Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Sobre una familia de polinomios matriciales tipo Hurwitz

TESIS

que para optar por el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Rafael Alejandro Blanco Sierra
2251495d@umich.mx

Asesor: Dr. Abdon Eddy Choque Rivero
Titulo del asesor: Doctor
Asesor
Instituto de Física y Matemáticas
abdon.choque@umich.mx

Morelia, Michoacán, México
Enero, 2024

Para mis padres, sin ustedes no habría podido llegar hasta aquí

Contents

Sobre una familia de polinomios matriciales tipo Hurwitz

Rafael Alejandro Blanco Sierra

Resumen

Para el parámetro $\alpha \in [0, \infty)$, sean $\mathbf{h}(t, \alpha)$ y $\mathbf{g}(t, \alpha)$ polinomios matriciales de la variable t en la descomposición $\mathbf{f}(t, \alpha) = \mathbf{h}(t^2, \alpha) + t\,\mathbf{g}(t^2, \alpha)$ de la matriz polinomial $\mathbf{f}(t, \alpha)$. En este trabajo relacionamos la familia de polinomios matriciales tipo Hurwitz $\mathbf{f}(t, \alpha)$ con una familia finita de polinomios ortogonales $(P_j(t, \alpha))_{j \geqslant 0}$ en $t \in [0, +\infty)$ para el parámetro $\alpha \in [0, +\infty)$ y sus polinomios de segunda especie $(Q_j(t, \alpha))_{j \geqslant 0}$. También probamos que cualquier solución extremal del problema de momentos truncados matricial de Stieltjes puede ser expresado como el cociente de $\mathbf{h}(t, \alpha)$ y $\mathbf{g}(t, \alpha)$. Como una aplicación, verificamos que un sistema lineal de EDO con coeficientes que dependen de un parámetro es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov sí y solo sí su polinomio característico admite una representación mediante un miembro de una familia de polinomios ortogonales y su polinomio de segunda especie.

Abstract

For the parameter $\alpha \in [0, \infty)$, let $\mathbf{h}(t, \alpha)$, the matrix polynomials $\mathbf{h}(t, \alpha)$ and $\mathbf{g}(t, \alpha)$ are matrix polynomials of the variable t in the decomposition $\mathbf{f}(t, \alpha) = \mathbf{h}(t^2, \alpha) + t\,\mathbf{g}(t^2, \alpha)$ of the matrix polynomial $\mathbf{f}(t, \alpha)$. In this work, we relate the family of Hurwitz-type matrix polynomials $\mathbf{f}(t, \alpha)$ with a finite family of orthogonal polynomials $(P_j(t, \alpha))_{j \geqslant 0}$ in $t \in [0, +\infty)$ for the parameter $\alpha \in [0, +\infty)$ and their second kind polynomials $(Q_j(t, \alpha))_{j \geqslant 0}$. We also prove that any extreme solution of the truncated matrix Stieltjes moment problem can be expressed as the quotient of $\mathbf{h}(t, \alpha)$ and $\mathbf{g}(t, \alpha)$. As an application, we verify that a linear system of ODEs with coefficients depending on a parameter is asymptotically stable in the Lyapunov sense if and only if its characteristic polynomial can be represented by a member of a family of orthogonal polynomials and its second kind polynomial.

Agradecimientos

"No mires hacia atrás ni hacia adelante, mira en tí sin temor ni nostalgia. Nadie desciende en si mismo mientras permanezca esclavo del pasado o del futuro".
-Émil Cioran-.

Todo comienzo de una nueva etapa debe de tener un final, es el ciclo natural de las cosas. Por lo regular de las veces no existe un tiempo determinado para esto último, es decir, en ocasiones un ciclo puede llegar a durar más tiempo que otro.
A lo largo del camino suceden muchas cosas, algunas buenas y otras no tanto, sin embargo siempre debemos recordar que no somos más que la suma de nuestras experiencias, vivencias y recuerdos, es por esta razón que en esta sección quiero agradecer a todos aquellos que me brindaron la dicha que recorrer este camino conmigo.

A la UNAM y la UMSNH, por permitirme realizar mis estudios de maestría en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas.

Al CONACyT por haberme otorgado una beca durante el tiempo de mis estudios. Sin ese apoyo este trabajo no habría sido posible.

A mis padres que siempre estuvieron para apoyarme y darme palabras de aliento.

A mis amigos del posgrado Miguel, Mario, Sandy, Ismael, Itzel, Ángel, Mariana, Baruch, Edgar, Fernando, Erick, Axel, Goretty. Ustedes se convirtieron en mi segunda familia.

A mis amigos de Guadalajara, Rosa, Josue, Jazz, Cynthia, Pancho, Hugo, Lupe, Kenia, Bere, Diana, Bibian, Vika, Tony, Beto, Laura. Que a pesar de que nos separaba la distancia, siempre buscaron como hacerse el tiempo para escucharme.

A los chicos de Discord, David, Odin, Sams, Alicia, Dokka, Jordan, Fox. Ustedes hicieron que los días pesados fueran más llevaderos.

A mis hermanas y sobrinos, Mariana, Elizabeth, Paulina, Jair, Valeria, Mia y Mauricio. Que nunca dudaron del chiflado de su hermano y tío.

Al doctor Abdon Eddy Choque Rivero por su paciencia y apoyo durante mi paso por el posgrado.

Un agradecimiento especial a todo mi grupo de 3°A del 2020, muchachos lo logramos.

A Liz, que llegaste sin avisar pero justo cuando mas lo necesitaba.

Y a todas aquellas personas que estuvieron a mi lado no me alcanzará la vida para agradecerles todo lo que hicieron por mi.

Introducción

Los polinomios de Hurwitz son una herramienta fundamental en el estudio de sistemas dinámicos y estabilidad de sistemas lineales. Se llama polinomio de Hurwitz al polinomio que satisface que todas sus raíces tienen parte real negativa. Estos polinomios, introducidos por Adolf Hurwitz (1859-1919), pueden ser caracterizados por el criterio que lleva su nombre, el cual consiste en una matriz formada por los coeficientes del polinomio y la verificación de que todos sus menores principales son positivos.

En esta tesis consideramos los polinomios matriciales tipo Hurwitz de la forma

$$\mathbf{f}_n(z,\alpha) := A_0(\alpha)z^n + A_1(\alpha)z^{n-1} + \ldots + A_n(\alpha). \tag{0.0.1}$$

Aquí A_k son matrices de $q \times q$. En este trabajo nos enfocamos en los poliniomios matriciales tipo Hurwitz paramétricos (PMTH paramétricos) y su relación con los polinomios matriciales ortogonales (PMO) y los polinomios ortogonales segunda especie que dependen de un parámetro.
En el caso escalar los PMTH paramétricos son estudiados en la Teoría de control y estabilidad (ver [1, capítulo 2, página 29]).

Motivación

Una de las motivaciones principales es estudiar la estabilidad de los sistemas diferenciales lineales con incertidumbre descritos por matrices bloque. Ver en el caso escalar [1, página 25]. En el ejemplo 3, página 42 del presente trabajo analizamos la estabilidad de un sistema diferencial que depende de un parámetro descrito por matrices de dimensión 2.
También nos motiva el estudio de sistemas control lineales que involucran matrices bloque y controles multientradas. Ver [24], [27] y [26]. En el caso escalar, en [9] y [10] se aplicaron resultados relacionados con los polinomios tipo Hurwitz a problema de estabilidad y estabilización.

Objetivo de la tesis

Sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ una familia de PMTH con parámetro $\alpha \in [0,\infty)$. Sea $\mathbf{h}_n(t,\alpha)$ y $\mathbf{g}_n(t,\alpha)$ la parte par e impar de $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$. Estos partes aparecen en la descomposición

$$\mathbf{f}_n(t,\alpha) = \mathbf{h}_n(t^2,\alpha) + t\mathbf{g}_n(t^2,\alpha)$$

del polinomio $f(t,\alpha)$. En esta tesis consideramos una familia de polinomios $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ que admite una representación en términos de fracciones continuas (ver(1.1.5)) en la cual aparecen ciertos parámetros $(\mathbf{c}_k(\alpha))_{k=0}^{m}$ y $(\mathbf{d}_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}$ dichos parámetros se les conoce como parametrización de Hurwitz. Por otro lado justificaremos que es posible relacionar la parte par e impar de $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ con polinomios ortogonales en el semieje $[0,\infty)$ (ver Teorema 2.0.9) que dependen del parámetro $\alpha \in [0,\infty)$.

Contribuciones de la tesis

En la presente tesis

a) Se desarrolla el concepto de matriz tipo Hurwitz $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ para un parámetro $\alpha \in [0,\infty)$. En [5] se consideró el caso $\alpha = 0$.

b) Introducimos la parametrización Dyukarev-Stieltjes (DS) $M_k(\alpha)$ y $L_k(\alpha)$ que depende de un parámetro $\alpha \in [0,\infty)$ esta parametrización juega un papel importante en la construcción de los polinomios tipo Hurwitz. Para $\alpha = 0$ estas matrices fueron introducidas en [14].

c) Mencionamos como aportación el hecho que los momentos $s_j(\alpha)$ usados en esta tesis fueron definidos en [6]. De esta manera, el presente trabajo es una continuación del trabajo [6] donde se estudiaron las ecuaciones de Toda en el caso matricial.

Organización de la tesis

Este documento esta dividido en tres capítulos, a continuación se dará una breve descripción del contenido de cada uno.

(I) En el primer capítulo definiremos los objetos básicos como lo son los polinomios matriciales $\mathbf{f}_n(z,\alpha)$ junto con sus partes pares e impares [ver (1.1.2) y (1.1.3)]. Después introducimos seis subsecciones con el siguiente orden

(i) El problema matricial de momentos parámetrico truncado de Stieltjes.

(ii) Polinomios matriciales ortogonales.

(iii) Solución del problema de momentos matriciales truncado de Stieltjes, Caso de un número de momentos par e impar.

(iv) Soluciones extremales del problema de momentos truncado de Stieltjes.

(v) Relaciones entre la fórmula de recurrencia y los parámetros de Stieltjes.

(vi) Polinomios ortogonales: caso escalar.

(II) En el segundo capítulo se presenta una serie de resultados que nos llevan a la construcción de los momentos mediante la parámetrización DS. Además se justifica la igualdad entre la parametrización de Hurwitz y la parametrización de Dyukarev-Stieltjes.

(III) En el capítulo tres reproducimos el criterio de estabilidad según Lyapunov junto con el criterio de Routh-Hurwitz. Además proporcionamos un par de ejemplos uno para el caso escalar y otro para el caso matricial, esto con la finalidad de mostrar como usar los resultados obtenidos en este trabajo. Para finalizar con un ejemplo aplicado a un sistema dinámico por bloques, en el que utilizamos los polinomios matriciales tipo Hurwitz para hablar de la estabilidad del mismo.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este documento, sean q y p enteros positivos. Usaremos $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de todos los números complejos, el conjunto de los números reales, el conjunto de todos los números enteros no negativos y el conjunto de los naturales, respectivamente. La notación $\mathbb{C}^{q\times q}$ denota el conjunto de todas las matrices complejas de $q \times q$. Para todas las matrices nulas que pertenecen a $\mathbb{C}^{q\times q}$ escribiremos $0_{p\times q}$. Denotaremos por 0_q y I_q la matriz nula y la matriz identidad en $\mathbb{C}^{q\times q}$, respectivamente. En casos donde los tamaños de la identidad o la matriz cero sean claras, omitiremos los índices.

1.1 Polinomio matricial tipo Hurwitz

Para $k = 1, \dots, n$ y sea $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro, sea $A_k(\alpha)$ una matriz real de $q \times q$. Consideramos la familia de polinomios matriciales

$$\mathbf{f}_n(z, \alpha) := A_0(\alpha)z^n + A_1(\alpha)z^{n-1} + \ldots + A_n(\alpha). \tag{1.1.1}$$

cada polinomio matricial (1.1.1) tiene grado n en la variable z si A_0 es una matriz no nula. En el presente trabajo supondremos que $\det A_0(\alpha) \neq 0$.
Sean

$$\mathbf{h}_n(z, \alpha) := \begin{cases} A_0(\alpha)z^m + A_2(\alpha)z^{m-1} + \ldots + A_{2m}(\alpha), & n = 2m, \\ A_1(\alpha)z^m + A_3(\alpha)z^{m-1} + \ldots + A_{2m+1}(\alpha), & n = 2m+1, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

$$\mathbf{g}_n(z, \alpha) := \begin{cases} A_1(\alpha)z^{m-1} + A_3(\alpha)z^{m-2} + \ldots + A_{2m-1}(\alpha), & n = 2m, \\ A_0(\alpha)z^m + A_2(\alpha)z^{m-1} + \ldots + A_{2m}(\alpha), & n = 2m+1. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Diremos que el polinomio $\mathbf{h}_n(z, \alpha)$ que aparece en (1.1.2) es la parte par y que el polinomio $\mathbf{g}_n(z, \alpha)$ que aparece en (1.1.3) es la parte impar del polinomio matricial $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ respectivamente.
Es sencillo verificar que

$$\mathbf{f}_n(z, \alpha) = \mathbf{h}_n(z^2, \alpha) + z\,\mathbf{g}_n(z^2, \alpha). \tag{1.1.4}$$

Para ver lo anterior con más detenimiento tenemos el siguiente par de observaciones. Estas observaciones prácticamente reproducidas de [8] donde se considera el caso $\alpha = 0$

Observación 1.1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro. Sea $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ un polinomio matricial de $q \times q$ de grado n con respecto de la variable z. Denotamos a $\mathbf{h}_n(z, \alpha)$ y $\mathbf{g}_n(z, \alpha)$ la parte par e impar de $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$, respectivamente.

(a) Supongamos que $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces los coeficientes principales de $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ y $\mathbf{h}_n(z, \alpha)$ coinciden. En particular, $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ es mónico si y solo $\mathbf{h}_n(z, \alpha)$ es mónico, y además $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ tiene coeficiente no singular si y solo sí $\mathbf{h}_n(z, \alpha)$ tiene coeficiente principal no singular.

(b) Supongamos que $n = 2m - 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces los coeficientes principales de $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ y $\mathbf{g}_n(z, \alpha)$ coinciden. En particular, $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ es mónico si y solo $\mathbf{g}_n(z, \alpha)$ es mónico, y además $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ tiene coeficiente no singular si y solo sí $\mathbf{g}_n(z, \alpha)$ tiene coeficiente principal no singular.

Observación 1.1.2. Sea $m \in \mathbb{N}$.

(a) Sea $\mathbf{h}(z, \alpha)$ una matriz polinomial de $q \times q$ de grado m con respecto a la variable z con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ y sea $\mathbf{g}(z, \alpha)$ un polinomio matricial de $q \times q$ de grado a lo más $m-1$ con respecto a la variable z con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida $\mathbf{f}(z, \alpha) := \mathbf{h}(z^2, \alpha) + z\mathbf{g}(z^2, \alpha)$. Entonces $\mathbf{f}(z, \alpha)$ es un polinomio matricial de grado $2m$ con respecto de la variable z y parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ con parte par $\mathbf{h}(z, \alpha)$ y parte impar $\mathbf{g}(z, \alpha)$.

(b) Sea $\mathbf{h}(z, \alpha)$ una matriz polinomial de $q \times q$ de grado a lo mas $m - 1$ con respecto a la variable z con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ y sea $\mathbf{g}(z, \alpha)$ un polinomio matricial de $q \times q$ de grado a lo más $m - 1$ con respecto a la variable z con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida $\mathbf{f}(z, \alpha) := \mathbf{h}(z^2, \alpha) + z\mathbf{g}(z^2, \alpha)$. Entonces $\mathbf{f}(z, \alpha)$ es un polinomio matricial de grado $2m - 1$ con respecto de la variable z y parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ con parte par $\mathbf{h}(z, \alpha)$ y parte impar $\mathbf{g}(z, \alpha)$.

En el siguiente lema omitimos la dependencia del parámetro α en $\mathbf{f}_n$ y A_k. Para $\alpha = 0$ este lema aparece en [8, Lema 2.5]

Lema 1.1.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f}_n$ un polinomio matricial de grado n con coeficiente principal no singular. Sea $\mathcal{N}_{\mathbf{f}_n} := \{z \in \mathbb{C} : \det \mathbf{f}_n(z) = 0\}$. Entonces $\mathcal{N}_{\mathbf{f}_n}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Para $z \in \mathbb{C}$ sea $\mathbf{f}_n$ dado por (1.1.1) y sea $\mathbf{f}_n^v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{q \times q}$ definido por

$$\mathbf{f}_n^v := \sum_{k=0}^{n} A_k^* z^k.$$

Entonces $\mathbf{f}_n^v(0) = A_0^*$. De ahí, el $\det[\mathbf{f}_n^v(0)] = \overline{\det A_0} \neq 0$. Así, ya que $\det \mathbf{f}_n^v$ es un polinomio, el conjunto $\mathcal{N}_{\mathbf{f}_n} := \{z \in \mathbb{C} : \det \mathbf{f}_n^v(z) = 0\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la identidad

$$\mathbf{f}_n(z) = z^n \left[\mathbf{f}_n^v\left(\frac{1}{z}\right)\right]^*$$

se satisface. Por tanto

$$\det\left[\mathbf{f}_n(z)\right] = z^{nq}\overline{\det\left[\mathbf{f}_n^v\left(\frac{1}{z}\right)\right]}.$$

Esto implica que $\det \mathbf{f}_n$ no se anula en $\mathbb{C}$. Ya que el $\det \mathbf{f}_n$ es un polinomio el conjunto $\mathcal{N}_{\mathbf{f}_n}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$. ■

Para $A, B \in \mathbb{C}^{q\times q}$ con B invertible, sea $\frac{A}{B} := AB^{-1}$. La siguiente definición es una generalización de la Definición 2.7 de [8].

Definición 1.1.4. Sea $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro. La familia de polinomios matriciales $\mathbf{f}_n(z, \alpha)$ en (1.1.1) de $q \times q$ es llamada polinomio matricial tipo Hurwitz si existen dos secuencias de matrices definidas positivas de $q \times q$ $(\mathbf{c}_k(\alpha))_{k=0}^{m}$ y $(\mathbf{d}_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}$ tal que, para $n = 2m$,

$$\frac{\mathbf{g}_n(z,\alpha)}{\mathbf{h}_n(z,\alpha)} = \cfrac{I_q}{z\mathbf{c}_0(\alpha) + \cfrac{I_q}{\mathbf{d}_0(\alpha) + \cfrac{I_q}{\ddots\ \mathbf{d}_{m-2}(\alpha) + \cfrac{I_q}{+z\mathbf{c}_{m-1}(\alpha) + \mathbf{d}_{m-1}^{-1}(\alpha)}}}}, \tag{1.1.5}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ con $\det \mathbf{h}_n(z, \alpha) \neq 0$ y, para $n = 2m + 1$,

$$\frac{\mathbf{h}_n(z,\alpha)}{z\mathbf{g}_n(z,\alpha)} = \cfrac{I_q}{z\mathbf{c}_0(\alpha) + \cfrac{I_q}{\mathbf{d}_0(\alpha) + \cfrac{I_q}{\ddots\ z\mathbf{c}_{m-1}(\alpha) + \cfrac{I_q}{\mathbf{d}_{m-1}(\alpha) + z^{-1}\mathbf{c}_m^{-1}(\alpha)}}}} \tag{1.1.6}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ con $\det \mathbf{g}_n(z, \alpha) \neq 0$ y α fijo.

Veamos un ejemplo que ilustre las formulas que aparecen en la Definición 1.1.4. Para ello, sea $n = 2$, $m = 1$, $q = 2$ y f_2 el siguiente polinomio

$$f_2(z,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ \frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

Usando (1.1.3) y (1.1.2) tenemos que, la parte par h_2 e impar g_2 de f_2 tienen la siguiente forma

$$h_2(z,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ \frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \quad g_2(z,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$$

Al usar (1.1.5) tenemos que

$$\frac{g_2(z,\alpha)}{h_2(z,\alpha)} = \frac{I_2}{zc_0 + \frac{I_2}{d_0}}$$

Donde

$$c_0(\alpha) = \begin{pmatrix} (\alpha+1)(2\alpha+1) & (\alpha+1)(2\alpha+1) \\ (\alpha+1)(2\alpha+1) & 2(\alpha+1)^2 \end{pmatrix}$$

y

$$d_0(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{4(\alpha+1)}{4\alpha+3} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que c_0 y d_0 son matrices positivo definidas para $\alpha \in [0, \infty)$. Ver Teorema 3, Pagina 306 de [18].

Observación 1.1.5. En el caso escalar, es decir para $q = 1$ y para $\alpha = 0$, los polinomios de la Definición 1.1.1 son los polinomios de Hurwitz clásicos; vea [19, Teorema 16].
En comparación al caso escalar nosotros no establecemos ninguna condición para las raíces de $\det \mathbf{f}_n$ que están en la mitad izquierda del plano $\mathbb{C}$.

Observación 1.1.6. En el artículo [28] se demostró que los polinomios tipo Hurwitz son Hurwitz (en la demostración se usan las matrices de Bezout). El inverso no es cierto.

1.1.1 El problema matricial de momentos truncado paramétrico de Stieltjes

Sea $(s_j(\alpha))_{j=0}^m$ con $\alpha \in [0, \infty)$ una secuencia finita de matrices Hermitianas de $q \times q$ dada, las que llamaremos momentos. El problema de momentos matricial paramétrico truncado de Stieltjes (que abreviaremos por problema MMTS) consiste en encontrar el conjunto $\mathcal{M}_m$ todas las funciones σ no decrecientes de variación acotada Hermitianas de $q \times q$ tal que

$$s_j(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^j d\sigma(x) \tag{1.1.7}$$

para cada entero j con $0 \leqslant j \leqslant m$. Asumimos que cada momento $s_j(\alpha)$ está definido para cada $\alpha \in [0, \infty)$. Por ejemplo, para $q = 1$, $\alpha = 1$, $s_j(1) = j!$ la función distribución $\sigma(x)$ es $\sigma(x) = x$.
Notemos que con $s_j(\alpha)$ se pueden construir polinomios ortogonales en $[0, \infty)$ cuyos coeficientes de recurrencia a tres términos satisfacen una ecuación diferencial de Toda. En el caso escalar ver pág 520 de [23] y en el caso matricial ver [6]. De esta manera, una motivación para considerar los momentos como en (1.1.7) es relacionar el presente trabajo con la teoría de sistemas integrales al cual pertenece la ecuación de Toda.
Para $j \geqslant 0$ y parámetro $\alpha \in [0, \infty)$, sean

$$H_{1,j}(\alpha) := \begin{pmatrix} s_0(\alpha) & s_1(\alpha) & \dots & s_j(\alpha) \\ s_1(\alpha) & s_2(\alpha) & \dots & s_{j+1}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_j(\alpha) & s_{j+1}(\alpha) & \dots & s_{2j}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{1.1.8}$$

$$H_{2,j}(t) := \begin{pmatrix} s_1(\alpha) & s_2(\alpha) & \dots & s_{j+1}(\alpha) \\ s_2(\alpha) & s_3(\alpha) & \dots & s_{j+2}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{j+1}(\alpha) & s_{j+2}(\alpha) & \dots & s_{2j+1}(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{1.1.9}$$

Definición 1.1.7. La secuencia $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2n}$ (resp. $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2n+1}$) con $\alpha \in [0,\infty)$ se llama secuencia positiva de Stieltjes si ambas matrices correspondientes $H_{1,n}(\alpha)$ y $H_{2,n-1}(\alpha)$ (resp. $H_{1,n}(\alpha)$ y $H_{2,n}(\alpha)$) son positivas definidas.

Para cada $\sigma \in \mathcal{M}_m$, usualmente le asociamos la función matricial

$$s(z,\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} d\sigma(x)}{x-z} \tag{1.1.10}$$

la cual esta definida y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0,+\infty)$ y para cada $\alpha \in [0,\infty)$. La función matricial s se dice que esta asociada al problema de momentos truncado de Stieltjes. Denotamos por $\mathcal{Z}_m^S$ al conjunto de todas las funciones matriciales asociadas al problema de momentos truncado paramétrico de Stieltjes.

Para $\alpha = 0$ en [12] y [13], Yu. Dyukarev introduce el conjunto completo $\mathcal{Z}_m^S$ para las secuencias positivas de Stieltjes $(s_j(0))_{j=0}^{2n}$ y $(s_j(0))_{j=0}^{2n+1}$, respectivamente.

Para $\alpha = 0$ y para el intervalo $[a,b]$ en lugar de $[0,\infty)$ en [8, Lema 3.8] se introduce y prueba el siguiente lema que explica el desarrollo de Laurent en $z = \infty$ de cierta f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

Lema 1.1.8. *Sea $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^q([a,b])$. Entonces la función S_σ: $\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \to \mathbb{C}^{q\times q}$ dada por*

$$S_\sigma(z) := \int_a^b \frac{d\sigma(x)}{x-z}$$

admite para todo $z \in \mathbb{C}$ y parámetro con $|z| > \max\{|a|,|b|\}$ la representación

$$S_\sigma(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} z^{-(j+1)} s_j^{(\sigma)}.$$

1.1.2 Polinomios matriciales ortogonales

Ahora introduciremos algunas de matrices que serán de utilidad para la obtención dos familias de polinomios matriciales ortogonales y sus polinomios de segunda especie. Sea $R_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(j+1)q\times(j+1)q}$ dada por

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \qquad j \geqslant 0, \tag{1.1.11}$$

con

$$T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q\times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq\times q} \end{pmatrix}, \qquad j \geqslant 1. \tag{1.1.12}$$

Notemos que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, la función matricial evaluada R_j tiene la siguiente forma

$$R_j(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q & 0_q & \dots & 0_q & 0_q \\ zI_q & I_q & 0_q & \dots & 0_q & 0_q \\ z^2 I_q & zI_q & I_q & \dots & 0_q & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ z^j I_q & z^{j-1} I_q & z^{j-2} I_q & \dots & zI_q & I_q \end{pmatrix}. \tag{1.1.13}$$

Sea

$$v_0 := I_q, \quad v_\ell := 0_q \text{ si } \ell < 0, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{jq\times q} \end{pmatrix} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{1.1.14}$$

Además, sea

$$y_{[j,k]}(\alpha) := \begin{pmatrix} s_j(\alpha) \\ s_{j+1}(\alpha) \\ \vdots \\ s_k(\alpha) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k, \tag{1.1.15}$$

y $y_{[j,k]} = 0_q$ si $j > k$. Además,

$$u_{1,0} := 0_q, \quad u_{1,j}(\alpha) := \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad u_{2,j}(\alpha) := -y_{[0,j]}(\alpha), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.1.16}$$

Sea

$$Y_{1,j}(\alpha) := y_{[j,2j-1]}(\alpha), \; 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \text{y} \quad Y_{2,j}(\alpha) := y_{[j+1,2j]}(\alpha), \; 2 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.1.17}$$

Mediante $\widehat{H}_{1,j}$ (resp. $\widehat{H}_{2,j}$) denota el complemento de Schur del bloque $H_{1,j-1}$ en $H_{1,j}$ (resp. del bloque $H_{2,j-1}$ en $H_{2,j}$):

$$\widehat{H}_{1,0}(\alpha) := s_0(\alpha), \quad \widehat{H}_{1,j}(\alpha) := s_{2j}(\alpha) - Y_{1,j}^*(\alpha)H_{1,j-1}^{-1}(\alpha)Y_{1,j}(\alpha), \quad j \geqslant 1, \tag{1.1.18}$$

$$\widehat{H}_{2,0}(\alpha) := s_1(\alpha), \quad \widehat{H}_{2,j}(\alpha) := s_{2j+1}(\alpha) - Y_{2,j}^*(\alpha)H_{2,j-1}^{-1}(\alpha)Y_{2,j}(\alpha), \quad j \geqslant 1. \tag{1.1.19}$$

Dichas matrices son Hermitianas positivas definidas, y también lo son $H_{1,j}(\alpha)$ y $H_{2,j}(\alpha)$.

Definición 1.1.9. Sea σ una función de variación acotada no decreciente de $q \times q$ en $[0, +\infty)$. Una secuencia de matrices polinomiales $(P_j)_{j=0}^n$ es llamado polinomio matricial ortogonal de Stieltjes con respecto a σ si

i) $\deg P_j(t) = j$ para toda $j \in \{0, \ldots, n\}$

ii) $\int_0^\infty P_m(t)d\widetilde{\sigma}(t)P_j^*(t) = \delta_{mj}C_{mj}$ para todo $m, j \in \{0, \ldots, n\}$, donde $\delta_{j,k}$ es la Delta de Kronecker: $\delta_{j,k} := 1$ si $j = k$ y $\delta_{j,k} := 0$ si $j \neq k$, y C_{mj} es una matriz constante de $q \times q$ no cero.

Estos son polinomios matriciales ortogonales (PMO) por la izquierda en $[0, +\infty)$ y que dependen de un parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ acorde a [11]. Definimos cuatro polinomios mónicos.

Definición 1.1.10. Sean $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ y $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m+1}$ secuencias positivas definidas de Stieltjes como en la Definición 1.1.7 y $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro. Definimos

$$P_{1,0}(z, \alpha) := I_q, \quad Q_{1,0}(z, \alpha) := 0_q, \quad P_{2,0}(z, \alpha) := I_q, \quad Q_{2,0}(z, \alpha) := s_0(\alpha). \tag{1.1.20}$$

Para $j \geqslant 1$ y $\alpha \in [0, \infty)$, sea

$$P_{1,j}(z,\alpha) := (-Y_{1,j}^{*}(\alpha)H_{1,j-1}^{-1}(\alpha),\, I_q)R_j(z)v_j, \tag{1.1.21}$$

$$P_{2,j}(z,\alpha) := (-Y_{2,j}^{*}(\alpha)H_{2,j-1}^{-1}(\alpha),\, I_q)R_j(z)v_j, \tag{1.1.22}$$

$$Q_{1,j}(z,\alpha) := -\,(-Y_{1,j}^{*}(\alpha)H_{1,j-1}^{-1}(\alpha),\, I_q)R_j(z)u_{1,j}(\alpha), \tag{1.1.23}$$

$$Q_{2,j}(z,\alpha) := -\,(-Y_{2,j}^{*}(\alpha)H_{2,j-1}^{-1}(\alpha),\, I_q)R_j(z)u_{2,j}(\alpha). \tag{1.1.24}$$

Las matrices polinomiales $Q_{1,j}$ y $Q_{2,j}$ son llamadas polinomios de segunda especie con respecto a $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$, respectivamente. Aparentemente, las matrices polinomiales (1.1.21)-(1.1.24) con $\alpha = 0$ fueron introducidas por primera vez en [15]

Lema 1.1.11. *Sea $j > m$, y*

$$W = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \dots & s_{j+m+1} \end{pmatrix} \tag{1.1.25}$$

Entonces las siguientes identidades se satisfacen

$$W = H_{1,j-1}\begin{pmatrix} I_{(m+1)q} \\ 0_{(j-m-1)q\times(m+1)q} \end{pmatrix} \tag{1.1.26}$$

$$(-Y_{1,j}^{*}H_{1,j-1}^{-1},\, I_q)\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & \cdots & s_{j+m-1} \\ s_j & s_{j-1} & \cdots & s_{j+m} \end{pmatrix} = 0. \tag{1.1.27}$$

Demostración. La igualdad 1.1.26 se sigue mediante una serie de cálculos. De 1.1.25 y 1.1.26 y 1.1.17, tenemos

$$\begin{aligned} &(-Y_{1,j}^{*}H_{1,j-1}^{-1},\, I_q)\begin{pmatrix} W \\ (s_j, s_{j-1}, \cdots, s_{j+m}) \end{pmatrix} \\ &= \; -Y_{1,j}^{*}H_{1,j-1}^{-1}W + (s_j, s_{j-1}, \cdots, s_{j+m}) \\ &= \; -Y_{1,j}^{*}\begin{pmatrix} I_{(m+1)q} \\ 0_{(j-m-1)q\times(m+1)q} \end{pmatrix} + (s_j, s_{j-1}, \cdots, s_{j+m}) \\ &= \; 0. \end{aligned}$$

■

Lema 1.1.12. *Sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^{q}([0,\infty))$ y $(s_j)_{j=0}^{m}$ una secuencia positiva definida de Stieltjes. Entonces las siguientes identidades se satisfacen*

$$\int_0^{\infty} P_{1,j}(t)d\sigma(t)P_{1,m}^{*}(t) = (-Y_{1,j}^{*}H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}Y_{1,m}^{*} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.28}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty P_{1,j}(t)d\sigma(t)P_{1,m}^*(t)\\
&= \int_0^\infty (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)R_{1,j}(t)v_{1,j}d\sigma(t)\left((-Y_{1,m}^* H_{1,m-1}^{-1}, I_q)R_{1,m}(t)v_{1,m}\right)^*\\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\left(\int_0^\infty R_{1,j}(t)v_{1,j}d\sigma(t)(R_{1,m}(t)v_{1,m})^*\right)\\
&\cdot\left((-Y_{1,m}^* H_{1,m-1}^{-1}, I_q)\right)^*\\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\left(\int_0^\infty \begin{pmatrix} I_q\\ tI_q\\ \vdots\\ t^nI_q\end{pmatrix} d\sigma(t)\begin{pmatrix} I_q\\ tI_q\\ \vdots\\ t^mI_q\end{pmatrix}^*\right)\begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}Y_{1,m}^*\\ I_q\end{pmatrix}\\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} \int_0^\infty d\sigma(t) & \int_0^\infty td\sigma(t) & \cdots & \int_0^\infty t^m d\sigma(t)\\ \int_0^\infty td\sigma(t) & \int_0^\infty t^2d\sigma(t) & \cdots & \int_0^\infty t^{m+1}d\sigma(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_0^\infty t^nd\sigma(t) & \int_0^\infty t^{n+1}d\sigma(t) & \cdots & \int_0^\infty t^{n+m}d\sigma(t)\end{pmatrix}\\
&\cdot\begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}Y_{1,m}^*\\ I_q\end{pmatrix}\\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m\\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}Y_{1,m}^*\\ I_q\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

Cabe resaltar que los Lemas 1.1.11 y 1.1.12 corresponden al caso $\alpha = 0$ pero también se cumplen para $\alpha \neq 0$. La demostración para $\alpha \in [0, \infty)$ de la siguiente proposición es análoga a la demostración de [7, Proposición 2.3]

Proposición 1.1.13. *a) Los polinomiales $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ son PMO con respecto a $e^{-\alpha x}d\sigma(x)$ y $xe^{-\alpha x}d\sigma(x)$, respectivamente. En forma mas precisa,*

$$
\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x\alpha}P_{k,j}(x,\alpha)d\sigma(x)P_{k,l}^*(x,\alpha) = \begin{cases} 0_q & , \quad j \neq l\\ \widehat{H}_{k,j}(\alpha) & , \quad j = l\end{cases}, \quad k = 1, 2. \tag{1.1.29}
$$

b) Se cumplen las siguientes identidades:

$$
Q_{1,j}(x,\alpha) = \int_0^\infty \frac{P_{1,j}(x,\alpha) - P_{1,j}(\tau,\alpha)}{x-\tau}e^{-\alpha\tau}d\sigma(\tau), \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{1.1.30}
$$

$$
Q_{2,j}(x,\alpha) = \int_0^\infty \frac{xP_{2,j}(x,\alpha) - \tau P_{2,j}(\tau,\alpha)}{x-\tau}e^{-\alpha\tau}\tau d\sigma(\tau), \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{1.1.31}
$$

Demostración. En esta demostración omitiremos la dependencia de α de todas las matrices. Para probar a) supongamos que $j = l$ y $k = 1$ entonces por 1.1.28 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P_{1,j}(t)d\sigma(t)P_{1,j}^*(t) &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ Y_{1,j}^* & s_{2j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}H_{1,j-1} + Y_{1,j}^*, -Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} + s_{2j})\begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \\
&= (0_q, -Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} + s_{2j})\begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \\
&= \left(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}Y_{1,j} + s_{2j}\right) \\
&= \widehat{H}_{1,j}.
\end{aligned}$$

Por otro lado si $j > m$ por (1.1.28) y (1.1.27) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P_{1,j}(t)d\sigma(t)P_{1,m}^*(t) &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{j+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}Y_{1,m}^* \\ I_q \end{pmatrix} \\
&= 0_q.
\end{aligned}$$

Para probar b) tenemos lo siguiente

$$\int_0^\infty \frac{P_{1,j}(x,\alpha) - P_{1,j}(\tau,\alpha)}{x-\tau}e^{-\alpha\tau}d\sigma(\tau) = \int_0^\infty \left(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q\right)\frac{(R_j(x)v_j - R_j(\tau)v_j)}{x-\tau}e^{-\alpha\tau}d\sigma(\tau).$$

En adelante usaremos la siguiente notación $\Lambda := \left(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q\right)$. Notemos que

$$R_j(x)v_j - R_j(\tau)v_j = \begin{pmatrix} I_q \\ x \\ \vdots \\ x^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_q \\ \tau \\ \vdots \\ \tau^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x-\tau)I \\ (x^2-\tau^2)I \\ \vdots \\ (x^j - \tau^j)I \end{pmatrix}.$$

Utilizando el hecho de que $\frac{x^j-\tau^j}{x-\tau} = x^{j-1} + x^{j-2}\tau + \ldots + \tau^{j-1}$ tenemos que

$$\int_0^\infty \Lambda \frac{(R_j(x)v_j - R_j(\tau)v_j)}{x-\tau} e^{-\alpha\tau} d\sigma(\tau) =$$

$$\int_0^\infty \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ x+\tau \\ x^2 + x\tau + \tau^2 \\ \vdots \\ x^{j-1} + x^{j-2}\tau + \ldots + x\tau^{j-2} + \tau^{j-1} \end{pmatrix} e^{-\alpha\tau} d\sigma(\tau).$$

Al distribuir el signo de la integral

$$\int_0^\infty \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ x+\tau \\ x^2 + x\tau + \tau^2 \\ \vdots \\ x^{j-1} + x^{j-2}\tau + \ldots + x\tau^{j-2} + \tau^{j-1} \end{pmatrix} e^{-\alpha\tau} d\sigma(\tau) = \Lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & I & 0 & \ldots & 0 \\ x^2 & x & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x^j & x^{j-1} & \ldots & \ldots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_o \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{pmatrix},$$

de donde el lado derecho de la ecuación corresponde a $-\Lambda R_j(x)u_{1,j} = Q_{1,j}$.
La segunda igualdad de b) se prueba de manera análoga. ■

1.1.3 Solución del problema de momentos matricial truncado Stieltjes, caso de un número par e impar de momentos

En esta sección reproducimos los resultados que se enuncian en [7] que corresponden al caso $\alpha = 0$. En esta sección omitiremos la dependencia de α en las matrices s_j, M_j y L_j. Mediante conjunto de parámetros $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ se da la solución del problema matricial de momentos truncado de Stieltjes con un número par e impar de momentos.
En [12], la solución del problema de MMTS se reformula en términos de la transformada de Stieltjes s (ver [14, Definición 3]) con la ayuda del siguiente par de columnas no negativas:

Definición 1.1.14. Sea $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ matrices de $q \times q$ de funciones complejas meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Entonces $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ se denomina par de Stieltjes si existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}_{pq}$ en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Para $z \in \mathbb{C} \setminus ([0, \infty) \cup \mathcal{D}_{pq})$,

$$\mathbf{p}^*(z)\mathbf{p}(z) + \mathbf{q}^*(z)\mathbf{q}(z) > 0. \tag{1.1.32}$$

(ii) Para $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D}_{pq})$

$$\frac{1}{2Imz}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}^{*}(-J_q)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{1.1.33}$$

(iii) $\frac{1}{2Imz}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}^{*}(-J_q)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} \geqslant 0$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\} \setminus \mathcal{D}_{pq}$, donde

$$J_q^{\pi} := \begin{pmatrix}0_q & I_q\\ I_q & 0_q\end{pmatrix}.$$

Los pares $\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\mathbf{p}_2\\ \mathbf{q}_2\end{pmatrix}$ se dice que son equivalentes si existe una función matricial $\mathbf{Q}(z)$ tal que las matrices $\mathbf{Q}(z)$, $\mathbf{Q}^{-1}(z)$ son ambas meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ y $\mathbf{p}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{q}_2$, esto es una relación de equivalencia. Sea $\mathcal{S}_\infty$ denota el conjunto de clases equivalencias de los pares de Stieltjes.

Ahora definimos la matriz resolvente que juega un papel crucial en la descomposición de solución del PMMS

Definición 1.1.15. Sean $(s_k)_{k=0}^{2j}$ y $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ secuencias positivas definidas de Stieltjes como en 1.1.7 además, sean $P_{r,j}$ y $Q_{r,j}$ como en la Definición 1.1.10. Se llama matriz resolvente del problema de MMTS para el caso de un número par de momentos $(s_k)_{k=0}^{2j}$ a la matriz en la forma

$$U^{(2j)}(z) = \begin{pmatrix} Q_{2,j}^{*}(\overline{z})Q_{2,j}^{*^{-1}}(0) & -Q_{1,j}^{*}(\overline{z})P_{1,j}^{*^{-1}}(0)\\ -zP_{2,j}^{*}(\overline{z})Q_{2,j}^{*^{-1}}(0) & P_{1,j}^{*}(\overline{z})P_{1,j}^{*^{-1}}(0)\end{pmatrix}. \tag{1.1.34}$$

De una manera similar la matriz resolvente para el problema de MMTS para el caso de un número impar de momentos $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$, se define como

$$U^{(2j+1)}(z) = \begin{pmatrix} Q_{2,j}^{*}(\overline{z})Q_{2,j}^{*^{-1}}(0) & -Q_{1,j+1}^{*}(\overline{z})P_{1,j+1}^{*^{-1}}(0)\\ -zP_{2,j}^{*}(\overline{z})Q_{2,j}^{*^{-1}}(0) & P_{1,j+1}^{*}(\overline{z})P_{1,j+1}^{*^{-1}}(0)\end{pmatrix}. \tag{1.1.35}$$

En adelante, vamos a usar la siguiente notación abreviada de la matriz resolvente del problema de MMTS

$$U^{(r)} := \begin{pmatrix} U_j^{11} & U_{j+1}^{12}\\ U_j^{21} & U_{j+1}^{22}\end{pmatrix}. \tag{1.1.36}$$

En [14] comprobaron que se cumplen las siguientes identidades

$$U^{(2j)}(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q\\ -zM_0 & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & L_0\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} I_q & L_{j-1}\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & 0_q\\ -zM_j & I_q\end{pmatrix}, \tag{1.1.37}$$

$$U^{(2j+1)}(z) = \begin{pmatrix} I_q & 0_q\\ -zM_0 & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & L_0\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} I_q & 0_q\\ -zM_j & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_q & L_j\\ 0_q & I_q\end{pmatrix}, \tag{1.1.38}$$

donde

$$M_0 = s_0^{-1} > 0, \tag{1.1.39}$$
$$L_0 = s_0 s_1^{-1} s_0 > 0, \tag{1.1.40}$$
$$M_j = v_j^* H_{1,j}^{-1} v_j - v_{j-1}^* H_{1,j-1}^{-1} v_{j-1} > 0, \tag{1.1.41}$$
$$L_j = u_{2,j}^* H_{2,j}^{-1} u_{2,j} - u_{2,j-1}^* H_{2,j-1}^{-1} u_{2,j-1} > 0. \tag{1.1.42}$$

La versión escalar de los parámetros de Stieltjes fue introducido en 1894 por T. J. Stieltjes en su célebre trabajo “Recherches sur les fractions continues-[25]:

$$l_j := \frac{\Delta_j^2}{\Delta_j^{(1)} \Delta_{j-1}^{(1)}},$$

$$m_j := \frac{[\Delta_{j-1}^{(1)}]^2}{\Delta_j \Delta_{j-1}}, \quad j \geqslant 0,$$

con

$$\Delta_j := \det(s_{i+k})_{i,k=0}^{j},$$
$$\Delta_j^{(1)} := \det(s_{i+k+1})_{i,k=0}^{j},$$
$$(\Delta_{-1} := \Delta_{-1}^{(1)} = 1).$$

Aquí usamos la notación de Krein[20], [21] para los coeficientes no negativos l_j y m_j. Al expandir los elementos de los bloques de U_j^{kl} para $k, l = 1, 2$ de $U^{(2j)}$ obtenemos lo siguiente

$$U_j^{11}(z) = (-1)^j L_0 M_1 \cdots L_{j-1} M_j z^j + \ldots + I_q, \tag{1.1.43}$$
$$U_j^{12}(z) = (-1)^{j-1} L_0 M_1 \cdots L_{j-1} z^{j-1} + \ldots + (L_0 + \ldots L_{j-1}), \tag{1.1.44}$$
$$U_j^{21}(z) = (-1)^{j+1} M_0 L_0 \cdots L_{j-1} M_j z^{j+1} + \ldots - z(M_0 + \ldots + M_j), \tag{1.1.45}$$

y

$$U_j^{22}(z) = (-1)^j M_0 L_0 \cdots M_{j-1} L_{j-1} z^j + \ldots + I_q. \tag{1.1.46}$$

El siguiente lema prueba las relaciones explicitas entre la matriz de parámetros de Stieltjes y los polinomios $P_{k,j}$ en $z = 0$.

Lema 1.1.16. *Sean $(s_k)_{k=0}^{2j}$ y $(s_k)_{k=0}^{2j+1}$ secuencias positivas definidas de Stieltjes como en la Definición 1.1.7. Sean $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$ definidos como en la Definición 1.1.10 y los parámetros matriciales de Stieltjes M_j y L_j definidas en (1.1.72)–(1.1.74). Entonces*

a) *$P_{1,j}(0), Q_{1,j}(0)$ son matrices invertibles para $j \geqslant 0$ y $P_{2,j}(0)$, $Q_{2,j}(0)$ son matrices invertibles para $j \geqslant 1$.*

b) *Para $j \geqslant 1$ las siguientes identidades se satisfacen,*

$$P_{1,j}(0) = (-1)^j M_0^{-1} L_0^{-1} \cdots M_{j-1}^{-1} L_{j-1}^{-1}, \tag{1.1.47}$$
$$Q_{2,j}(0) = (-1)^j M_0^{-1} L_0^{-1} \cdots L_{j-1}^{-1} M_j^{-1}, \tag{1.1.48}$$
$$P_{2,j}(0) = (-1)^j M_0^{-1} L_0^{-1} \cdots L_{j-1}^{-1} M_j^{-1} (M_0 + \ldots + M_j), \tag{1.1.49}$$

y

$$Q_{1,j}(0) = (-1)^{j+1} M_0^{-1} L_0^{-1} \cdots M_{j-1}^{-1} L_{j-1}^{-1} (L_0 + \ldots + L_{j-1}). \tag{1.1.50}$$

La prueba de la siguiente observación se hace mediante cálculos directos. Usando el Lema 1.1.16.

Observación 1.1.17. Sea $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$ definidos como en 1.1.10 y M_0, M_j, L_j como en (1.1.72), (1.1.73) y (1.1.74). Para $j \geqslant 1$ las siguientes identidades se satisfacen,

$$Q_{2,j}(0) = P_{1,j}(0)M_j^{-1}, \tag{1.1.51}$$
$$P_{2,j}(0) = Q_{2,j}(0)(M_0 + M_1 + \ldots + M_j), \tag{1.1.52}$$
$$Q_{1,j}(0) = -P_{1,j}(0)(L_0 + L_1 + \ldots + L_{j-1}), \tag{1.1.53}$$
$$P_{2,j}(0) = P_{1,j}(0)M_j^{-1}(M_0 + M_1 + \ldots + M_j), \tag{1.1.54}$$
$$P_{1,j}(0) = - Q_{2,j-1}(0)L_{j-1}^{-1}, \tag{1.1.55}$$

y

$$Q_{2,j}(0) = -Q_{2,j-1}(0)L_{j-1}^{-1}M_j^{-1}. \tag{1.1.56}$$

La siguiente proposición nos da una forma para expresar el producto de los polinomios $Q^*_{k,j}(\overline{z})$ y $P^*_{k,j}$ con $k = 1, 2$ en forma de sumatoria.

Proposición 1.1.18. *Sea $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$ definidos como en la Definición 1.1.10 y sea $\widehat{H}_{k,j}$, $k = 1, 2$ definidos en (1.1.18) y (1.1.19). Las siguientes identidades se satisfacen:*

$$Q^*_{2,j}(\overline{z})Q^{*^{-1}}_{2,j}(0) = I_q + z\sum_{l=0}^{j} Q^*_{1,l}(\overline{z})\widehat{H}^{-1}_{1,l}P_{1,l}(0), \tag{1.1.57}$$

$$Q^*_{1,j}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,j}(0) = -\sum_{l=0}^{j-1} Q^*_{2,l}(\overline{z})\widehat{H}^{-1}_{2,l}Q_{2,l}(0), \tag{1.1.58}$$

$$P^*_{2,j}(\overline{z})Q^{*^{-1}}_{2,j}(0) = \sum_{l=0}^{j} P^*_{1,l}(\overline{z})\widehat{H}^{-1}_{1,l}P_{1,l}(0), \tag{1.1.59}$$

y

$$P^*_{1,j}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,j}(0) = I_q - z\sum_{l=0}^{j-1} P^*_{2,l}(\overline{z})\widehat{H}^{-1}_{2,l}Q_{2,l}(0). \tag{1.1.60}$$

Las identidades que aparecen a continuación nos dan las relaciones entre los polinomios $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$ para $k = 1, 2$ y $\widehat{H}_{k,j}$, para $k = 1, 2$ y los parámetros matriciales de Stieltjes M_j, L_j definidos en (1.1.72)-(1.1.74).

Observación 1.1.19. Sea $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$ definidos como en la Definición 1.1.10 y sea $\widehat{H}_{k,j}$, $k = 1, 2$ definidos como en (1.1.18), (1.1.19) y M_0, M_j, L_j definidos en (1.1.72), (1.1.73) y (1.1.74). Entonces para $j \geqslant 0$ las siguientes identidades se satisfacen:

$$\widehat{H}_{1,j} = P_{1,j}(0)Q^*_{2,j}(0) \tag{1.1.61}$$
$$\widehat{H}_{2,j} = - Q_{2,j}(0)P^*_{1,j+1}(0), \tag{1.1.62}$$
$$\widehat{H}_{1,j} = - P_{1,j}(0)P^{-1}_{1,j+1}(0)\widehat{H}_{2,j}. \tag{1.1.63}$$

Más aún, para $j \geqslant 1$ las siguientes identidades se satisfacen:

$$\widehat{H}_{1,j} = M_0^{-1}L_0^{-1}\cdots M_{j-1}^{-1}L_{j-1}^{-1}M_j^{-1}L_{j-1}^{-1}M_{j-1}^{-1}\cdots L_0^{-1}M_0^{-1}, \tag{1.1.64}$$
$$\widehat{H}_{2,j} = M_0^{-1}L_0^{-1}\cdots M_{j-1}^{-1}L_{j-1}^{-1}M_j^{-1}L_j^{-1}M_j^{-1}L_{j-1}^{-1}M_{j-1}^{-1}\cdots L_0^{-1}M_0^{-1}. \tag{1.1.65}$$

Demostración. Las igualdades (1.1.61) y (1.1.62) son fácilmente obtenidas de (1.1.59) y (1.1.60), respectivamente. La igualdad (1.1.62) es una consecuencia de (1.1.61) y (1.1.62). Se usa el Lema 1.1.16 para probar las igualdad (2.0.19) y (2.0.20). ■

Empleando (1.1.61) y (1.1.62) se prueba la siguiente afirmación.

Observación 1.1.20. Bajo las condiciones de la Observación 1.1.19, se sigue que las siguientes identidades se satisfacen

$$P_{1,j}(0) =(-1)^j \widehat{H}_{2,j-1}\widehat{H}_{1,j-1}^{-1}\cdots\widehat{H}_{2,0}\widehat{H}_{1,0}^{-1}, \tag{1.1.66}$$

$$Q_{2,j}(0) =(-1)^j \widehat{H}_{1,j}\widehat{H}_{2,j-1}^{-1}\cdots\widehat{H}_{1,1}\widehat{H}_{2,0}^{-1}s_0. \tag{1.1.67}$$

Note que las relaciones (1.1.66) y (1.1.67) fueron probadas en [5] usando las propiedades de bloques de las matrices de información $H_{1,j}$ y $H_{2,j}$.

En el siguiente teorema se reescribe la solución al problema de momentos s^{2n+k}, con $k=0,1$, en términos de los polinomios ortogonales $P_{i,j}$ y sus polinomios de segunda especie $Q_{i,j}$.

Teorema 1.1.21. *Sea la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+k}$, $k=0,1$ positiva definida. Entonces la transformación fraccional lineal*

$$s^{2n+k}(z) := \frac{Q^*_{2,n}(\overline{z})Q^{-1*}_{2,n}(0)\boldsymbol{p}(z) - Q^*_{1,n+k}(\overline{z})P^{-1*}_{1,n+k}(0)\boldsymbol{q}(z)}{-zP^*_{2,n}(\overline{z})Q^{-1*}_{2,n}(0)\boldsymbol{p}(z) + P^*_{1,n+k}(\overline{z})P^{-1*}_{1,n+k}(0)\boldsymbol{q}(z)}. \tag{1.1.68}$$

Establece la correspondencia biyectiva entre $\mathcal{Z}^S_{2n+k}$, $k=0,1$ y S_∞.

Usando el par de Stieltjes $\begin{pmatrix} I_q \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ I_q \end{pmatrix}$, ver Definición 1.1.14, uno asocia las soluciones extremales al problema de MMTS en el caso de un número par de momentos $(s_j)_{j=0}^{2n}$,

$$s_\mu(z) = -\frac{Q^*_{2,n}(\overline{z})}{zP^*_{2,n}(\overline{z})}, \quad s_M(z) = -\frac{Q^*_{1,n}(\overline{z})}{P^*_{1,n}(\overline{z})}.$$

Observación 1.1.22. Tal función matricial extremal están dadas por Dyukarev en [15] en términos de la matriz por bloques U_j^{kl}, para $k,l=1,2$ de la matriz U^{2n}. Se probó que $s_\mu(z)$ y $s_M(z)$ son holomorfas y bien definidas en $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

Observación 1.1.23. En [14, Página 67, linea 1] se afirma que que cuando las secuencias $(s_j)_{j=0}^{2k}$ y $(s_j)_{j=0}^{2k+1}$ son positivas definidas, entonces existe un conjunto infinito de soluciones. Este conjunto de soluciones se parametriza mediante (1.1.68). El conjunto de pares de Stieltjes $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ como en la Definición 1.1.14 juega el papel del conjunto de soluciones del problema de MMTS. Por ejemplo, para los momentos

$$s_j = j!\begin{pmatrix} 2^{j+1} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.69}$$

para $j=0,1,\ldots,N$, las funciones distribución $\sigma_\mu(x)$ y $\sigma_M(x)$ que corresponden a las soluciones extremales s_μ y s_M son funciones matriciales no negativas constante a trozos con un número finito de saltos. Por otro lado, se puede probar que la función distribución

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} 4 - 2e^{-\frac{1}{2}x} & e^{-x} \\ e^{-x} & 2 - e^{-x} \end{pmatrix} \tag{1.1.70}$$

es solución del problema MMTS para los momentos (1.1.69)

1.1.4 Soluciones extremales del problema truncado paramétrico de momentos de Stieltjes

En algunos resultados omitiremos la dependencia de α en las matrices utilizadas. Sean $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2k}$ y $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2k+1}$ dos secuencias positivas definidas de Stieltjes como en la Definición 1.1.7. Las matrices definidas positivas de $q \times q$

$$M_0(\alpha) := s_0^{-1}(\alpha), \tag{1.1.71}$$
$$L_0(\alpha) := s_0(\alpha)s_1^{-1}(\alpha)s_0(\alpha), \tag{1.1.72}$$
$$M_j(\alpha) := v_j^* H_{1,j}^{-1}(\alpha)v_j - v_{j-1}^* H_{1,j-1}^{-1}(\alpha)v_{j-1}, \tag{1.1.73}$$
$$L_j(\alpha) := u_{2,j}^*(\alpha)H_{2,j}^{-1}(\alpha)u_{2,j}(\alpha) - u_{2,j-1}^*(\alpha)H_{2,j-1}^{-1}(\alpha)u_{2,j-1}(\alpha) \tag{1.1.74}$$

que dependen de $\alpha \in [0, \infty)$. Estos son conocidos como matrices de Dyukarev-Stieltjes del problema de momentos truncado paramétrico de Stieltjes. Para $\alpha = 0$ fueron presentadas en [14]
El lema siguiente proporciona una expresión para la solución extrema del problema MMTS en función de PMO y sus polinomios de segunda especie (tal como se define en la Definición 1.1.10) de acuerdo con los parámetros matriciales de Stieltjes (1.1.72)–(1.1.74).

Definición 1.1.24. Sea $n \in \{2, 3, \dots\}$ y sea $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ una secuencia definida positiva de Stieltjes con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$. Sea $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$ una secuencia positiva definida de Stieltjes con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ elegida de tal forma que $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1} = (s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Entonces por la familia de PMTH asociada a $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ nos referimos a la familia de PMTH asociada con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.

La prueba del siguiente lema es análoga a la prueba de [7, Teorema 3.4] con $\alpha = 0$

Lema 1.1.25. *Sea $P_{k,j}$, $Q_{k,j}$, $k = 1, 2$, como en la Definición 1.1.10, y M_k, L_k en (1.1.72)–(1.1.74). Entonces las soluciones extremales del problema truncado de momentos de Stieltjes definido en $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y el parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ tiene la* *siguiente forma:*

$$s_M(z,\alpha) := -\frac{Q^*_{1,n}(\overline{z},\alpha)}{P^*_{1,n}(\overline{z},\alpha)} = \cfrac{I_q}{-zM_0 + \cfrac{I_q}{L_0 + \cfrac{I_q}{\ddots\, L_{n-2} + \cfrac{I_q}{-zM_{n-1} + L^{-1}_{n-1}}}}}, \tag{1.1.75}$$

$$s_\mu(z,\alpha) := -\frac{Q^*_{2,n}(\overline{z},\alpha)}{zP^*_{2,n}(\overline{z},\alpha)} = \cfrac{I_q}{-zM_0 + \cfrac{I_q}{L_0 + \cfrac{I_q}{\ddots\, -zM_{n-1} + \cfrac{I_q}{L_{n-1} - z^{-1}M^{-1}_n}}}}. \tag{1.1.76}$$

En la parte derecha de (1.1.75) y (1.1.76) omitimos la dependencia de α de las matrices M_k y L_k.

De igual forma como en [14], usamos los índices M y μ para distinguir las soluciones. Ambas representaciones de las soluciones extremales del problema de momentos de Stieltjes en dichas ecuaciones serán de vital importancia para la prueba del Teorema 2.0.9 y sus consecuencias.

1.1.5 Relaciones entre la fórmula de recurrencia y los parámetros de Stieltjes

En esta sección reproducimos resultados de [7] que corresponden al caso cuando $\alpha = 0$

Definición 1.1.26. Define $A_{1,0} := s_1 s_0^{-1}$, $A_{2,0} := s_2 s_1^{-1}$, $B_{k,-1} := 0_q$, $M_{k,0} := s_k$, $k = 1, 2$. Para $k = 1, 2$ y $1 \leqslant j \leqslant n$ sean

$$A_{k,j} := M_{k,j}\widehat{H}^{-1}_{k,j}, \tag{1.1.77}$$

$$B_{k,j} := \widehat{H}^{-1}_{k,j}\widehat{H}_{k,j+1}, \tag{1.1.78}$$

con

$$M_{k,j} := (-Y^*_{k,j}H^{-1}_{k,j-1},\ I_q)H_{k+1,j}\begin{pmatrix} -H^{-1}_{k,j-1}Y_{k,j} \\ I_q \end{pmatrix}$$

y

$$H_{3,j} := (s_{k+l+2})^{j-2}_{k,l=0}.$$

En la siguiente proposición se establece que los polinomios ortogonales $P_{k,j}$ y sus polinomios de segunda especie $Q_{k,j}$ satisfacen la relación de recurrencia a tres términos. Las matrices $A_{k,j}$, $B_{k,j}$ se llaman coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos. Esta definición se justifica por la siguiente proposición.

Proposición 1.1.27. *Los polinomios $P_{k,j}$, $k = 1, 2$ satisfacen la relación de recurrencia*

$$xP_j(x) = B^*_{k,j-1}P_{j-1}(x) + A_{k,j}P_j(x) + P_{j+1}(x), \tag{1.1.79}$$

para $j \geqslant 0$ con condición inicial $P_{1,0}(x) = I_q$, $P_{2,0}(x) = I_q$.
Los polinomios $Q_{1,j}$ para $j \geqslant 1$ satisfacen la relación de recurrencia (1.1.79), para $k = 1$ con $Q_{1,1}(x) = s_0$.
El polinomio de segundo tipo $Q_{2,j}$ satisface la relación

$$xQ_{2,0}(x) = A_{2,0}Q_{2,0}(x) + Q_{2,1}(x) - s_1, \tag{1.1.80}$$

con $Q_{2,0}(x) = s_0$ y la relación de recurrencia (1.1.79) para $k = 1$ y $j \geqslant 1$.

Demostración. La demostración de (1.1.79) para $P_{1,j}$ se puede encontrar en [16, Proposición 5.6, Teorema 5.5]; a su vez en [5, Proposición 6.9], se demostró para $Q_{1,j}$. La igualdad (1.1.79) para $P_{2,j}$ puede ser demostrada de manera análoga para $P_{1,j}$ sustituyendo s_k por s_{k+1}. La igualdad (1.1.80) se puede probar mediante un cálculo directo. Para $j \geqslant 1$ se usa la identidad (2.0.38) y se repite el procedimiento como en la demostración de (1.1.79) sustituyendo s_k por s_{k+1}. ■

Observación 1.1.28. Los polinomios ortonormales $\widetilde{P}_{k,j}$ y sus polinomios de segundo tipo $\widetilde{Q}_{1,j}$, para $k = 1, 2$ satisfacen las relaciones de recurrencia de tres términos

$$x\widetilde{P}_{k,j}(x) = \widetilde{B}^*_{k,j-1}\widetilde{P}_{k,j-1}(x) + \widetilde{A}_{k,j}\widetilde{P}_{k,j}(x) + \widetilde{B}_{k,j}\widetilde{P}_{k,j+1}(x), \quad j \geqslant 0 \tag{1.1.81}$$

con $\widetilde{B}_{k,-1} := 0_q$, $k = 1, 2$,

$$\widetilde{A}_{k,j} := \widehat{H}^{-\frac{1}{2}}_{k,j} M_{k,j}\widehat{H}^{\frac{1}{2}}_{k,j}, \quad \widetilde{B}_{k,j} := \widehat{H}^{-\frac{1}{2}}_{k,j}\widehat{H}^{\frac{1}{2}}_{k,j}, \; j \geqslant 0. \tag{1.1.82}$$

Ahora que sabemos que $P_{k,j}$ y $Q_{k,j}$ satisfacen la relación de recurrencia tres términos, en los siguientes lemas introducimos una serie de identidades que relacionan los coeficientes de esta última con $P_{k,j}(0)$, $Q_{k,j}(0)$ y las matrices M_j, L_j.

Lema 1.1.29. *Sea $P_{k,j}$ $Q_{k,j}$, L_j, M_j, $A_{k,j}$ y $B_{k,j}$ son definidos como en las Definición 1.1.10, (1.1.72), (1.1.73), (1.1.74), y como en la Definición 1.1.26, respectivamente. Entonces se cumplen las siguientes identidades:*

$$A_{1,j} = -\, P_{1,j+1}(0)(L_{j-1} + L_j)L^{-1}_{j-1}P^{-1}_{1,j}(0), \; j \geqslant 1, \tag{1.1.83}$$

$$B_{1,j} = P^{*^{-1}}_{1,j}(0)L^{-1}_j L_{j+1}P^*_{1,j+2}(0), \; j \geqslant 0, \tag{1.1.84}$$

$$A_{2,j} = -\, Q_{2,j+1}(0)(M_j + M_{j+1})M^{-1}_j Q^{-1}_{2,j}(0), \; j \geqslant 0, \tag{1.1.85}$$

$$B_{2,j} = Q^{*^{-1}}_{2,j}(0)M^{-1}_{j+1}M_{j+2}Q^*_{2,j+2}(0), \; j \geqslant 0. \tag{1.1.86}$$

Demostración. Para demostrar (1.1.83) uno usa (1.1.79) para $P_{1,j}$ y $Q_{1,j}$ tomando $x=0$. Además, multiplicando (1.1.79) para $P_{1,j}$ por $(L_0+\ldots+L_{j-2})$ y sustituyendo en (1.1.79) para $Q_{1,j}$ ver [7, Proposición 4.5], tenemos

$$\begin{aligned}
&B^*_{1,j-1}P_{1,j-1}(0)(L_0+\ldots+L_{j-2})+A_{1,j}P_{1,j}(0)(L_0+\ldots+L_{j-2})\\
&\qquad+P_{1,j+1}(0)(L_0+\ldots+L_{j-2})=0,\\
&B^*_{1,j-1}P_{1,j-1}(0)(L_0+\ldots+L_{j-2})+A_{1,j}P_{1,j}(0)(L_0+\ldots+L_{j-1})\\
&\qquad+P_{1,j+1}(0)(L_0+\ldots+L_{j})=0.
\end{aligned}$$

De las últimas igualdades obtenemos (1.1.83). La igualdad (1.1.84) se sigue de (1.1.79) y (1.1.83). La demostración de (1.1.85) y (1.1.86) se obtiene de manera similar. ■

Teorema 1.1.30. *Sea $A_{k,j}$, $B_{k,j}$, L_j, M_j, y $\widehat{H}_{k,j}$ son definidos como en la definición 1.1.26, (1.1.72), (1.1.73), (1.1.74), (1.1.18) y (1.1.19), respectivamente. Entonces las siguientes igualdades son válidas*

$$\begin{aligned}
A_{1,0}=&M_0^{-1}L_0^{-1},\ B_{1,0}=L_0^{-1}M_1^{-1}L_0^{-1}M_0^{-1},\ B_{2,0}=M_0M_1^{-1}L_1^{-1}M_1^{-1}L_0^{-1}M_0^{-1}, && (1.1.87)\\
A_{1,j}=&M_0^{-1}L_0^{-1}\cdots M_j^{-1}L_j^{-1}(L_{j-1}+L_j)M_{j-1}\cdots L_0M_0,\ j\geqslant 1, && (1.1.88)\\
B_{1,j}=&M_0L_0\cdots M_{j-1}L_{j-1}L_j^{-1}M_{j+1}^{-1}L_j^{-1}M_j^{-1}\cdots L_0^{-1}M_0^{-1}\ j\geqslant 1, && (1.1.89)\\
A_{2,j}=&M_0^{-1}L_0^{-1}\cdots M_j^{-1}L_j^{-1}M_{j+1}^{-1}(M_j+M_{j+1})L_{j-1}M_{j-1}\ldots L_0M_0,\ j\geqslant 1, && (1.1.90)\\
B_{2,j}=&M_0L_0M_1L_1\ldots M_jM_{j+2}M_{j+1}^{-1}M_{j+2}^{-1}L_{j+1}^{-1}M_{j+1}^{-1}\ldots L_0^{-1}M_0^{-1},\ j\geqslant 1. && (1.1.91)
\end{aligned}$$

Por otra parte, las siguientes identidades se satisfacen,

$$\begin{aligned}
A_{1,j}=&\widehat{H}_{2,j}\widehat{H}_{1,j}^{-1}+\widehat{H}_{1,j}\widehat{H}_{2,j-1}^{-1},\quad j\geqslant 1 && (1.1.92)\\
A_{2,j}=&\widehat{H}_{1,j+1}\widehat{H}_{2,j}^{-1}+\widehat{H}_{2,j}\widehat{H}_{1,j}^{-1},\quad j\geqslant 0. && (1.1.93)
\end{aligned}$$

Demostración. La demostración de las igualdades (1.1.87)–(1.1.91) se siguen de manera inmediata del Lema 1.1.29 y [7, Proposición 4.5]. La demostración de (1.1.92) y (1.1.93) se sigue del Lema 1.1.29 y [[7] , Proposición 4.9]. ■

Empleando la Definición 1.1.26 y (1.1.82) obtenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{1,j}=&\widehat{H}_{1,j}^{-\frac{1}{2}}\widehat{H}_{2,j}\widehat{H}_{1,j}^{-\frac{1}{2}}+\widehat{H}_{1,j}^{\frac{1}{2}}\widehat{H}_{2,j-1}^{-1}\widehat{H}_{1,j}^{\frac{1}{2}},\quad j\geqslant 1, && (1.1.94)\\
\widetilde{A}_{2,j}=&\widehat{H}_{2,j}^{-\frac{1}{2}}\widehat{H}_{1,j+1}\widehat{H}_{2,j}^{-\frac{1}{2}}+\widehat{H}_{2,j}^{\frac{1}{2}}\widehat{H}_{1,j}^{-1}\widehat{H}_{2,j}^{\frac{1}{2}},\quad j\geqslant 0. && (1.1.95)
\end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra una representación explícita de la n-convergencia, también llamada, n–aproximación del problema de MMTS en el caso de un número impar de momentos. Una representación similar puede ser escrita para el caso de un número par de momentos.

Observación 1.1.31. En el artículo [6] se demuestra que los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos $A_{k,j}$ y $B_{k,j}$ como en (1.1.77) y (1.1.78) satisfacen la ecuación diferencial matricial de Toda.

A continuación reproducimos el Teorema 4.1 de [6].

Teorema 1.1.32. *Sean $A_{r,j}$ y $B_{r,j}$ como en (1.1.77) y (1.1.78). Para $r = 1, 2$, se satisfacen las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned}\dot{A}_{r,0} &= -\, B^*_{r,0}, && (1.1.96)\\ \dot{A}_{r,j} &= B^*_{r,j-1} - B^*_{r,j}, && (1.1.97)\\ \dot{B}^*_{r,j} &= B^*_{r,j} A_{r,j} - A_{r,j+1} B^*_{r,j}, && (1.1.98)\end{aligned}$$

para $j \geqslant 1$ y $\alpha \in [0, \infty)$.

Cabe mencionar que la derivada que aparece en el (1.1.96), (1.1.97) y (1.1.98) es con respecto del parámetro α.

Teorema 1.1.33. *Sea la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n}$ definida positiva. Entonces para $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ las siguientes identidades se satisfacen:*

$$\begin{aligned}&-s_M(z) = \frac{Q^*_{1,n}(\overline{z})}{P^*_{1,n}(\overline{z})}\\ &= -\cfrac{s_0}{-zI_q + A^*_{1,0} - B_{1,0}\cfrac{I_q}{-zI_q + A^*_{1,1} - B_{1,1}\cfrac{I_q}{\ddots - zI_q + A^*_{1,n-2} - B_{1,n-2}\frac{I_q}{-zI_q + A^*_{1,n-1}}}}},\end{aligned} \tag{1.1.99}$$

$$\begin{aligned}&-zs_\mu(z) = \frac{Q^*_{2,n}(\overline{z})}{P^*_{2,n}(\overline{z})}\\ &= s_0 - \cfrac{s_1}{-zI_q + A^*_{2,0} - B_{2,0}\cfrac{I_q}{-zI_q + A^*_{2,1} - B_{2,1}\cfrac{I_q}{\ddots - zI_q + A^*_{2,n-2} - B_{2,j-2}\frac{I_q}{-z + A^*_{2,n-1}}}}}.\end{aligned} \tag{1.1.100}$$

Por otra parte, para $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ las siguientes identidades se satisfacen:

$$\frac{Q^*_{1,n}(\overline{z})}{P^*_{1,n}(\overline{z})} = -\cfrac{I_q}{-zM_0 + \cfrac{I_q}{L_0 + \cfrac{I_q}{\ddots\, L_{n-2} + \cfrac{I_q}{-zM_{n-1} + L^{-1}_{n-1}}}}}, \tag{1.1.101}$$

$$\frac{Q^*_{2,n}(\overline{z})}{zP^*_{2,n}(\overline{z})} = -\cfrac{I_q}{-zM_0 + \cfrac{I_q}{L_0 + \cfrac{I_q}{\ddots - zM_{n-1} + \cfrac{I_q}{L_{n-1} - z^{-1}M^{-1}_n}}}}. \tag{1.1.102}$$

Demostración. La primera igualdad en (1.1.99) y (1.1.100) se siguen inmediatamente por definición $s_M(z,\alpha) := -\frac{Q^*_{1,n}(\overline{z},\alpha)}{P^*_{1,n}(\overline{z},\alpha)}$ y $s_\mu(z,\alpha) := -\frac{Q^*_{2,n}(\overline{z},\alpha)}{zP^*_{2,n}(\overline{z},\alpha)}$. Para demostrar la segunda igualdad, de (1.1.99), denota su lado derecho por $\mathcal{T}^*_n(\overline{z})$, se puede verificar $Q^*_{1,n}(\overline{z}) = \mathcal{T}^*_n(\overline{z})P^*_{1,n}(\overline{z})$. Además, se usa el hecho de que $s_\mu(z)$ está bien definida en $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, (véase la observación 1.1.22). La segunda igualdad de (1.1.100) es demostrada usando [5, Proposición 4.2], y el hecho de que $\frac{\widehat{Q}_{2,n}}{P_{2,n}}$ puede ser expresado en fracciones continuas para $\frac{Q_{1,n}}{P_{1,n}}$ colocando s_{j+1} en vez de s_j.
Ahora demostremos (1.1.75). Nuevamente seguimos el enfoque usado en la demostración de [29, Teorema 1.4]. (1.1.75) Denota su lado derecho con $\mathcal{G}^*_n(\overline{z})$, después verificamos la validez de la igualdad para $n \geqslant 1$

$$Q^*_{1,n}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,n}(0) = \mathcal{G}^*_n(\overline{z})P^*_{1,n}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,n}(0) \tag{1.1.103}$$

o equivalentemente por , [5, Proposición 5.1, inciso (c)]

$$\begin{aligned} &Q^*_{1,n-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,n-1}(0) - Q^*_{2,n-1}(\overline{z})Q^{*^{-1}}_{2,n-1}(0)L_{n-1} \\ &= \mathcal{G}^*_n(\overline{z})(P^*_{1,n-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,n-1}(0) + zP^*_{2,n-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{2,n-1}(0)L_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.1.104}$$

Para $n = 1$ (1.1.103) es obvio. Sea $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Supongamos que (1.1.103) Sea

$$\widehat{L}_{k-1} := L_{k-2} + (-zM_{k-1} + L^{-1}_{k-1})^{-1} \tag{1.1.105}$$

y

$$\widehat{\mathcal{G}}^*_k(\overline{z}) := (-zM_0 + (L_0 + \ldots + (\widehat{L}_{k-1})^{-1})^{-1}\ldots)^{-1}, \tag{1.1.106}$$

entonces la siguente igualdad es válida,

$$\begin{aligned} &Q^*_{1,k-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,k-1}(0) - Q^*_{2,k-1}(\overline{z})Q^{*^{-1}}_{2,k-1}(0)\widehat{L}_{k-1} \\ &- \widehat{\mathcal{G}}^*_k(\overline{z})(P^*_{1,k-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,k-1}(0) + zP^*_{2,k-1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{2,k-1}(0)\widehat{L}_{k-1}) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.107}$$

Usando (1.1.105), (1.1.106), [5, Proposición 5.1, inciso (c)] y el hecho de que $\det(I_q - zL_{k-1}M_k) \neq 0$, obtenemos $(Q^*_{1,k+1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,k+1}(0) - \mathcal{G}^*_{k+1}(\overline{z})P^*_{1,k+1}(\overline{z})P^{*^{-1}}_{1,k+1}(0))L^{-1}_k(I_q - zL_{k-1}M_k)^{-1} = 0$. Así, (1.1.103) es demostrado. Esto último implica que (1.1.75) es válido.
De manera similar (1.1.76) es demostrado usando [5, Proposición 5.1, inciso (d)]. ■

1.1.6 Polinomios ortogonales caso escalar

En esta sección reproduciremos parte de las notas del curso [4].

Definición 1.1.34. Sean P, Q y R matrices de dimensión $q\times q$, $q\times(m-q)$, $(m-q)\times q$ y $(m-q)\times(m-q)$, respectivamente.

a) Sea

$$A := \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{pmatrix}, \tag{1.1.108}$$

Si R es invertible, la matriz $P - Q^T R^{-1} Q$ se llama complemento de Schur de R en A.

b) Sea P invertible, la matriz $R - Q^T P^{-1} Q$ se llama Complemento de Schur de P en A.

Observación 1.1.35. Sean las matrices P, Q y R como en la Definición 1.1.34. Entonces, para el caso inciso a) de la Definición 1.1.34, tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^{\intercal} & R \end{pmatrix} = \det(P - Q^{\intercal} R^{-1} Q) \det R. \tag{1.1.109}$$

De manera análoga, para el caso del inciso b) de la Definición 1.1.34, tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^{\intercal} & R \end{pmatrix} = \det(R - Q^{\intercal} P^{-1} Q) \det P. \tag{1.1.110}$$

Sea $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ matrices positiva definidas como en (1.1.18) y (1.1.19).

Lema 1.1.36. *Los polinomios (1.1.21) y (1.1.22) se pueden representar de la siguiente manera:*

$$P_{1,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_j & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & \dots & s_{2j-2} & s_{2j-1} \\ 1 & x & \dots & x^{j-1} & x^j \end{vmatrix}}{|H_{1,j-1}|}, \tag{1.1.111}$$

$$P_{2,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_j & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} & s_{j+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} & s_{2j} \\ 1 & x & \dots & x^{j-1} & x^j \end{vmatrix}}{|H_{2,j-1}|} \tag{1.1.112}$$

Demostración. Sea $k = 1$. Tomando en cuenta que $H_{1,j-1}$ es positiva definida, tenemos

$$\begin{aligned} P_{1,j}(x) =& (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j \\ =& x^j + (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1) R_{j-1}(x) v_{j-1} \\ =& x^j - v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ =& \frac{1}{|H_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En la última igualdad utilizamos el complemento de Schur de $H_{1,j-1}$ en la matriz $\begin{pmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{pmatrix}$. ■

Sean R_j como en (1.1.13), $u_{1,j}$ y $u_{2,j}$ como en (1.1.16), denotemos

$$(e_{k,0}(x),\, e_{k,1}(x), \dots, e_{k,j}(x)) := \begin{cases} -u_{1,j}^* R_j^*(x), & \text{for } k = 1, \\ -u_{2,j}^* R_j^*(x), & \text{for } k = 2. \end{cases}$$

Lema 1.1.37. *Los polinomios (1.1.23) y (1.1.24) se pueden representar como:*

$$Q_{1,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_j & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & \dots & s_{2j-2} & s_{2j-1} \\ e_{1,0}(x) & e_{1,1}(x) & \dots & e_{1,j-1}(x) & e_{1,j}(x) \end{vmatrix}}{|H_{1,j-1}|}, \tag{1.1.113}$$

$$Q_{2,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_j & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} & s_{j+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} & s_{2j} \\ e_{2,0}(x) & e_{2,1}(x) & \dots & e_{2,j-1}(x) & e_{2,j}(x) \end{vmatrix}}{|H_{2,j-1}|} \tag{1.1.114}$$

Demostración. La demostración de este lema es análoga la del Lema (1.1.36) ∎

Capítulo 2

De los polinomios h_n y g_n a los polinomios $P_{k,j}$ y $Q_{k,j}$

Habiendo definido los PMO, en este capítulo estableceremos la conexión entre estos y los PMTH paramétricos. Los resultados de este capítulo son análogos a los resultados de [8].
Los resultados de [8] se corresponden al caso $\alpha = 0$.
Sea $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro y sean

$$S_{[0,j]}(\alpha) := \begin{pmatrix} s_0(\alpha) & s_1(\alpha) & \dots & s_{j-1}(\alpha) & s_j(\alpha) \\ 0_q & s_0(\alpha) & \dots & s_{j-2}(\alpha) & s_{j-1}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_q & 0_q & \dots & s_0(\alpha) & s_1(\alpha) \\ 0_q & 0_q & \dots & 0_q & s_0(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{2.0.1}$$

$$A_{[j,k]}(\alpha) := \begin{pmatrix} A_{2j}(\alpha) \\ A_{2j-2}(\alpha) \\ \dots \\ A_{2(k+1)}(\alpha) \\ A_{2k}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{2.0.2}$$

$$A^{[j,k]}(\alpha) := \begin{pmatrix} A_{2j+1}(\alpha) \\ A_{2j-1}(\alpha) \\ \dots \\ A_{2k+3}(\alpha) \\ A_{2k+1}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant k \leqslant j \leqslant m. \tag{2.0.3}$$

Además, sea

$$J_m := \operatorname{diag}\{(-1)^{m-1} I_q, (-1)^{m-2} I_q, \dots, I_q\}. \tag{2.0.4}$$

Observe que

$$J_m = \begin{pmatrix} -J_{m-1} & 0_{q(m-1)\times q} \\ 0_{q\times q(m-1)} & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{m-1} & 0_{q\times q(m-1)} \\ 0_{q(m-1)\times q} & J_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{2.0.5}$$

En los siguientes resultados omitimos la dependencia de α de las matrices s_j y las A_k.
Para $\alpha = 0$ este resultado se da en [8, Lema 2.9]

Lema 2.0.1. *Sea* $\mathbf{h}_n$ *y* $\mathbf{g}_n$ *definidas como en (1.1.2) y (1.1.3). Sea* $|z_0| \geqslant \text{máx}\{|\lambda| : \det \mathbf{h}_n(\lambda,\alpha) = 0\}$ *(resp.* $|z_0| \geqslant \text{máx}\{|\lambda| : \det \mathbf{g}_n(\lambda,\alpha) = 0\}$*). Para* $|z| > |z_0|$*, la expansión en series de potencias de* $\mathbf{g}_n/\mathbf{h}_n$ *(resp.* $\mathbf{h}_n/\mathbf{g}_n$*) en potencias negativas de* z*,*

$$\frac{\mathbf{g}_n(z,\alpha)}{\mathbf{h}_n(z,\alpha)} = \frac{s_0(\alpha)}{z} - \frac{s_1(\alpha)}{z^2} + \ldots + (-1)^n \frac{s_n(\alpha)}{z^{n+1}} + \ldots, \quad n = 2m, \tag{2.0.6}$$

$$\frac{\mathbf{h}_n(z,\alpha)}{z\mathbf{g}_n(z,\alpha)} = s_0(\alpha) - \frac{s_1(\alpha)}{z} + \ldots + (-1)^n \frac{s_n(\alpha)}{z^{n}} + \ldots, \quad n = 2m+1, \tag{2.0.7}$$

Definición 2.0.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbf{f}_n$ una familia de polinomios matriciales $q \times q$ de grado n con coeficiente principal invertible. Denotemos por $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$ la secuencia del Lema 2.0.1. Entonces $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n}$ es llamada la secuencia de parámetros de Markov de $\mathbf{f}_n$ dependientes del parámetro $\alpha \in [0,\infty)$

El Lema 2.0.1 nos conduce a la siguiente relación entre los coeficientes $A_k(\alpha)$ *del polinomio* $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ *y los parámetros de Markov o la matriz de momentos* $s_k(\alpha)$ *para el parámetro* $\alpha \in [0,\infty)$ *fijo. Sea* $A_0(\alpha) = I_q$*, entonces*

para $n = 2m$*,*

$$A^{[m-1,0]} = J_m S_{[0,m-1]} J_m A_{[m-1,0]}, \tag{2.0.8}$$

$$Y_{1,m} = H_{1,m-1} J_m A_{[m,1]}, \tag{2.0.9}$$

y, para $n = 2m+1$*,*

$$A^{[m,0]} = J_{m+1} S_{[0,m]} J_{m+1} A_{[m,0]}, \tag{2.0.10}$$

$$Y_{2,m} = H_{2,m-1} J_m A_{[m,1]}. \tag{2.0.11}$$

Demostración. Consideramos el caso $n = 2m$. Multiplicamos ambos lados de (2.0.7) por $\mathbf{h}_n$ tenemos que

$$\mathbf{g}_n(z,\alpha) = \left(\frac{s_0(\alpha)}{z} - \frac{s_1(\alpha)}{z^2} + \ldots + (-1)^n \frac{s_n(\alpha)}{z^{n+1}} + \ldots\right) \mathbf{h}_n(z,\alpha). \tag{2.0.12}$$

Igualando los coeficientes en potencias de en z en ambos lados de la identidad, tenemos que

$$\begin{cases} A_1 &= s_0 A_0, \\ A_3 &= s_0 A_2 - s_1 A_0, \\ \ldots & \quad \ldots \\ A_{2m-1} &= s_0 A_{2m-2} - s_1 A_{2m-4} + \ldots + (-1)^{m-1} A_0, \end{cases} \tag{2.0.13}$$

$$0 = s_k A_{2m} - s_{k+1} A_{2m-2} + \ldots + (-1)^m s_{k+m} A_0, \quad \text{para todo } k \geqslant 0. \tag{2.0.14}$$

En (2.0.13) y (2.0.14) omitiremos la dependencia de α. Ahora tomaremos el sistema y los reescribiremos en forma de matriz, donde k corre desde 0 a $m-1$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} A_{2m-1} \\ A_{2m-3} \\ \dots \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & \dots & (-1)^{m-1}s_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_q & \dots & \dots & -s_1 \\ 0_q & 0_q & \dots & s_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{2m-2} \\ A_{2m-4} \\ \dots \\ A_0 \end{pmatrix}, \tag{2.0.15}$$

$$\begin{pmatrix} s_m A_0 \\ s_{m+1} A_0 \\ \dots \\ s_{2m-1} A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_0 & \dots & s_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{m-1} A_{2m} \\ (-1)^{m-2} A_{2m-2} \\ \dots \\ A_2 \end{pmatrix}. \tag{2.0.16}$$

Con $A_0 = I_q$ y usando (2.0.1)–(2.0.4), obtenemos (2.0.8) y (2.0.9). Para $n = 2m+1$, se prueba (2.0.11) de forma análoga. ■

La siguiente proposición es de suma importancia para probar el Teorema 2.0.9 dicho teorema es el resultado central del presente trabajo.
Esta proposición es una versión modificada de la Proposición 8.27 de Fritzsche/Kirstein/Mädler en [17], que considera una secuencia infinita de pares $[(L_j(0))_j^{\infty}, (M_j(0))_j^{\infty}]$ en lugar del análogo secuencia finita. Recordemos primero el siguiente resultado bien conocido.

Lema 2.0.3. *[2, Proposicion 8.2.4] Sea $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$ una matriz Hermitiana definida positiva de $(n+m) \times (n+m)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $A > 0$.

ii) $A_{11} > 0$ *and* $A_{12}^* A_{11}^{-1} A_{12} < A_{22}$.

iii) $A_{22} > 0$ *and* $A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^* < A_{11}$.

Definición 2.0.4. Sea que $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ con $k = 0, 1, \dots, n$. Definimos el producto hacia la derecha de $(A_k)_{k=0}^n$ como sigue

$$\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{n} A_k = A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$$

En ocasiones omitiremos la dependencia de α de las matrices $M_j, L_j, s_j, H_{r,j}, Y_{r,j}$ con $r = 1, 2$. Para $\alpha = 0$ esta proposición aparece en [7, Proposición 2.7].

Proposición 2.0.5. *Sea $(L_j)_{j=0}^{m-1}$ y $(M_j)_{j=0}^{m-1}$ (resp. $(L_j)_{j=0}^{m}$ and $(M_j)_{j=0}^{m-1}$) dos sucesiones de matrices Hermitianas complejas de $q\times q$. Sea la sucesión $(s_j)_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j)_{j=0}^{2m+1}$) definida de manera recursiva por*

$$s_{2j}(\alpha) := \begin{cases} M_0^{-1}, & si \quad j = 0 \\ Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} + (\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k)^{-1^*} M_k^{-1} (\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k)^{-1} & si \quad j \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.0.17}$$

y

$$s_{2j+1}(\alpha) := \begin{cases} (M_0 L_0)^{-1^*} L_0 (M_0 L_0)^{-1}, & \textit{if } \ j = 0 \\ Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} + (\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k)^{-1^*} L_k \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k\right)^{-1} & \textit{if } \ j \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.0.18}$$

para $j = 0, \ldots, 2m$ (resp. $j = 0, \ldots, 2m+1$). Entonces $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m+1}$) es una sucesión positiva de Stieltjes.

Demostración. De (2.0.17) y (1.1.18), obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{1,0}(\alpha) =& M_0^{-1}, \\ \widehat{H}_{1,j}(\alpha) =& \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k\right)^{-1^*} M_k^{-1} \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.0.19}$$

Respectivamente de (2.0.18) y (1.1.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{2,0}(\alpha) =& M_0^{-1^*} L_0^{-1} M_0^{-1}, \\ \widehat{H}_{2,j}(\alpha) =& \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k\right)^{-1^*} L_k \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.0.20}$$

Ya que $L_j > 0$ y $M_j > 0$ para todo j, entonces

$$M_0^{-1} > 0, \tag{2.0.21}$$

$$\left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k\right)^{-1^*} M_k^{-1} \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j-1} M_k L_k\right)^{-1} > 0, \tag{2.0.22}$$

$$M_0^{-1} L_0^{-1} M_0^{-1} > 0, \tag{2.0.23}$$

$$\left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k\right)^{-1^*} L_k \left(\overrightarrow{\prod}_{k=0}^{j} M_k L_k\right)^{-1} > 0. \tag{2.0.24}$$

Por (2.0.19), (2.0.21) y (2.0.22) (resp. (2.0.20), (2.0.23) y (2.0.24)), tenemos

$$\widehat{H}_{1,j}(\alpha) > 0, \quad \text{para todo } \ j \in \mathbb{N}_0, \tag{2.0.25}$$

$$\widehat{H}_{2,j}(\alpha) > 0, \quad \text{para todo } \ j \in \mathbb{N}_0. \tag{2.0.26}$$

Sea

$$H_{1,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} H_{1,j-1}(\alpha) & Y_{1,j}(\alpha) \\ Y_{1,j}^*(\alpha) & s_{2j}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{2.0.27}$$

$$H_{2,j-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} H_{2,j-2}(\alpha) & Y_{2,j-1}(\alpha) \\ Y_{2,j-1}^*(\alpha) & s_{2j-1}(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.0.28}$$

Usando (2.0.25), (2.0.28) (resp. (2.0.26), (2.0.28)) y el Lema 2.0.3, obtenemos que la matriz $H_{1,m}(\alpha)$ que es positiva definida; (resp. $H_{2,m}(\alpha)$ es positiva definida). Por ende tenemos que, la secuencia $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ es una sucesión positiva de Stieltjes para $\alpha = 0$. ■

Definición 2.0.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $(s_j(\alpha))_{j=0}^n$ una secuencia definida positiva de Stieljtes con parámetro $\alpha \in [0,\infty)$. Sea $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^n$ una secuencia definida positiva de Stieltjes con parámetro $\alpha \in [0,\infty)$, escogida tal que $(s_j(\alpha))_{j=0}^n = (\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^n$ y sea $[(L_k(\alpha))_{k=0}^\infty, (M_k(\alpha))_{k=0}^\infty]$ la parametrización de DS de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^\infty$. Sea $m \in \mathbb{N}$ escogido tal que $n = 2m$ o $n = 2m-1$ se satisface. Entonces los pares ordenados $\left[(L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (M_k(\alpha))_{k=0}^{m}\right]$ y $\left[(L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}\right]$ son llamados la parametrización de DS de $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ y $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m-1}$ respectivamente.

Note que las igualdades (2.0.19) y (2.0.20) para $\alpha = 0$ fueron probadas primero en [7, Observación 5.7] bajo la condición de que $(s_j)_{j=0}^m$ para $m = 2n$ y $m = 2n+1$ son positivas definidas. Este resultado, se puede probar utilizando un método diferente, ver 8.28 en [17].
En la siguiente proposición omitimos la dependencia del parámetro $\alpha \in [0,\infty)$ de las matrices $A_{[m,1]}$, $A^{[m,1]}$, $u_{1,m}$, $u_{2,m}$, A_{2m} ,A_{2m+1}, $Y_{[1,m]}$ y $Y_{[2m]}$. Para $\alpha = 0$ la proposición (2.0.7) se considera en [8, Lema 7.9, Observación 7.2, Observación 7.3, Observación 7.5, Lemas 7.6 y 7.7]

Proposición 2.0.7. *Para $n = 2m$ $(n = 2m+1)$, sea $(s_j)_{j=0}^n$. Sea T_m, v_m, R_m, $u_{1,m}$, $u_{2,m}$, $S_{[0,m]}$, J_m $A_{[j,k]}$, $A^{[j,k]}$, $Y_{[1,m]}$ y $Y_{[2m]}$ sea como en (1.1.14), (1.1.14), (1.1.11), (1.1.16), (2.0.1), (2.0.4), (2.0.3) y (1.1.17), respectivamente. Entonces las siguientes identidades se cumplen:*

$$J_{m+1}A_{[m,0]} = \begin{pmatrix} -J_m A_{[m,1]} \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^m A_{2m} \\ J_m A_{[m-1,0]} \end{pmatrix}, \tag{2.0.29}$$

$$J_{m+1}A^{[m,0]} = \begin{pmatrix} -J_m A^{[m,1]} \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^m A_{2m+1} \\ J_m A_{[m-1,0]} \end{pmatrix}, \tag{2.0.30}$$

$$T_m^* J_{m+1} = -J_{m+1} T_m^*, \tag{2.0.31}$$

$$R_m^*(t) J_{m+1} = J_{m+1} R_m^*(-t), \tag{2.0.32}$$

$$u_{1,m}^* R_m^*(t) = -v_m^* R_m^*(t) T_m^* S_{[0,m]}, \tag{2.0.33}$$

$$u_{2,m}^* R_m^*(t) = -v_m^* R_m^*(t) S_{[0,m]}, \tag{2.0.34}$$

$$v_m^* T_m^* R_m^*(t) J_{m+1} S_{[0,m]} J_{m+1} A_{[m,0]} = v_{m-1}^* R_{m-1}^*(t) J_m S_{[0,m-1]} J_m A_{[m-1,0]}. \tag{2.0.35}$$

Si $A_0 = I_q$, entonces

$$J_{m+1}A_{[m,0]} = \begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1} Y_{1,m} \\ I_q \end{pmatrix}, \quad \textit{para} \quad n = 2m, \tag{2.0.36}$$

$$J_{m+1}A_{[m,0]} = \begin{pmatrix} -H_{2,m-1}^{-1} Y_{2,m} \\ I_q \end{pmatrix}, \quad \textit{para} \quad n = 2m+1, \tag{2.0.37}$$

$$Q_{1,j}^*(t) = v_j^* R_j^*(t) T_j^* S_{[0,j]} \begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix}, \tag{2.0.38}$$

$$Q_{2,j}^*(t) = v_j^* R_j^*(t) S_{[0,j]} \begin{pmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix}. \tag{2.0.39}$$

Demostración. La demostración sigue los paso de la demo en [8, Lema 7.6, Lema 7.7, Lema 7.5] Las ecuaciones (2.0.29)–(2.0.34) se prueban mediante cálculos directos. La identidad (2.0.35) se prueba usando (1.1.15), la segunda igualdad de (2.0.5), (2.0.29) y

$$S_{[0,m]} = \begin{pmatrix} s_0 & y^*_{[1,m]} \\ 0_{qm\times q} & S_{[0,m-1]} \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones (2.0.36) y (2.0.37) se siguen de (2.0.8)–(2.0.9) y (2.0.10)–(2.0.11), respectivamente. Las identidades (2.0.38) y (2.0.39) son probadas usando (2.0.33) y (2.0.34), respectivamente. ■

Proposición 2.0.8. *Sea $n \in 2, 3, \ldots$ y sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ una familia de polinomios matriciales mónicos $q \times q$ de grado n con parámetro $\alpha \in [0,\infty)$ con secuencia de parámetros de Markov $(\tilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n}$ tal que $(\tilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia positiva definida de Stieltjes. Entonces $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ es una familia de PMTH de grado n con parámetro $\alpha \in [0,\infty)$ asociada con $(\tilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$*

Teorema 2.0.9. *a) Sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ la familia de PMTH definido como en la Definición 1.1.4 con $A_0(\alpha) = I_q$. Entonces existe una secuencia de Stieltjes $(s_j(\alpha))_j^{2m}$(resp. $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m+1}$) y monicos PMO $P_{1,j}, P_{2.j}$ en $[0,\infty]$ y sus polinomios de segunda especie correspondientes $Q_{1,j}$ y $Q_{2,j}$ tal que*

$$\boxed{\mathbf{f}_n(t,\alpha) = \begin{cases} (-1)^m P^*_{1,m}(-t^2,\alpha) + (-1)^{m+1} t\, Q^*_{1,m}(-t^2,\alpha), & n = 2m, \\ (-1)^m Q^*_{2,m}(-t^2,\alpha) + (-1)^m t\, P^*_{2,m}(-t^2,\alpha), & n = 2m+1. \end{cases} \quad (2.0.40)}$$

b) Sea $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$) una secuencia positiva de Stieltjes para el parámetro $\alpha \in [0,\infty)$, y sea $P_{1,m}$, $P_{2,m}$ el mónico correspondiente PMO en $[0,\infty]$ y sus polinomios de segunda especie correspondientes $Q_{1,m}$ y $Q_{2,m}$ definidos como en la Definición 1.1.10 y construido por $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$ (resp. $(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}$). Entonces el polinomio matricial en (2.0.40) es una familia polinomios matriciales tipo Hurwitz como en la Definición 1.1.1.

Demostración. a) Sea $n = 2m$ y $A_0(\alpha) = I_q$. Por la Proposición 2.0.5 via las secuencias $(\mathbf{c}_j(\alpha))_{j=0}^{m-1}$ and $(\mathbf{d}_j(\alpha))_{j=0}^{m-1}$ existe una secuencia positiva de Stieltjes $(s_j)_{j=0}^{2m}$. Usando estas secuencias probamos que

$$\mathbf{h}_n(t,\alpha) = (-1)^m P^*_{1,m}(-t,\alpha) \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_n(t,\alpha) = (-1)^{m+1} Q^*_{1,m}(-t,\alpha) \qquad (2.0.41)$$

con $P_{1,m}$ y $Q_{1,m}$ dada por (1.1.21) y (1.1.23), respectivamente. Para este fin

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_n(t,\alpha) =&(I_q, tI_q, \ldots, t^{m-1}I_q)\begin{pmatrix} A_{2m-1}(\alpha) \\ \cdots \\ A_3(\alpha) \\ A_1(\alpha) \end{pmatrix} \\
=&v_{m-1}^* R_{m-1}^*(t) J_m S_{[0,m-1]} J_m A_{[m-1,0]} \\
=&v_m^* T_m^* R_m^*(t) J_{m+1} S_{[0,m]}(\alpha) J_{m+1} A_{[m,0]}(\alpha) \\
=&-v_m^* J_{m+1} T_m^* R_m^*(-t) S_{[0,m]}(\alpha) J_{m+1} A_{[m,0]}(\alpha) \\
=&-(-1)^m v_m^* R_m^*(-t) T_m^* S_{[0,m]}(\alpha) \begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}(\alpha) Y_{1,m}(\alpha) \\ I_q \end{pmatrix} \\
=&(-1)^{m+1} Q_{1,m}^*(-t,\alpha).
\end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de (1.1.3). La segunda igualdad se obtiene al utilizar (1.1.13), (1.1.14) y (2.0.8). La tercera igualdad se sigue de (2.0.35). La cuarta igualdad se obtiene de (2.0.31) y (2.0.32). La penúltima igualdad se consecuencia de (1.1.14), (2.0.4) y (2.0.36). La última igualdad es una consecuencia de (2.0.38). Análogamente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n(t,\alpha) =&(I_q, tI_q, \ldots, t^m I_q)\begin{pmatrix} A_{2m}(\alpha) \\ \cdots \\ A_2(\alpha) \\ I_q \end{pmatrix} && (2.0.42) \\
=&v_m^* R_m^*(t) \begin{pmatrix} J_m H_{1,m-1}^{-1}(\alpha) Y_{1,m}(\alpha) \\ I_q \end{pmatrix} \\
=&v_m^* R_m^*(t) J_{m+1} \begin{pmatrix} -H_{1,m-1}^{-1}(\alpha) Y_{1,m}(\alpha) \\ I_q \end{pmatrix} && (2.0.43) \\
=&(-1)^m P_{1,m}^*(-t,\alpha),
\end{aligned}$$

donde las primeras tres igualdades se obtienen de (1.1.2), (1.1.13), (1.1.14), (2.0.36) y (2.0.5), y la cuarta de (2.0.32), (2.0.4), (1.1.14) y (1.1.21). Esto finaliza la prueba de las relaciones en (2.0.41).

Para $n = 2m+1$ usando las secuencias $(\mathbf{c}_j(\alpha))_{j=0}^m$ y $(\mathbf{d}_j(\alpha))_{j=0}^{m-1}$, construimos una secuencia$(s_j(\alpha))_{j=0}^{2m+1}$ que debido a la Proposición 2.0.5 es una secuencia positiva de Stieltjes. Entonces los polinomios $P_{2,m}(t,\alpha)$ y $Q_{2,m}(t,\alpha)$ están bien definidos. De manera similar como en el caso $n = 2m$ para $n = 2m+1$, obtenemos

$$\mathbf{g}_n(t,\alpha) = (-1)^m P_{2,m}^*(-t,\alpha), \quad \text{y} \quad \mathbf{h}_n(t,\alpha) = (-1)^m Q_{2,m}^*(-t,\alpha), \qquad (2.0.44)$$

donde usamos (2.0.8) y (2.0.37) en lugar de (2.0.36). Por (1.1.4), (2.0.41) y (2.0.44), la parte a) esta probada.
b) Se usa la segunda igualdad de (1.1.75) y (1.1.76), así como el hecho de que $M_k(\alpha)$ y $L_k(\alpha)$ son matrices positivas definidas. ■

Las siguientes observaciones son una consecuencia del Teorema 2.0.9 junto con el Lema 1.1.25.

Observación 2.0.10. Sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ una familia de PMTH. Sean los polinomios $\mathbf{h}_n(t,\alpha)$ y $\mathbf{g}_n(t,\alpha)$ están definidas como en (1.1.2) y (1.1.3).

a) Si $n = 2m$, la función racional matricial $\frac{\mathbf{h}_n(-z,\alpha)}{\mathbf{g}_n(-z,\alpha)}$ que está definida en el Lema 2.0.1 es una solución extremal para el problema de momentos truncado de Stieltjes de la forma s_M; ver (1.1.75).

b) Si $n = 2m+1$, la función racional matricial $-\frac{\mathbf{g}_n(-z,\alpha)}{z\mathbf{h}_n(-z,\alpha)}$ definida en el Lema 2.0.1 es una solución extremal del problema de momentos truncado de Stieljtes de la forma s_μ; ver (1.1.76).

Observación 2.0.11. Sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ una familia de PMTH y $\mathbf{h}_n(t,\alpha)$ y $\mathbf{g}_n(t,\alpha)$ definido como en (1.1.2) y (1.1.3).

a) Sea $\alpha \in [0,\infty)$ un parámetro. Si $n = 2m$, entonces el polinomio matricial $\mathbf{h}_n(-t,\alpha)$ es un miembro de la familia de PMO en $[0,\infty]$ de grado m con respecto a una medida matricial positiva $e^{-t\alpha}\sigma$ en $[0,\infty)$, y $\mathbf{g}_n(-t,\alpha)$ es su polinomio de segunda especie de grado $m-1$.

b)Si $n = 2m+1$, el polinomio matricial $\mathbf{g}_n(-t,\alpha)$ es un miembro de la familia de PMO en $[0,\infty]$ de grado m con respecto a una medida matricial positiva $e^{-t\alpha}t\sigma$ en $[0,\infty]$, y $\mathbf{h}_n(-t,\alpha)$ es su polinomio de segunda especie de grado m.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, llegamos a los que sería dos de los resultados más importantes de todo el documento. Lo que nos dice el teorema es como a partir de un PMTH y su secuencia de parámetros de Markov es posible obtener una secuencia definida positiva de Stieltjes asociada a nuestro PMTH.

Teorema 2.0.12. *Sea $n \in \{2,3,\dots\}$, $\alpha \in [0,\infty)$ un parámetro y sea $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ una familia PMTH de grado n con secuencia de parámetros de Markov $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ escogido tal que $n = 2m$ y $n = 2m+1$ se satisfaga.*

(a) Suponga $n = 2m$ y sea $[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ una parametrización de Hurwitz de $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$. Entonces $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia positiva definida de Stieltjes con parametrización de DS $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ y $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ es una familia de PMTH de grado n asociada a $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.

(b) Suponga $n = 2m+1$ y sea $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ una parametrización de Hurwitz de $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$. Entonces $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ secuencia positiva de Stieltjes con parametrización de DS $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m}]$ y $\mathbf{f}_n(t,\alpha)$ es una familia de PMTH de grado n asociada a $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.

Demostración. Denotaremos por h_n y g_n como la parte par e impar de $\mathbf{f}_n$ respectivamente.

(a) Sea $c_k(\alpha) = I_q$ y $d_k(\alpha) = I_q$ para todo $k \in \{m, m+1, \dots\}$. Entonces $(c_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}$ y $(d_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}$ son secuencias de $\mathbb{C}_{>}^{q\times q}$. Acorde a [[17], Proposición 8.27] existe una secuencia $(s_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$ definida positiva de Stieltjes con parametrización de Dyukarev-Stieltjes $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}]$. Usando el Lema 1.1.25 y la Definición 1.1.4 y 2.0.2 obtenemos

$$s_M(z,\alpha) = \frac{g_{2m}(-z,\alpha)}{h_{2m}(-z,\alpha)} = -\sum_{j=0}^{\infty} z^{-(j+1)}\widetilde{s}_j(\alpha)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con $|z| > \eta_{2m}$, donde $\eta_n := \text{máx}\{|z| : z \in \mathcal{N}_{h_n}\}$, donde $\mathcal{N}_{h_n} := \{z \in \mathbb{C} : \det h_n(z, \alpha) = 0\}$. Ya que $\sigma_{2m,max} \in \mathcal{M}[[0, \infty), (s_j(\alpha))_{j=0}^{2m}, \leqslant]$ y esta concentrado sobre un conjunto finito de puntos y por tanto compactamente soportado, por tanto vía el Lema 1.1.8 concluimos que $s_j(\alpha) = \widetilde{s}_j(\alpha)$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{0,2m-1}$. En particular $(\widetilde{s}_j)_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia definida positiva de Stieltjes con parametrización de Dyukarev Stieltjes $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$. De la Proposición 2.0.8 resulta entonces que $\mathbf{f}_n$ es una familia de PMTH de grado n con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ asociada con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$

(b) Sea $c_k(\alpha) = I_q$ y $d_k(\alpha) = I_q$ para todo $k \in \{m+1, m+2, \ldots\}$. Entonces $(c_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}$ y $(d_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}$ son secuencias de $\mathbb{C}_{>}^{q \times q}$. Acorde a [[17],Proposición 8.27] donde se considera $\alpha = 0$ existe una secuencia $(s_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$ definida positiva de Stieltjes con parametrización de Dyukarev-Stieltjes $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{\infty}]$. Usando el Lema 1.1.25 y la Definición 1.1.4 y 2.0.2 obtenemos

$$s_\mu(z, \alpha) = \frac{h_{2m+1}(-z, \alpha)}{-z g_{2m}(-z, \alpha)} = -\sum_{j=0}^{\infty} z^{-(j+1)} \widetilde{s}_j(\alpha)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con $|z| > \rho_{2m+1}$, donde $\rho_{2m+1} := \text{máx}\{|z| : z \in \mathcal{N}_{g_{2m+1}}\}$ donde $\mathcal{N}_{g_{2m+1}} := \{z \in \mathbb{C} : \det g_{2m+1}(z, \alpha) = 0\}$.
Ya que $\sigma_{2m+1,min} \in \mathcal{M}[[0, \infty), (s_j(\alpha))_{j=0}^{2m+1}, \leqslant]$ y esta concentrado sobre un conjunto finito de puntos y por tanto compactamente soportado, por tanto vía el Lema 1.1.8 concluimos que $s_j(\alpha) = \widetilde{s}_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{0,2m}$. En particular $(\widetilde{s}_j)_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia definida positiva de Stieltjes con parametrización de Dyukarev Stieltjes $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m}]$. De la Proposición 2.0.8 resulta entonces que $\mathbf{f}_n$ es una familia de PMTH de grado n con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ asociada con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.

∎

Ahora estamos en condiciones de enunciar una útil caracterización de los polinomios matriciales mónicos tipo Hurwitz en términos de la secuencia de parámetros de Markov.

Teorema 2.0.13. *Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Dado el parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ y sea $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ una familia de polinomios matriciales mónicos de $q \times q$ de grado n con respecto a la variable t con secuencia de parámetros de Markov $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:*

(i) $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ *es una familia de PMTH de grado n en la variable t, $\alpha \in [0, \infty)$ parámetro.*

(ii) $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ *es una secuencia positiva definida de Stieltjes.*

Definición 2.0.14. Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ una secuencia positiva definida de Stieltjes, con $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro. Sea $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$ una secuencia positiva definida de Stieltjes tal que $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1} = (\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Entonces cuando hablamos de la familia de PMTH de $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ nos referimos a la familia de PMTH de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{\infty}$

Ahora probaremos que la correspondencia entre polinomios matriciales tipo Hurwitz y secuencias finitas definidas positivas de Stieltjes es biyectiva.

Teorema 2.0.15. *Sea $n \in \{2, 3, \dots\}$. Dado el parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ y sea $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ una familia de PMTH de grado n en la variable t con secuencia de parámetros de Markov $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n}$. Entonces existe una única secuencia positiva de Stieltjes $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ tal que $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ es una familia de PMTH de grado n con respecto de t asociada con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ concretamente $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1} = (\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.*

Demostración. De (2.0.12) obtenemos que $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ secuencia positiva definida de Stieltjes y que $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ es la PMTH de grado n asociado con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Si $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia arbitraria definida positiva de Stieltjes tal que $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ es una familia de PMTH de grado n en la variable t asociada con $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$, entonces la Definición 2.0.14 y el Teorema 2.0.9 tenemos $(s_j(\alpha))_{j=0}^{n-1} = (\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ ■

Ahora podemos demostrar que todo polinomio matricial tipo Hurwitz admite un única parametrización de Hurwitz.

Teorema 2.0.16. *Sea $n \in \{2, 3, \dots\}$. Dado el parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ y sea $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$ una familia de PMTH de grado n con respecto a la variable t con secuencia de parámetros de Markov $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ escogido tal que $n = 2m$ y $n = 2m + 1$ se satisfacen.*

(a) Supongamos $n = 2m$ y sea

$$[(L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$$

la parametrización de DS de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Entonces hay una única parametrización de Hurwitz $[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ de $\mathbf{f}_n$, concretamente

$$[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}] = [(M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}].$$

(b) Supongamos $n = 2m + 1$ y sea

$$[(L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (M_k(\alpha))_{k=0}^{m}]$$

la parametrización de DS de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$. Entonces hay una única parametrización de Hurwitz $[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ de $\mathbf{f}_n$, concretamente

$$[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}] = [(M_k(\alpha))_{k=0}^{m}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}].$$

Demostración. Del Teorema 2.0.12 tenemos que $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ es una secuencia definida positiva de Stieltjes y que $\mathbf{f}_n$ es una familia de PMTH con parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ de grado n asociado con $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$.

(a) En vista de las Definiciones 2.0.14 y 2.0.6, podemos concluir de la parte (a) del Teorema 2.0.9 que

$$[(M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$$

es una parametrización de Hurwitz de $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$.
Si $[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ es una parametrización de Hurwitz arbitraria de $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$, entonces la parte (a) del Teorema 2.0.15 prueba que $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ es una parametrización de DS de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ y por tanto

$$[(M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}] = [(c_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$$

.

(b) En vista de las Definiciones 2.0.14 y 2.0.6, podemos concluir de la parte (b) del Teorema 2.0.9 que

$$[(M_k(\alpha))_{k=0}^{m}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$$

es una parametrización de Hurwitz de $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$.
Si $[(c_k(\alpha))_{k=0}^{m}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$ es una parametrización de Hurwitz arbitraria de $\mathbf{f}_n(t, \alpha)$, entonces la parte (a) del Teorema 2.0.15 prueba que $[(d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (c_k(\alpha))_{k=0}^{m}]$ es una parametrización de DS de $(\widetilde{s}_j(\alpha))_{j=0}^{n-1}$ y por tanto

$$[(M_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}, (L_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}] = [(c_k(\alpha))_{k=0}^{m}, (d_k(\alpha))_{k=0}^{m-1}]$$

.

■

Capítulo 3

Sobre estabilidad asintótica de EDOs y PMO

3.0.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La noción de estabilidad que consideraremos en esta sección fue propuesta por el matemático ruso Aleksandr Mijáilovich Lyapunov en su tesis de doctorado en 1884.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.0.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n, f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n, W \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(W)$. Donde W es una región de $\mathbb{R}^n$. La notación $f \in C(W)$ significa que f es continua y diferenciable, con primera derivada continua en W. Lo anterior garantiza la existencia y unicidad de la solución del sistema (3.0.1) en una vecindad de cualquier punto de W.

Definición 3.0.1. Un punto $x_0 \in W$ se llama punto de equilibrio del sistema (3.0.1) si $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 1

Sea $n = 2$ y consideremos el sistema (3.0.1) con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Claramente $f(x) = 0$ en los puntos $x = (1, 0)^*$ y $x = (-1, 0)^*$, estos son los únicos puntos de equilibrio de (3,0,1).

Definición 3.0.2. Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (3,0,1) se dice:

- x_0 es estable según Lyapunov (ó simplemente estable) si para toda vecindad U de x_0 existe una vecindad $U_1 \subseteq U$ de x_0 tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 está definida y permanece en U para todo $t > 0$.

- x_0 es asintóticamente estable, si es estable y cada vecindad U_1 se puede elegir de modo que para toda solución $x(t)$ con x_0 en U_1 se cumple

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0.$$

- x_0 es inestable si no es estable.

El análisis de las soluciones del sistema (3.0.1) cerca de los puntos de equilibrio es uno de los principales objetivos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, sin embargo, ha de satisfacer un cierto criterio de estabilidad para ser relevante físicamente.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio x_0 del sistema (3.0.1), utilizaremos los métodos indirecto y directo de Lyapunov.

La estabilidad en el punto de equilibrio x_0 mediante la linealización de (3.0.1) alrededor de x_0, esto es, considerando la estabilidad cerca del origen del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.0.2}$$

donde A es una matriz constante. El sistema lineal (3.0.2) tiene al origen $x = 0$ como punto de equilibrio y el comportamiento de las soluciones de este sistema está completamente determinado por los valores propios de la matriz A. En particular se tiene que el origen es asintóticamente estable sí y sólo sí todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.

Si una matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces A es llamada matriz de Hurwitz. Por lo tanto el origen del sistema (3.0.2) es asintóticamente estable sí y sólo sí A es de Hurwitz.

3.1 Criterio de Routh-Hurwitz

Sea dada una ecuación diferencial lineal de coeficientes reales constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = 0, \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n = const, a_0 > 0). \tag{3.1.1}$$

La solución nula $y = 0$ de la ecuación (3.1.1) es asintóticamente estable, cuando las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{3.1.2}$$

son negativas.
Criterio de Routh-Hurwitz. Para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación (3.1.2) sean negativas es necesario y suficiente que sean positivos todos los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots a_n \end{pmatrix}.$$

La matriz de Hurwitz se compone del modo siguiente: En la diagonal principal se escriben los coeficientes del polinomio (3.1.2), comenzando por a_1 y terminando por a_n.

Las columnas, una tras otra, constan de los coeficientes de subíndices solamente impares o de subíndices solamente pares. Entre estos últimos va incluido el coeficiente a_0. Todos los demás elementos de la matriz, corresponden a subíndices mayores que n o menores que cero, se suponen iguales a cero.
Los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz son de la forma:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \qquad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots a_n \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, la condición de Hurwitz dice: para que la solución $y \equiv 0$ de la ecuación (3.1.1) sea estable, es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0, \tag{3.1.3}$$

como $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, la condición $\Delta_n > 0$ puede sustituirse por $a_n > 0$.

3.1.1 Estabilidad asintótica mediante polinomios ortogonales

Como una aplicación de los resultados obtenidos, consideraremos en esta sección el bien conocido criterio de estabilidad de Lyapunov [22] para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes en términos de polinomios ortogonales sobre $[0, \infty)$ y sus polinomios de segunda especie.

Consideraremos la ecuación diferencial

$$\dot{y} = A(\alpha) y, \tag{3.1.4}$$

donde y es un vector de $n \times 1$, y A es una matriz de $n \times n$ cuyas entradas dependen de un parámetro $\alpha \in [0, \infty)$.

Observación 3.1.1. Sea $f_A(\lambda,\alpha) := \det(\lambda I - A(\alpha))$ el polinomio característico de la matriz A. Diremos que el sistema (3.1.4) es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov sí y solo si todos los ceros del polinomio característico f_A tienen parte real negativa.

Teorema 3.1.2. *Sea A una matriz real de $n \times n$. El sistema (3.1.4) es asintóticamente estable sí y solo sí el polinomio característico f_A de A admite la siguiente representación:*

$$f_A(\lambda,\alpha) = \begin{cases} p_{1,m}(-\lambda^2,\alpha) - \lambda\, q_{1,m}(-\lambda^2,\alpha), & n = 2m, \\ q_{2,m}(-\lambda^2,\alpha) + \lambda\, p_{2,m}(-\lambda^2,\alpha), & n = 2m+1, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

donde $p_{1,m}$ (resp. $p_{2,m}$) es un polinomio mónico ortogonal escalar en $[0,\infty)$ con respecto a las función de variación acotada no decreciente $e^{-\alpha x}d\sigma(x)$ (resp. $e^{-\alpha x}xd\sigma(x)$) en $[0,\infty)$, y $q_{1,m}$ y $q_{2,m}$ son sus polinomios de segunda especie correspondientes.

Demostración. Supongamos que el sistema (3.1.4) es asintóticamente estable, entonces por la Observación 3.1.1 sabemos que todos los ceros del polinomio $f_A(\lambda,\alpha)$ tienen parte real negativa, es decir, son polinomios de Hurwitz. Por tanto utilizando el Teorema 2.0.9, sabemos existe polinomios $p_{1,m}$ (resp. $p_{2,m}$) mónicos ortogonales en $[0,\infty)$ con respecto a las funciones de variación acotada no decreciente $e^{-\alpha x}d\sigma(x)$ (resp. $e^{-\alpha x}d\sigma(x)$) tales que se satisface (3.1.5). El recíproco es directo. ∎

3.2 Ejemplos

3.2.1 Ejemplo 1

El siguiente ejemplo tiene la intención de mostrar la construcción de los polinomios matriciales tipo Hurwitz utilizando el Teorema 3.1.2.
Para ilustrar el caso escalar asumiremos que $q = 1$. Los momentos se obtienen por

$$s_j(\alpha) = \int_0^\infty x^j e^{-\alpha x} d(-e^{-x}) = \frac{j!}{(1+\alpha)^{j+1}}$$

para $j = 0, \ldots, 6$. Esta secuencia es una secuencia positiva de Stieltjes. Los polinomios ortogonales correspondientes $P_{1,j}$ y $P_{2,j}$ para estos momentos tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P_{1,0}(z,\alpha) &= 1, \quad P_{1,1}(z,\alpha) = z - \frac{1}{\alpha+1}, \\
P_{1,2}(z,\alpha) &= z^2 - \frac{4z}{\alpha+1} + \frac{2}{(\alpha+1)^2}, \\
P_{1,3}(z,\alpha) &= z^3 - \frac{9z^2}{\alpha+1} + \frac{18z}{(\alpha+1)^2} - \frac{6}{(\alpha+1)^3}, \\
P_{2,0}(z) &= 1, \quad P_{2,1}(z) = z - \frac{2}{\alpha+1}, \\
P_{2,2}(z) &= z^2 - \frac{6z}{\alpha+1} + \frac{6}{(\alpha+1)^2}, \\
P_{2,3}(z) &= z^3 - \frac{12z^2}{\alpha+1} + \frac{36z}{(\alpha+1)^2} - \frac{24}{(\alpha+1)^3}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos los de segunda especie:

$$
\begin{aligned}
&Q_{1,0}(z,\alpha)=0, \quad Q_{1,1}(z,\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}, \quad Q_{1,2}(z,\alpha)=\frac{z}{\alpha+1}-\frac{3}{(\alpha+1)^2},\\
&Q_{1,3}(z)=\frac{z^2}{\alpha+1}-\frac{8z}{(\alpha+1)^2}+\frac{11}{(\alpha+1)^3},\\
&Q_{2,0}(z)=1, \quad Q_{2,1}(z)=\frac{z}{\alpha+1}-\frac{1}{(\alpha+1)^2},\\
&Q_{2,2}(z)=\frac{z^2}{\alpha+1}-\frac{5z}{(\alpha+1)^2}+\frac{2}{(\alpha+1)^3},\\
&Q_{2,3}(z)=\frac{z^3}{\alpha+1}-\frac{11z^2}{(\alpha+1)^2}+\frac{26z}{(\alpha+1)^3}-\frac{6}{(\alpha+1)^4}.
\end{aligned}
$$

Los polinomios de Hurwitz correspondientes son los siguientes

$$
\begin{aligned}
&f_1(t,\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}+t, \quad f_2(t)=t^2+\frac{t}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1},\\
&f_3(t,\alpha)=t^3+\frac{t^2}{\alpha+1}+\frac{2t}{\alpha+1}+\frac{1}{(\alpha+1)^2},\\
&f_4(t,\alpha)=t^4+\frac{t^3}{\alpha+1}+\frac{4t^2}{\alpha+1}+\frac{3t}{(\alpha+1)^2}+\frac{2}{(\alpha+1)^2},\\
&f_5(t,\alpha)=t^5+\frac{t^4}{\alpha+1}+\frac{6t^3}{\alpha+1}+\frac{5t^2}{(\alpha+1)^2}+\frac{6t}{(\alpha+1)^2}+\frac{2}{(\alpha+1)^3},\\
&f_6(t,\alpha)=t^6+t^4\left(\frac{9}{\alpha+1}+\frac{z}{\alpha+1}\right)+t^2\left(\frac{18}{(\alpha+1)^2}+\frac{8z}{(\alpha+1)^2}\right)+\frac{11z}{(\alpha+1)^3}+\frac{6}{(\alpha+1)^3},\\
&f_7(t,\alpha)=t^7+\frac{t^6}{\alpha+1}+\frac{12t^5}{\alpha+1}+\frac{11t^4}{(\alpha+1)^2}+\frac{36t^3}{(\alpha+1)^2}+\frac{26t^2}{(\alpha+1)^3}+\frac{24t}{(\alpha+1)^3}+\frac{6}{(\alpha+1)^4}.
\end{aligned}
$$

3.2.2 Ejemplo 2

Para ejemplificar la construcción de los polinomios matriciales tipo Hurwitz con $q=2$ consideremos la distribución matricial de 2×2 sobre $[0,\infty)$ que se menciono en la Observación 1.1.23, $\sigma(x)=\begin{pmatrix} 4-2e^{-\frac{1}{2}x} & e^{-x} \\ e^{-x} & 2-e^{-x}\end{pmatrix}$, la cual corresponde a una medida positiva definida sobre $[0,\infty)$. Para detalles sobre medidas positivas, ver [11]. Las matrices $s_j(\alpha)=j!\begin{pmatrix} \frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha)^{j+1}} & -\frac{1}{(1+\alpha)^{j+1}} \\ -\frac{1}{(1+\alpha)^{j+1}} & \frac{1}{(1+\alpha)^{j+1}}\end{pmatrix}$ para $j\geqslant 0$ son los momentos correspondientes de (1.1.7). Uno puede verificar de manera inmediata que las matrices por bloques $H_{1,j}(\alpha)$ y $H_{2,j}(\alpha)$ para $j=0,\ldots,2$ son matrices definidas positivas. Los primeros complementos de Schur son los siguientes:

$$\widehat{H}_{1,0}(\alpha)=\begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \widehat{H}_{2,0}(\alpha)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2} & -\frac{1}{(\alpha+1)^2} \\ -\frac{1}{(\alpha+1)^2} & \frac{1}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{H}_{1,1(\alpha)}=\begin{pmatrix} \frac{2\left(4\alpha^2+6\alpha+3\right)}{(\alpha+1)^2(2\alpha+1)^3} & -\frac{1}{(\alpha+1)^3} \\ -\frac{1}{(\alpha+1)^3} & \frac{1}{(\alpha+1)^3} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{H}_{2,1}(\alpha)=\begin{pmatrix} \frac{16\left(8\alpha^3+18\alpha^2+16\alpha+5\right)}{(\alpha+1)^2(2\alpha+1)^4(4t+3)} & -\frac{2}{(\alpha+1)^4} \\ -\frac{2}{(\alpha+1)^4} & \frac{2}{(\alpha+1)^4} \end{pmatrix}.$$

Los polinomios matriciales ortogonales son los siguientes: $P_{1,0}=I_2$, $P_{2,0}=I_2$,

$$P_{1,1}=\begin{pmatrix} z-\frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & -\frac{2}{2\alpha+1} \\ 0 & z-\frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix},\ P_{2,1}=\begin{pmatrix} z-\frac{2\left(12\alpha^2+18\alpha+7\right)}{8\alpha^3+18\alpha^2+13\alpha+3} & -\frac{8(\alpha+1)}{8\alpha^2+10\alpha+3} \\ 0 & z-\frac{2}{\alpha+1} \end{pmatrix},$$

$$P_{1,2}=\begin{pmatrix} z^2-\frac{4\left(24\alpha^3+54\alpha^2+43\alpha+12\right)z}{16\alpha^4+48\alpha^3+54\alpha^2+27\alpha+5}+\frac{2\left(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37\right)}{\left(2\alpha^2+3\alpha+1\right)^2\left(8\alpha^2+12\alpha+5\right)} & -\frac{4\left(16z\alpha^4+4(13z-8\alpha^3+8(8z-9)\alpha^2+(35z-58)\alpha+7z-16\right)}{(2\alpha+1)^2\left(8\alpha^3+20\alpha^2+17\alpha+5\right)} \\ 0 & z^2-\frac{4z}{\alpha+1}+\frac{2}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$P_{2,2}=\begin{pmatrix} P_{2,2}^{(1,1)} & P_{2,2}^{(1,2)} \\ 0 & z^2-\frac{6z}{\alpha+1}+\frac{6}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} P_{2,2}^{(1,1)} :=& z^2-\frac{6\left(4\alpha^2+6\alpha+3\right)(4\alpha+3)^3 z}{192\alpha^6+864\alpha^5+1632\alpha^4+1656\alpha^3+950\alpha^2+291\alpha+37} \\ &+\frac{6\left(768\alpha^6+3456\alpha^5+6656\alpha^4+7008\alpha^3+4240\alpha^2+1392t+193\right)}{\left(2\alpha^2+3\alpha+1\right)^2\left(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37\right)}, \\ P_{2,2}^{(1,2)} :=& -\frac{24\left(32z\alpha^5+32(4z-3)\alpha^4+16(13z-18)\alpha^3+2(85z-172)\alpha^2+(69z-188)\alpha+11z-39\right)}{(2\alpha+1)^2\left(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37\right)}. \end{aligned}$$

Los polinomios de segunda especie están dados por $Q_{1,0}=0_2$, $Q_{2,0}=\begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$,

$$Q_{1,1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix},\ Q_{2,1}=\begin{pmatrix} \frac{2\left(8z\alpha^3+2(9z-4)\alpha^2+(13z-10)\alpha+3z-4\right)}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} & -\frac{z(\alpha+1)-1}{(\alpha+1)^2} \\ -\frac{z(\alpha+1)-1}{(\alpha+1)^2} & \frac{z(\alpha+1)-1}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,2}=\begin{pmatrix} \frac{2\left(16z\alpha^4+48(z-1)\alpha^3+2(27z-52)\alpha^2+(27z-82)\alpha+5z-24\right)}{(2\alpha+1)^2(8\alpha^3+20\alpha^2+17\alpha+5)} & -\frac{z(\alpha+1)-3}{(\alpha+1)^2} \\ -\frac{z(\alpha+1)-3}{(\alpha+1)^2} & \frac{z(\alpha+1)-3}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$Q_{2,2}=\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{num}}{(\alpha+1)^2(2\alpha\alpha+1)^3(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & \frac{(\alpha+1)^2z^2-5(\alpha+1)z+2}{(\alpha+1)^3} \\ \frac{(\alpha+1)^2z^2-5(\alpha+1)z+2}{(\alpha+1)^3} & \frac{-(\alpha+1)^2z^2+5(\alpha+1)z-2}{(\alpha+1)^3} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{num} :=& 2\left(384\alpha^8+2304\alpha^7+6048\alpha^6+9072\alpha^5+8500\alpha^4+5088\alpha^3+1897t^2+402\alpha+37\right)z^2 \\ &-4\left(960\alpha^7+4896\alpha^6+10848\alpha^5+13560\alpha^4+10330\alpha^3+4789\alpha^2+1247\alpha+140\right)z \\ &+4\left(384\alpha^6+1536\alpha^5+2688\alpha^4+2640\alpha^3+1540\alpha^2+506\alpha+73\right). \end{aligned}$$

Con $P_{r,j}$ y $Q_{r,j}$ para $r = 1,2$ y $j = 1,2$. Ahora ya contamos con todos los elementos necesarios para poder construir nuestros PMTH, para ello recordemos que $f_n(z,\alpha)$ se puede escribir como en (1.1.4) y utilizando las relaciones de $h_n(z,\alpha)$ y $g_n(z,\alpha)$ con $P_{k,m}$ y $Q_{k,m}$ respectivamente (para $k = 0,\dots,2$ y $j = 0,\dots,2$) tenemos que:

$$f_1(z,\alpha) = (-1)^0 \left[Q_{2,0}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^* + z(-1)^0 \left[P_{2,0}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^*$$

Sustituimos $Q_{1,0}$ y $P_{1,0}$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_1(z,\alpha) &= Q_{2,0} + zI_2, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ y $m = 1$ tenemos que

$$f_2(z,\alpha) = -\left[P_{1,1}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^* + z(-1)^2 \left[Q_{1,1}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^*.$$

Sustituimos $Q_{1,1}$ y $P_{1,1}$ y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_2(z,\alpha) &= -\begin{pmatrix} -z^2 - \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ -\frac{2}{2\alpha+1} & -z^2 - \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ \frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Notemos que cada coeficiente matricial es una matriz definida positiva, por ende el polinomio matricial es de Hurwitz.
Para $n = 3$ tenemos que $m = 1$ por tanto tenemos que

$$f_3(z,\alpha) = (-1) \left[Q_{2,1}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^* - z \left[P_{2,1}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^*.$$

Sustituyendo $P_{2,1}$ y $Q_{2,1}$ en lo anterior obtenemos lo siguiente

$$f_3(z,\alpha) = A_0(\alpha)z^3 + A_1(\alpha)z^2 + A_2(\alpha)z + A_3(\alpha).$$

Donde

$$\begin{aligned} A_3(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{16\alpha^2}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} + \frac{20\alpha}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} + \frac{8}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} & -\frac{1}{(\alpha+1)^2} \\ -\frac{1}{(\alpha+1)^2} & \frac{1}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix}, \\ A_2(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{36\alpha^2}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} + \frac{26\alpha}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} + \frac{6}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} + \frac{16\alpha^3}{(2\alpha+1)^2(4\alpha^2+7\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \\ A_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{2\left(12\alpha^2+18\alpha+7\right)}{8\alpha^3+18\alpha^2+13\alpha+3} & 0 \\ \frac{8(\alpha+1)}{8\alpha^2+10\alpha+3} & \frac{2}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \\ A_0(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Continuamos con $n = 4$ $m = 2$ de manera que

$$f_4(z,\alpha) = (-1)^2\left[P_{1,2}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^* + z(-1)^3\left[Q_{1,2}(-\overline{z}^2,\alpha)\right].$$

Sustituyendo $P_{1,2}$ y $Q_{1,2}$ obtenemos lo siguiente:

$$f_4(z,\alpha) = A_0(\alpha)z^4 + A_1(\alpha)z^3 + A_2(\alpha)z^2 + A_3(\alpha)z + A_4(\alpha).$$

Donde

$$\begin{aligned}
A_0(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \\
A_2(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{4\left(24\alpha^3+54\alpha^2+43\alpha+12\right)}{16\alpha^4+48\alpha^3+54\alpha^2+27\alpha+5} & 0 \\ \frac{16\left(4\alpha^4+64\alpha^2+35\alpha+20\right)}{(2\alpha+1)^2(8\alpha^3+20\alpha^2+17\alpha+5)} & \frac{4}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \\
A_3(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{4\left(24\alpha^3+52\alpha^2+41\alpha+12\right)}{(2\alpha+1)^2(8\alpha^3+20\alpha^2+17\alpha+5)} & -\frac{3}{(\alpha+1)^2} \\ -\frac{3}{(\alpha+1)^2} & \frac{3}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix}, \\
A_4(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{2\left(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37\right)}{(2\alpha^2+3\alpha+1)^2(8\alpha^2+12\alpha+5)} & 0 \\ \frac{32\left(4\alpha^3+36\alpha^2+29\alpha+8\right)}{(2\alpha+1)^2(8\alpha^3+20\alpha^2+17\alpha+5)} & \frac{2}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para finalizar, sea $n = 5$ y $m = 2$ de manera que

$$f_5(z,\alpha) = (-1)^2\left[Q_{2,2}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^* + z(-1)^2\left[P_{2,2}(-\overline{z}^2,\alpha)\right]^*.$$

Sustituyendo $P_{2,2}$ y $Q_{2,2}$ obtenemos que

$$f_5(z,\alpha) = A_0(\alpha)z^5 + A_1(\alpha)z^4 + A_2(\alpha)z^3 + A_3(\alpha)z^2 + A_4(\alpha)z + A_5(\alpha).$$

Donde

$$\begin{aligned}
A_0(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{2\left(384\alpha^8+2304\alpha^7+6048\alpha^6+9072\alpha^5+8500\alpha^4+5088\alpha^3+1897\alpha^2+402\alpha+37\right)}{(\alpha+1)^2(2\alpha^2+1)^3(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & (\alpha+1)^2 \\ (\alpha+1)^2 & -(\alpha+1)^2 \end{pmatrix}, \\
A_2(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{6(4\alpha+3)^3\left(4\alpha^2+6\alpha+3\right)}{192\alpha^6+864\alpha^5+1632\alpha^4+1656\alpha^3+950\alpha^2+291\alpha+37} & 0 \\ \frac{24\left(16\alpha^4+56\alpha^3+76\alpha^2+47\alpha+11\right)}{(2\alpha+1)(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & \frac{6z^3}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \\
A_3(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{4\left(960\alpha^7+4896\alpha^6+10848\alpha^5+13560\alpha^4+10330\alpha^3+4789\alpha^2+1247\alpha+140\right)}{(\alpha+1)^2(2\alpha^2+1)^3(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & 5(\alpha+1) \\ 5(\alpha+1) & -5(\alpha+1) \end{pmatrix}, \\
A_4(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{6\left(768\alpha^6+3456\alpha^5+6656\alpha^4+7008\alpha^3+4240\alpha^2+1392\alpha+193\right)}{(2\alpha^2+3\alpha+1)^2(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & 0 \\ \frac{24\left(96\alpha^4+288\alpha^3+344\alpha^2+188\alpha+39\right)}{(2\alpha+1)^2(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & \frac{6}{(\alpha+1)^2} \end{pmatrix}, \\
A_5(\alpha) &= \begin{pmatrix} \frac{4\left(384\alpha^6+1536\alpha^5+2688\alpha^4+2640\alpha^3+1540\alpha^2+506\alpha+73\right)}{(\alpha+1)^2(2\alpha^2+1)^3(96\alpha^4+288\alpha^3+336\alpha^2+180\alpha+37)} & \frac{2}{(\alpha+1)^3} \\ \frac{2}{(\alpha+1)^3} & -\frac{2}{(\alpha+1)^3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.2.3 Ejemplo de un sistema dinámico en bloques

Sea $\alpha \in [0, \infty)$ un parámetro. Consideremos el siguiente sistema dinámico

$$\dot{X} = \widetilde{A} X \tag{3.2.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}, \\
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
B_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} - 1 & -\frac{2}{2\alpha+1} \\ -\frac{2}{2\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & -1 \end{pmatrix}, \\
B_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} - 1 \\ \frac{1}{\alpha+1} - 1 & -\frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

A_2 puede ser cualquier matriz 2×2 invertible, para el ejemplo asumiremos $A_2 = I_2$. Con el objetivo de analizar la estabilidad del sistema (3.2.2), usaremos el siguiente cambio de variable

$$W = FX \tag{3.2.3}$$

donde

$$F = \begin{pmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ A_2^{-1} A_1 & I \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

La inversa de la matriz F esta dada por

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ -A_2^{-1} A_1 A_2 & I \end{pmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Derivando (3.2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= F\dot{X} \\
&= F\left(\widetilde{A}X\right) \\
&= F\widetilde{A}F^{-1}W.
\end{aligned}$$

Reescribimos la matriz $F\widetilde{A}F^{-1}$, tenemos

$$F\widetilde{A}F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C_2 & -C_1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

Haciendo los cálculos de (3.2.6) tenemos la siguiente igualdad

$$F \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 & -\frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

De donde obtenemos que

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ \frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix}. \tag{3.2.8}$$

De esta manera, tomando en cuenta la transformación (3.2.3), la ecuación diferencial (3.2.2) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\dot{W} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C_2 & -C_1 \end{pmatrix} W. \tag{3.2.9}$$

El sistema (3.2.9) es equivalente a la ecuación diferencial de la forma

$$Iy'' + C_1 y' + C_2 y = 0 \tag{3.2.10}$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

El polinomio característico de (3.2.10) es la parte izquierda de la siguiente igualdad

$$I\lambda^2 + C_1\lambda + C_2 = 0. \tag{3.2.11}$$

Sustituyendo (3.2.8) en (3.2.11), obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\alpha+1} & -\frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} \frac{4\alpha+3}{2\alpha^2+3\alpha+1} & 0 \\ \frac{2}{2\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} = 0.$$

como pudimos ver en el ejemplo anterior, la parte izquierda de la última igualdad es PMTH paramétrico, más precisamente es el polinomio (3.2.1). Tomando en cuenta la Observación 1.1.6 el polinomio (3.2.1) es un polinomio de Hurwitz, es decir, todas las raíces del determinante de este polinomio tienen parte real negativa. Consecuentemente, la ecuación (3.2.10) o equivalentemente el sistema (3.2.2) es estable por [3, Teorema 1, pág. 378].

3.3 Conclusiones

El área del análisis matemático y las ecuaciones diferenciales se adentra en problemas que requieren herramientas cada vez más complejas, por eso el estudio y la generalización de objetos matemáticos como los polinomios matriciales tipo Hurwitz se hace importante. En el presente trabajo se logró profundizar en el concepto de polinomio matricial tipo Hurwitz paramétrico para un cierto parámetro $\alpha \in [0, \infty)$, más aún se introdujo la parametrización de Dyukarev-Stieltjes $M_k(\alpha)$ y $L_k(\alpha)$ la cual resulta ser muy importante para la construcción de los polinomios matriciales tipo Hurwitz que dependen de un parámetro, junto al resultado que se nos garantiza la igualdad que existe entre las matrices $M_k(\alpha)$ y $L_k(\alpha)$ y las matrices $C_k(\alpha)$ y $D_k(\alpha)$ (Teorema 2.0.16) que aparecen en su representación en términos de fracción continua. Se reprodujo la construcción de polinomios matriciales ortogonales y su uso al momento de construir polinomios matriciales tipo Hurwitz (Teorema 2.0.9). Lo anterior fue utilizado en el Ejemplo 3.2.3 que aprovecha los conceptos ya bien establecidos de estabilidad y las herramientas obtenidas en el presente trabajo.

Bibliografía

[1] J. Ackermann, *Robust Control—The Parameter Space Approach*, Springer, Berlin 2002. vi

[2] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Applications to Linear Systems Theory*, Princeton University Press, 2005. 25

[3] M. Braun, *Differential equations and their application, an introduction to applied mathematics*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983. 43

[4] A. E. Choque Rivero, *Notas del curso "Breve introducción a los polinomios ortogonales"*, XXI Escuela de verano, UNAM, Morelia 2021 20

[5] A. E. Choque Rivero, C. Maedler, *Representation of Perturbed Orthogonal Matrix Polynomials*, submitted to Complex Anal. Oper. Theory. vii, 14, 17, 20

[6] A. E. Choque Rivero, *The matrix Toda equations for coefficients of a matrix three-term recurrence relation*, Operators and matrices, Vol. 13, No. 4, 2019 vii, 4, 18, 19

[7] A. E. Choque Rivero, *On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials, Linear Algebra and its Applications*, Complex Anal. Oper. Theory 13, pp.1–44 2015. 8, 10, 15, 16, 18, 25, 27

[8] A. E. Choque Rivero, *On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra and its Applications,Vol. 476, pp. 56-84, ISSN 0024-3795, 2015 1, 2, 3, 5, 23, 27, 28

[9] A.E. Choque Rivero, *The Kharitonov theorem and robust stabilization via orthogonal polynomials*, to appear in Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh., 86, pp. 49-68, DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2017-86-05. 2017 vi

[10] A. E. Choque Rivero, *Hurwitz Polynomials and Orthogonal Polynomials Generated by Routh–Markov Parameters*. Mediterranean Journal of Mathematics. 15. 10.1007/s00009-018-1083-2. 2018 vi

[11] D. Damanik, A. Pushnitski and B. Simon, *The analytic theory of matrix orthogonal polynomials*, Surv. Approx. Theory 4, pp. 1–85, 2008. 6, 38

[12] Yu. M. Dyukarev, *The Stieltjes matrix moment problem*, Deposited in VINITI (Moscow) at 22.03.81, No. 2628–81, 37pp. 5, 10

[13] Yu. M. Dyukarev, *A general scheme for solving interpolation problems in the Stieltjes class that is based on consistent representations of pairs of nonnegative operators. I.* (Russian) Mat. Fiz. Anal. Geom., 6, No. 1–2, 1999. 5

[14] Yu. M. Dyukarev, *Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem* , Mathematical Notes , Vol. 75, pp. 1–2, pp. 66–82, 2004 vii, 10, 11, 14, 15, 16

[15] Yu. M. Dyukarev, *Theory of Interpolation Problems in the Stieltjes Class and Related Problems of Analysis*, Habilitation thesis, Kharkov National University, 2006. 7, 14

[16] A. V. Efimov, V. P. Potapov, *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electrical circuits*, Russian Math. Surveys, **28** , pp. 69–140, 1973 17

[17] B. Fritzsche, B. Kirstein, and Conrad Mädler *Transformations of matricial α–Stieltjes non–negative definitive sequences*, Linear Algebra Appl., 439 ,pp.3893–3933, 2013. 25, 27, 30, 31

[18] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. I, AMS Chelsea, 2000. 4

[19] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. II, AMS Chelsea, 2000. 4

[20] F. R. Gantmacher, M. G. Krein, *Oscillation Matrices and Small Oscillations of Mechanical Systems* (Russian), Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1941. 12

[21] M. G. Krein and A. A. Nudelman, *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their further development*. Translated from the Russian by D. Louvish. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 50. American Mathematical Society, Providence, R.I., v+417 pp. 1977. 12

[22] A. M. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion (Thesis and Papers)*, Second Edition, ONTI, (in Russian) 1935. 36

[23] F. Peherstorfer, *On Toda lattices and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 133: pp.519–534, 2001. 4

[24] Q. Luo, T. A. Nguyen, J. Fleming, H. Zhang. *Unknown Input Observer Based Ap- proach for Distributed Tube-Based Model Predictive Control of Heterogeneous Vehicle Platoons*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 70 (4), pp.2930-2944, 2021. vi

[25] T. J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 4(1):Ji_Jiv, J1_J35, 1995. Reprint of the 1894 original (French). 12

[26] T. Tomasz, *Using the block matrices in the modeling of driving and control system of hard disk drives*, Proceedings of ekectrithecnical institute, Issue 253, 201. vi

[27] X. Wei, J. E. Mottershead, *Block-decoupling vibration control using eigenstructure assignment*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 74, pp. 11-28, 2016. vi

[28] X. Zhan, A. Dyachenko, *On generalization of classical Hurwitz stability criteria for matrix polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 383, 2021. 4

[29] M.J. Zygmunt, *Matrix Chebyshev polynomials and continued fractions*, Linear Algebra and its Applications, 340 , pp.155–168, 2002. 20