K(0) = 0$$

Y por el Teorema 1.10,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} TR_T(z)dz = T\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} R_T(z)dz = T\Psi_T(\mathbf{1})$$

Donde **1** denota la función constante 1 en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s)$.

Por lo tanto, basta con mostrar que $\Psi_T(\mathbf{1}) = 1_{\mathscr{B}(\mathcal{X})}$. Por la ecuación 3.3 tenemos que

$$\Psi_T(\mathbf{1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} R_T(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{I}{z} + \frac{TR_T(z)}{z}dz$$

Para $H \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_s, \mathscr{B}(\mathcal{X}))$ dada por $H(z) = I$, se tiene

$$I = H(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{H(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{I}{z}dz.$$

Y por la Observación 3.4

$$\|TR_T(z)\| \leq \|T\|\frac{1}{|z| - \|T\|},$$

de aquí que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{TR_T(z)}{z} dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{\|T\|}{|z|(|z| - \|T\|)} dz \to 0, \quad r \to \infty. \tag{3.4}$$

Como la integral definida por Ψ_T no depende de r, siempre que $r > r_\sigma(T)$, tenemos que $\Psi_T(\mathbf{1}) = I$, con lo que concluimos la prueba.

$\square$

3.2.2. Versión completa

Ahora extenderemos la versión "simple" del cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford, a la clase de funciones holomorfas sobre cualquier abierto $\mathcal{U}$ que contenga al espectro de T.

Para desarrollar este cálculo funcional, utilizaremos la versión de la fórmula integral de Cauchy para espacios de Banach del Teorema 1.15, así como el siguiente teorema del análisis complejo, cuya demostración se puede consultar en [1], p. 268.

Teorema 3.6. *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ un subconjunto compacto. Entonces existe una trayectoria orientada positiva Γ tal que $\mathcal{K} \subseteq \operatorname{ins}\Gamma \subseteq \mathcal{U}$.*

Debido a este teorema, la siguiente definición tiene sentido:

Definición 3.6. *Sean T un operador acotado en un espacio de Banach $\mathcal{X}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\sigma(T) \subseteq \mathcal{U}$ y Γ una trayectoria orientada positiva en $\mathcal{U} \setminus \sigma(T)$ tal que $\sigma(T) \subseteq \operatorname{ins}(\Gamma) \subseteq \mathcal{U}$.*

Entonces, para cada $f \in \operatorname{Hol}(\mathcal{U})$, definimos

$$f(T) := \int_\Gamma f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda. \tag{3.5}$$

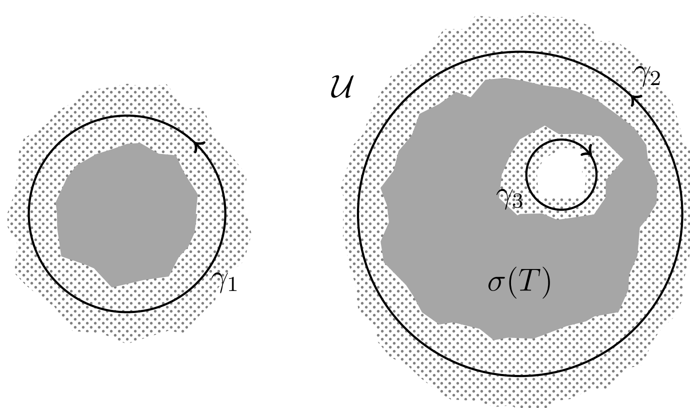

Figura 3.2. Si el espectro de T no es conexo o no es homotópico a un punto, a diferencia de la versión simple, ahora podemos definir el operador $f(T)$ en los casos en que f es holomorfa sobre algún abierto $\mathcal{U}$ que es disconexo o no es homotópico a un punto.

Proposición 3.2. *La integral de 3.5 no depende de la elección de la trayectoria Γ tal que $\sigma(T) \subseteq \operatorname{ins} \Gamma \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Sean Γ y Λ dos trayectorias con la propiedad mencionada. Afirmamos que la trayectoria $\Delta := \Gamma \oplus -\Lambda$, dada por la unión de las curvas en Γ con las curvas de Δ pero estas últimas en sentido contrario, satisface $\operatorname{ins} \Delta \subseteq \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$; para esto, sea $\lambda \in \operatorname{Ins} \Delta$, tenemos que

$$\operatorname{ind}_\Delta(\lambda) = \operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) + \operatorname{ind}_{-\Lambda}(\lambda) = \operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) - \operatorname{ind}_\Lambda(\lambda) \in \{-1, 1\}.$$

Como Γ y Λ son orientadas positivas, si $\Delta = \Gamma \oplus -\Lambda$ es orientada positiva, tenemos que $\operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) = 1$ y $\operatorname{ind}_\Lambda(\lambda) = 0$, entonces $\lambda \in \operatorname{ins}(\Gamma) \subseteq \mathcal{U}$ y $\lambda \notin \operatorname{ins}(\Lambda) \supseteq \sigma(T)$, por lo que $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$.

Por otro lado, si Δ es orientada negativa, tenemos que $\operatorname{ind}_\Lambda(\lambda) = 1$ y que $\operatorname{ind}_\Gamma(\lambda) = 0$, de donde $\lambda \in \operatorname{ins}(\Lambda) \subseteq \mathcal{U}$ y $\lambda \notin \operatorname{ins}(\Gamma) \supseteq \sigma(T)$, por lo que $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$.

En cualquier caso, $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$ y por lo tanto $\operatorname{ins} \Delta \subseteq \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$.

Además, para $g(\lambda) := f(\lambda) R_T(\lambda)$, tenemos que $g \in \operatorname{Hol}(\mathcal{O}, \mathscr{B}(\mathcal{X}))$ por el Lema 3.2 y el Teorema 1.4. Luego, por el Teorema 1.15 aplicado al conjunto abierto $\mathcal{O} := \mathcal{U} \setminus \sigma(T)$ y la función holomorfa g, tenemos

$$0 = \int_\Delta g(\lambda) d\lambda = \int_\Gamma f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda - \int_\Lambda f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda.$$

□

Con este resultado, podemos ver que este cálculo funcional extiende a la versión simple.

Proposición 3.3. *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ y Ψ_T es el morfismo definido en 3.2, entonces para cada $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}_s)$, con $s > 0$ tal que $\sigma(T) \subset \mathbb{D}_s$, se tiene $\Psi_T(f) = f(T)$.*

Demostración. Si $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}_s)$ y r es tal que $r \in (0, s)$ y γ_r contiene a $\sigma(T)$, entonces, como $\mathcal{U} := \mathbb{D}_s$ es un abierto que contiene a $\sigma(T)$, tenemos que

$$\Psi_T(f) = \int_{\gamma_r} f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda = \Phi_T(f),$$

ya que γ_r es una curva cerrada simple con orientación positiva y por lo tanto es una trayectoria orientada positiva, que además satisface
$\sigma(T) \subseteq \text{ins } \gamma_r \subseteq \mathcal{U}$.

$\square$

A continuación, mostraremos que el mapeo $f \mapsto f(T)$ es un homomorfismo de álgebras con unidad entre $\text{Hol}(\mathcal{U})$ y $\mathscr{B}(\mathcal{X})$. Este mapeo es conocido como el cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford.

Teorema 3.7. *Sean $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{U}$ abierto en $\mathbb{C}$ tales que $\sigma(T) \subseteq \mathcal{U}$. Entonces el mapeo*

$$\begin{aligned} \Phi_T : \text{Hol}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{X}) \\ f &\mapsto f(T), \end{aligned}$$

dado por 3.5, es un homomorfismo de álgebras unitarias tal que $\Phi(Id_{\mathbb{C}}) = T$. Además, es continuo con respecto a la convergencia local uniforme.

Demostración. Debido a la linealidad de la integral sobre trayectorias, tenemos, para cada $f, g \in \text{Hol}(\mathcal{U})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\Phi_T(\alpha f + g) = \alpha \int_\Gamma f(\lambda) R_T(\lambda) + \int_\Gamma g(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda = \alpha \Phi_T(f) + \Phi_T(g).$$

Por lo tanto $\Phi_T(\alpha f + g) = \alpha \Phi_T(f) + \Phi_T(g)$, de donde Φ_T es lineal.

Ahora, sea (f_n) una sucesión en $\text{Hol}(\mathcal{U})$ que converge uniformemente a f de manera local en $\mathcal{U}$.

Para cada Γ_j

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_T(z) dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{|z| - \|T\|} dz = \text{ind}(\|T\|, \Gamma_j).$$

Luego

$$\begin{aligned} \|\Phi_T(f_n) - \Phi_T(f)\| &= \frac{1}{2\pi i} \left\| \int_\Gamma (f_n(z) - f(z)) R_T(z) dz \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sup_{z \in \Gamma_j} |f_n(z) - f(z)| \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_T(z) dz \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sup_{z \in \Gamma_j} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

Y por lo tanto Φ_T es continua respecto a la convergencia local uniforme.

Además, como Φ_T extiende al cálculo funcional holomorfo simple Ψ_T, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_T(Id_{\mathbb{C}}) &= \Psi_T(Id_{\mathbb{C}}) = T\\ \Phi_T(\mathbf{1}) &= \Psi_T(\mathbf{1}) = 1_{\mathscr{B}(\mathcal{X})}.\end{aligned}$$

Ahora, para ver que Φ_T es multiplicativa, sean $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U})$ y sea Λ una trayectoria orientada positiva en $\mathcal{U}\backslash(\sigma(T)\cup\Gamma)$ tal que $\sigma(T)\cup\Gamma \subset \mathrm{ins}\,\Lambda \subset \mathcal{U}$, la cual existe por el Teorema 3.6 ya que $\sigma(T) \cup \Gamma$ es compacto.

Así, usando la identidad resolvente y el Teorema 1.16 se sigue que

$$\begin{aligned}\Phi_T(f)\Phi_T(g) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_\Lambda f(z)g(w)R_T(z)R_T(w)dwdz\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_\Lambda f(z)g(w)\frac{1}{w-z}(R_T(z)-R_T(w))dwdz\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(z)\int_\Lambda \frac{g(w)}{w-z}dwR_T(z)dz\\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Lambda\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}dzg(w)R_T(w)dw\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.14, para cada $z \in \Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{g(w)}{w-z}dw = g(z)$$

ya que $z \in \mathrm{ins}\,\Lambda$.

Además, para cada $w \in \Lambda$, como $w \in \mathrm{out}\,\Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}dz = 0$$

Y por lo tanto,

$$\Phi_T(f)\Phi_T(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)g(z)R_T(z)dz = \Phi_T(fg)$$

□

Observación 3.6. *El cálculo funcional holomorfo extiende al cálculo funcional de polinomios:*

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n.$$

Tenemos que f *es holomorfa sobre* $\mathcal{U}$*, y además*

$$f(\lambda) = (a_0\boldsymbol{1} + a_1 Id_{\mathbb{C}} + \ldots + a_n(Id_{\mathbb{C}})^n)(\lambda),$$

y por lo tanto

$$\Phi_T(f) = a_0\Phi_T(\boldsymbol{1}) + a_1\Phi_T(Id_{\mathbb{C}}) + \ldots + a_n(\Phi_T(Id_{\mathbb{C}}))^n.$$

Es decir

$$f(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n.$$

De la teoría del análisis complejo tenemos el siguiente resultado, del cual se puede consultar una demostración en [1], p. 272.

Teorema 3.8. *Sean* $\Omega, A \subset \mathbb{C}$*, tal que* Ω *es abierto y* A *tiene un punto en cada componente conexa de* $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$*. Además, sea* $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$*. Entonces existe una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones racionales con polos únicamente en* A*, tal que* $f_n \to f$ *uniformemente sobre subconjuntos compactos de* Ω*.*

Utilizando este resultado, mostraremos que el cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford extiende al cálculo funcional continuo.

Teorema 3.9. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *normal. Además, sea* $f \in \mathscr{C}(\sigma(T))$ *tal que existen* $\mathcal{U}$ *abierto que contiene a* $\sigma(T)$ *y* $h \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U})$ *con* $h|_{\sigma(T)} = f$*. Entonces,* $h(T) = f(T)$*, donde* $f(T)$ *está dada por el cálculo funcional continuo.*

Demostración. Si h es una funcion racional, tanto el cálculo funcional holomorfo como el continuo extienden al cálculo de polinomios, y entonces $h(T) = f(T)$. Luego, si h no es racional, por el Teorema 3.8 existen h_n funciones racionales en $\mathrm{Hol}(\mathcal{U})$ que convergen a h de manera uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathcal{U}$, y como el cálculo funcional holomorfo es continuo, $h_n(T)$ converge a $h(T)$.

Por otro lado, si definimos $f_n := h_n|_{\sigma(T)}$, entonces f_n converge a f uniformemente en $\sigma(T)$, y debido a las propiedades del cálculo funcional continuo, $f_n(T)$ converge a $f(T)$. Como $h_n(T) = f_n(T)$ para toda n, se sigue que $h(T) = f(T)$. $\square$

Para concluir, mostraremos una aplicación del cálculo funcional holomorfo de Riesz-Dunford probando un teorema sobre la existencia del logaritmo de T para ciertos operadores en $\mathscr{B}(\mathcal{X})$.

Una de las condiciones que debe satisfacer T será que el 0 esté en la única componente no acotada y conexa de $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, esta componente existe ya que $\sigma(T)$ es acotado y entonces $\{r : r > r_\sigma(T)\} \subset C \setminus \sigma(T)$ es no acotado y conexo. Cuando se cumpla esta condición, diremos que $\sigma(T)$ *no separa al* 0 *del* ∞.

Además, requeriremos del siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sean $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$, con $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ abierto, y $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U})$. Además, sean $\mathcal{U}_g$ una vecindad abierta de $\sigma(f(T))$, y $g \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U}_g)$. Finalmente, sea $\mathcal{U}_h = \{\lambda \in \mathcal{U} : f(\lambda) \in \mathcal{U}_g\}$ y $h(\lambda) = g(f(\lambda))$. Entonces, $\sigma(f(T)) \subset \mathcal{U}_g$, y $h(T) = g(f(T))$.*

Una demostración de este resultado se puede consultar en [17], Teorema 6.8.

A continuación, demostraremos el último teorema de esta tesis, que podemos comparar con el Teorema 3.3, el cual es consecuencia del cálculo funcional continuo.

Teorema 3.11. *Supongamos que $T \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ es invertible, y que $\sigma(T)$ no separa al 0 del ∞. Entonces*

1. *Existe un logaritmo para T, es decir, $S \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tal que $\exp(S) = T$.*

2. *Dado $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existe $S \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tal que $S^n = T$.*

Demostración. Por hipótesis, 0 está en la componente no acotada y conexa de $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, por lo que existe $\mathcal{U}$ abierto tal que $\sigma(T) \subset \mathcal{U}$ y $0 \notin \mathcal{U}$. Entonces, existe $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U})$ tal que

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda, \quad \lambda \in \mathcal{U}.$$

Sea $S = f(T)$, entonces ya que $Id_{\mathcal{U}} = \exp \circ f$, por el Teorema 3.10, tenemos

$$\exp(S) = \exp(f(T)) = \Phi_T(\exp \circ f) = \Phi_T(Id_{\mathcal{U}}) = T.$$

Por último, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tomamos $P = \exp(S/n)$, y entonces

$$P^n = \exp(S) = T.$$

$\square$

Bibliografía

[1] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*, 3a ed. In McGraw-Hill, Inc. eBooks

[2] Conway, J. B. (1978). *Functions of one complex variable.* Springer My Copy UK.

[3] Zaldivar, F. (2012). *Teoría de funciones de una variable compleja.*

[4] Feldman, J. (2018). *Analytic Banach space valued functions.* UBC.Ca. Recuperado el 23 de abril de 2023, de https://personal.math.ubc.ca/ feldman/m511/analytic.pdf

[5] Mikusiński, J. (1978) *The Bochner Integral*. Academic Press, Elsevier.

[6] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics.

[7] Conway, J. B. (2019). *A Course in Functional Analysis*. Springer Graduate texts in mathematics.

[8] Douglas, R. G. (2012). *Banach algebra techniques in operator theory*, 2a ed. Nueva York, NY, Estados Unidos de América: Springer.

[9] Haase, M. (2018). *Lectures on functional calculus.* 21st International Internet Seminar. Kiel University.

[10] Kubrusly, C. S. (2012). *Spectral theory of operators on Hilbert spaces* (2012a ed.). Cambridge, MA, Estados Unidos de América: Birkhäuser.

[11] Dixmier, J. (1977). *C^*-algebras.* North-Holland mathematical library; V.15.

[12] Kadison, & Ringrose. (2012). *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras: Special Topics Advanced Theory—An Exercise Approach*. Springer Science & Business Media.

[13] Doran, R. M. (1986). *Characterizations of C* Algebras: the Gelfand Naimark Theorems*. Marcel Dekker.

[14] N. P. Landsman (1998). *Lecture Notes on C*-Algebras, Hilbert C*-modules,and Quantum Mechanics*. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam.

[15] Kerr, D. (2021). *C*-algebras: structure and classification*. Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach.

[16] Blackadar, B. (2006). *Operator Algebras: Theory of C*-Algebras and von Neumann Algebras*. Springer Berlin, Heidelberg.

[17] Williams, D. *Lecture notes on the spectral theorem*. Department of Mathematics, Dartmouth College, Hanover.

[18] Deitmar, A., & Echterhoff, S. (2014). *Principles of Harmonic analysis*. In Universitext. Springer Nature.

[19] Su, D. (2016) The Fourier Transform for Locally Compact Abelian Groups. University of Chicago REU papers.

[20] Carosso, A. (2022). *Quantization: History and problems*. Studies in History and Philosophy of Science, 96, 35–50.

[21] Kisil, V. V., & De Arellano, E. R. (1996). *The Riesz–Clifford Functional Calculus for Non-Commuting Operators and Quantum Field Theory*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 19(8), 593–605.

[22] Derezinski, J. *Introduction to Quantization*. Dept. of Math. Methods in Phys., Faculty of Physics, University of Warsaw.