



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO NUMÉRICO DE SOLITONES MEDIANTE  
LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**Licenciado en Ciencias de la Tierra**

PRESENTA:

**Aaron Ernesto Contreras Roque**

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ignacio Arturo Quintanar Isaías



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno

Contreras

Roque

Aaron Ernesto

[aaron.cor@ciencias.unam.mx](mailto:aaron.cor@ciencias.unam.mx)

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Ciencias de la Tierra

No. cta. 312159708

2. Presidente

Dr.

Carlos Abraham

Ochoa

Moya

3. Vocal

Dr.

Gerardo

Hernández

Dueñas

4. Secretario

Dr.

Ignacio Arturo

Quintanar

Isaías

5. Suplente 1

Dr.

Luis Efraín

Moreles

Vázquez

6. Suplente 2

Dra.

Ana Karina

Ramos

Musalem

7. Datos del trabajo escrito

Estudio numérico de solitones mediante la ecuación de Korteweg-de Vries

77 páginas

2024





*Cada historia tiene un final  
pero en la vida  
cada final es sólo un nuevo comienzo.*

*A mi padre*

*(ae)<sup>2</sup>*



# Agradecimientos

---

*Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, y a la Facultad de Ciencias, por abrirme las puertas de sus instalaciones; en ellas disfruté de los mejores años de mi vida y adquirí el regalo invaluable del conocimiento.*

*Gracias a cada uno de mis sinodales por aceptar formar parte de este proyecto y darme las retroalimentaciones necesarias concluir satisfactoriamente este proceso. Al doctor Carlos Ochoa, por su ayuda en las revisiones a mi escrito; al doctor Gerardo, por su amabilidad y disposición para revisar esta tesis. Agradezco enormemente a la doctora Karina por cada uno de sus comentarios en la revisión de mi tesis; por ser una profesora comprometida con el aprendizaje de sus estudiantes y por compartir con cada uno de sus alumnos el entusiasmo por la ciencia. De igual manera, agradezco al doctor Efraín Moreles por formar parte de este jurado y tomarse el tiempo para revisar y corregir mi escrito, cada uno de sus comentarios fueron muy importantes mejorar este trabajo. Por último, agradezco al Lic. Pedro Cruz, técnico de cómputo de alto rendimiento del Instituto de Ciencias de la Atmósfera y Cambio Climático, por brindarme acceso al cluster de Tlaloc y, con ello, ayudarme a agilizar los tiempos de cómputo de los códigos.*

*Aprovecho este espacio para agradecerle al doctor Quintanar por todo su tiempo y dedicación brindados a mí y cada uno de sus estudiantes. Gracias por todo el apoyo y la confianza que me ha brindado a lo largo de estos años; por su comprensión y el empeño puesto en este proyecto, por su pasión por la ciencia y la enseñanza. Gracias por apoyarme en varios momentos complicados por los que he atravesado. Por creer en mí y mis capacidades, por brindarme todo el conocimiento que he adquirido a lo largo de estos últimos años, por impulsarme a superarme y explorar nuevos caminos de la ciencia. Doc, le agradezco infinitamente haber aceptado este proyecto y ayudarme a sacarlo a flote, a pesar de lo cansado que pudo haber llegado a ser. Gracias por las clases extra curriculares que me han permitido profundizar en mis conocimientos y por devolverme mi interés y amor por la ciencia. Muchas gracias por estar presente y por alentarme a seguir adelante, le externo toda mi admiración y, aunque esta no es la primera vez que se lo dicen, quiero recordarle que pocos maestros y personas como usted existen en el mundo, es una gran dicha ser su estudiante.*

*A mis abuelos. Teresa, gracias por estar conmigo hasta tu último aliento; por ser la madre que necesitaba de pequeño; gracias por darme tanto amor hasta tus últimos días; por enseñarme a valerme por mí mismo y ser independiente y resiliente; por fortalecerme y enseñarme a no rendirme; porque, a tus posibilidades, me regalaste de tu tiempo y cariño y, gracias a ti y a mi abuelo, mi infancia se sintió acompañada y, aunque han pasado ya muchos años desde tu partida, todo tu cariño sigue haciendo eco en mí y me da esperanza imaginar que algún día volveré a reír a tu lado. Abue, en donde sea que estés, espero que te sientas orgullosa de la persona que soy el día de hoy, y que entre tú y mi abuelo forjaron. Silvestre, gracias por amarme tanto y darme todo el cariño que necesitaba de pequeño; por cuidar de mí en todo momento; por cargar en tus brazos a un hijo más; por abrazar mi llanto de pequeño y cubrir con tu cariño las ausencias que me entristecían; por enseñarme a ser una persona productiva; por seguir a mi lado y seguir cuidando de tu conejito; por compartir conmigo este logro. A ustedes dos, gracias por todo el amor que me han regalado.*

*A mi papá, Juan Contreras. Papá, admiro mucho el ser humano que eres, tu nobleza, valentía, tesón, inteligencia y la capacidad para ver siempre el lado positivo de las cosas. Gracias por quedarte a mi lado; por nunca rendirte, a pesar de lo difícil que fue sacar adelante a tres niños; por las noches de desvelo cuidando de mí; por darme todo el amor que has podido y alentarme a siempre seguir adelante, sin importar las circunstancias; por inspirarme cada día a seguir adelante; gracias por dar todo de ti para formar a las personas que hoy en día somos mis hermanos y yo, aunque eso haya implicado pasar menos tiempo juntos. Pa, de ti he aprendido a ser constante, honesto y a siempre dar lo mejor de mí. Te agradezco por quererme y aceptarme; por estar conmigo en mis momentos más oscuros, por no dejarme rendir, por llorar mis penas y celebrar mis éxitos, por limpiar mis lágrimas y escucharme en todo momento; por los consejos, las enseñanzas, las risas, te agradezco absolutamente todo lo que has hecho por mí y mis hermanos, por nunca rendirte y siempre tener fé. Gracias por ser mi padre, por sembrar en mí el amor por el conocimiento y las ganas de seguir luchando cada día pero, sobre todo, gracias por enseñarme a amar a la vida. Te amo papá.*

*A mi madre, Ailín. Gracias por darme la vida y cuidar de mí en mis primeros años. Gracias por el apoyo brindado en estos últimos años, sin él no habría podido concluir esta etapa. Gracias por esforzarte y dar todo de ti para salir adelante. Admiro mucho la mujer en la que te has convertido: fuerte, independiente, inteligente y tenaz. Gracias por compartir de tu tiempo y tus consejos en momentos difíciles que he llegado a atravesar, espero poder compartir más momentos a tu lado y aprender de ti. Te amo.*

*A mis hermanos, por llenar de risas, aventuras y alegrías mi vida. Iván, gracias por protegerme de los malos; por ser mi mejor amigo cuando niños; por inventar aventuras juntos; por inspirarme a ser alguien valiente e independiente; por las peleas, las discusiones, las pláticas profundas y los abrazos; gracias por quererme tanto y dejarme quererte de igual manera, eres un ser humano excepcional. Jeannette, gracias por estar*

*en mi vida, por ser mi confidente y cuidar de mí siempre; por llenar el vacío que dejó mi abuela con su partida; por cuidar y ver por todos nosotros; por nunca rendirte; por tu perseverancia y valor. Admiro mucho tu inteligencia y capacidad para resolver adversidades. Gracias por las noches de desvelo llorando juntos; por el cuidado y cariño que nos diste a Iván y a mí; por llegar juntos hasta este punto. Iván, Jeannette, los amo mucho, sin ustedes yo no estaría aquí el día de hoy, gracias por ser mis remos en mis momentos más oscuros y dejarme hundir; sé que llegaremos muy lejos los tres.*

*A Erik. En este tiempo te has convertido en la persona más importante en mi vida. Has sabido reparar lo que tú no rompiste; has abrazado mis tristezas, has cuidado mis heridas con amor y me has ayudado a reconocer mis defectos para convertirme en una mejor persona. Te has vuelto mi mejor amigo, mi confidente y una de mis motivaciones para seguir adelante. Me has vuelto parte de tu familia y tú te has convertido en parte de la mía, siendo un pilar en mi vida. Gracias por llegar a mi vida y no renunciar, por caminar a mi lado y no dejarme caer, por darme un motivo más para ser un mejor ser humano. Eres una persona con una fortaleza enorme, admiro tu valentía y tenacidad para nunca rendirte, a pesar de lo dura que puede llegar a ser la vida. Gracias por ser mi novio y la persona con la que quiero compartir el resto de mis días, sé que juntos vamos a construir un futuro lleno de amor y alegría. Te amo mucho algodóncete.*

*A mis sobrinas, Luna e Ixchel, por llegar a nuestras vidas y regalarnos tanta alegría. Gracias porque ustedes, junto con Milo y Miel, me rescataron, me dieron motivos para reír, sacaron de mí sonrisas y alegrías sin pedir nada a cambio; gracias por todo, las amo. Agradezco también a mi tía Margarita, por hacerte responsable de todos nosotros aún cuando no te correspondía; gracias por todo el apoyo que me has dado y por quererme (a tu manera, jeje). Tía, gracias porque tu apoyo fue un elemento crucial, sin el cual yo no podría haber concluido mis estudios, te quiero mucho.*

*A Julieta. Gracias por ser mi mejor amiga, por escucharme en las madrugadas, por reír y llorar juntos, por compartir conmigo este momento de mi vida. Gracias porque siempre has estado para mí, me has escuchado y aconsejado sin juzgarme. Te has vuelto parte de mi familia y sé que siempre estaremos juntos. Ten por seguro que, a pesar de la distancia y las ausencias, siempre estaré ahí para ti, y yo sé que tú igual lo estarás para mí. Te amo.*

*A Itzel, mi Pavo Cristatus, gracias por hacerme feliz durante mis últimos años de la licenciatura, por llegar y quedarte en mi vida. Gracias por compartir momentos de tristeza juntos; por las salidas, las risas en el museo, las tardes con Ryu, los abrazos, la compañía y la dicha de ser tu amigo. Te amo picoc, gracias por no rendirte y tampoco dejarme hacerlo, ¡lo logramos!*

*A mis amigas de la facultad, por hacer de la licenciatura una de las mejores etapas de mi vida.*

*Aura, gracias por ser mi hams y por seguir estando luego de todos estos años, juntos hemos cumplido metas que nos hemos propuesto y me siento muy orgulloso de ser tu amigo. Gracias por las risas en el laboratorio de Química, por las tardes en las islas, los ratos de estudio pero, más allá, por los consejos y el cariño brindado. Te quiero mucho homsie.*

*A Mina, por compartir conmigo tu sensibilidad y enseñarme a aceptar y vivir mis sentimientos; por ayudarme a explorar y abrazar mi sensibilidad; por nunca hacerme sentir juzgado y escucharme en todo momento que lo llegué a necesitar. Mina, te agradezco todos tus consejos, tus apapachos y la motivación que me diste para retomar mi camino en la ciencia sin hacerme sentir presionado; por acompañarme en el proceso de descubrir lo que quiero ser en la vida. Espero compartir juntos muchos logros más. Te amo, amiga*

*A mi crew: Isa, Kary y Arielle, por toda esta aventura juntos. Isa, gracias por compartir con nosotros tu sabiduría; tus consejos siempre me ayudaron a aterrizar en los momentos donde el caos dominaba en mi vida. Kary, gracias por las risas y los chismecitos, gracias por dejarnos formar parte de tu vida y compartir con nosotros la alegría de tenerte. Arielle, mi prritu favorito, gracias por todo; por reírte conmigo en las clases, por las caminatas nocturnas por las islas, por los regresos a casa en tu compañía, por darme tanto cariño en todo momento; gracias por sacarnos siempre una sonrisa con tu forma de ser tan tierna. Amigas, gracias por estar conmigo en este momento y por nunca abandonarnos, por las pláticas y risas en las prácticas de campo; por siempre acompañarnos. Las amo.*

*A Miguel, por guiarme en el proceso de autoconocimiento. Gracias porque has sido una pieza clave para salir de un estado que me estaba consumiendo. Me has ayudado a entenderme, aceptarme y amarme. Te debo a ti el poder seguir aquí hoy en día sin la necesidad de hacer uso de medicamentos para poder continuar en el día a día. Gracias*

*A mi yo de la infancia, que después de todos estos años hoy puedo decirle: “no temas, las cosas van a mejorar, llegarán personas que cuiden de tus heridas, te valore, te acompañe y nunca te deje solo; absolutamente todo lo que has atravesado se compensará tarde o temprano y en donde hubo llanto, habrán risas y experiencias que te hagan recobrar las ganas de vivir y amar la vida; aprenderás que tu llanto es capaz de limpiar tu alma y que eres capaz de llenar con flores todas las grietas que te lleguen a romper”*

*A la vida.*







# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Aaron Ernesto Contreras Roque. Ciudad Universitaria, CD. MX., 2024



# Resumen

---

El presente trabajo de tesis aborda de forma numérica el estudio fenomenológico de los solitones mediante la ecuación adimensional de Korteweg de-Vries, en una sola dirección. Se presenta un esquema numérico implícito, incondicionalmente estable y con convergencia no lineal cuadrática, mismo que preserva las tres primeras cantidades de movimiento presentes en la KdV. Dicho estudio surge a partir de evidencias observacionales tanto en el medio oceánico como el atmosférico, de la existencia de ondas internas de gravedad no lineales, las cuales han mostrado tener una evolución espacio-temporal tipo solitón, típicamente modelado con ecuaciones que se desprenden de la KdV. La incidencia de ondas internas de gravedad no lineales sido registrada mediante mediciones de radar, a lo largo de las últimas décadas principalmente en zonas costeras y la plataforma continental. Por ello, este proyecto se inspira en los estudios de solitones en el medio oceánico, donde han sido estudiados con mayor profundidad, desde un punto de vista teórico y observacional.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>XV</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación Observacional y Contexto Histórico de las Ondas No Lineales	1
1.2. Objetivos	9
1.2.1. Objetivo general	9
1.2.2. Objetivos particulares	9
1.3. Motivación	9
1.4. Justificación	9
1.5. Planteamiento del problema	10
1.6. Método	10
1.7. Estructura de la tesis	12
<b>2. Derivación de la ecuación KdV</b>	<b>13</b>
2.1. Ecuaciones de conservación: formalismo euleriano	14
2.1.1. Conservación de masa	15
2.1.2. Conservación del momento lineal	15
2.1.3. Conservación de energía	17
2.2. Fluidos ideales	19
2.3. Condición dinámica de irrotacionalidad: Ecuación de Bernoulli	20
2.4. Deducción de la ecuación KdV como una aproximación de onda larga de las ecuaciones de aguas someras, bajo el método de perturbaciones	22
2.4.1. Condiciones cinemáticas de frontera	23
2.4.2. Condiciones dinámicas de frontera	23
2.4.3. Deducción de la KdV siguiendo a Karczewska y Rozmej (2018)	24
2.5. Invariantes de la KdV	27
<b>3. Esquemas en diferencias finitas de la KdV y diseño experimental</b>	<b>29</b>
3.1. Transformación de la KdV en la ecuación de Kruskal y Zabusky	29
3.2. Solución analítica	30
3.3. Primeras tres invariantes de la KdV	32

3.4.	Esquema en diferencias finitas de Zabusky y Kruskal (1965) . . . . .	35
3.4.1.	Prueba de consistencia . . . . .	36
3.4.2.	Esquemas de integración temporal para comparar con Zabusky y Kruskal (1965) . . . . .	38
3.5.	Esquema en diferencias finitas de Zhu (2001) . . . . .	39
3.5.1.	Prueba de consistencia . . . . .	40
3.5.2.	Integración temporal del esquema con Newton-Raphson . . . . .	41
3.6.	Diseño experimental . . . . .	43
3.6.1.	El experimento control . . . . .	44
3.6.2.	Esquemas explícitos . . . . .	44
3.6.3.	Prueba numérica de convergencia del esquema Zhu- Newton- Raphson . . . . .	44
<b>4.</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>47</b>
4.1.	Esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson . . . . .	48
4.2.	Comparación del esquema implícito contra los explícitos . . . . .	56
4.3.	Prueba numérica de convergencia del esquema Zhu-Newton-Raphson . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>Referencias</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Procesos y estructuras oceánicas, tomado de Cushman-Roisin y Beckers, 2011. . . . .	2
1.2. Tren de solitones observado sobre el Estrecho de Gibraltar en la misión STS-41G de la NASA ( <a href="https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide_13.html">https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide_13.html</a> ) . . . . .	5
2.1. Volumen de control arbitrario, fijo en tiempo y espacio. El flujo de $\phi$ que atraviesa la pared del volumen de control $V$ se compensa con la disminución de $\phi$ dentro de dicho volumen. . . . .	14
2.2. Modelo de la evolución de la superficie libre en 3-D . . . . .	22
4.1. Resultado de la conservación numérica de $\mathcal{E}_1$ , $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ , considerando el método implícito de Zhu-Newton-Raphson para distintos pasos de tiempo	48
4.2. Hovmöller de $\eta$ para el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, considerando un $\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	50
4.3. Generación del primer solitón y su evolución con distintos $\Delta t$ , considerando el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson . . . . .	51
4.4. Hovmöller de $\eta$ para primera colisión múltiple, considerando el esquema de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	52
4.5. Evolución de la primera colisión múltiple de solitones. Gráfica generada con las salidas del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, comparando distintos $\Delta t$ . . . . .	53
4.6. Evolución de la segunda colisión múltiple de solitones. Gráfica generada con las salidas del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, comparando distintos $\Delta t$ . . . . .	54
4.7. Hovmöller de $\eta$ para primera colisión múltiple, considerando el esquema de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	55
4.8. Hovmöller de $\eta$ , considerando el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	57
4.9. Hovmöller de $\eta$ , considerando el esquema explícito de Zabuzky-Kruskal (1965), a un $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	58
4.10. Hovmöller de $\eta$ , considerando el esquema explícito de Walkley, a un $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$ . . . . .	59



## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.11. Hovmöller de $\eta$ , considerando el esquema explícito de Lax-Wendroff, a un $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	60
4.12. Conservación numérica de $\mathcal{C}_1$ , $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t = 200 \Delta t_{Zhu}$ , contra los esquemas explícitos integrados con un $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	61
4.13. Acercamiento en $t \in [0.0, 1.1]$ a $\mathcal{C}_1$ , $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t = 200 \Delta t_{Zhu}$ , contra los esquemas explícitos, con un $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	62
4.14. Acercamiento en $t \approx 1.1$ , a $\mathcal{C}_1$ , $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t = 200 \Delta t_{Zhu}$ , contra los esquemas explícitos, con un $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	63
4.15. Acercamiento en $t \approx 6$ a $\mathcal{C}_1$ , $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un $\Delta t = 200 \Delta t_{Zhu}$ , contra el esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), a un $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	64
4.16. Conservación de $\mathcal{C}_1$ , $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ de la KdV, mediante el esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), con diferentes pasos de tiempo . . . . .	65
4.17. Acercamiento a $\mathcal{C}_1$ , del esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), para $\Delta t = \frac{1}{20} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	65
4.18. Acercamiento a $\mathcal{C}_1$ , del esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), para $\Delta t = \frac{1}{40} \Delta t_{Zhu}$ . . . . .	66
4.19. Solución analítica de la KdV comparada con la solución numérica del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a distintos pasos de tiempo . . . . .	67

# Índice de tablas

---

1.1. Total de integraciones reproducidas con los distintos esquemas numéricos	11
1.2. Serie de experimentos llevados a cabo . . . . .	11
3.1. Conservación de masa, esquema de Zabusky y Kruskal, 1965 . . . . .	36
4.1. Tiempos de cómputo y colapso de los distintos esquemas evaluados con diferentes parámetros . . . . .	47



# Introducción

---

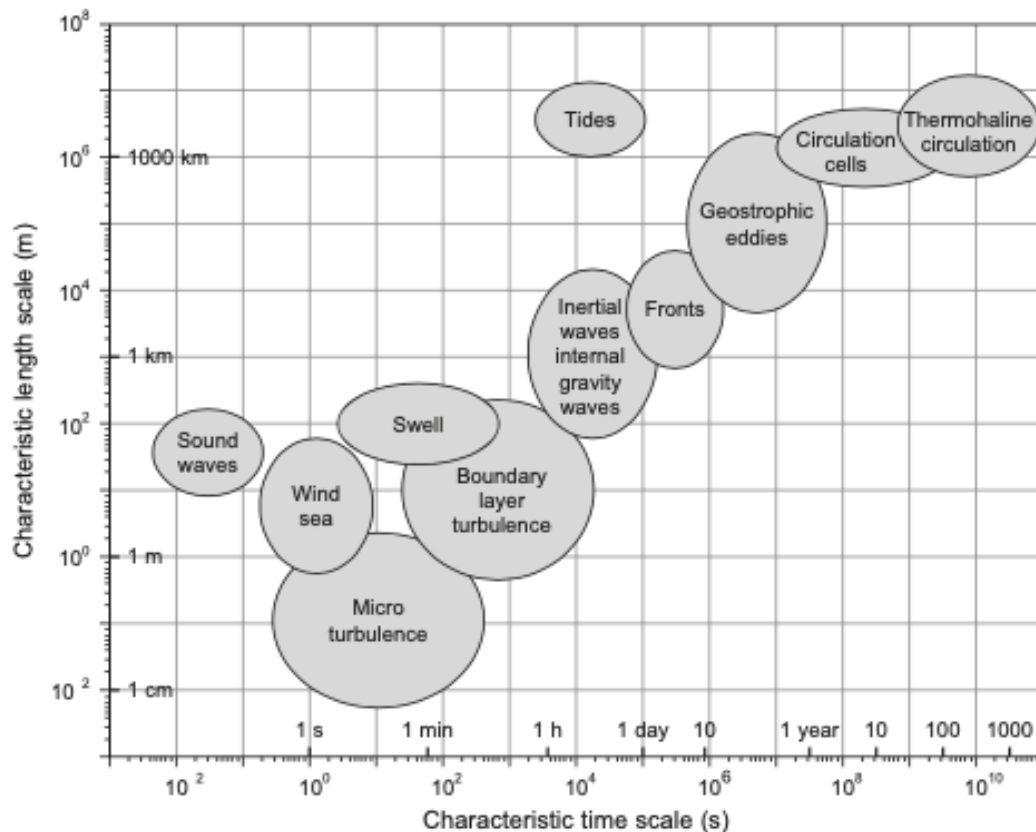
## 1.1. Justificación Observacional y Contexto Histórico de las Ondas No Lineales

Uno de los procesos más importantes del estudio de la dinámica de los océanos es la generación y propagación de movimientos ondulatorios al interior del fluido oceánico. Estos fenómenos ondulatorios u ondas son el resultado del balance de fuerzas que interactúan dentro y en las fronteras del fluido. Por lo tanto, sirven como intermediarios para la disipación y el transporte de energía en toda la columna de agua y en la superficie libre del océano. Por ello, la propagación de propiedades como momento y energía tiene un fuerte impacto en la dinámica biótica (principalmente, delimitando las redes tróficas) y en los procesos termodinámicos de los sistemas oceánicos y costeros (Beaudin y Bracco, 2022; Prida, 2022). Es natural esperar que la variedad de ondas existentes en los fluidos geofísicos esté sujeta al balance de fuerzas dominantes en el sistema, a la geometría del dominio que los contiene, y a la escala del movimiento generado por dicho balance. Por ejemplo, la mayoría de los fenómenos, tanto en la atmósfera como en el océano, están confinados a espesores muy delgados, comparados con el radio de la Tierra, lo cual limita de forma significativa los movimientos verticales en escalas sinópticas y planetarias consistente con un balance hidrostático para esas escalas.

Pese a las restricciones para la generación de ondas que impone la delgadez del espesor oceánico, la variedad de ondas en el océano es muy grande (ver figura 1.1) aunque básicamente caen en dos grupos de acuerdo al tipo de estabilidad o resistencia al movimiento de las parcelas de agua, es decir: 1) la estabilidad termodinámica, que se refiere a la resistencia a los desplazamientos verticales de las parcelas debido a que el gradiente vertical de la densidad es negativo y 2) a la resistencia a los desplazamientos horizontales debido a un gradiente meridional positivo del momento absoluto (Holton y Hakim, 2013; Cushman-Roisin y Beckers, 2011). De esta forma, tanto el océano como la atmósfera son fluidos afectados por la rotación y la estratificación, dando lugar a una gran variedad de fenómenos oscilatorios, como ondas lentas, cuya duración es de meses

## 1. INTRODUCCIÓN

---



**Figura 1.1:** Procesos y estructuras oceánicas, tomado de Cushman-Roisin y Beckers, 2011.

aproximadamente (p. ej., eddies cuasigeostróficos de Rossby) y ondas rápidas internas de inercia-gravedad, con duración promedio es de horas (ver figura 1.1).

En ciertas escalas, tanto el océano como la atmósfera cumplen con la definición de un fluido rotante y estratificado. Estas dos características resultan importantes para la comprensión de la dinámica de fluidos geofísicos ya que, al interior de éstos, los efectos de la rotación y la estratificación compiten, dando lugar a la generación de fenómenos ondulatorios de distinta complejidad. Al mismo tiempo que las condiciones de estabilidad imponen una limitación al movimiento de las parcelas, las ondas como perturbaciones a partir de un estado básico pueden verse amplificadas, creciendo a expensas de la energía termodinámica y mecánica disponible hasta que, finalmente, los efectos de viscosidad y disipación las destruyen. Notamos que las ondas, por sí mismas, no generan un transporte neto de masa, tan solo pasan por una región del fluido perturbándolo y cuando las condiciones de dispersión lo permiten, ocurre un transporte de energía hacia distintos puntos del dominio de interés (Holton y Hakim,

2013; Cushman-Roisin y Beckers, 2011) <sup>1</sup>.

El origen de la estratificación vertical de los océanos es consecuencia de la absorción de la energía solar en la superficie oceánica y las diferencias salinidad. Lo anterior da lugar a capas superficiales más cálidas y menos densas que las capas profundas (Apel, 1988); lo anterior supone el establecimiento de una resistencia al mezclado entre las capas. Aunque, en primera instancia, podría suponerse que el aporte principal de energía al océano está dada por la radiación en superficie, existen otros procesos físicos que facilitan el flujo de energía a través de la interfase océano-atmósfera hacia el interior del océano. Por su origen, dichos procesos pueden ser mecánicos (en forma de esfuerzo del viento, mareas, y corrientes superficiales) y termodinámicos (por transferencia de agua y sales); en forma de precipitación, descargas de ríos, derretimiento de glaciares y descargas antrópicas al océano). Estos procesos físicos juegan un papel fundamental en la dinámica de los ecosistemas oceánicos y terrestres, puesto que modifican de manera importante el mezclado de la capa superficial, que es un factor clave en la dinámica de las redes tróficas de la columna de agua (Sánchez-Garrido, 2009).

Por tanto, la interacción de las capas de agua superficiales y profundas ocurre por procesos de inestabilidad convectiva que permiten el transporte vertical de masa, energía y momento a lo largo de la columna de agua. Estos procesos, en conjunto, dan lugar a la mezcla vertical. Es precisamente la capa de mezcla en donde ocurren variaciones abruptas de los parámetros conservativos del agua de mar. Los principales parámetros que se ven influenciados por el viento, en conjunto con la turbulencia de la superficie y la estratificación, son la salinidad, la densidad, y la temperatura (Pedlosky, 1979). Estos sufren una disminución o incremento abruptos, en promedio, entre los primeros 200 y 500 metros de profundidad, y reciben el nombre de haloclina, picnoclina y termoclina, respectivamente.

De acuerdo con Lindstrom, E. J., investigador de la *NASA*, la profundidad típica de la picnoclina llega a extenderse de los 500 a los 1000 metros de profundidad en latitudes medias ( $\sim 40^\circ$  latitud norte/sur). Debido a esto, cualquier perturbación incidente en esta región tiende a propagarse como una onda interna de gravedad, lejos de la región donde la onda se genera (Apel, 1988). Esta actividad se refleja en los perfiles verticales de densidad y temperatura. Dichas perturbaciones ocurren, principalmente, debido a la interacción de la marea barotrópica con el relieve submarino, y deben su existencia a la boyancia presente en fluidos estratificados, sin embargo, dada la relativa debilidad de la boyancia, en comparación con la gravedad, las ondas internas pueden llegar a alcanzar amplitudes del orden de decenas de metros (Sánchez-Garrido 2009). Dichas ondas, por consiguiente, se desarrollan y propagan típicamente en la picnoclina (Lakshmanan, 2017). De acuerdo con Apel (1988), las ondas internas de gravedad tienen una máxima amplitud en esta interfase, y disminuye hacia las fronteras del fluido, además, a menor gradiente vertical de la densidad, tanto la frecuencia de onda como la velocidad de propagación disminuyen.

Recientemente, se ha impulsado el estudio de las ondas internas de gravedad debido

---

<sup>1</sup>Es decir, excluyendo efectos como el de la deriva de Stokes, asociados a un transporte neto de masa

## 1. INTRODUCCIÓN

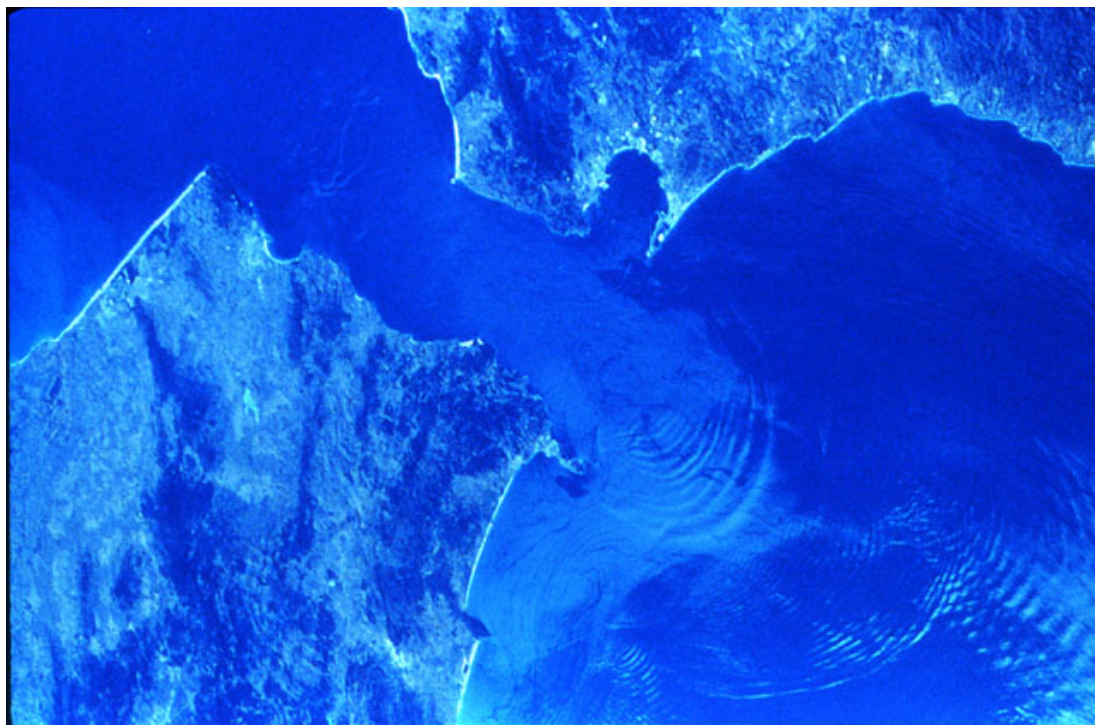
---

al impacto que estas tienen sobre la dinámica oceánica, como se menciona en los párrafos anteriores. Su impacto depende de las escalas espaciales y temporales en las que se enfoque el problema. Estas escalas pueden ir desde escalas microscópicas a planetarias (Grimshaw, 2002). Por consiguiente, el estudio de este fenómeno ha permitido la caracterización no sólo del océano, sino también de la atmósfera (y los fluidos geofísicos en general). En la década de 1970, con la llegada de los transbordadores espaciales, los oceanógrafos físicos se percataron de la posibilidad de observar rasgos de ondas internas de gravedad sobre la superficie del océano, mediante el estudio de imágenes de Radar de Apertura Sintética (*SAR*, por sus siglas en inglés).

De acuerdo con Apel y Gonzáles (1983), la incidencia de ondas de gravedad internas es común en aguas estratificadas, sobre la plataforma continental, como grupos de ondas con longitudes de onda variable (*i.e.*, espacio entre cresta y cresta) pero altamente coherentes en el espacio, las cuales en su mayoría se propagan hacia la costa. Dichas ondulaciones generan una rugosidad en la superficie del océano que puede ser detectada de manera indirecta con imágenes de radar mediante el principio de *Retrodispersión de Ondas Electromagnéticas de Bragg*. De forma general, este proceso consiste en la emisión de microondas (longitud de onda del orden de centímetros) por parte del radar a bordo de un satélite y esta, al llegar a la superficie del océano, es reflejada y detectada nuevamente por el instrumento. El “Canada Center for Remote Sensing” proporciona un material educativo de libre acceso que explica el proceso de teledetección de las características oceánicas superficiales (ver <http://www.gep.uchile.cl/Biblioteca/Radar/gsarcd.s.pdf>) para mayor detalle de este principio físico y su aplicación en la detección de ondas internas, así como sus ventajas y desventajas. Si bien, en esta tesis no se presenta un estudio de teledetección de ondas, es importante mencionar estos métodos, pues abrieron paso a nuevas formas de estudiar procesos oceánicos y atmosféricos de manera *ex situ* y, gracias a ellos, se pueden generar pronósticos más precisos en la actualidad, mediante el acoplamiento de modelos que incorporan tanto datos de medición *in situ*, como los datos registrados por satélites, con lo cual las predicciones numéricas se asemejan más a la realidad.

Fue a partir de la década de 1970 que la teledetección satelital comenzó a tener un área de oportunidad muy amplia en diversas áreas de las Ciencias de la Tierra. En 1975, con la misión espacial *Apollo-Soyuz* de la *NASA*, el Astronauta Vance Brand observó por primera vez la rugosidad superficial del océano, mediante las imágenes obtenidas en dicha misión (Jones y Wells, 1987). El desarrollo de exploraciones mediante el uso de aeronaves, contemporáneas a la misión *Apollo*, permitió a los científicos darse cuenta que la rugosidad del océano actuaba como un dispersor isotrópico para una longitud de onda de radar de 25 cm y la información obtenida a partir de estas imágenes podía ser filtrada y, así, generar imágenes de ondas de gravedad en aguas profundas, derrames de petróleo, ondas internas, ondas costeras, entre otros rasgos, mismos que podían ser detectados (Brown *et al.*, 1976). Un rasgo aún más sorprendente fue descubierto con el uso de la teledetección: en 1976 Charles Elachi y John Apel estudiaron la “peculiaridad” de la ocurrencia de “paquetes de ondas”, generados por la excitación mareal de ondas internas de corta longitud. La figura (1.2) muestra una captura del transbordador

Challenger de la misión STS-41G de la NASA, donde se observa una de las primeras imágenes obtenidas de solitones oceánicos.



**Figura 1.2:** Tren de solitones observado sobre el Estrecho de Gibraltar en la misión STS-41G de la NASA ([https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide\\_13.html](https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide_13.html))

En junio de 1978 fue llevada a cabo la primer misión espacial dedicada específicamente a la observación de los océanos, a partir de la cual el estudio de los océanos mediante la teledetección cobró auge. De acuerdo con John Vesecky y Robert Stewart (1982), la nave espacial *SEASAT*, fue diseñada específicamente para detectar los espectros direccionales de ondas de gravedad superficiales, de longitud larga. Para ello, la nave fue equipada con un radar de apertura sintética cuya emisión electromagnética poseía una longitud de onda de 25 cm, un ángulo de incidencia media de  $23.4^\circ$ , con una resolución espacial de 25 m. Estas características del instrumento permitieron determinar con mejor precisión el espectro de ondas de la superficie oceánica. En particular, las posteriores investigaciones de imágenes de radar, aplicadas al océano, guiaron a la comunidad científica a identificar los paquetes de ondas vistos a partir de las imágenes satelitales. Se descubrió que poseían características atípicas a las de una onda interna y su concurrencia se situaba, principalmente, sobre las plataformas continentales (Apel, 2003). Investigaciones más detalladas encaminaron a la conclusión de que se trataba de ondas solitarias o solitones oceánicos, ya que las imágenes obtenidas mostraban va-



## 1. INTRODUCCIÓN

---

riaciones muy elongadas de la rugosidad de la superficie oceánica, teniendo longitudes de onda que iban desde los 500 m hasta 20 km, y se situaban en márgenes someros (márgenes continentales) (Alpers y Salusti, 1983; Apel y Gonzalez, 1983; Fu y Holt, 1984).

La primera vez que el fenómeno de ondas solitarias viajeras fue estudiado data de 1844, cuando el Ingeniero Naval Escocés John Scott Russell reportó para la *British Association for the Advancement of Science* el avistamiento de la propagación de una onda solitaria, sobre la superficie libre del Canal de la Unión Glasgow-Edimburgo, denominándola en su reporte como “Onda de Traslación” (Russell, 1845). En dicho reporte, Russell narró haber visto una onda generada por un repentino frenado del movimiento de una barcaza que atravesaba el canal. Dicha perturbación continuó el trayecto a lo largo del canal, según Russell, sin cambiar de forma ni velocidad. Russell también mencionó haber seguido a caballo a la onda solitaria hasta rebasarla mientras aún seguía en movimiento, registrando una velocidad aproximada de la onda de  $3 \text{ ms}^{-1}$ , preservando su forma original a lo largo de unos 10 m, y con una altura de entre 30 y 45 cm sobre la altura promedio del tirante de agua. Este descubrimiento se mantuvo pausado hasta 1895, cuando los matemáticos holandeses Diederik Korteweg y Gustav de Vries desarrollaron un modelo teórico de ondas no lineales a partir de las ecuaciones de aguas someras y las ecuaciones de Navier-Stokes, concibiendo así la famosa ecuación que denotamos como KdV. Korteg y de Vries acuñaron el término *solitón* para denotar el perfil característico de esta onda. La ecuación (1.1) es la forma canónica actual de la KdV y está definida por la cantidad  $\eta$ , que representa una desviación de la altura promedio de la columna de agua:

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{3x} = 0, \quad (1.1)$$

donde los subíndices  $t$  y  $x$  denotan derivadas parciales respecto del tiempo y el espacio, respectivamente. La ecuación KdV tiene una no-linearidad cuadrática en el término  $\eta\eta_x$  y está referida a un sistema de referencia que se mueve a la velocidad del solitón.

Si bien, para finales del siglo XIX ya había un formalismo matemático relacionado a los solitones, aún no existía un consenso que explicara la fenomenología de los mismos. Fue hasta 1965 que hubo un nuevo avance en cuanto a la teoría de solitones, con el trabajo del físico Norman Zabusky y el matemático Martin Kruskal. En este trabajo los autores observaron la interacción no lineal entre solitones, inmersos en un medio dispersivo. La investigación consistió en llevar a cabo la solución numérica de la KdV, la cual concluyó que los pulsos localizados (o solitones) no se dispersan irreversiblemente bajo la interacción no lineal. Es decir, el balance entre los términos no lineales y los términos dispersivos de la KdV permite preservar la forma original de los solitones bajo colisiones entre ellos y, por tanto, su propagación subsecuente. Este descubrimiento, en conjunto con las posteriores observaciones de imágenes satelitales, llevaron a suponer que las ondas internas detectadas por los satélites se asemejaban al fenómeno descrito por Russell, con lo que el trabajo conjunto de experimentos teóricos y observacionales guiaron al descubrimiento de los solitones oceánicos que forman parte de las ondas internas de gravedad no lineales (Jackson *et al.*, 2012; Apel, 2004).

El impacto que el descubrimiento de las ondas solitarias internas ha tenido abarca diversas esferas de la ciencia. Por una parte, tenemos ondas extremas como las ondas *rogue* (por su denominación en inglés), capaces de voltear embarcaciones en regiones cercanas a la costa (Trulsen, 2006). Dentro de este mismo contexto, están los Tsunamis, cuya dinámica coincide con la de un solitón (Pelinovsky, 2006) y ambos fenómenos son difícilmente predecibles, pero coinciden en un potencial de riesgo para los ecosistemas y la seguridad de los seres humanos.

En el estudio de las ondas no lineales, las soluciones a la ecuación de KdV pueden ser de dos tipos: por un lado, soluciones fuertemente no lineales y por el otro soluciones no lineales débiles (como lo es el caso de la ecuación que se trabajó en esta tesis). Este último caso corresponde a una forma muy interesante de la KdV, donde se ha descubierto la existencia de un número infinito de cantidades del movimiento conservadas en espacio (Miura *et al.*, 1968; Gardner y Morikawa, 1960). Estas constantes se refieren a integrales de diversas formas de la amplitud de la onda viajera  $\eta(x, t)$  a lo largo de un intervalo  $[0, L]$  donde  $L$  es la longitud del intervalo. Es importante hacer saber que no todas estas cantidades tienen un significado físico; sin embargo, representan una propiedad importante de la KdV y la conservación numérica de un mayor número de invariantes es un síntoma de estabilidad de un esquema numérico. En el capítulo dos se presenta una discusión más detallada referente a las invariantes de la KdV.

En esta tesis se consideran tres cantidades conservadas:

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^L \eta dx,$$

la cual denotamos en el resto de la tesis como  $\mathcal{E}_1$  y que físicamente se identifica como la masa asociada a la amplitud de la onda. Una segunda cantidad conservada  $\mathcal{E}_2$  se refiere a la integral:

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^L \frac{1}{2} \eta^2 dx,$$

la cual Kruskal y Zabuzky asociaron a la la energía que contiene la perturbación de la onda en el intervalo  $[0, L]$ . Finalmente, la tercera cantidad  $\mathcal{E}_3$  está dada como:

$$\mathcal{E}_3 = \int_0^L \left( \frac{1}{2} \delta^2 \eta_x^2 - \frac{1}{6} \eta^3 \right) dx,$$

la cual no tiene asociada una cantidad física, y el coeficiente  $\delta^2$  que multiplica a  $\mathcal{E}_3$  permite modular la amplitud del solitón (Kruskal y Zabuzki, 1965). Existen diversas posturas que indican que  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$  pueden ser tomadas como el momento y la energía, respectivamente, de forma indirecta, lo cual se discute en el capítulo dos de esta tesis.

Se puede argumentar, con justa razón, que la singularidad de poseer un número infinito de cantidades invariantes de la KdV, le confiere poco realismo para resolver el caso general. Sin embargo, numerosas investigaciones muestran que, bajo ciertas modificaciones a la KdV, ésta es muy útil para el estudio de las ondas internas de gravedad no lineales y los solitones oceánicos. Por ejemplo, existen versiones extendidas de la KdV con coeficientes variables que permiten estudiar fenómenos no lineales fuertes, en

## 1. INTRODUCCIÓN

---

el sentido mencionado arriba (Grimshaw, *et al.*, 2010). No obstante a estas limitaciones, el formalismo matemático y numérico que posee la KdV continúa siendo útil como una introducción al estudio de los solitones en general y la construcción de esquemas numéricos que formalmente conservan un cierto número de invariantes del movimiento.

De acuerdo con Choi (2000), la KdV es un caso límite de las ecuaciones más generales que gobiernan las ondas internas oceánicas. Por ello, en este trabajo se reporta la deducción sistemática de la ecuación KdV de manera introductoria al estudio numérico de los solitones, con la finalidad de poder extender el esquema a un caso más general y realista, como proyecto a futuro. La motivación principal de este proyecto de tesis surge de dos preguntas científicas fundamentales: 1) ¿puede un esquema numérico implícito de la KdV ser computacionalmente más eficiente que uno explícito? y 2) ¿bajo qué condiciones un esquema numérico de la KdV puede mantener la integridad física de las soluciones numéricas a periodos arbitrariamente grandes? Dado que los esquemas numéricos representan un símil de las soluciones de ecuaciones diferenciales en el continuo, la estabilidad del esquema se verá reflejada en su capacidad para integrar de manera estable las invariantes de la KdV. En relación con lo anterior, la hipótesis de trabajo es que un esquema numérico que converge de manera estable y consistente a la solución analítica, posee un numéricamente las mismas (o algunas) propiedades de una ecuación diferencial en el continuo. Por ello, podemos suponer que un esquema con buen desempeño para conservar el análogo numérico de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ , y  $\mathcal{C}_3$ , asegura la estabilidad numérica de los esquemas de integración de la KdV de manera indefinida en el tiempo, con el error numérico controlado y acotado en el tiempo a un costo computacional que compite con esquemas explícitos más rápidos que no necesariamente conservan eficientemente algunas de las tres cantidades mencionadas arriba.

La demanda que se hace sobre los esquemas numéricos de preservar numéricamente ciertas cantidades físicas y propiedades de las ecuaciones diferenciales que se preservan en el continuo, ha tenido un desarrollo histórico importante en la construcción de esquemas numéricos de la atmósfera y del océano. En particular, está el caso de los primeros modelos atmosféricos globales de circulación general desarrollados en la década de 1950 por Norman Phillips. El modelo de Phillips era un modelo simplificado de la atmósfera de dos capas basado en el sistema cuasi-geostrófico aplicado a la esfera (Phillips, 1956). A pesar de que las ecuaciones de la cuasi-geostrofia formalmente filtran las ondas rápidas (ondas de inercia-gravedad y sonido), era imposible integrar el modelo a tiempos largos de años o décadas debido a que el diseño de los esquemas numéricos de la advección (*i. e.*,  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ; donde  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  es el campo de velocidades) no permitía preservar energía y enstrofia (*i. e.*, el promedio de área del cuadrado de la vorticidad). Akio Arakawa resolvió el problema al final de los años 60 en la Universidad de California, Los Ángeles, donde demostró que la conservación numérica de densidades del movimiento permitían hacer integraciones numéricas por largos periodos de tiempo de manera estable (Arakawa, 1970). Este avance fue crucial en el diseño de los esquemas numéricos (en diferencias finitas) de los primeros modelos de circulación general de la atmósfera y del océano para el estudio del clima.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

El objetivo fundamental de la tesis es utilizar, de la literatura, un esquema implícito que conserva dos invariantes  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_3$  para mostrar su eficiencia computacional respecto de esquemas que solo logran conservar  $\mathcal{E}_1$ .

### 1.2.2. Objetivos particulares

- ✂ Estudiar la estabilidad numérica de un esquema explícito que formalmente preserva  $\mathcal{E}_1$  (Zabusky y Kruskal 1965).
- ✂ Estudiar la estabilidad numérica de un esquema implícito que formalmente preserva  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_3$  de la KdV (Zhu 2001).
- ✂ Estudiar por integración numérica directa de largo plazo, las soluciones de esquemas explícitos en el tiempo: 1) esquema de Zabusky y Kruskal (1965), 2) esquema de Lax-Wendroff y 3) esquema Walkley. De ahí, comparar con el esquema implícito de la KdV de Zhu (2001).

## 1.3. Motivación

El trabajo de esta tesis constituye un paso necesario para la construcción de modelos numéricos de ondas internas no lineales que incluyan procesos físicos y biológicos de relevancia para el estudio de la dinámica oceánica y los ecosistemas oceánicos, por lo cual este proyecto propone construir un código en diferencias finitas para la KdV en un canal unidimensional, haciendo uso del lenguaje de programación *Python* y, al mismo tiempo, poner en práctica los conocimientos de modelación numérica adquiridos en la licenciatura. De esta forma, se pretende profundizar en el estudio de las materias que se requieren para diseñar este tipo de modelos oceánicos.

## 1.4. Justificación

Este estudio se realizó como propuesta de un método de integración que fuera capaz de resolver de manera estable la KdV y, al mismo tiempo, cumpliera numéricamente con las propiedades que esta ecuación posee en el continuo. La justificación principal se debe a que se ha mostrado en la literatura que los esquemas explícitos que se han desarrollado hasta la fecha presentan errores numéricos que evolucionan gradualmente al integrar la KdV, lo cual evita hacer corridas por grandes periodos de tiempo. Lo anterior resulta un inconveniente crucial para poder realizar estudios más robustos a

largo plazo enfocados a la Oceanografía y la Meteorología. Por otra parte, este estudio se justifica como un esquema que no requiere conocimientos avanzados de métodos numéricos y que, al mismo tiempo, sirve como base para poder extender a casos más complejos y realistas, con la seguridad de que es un método estable y que desempeña eficientemente su capacidad para resolver de forma numérica la KdV. Es decir, este proyecto se ajustó a las capacidades de un estudiante de la licenciatura en Ciencias de la Tierra, con conocimientos básicos de ecuaciones análisis numérico y métodos numéricos, para desarrollar un estudio que permita establecer las bases de futuros proyectos más robustos que involucren el estudio de ondas no lineales del tipo KdV, aplicados a las Ciencias de la Tierra.

### 1.5. Planteamiento del problema

A partir de las ecuaciones gobernantes (sin rotación) para un fluido de aguas someras con densidad constante se deduce la ecuación de Korteweg y de Vries como la ecuación que, a primer orden, gobierna el balance entre el término no lineal cuadrático y el término de dispersión. En seguida, a partir de la literatura disponible, se utilizan y se programan los esquemas numéricos de Kruskal y Zabusky (1965) y Zhu (2001), para integrar la ecuación KdV, para su posterior análisis numérico. Además se incluyen dos esquemas explícitos basados en los esquemas de tiempo de Lax-Wendroff y Walkley.

### 1.6. Método

Para la integración numérica a largo plazo de la ecuación KdV, se realizaron los pasos siguientes:

1. Obtención de la ecuación general de la KdV a partir de primeros principios.
2. Transformación de coordenadas en espacio y tiempo para utilizar la forma de la KdV como en Zabusky y Kruskal (1965), y Zhu (2001).
3. Obtención de la solución analítica de la ecuación KdV mediante métodos convencionales.
4. Prueba de consistencia y derivación de las formas discretas de los invariantes de movimiento para los esquemas de Zabusky y Kruskal (1965) y Zhu (2001).
5. Integración numérica temporal de la KdV mediante los esquemas explícitos de Zabusky y Kruskal (1965), Walkley y Lax-Wendroff, y el implícito de Zhu (2001) con Newton-Raphson, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Esquema	Tipo	Puntos del estencil	$\Delta x$	Paso de tiempo
Zhu-Newton-Raphson	Implícito	201	0.01	$\Delta t_{Zhu} = 1.59 \times 10^{-4}$
Zhu-Newton-Raphson	Implícito	201	0.01	$\Delta t = 100\Delta t_{Zhu}$
Zhu-Newton-Raphson	Implícito	201	0.01	$\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$
Zabuzky-Kruskal	Explícito	201	0.01	$\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$
Zabuzky-Kruskal	Explícito	201	0.01	$\Delta t = \frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$
Zabuzky-Kruskal	Explícito	401	0.005	$\Delta t = \frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$
Zabuzky-Kruskal	Explícito	201	0.01	$\Delta t = \frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$
Zabuzky-Kruskal	Explícito	401	0.005	$\Delta t = \frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$
Walkley	Explícito	201	0.01	$\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$
Lax-Wendroff	Explícito	201	0.01	$\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$

**Tabla 1.1:** Total de integraciones reproducidas con los distintos esquemas numéricos

6. Desarrollo de los códigos en Python. Ir a [https://github.com/aarn96/Tesis-KdV/blob/main/KdV\\_AaronContreras\\_Tesis\\_LCT.ipynb](https://github.com/aarn96/Tesis-KdV/blob/main/KdV_AaronContreras_Tesis_LCT.ipynb) para consulta.
7. Diseño de experimentos y su visualización, tal como se observa en la siguiente tabla:

Esquema	$\Delta x$	$\Delta t$	Hovmöller	Invariantes	Colisión de solitones
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$\Delta t_{Zhu} = 1.59$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$	✓
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$100\Delta t_{Zhu}$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$	✓
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$200\Delta t_{Zhu}$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$	✓
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3,$	
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$		$\mathcal{C}_1$	
Zabuzky-Kruskal	0.005	$\frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$		$\mathcal{C}_1$	
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$		$\mathcal{C}_1$	
Zabuzky-Kruskal	0.005	$\frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$		$\mathcal{C}_1$	
Walkley	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$	
Lax-Wendroff	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	✓	$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$	

**Tabla 1.2:** Serie de experimentos llevados a cabo

8. Pruebas numéricas de convergencia a la solución analítica de la KdV, para el esquema de Zhu-Newton-Raphson. Esto se realizó mediante la integración de la KdV con el esquema antes mencionado, arrancando la solución analítica como condición inicial.

### 1.7. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está dividido como sigue. El capítulo 2 se centra en la derivación de la KdV a partir de primeros principios. Ahí, se deriva la solución no-lineal analítica por métodos tradicionales de cálculo. En el Capítulo 3 se muestra la conservación de las tres cantidades,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  para la KdV. Se detalla la estructura de los esquemas numéricos de Zabusky y Kruskal, así como el de Zhu, y se grafican los análogos discretos de las tres constantes de movimiento que cada esquema reporta. El capítulo 4 se avoca al diseño experimental numérico que permite explorar la sensibilidad de los esquemas a la selección del paso de tiempo y de una variedad de condiciones iniciales que incluyen la colisión entre solitones. Asimismo, se compara el desempeño de la solución numérica respecto de la solución analítica del soliton. Se visualizan las soluciones numéricas mediante diagramas de Hovmöller. Se explora la habilidad de los esquemas para producir soluciones estables a largo plazo. Finalmente, se concluye en el capítulo 5 y se propone trabajo a futuro.

## Derivación de la ecuación KdV

---

Como se ha mencionado anteriormente, la riqueza de fenómenos que ocurren en el océano y la atmósfera se manifiestan en un rango muy amplio de escalas temporales y espaciales que cubren, al menos, 5 o 6 órdenes de magnitud (ver figura 1.1). La hipótesis fundamental es que todos estos fenómenos se pueden explicar mediante la conservación de la masa, el momento y la energía total de un sistema no inercial en rotación y estratificado en la dirección del vector de gravedad. Al añadir reglas o parametrizaciones de procesos microscópicos y termodinámicos, como la disipación y los flujos de masa, energía y momento entre las fronteras de los subsistemas, se completan las ecuaciones que gobiernan de los fluidos geofísicos (Currie, 2016; Velasco-Belmont, 2004; Kundu *et al.*, 2015; Cushman-Roisin y Beckers, 2011). La dificultad analítica y numérica para resolver en general las ecuaciones que gobiernan los fluidos surge de las interacciones no lineales entre los movimientos de amplitud finita y la retroalimentación con el estado termodinámico del sistema atmósfera-océano-criósfera. Estas interacciones llevan al sistema a inestabilidades que se amplifican y desaparecen de forma muy compleja. Por ello, es necesario hacer aproximaciones a las ecuaciones a fin de extraer soluciones que permitan entender los procesos físicos básicos que dominan la evolución del fluido.

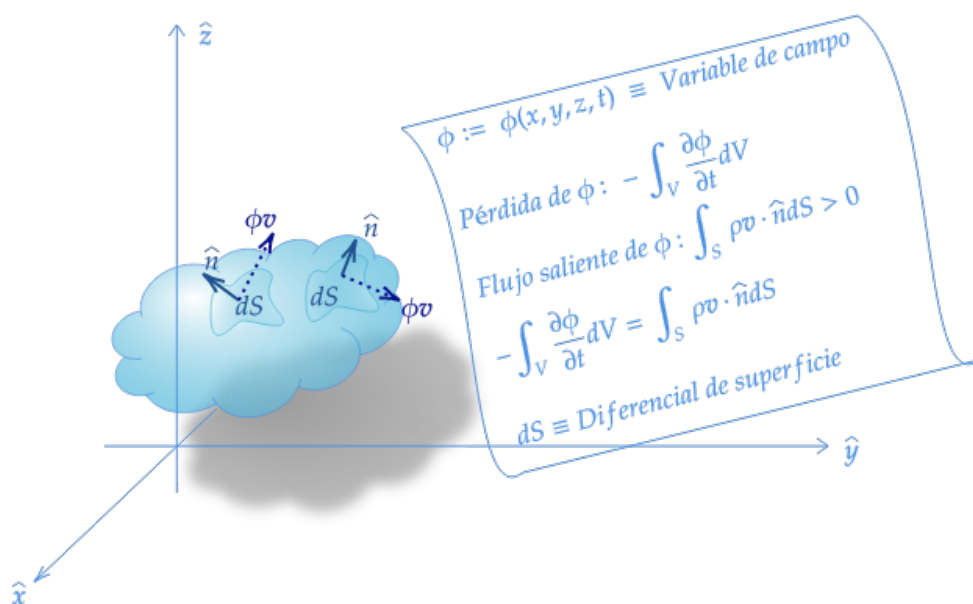
La KdV surge como una ecuación diferencial no lineal débil de tercer orden, desde el contexto de los fluidos geofísicos de aguas someras. Como una primera aproximación a este tipo de sistemas, se obtiene la ecuación a partir de un caso muy simplificado sin tomar en cuenta la rotación, pero sin perder de perspectiva que esta deducción toma en cuenta la esencia de las ecuaciones gobernantes de los fluidos geofísicos de aguas someras y, aunque sea una simplificación muy considerable, sólo es un ejercicio simplificado que busca, por el momento, desarrollar un esquema numérico de integración para la KdV que sea estable y, posteriormente, incorporar efectos de rotación y estratificación a dicha solución numérica. Por otra parte, la KdV incorpora el balance entre la tendencia a dispersar las ondas (i.e., cada onda viaja con diferente velocidad de fase) y el término no lineal cuadrático que tiende a crear una singularidad espacial. Estos dos términos son suficientes para generar un comportamiento no lineal que es observado en múltiples fenómenos en la atmósfera y el océano como se menciona en la introducción. En la siguiente sección presentamos una derivación de la KdV a partir de las ecuaciones



gobernantes de un fluido geofísico haciendo las aproximaciones necesarias.

## 2.1. Ecuaciones de conservación: formalismo euleriano

Sea un volumen de control fijo  $V$  de forma arbitraria con una superficie  $S$  como se muestra en la figura 2.1. Al interior de  $V$  se define una variable de campo  $\phi(x, y, z, t)$  y el flujo de  $\phi$  definido como el vector  $\phi\mathbf{u}$  que atraviesa la superficie  $S$  de  $V$ . Si el valor integrado del flujo  $\phi\mathbf{u}$  sobre todos los elementos diferenciales de area  $S$  es positivo entonces decimos que hay un flujo saliendo de  $V$  que, en ausencia de fuentes y sumideros, supone una reducción del valor de  $\phi$  al interior de  $V$ .



**Figura 2.1:** Volumen de control arbitrario, fijo en tiempo y espacio. El flujo de  $\phi$  que atraviesa la pared del volumen de control  $V$  se compensa con la disminución de  $\phi$  dentro de dicho volumen.

En otras palabras:

$$-\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \int_S \phi \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss la ecuación de superficie se transforma en una integral de volumen:

$$-\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) dV,$$

o bien:

$$\int_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (2.1)$$

Dado que el volumen de control es finito pero arbitrario, la única forma en que la ecuación (2.1) puede satisfacerse en todo instante es que el integrando sea cero en cada punto del interior del volumen de control, es decir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) está escrita en el llamado formalismo *euleriano* y se trata de una ecuación de conservación para la variable de campo  $\phi(x, y, z, t)$  cuyos valores dependen del transporte que el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  le imparte al campo  $\phi(x, y, z, t)$  en cada punto del dominio, en cada instante de tiempo  $t$ . Decimos que la ley de conservación euleriana (2.2) está escrita en la llamada forma de flujo. Es evidente que  $\phi$  puede tomar el papel de masa, momento lineal o energía para escribir las leyes de conservación correspondientes. Específicamente definimos estas variables como:

✂  $\rho$ : masa por unidad de volumen ( $\text{kg m}^{-3}$ ).

✂  $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}$ : momento lineal por unidad de volumen ( $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).

✂  $\rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Phi$ : energía total por unidad de volumen ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ).

Donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $\rho e$  es la energía interna termodinámica por unidad de volumen y  $\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ , es la energía cinética por unidad de volumen y  $\rho \Phi$  es la energía potencial por unidad de volumen.

### 2.1.1. Conservación de masa

La conservación de la masa se sigue directamente de la ecuación (2.2) haciendo simplemente  $\phi = \rho$ , la densidad, suponiendo que no hay fuentes ni sumideros externos de masa o reacciones al interior del volumen de control. Por tanto la conservación de masa para un fluido se expresa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Conservación del momento lineal

Recuperamos la ecuación para el momento lineal haciendo  $\phi = \rho \mathbf{u}$ . Por tanto, se sigue de (2.2) que sin fuentes ni sumideros de momento lineal se satisface:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = 0. \quad (2.4)$$

## 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN KDV

---

O bien, componente a componente:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = 0, \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u}) = 0, \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) = 0, \quad (2.5c)$$

donde  $u, v, w$  son las componentes del vector de velocidad  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$ , a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente.

La ecuación (2.4) indica la conservación total del momento lineal. Sin embargo, cuando el volumen de control está sujeto a fuerzas externas de cuerpo y superficie, el momento lineal  $\rho \mathbf{u}$  ya no se conserva al interior de este. Luego, para el volumen de control  $V$  tenemos:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right) dV = \int_V \rho \mathbf{g}^* dV + \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (2.6)$$

donde  $\rho \mathbf{g}^*$  es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen debida a la fuerza de gravedad actuando en cada punto del volumen de control. La fuerza de superficie ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ) está determinada por el tensor de esfuerzos  $\mathbf{P}$ , que contiene información cuantitativa sobre la fuerza por unidad de área que se ejerce sobre un elemento de área  $dS$  en la dirección paralela a su vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$ , con esfuerzos cortantes en direcciones perpendiculares al vector normal. Utilizando el teorema de Gauss sobre la integral de superficie en (2.6) y el argumento del volumen arbitrario tenemos:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{g}^*. \quad (2.7)$$

Ahora usamos la igualdad  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = u(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  junto con la conservación de la masa (2.3). Colectando términos reescribimos (2.7):

$$\mathbf{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{g}^*,$$

para obtener finalmente:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{g}^*. \quad (2.8)$$

El tensor de esfuerzos  $\mathbf{P}$  se compone de dos partes para un fluido isótropo:

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma},$$

donde el término  $-p\mathbf{I}$  representa el tensor de presión hidrostática con  $\mathbf{I}$  la matriz identidad. Es decir,  $p(x, y, z, t)$  es la presión termodinámica que resulta cuando el fluido está en reposo (*i. e.*,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) bajo la acción de la gravedad (o alguna fuerza de cuerpo).

El segundo término representa el tensor de esfuerzos debido a la viscosidad. Es fácil verificar que:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.9)$$

Luego:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}^* + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Observamos que esta forma euleriana de escribir la conservación de momento lineal se puede reinterpretar en el formalismo lagrangiano como:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.10)$$

En esta ecuación la derivada material  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ , expresa que *siguiendo la parcela de fluido*, su momento lineal no cambia en ausencia de fuerzas externas que actúen sobre ella. Por tanto, (2.10) es la expresión de la 2a ley de Newton aplicada a los fluidos.

### 2.1.3. Conservación de energía

La conservación de la energía total por unidad de volumen la obtenemos haciendo  $\phi = \rho E$ , donde  $E = e + 1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ,  $e$  es la energía interna del aire o del agua por unidad de masa (variable de estado termodinámica) y  $1/2 v^2 = 1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  es la energía cinética por unidad de masa. Notamos que  $\rho E$  no es una cantidad conservada ya que sobre el volumen de control actúan fuerzas de cuerpo y superficie generando un cambio en tiempo de la energía total  $\rho E$  en su interior (*i.e.*, potencia en Watts,  $\text{Js}^{-1}$ ). Podemos escribir esta idea formalmente para el volumen de control:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) \right) dV = \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g}^* dV + \int_V \rho J dV, \quad (2.11)$$

donde  $J$  es el calentamiento molecular de la parcela del fluido. Del lado derecho de (2.11), la primera integral define el trabajo por unidad de tiempo que realiza el tensor de esfuerzos, la segunda integral es trabajo que realiza la fuerza de gravedad y finalmente la tercera integral se refiere a la tasa de calentamiento por radiación y conducción. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i P_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i (-p \delta_{ij} + \sigma_{ij})), \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i (-p \delta_{ij} + \sigma_{ij})) = \frac{\partial (-p u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j}. \\ \therefore \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

La integral de superficie para el tensor de esfuerzos  $\mathbf{P}$  se transforma usando el teorema de Gauss resultando en dos integrales de volumen, es decir:

## 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN KDV

---

$$\int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{u}) dV + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV.$$

Volviendo a utilizar el argumento de que el volumen es arbitrario podemos escribir el balance de energía como:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g}^* + \rho J,$$

o bien:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g}^* + \rho J. \quad (2.12)$$

Operando el producto punto de  $\mathbf{u}$  sobre la ecuación de momento lineal (2.8), obtenemos una expresión para la energía cinética:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} (1/2 v^2) + \mathbf{u} \cdot \nabla (1/2 v^2) \right) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{u}.$$

Usando (2.9) reescribimos:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} (1/2 v^2) + \mathbf{u} \cdot \nabla (1/2 v^2) \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Podemos poner la ecuación (2.13) para la energía cinética en forma de flujo y, así, comparar directamente término a término con la ecuación (2.12). Consideremos las identidades:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \nabla \cdot \left( \rho \frac{1}{2} v^2 \mathbf{u} \right) - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \quad (2.14a)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (2.14b)$$

Sustituyendo (2.14a) y (2.14b) en el lado derecho de (2.13), colectando términos y usando nuevamente conservación de masa (2.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \left( \rho \frac{1}{2} v^2 \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{u}. \quad (2.15)$$

Recordando que la energía total  $\rho E = \rho e + 1/2 v^2$ , podemos establecer el balance de energía para la energía interna  $e$ , simplemente restando la ecuación (2.15) de la ecuación (2.12):

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \rho J. \quad (2.16)$$

La ecuación de balance de energía interna (2.16) es la expresión de la 1a ley de termodinámica y tal como está escrita arriba la podemos tomar como una generalización de la 1a ley de la termodinámica para los fluidos. El primer término del lado

derecho corresponde al trabajo mecánico de compresión o expansión mientras que los otros dos términos son fuentes de calentamiento por viscosidad y por efectos diabáticos (radiación y conducción) respectivamente. Faltaría una ecuación de estado que relacione la densidad con la energía y la presión, es decir,  $e = e(\rho, p)$ . Así, se puede entender que los términos  $-p(\nabla \cdot \mathbf{u})$  y  $\sigma : \nabla \mathbf{u}$  sirven para acoplar los cambios de energía interna del fluido viscoso con los cambios en momento lineal  $\rho \mathbf{u}$  y viceversa. El término  $\rho J$ , sin embargo, nada tiene que ver con el movimiento macroscópico del fluido. Es el calentamiento molecular puro.

## 2.2. Fluidos ideales

La primera simplificación que se hace en los textos de fluidos es la llamada aproximación de Boussinesq que consiste en suponer que la densidad del fluido se descompone como:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t), \quad (2.17)$$

donde  $\rho_0$  es una densidad de referencia y  $\rho'$  es una desviación de dicho valor, tal que  $|\rho'| \ll \rho_0$ . Una consecuencia importante de esta aproximación es que, a primer orden, el flujo se puede tratar como incompresible (Cushman-Roisin y Beckers, 2011), es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.18)$$

En estas condiciones la ecuación de balance de energía se simplifica mucho si tratamos con fluidos incompresibles e inviscidos. En efecto, la ecuación (2.16) se reduce a:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \rho J. \quad (2.19)$$

Si, además, tenemos que no existen flujos de energía por radiación ni por conducción en la superficie del volumen de control, se sigue que el flujo es adiabático. En estas condiciones la energía interna se conserva y podemos decir que la termodinámica está desacoplada del movimiento. Si, por otro lado, no existe viscosidad entonces el tensor de esfuerzos es nulo  $\sigma = \mathbf{0}$ . Así, la ecuación de momento (2.10) se reduce a:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}^*. \quad (2.20)$$

Ahora aplicamos la aproximación de Boussinesq a (2.20) componente a componente, de tal forma que en las componentes  $x$  y  $y$  del momento lineal  $\rho \mathbf{u}$  la densidad  $\rho$  es simplemente  $\rho_0$ , excepto en el término de la gravedad en la ecuación para el momento vertical,  $\rho w$ :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - g^* \rho', \end{aligned}$$

o, en su forma vectorial, la ecuación que gobierna el momento lineal es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho'}{\rho_0} g^* \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Para continuar la simplificación diremos que el término  $\rho'/\rho_0 g^*$  es una constante que denotaremos simplemente como  $g$  y que se le conoce en la literatura como gravedad reducida. Es decir:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

### 2.3. Condición dinámica de irrotacionalidad: Ecuación de Bernoulli

Dada la complejidad matemática que suponen las ecuaciones que gobiernan el momento lineal  $\rho_0 \mathbf{u}$  (2.23), podemos imponer una condición extra para simplificar el tratamiento de las ecuaciones de movimiento. Para ello requerimos que la vorticidad, definida como  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ , sea  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  en todo el dominio. Esto implica que el campo de velocidades es el gradiente de una función escalar  $\phi(x, y, z, t)$  puesto que, por análisis vectorial, el rotacional de cualquier gradiente es cero. En otras palabras:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \quad (2.24a)$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}. \quad (2.24b)$$

Puesto que el fluido es de Boussinesq, tenemos que satisfacer además que el flujo es incompresible (2.18). Así, juntando la velocidad potencial (2.24a) con la conservación de masa, damos lugar a la Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.25)$$

Tomando el rotacional de la ecuación (2.20):

$$\nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g \mathbf{e}_z \right] = \mathbf{0}.$$

Haciendo uso de la aproximación de Boussinesq (2.17) y, por análisis vectorial, se cumple (2.24b). Entonces, basados en este razonamiento, tenemos que:

$$\nabla \times \left[ \nabla \left( \frac{1}{\rho_0} p + g z \right) \right] = \mathbf{0}.$$

Por otra parte, desarrollando el rotacional de la derivada parcial temporal de  $\mathbf{u}$ , por la definición que tenemos de vorticidad:

$$\nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (2.26)$$

Por último, para manipular el término inercial  $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ , haremos uso de la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

con la que, sustituyendo los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  por  $\mathbf{u}$ , llegamos a que:

$$\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Nuevamente, haciendo uso de la definición de vorticidad propuesta, tendremos que el rotacional del término advectivo será:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \nabla \times \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad vectorial para el rotacional del producto vectorial, tenemos:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

por incompresibilidad y la definición de vorticidad, los dos últimos términos de la anterior ecuación son idénticamente  $\mathbf{0}$ . Por lo que, tomando todos los términos en conjunto llegamos a la *Ecuación de Vorticidad Sin Fricción*:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Con lo cual hemos probado que, si la vorticidad es cero al tiempo  $t = 0$ , permanecerá igual en el tiempo subsecuente.

Ahora pasamos a la derivación de la *Ecuación de Bernoulli*. Para ello, tomamos la ecuación de Euler (2.23) y, habiendo probado que estamos trabajando con un flujo potencial, el término advectivo puede reescribirse como  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$  y considerando que la vorticidad es cero, tendremos que:

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right\} = 0.$$

Recordando que nuestra ecuación proviene de un escalar, resulta que:

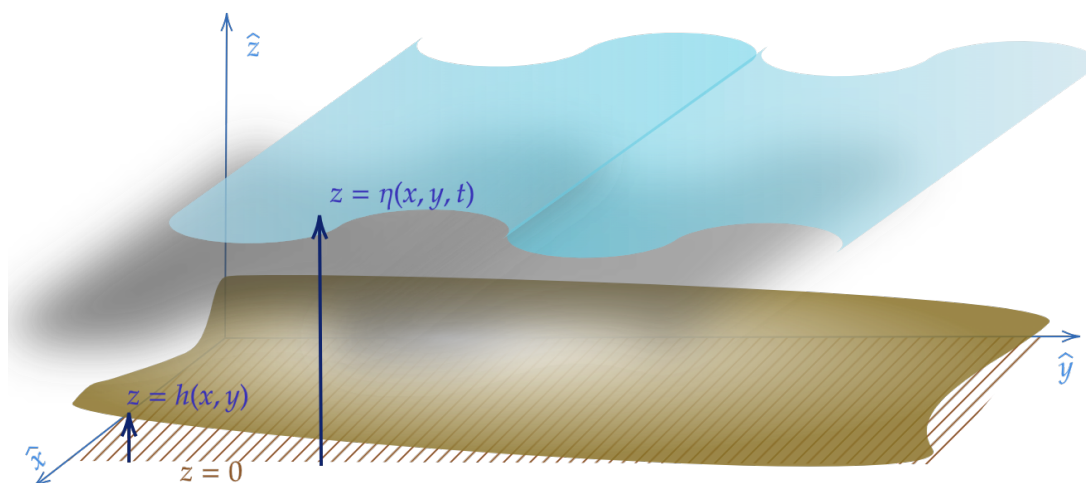
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = F(t), \quad (2.28)$$

donde  $F(t)$  es una constante positiva para cualquier punto dentro del dominio del fluido. (2.28) es la bien conocida *Ecuación de Bernoulli*.



## 2.4. Deducción de la ecuación KdV como una aproximación de onda larga de las ecuaciones de aguas someras, bajo el método de perturbaciones

Es bien sabido que las soluciones que se desprenden de la KdV cuentan con aplicaciones no sólo en ondas viajeras en ríos o lagunas, sino también en fenómenos de ondas internas de gravedad oceánicas. Resulta ser que la KdV se convierte en un modelo con la física más simple posible para el caso de aguas someras y longitudes de onda largas, comparadas con la altura de la columna de agua. La figura (2.2) representa las condiciones de borde para definir el problema de frontera con el que se deduce la KdV en este apartado.



**Figura 2.2:** Modelo de la evolución de la superficie libre en 3-D

A continuación se presenta un bosquejo de la derivación de la ecuación KdV mediante el método de perturbación, basado en Karczewska y Rozmej (2018). La derivación parte de las ecuaciones para un canal o tanque de ondas superficiales, imponiendo la condición al fluido de ser irrotacional e incompresible. Para cerrar el problema, se imponen dos condiciones a la superficie libre: 1) Bernoulli (dinámica) y 2) la derivada material del desplazamiento vertical de la superficie es la velocidad vertical (cinemática). La geometría del canal se define tal como se puede observar en la figura (2.2); sin embargo, se limita la geometría del canal a los ejes  $x$  y  $z$  dado que el problema 3D es bastante más complicado de resolver por el método de perturbaciones.

#### 2.4.1. Condiciones cinemáticas de frontera

Estas condiciones de frontera surgen de imponer que tanto la superficie libre  $\eta(x, y, t)$  como la superficie que define la batimetría  $h(x, y)$  son superficies materiales, es decir que las partículas de fluido no salen ni entran a través de ellas. Matemáticamente es equivalente a definir una función  $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$  y una  $G(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$  para  $\eta(x, y, t)$  y  $h(x, y)$  respectivamente, tal que:

$$\frac{D}{Dt} [F(x, y, t) = z - \eta(x, y, t)] = 0, \quad z = \eta(x, y, t); \quad (2.29a)$$

$$\frac{D}{Dt} (G(x, y) = z - h(x, y)) = 0, \quad z = h(x, y). \quad (2.29b)$$

o bien:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{Dz}{Dt} - \frac{D\eta}{Dt} = w - \frac{\partial\eta}{\partial t} - u \frac{\partial\eta}{\partial x} - v \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

o bien:

$$w - \frac{\partial\eta}{\partial t} - u \frac{\partial\eta}{\partial x} - v \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (2.30)$$

Puesto que  $\mathbf{u} = \nabla\phi(x, y, z, t)$ , entonces las componentes de la corriente están dadas como:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Entonces, la ecuación (2.30) la podemos reescribir en términos del potencial de velocidad,  $\phi(x, y, z, t)$ . Reemplazando la notación  $\partial/\partial x$  por el subíndice  $x$  y así sucesivamente, para las demás variables independientes:

$$\phi_z - (\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y) = 0. \quad (2.31)$$

Cuando  $z = h(x, y)$  la ecuación (2.29b) se reescribe como:

$$\phi_z - (\phi_x h_x + \phi_y h_y) = 0. \quad (2.32)$$

#### 2.4.2. Condiciones dinámicas de frontera

Aparte de las condiciones de frontera cinemáticas, debemos incluir la ley que permite la evolución en tiempo de la superficie libre  $\eta(x, y, t)$ . Vamos a suponer que el término de presión en la superficie libre es una constante que, sin pérdida de generalidad, podemos poner igual a cero. Ahora bien, si a un tiempo dado tenemos que  $z = \eta(x, y, t)$ , entonces queda especificada la constante del lado derecho de la ecuación (2.28), que convenientemente podemos, sin perder generalidad, dejar como cero. Por tanto podemos reescribir la ecuación de Bernoulli como:

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0. \quad (2.33)$$

Notamos aquí que la ecuación es no lineal debido al término cuadrático de la energía cinética.

### 2.4.3. Deducción de la KdV siguiendo a Karczewska y Rozmej (2018)

Para poder atacar el problema no lineal que nos presenta la ecuación de Bernoulli, es necesario hacer algunas simplificaciones. Primeramente la dependencia en la variable independientes,  $y$  se anula, quedando solo las variaciones en el eje  $x$  y  $z$ . De esta forma las ecuaciones (2.25), (2.31), (2.32) y la de Bernoulli (2.28) se reducen a:

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0; \quad h(x) < z < \eta(x, t). \quad (2.34a)$$

$$\phi_z - (\eta_x \phi_x + \eta_t) = 0; \quad z = \eta(x, t). \quad (2.34b)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0; \quad z = \eta(x, t). \quad (2.34c)$$

$$\phi_z - h_x \phi_x = 0; \quad z = h(x, t). \quad (2.34d)$$

Y, resaltando que tenemos un fondo plano, entonces  $h_x = 0$ , por lo que podemos elegir de manera arbitraria una  $z(x, t) = h(x, t) = 0$ , de manera que (2.34d) queda expresado simplemente como  $\phi_z = 0$  en  $z = 0$ . Ahora bien, notando que la superficie libre  $\eta$ , es medida a partir de una altura  $H$ , la cual es la profundidad de la columna de agua cuando el fluido está en reposo, procedemos a escribir las ecuaciones en un sistema adimensional. Denotaremos por  $a$  a la amplitud de la onda superficial, por  $L$  a su longitud de onda promedio y por  $H$  a la profundidad del canal. Por lo que hace a las variables adimensionales, las introduciremos como se enuncia a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{H}{La\sqrt{gH}}\phi, & \tilde{x} &= \frac{x}{L}, & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{a}, \\ \tilde{z} &= \frac{z}{H}, & \tilde{t} &= \frac{t\sqrt{gH}}{L}. \end{aligned}$$

Definimos nuevos parámetros adimensionales  $\alpha = \frac{a}{H}$  y  $\beta = \left(\frac{H}{L}\right)^2$ , y por medio de la regla de la cadena, se puede mostrar de manera sencilla que el sistema de ecuaciones (2.34) se transforma en:

$$\beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0; \quad 0 < \tilde{z} < 1 + \alpha \tilde{\eta}(x, t). \quad (2.35a)$$

$$\frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_{\tilde{z}} - \left( \alpha \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \tilde{\phi}_{\tilde{x}} + \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \right) = 0; \quad \tilde{z} = 1 + \alpha \tilde{\eta}(x, t). \quad (2.35b)$$

$$\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left( \alpha \tilde{\phi}_{\tilde{x}}^2 + \frac{\alpha}{\beta} \tilde{\phi}_{\tilde{z}}^2 \right) + \tilde{\eta} = 0; \quad \tilde{z} = 1 + \alpha \tilde{\eta}(x, t). \quad (2.35c)$$

$$\tilde{\phi}_{\tilde{z}} = 0; \quad \tilde{z} = 0. \quad (2.35d)$$

Notemos que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  tienen el mismo orden de magnitud, y  $\mathcal{O}(\alpha) = \mathcal{O}(\beta) \ll 1$  para poder llevar a cabo el método de perturbación. Con este método lo que buscaremos es realizar una expansión que nos permita tener una buena aproximación para ondas de una longitud grande y una amplitud considerablemente pequeña, a comparación de la profundidad de la columna de agua, características intrínsecas de la onda

propuesta por Russell. Ahora, por practicidad, trabajaremos desde este punto sin las variables tildadas, recordando que estamos trabajando en el sistema adimensional (2.35).

De forma estándar, en métodos de perturbación se propone una solución al potencial de la forma:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \phi^{(m)}(x, t), \quad (2.36)$$

donde  $\phi^{(m)}(x, t)$  son las funciones a encontrar.

Antes de continuar con la deducción de la KdV, probaremos primero si  $\phi$  del método perturbativo (2.36) satisface el laplaciano en forma adimensional (2.35a). Para ello, sacamos la segunda derivada de (2.36) respecto a  $x$ :

$$\phi_{xx} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \phi_{xx}^{(m)}; \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

Si tomamos la primera derivada de (2.36) respecto a  $z$  y aplicamos la condición de contorno (2.35d), podemos ver que  $\phi^{(1)} = 0$ ; de manera que

$$\phi_{zz} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)z^m \phi^{(m+2)}; \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Entonces, sustituyendo (2.37) y (2.38) en (2.35a) nos percatamos que existe una relación recursiva de  $\phi_{xx}^{(0)}$  con los términos pares y de  $\phi_{xx}^1$  con los impares; sin embargo, tomando en cuenta que  $\phi^{(1)} = 0$ , descartamos los términos impares de la expresión, obteniendo:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^m}{(2m)!} z^{2m} \phi_{2mx}^{(0)}; \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.39)$$

Y, sustituyendo (2.39) en (2.35a), probamos que se satisface el laplaciano (2.35a).

Ahora bien, para continuar con el desarrollo sistemático de la deducción, definiremos una nueva variable  $w(x, t) := \phi_x^{(0)}(x, t)$ , con la idea de reducir el grado de las derivadas; entonces, desarrollando (2.39) con esta nueva variable tendremos

$$\phi(x, z, t) = \phi^{(0)} - \frac{\beta}{2} z^2 w_x + \frac{\beta^2}{24} z^4 w_{3x} - \frac{\beta^3}{720} z^6 w_{5x} + \dots \quad (2.40)$$

y, con (2.40), tomamos las derivadas de  $\phi$  respecto a  $x$ ,  $z$ , y  $t$ , evaluando en la superficie  $z = 1 + \alpha\eta$

$$\phi_z = -\beta(1 + \alpha\eta)w_x + \frac{\beta^2}{6}(1 + \alpha\eta)^3 w_{3x} - \frac{\beta^3}{120}(1 + \alpha\eta)^5 w_{5x} + \dots \quad (2.41)$$

$$\phi_x = w - \frac{\beta}{2}(1 + \alpha\eta)^2 w_{2x} + \frac{\beta^2}{24}(1 + \alpha\eta)^4 w_{4x} - \frac{\beta^3}{720}(1 + \alpha\eta)^6 w_{6x} + \dots \quad (2.42)$$

$$\phi_t = \phi_t^{(0)} - \frac{\beta}{2}(1 + \alpha\eta)^2 w_{xt} + \frac{\beta^2}{24}(1 + \alpha\eta)^4 w_{3xt} - \frac{\beta^3}{720}(1 + \alpha\eta)^6 w_{5xt} + \dots \quad (2.43)$$

## 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN KDV

---

A continuación, teniendo en mente que  $\alpha \sim \beta \ll 1$ , podemos sustituir (2.41) – (2.43) en (2.35b), truncando los términos de  $\mathcal{O}(\alpha^2, \alpha^3, \dots; \beta^2, \beta^3, \dots; \alpha\beta, \dots)$ , llegamos a la siguiente ecuación:

$$\eta_t + w_x + \alpha(\eta w)_x - \frac{\beta}{6}w_{3x} = 0. \quad (2.44)$$

Procediendo de forma análoga para la condición dinámica (2.35c), obtenemos:

$$\eta_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2}w_{2x} = 0. \quad (2.45)$$

Podemos deshacernos de la variable  $w$ , a fin de obtener una sola ecuación de onda para  $\eta$ . Para ello, tomamos una aproximación a orden cero de  $\alpha$  y  $\beta$  del sistema (2.44)–(2.45), dejándonos en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\eta_t + w_x = 0; \quad \eta_x + w_t = 0. \quad (2.46)$$

Es sencillo ver que, de (2.46),  $w$  y  $\eta$  son solución de una misma ecuación de onda. Para ello tomamos la derivada temporal de  $\eta_t + w_x = 0$  y le restamos la derivada espacial de  $\eta_x + w_t = 0$ , y llegamos a la ecuación de onda  $\eta_{tt} - \eta_{xx} = 0$ . Ahora, restando la derivada espacial de  $\eta_t + w_x = 0$  a la derivada temporal de  $\eta_x + w_t = 0$ , tendremos la ecuación  $w_{tt} - w_{xx} = 0$ ; de manera que, con  $\alpha$  y  $\beta$  a orden cero,

$$\eta_t = -\eta_x, \quad w_t = -w_x. \quad (2.47)$$

y, por lo tanto,

$$w = \eta. \quad (2.48)$$

Ahora, podemos englobar a (2.44) y (2.45) en una sola ecuación por medio de (2.48), reduciendo los términos de  $\alpha$  y  $\beta$  a primer orden, definiendo  $Q^{(\alpha)}$  y  $Q^{(\beta)}$  como nuevas variables cuyos términos son funciones de  $\eta$  y sus respectivas derivadas respecto  $x$ . Con lo que

$$w = \eta + \alpha Q^{(\alpha)} + \beta Q^{(\beta)}. \quad (2.49)$$

Similar a la forma de proceder para llegar a (2.47), veamos ahora que también existe una relación entre las derivadas parciales de (2.49). Tomando la derivada parcial de (2.49) respecto a  $t$ , haciendo uso de (2.47), tendremos que

$$\alpha \left[ Q_t^{(\alpha)} + Q_x^{(\alpha)} \right] + \beta \left[ Q_t^{(\beta)} + Q_x^{(\beta)} \right] = 0, \quad (2.50)$$

por lo que, suponiendo que  $\alpha$  y  $\beta$  son valores arbitrarios:

$$Q_t^{(\alpha)} = -Q_x^{(\alpha)}, \quad Q_t^{(\beta)} = -Q_x^{(\beta)}. \quad (2.51)$$

A continuación, analicemos lo siguiente; si sustituimos (2.49) en (2.44) y (2.45), discriminando los términos de  $\alpha$  y  $\beta$  de orden superior a uno, y haciendo uso de (2.47), tenemos

$$\alpha \left( Q_x^{(\alpha)} + 2\eta\eta_x \right) + \beta \left( Q_x^{(\beta)} - \frac{1}{6}\eta_{3x} \right) = 0, \quad (2.52)$$

$$\alpha \left( Q_t^{(\alpha)} + \eta\eta_x \right) + \beta \left( Q_t^{(\beta)} - \frac{1}{2}\eta_{3x} \right) = 0, \quad (2.53)$$

sustrayendo (2.52) a (2.53), bajo el supuesto que  $\alpha$  y  $\beta$  son valores arbitrarios cercanos a cero, y tomando en cuenta (2.51), llegamos a

$$Q_x^{(\alpha)} = -\frac{1}{2}\eta\eta_x, \quad Q_x^{(\beta)} = \frac{1}{3}\eta_{3x}. \quad (2.54)$$

Integrando (2.54), obtenemos:

$$Q^{(\alpha)} = -\frac{1}{2}\eta^2, \quad Q^{(\beta)} = \frac{1}{3}\eta_{2x}; \quad (2.55)$$

así, (2.49) y (2.53) toman la forma

$$w = \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\eta_{2x}, \quad (2.56)$$

$$\eta_x + \eta_t + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{3x} = 0. \quad (2.57)$$

La ecuación (2.57) es la conocida ecuación Korteweg-de-Vries (KdV) en *un marco de referencia fijo* (o inercial), y su solución analítica está dada como:

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{3\beta}{4\alpha}} A \left( x - t \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right]. \quad (2.58)$$

## 2.5. Invariantes de la KdV

Una interesante propiedad física y matemática que se desprende del estudio de los solitones es la conservación de ciertas constantes del movimiento (o invariantes del sistema). Es posible demostrar que la KdV, a primer orden, es un sistema hamiltoniano integrable (Miura, 1976; Zakharov y Faddeev, 1971); es decir, posee un número infinito de constantes de movimiento (Drazin, 1983, Miura *et al.*, 1968; Gardner y Morikawa, 1960). Dado que la demostración formal del infinito número de cantidades conservadas sale de los límites de esta tesis, se refiere al lector a las referencias donde se demuestra de forma rigurosa que la KdV es un sistema de ecuaciones diferenciales hamiltoniano (véase Zakharov y Faddeev, 1971; Drazin, 1983; Gardner y Morikawa, 1960 y Miura, 1976).

Si bien, un número infinito de cantidades conservadas no tiene precisamente un significado físico, las primeras invariantes de la KdV están relacionadas con la conservación de masa, momento y energía. Diversos autores coinciden en que la primera invariante,  $\mathcal{E}_1$ , corresponde a la conservación de la masa (por ejemplo, Kruskal y Zabusky, 1965; Drazin, 1983; Zhu, 2001; Karczewska y Rozmej, 2018); no obstante, no existe un consenso con respecto al significado físico de  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$ . Autores como Yanfen y De-Kang (2007), y Drazin (1983) coinciden en que  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$  corresponden físicamente a la conservación de momento y energía cinética, respectivamente. Por el contrario, Zabusky, Kruskal (1965) y Zhu (2001) indican que  $\mathcal{E}_2$  representa la conservación de

## 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN KdV

---

la energía cinética ya que, como se mostrará en el capítulo siguiente,  $\mathcal{E}_2$  toma la forma de energía cinética de la perturbación de la superficie libre, de manera directa. Sin embargo, si  $\mathcal{E}_2$  cumpliera con una ley de conservación para la energía cinética, esta conservación debería seguirse en todas las formas de la KdV, lo cual no sucede cuando estudiamos formas más complejas de la ecuación (Karczewska, *et al.*, 2017), en las que la conservación de la energía cinética no se obtiene directamente de  $\mathcal{E}_2$ , con lo cual se concluye que las demás invariantes, aparte de  $\mathcal{E}_1$  no precisamente representan el momento y la energía cinética. En los trabajos de Karczewska *et al.* (2015), Ali y Kalisch (2014), e Israwi y Kalisch (2019) se formulan las leyes de conservación para el momento y la energía, haciendo énfasis en que estas surgen a partir de la construcción de la KdV y sus invariantes, más no implica que la conservación de  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$  signifique explícitamente la conservación del momento y la energía.

Recordemos que en esta tesis estamos trabajando con la forma más sencilla de la KdV, la cual posee una no linealidad débil (consideramos los términos no lineales a primer orden dentro del método de perturbaciones). Por tanto, podemos seguir la teoría propuesta por Zabusky y Kruskal (1965), de modo que consideraremos a  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  como la conservación de masa y energía, respectivamente. En particular, como resultado de la conservación de  $\mathcal{E}_1$ , la KdV representa una importante área de estudio en los sistemas oceánicos, costeros y atmosféricos, pues las ondas que obedecen a esta familia de ecuaciones tienen la cualidad de viajar por grandes distancias, conservando su forma original sin disiparse (a diferencia de como ocurre con las ondas de gravedad). En este caso, esta propiedad física sí es una implicación directa de la conservación de  $\mathcal{E}_1$ , como se mencionó en el párrafo anterior.

En el capítulo 3 se demuestra la conservación analítica de las primeras tres invariantes de la KdV y se presenta un esquema numérico implícito que conserva de manera eficiente el análogo numérico de  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_3$ , y se compara contra los esquemas explícitos de Zabusky y Kruskal (1965), Lax-Wendroff y Walkley, de los cuales únicamente el primero logra conservar  $\mathcal{E}_1$ . Si bien, desde un punto de vista numérico resulta imposible construir un esquema que tenga un número arbitrario de constantes de movimiento, más adelante se muestra que si el esquema numérico se diseña incorporando algunas de estas constantes del movimiento, el modelo será más estable, lo cual permitirá la integración numérica de la KdV por grandes periodos de tiempo.

# Esquemas en diferencias finitas de la KdV y diseño experimental

---

En este capítulo se presenta el estudio numérico de la KdV a partir de dos esquemas en diferencias finitas de Zabusky y Kruskal (1965) y de Zhu (2001) que denotamos en lo que sigue como ZK65 y Z01 respectivamente. Asimismo, se deduce la KdV adaptada a dichos esquemas y se obtiene la solución analítica de la ecuación a partir de desarrollos algebraicos simples. De igual manera, presentamos la implementación del método Newton-Raphson como una propuesta para la integración en tiempo de la KdV, aplicado al esquema Z01, distinta a las utilizadas convencionalmente.

## 3.1. Transformación de la KdV en la ecuación de Kruskal y Zabusky

A partir de este apartado, trabajaremos con la ecuación KdV de la forma:

$$\eta_t + \eta\eta_x + \delta^2\eta_{3x} = 0. \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) describe la propagación unidimensional y de largo tiempo, de ondas con amplitud pequeña pero finita, en un *marco de referencia móvil* (Stoker, 1957; Gardner y Morikawa, 1960; Zabusky y Kruskal, 1965), tales como las ondas del régimen de aguas someras. Por tal motivo, buscamos una transformación para llegar a esta forma de la KdV a partir de (2.57).

Sea:  $\hat{x} = Q(x - t)$  y  $\hat{t} = R\alpha t$ , (2.57) toma la forma:

$$\eta_{\hat{t}} + \frac{3Q}{2R}\eta\eta_{\hat{x}} + \frac{\beta}{6} \frac{Q^3}{R\alpha}\eta_{3\hat{x}}.$$

Escogemos

$$\frac{Q}{R} = \frac{2}{3},$$



tal que

$$R = \frac{3Q}{2} \quad y \quad \frac{\beta Q^3}{6 R \alpha} = \delta^2.$$

Entonces,

$$\hat{x} = 3\delta \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (x - t) \quad y \quad \hat{t} = \frac{9}{2} \delta \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t,$$

con lo cual, la KdV se transforma como  $\eta_{\hat{t}} + \eta \eta_{\hat{x}} + \delta^2 \eta_{3\hat{x}}$ , consistente con (3.1).

### 3.2. Solución analítica

Para obtener la solución analítica de (3.1), seguiremos el desarrollo de Brauer (2000). Se propone una solución para (3.1) de la forma:

$$\eta(x, t) = \eta(x - \beta t) = \eta(\xi),$$

con lo cual llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea no lineal:

$$-\beta \eta_{\xi} + \eta \eta_{\xi} + \delta^2 \eta_{3\xi} = 0. \quad (3.2)$$

Cabe señalar que, a lo largo de estas secciones, haremos uso de los subíndices ( $\xi$ ) como una forma de representar los operadores diferenciales y las derivadas con las que vamos a trabajar. Por otra parte, de (3.2), es sencillo ver que:

$$-\beta \eta_{\xi} + \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right)_{\xi} + (\delta^2 \eta_{2\xi})_{\xi} = 0,$$

por lo que:

$$\left[ -\beta \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \delta^2 \eta_{2\xi} \right]_{\xi} = 0,$$

así, integrando respecto a  $\xi$ :

$$-\beta \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \delta^2 \eta_{2\xi} = C_1. \quad (3.3)$$

Multiplicando (3.3) por  $\eta_{\xi}$ :

$$-\beta \eta \eta_{\xi} + \frac{1}{2} \eta^2 \eta_{\xi} + \delta^2 \eta_{2\xi} \eta_{\xi} = C_1 \eta_{\xi}.$$

Nuevamente, es fácil mostrar que:

$$-\beta \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right)_{\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \eta^3 \right)_{\xi} + \delta^2 \left( \frac{1}{2} \eta_{\xi}^2 \right)_{\xi} = (C_1 \eta)_{\xi},$$

de manera que:

$$\left[ -\frac{\beta}{2} \eta^2 + \frac{1}{6} \eta^3 + \frac{\delta^2}{2} \eta_{\xi}^2 \right]_{\xi} = (C_1 \eta)_{\xi},$$

e integrando respecto a  $\xi$  nuevamente:

$$-\frac{\beta}{2}\eta^2 + \frac{1}{6}\eta^3 + \frac{\delta^2}{2}\eta_\xi^2 = C_1\eta + C_2. \quad (3.4)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes que pueden tomar cualquier valor; sin embargo, con  $C_1 = C_2 = 0$  garantizamos que

$$\text{si } \eta \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \xi \rightarrow \pm\infty,$$

por lo que

$$\text{si } \eta_\xi \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Estas condiciones son concordantes con el tipo de ondas que estamos estudiando, lo cual puede verificarse fácilmente de manera gráfica. Drazin (1983) y Brauer (2000) muestran más a detalle la justificación por la cual, en este caso, la elección de las constantes igual a cero nos resulta útil para llegar a la solución analítica que estamos buscando.

De (3.4) tenemos entonces que:

$$\eta_\xi = \pm \frac{\eta}{\delta} \sqrt{\beta - \frac{\eta}{3}}.$$

Tomamos la raíz positiva (ver Brauer, 2000) e integramos:

$$\delta^2 \int_0^\eta \frac{d\eta'}{\eta' \sqrt{\beta - \frac{\eta'}{3}}} = \int_0^\xi d\xi'. \quad (3.5)$$

Consideramos a las variables primadas de (3.5) como variables continuas mudas y, considerando por simplicidad una  $\eta(\xi = 0) = 0$ , proponemos la transformación:

$$\eta = 3\beta \operatorname{sech}^2(w),$$

entonces:

$$\sqrt{\beta - \frac{\eta}{3}} = \sqrt{\beta} \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(w)}.$$

Para simplificar la integración, realizamos una sustitución trigonométrica. De la identidad  $\cosh^2(\theta) + \sinh^2(\theta) = 1$ , tenemos que:

$$\frac{1}{\cosh^2(\theta)} [\cosh^2(\theta) + \sinh^2(\theta) = 1].$$

Entonces,  $1 - \tanh^2(\theta) = \operatorname{sech}^2(\theta)$ , por tanto  $1 - \operatorname{sech}^2(\theta) = \tanh^2(\theta)$ . Así:

$$\sqrt{\beta - \frac{\eta}{3}} = \sqrt{\beta} \tanh(w).$$

Multiplicando ambos lados por  $\eta$ :

$$\eta \sqrt{\beta - \frac{\eta}{3}} = 3\beta \sqrt{\beta} \operatorname{sech}^2(w) \tanh^2(w).$$

Ahora, expresamos  $d\eta'$  en términos de  $dw'$ :

$$\begin{aligned}\eta = 3\beta \operatorname{sech}^2(w) &\Rightarrow d\eta = 6\beta \operatorname{sech}(w) \frac{d}{dw}(\operatorname{sech}(w)) dw, \\ &\Rightarrow d\eta = 6\beta \operatorname{sech}(w) (-\operatorname{sech}(w) \tanh(w)) d(w), \\ &\Rightarrow d\eta = -6\beta \operatorname{sech}^2(w) \tanh(w) d(w).\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \frac{d\eta'}{\eta' \sqrt{\beta - \frac{\eta'}{3}}} &= \int_0^w -\frac{6\beta \operatorname{sech}^2(w') \tanh(w')}{3\beta \sqrt{\beta} \operatorname{sech}^2(w') \tanh(w')} dw' \\ &= \int_0^w -\frac{2}{\sqrt{\beta}} dw' \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\beta}} w.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Ahora bien, de (3.5) y (3.6) tenemos:

$$\frac{\xi}{\delta} = -\frac{2}{\sqrt{\beta}} w.$$

Pero, recordando que  $\eta = 3\beta \operatorname{sech}^2(w)$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}^{-1} \left[ \left( \frac{\eta}{3\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = w &\Rightarrow \frac{\xi}{\delta} = -\frac{2}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech}^{-1} \left[ \left( \frac{\eta}{3\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\Rightarrow -\frac{\sqrt{\beta} \xi}{2\delta} = \operatorname{sech}^{-1} \left[ \left( \frac{\eta}{3\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right].\end{aligned}$$

Evaluando la secante hiperbólica por ambos lados y, tomando en consideración que esta es una función simétrica respecto del origen:

$$\operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{\beta} \xi}{2\delta} \right) = \sqrt{\frac{\eta}{3\beta}},$$

o bien:

$$\eta(x, t) = 3\beta \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{\beta}}{2\delta} (x - \beta t) \right].\tag{3.7}$$

La solución (3.7) es un solitón adimensional que viaja al oeste, sin cambiar su forma original y es solución de (3.1).

### 3.3. Primeras tres invariantes de la KdV

En este apartado probaremos la conservación de las primeras tres invariantes de la KdV (3.1):  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  y  $\mathcal{I}_3$ . Siguiendo a Dazin (1983), definimos a una *ley de conservación*

tal que, dada una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

donde  $T$  es una variable de campo que describe al fluido (por ejemplo, la densidad o la temperatura) y  $X$  es el flujo de dicha propiedad. En efecto, (3.8) implica que  $T_t = 0$ ; *i. e.*,  $T \equiv \text{cte}$ . Esta relación implica que tanto  $T$  como  $X$  son independientes de sus derivadas temporales. En particular, para el caso unidimensional con el que estamos trabajando, aplicando (3.8) a la evolución de  $\eta(x, t)$ , tenemos que  $T$  y  $X$  dependen únicamente de  $x$ ,  $t$ ,  $\eta$ ,  $\eta_x$ ,  $\eta_{2x}$ ,  $\dots$ , pero no de  $\eta_t$ . Por otra parte, si  $T$  y  $X_x$  son integrables en un dominio de  $(-\infty, \infty)$ ,

$$X \rightarrow \text{cte}, \quad \text{conforme } |x| \rightarrow \infty,$$

entonces se sigue que (3.8) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T \, dx = 0 \quad \text{o bien,} \quad \int_{-\infty}^{\infty} T \, dx = \text{cte}. \quad (3.9)$$

Cabe señalar que esta ley de conservación presenta un inconveniente cuando tenemos condiciones periódicas para  $u$  y sus derivadas en espacio y tiempo pues, para estos casos, la ley se cumplirá únicamente para cada periodo en el cuál estemos evaluando las invariantes, a diferencia de los solitones que no son periódicos, en los cuales se cumple la ley de conservación en todo el dominio. Si bien, lo anterior puede limitar la validez de la conservación de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , esto no representa un problema para el diseño de nuestro código, ya que si definimos los bordes del dominio lo suficientemente lejos de la perturbación asociada al solitón, entonces aún es posible hacer comparaciones entre las soluciones numéricas (que por diseño son periódicas) y las soluciones analíticas.

Comenzamos por  $\mathcal{C}_1$ . Podemos separar la KdV (3.1) por diferenciales de tiempo y espacio:

$$\partial_t (\eta) + \partial_x \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \delta^2 \eta_x \right) = 0.$$

Aquí es donde intervienen las condiciones periódicas y, para que se cumpla la ley de conservación, acorde con el diseño de nuestro esquema, integramos en  $x$  en el intervalo de  $[0, L]$ , donde  $L$  es la longitud del intervalo. Luego:

$$\partial_t \int_0^L (\eta) \, dx + \int_0^L \partial_x \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \delta^2 \eta_x \right) \, dx = 0.$$

Hemos reescrito la ecuación (3.1) en forma de flujo y podemos dar cuenta de que el término  $X$  de (3.8), sustituido en esta integral, es una diferencial exacta:

$$d \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \delta^2 \eta_x \right).$$

### 3. ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA KdV Y DISEÑO EXPERIMENTAL

---

Dicho lo cual, al integrar este término respecto a  $x$  y, por condiciones periódicas, tenemos que:

$$(\mathcal{C}_1)_t = 0, \text{ donde } \mathcal{C}_1 = \int_0^L (\eta) dx. \quad (3.10)$$

En cuanto a la segunda invariante  $\mathcal{C}_2$ , multiplicamos (3.1) por  $\eta$ . Siguiendo la misma línea que para  $\mathcal{C}_1$ , llegamos la siguiente forma de flujo:

$$\partial_t \int_0^L \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) dx + \int_0^L \partial_x \left( \frac{1}{3} \eta^3 + \eta \eta_{2x} - \frac{1}{2} \eta_x^2 \right) dx = 0.$$

Nuevamente, por condiciones periódicas:

$$\int_0^L \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) dx = \mathcal{C}_2. \quad (3.11)$$

Por último, para la tercera invariante  $\mathcal{C}_3$  multiplicamos la KdV por  $-\eta^2/2$  y, al mismo tiempo, le sumamos  $\delta^2 \eta_x \partial_x$  multiplicado por (3.1). Con lo que, reescrito en forma de flujo, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^L \left( \frac{1}{2} \delta^2 \eta_x^2 - \frac{1}{6} \eta^3 \right) dx \\ + \int_0^L \partial_x \left( -\frac{1}{8} \eta^4 - \frac{1}{2} \delta^2 \eta^2 \eta_{2x} + \delta^2 \eta \eta_x^2 + \delta^4 \eta_x \eta_{3x} - \frac{1}{2} \delta^4 \eta_{2x}^2 \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Una vez más, por periodicidad, concluimos que  $\mathcal{C}_3$  es una constante del movimiento:

$$\int_0^L \left( \frac{1}{2} \delta^2 \eta_x^2 - \frac{1}{6} \eta^3 \right) dx = \mathcal{C}_3. \quad (3.12)$$

A continuación, analicemos el siguiente ejercicio: supongamos que  $\eta$  es una velocidad  $u$ . Para cada una de las invariantes hemos multiplicado la KdV por cierto parámetro (1 para  $\mathcal{C}_1$ ,  $u$  para  $\mathcal{C}_2$  y  $-u^2/2$  para  $\mathcal{C}_3$ ). Sin perder de vista esta idea, podemos ver que cada una de las invariantes tiene inmersa una densidad de movimiento. Por ejemplo, suponiendo que queremos incorporar la densidad del fluido: para  $\mathcal{C}_1$  tendremos una conservación de masa, para  $\mathcal{C}_2$  cumplirá una conservación de momento zonal y para  $\mathcal{C}_3$  tendremos la conservación de energía cinética. Por lo tanto, físicamente la conservación de estas cantidades representa la conservación de formas de densidades del movimiento inmersas en la KdV. Esto confirma la premisa citada por Israwi y Kalisch (2019), donde hemos comprobado que el momento zonal y la energía cinética únicamente están inmersas en  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  respectivamente, más no quiere decir que  $\mathcal{C}_2$  sea el momento zonal ni  $\mathcal{C}_3$  sea la energía cinética de la perturbación de la superficie libre. Por otro lado, en este caso se cumplió que  $\mathcal{C}_2$  coincidió directamente con la conservación de la energía cinética (tal cual como se indica en Zabusky, Kruskal (1965) y Zhu (2001)); no obstante, no podemos aseverar que esto se cumpla para todas las formas de la KdV. Aunado a lo anterior, ya que el desarrollo teórico de esta forma de la KdV parte del caso de estudio para aguas someras, dichas cantidades están asociadas explícitamente a ondas de dicho medio (ver Drazin, 1983 para mayor detalle).

### 3.4. Esquema en diferencias finitas de Zabusky y Kruskal (1965)

El esquema numérico más simple para resolver la KdV es el propuesto por Zabusky y Kruskal (1965), el cuál permite de manera formal sólo la conservación de  $\mathcal{E}_1$ , mientras que presenta dificultades para conservar  $\mathcal{E}_2$ .

Para encontrar la discretización en diferencias finitas de la KdV, se propone utilizar el estencil definido en el intervalo cerrado, sobre el eje  $x$ ,  $[0, L]$ , con una malla de puntos en  $x$  definidos por:

$$\Delta x = \frac{L}{N-1}, \quad x_j = j\Delta x \quad \text{y} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Dadas las consideraciones anteriores, (3.1) se aproxima como:

$$\begin{aligned} \eta_j^{n+1} = \eta_j^{n-1} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (\eta_{j+1}^n + \eta_j^n + \eta_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) \\ - \delta^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n], \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\delta^2$  es un parámetro que modula la amplitud del solitón y fue obtenido previamente de la derivación de (3.1).

Al tratarse de un esquema explícito, tenemos una aproximación condicionalmente estable, con un error de truncamiento del orden  $\mathcal{O}[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$ .

De este esquema se desprende el análogo discreto de la cantidad  $\mathcal{E}_1$ , que es una integral sobre el dominio en el intervalo  $[0, L]$  y, en consistencia con la sintaxis del lenguaje de programación *Python*, está dado como:

$$\mathcal{E}_{1_j}^N(n) = \sum_{j=0}^{N-2} \eta_j^n \quad (3.14)$$

Podría pensarse que la suma (3.14) se planteó arbitrariamente sin considerar el  $\Delta x$ . No obstante, (3.14) se sigue de (3.10) y su aproximación en diferencias finitas obedece a (3.13). En efecto, es claro ver que para demostrar (3.14), debemos demostrar que  $\mathcal{E}_{1_j}^N(n-1) = \mathcal{E}_{1_j}^N(n+1)$ . De (3.13) basta con demostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (\eta_{j+1}^n + \eta_j^n + \eta_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) \\ + \sum_{j=0}^{N-2} \delta^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3. ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA KDV Y DISEÑO EXPERIMENTAL

---

O bien,

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \sum_{j=0}^{N-2} (\eta_{j+1}^n + \eta_j^n + \eta_{j-1}^n) (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + \delta^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} \sum_{j=0}^{N-2} [\eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n] = 0.$$

En efecto, para cualquier  $n$  del tiempo, escribimos cada termino de (3.15) en la siguiente tabla:

$j$	$\eta_{j+j}^2$	$-\eta_{j-1}^2$	$+\eta_j \eta_{j+1}$	$-\eta_j \eta_{j-1}$	$+\eta_{j+2}$	$-\eta_{j-2}$	$-2\eta_{j+1}$	$+2\eta_{j-1}$
0	$\eta_1^2$	$\eta_{N-2}^2$	$\eta_0 \eta_1$	$\eta_0 \eta_{N-2}$	$\eta_2$	$\eta_{N-3}$	$2\eta_1$	$2\eta_{N-2}$
1	$\eta_2^2$	$\eta_0^2$	$\eta_1 \eta_2$	$\eta_1 \eta_0$	$\eta_3$	$\eta_{N-2}$	$2\eta_2$	$2\eta_0$
2	$\eta_3^2$	$\eta_1^2$	$\eta_2 \eta_3$	$\eta_2 \eta_1$	$\eta_4$	$\eta_0$	$2\eta_3$	$2\eta_1$
3	$\eta_4^2$	$\eta_2^2$	$\eta_3 \eta_4$	$\eta_3 \eta_2$	$\eta_5$	$\eta_1$	$2\eta_4$	$2\eta_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N-5$	$\eta_{N-4}^2$	$\eta_{N-6}^2$	$\eta_{N-5} \eta_{N-4}$	$\eta_{N-5} \eta_{N-6}$	$\eta_{N-3}$	$\eta_{N-7}$	$2\eta_{N-4}$	$2\eta_{N-6}$
$N-4$	$\eta_{N-3}^2$	$\eta_{N-5}^2$	$\eta_{N-4} \eta_{N-3}$	$\eta_{N-4} \eta_{N-5}$	$\eta_{N-2}$	$\eta_{N-6}$	$2\eta_{N-3}$	$2\eta_{N-5}$
$N-3$	$\eta_{N-2}^2$	$\eta_{N-4}^2$	$\eta_{N-3} \eta_{N-2}$	$\eta_{N-3} \eta_{N-4}$	$\eta_0$	$\eta_{N-5}$	$2\eta_{N-2}$	$2\eta_{N-4}$
$N-2$	$\eta_0^2$	$\eta_{N-3}^2$	$\eta_{N-2} \eta_0$	$\eta_{N-2} \eta_{N-3}$	$\eta_1$	$\eta_{N-4}$	$2\eta_0$	$2\eta_{N-3}$

**Tabla 3.1:** Conservación de masa, esquema de Zabusky y Kruskal, 1965

De la tabla 3.1 vemos lo siguiente:

- ✂ Los términos encerrados en color, en los extremos, se cancelan por condiciones de periodicidad en las fronteras:  $\eta_j = \eta_{j+N-1}$ .
- ✂ Los términos escritos en color se cancelan en el interior del estencil.

De manera que (3.15) es idénticamente cero. Esto es, el análogo discreto de  $\mathcal{C}_1$  ( $\mathcal{C}_{1j}^N(n)$ ) también se conserva.

#### 3.4.1. Prueba de consistencia

Para el estudio de la consistencia de este esquema trabajaremos los términos de la KdV por separado. Por otra parte, definimos  $\eta(x_j) := \eta_j$ . Comenzamos con el término de cambio local en tiempo de la KdV. Realizamos una expansión en serie de Taylor para

$\eta(t + \Delta t) = \eta_j^{n+1}$  y  $\eta(t - \Delta t) = \eta_j^{n-1}$ , manteniendo fijo cada punto  $x_j$  del estencil:

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} &= \eta^n + \eta_t|_{t_n} (\Delta t) \\ &+ \frac{1}{2!} \eta_{2t}|_{t_n} (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \eta_{3t}|_{t_n} (\Delta t)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4t}|_{t_n} (\Delta t)^4 + \mathcal{O}[(\Delta t)^5]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \eta^{n-1} &= \eta^n - \eta_t|_{t_n} (\Delta t) \\ &+ \frac{1}{2!} \eta_{2t}|_{t_n} (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \eta_{3t}|_{t_n} (\Delta t)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4t}|_{t_n} (\Delta t)^4 - \mathcal{O}[(\Delta t)^5]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ahora bien, restando (3.17) de (3.16) y dividiendo entre  $2\Delta t$ , el conjunto de ecuaciones (3.16, 3.17) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} &\approx \eta_t|_{t_n} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] \\ \therefore \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} \right\} &= \eta_t|_{t_n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Trabajando de manera análoga la parte espacial, aproximamos las derivadas en  $x$  de la siguiente forma: para el término no lineal, primero, aproximaremos la derivada en  $x$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \eta_{j+1} &= \eta_j + \eta_x|_{x_j} (\Delta x) \\ &+ \frac{1}{2!} \eta_{2x}|_{x_j} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4x}|_{x_j} (\Delta x)^4 + \mathcal{O}[(\Delta x)^5]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \eta_{j-1} &= \eta_j - \eta_x|_{x_j} (\Delta x) \\ &+ \frac{1}{2!} \eta_{2x}|_{x_j} (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4x}|_{x_j} (\Delta x)^4 - \mathcal{O}[(\Delta x)^5]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Restando (3.19) a (3.18), tenemos que:

$$\frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta x} \approx \eta_x|_{x_j} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2].$$

Es sencillo ver que  $\eta$  se aproxima como un promedio móvil de  $\eta|_{x_j}$  y sus vecinos; *i. e.*,

$$\begin{aligned} \eta_j &\approx \frac{1}{3} [\eta(x_j - \Delta x) + \eta(x_j) + \eta(x_j + \Delta x)] \\ &= \frac{1}{3} (\eta_{j+1} + \eta_j + \eta_{j-1}). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la consideración anterior, se concluye lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (\eta_{j+1} + \eta_j + \eta_{j-1}) \left( \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta x} \right) &\approx \eta_j \eta_x|_{x_j} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2] \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{3} (\eta_{j+1} + \eta_j + \eta_{j-1}) \left( \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta x} \right) \right\} &= \eta_j \eta_x|_{x_j} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Por último, para discretizar la tercera derivada con un error de truncamiento menor, tomamos un  $\Delta x$  extra y realizamos nuevamente la expansión en serie de Taylor; *i. e.*, evaluamos en  $\eta(x \pm 2\Delta x)$ :

$$\begin{aligned} \eta_{j+2} = \eta_j + \eta_x|_{x_j} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \eta_{2x}|_{x_j} (2\Delta x)^2 \\ + \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (2\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4x}|_{x_j} (2\Delta x)^4 + \mathcal{O} \left[ (2\Delta x)^5 \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \eta_{j-2} = \eta_j - \eta_x|_{x_j} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \eta_{2x}|_{x_j} (2\Delta x)^2 \\ - \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (2\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \eta_{4x}|_{x_j} (2\Delta x)^4 - \mathcal{O} \left[ (2\Delta x)^5 \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Restando (3.21) de (3.20):

$$\eta_{j+2} - \eta_{j-2} \approx 2 \left[ \eta_x|_{x_j} (2\Delta x) + \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (2\Delta x)^3 \right] + \mathcal{O} \left[ (2\Delta x)^5 \right].$$

Pero, de (3.18) y (3.19):

$$\eta_{j+1} - \eta_{j+1} \approx 2 \left[ \eta_x|_{x_j} \Delta x + \frac{1}{3!} \eta_{3x}|_{x_j} (\Delta x)^3 \right] + \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^5 \right].$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{j+2} - 2\eta_{j+1} + 2\eta_{j-1} - \eta_{j-2}}{2(\Delta x^3)} \approx \eta_{3x}|_{x_j} + \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^2 \right] \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\eta_{j+2} - 2\eta_{j+1} + 2\eta_{j-1} - \eta_{j-2}}{2(\Delta x)^3} \right\} = \eta_{3x}|_{x_j} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De modo que, en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , la forma discreta propuesta por el esquema de Zabusky y Kruskal (1965) es igual a la KdV (3.1) en el continuo.

### 3.4.2. Esquemas de integración temporal para comparar con Zabusky y Kruskal (1965)

En la sección anterior, hemos introducido el esquema de discretización numérico propuesto por Zabusky y Kruskal (1965), mismo que es explícito en tiempo. A fin de realizar comparaciones de desempeño del esquema de Zabusky y Kruskal, proponemos evaluar su eficiencia contra tres esquemas más de integración explícita en tiempo: 1) Up-wind, 2) Lax-Wendroff y 3) Wakley. Tal ejercicio se basó en el proyecto final de Tiago Correia (2018) para el curso 4301 de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Columbia, NN. YY., en abril de 2018. Dicho código está diseñado en *Jupyter Notebook*, con el lenguaje de programación *Python*, mismo que puede ser consultado y descargado en <https://github.com/modessert/Numerical-Methods-KDV/blob/master/>

[numerical\\_KDV.ipynb](#). Cabe mencionar que el código de Tiago Correia trabaja con la ecuación KdV estándar:

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{3x} = 0. \quad (3.22)$$

Dicho código se fundamenta en la teoría establecida en el artículo de Shahrill, *et al.* (2015) y, para pasar de (3.1) a (3.22) basta con aplicar a (3.1) la siguiente transformación:

$$x_{zk} = Bx_s; \quad t_{zk} = At_s. \quad (3.23)$$

Donde  $x_{zk}$  y  $t_{zk}$  son las variables  $x$  y  $t$  de (3.1), mientras que  $x_s$  y  $t_s$  son las variables de la KdV transformada. Con esto, vemos que con  $\delta^2 = B^2/6$  y  $6B/A = 1$  pasamos de (3.1) a (3.22). Cabe mencionar que, en consistencia con Zhu (2001),  $\epsilon = \delta^2$ , donde  $\delta^2$  fue obtenido previamente en (3.1). Así siguiendo el desarrollo de Correia (2018), los esquemas a comparar son:

✂ Walkley:

$$\begin{aligned} \eta_j^{n+1} = & \eta_j^n - \frac{\Delta t}{24\Delta x} \left[ (\eta_{j-2}^n)^2 - 8(\eta_{j-1}^n)^2 + 8(\eta_{j+1}^n)^2 - (\eta_{j+2}^n)^2 \right] \\ & - \epsilon \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^3} (\eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n). \end{aligned}$$

✂ Lax-Wendroff:

$$\begin{aligned} \eta_j^{n+1} = & \eta_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \eta_j^n \left[ (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\eta_{j+1}^n)^2 + (\eta_{j-1}^n)^2 \right) \right] \\ & - \epsilon \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} (\eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n). \end{aligned}$$

De estos esquemas numéricos no se prueba formalmente si conservan o no los invariantes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ , y  $\mathcal{C}_3$ . Los experimentos numéricos propuestos se usaron para realizar las comparaciones pertinentes entre dichos esquemas y se muestran en la segunda sección del capítulo cuatro de esta tesis.

### 3.5. Esquema en diferencias finitas de Zhu (2001)

Este esquema consiste en una aproximación en diferencias finitas, donde se propone una discretización implícita que permite la conservación de una invariante de orden superior. Además, este esquema, linealmente, es incondicionalmente estable y posee un error de truncamiento del  $\mathcal{O} \left[ \Delta t + (\Delta x)^2 \right]$ , y se enuncia a continuación:

$$\eta_{jt}^n + \epsilon \Delta_0 \Delta_+ \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{3} \Delta_0 \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{6} \Delta_0 \left( \eta_j^n \eta_j^{n+1} \right) = 0. \quad (3.24)$$

### 3. ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA KDV Y DISEÑO EXPERIMENTAL

---

Donde  $\eta_j^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} (\eta_j^{n+1} + \eta_j^n)$ . Los operadores discretos  $\Delta_0$ ,  $\Delta_+$ , y  $\Delta_-$  representan las aproximaciones en diferencias finitas (centrado, progresivo y regresivo, respectivamente) de las derivadas respecto a  $x$ , y el subíndice  $t$  denota el operador discreto progresivo de la derivada temporal:

$$\begin{aligned} \Delta_0 (\eta_j^n) &= \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x}, & \Delta_+ (\eta_j^n) &= \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_j^n}{\Delta x}, \\ \Delta_- (\eta_j^n) &= \frac{\eta_j^n - \eta_{j-1}^n}{\Delta x}, & \eta_{jt}^n &= \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t}. \end{aligned} \quad y$$

#### 3.5.1. Prueba de consistencia

Primero analizaremos el término del cambio local temporal del esquema. Es sencillo ver que la discretización de este término surge de una aproximación en serie de Taylor para  $\eta(t + \Delta t)$ . De (3.16) vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} &\approx \eta_t|_{t_n} + \mathcal{O}(\Delta t). \\ &\vdots \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} \right\} &= \eta_t|_{t_n} \blacksquare \end{aligned}$$

Los siguientes términos requieren un análisis más detallado. Vemos primero que los operadores discretos surgen de aproximaciones en series de Taylor, tal que  $\Delta_+$  es igual a (3.18),  $\Delta_-$  es igual a (3.19) y  $\Delta_0$  es la sustracción de (3.19) a (3.18). Entonces, para el término dispersivo desarrollamos de adentro hacia afuera cada uno de los operadores:

$$\begin{aligned} \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{2\Delta x} \left[ (\eta_j^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) + (\eta_j^n - \eta_{j-1}^n) \right] + \mathcal{O}(\Delta x). \\ \Rightarrow \\ \Delta_+ \left[ \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left[ (\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) + (\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x). \\ \Rightarrow \\ \Delta_0 \left\{ \Delta_+ \left[ \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} &= \frac{1}{4(\Delta x)^3} \left( \eta_{j-2}^{n+1} - 2\eta_{j+1}^{n+1} + 2\eta_{j-1}^{n+1} - \eta_{j-2}^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4(\Delta x)^3} \left( \eta_{j+2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n \right) + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]. \end{aligned}$$

De  $\eta_{jt}^n$  vemos que, en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero,  $\eta_j^{n+1} = \eta_j^n$ . Con lo cual:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta_0 \left\{ \Delta_+ \left[ \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} = \frac{1}{2(\Delta x)^3} \left( \eta_{j-2}^n - 2\eta_{j+1}^n + 2\eta_{j-1}^n - \eta_{j-2}^n \right) + \mathcal{O}[(\Delta x)^2].$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta_0 \left\{ \Delta_+ \left[ \Delta_- \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} = \eta_{3x}|_{x_j}^{t_n} \quad \blacksquare$$

En cuanto al término advectivo (al cual denotaremos como  $TNL$ ), tomando en consideración que  $\Delta_0$  es un operador lineal y discreto, con un error de truncamiento asociado de segundo orden, cuya construcción ha sido mostrada en líneas anteriores, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \Delta_0 \left( \eta_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{6} \Delta_0 \left( \eta_j^n \eta_j^{n+1} \right) &= \frac{1}{12 \Delta x} \left[ \left( \eta_{j+1}^{n+1} \right)^2 - \left( \eta_{j-1}^{n+1} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{12 \Delta x} \left[ \eta_{j+1}^n \eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^n \eta_{j-1}^{n+1} + \left( \eta_{j+1}^n \right)^2 - \left( \eta_{j-1}^n \right)^2 \right] \\ &+ \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^2 \right]. \end{aligned}$$

Sin embargo, nuevamente hacemos uso del operador  $\eta_{jt}^n$ ; con lo cual, en el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{TNL\} &= \frac{1}{4 \Delta x} \left( \left( \eta_{j+1}^n \right)^2 - \left( \eta_{j-1}^n \right)^2 \right) + \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4 \Delta x} \left( \eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n \right) \left( \eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n \right) + \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} \left( \eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n \right) \frac{1}{2} \left( \eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n \right) + \mathcal{O} \left[ (\Delta x)^2 \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que el término de la suma es la forma discreta de  $\eta_j$ , la cual consiste en un promedio móvil entre los puntos que se encuentran a una distancia  $\pm \Delta x$  de  $\eta|_{x_j}$ ; es decir,

$$\eta_j \approx \frac{1}{2} \left[ \eta(x_j + \Delta x) + \eta(x_j - \Delta x) \right].$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{TNL\} = \eta_j^n \eta_x|_{x_j}^{t_n} \quad \blacksquare.$$

En conclusión, en el límite cuando  $\Delta t$  y  $\Delta x$  tienden a cero, el esquema (3.24) es igual a la KdV en el continuo (3.1), más un error de truncamiento del orden  $\mathcal{O} \left[ \Delta t + (\Delta x)^2 \right]$ .

### 3.5.2. Integración temporal del esquema con Newton-Raphson

El principal reto que representó esta tesis fue consolidar un código de integración a largo plazo de la KdV (3.1) que, al mismo tiempo, permitiera la conservación de las invariantes del movimiento ( $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$ ). En particular, el esquema propuesto por Zhu 2001 permite la conservación formal de los análogos numéricos de las invariantes del movimiento  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_3$ . Dado que en artículo de Zhu se prueba la conservación numérica de  $\mathcal{E}_3$ , se omitirá esta demostración formal en la tesis y se refiere al lector al artículo antes citado. Por otra parte, el esquema numérico propuesto por Zhu para la KdV

resulta en un sistema de ecuaciones no lineales, cuyo número es igual al número de puntos del estencil menos uno, con condiciones de frontera periódicas. Ejercicios lineales similares a este pueden resolverse mediante el método de *Newton-Raphson*, dado que éste representa un ejercicio algebraico menos complejo que otros esquemas numéricos, cuyo estudio sale de los límites de esta tesis (por ejemplo técnicas de continuación por pseudo-arco). De la literatura sabemos que, además, este método converge de forma cuadrática (Remani, 2013), con lo cual aseguramos la estabilidad de integraciones de largo plazo, minimizando la pronta aparición de errores computacionales que desestabilicen la solución numérica. Si bien, en esta tesis no se reporta la demostración formal de la convergencia cuadrática, en el análisis de resultados se muestra de forma gráfica que dicho esquema logra hacer las integraciones numéricas a largo plazo, conservando las invariantes  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$ , con una mayor tolerancia a presentar errores numéricos asociados al esquema *per se*. De esta forma, también numericamente, podemos explorar la estabilidad no-lineal del método de integración propuesto en esta tesis.

A grandes rasgos, el método de Newton-Raphson es una linealización mediante una expansión en serie de Taylor de una función vectorial de varias variables que nos permite obtener de forma iterativa los vecinos de esa función evaluada en un punto en  $\mathbb{R}^m$ , donde  $m$  es la dimensión del espacio que se requiere para definir un vector en el estencil. Entonces, para cada paso de tiempo dado, es necesario iterar un número de veces hasta que el criterio de convergencia se haya satisfecho; es decir, a partir del Jacobiano de la función, la iteración con el método de Newton-Raphson se construye como:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - \tilde{J}(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad (3.25)$$

donde  $k = 1, 2, \dots, n$ , representa la iteración que termina cuando la diferencia en valor absoluto  $|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  representa el umbral de error permitido. Empíricamente, y por diseño experimental, en esta tesis se determinó que bastan tan solo dos iteraciones en (3.24) por cada paso de tiempo. Denotamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{NP}$  el vector definido por el número de puntos que componen el estencil ( $NP$ ) en el intervalo cerrado  $[0, L]$  a lo largo del eje  $x$  de longitud  $L$ ;  $\mathbf{F}$  es una función vectorial no lineal (i.e., con términos no lineales cuadráticos) que toma valores en  $\mathbb{R}^{NP}$  y devuelve valores en  $\mathbb{R}^{NP}$ , mientras que  $\tilde{J}(\mathbf{x})^{-1}$  es el inverso de su matriz Jacobiana. Por lo anterior, mediante (3.25) buscamos resolver el sistema de ecuaciones no lineal  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  (consultar Remani, 2013 para una descripción formal más detallada de este método).

Ahora, para ilustrar este método de iteración, aplicaremos (3.25) a (3.24). Primero, vemos que (3.25) puede ser reescrito como un sistema de ecuaciones lineal, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= -\tilde{J}^{-1} \mathbf{F}. \text{ O bien,} \\ d_j &= -J_{ij}^{-1} F_j; \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{d} = \boldsymbol{\eta}^{(n+1)} - \boldsymbol{\eta}^{(n)} = \eta_j^{n+1} - \eta_j^n$ . Sin embargo, dado que buscamos resolver el sistema en un tiempo futuro, tenemos que (3.24) es nuestra función a evaluar para resolver el sistema en la siguiente iteración ( $n+1$ ) correspondiente al tiempo futuro; es decir,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{n+1}, \boldsymbol{\eta}^n) = F_j(\eta_i^{n+1}, \eta_i^n)$  donde  $0 \leq j \leq NP-1$ ,  $0 \leq i \leq NP-1$  son

los índices de los puntos del estencil. Por otra parte, redefinimos las variables temporales de manera que  $\eta_j^{n+1} := U_j$  corresponde al valor en el futuro ( $n + 1$ ) y  $\eta_j^n := V_j$  a su valor pasado en  $n$ . De esta manera, reescribimos (3.24):

$$\begin{aligned} F_j &= F_j \left( \eta_{j-2}^{n+1}, \eta_{j-1}^{n+1}, \eta_j^{n+1}, \eta_{j+1}^{n+1}, \eta_{j+2}^{n+1}, \eta_{j-2}^n, \eta_{j-1}^n, \eta_j^n, \eta_{j+1}^n, \eta_{j+2}^n \right) = 0, \\ &= F_j (U_i, V_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Las ecuaciones (3.27) indican claramente el carácter implícito y no-lineal del esquema de discretización de Zhu (3.24). En cuanto al jacobiano de la función, definimos los parámetros:

$$k_1 := \epsilon \frac{\Delta t}{4(\Delta x)^3}, \quad k_2 := \frac{\Delta t}{12\Delta x};$$

donde  $k_1$  se define como el parámetro *dispersivo* y  $k_2$  es el *advectivo*. Cabe precisar que estamos derivando con respecto a  $U_i$  ya que  $V_i$ , al ser el término “presente”, es considerado como una constante, por lo que su derivada es idénticamente cero. Con lo anterior en mente, podemos definir un operador diferencial:

$$\delta_{ij} := \frac{\partial F_j}{\partial U_i} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

De esta forma, el jacobiano de (3.24) es:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \delta_{ij} + k_2 [ \delta_{i+1, j} ( 2U_{i+1} + V_{i+1} ) - \delta_{i-1, j} ( 2U_{i-1} + V_{i-1} ) ] \\ &\quad + k_1 [ \delta_{i+2, j} - \delta_{i-2, j} - 2( \delta_{i+1, j} - \delta_{i-1, j} ) ] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Una vez construido el jacobiano, el sistema algebraico fue resuelto mediante el lenguaje de programación *Python*, con el uso de la función `linalg.solve` de la librería `numpy`. Por último, la toma de decisión para elegir el número de iteraciones del método, fue de forma heurística; es decir, se calcularon las normas de  $F_j$  a cada paso de tiempo, en cada una de las iteraciones, hasta asegurar que el fuera lo suficientemente cercano a cero y no creciera significativamente, con lo cual comprobamos la convergencia cuadrática del esquema y, al mismo tiempo el esquema pudiera ser comparado de manera “justa” contra los esquemas explícitos.

### 3.6. Diseño experimental

En este apartado se muestra la lista de experimentos que permiten comparar el desempeño del esquema implícito no lineal de Zhu-Newton-Raphson, contra los esquemas explícitos de Zabusky y Kruskal (1965), Walkley, y Lax-Wendroff (en sintonía con Correia, 2018 y Shahrill, *et al.*, 2015). Para ello, utilizamos la misma condición inicial del

artículo de Zabusky y Kruskal; es decir,  $\eta(x, t = 0) = \cos(\pi x)$ ;  $x \in [0, 2]$ . Los valores exactos para  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , a partir de esta condición inicial son, simplemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \int_0^2 \eta dx = 0, \\ \mathcal{C}_2 &= \int_0^2 \frac{1}{2} \eta^2 dx = 0.5, \\ \mathcal{C}_3 &= \int_0^2 \left( \frac{1}{2} \delta^2 \eta_x^2 - \frac{1}{6} \eta^3 \right) dx \approx 0.00238844.\end{aligned}$$

Nótese que hemos truncado  $\mathcal{C}_3$  hasta la octava cifra decimal.

### 3.6.1. El experimento control

Para la integración numérica de Zhu-Newton-Raphson, se mantuvo fijo el número de puntos del estencil,  $N - 1$ , y se definieron distintos pasos de tiempo con la condición inicial propuesta por Zabusky y Kruskal (1965). Se definió un número de puntos  $N = 201$  para el estencil espacial, a un paso de tiempo  $\Delta t_{Zhu} = 1.59 \times 10^{-4}$  tal que, numéricamente, se satisface la condición de estabilidad lineal, con un parámetro CFL,  $c\Delta t/\Delta x < 0.01$ ; donde  $c = 1$ , es la velocidad adimensional de propagación máxima de los solitones, que se establece a partir de una inspección de los diagramas de Hövmöller, como se verá más adelante en los resultados. La integración del código de Zhu-Newton-Raphson se realizó en tiempo adimensional de 0 a 12. Se calcularon los análogos discretos de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , como se indica en el apartado 3.4. Por último, se utilizaron dos iteraciones con el método de Newton-Raphson, para cada paso de tiempo. Debido a que la convergencia del esquema de Newton-Raphson es cuadrática, se decidió sólo utilizar dos iteraciones. El uso de más iteraciones con Newton-Raphson no disminuían sustancialmente el error.

### 3.6.2. Esquemas explícitos

Este es un grupo de experimentos en donde se varió el paso de tiempo y el número de puntos del estencil corresponde al que se usa en el control de Zhu; *i. e.*, 201. El código de estos esquemas se modificó a partir de los códigos de Tiago Correia, como se mencionó anteriormente en la sección 3.4. Para evitar violar la condición de CFL, se utilizaron pasos de tiempo diez veces más pequeño que el utilizado en el esquema de Zhu-Newton-Raphson (*i. e.*,  $1.59 \times 10^{-4}$ ). A partir de estas soluciones, se graficaron los correspondientes diagramas de Hövmöller.

### 3.6.3. Prueba numérica de convergencia del esquema Zhu-Newton-Raphson

Este experimento consistió en comparar la solución analítica de la KdV, dada por un solitón como condición inicial (ver ecuación (3.7)), contra la solución numérica del esque-

ma Zhu-Newton-Raphson, con los pasos de tiempo  $\Delta t = 100\Delta t_{Zhu}$  y  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ . El objetivo de estos dos experimentos fue mostrar el desfase entre las soluciones a estos pasos de tiempo y, junto con el cálculo de las  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , estudiar numéricamente la convergencia del esquema a la solución analítica.





## Análisis de Resultados

En la siguiente tabla se muestran los tiempos de cómputo que tomaron las integraciones numéricas de 0 a 12 unidades de tiempo adimensional, para cada uno de los esquemas con los distintos parámetros de integración evaluados:

Esquema	$\Delta x$	$\Delta t$	Tiempo aproximado de cómputo [h]	Tiempo de colapso ( $\approx$ )
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$\Delta t_{Zhu} = 1.59 \times 10^{-4}$	9.38	
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$100\Delta t_{Zhu}$	0.09	
Zhu-Newton-Raphson	0.01	$200\Delta t_{Zhu}$	0.04	
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	0.035	6.1
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$	0.30	8.4
Zabuzky-Kruskal	0.005	$\frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$	0.72	8.5
Zabuzky-Kruskal	0.01	$\frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$	0.78	8.5
Zabuzky-Kruskal	0.005	$\frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$	0.61	8.4
Walkley	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	0.05	1.2
Lax-Wendroff	0.01	$\frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$	0.05	1.1

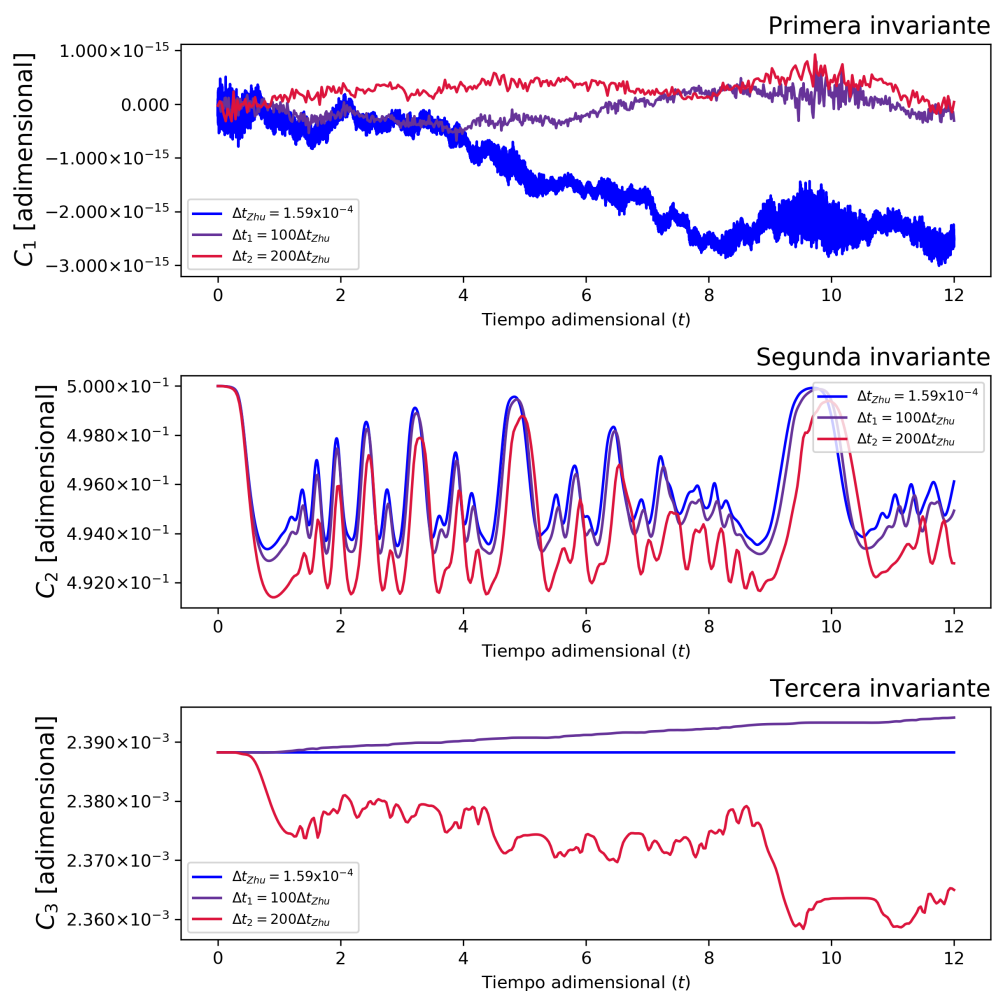
**Tabla 4.1:** Tiempos de cómputo y colapso de los distintos esquemas evaluados con diferentes parámetros

De la tabla (4.1) podemos visualizar los tiempos de cómputo que conllevaron las integraciones numéricas de los distintos esquemas evaluados en este proyecto. Los tiempos de cómputo fueron arrojados en el código de integración. Por otra parte, los tiempos de colapso se refieren al tiempo máximo aproximado hasta el cual los esquemas logran integrar la KdV. Cabe anticipar que (a primera vista) que el esquema de Zhu-Newton-

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Raphson conlleva un alto costo computacional; sin embargo, con las gráficas mostradas más adelante, se verá que este costo es relativo, pues el esquema permite pasos de tiempo lo suficientemente grandes como para competir computacionalmente contra los esquemas explícitos trabajados en esta tesis. Más aún, este esquema logra integraciones por periodos de tiempo mayores que los demás esquemas explícitos de manera más estable (siempre y cuando exista una elección adecuada de los parámetros de integración).

### 4.1. Esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson



**Figura 4.1:** Resultado de la conservación numérica de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , considerando el método implícito de Zhu-Newton-Raphson para distintos pasos de tiempo

La figura (4.1) es el resultado de la conservación numérica de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  para el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson. Se muestra una integración temporal de 0 a 12 [uta] (unidades de tiempo adimensional). Las invariantes se calcularon con tres distintos pasos de tiempo: (a) el control  $\Delta t_{Zhu} = 1.59 \times 10^{-4}$ , (b)  $\Delta t_1 = 100\Delta t_{Zhu}$  y (c)  $\Delta t_1 = 200\Delta t_{Zhu}$ . En la gráfica se puede observar el desempeño del esquema para conservar, principalmente,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$ . En cada una de estas cantidades se presentan variaciones del orden de  $10^{-16}$  para el paso de tiempo más fino,  $\Delta t_{Zhu}$ . Sin embargo, respecto a los pasos de tiempo más grandes, se observa que las variaciones en  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$  son marcadamente más grandes, ambas con variaciones del orden de  $10^{-6}$  (lo cual sale del orden de precisión de la máquina). Incluso se puede observar que  $\mathcal{C}_3$  presenta variaciones mucho mayores con los pasos de tiempo mayores, lo cual podría sugerir que  $\mathcal{C}_3$  no se conserva; no obstante, se debe tener presente que estas cantidades fueron evaluadas con pasos de tiempo cien y doscientas veces mayores que el paso de tiempo de control y, además, cada una de las invariantes se desprenden del esquema numérico mismo y, si ocurren errores de inestabilidad en el esquema, las invariantes van a presentar estos mismos errores, generando un error de convergencia a las cantidades analíticas, más no implica que no se conserven las mismas. Con relación a lo anterior, en general, podemos afirmar que las variaciones de estas cantidades aumentan en orden de magnitud conforme aumenta el paso de tiempo.

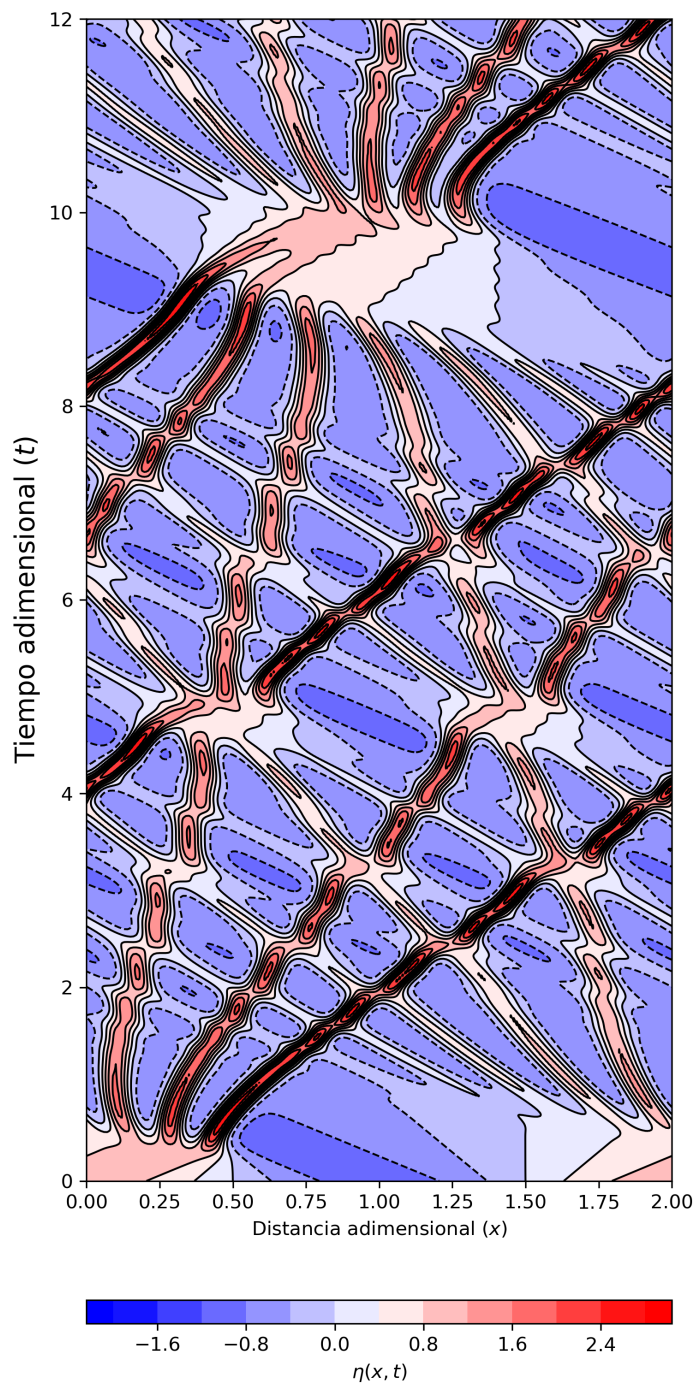
Respecto a  $\mathcal{C}_2$ , podemos ver que el esquema mantiene a esta cantidad en un rango de 0.492 a 0.5. Algo interesante a notar es que no hay variaciones significativas en esta cantidad, a distintos pasos de tiempo, mostrando únicamente un entre cada  $\mathcal{C}_2$  con los distintos  $\Delta t$ . Sin embargo, hay que recordar que el esquema de Zhu (2001), solo conserva  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$ .

La figura (4.2) es el diagrama de Hovmöller obtenido para el esquema de Zhu-Newton-Raphson con el paso de tiempo más fino,  $\Delta t_{Zhu}$ , el cual es el resultado gráfico de la salida del modelo  $\eta(x, t)$ , en el intervalo de tiempo de 0 a 12 [uta], sobre el dominio de 0 a 2 [uda] (unidades de distancia adimensional). En este diagrama podemos observar que los solitones se propagan a distintas velocidades y en ambas direcciones sobre el eje  $x$ . Debido a esto, se generan colisiones entre ellos, en distintos puntos del dominio. A primera vista, vemos que existen dos regiones de colisiones múltiples: (a) la primera entre los tiempos 4 y 5, y (b) la segunda entre los tiempos 9 y 10.2, aproximadamente. Una inspección cuidadosa de las figuras del diagrama revela que los solitones viajan sin perder su amplitud y su forma original, después de cada colisión. Durante las colisiones ocurren s en tiempo para cada solitón; sin embargo, cada solitón continúa viajando a las mismas velocidades que tenían antes de la colisión, lo cual representa una interacción no-lineal. En la figura (4.2) vemos que existe un buen desempeño en la integración del experimento control (*i. e.*, para el paso de tiempo  $\Delta t_{Zhu}$ ), en el sentido de que, los análogos numéricos de las constantes de movimiento  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ , y  $\mathcal{C}_3$  son casi-constantes. Esta condición permite mantener los errores numéricos dentro de un margen muy reducido y redundante en mantener bien acotadas las inestabilidades asociadas al término cuadrático no lineal ( $\eta\eta_x$ ). Más adelante se muestra el análisis de ambas regiones cercanas a las colisiones múltiples, donde se puede confirmar que el esquema

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

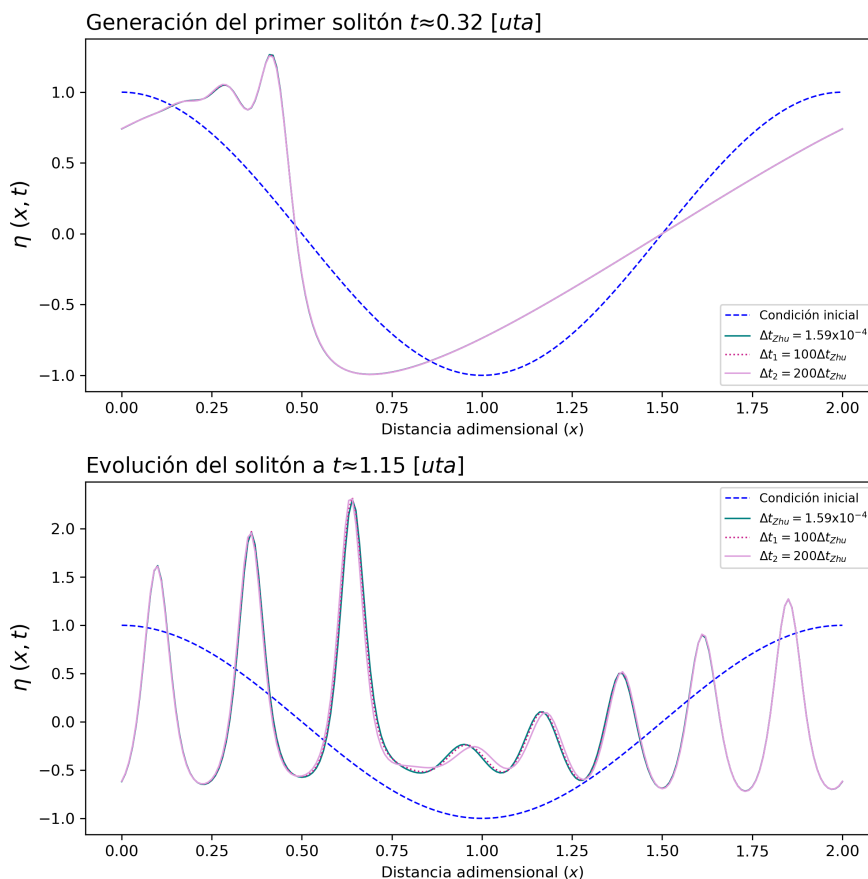
---

realizó una integración eficiente de la KdV.

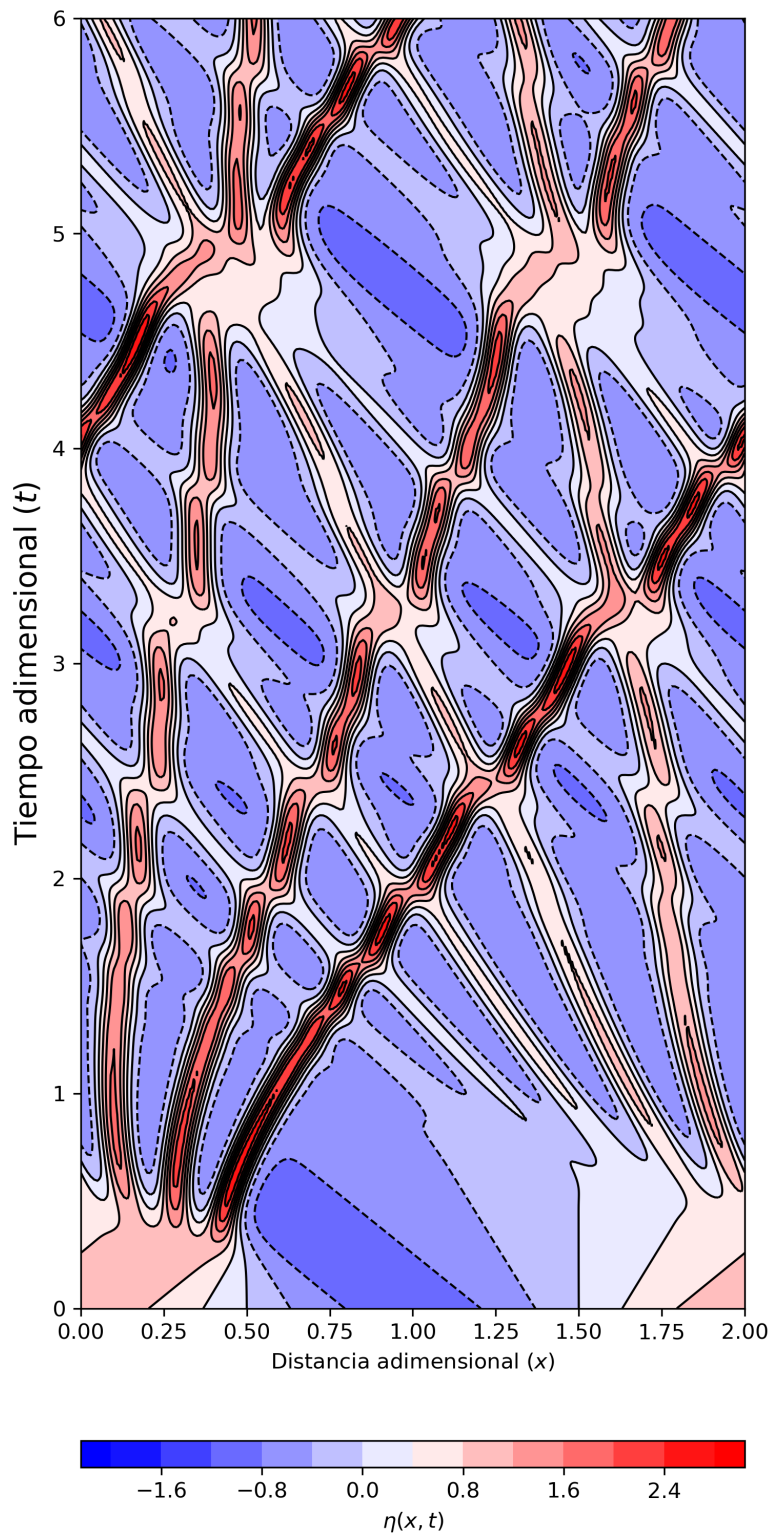


**Figura 4.2:** Hovmöller de  $\eta$  para el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, considerando un  $\Delta t_{Zhu}$

En la figura (4.3) podemos apreciar los tiempos de generación del primer solitón y su evolución después de aproximadamente 1.15 [uta]. Estas gráficas fueron producidas a partir del esquema de Zabuzky y Kruzkal (1965) y con el esquema implícito de Zhu (2001), propuesto en esta tesis. Tenemos una comparación entre integraciones con distintos pasos de tiempo para probar la estabilidad del esquema Zhu-Newton-Raphson con pasos de tiempo muy contrastantes, de manera que en (4.3) se visualizan las integraciones con el paso de tiempo de control ( $\Delta_{Zhu}$ ) contra pasos de tiempo  $100\Delta_{Zhu}$  y  $200\Delta_{Zhu}$ . La línea azul punteada representa la condición inicial, como se menciona en la sección del diseño experimental. Respecto a la generación y evolución de los solitones, podemos observar que únicamente se presenta un corrimiento de fase entre las tres soluciones, justo en la región donde se generan nuevos solitones. En (4.4) se muestra un acercamiento para  $t \in [0, 6]$ , en donde se captura la primera colisión múltiple y, con la cual, podemos confirmar lo antes dicho.



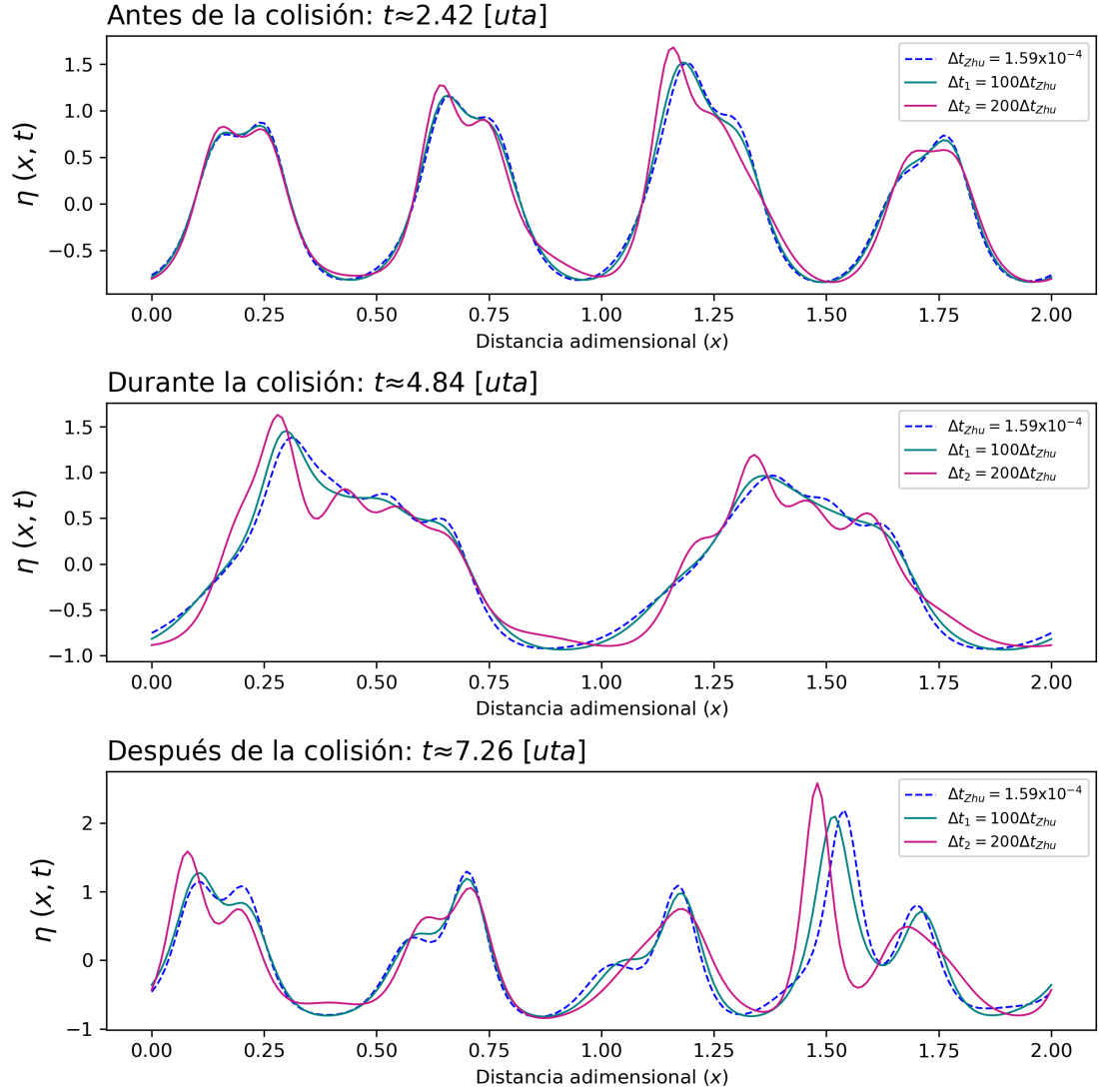
**Figura 4.3:** Generación del primer solitón y su evolución con distintos  $\Delta t$ , considerando el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson



**Figura 4.4:** Hovmöller de  $\eta$  para primera colisión múltiple, considerando el esquema de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t_{Zhu}$



En la figura (4.5) podemos verificar que, durante las colisiones múltiples, solo se nota que existen corrimientos en la fase de los solitones. Tomando este resultado en cuenta, junto con el resultado de la figura (4.1) podemos comprobar que, en los tiempos de esta primera colisión, no se muestran cambios sutanciales en las tres constantes de movimiento  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$ .



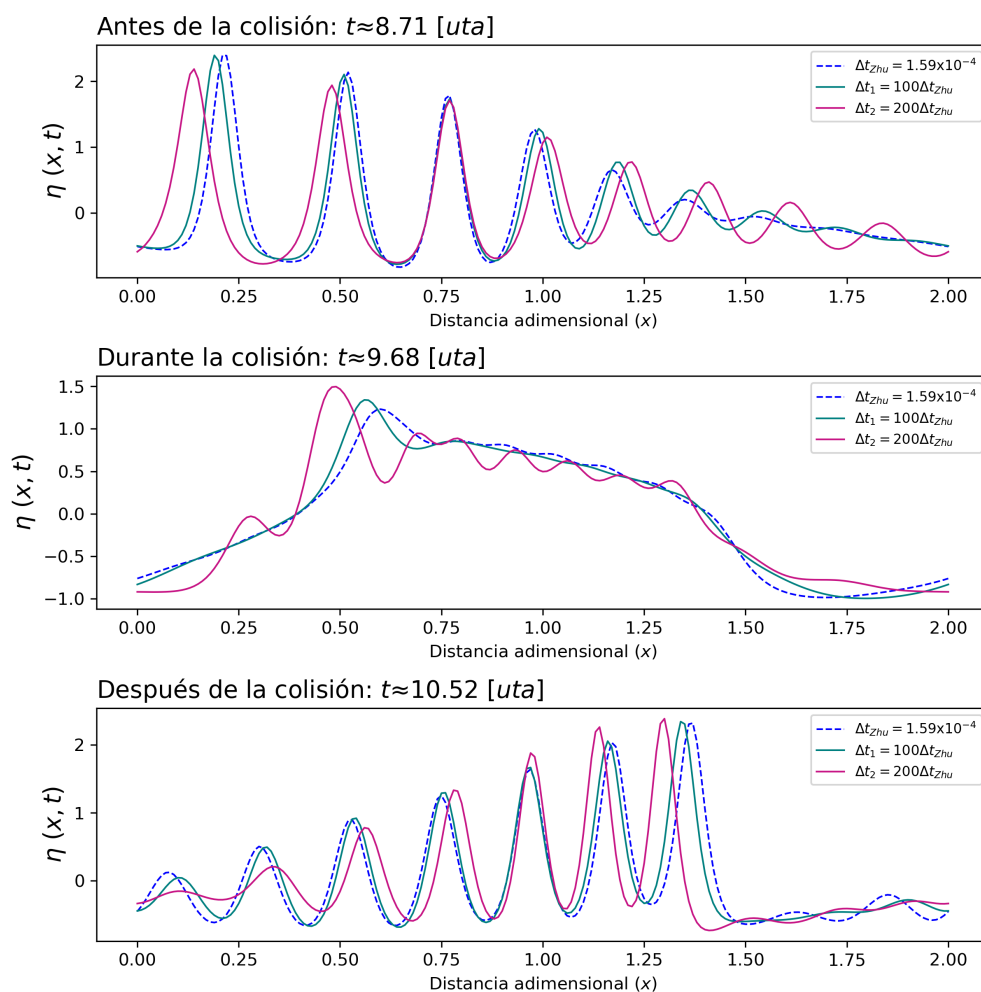
**Figura 4.5:** Evolución de la primera colisión múltiple de solitones. Gráfica generada con las salidas del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, comparando distintos  $\Delta t$

De (4.5) se puede ver que la estabilidad del esquema de Zhu-Newton-Raphson es muy aceptable, incluso para pasos de tiempo muy grandes. Esto puede confirmarse en las gráficas de la evolución de los solitones con el paso de tiempo más ancho



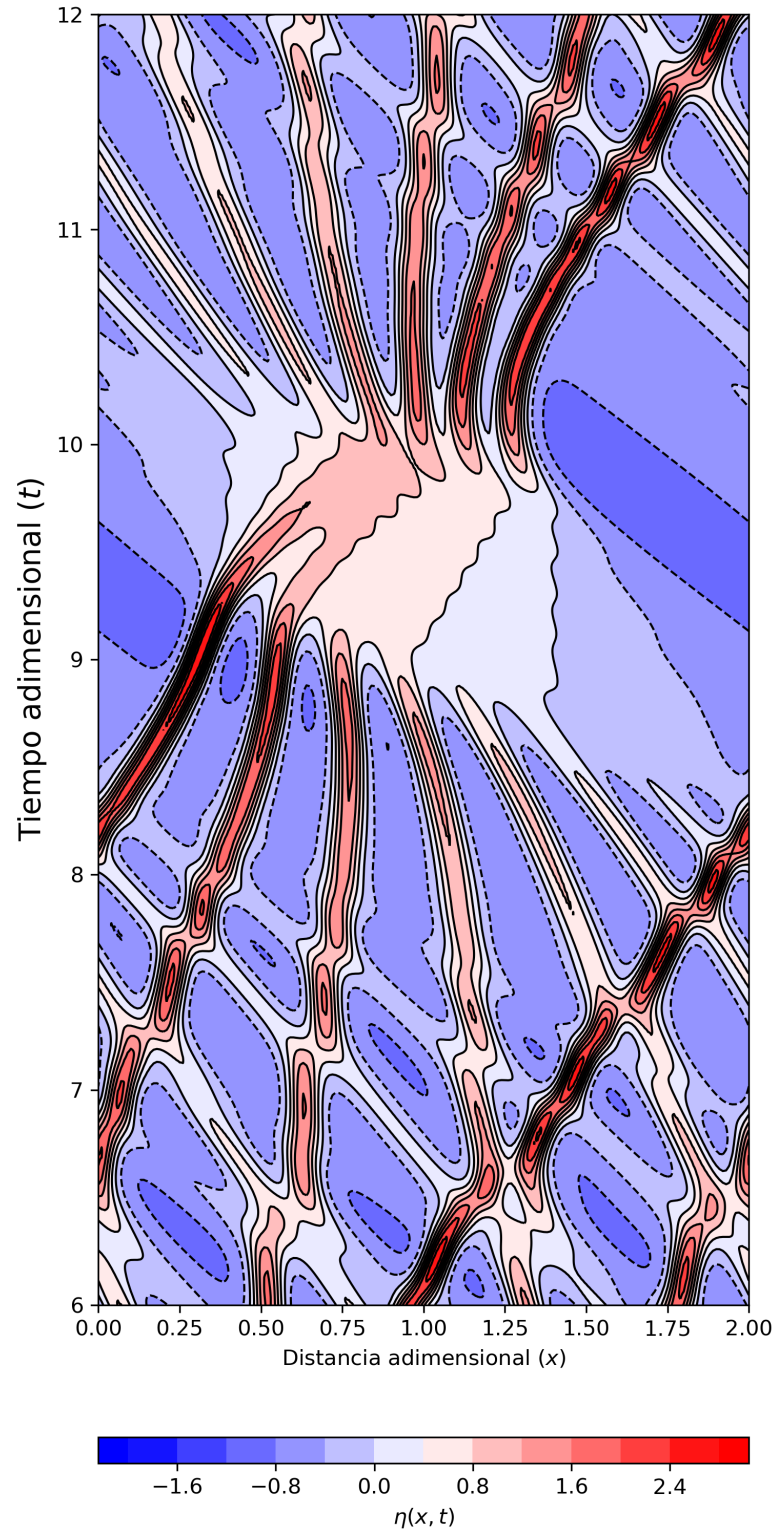
#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

$\Delta t_2 = 200\Delta t_{Zhu}$ , de donde incluso, aunque hemos forzado a no converger la solución del esquema de Zhu-Newton-Raphson a la analítica debido a pasos de tiempo excesivamente grandes, el esquema es más estable que los esquemas explícitos. Por tanto, aunque el esquema llegue a perder estabilidad y presente corrimientos de fase entre los distintos pasos de tiempo, continúa simulando bien el comportamiento de los solitones, y mantiene un buen desempeño de integración.



**Figura 4.6:** Evolución de la segunda colisión múltiple de solitones. Gráfica generada con las salidas del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, comparando distintos  $\Delta t$

La figura (4.6) refuerza lo expuesto en el párrafo anterior, ya que podemos ver la evolución de los solitones justo antes, durante y después de la colisión de todos los solitones. Vemos que cada uno de los solitones que se generaron en la figura (4.3) han colisionado entre todos, cada uno de ellos conservando sus formas, amplitudes y continúan su camino con las mismas velocidades que iniciaron.



**Figura 4.7:** Hovmöller de  $\eta$  para primera colisión múltiple, considerando el esquema de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t_{Zhu}$

La figura (4.7) es un acercamiento de la segunda región de colisiones múltiples, con  $t \in [6, 12]$ , de la figura (4.2). El análisis de este diagrama demuestra que, en efecto, el esquema implícito, utilizado en esta tesis, permite la integración por largos periodos de tiempo, conservando la convergencia del esquema de Newton-Raphson.

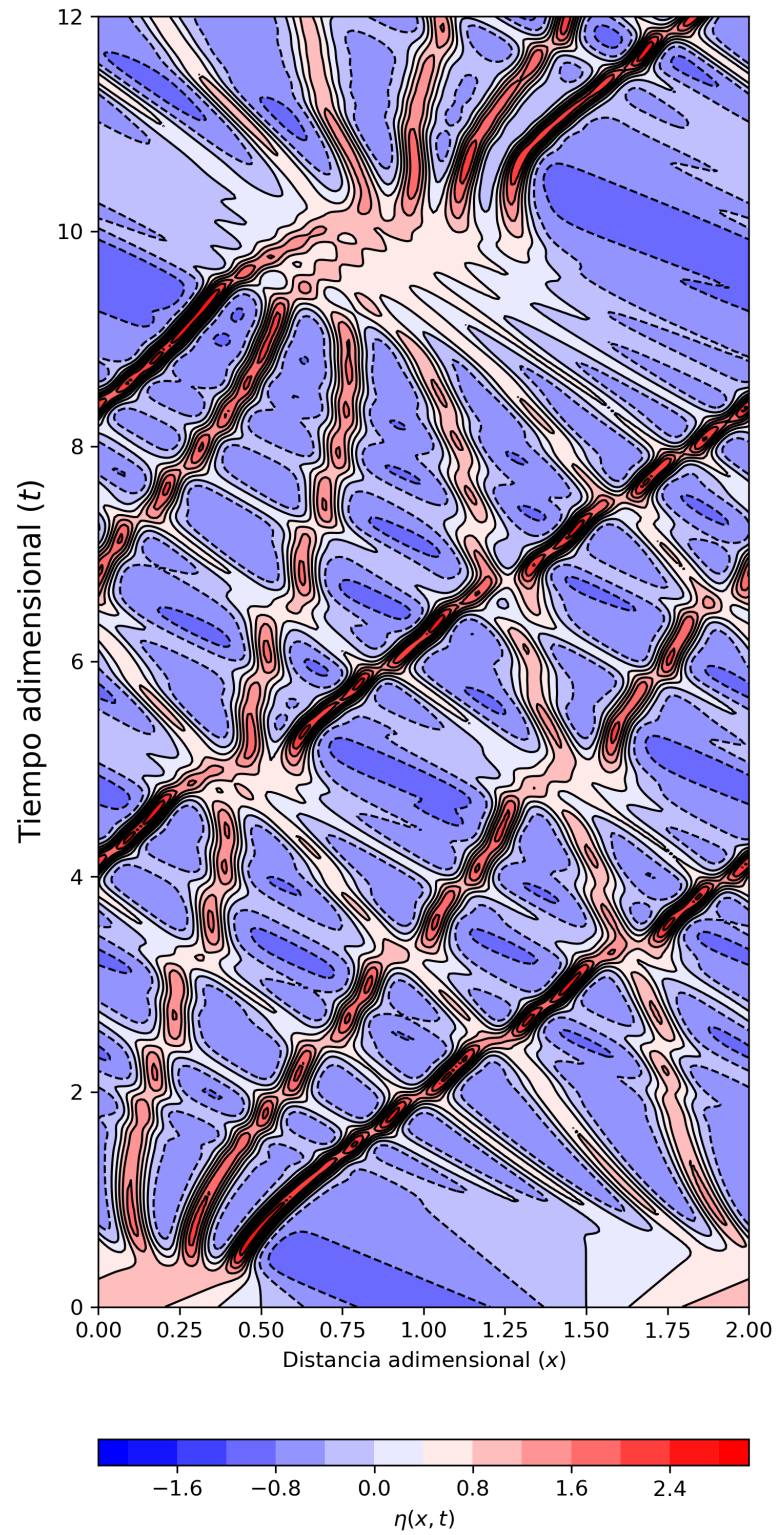
En la siguiente sección se muestra el resultado del diagrama de Hovmöller para el esquema de Zhu-Newton-Raphson, con un paso de tiempo doscientas veces mayor que el paso de tiempo de control,  $\Delta t_{Zhu}$ , en el cuál se puede observar que hay un buen desempeño para integrar por largos periodos de tiempo, conservando la estabilidad numérica. Además, junto con la figura (4.6), nuevamente reafirmamos que la no linealidad cuadrática del término advectivo ( $\eta\eta_x$ ) permite múltiples colisiones de solitones, sin generar difusión numérica de los mismos. Lo anterior es evidente en la figura (4.7) donde, al tiempo  $t \approx 9.68 [uta]$ , colisionan todos los solitones que se generaron al tiempo  $t \approx 1.15 [uta]$ .

## 4.2. Comparación del esquema implícito contra los explícitos

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la comparación entre el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson contra los esquemas explícitos de: (1) Zabusky y Kruskal (1965), (2) Walkley y (3) Lax-Wendroff. Para los tres esquemas explícitos se usaron pasos de tiempo diez veces más pequeños que el  $\Delta t_{Zhu}$ . En (4.8) se visualiza la salida del diagrama de Hovmöller para el esquema de Zhu-Newton-Raphson, evaluado en  $t \in [0, 12]$ , con un paso de tiempo doscientas veces mayor que el paso de tiempo de control ( $\Delta t_{Zhu}$ ). De esta gráfica podemos ver que el comportamiento de los solitones también se muestra estable aunque, como vimos en la figura (4.1), hemos forzado al esquema a presentar errores de convergencia y, aunado a lo anterior, es evidente que hay una pérdida de resolución en el tiempo.

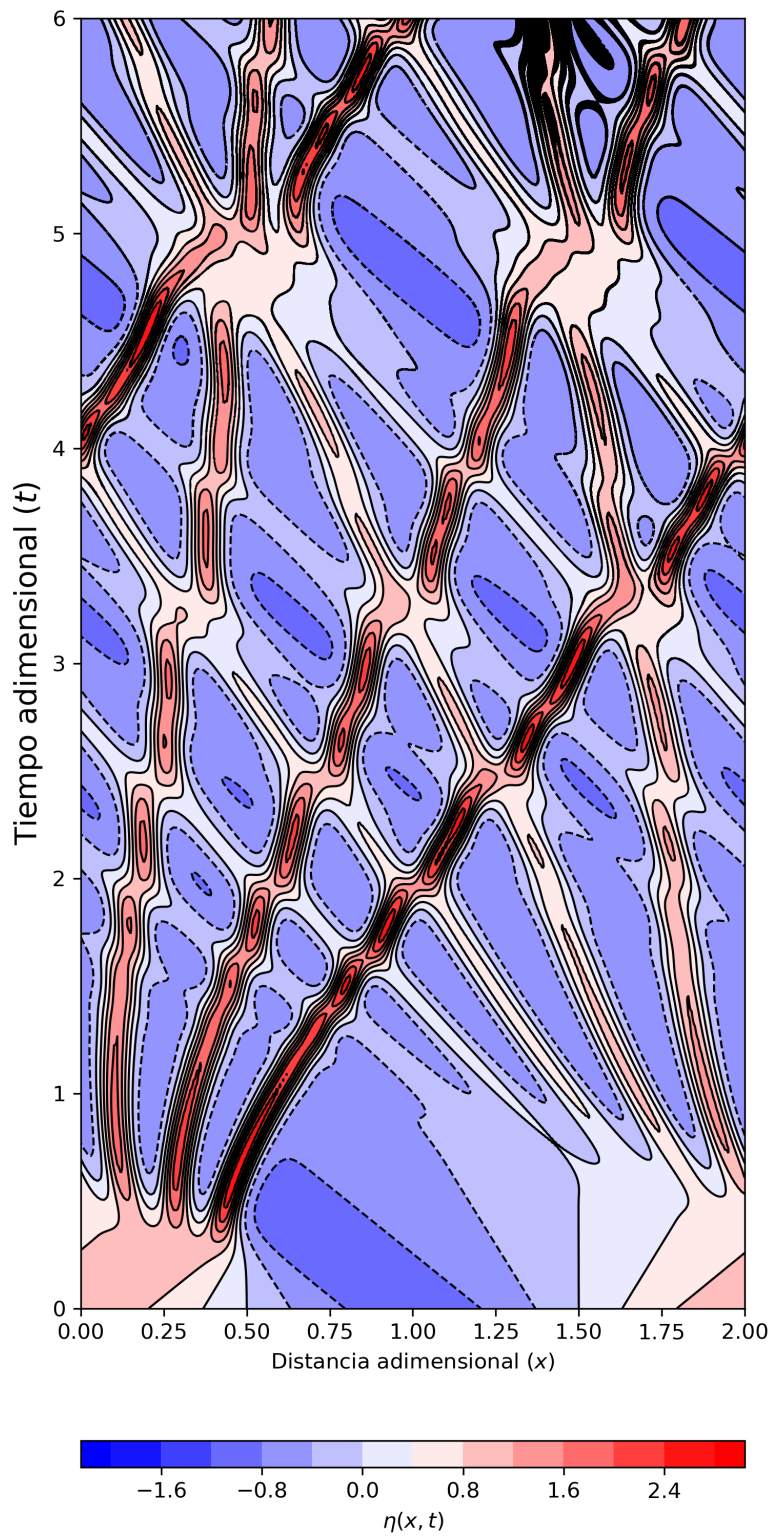
Ahora bien, con respecto a los esquemas explícitos, es importante mencionar que únicamente se graficaron los resultados para  $t \in [0, 6]$ , ya que los tres esquemas presentaron inestabilidades numéricas importantes dentro de este intervalo de tiempo, como se discutirá en los siguientes párrafos.

De la figura (4.12) se puede ver claramente que los esquemas de Walkley y Lax-Wendroff no pudieron simular  $\eta(x, t)$  para periodos de tiempo comparables con el esquema de Zhu-Newton-Raphson. Esto se puede comprobar fácilmente con sus diagramas Hovmöller (4.12). En ellos vemos que ambos esquemas no fueron capaces de simular la solución numérica más allá de  $t = 1 [uta]$  y pierden estabilidad inmediatamente después de la generación de los solitones. Por otro lado, dados los resultados mostrados en la figura (4.12), vemos que no consiguen conservar ninguna de las tres cantidades de movimiento, con lo cual se puede aseverar que estos esquemas no toleran las interacciones no-lineales que conlleva la KdV.

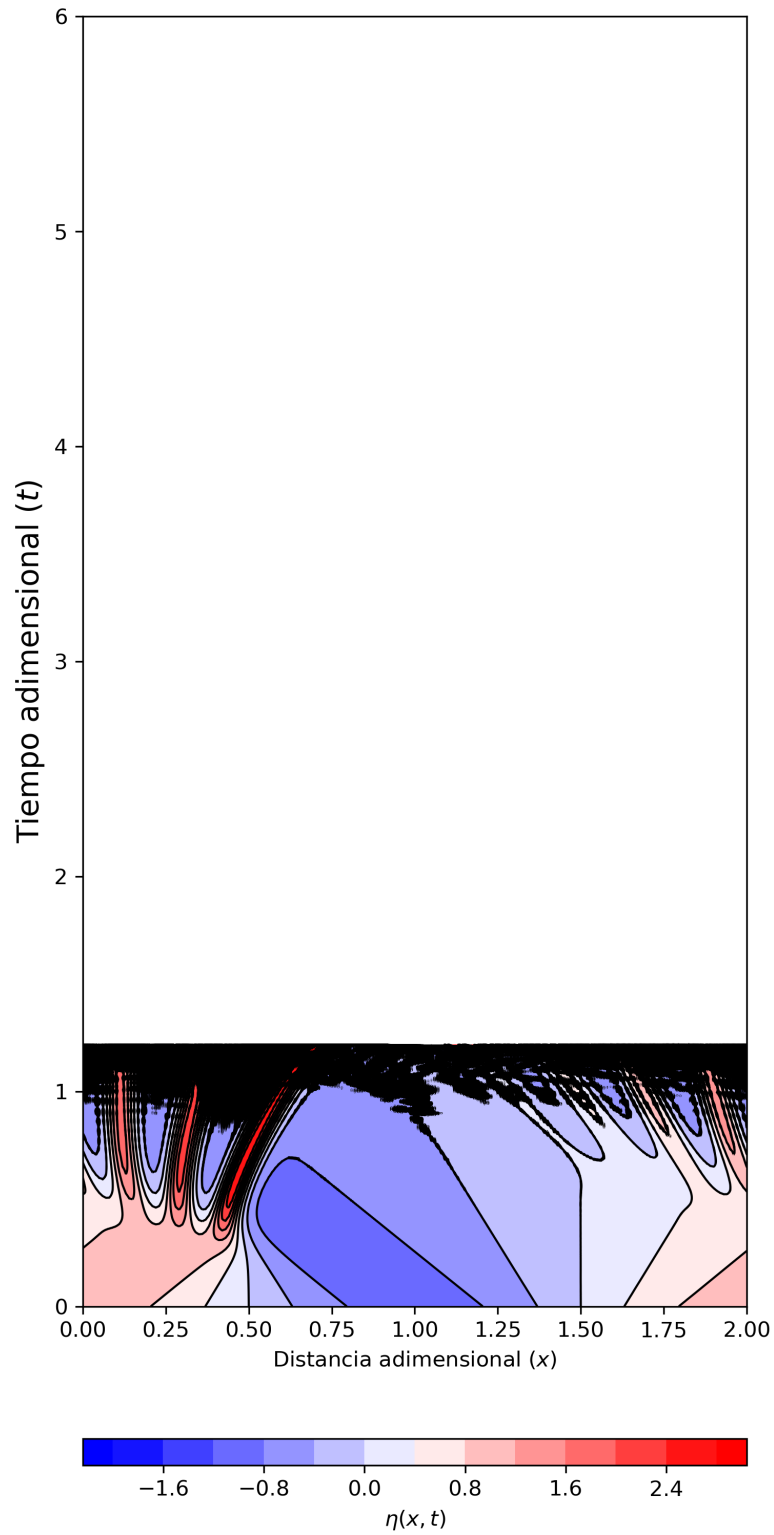


**Figura 4.8:** Hovmöller de  $\eta$ , considerando el esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$





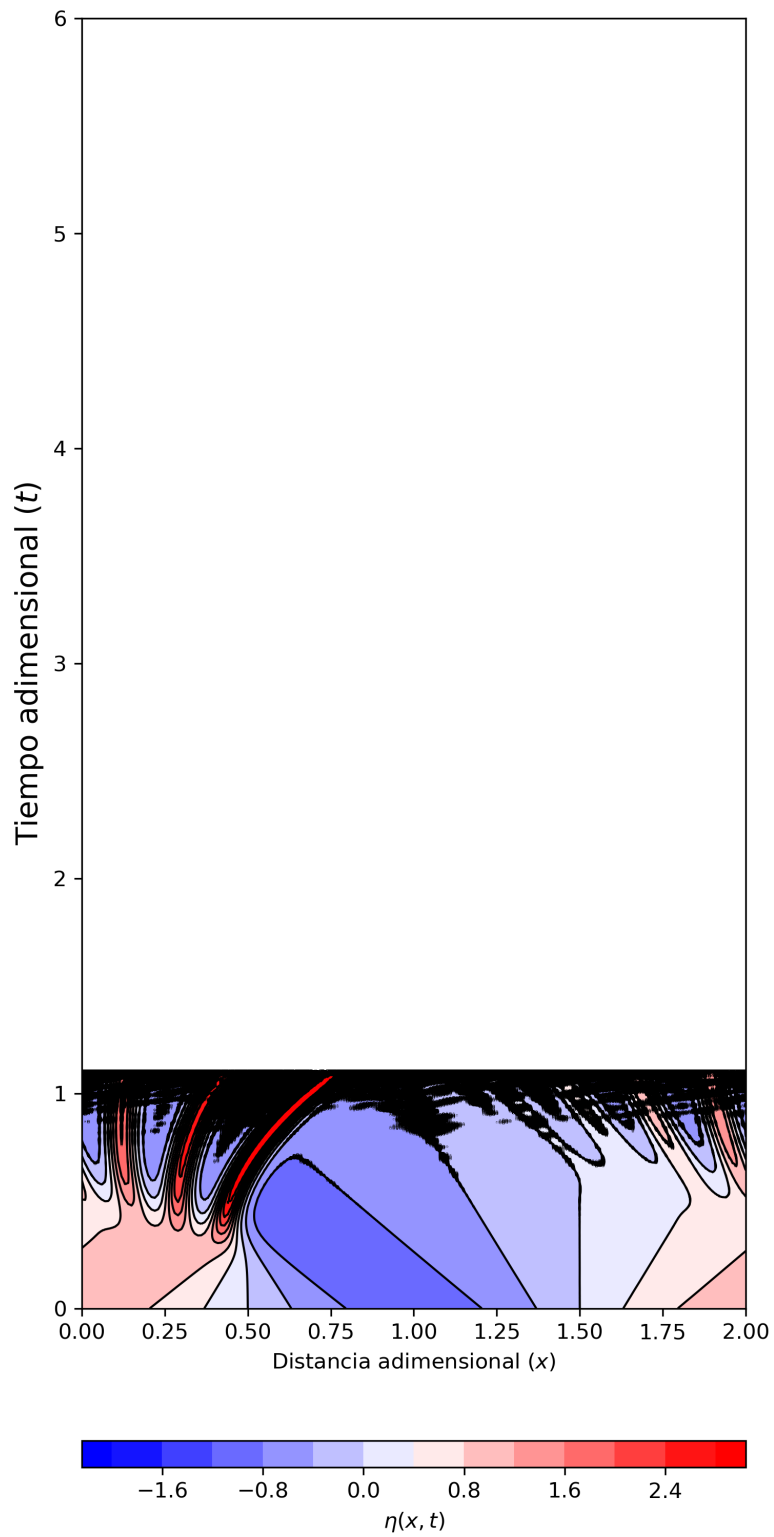
**Figura 4.9:** Hovmöller de  $\eta$ , considerando el esquema explícito de Zabuzky-Kruskal (1965), a un  $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$



**Figura 4.10:** Hovmöller de  $\eta$ , considerando el esquema explícito de Walkley, a un  $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$

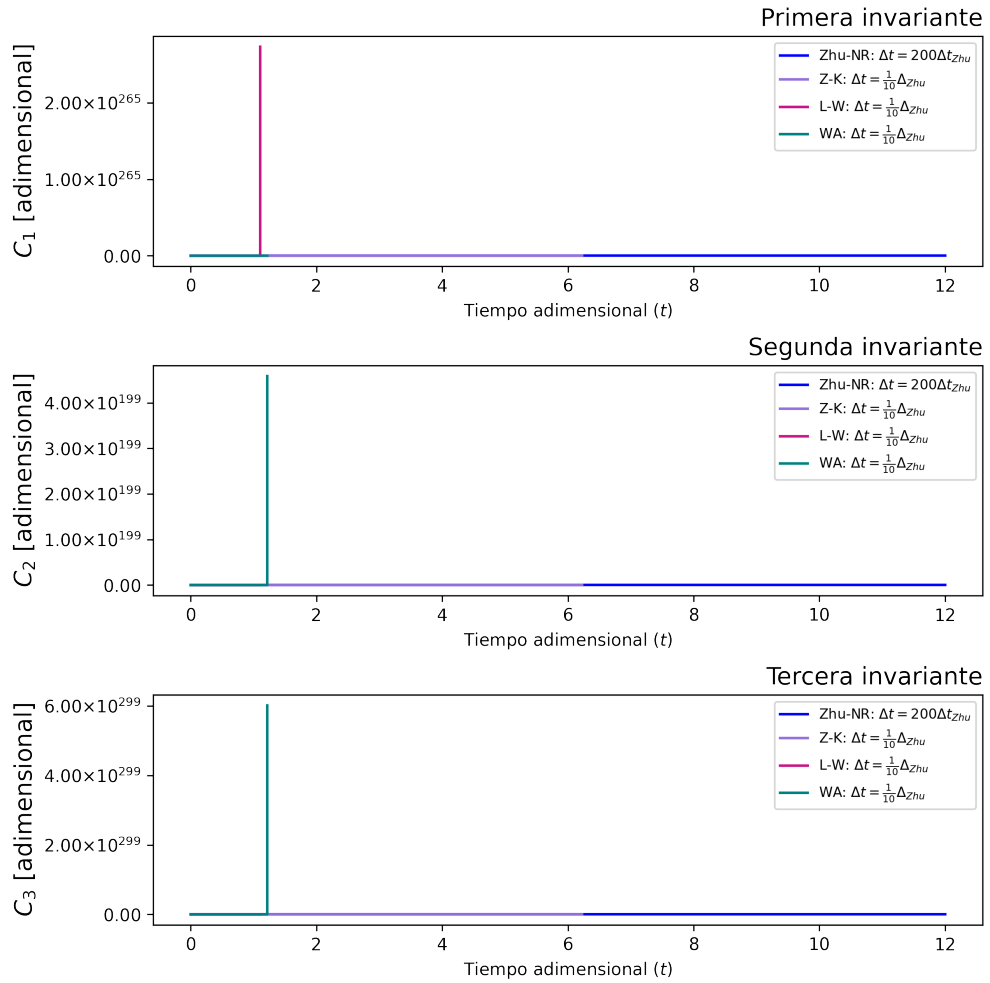
#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---



**Figura 4.11:** Hovmöller de  $\eta$ , considerando el esquema explícito de Lax-Wendroff, a un  $\Delta t = \frac{1}{10} \Delta t_{Zhu}$

La figura (4.9) corresponde al diagrama de Hovmöller de  $\eta$  para el esquema de Zabuzky y Kruskal (1965). En ella se puede ver que este esquema tuvo el mejor desempeño, comparado con los esquemas de Walkley (figura 4.10) y Lax-Wendroff (figura 4.11), logrando una integración temporal cercana a  $t = 6$  [uta]; sin embargo, de la figura (4.15) vemos que la generación e interacción entre solitones detonan inestabilidades en la integración de los esquemas explícitos, y dichas inestabilidades crecen hasta el punto en el que se viola la tolerancia de los esquemas para continuar la integración de la KdV.



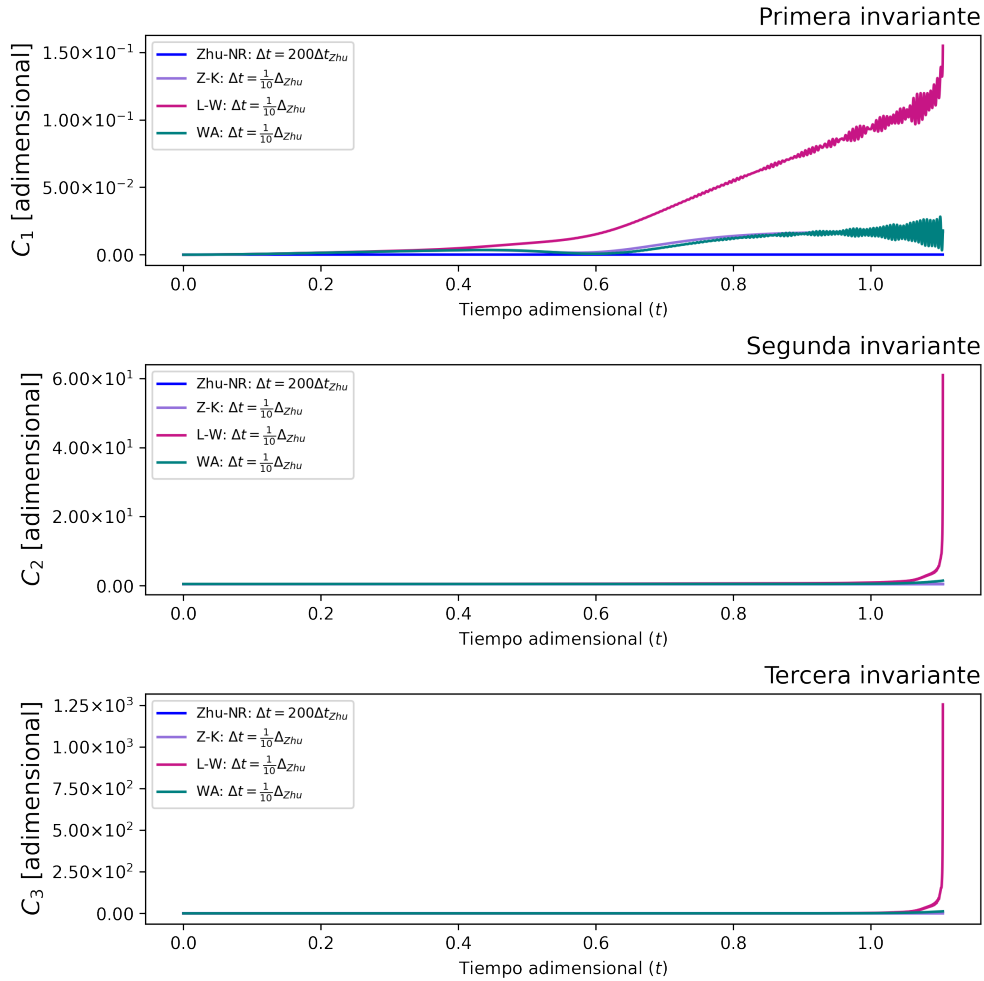
**Figura 4.12:** Conservación numérica de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ , contra los esquemas explícitos integrados con un  $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$

Una inspección cuidadosa de (4.12) nos permite confirmar que los esquemas explícitos no toleran de forma eficiente el comportamiento no lineal de la KdV. Esto puede



#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

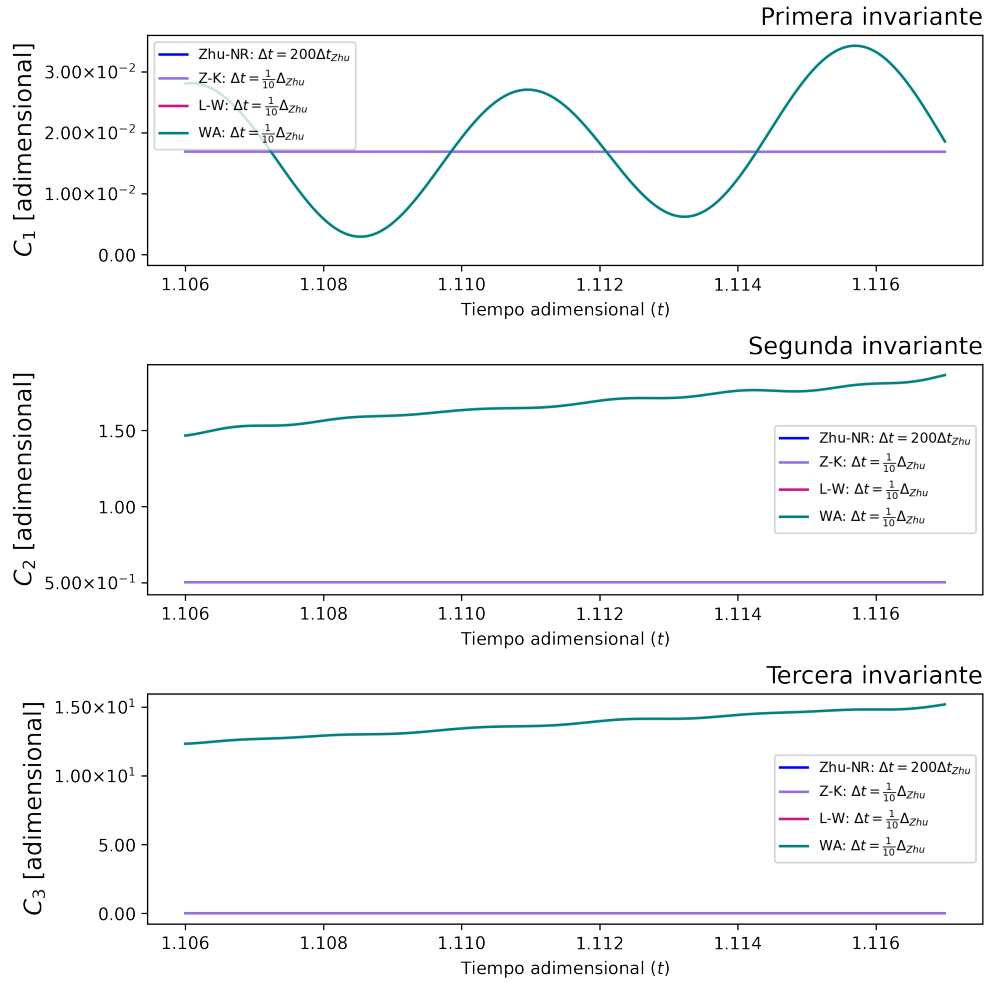
confirmarse mediante las figuras (4.13) y (4.14). En la figura (4.13) observamos que el esquema explícito de Lax-Wendroff es el primero en presentar errores numéricos que desestabilizan el esquema. Esto ocurre aproximadamente a partir de  $t = 0.2$ , tiempo con el que coincide la generación del primer solitón, y el esquema colapsa en  $t \approx 1.1$ . De igual manera, vemos que no se conserva ninguna de las invariantes, con lo que podemos confirmar que este esquema no es útil para el estudio de la KdV, pues no tolera siquiera la generación de los solitones, afirmación que se comprueba con la figura (4.11)



**Figura 4.13:** Acercamiento en  $t \in [0.0, 1.1]$  a  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ , contra los esquema explícitos, con un  $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$

Ahora bien, de las figuras (4.12) y (4.13) podemos ver que los esquemas explícitos de Zabuzky-Kruskal (1965) y Walkley aparentan tener un comportamiento similar luego de la generación del primer solitón; sin embargo, dicha dinámica generó una inestabilidad

numérica en el esquema de Walkley, situación que puede cotejarse en la figura (4.14). En dicha figura se puede apreciar que, inmediato al tiempo de generación de los solitones, el esquema de Walkley genera un error numérico que se reproduce y expande hasta  $t \approx 1.2$ , tiempo en el cual el cómputo del esquema colapsa. De lo anterior se infiere que este esquema tampoco tolera la propiedad no lineal de la KdV, situación que puede verificarse con la figura (4.10)

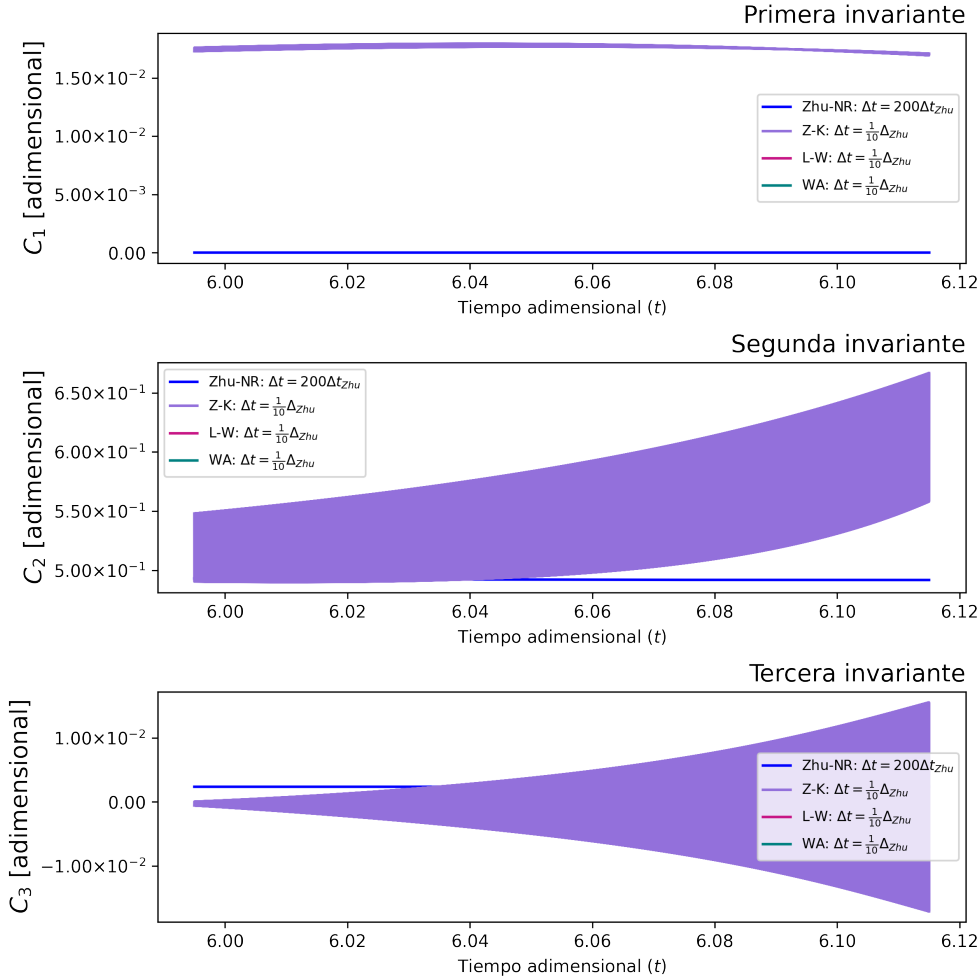


**Figura 4.14:** Acercamiento en  $t \approx 1.1$ , a  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ , contra los esquema explícitos, con un  $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$

Por otro lado, en la figura (4.12) hemos visto que el esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965) logra calcular  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  hasta  $t \approx 6.1$ . En la gráfica (4.15) comprobamos que las invariantes de la KdV han generado un error numérico a un tiempo inmediato después de la primer colisión múltiple de solitones. Si bien, de la literatura

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

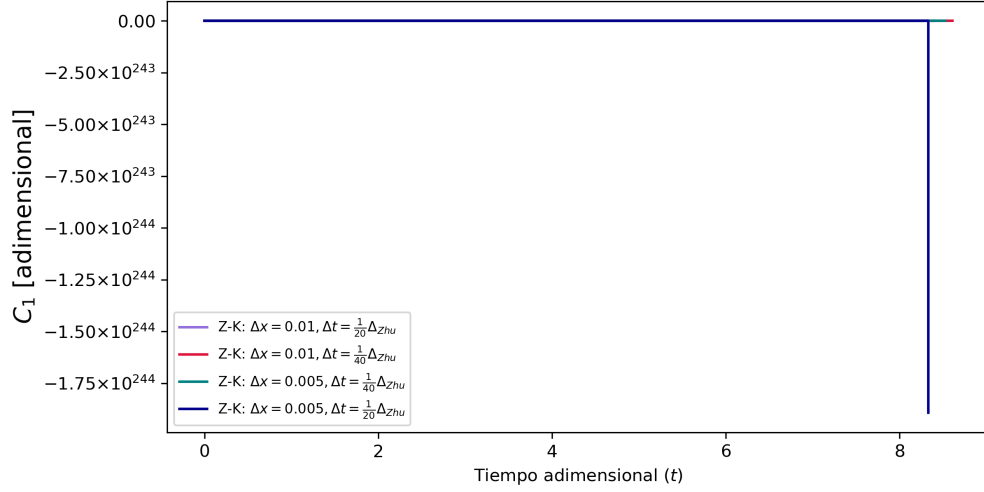
se ha demostrado que el esquema de Zabuzky y Kruskal (1965) no conserva ni  $\mathcal{C}_2$  ni  $\mathcal{C}_3$ , por lo menos sí conserva explícitamente  $\mathcal{C}_1$ . Si analizamos la figura (4.15), se puede suponer que  $\mathcal{C}_1$  no se conserva, lo cual supone una incongruencia entre la teoría establecida por Zabuzky y Kruskal y el análisis experimental de este esquema.



**Figura 4.15:** Acercamiento en  $t \approx 6$  a  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , obtenidos del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a un  $\Delta t = 200\Delta t_{Zhu}$ , contra el esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), a un  $\Delta t = \frac{1}{10}\Delta t_{Zhu}$

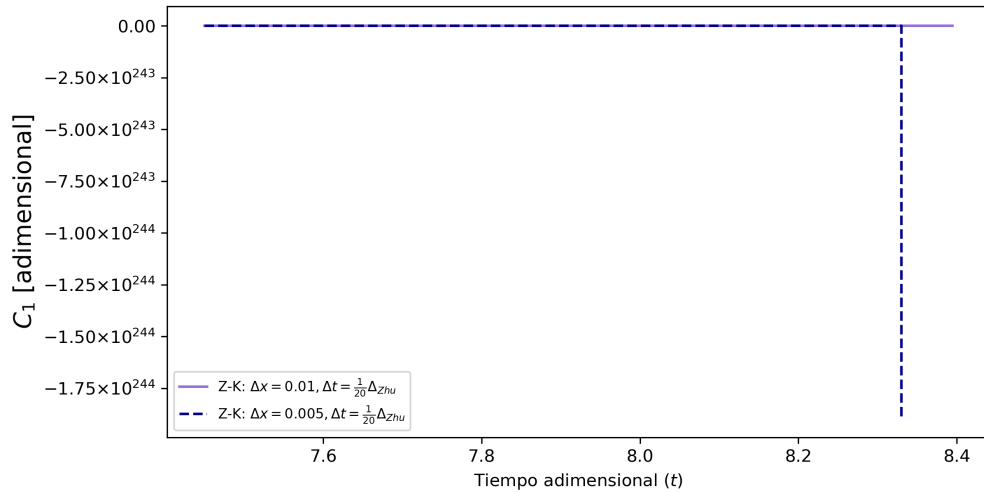
Para comprobar numéricamente la conservación de  $\mathcal{C}_1$ , se llevaron a cabo cuatro experimentos más para el esquema de Zabuzky y Kruskal, en los cuales se compararon las integraciones con distintos pasos de tiempo (tal como puede observarse en la tabla 1.2). El fin de dichos experimentos consistió en estudiar la convergencia del esquema numérico de Zabuzky y Kruskal (1965) a la solución numérica de la KdV. Dado que los análisis de estabilidad no lineales salen de los límites de esta tesis, se buscó hacer este

estudio de manera experimental, modificando los parámetros de integración de dicho esquema e integrando de 0 a 12. En las siguientes gráficas se observan los resultados obtenidos:



**Figura 4.16:** Conservación de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$  de la KdV, mediante el esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), con diferentes pasos de tiempo

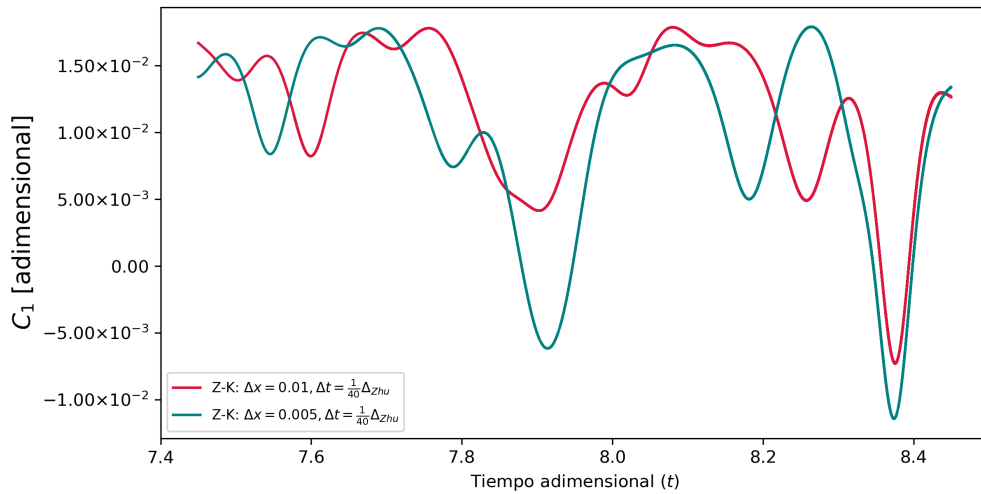
De la figura (4.16) vemos que el esquema de Zabuzky y Kruskal (1965) no llega más allá de un tiempo aproximado a 8.4. Podemos apreciar que este esquema comienza a ser inestable, por lo menos, desde un tiempo aproximado a 7.4, siendo menos eficientes los experimentos llevados a cabo con los pasos de tiempo menores.



**Figura 4.17:** Acercamiento a  $\mathcal{E}_1$ , del esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), para  $\Delta t = \frac{1}{20} \Delta t_{Zhu}$

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

De un acercamiento a los experimentos con  $\Delta t = \frac{1}{20}\Delta t_{Zhu}$ , vemos en la gráfica (4.17) que el primer experimento en colapsar fue el que inicializamos con  $\Delta x = 0.005$ , lo cual nos daría un indicio de la condición de estabilidad que se requiere para que el esquema de Zabuzky y Kruskal sea estable. Ahora bien, con los experimentos mostrados en la figura (4.18), podemos ver que la conservación de  $C_1$  llega hasta poco después de  $t \approx 8.4$ , haciendo uso de un  $\Delta t = \frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$  y, nuevamente vemos que necesitamos un  $\Delta x$  “ancho” y un paso de tiempo muy pequeño para poder calcular  $\mathcal{C}_1$  por más tiempo; sin embargo, persisten las variaciones en dicha cantidad.



**Figura 4.18:** Acercamiento a  $\mathcal{C}_1$ , del esquema explícito de Zabuzky y Kruskal (1965), para  $\Delta t = \frac{1}{40}\Delta t_{Zhu}$

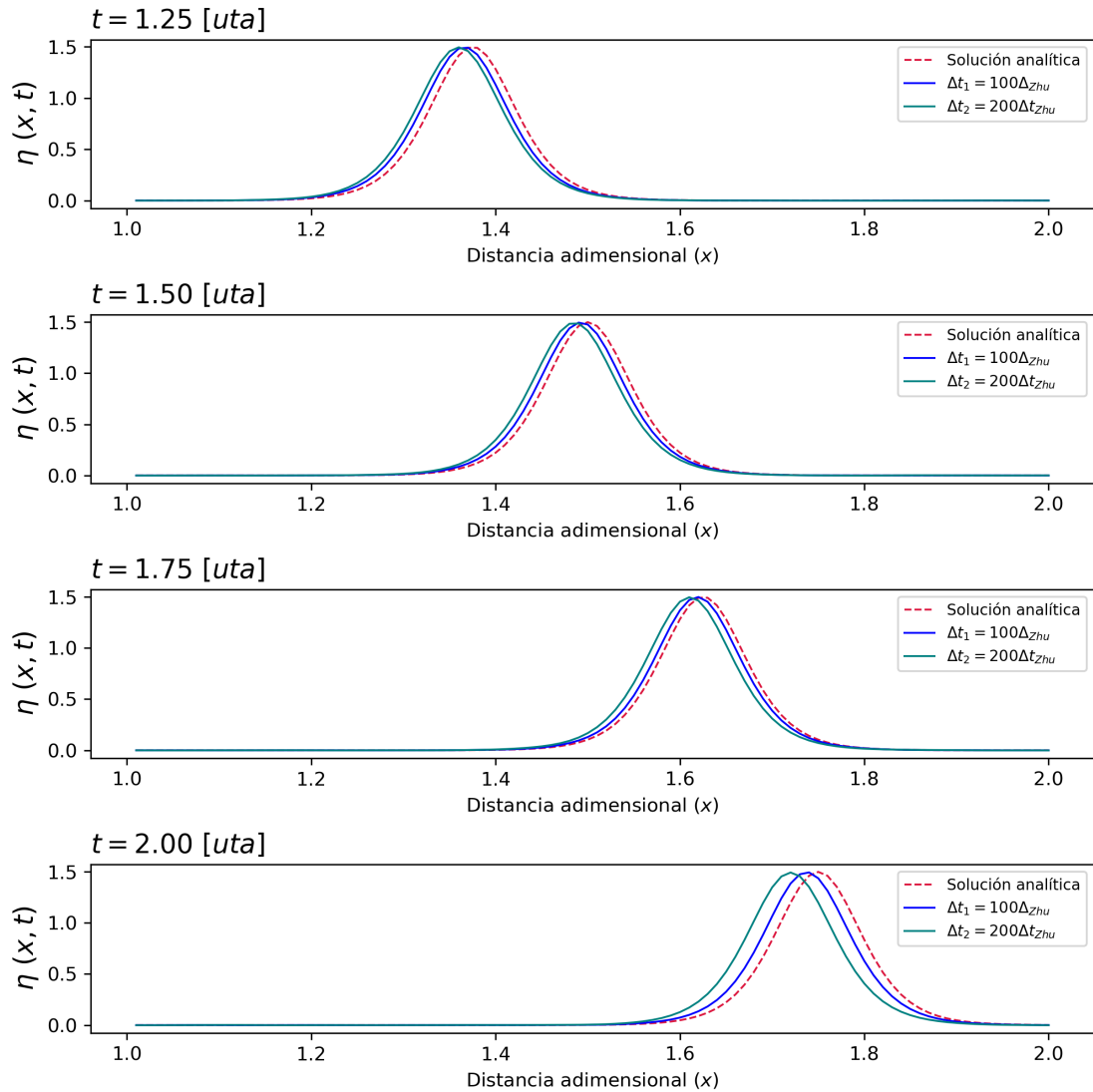
De los experimentos anteriores hemos visto que un paso de tiempo más pequeño permite una conservación de  $\mathcal{C}_1$  por tiempos más prolongados. Lo antes expuesto nos indica que la conservación de  $\mathcal{C}_1$  depende de la estabilidad del esquema numérico. Es decir, sí existe la conservación de esta cantidad; sin embargo si el esquema desarrolla errores numéricos durante el cómputo que se propaguen e inestabilicen al esquema, esto se verá reflejado también en las invariantes del movimiento. Dicho de otra manera, la conservación de  $\mathcal{C}_1$  es condicionalmente estable y depende de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ .

### 4.3. Prueba numérica de convergencia del esquema Zhu-Newton-Raphson

A continuación se muestra el último resultado de los experimentos llevados a cabo en este proyecto. En la figura (4.19) se muestra el resultado de la integración de la KdV, tomando como condición inicial su solución analítica. La línea roja punteada de la

### 4.3 Prueba numérica de convergencia del esquema Zhu-Newton-Raphson

gráfica (4.19) es la solución analítica, para ser comparada con la solución numérica del esquema de Zhu-Newton-Raphson. En la primera sección de este apartado fue mostrado



**Figura 4.19:** Solución analítica de la KdV comparada con la solución numérica del esquema implícito de Zhu-Newton-Raphson, a distintos pasos de tiempo

que el esquema de Zhu-Newton-Raphson posee una convergencia cuadrática no-lineal, por este motivo, se realizó la integración del esquema con los pasos de tiempo más grandes:  $\Delta t_1 = 100\Delta t_{Zhu}$  y  $\Delta t_2 = 200\Delta t_{Zhu}$ , con la seguridad de que el esquema se mantendría estable. Dado que las solución analítica no es periódica, se decidió realizar la comparación en el intervalo  $x, t \in [1, 2], [0, 12]$ . En la figura (4.19) se muestra la evolución de las soluciones en el dominio  $L \in [0, 2]$ , para los tiempos  $t = 1.25, t =$

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

1.50,  $t = 1.75$ , y  $t = 2.00$ .

Por último, un análisis exhaustivo de la figura (4.19), muestra que el esquema de Zhu-Newton-Raphson tuvo un excelente desempeño para reproducir la solución analítica de manera estable y por periodos largos de tiempo; sin embargo, vemos que, entre más grande es el paso de tiempo, las soluciones comienzan a “atrasarse”, y ese efecto está asociado a la pérdida de resolución temporal, como se mencionó anteriormente.

## Conclusiones

---

Del análisis de resultados obtenidos en la tesis se resume lo siguiente:

- ✂ El método de Newton-Raphson asegura la convergencia numérica a la solución analítica de la KdV y permite que el esquema sea incondicionalmente estable, lo cual nos facilita explorar el cómputo de los esquemas numéricos por periodos de tiempo más largos que los esquemas explícitos estudiados en esta tesis.
- ✂ Si bien un número infinito de cantidades conservativas implica una aproximación muy restringida e idealizada de la KdV (lo cual genera un sistema “artificial”, alejado de la realidad), los resultados que obtuvimos en este estudio fueron un buen ejercicio numérico para entender la fenomenología de los solitones y las aplicaciones que estos pueden tener en los fluidos geofísicos y la dinámica oceánica.
- ✂ Del análisis de resultados obtenidos del método de Zhu-Newton-Raphson, es evidente que, en realidad, el costo computacional que debemos pagar para integrar la KdV con este esquema es aceptable, dado que posee las siguientes ventajas sobre los esquemas explícitos estudiados en la tesis:
  1. Dado que la convergencia del método de Newton-Raphson es cuadrática, bastó con utilizar dos iteraciones de dicho método para integrar de manera más eficiente la KdV por periodos de tiempo más extensos de lo que toleran los esquemas explícitos. Con ello, podemos asegurar que esta aproximación permite la integración numérica por periodos muy largos de tiempo, haciendo uso de pasos de tiempo “mayores” de lo que requeriría un esquema explícito. Esto nos da la ventaja de realizar corridas largas sin que el esquema presente inestabilidades numéricas.
  2. De los diagramas Hovmöller podemos ver que la conservación numérica de cantidades de movimiento resultó ser un buen criterio para asegurar la estabilidad numérica de nuestro esquema. En particular, la conservación de  $\mathcal{C}_1$ , junto con  $\mathcal{C}_3$ , al ser una propiedad que se desprende de la KdV, hacen



## 5. CONCLUSIONES

---

constar que el esquema de Zhu-Newton-Raphson es consistente con la solución analítica de la KdV, con lo cual podemos asegurar iteraciones largas sin perder estabilidad.

3. Otra de las virtudes que demostró este esquema es su capacidad para reproducir de manera idéntica el comportamiento de la solución analítica de la KdV, presentando como única desventaja el corrimiento de fase asociado a los distintos pasos de tiempo. Con lo cual, podemos decir que se comprobó (por lo menos, de forma experimental) la convergencia de este esquema a la solución analítica de la KdV.

✂ Del esquema de Zabuzky y Kruskal se concluye que, computacionalmente, es mucho más costoso que el esquema de Zhu-Newton-Raphson, ya que requirió un paso de tiempo cuarenta veces menor que el paso de tiempo de control utilizado en el método de Zhu-Newton-Raphson, para integrar la KdV solamente hasta  $t \approx 8$ , con la aparición de un error numérico desde, aproximadamente,  $t = 6.0$ . Cabe recordar que este esquema fue diseñado en un tiempo en el que las herramientas computacionales eran escasas y el diseño de esquemas numéricos más robustos era muy costoso para esa época. Si bien, el esquema de Zabuzky y Kruskal demanda un alto costo computacional, fue un gran avance para el estudio de los sistemas no lineales, pues dicho estudio permitió comprobar de manera teórica la existencia de solitones mediante la ecuación KdV y demostrar la interacción no lineal que involucra este sistema.

✂ Aunque en la serie de experimentos realizados con el esquema de Zhu-Newton-Raphson pareciera ser que el definido con un paso de tiempo doscientas veces mayor que el control (8000 veces mayor que el  $\Delta t$  más fino utilizado en Zabuzky y 2000 veces mayor que el utilizado en Walkley y Lax-Wendroff), logra preservar de manera global  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_3$  de una manera mucho más eficiente que los esquemas explícitos.

✂ Aparentemente, existe una relación entre la conservación de  $\mathcal{E}_2$  con los corrimientos de fase de las soluciones numéricas del esquema Zhu-Newton-Raphson. Se propone, como trabajo a futuro, probar esta hipótesis.

En conclusión, hemos comprobado la eficiencia del método propuesto en esta tesis para resolver numéricamente la KdV y resultó tener un desempeño mucho mejor que los esquemas explícitos revisados en la literatura. La principal ventaja de este esquema sobre los otros es que tolera pasos de tiempo mucho mayores que los esquemas explícitos, sin perder estabilidad. Es decir, con una buena elección de parámetros para la discretización de Zhu, así como un número razonable de iteraciones de Newton-Raphson, el esquema puede competir fácilmente contra los demás esquemas, sin generar errores numéricos que desestabilicen el cómputo de la solución. Cabe recordar que también es importante considerar el equipo de cómputo con el que se corra el esquema, pues de ello dependerá la agilidad del tiempo de cómputo que tome la integración del esquema.

---

Se concluye también que la conservación de  $\mathcal{E}_3$  es un buen criterio para asegurar que nuestro esquema es estable. Aunado a lo anterior, se demostró también la consistencia de este método, con lo cual podemos concluir que el método propuesto en esta tesis converge a la solución analítica de la KdV unidireccional y adimensional.

Actualmente existen métodos más complejos (como los métodos espectrales o el de elemento finito), que han demostrado tener un buen desempeño para estudiar sistemas como la KdV. No obstante, dichos métodos requieren de conocimientos que salen del alcance de los obtenidos hasta el momento de realizar esta tesis. Por ello considero que este proyecto fue un ejercicio que me ha dejado satisfecho, ya que se ajustó a mis capacidades y posibilidades en cuanto a conocimientos adquiridos en la licenciatura, al mismo tiempo que me permitió obtener nuevos, y explorar nuevas áreas de la ciencia y adquirir conocimientos en programación.

Si bien, este proyecto se llevó a cabo con la forma más ideal de la KdV, los resultados obtenidos de los experimentos fueron mejor que los esperados, pues se codificó un esquema que no solamente permite la integración numérica de la KdV por periodos largos de tiempo, sino que asegura la convergencia a la solución analítica. Lo anterior indica que este esquema puede llevarse a la práctica en zonas donde podemos dispensar de incluir más términos de las ecuaciones de movimiento, como en canales, estuarios o estrechos, donde podemos reducir las ecuaciones de movimiento y hacer un estudio simplificado, pero que nos dé información importante de la incidencia de solitones en dichas zonas, y comparar mediciones *in situ* de variables como la velocidad, temperatura o la altura de la superficie libre y, así, contrastar el desempeño del esquema con la realidad, para el estudio de solitones en sistemas de aguas someras.

Como trabajo a futuro se propone extender este esquema a un estudio con la KdV en su forma dimensional para probar su desempeño en un sistema real.



## Referencias

---

- Ali, A. y Kalisch, H. (2014). «On the formulation of mass, momentum and energy conservation in the KdV equation». En: *Acta Applicandae Mathematicae* 133, págs. 113-131.
- Alpers, W. y Salusti, E. (1983). «Scylla and Charybdis Observed from Space». En: *Journal of Geophysical Research: Oceans* 88.C3, págs. 1800-1808.
- Apel, J. R. (1988). «Geophysical Fluid Dynamics I: Waves and Tides». En: *Principles of Ocean Physics*. Ed. por Renata Dmowska y James R., Holton. Vol. 38. International Geophysics. Londres: Academic Press, págs. 161-246.
- Apel, John R. (2003). «A New Analytical Model for Internal Solitons in the Ocean». En: *Journal of Physical Oceanography* 33.11, págs. 2247 -2269.
- Apel, J (2004). «Chapter 07: Oceanic Internal Waves and Solions». En: *Synthetic Aperture Radar — Marine User's Manual*. Ed. por Jackson, C. y Apel, J. Washington, D. C.: National Oceanic And Atmospheric Administration, págs. 189-206.
- Apel, J. R y Gonzalez, F. I. (1983). «Nonlinear Features of Internal Waves off Baja California as Observed from the SEASAT Imaging Radar». En: *Journal of Geophysical Research: Oceans* 88.C7, págs. 4459-4466.
- Arakawa, A. (1970). «Numerical simulation of large-scale atmospheric motions». En: *Numerical solution of field problems in continuum physics*. Vol. 2. Durham, N. C.: SIAM-AMS, págs. 24-40.
- Beaudin, E. y A. Bracco (abr. de 2022). «How Marine Heatwaves Impact Life in the Ocean». En: *Frontiers for Young Minds* 10, pág. 2.

- Brauer, K. (jun. de 2000). «The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation». En: *University of Osnabrück/Germany*.
- Brown, W. E, Elachi, C. y Thompson, T. W. (mayo de 1976). «Radar Imaging of Ocean Surface Patterns». En: *Journal of Geophysical Research* 81.15, págs. 2657-2667.
- Canada Center for Remote Sensing (s.f.). *Material Educativo para la Teledetección mediante Radares: Globe-SAR Program*. Revisado por última vez 02/04/2023. Disponible [[http://www.gep.uchile.cl/Biblioteca/Radar/gsarcd\\_s.pdf](http://www.gep.uchile.cl/Biblioteca/Radar/gsarcd_s.pdf)].
- Choi, W. (2000). «Modeling of Strongly Nonlinear Internal Gravity Waves». En: *Proc. of the 4th International Conference on Hydrodynamics*. Yokahoma, Tokio: ICHD, págs. 453-458.
- Correia, T. (abr. de 2018). *Final Project for AMPA 4301: Columbia University, N. Y.* Revisado por última vez 04/10/2023. Código GitHub abierto, disponible [[https://github.com/modessert/Numerical-Methods-KDV/blob/master/numerical\\_KDV.ipynb](https://github.com/modessert/Numerical-Methods-KDV/blob/master/numerical_KDV.ipynb)].
- Currie, I. (2016). *Fundamental Mechanics of Fluids*. CRC Press. ISBN: 9781466517325.
- Cushman-Roisin, B. y Beckers, J. M. (2011). *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. 2.<sup>a</sup> ed. Massachusetts: Academic Press. ISBN: 978-0-12-088759-0.
- Drazin, P. (1983). *Solitons*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press. ISBN: 9781107365926.
- Elachi, C y Apel J. R. (sep. de 1976). «Internal wave observations made with an airborne synthetic aperture imaging radar». En: *Journal of Geophysical Research* 3.11, págs. 647-650.
- Fu, L. y Holt, B. (1984). «Internal Waves in the Gulf of California: Observations from a Spaceborne Radar». En: *Journal of Geophysical Research: Oceans* 89.C2, págs. 2053-2060.
- Gardner, C. y Morikawa, G. (mayo de 1960). «Similarity in the Asymptotic Behavior of Collision-Free Hydromagnetic Waves and Water Waves». En: No publicado, consultado por última vez el 15/05/2022. Disponible [<https://www.osti.gov/biblio/4172979>].

- Grimshaw, R. (2002). *Environmental Stratified Flows*. Ed. por R. Grimshaw. Nueva York: Springer. ISBN: 978-0-306-48024-9.
- Grimshaw, R. et al. (nov. de 2010). «Internal solitary waves: Propagation, deformation and disintegration». En: *Nonlinear Processes in Geophysics* 17.
- Holton, J. R. y Hakim, G. (2013). *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 5.<sup>a</sup> ed. Cambridge: Academic Press. ISBN: 978-0-12-384866-6.
- Israwi, S. y Kalisch, H. (2019). «Approximate conservation laws in the KdV equation». En: *Physics Letters A* 383.9, págs. 854-858.
- Jackson, C., Da-Silva, J. y Jeans, G. (jun. de 2012). «The Generation of Nonlinear Internal Waves». En: *Oceanography* 25.22, págs. 108-123.
- Jones, P y Wells, G. (ene. de 1987). *Shuttle Views the Earth: Oceans from Space — Slide 13. Strait of Gibraltar Solitons*. En línea. Revisado por última vez 03/04/2023. Disponible [[https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide\\_13.html](https://www.lpi.usra.edu/publications/slidesets/oceans/oceanviews/slide_13.html)].
- Karczewska, A. y Rozmej, P. (2018). «Shallow Water Waves-Extended Korteweg-de Vries Equations». Texto No Publicado.
- Karczewska, A., Rozmej, P. e Infeld, E. (2015). «Energy invariant for shallow-water waves and the Korteweg-de Vries equation: doubts about the invariance of energy». En: *Physical Review E* 92.5, págs. 053202.
- Karczewska, A. et al. (2017). «Adiabatic Invariants of the Extended KdV Equation». En: *Physics Letters A* 381.4, págs. 270-275.
- Kundu, P., Cohen, I. y Dowling, D. (2015). *Fluid Mechanics*. 6.<sup>a</sup> ed. Academic Press. Academic Press. ISBN: 9780124059351.
- Lakshmanan, M. (2017). «Solitons, Tsunamis and Oceanographical Applications of». En: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Ed. por Robert A. Meyers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 3368-3392. ISBN: 978-3-642-27737-5.

## REFERENCIAS

---

- Lindstrom, E. J. (s.f.). *Ocean's Vertical Structure: Background*. Ed. por Steve Wiener, Madeline Nevin y Edwin Schiele. Revisado por última vez 02/04/2023. Disponible [<http://oceanmotion.org/html/background/ocean-vertical-structure.htm>].
- Miura, R. (1976). «The Korteweg-de Vries Equation: A Survey of Results». En: *SIAM Review* 18.3, págs. 412-459. ISSN: 00361445. URL: <http://www.jstor.org/stable/2028638>.
- Miura, R., Gardner, C. y Kruskal, M. (1968). «Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion». En: *Journal of Mathematical Physics* 9.8, págs. 1204-1209.
- Pedlosky, J. (1979). *Geophysical Fluid Dynamics*. 2.<sup>a</sup> ed. Springer, pág. 722. ISBN: 0-387-96388-X,3-540-96388-X,0-387-96387-1,3-540-96387-1.
- Pelinovsky, E. (2006). «Hydrodynamics of Tsunami Waves». En: *Waves in Geophysical Fluids: Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides*. Ed. por Grue, J. y Trulsen, K. Vienna: Springer, págs. 1-48. ISBN: 978-3-211-69356-8.
- Phillips, N. (1956). «The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment». En: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 82.352, págs. 123-164. eprint: <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qj.49708235202>. URL: <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.49708235202>.
- Prida, A. (dic. de 2022). *Types of Ocean Waves and their Impacts in the Coastal Regions*. Revisado por última vez 02/02/2023. Disponible [<https://climate.axa/types-of-ocean-waves-and-thier-impacts-in-the-coastal-regions/>].
- Remani, Courtney (2013). «Numerical methods for solving systems of nonlinear equations». En: *Lakehead University Thunder Bay, Ontario, Canada* 77.
- Russell, J. (1845). *Report on Waves Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. Inf. téc. London, págs. 311-390.
- Shahrill, M., Chong, M. y Mohd-Nor, N. (abr. de 2015). «Applying Explicit Schemes to the Korteweg-de Vries Equation». En: *Modern Applied Science* 9, págs. 200-224.
- Stoker, J.J (1957). *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Mathematical Theory with Applications. Interscience Publishers. ISBN: 9780470828632.

- Sánchez-Garrido, J. C. (mar. de 2009). «Generación y Propagación de Ondas Internas en el Estrecho de Gibraltar: Efectos 3D y de rotación». Tesis doct. Granada, España: Universidad de Granada.
- Trulsen, K. (2006). «Weakly Nonlinear and Stochastic Properties of ocean Wave Fields. Application to an Extreme Wave Event». En: *Waves in Geophysical Fluids: Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides*. Ed. por Grue John y Karsten Trulsen. Vienna: Springer, págs. 49-106.
- Velasco-Belmont, R. (2004). *Introducción a la Hidrodinámica Clásica*. Ciencia y Tecnología Series. FCE. ISBN: 9789681673208.
- Vesecky, J. y Stewart, R. (abr. de 1982). «The Observation of Ocean Surface Phenomena Using Imagery from the SEASAT Synthetic Sperture Radar: An Assessment». En: *Journal of Geophysical Research* 87.C5, págs. 3397-3430.
- Yanfen, C. y De-kang, M. (2007). «Numerical method satisfying the first two conservation laws for the Korteweg–de Vries equation». En: *Journal of Computational Physics* 227.1, págs. 376-399.
- Zabusky, N. y Kruskal, M. (1965). «Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States». En: *Phys. Rev. Lett.* 15 (6), págs. 240-243.
- Zakharov, V. y Faddeev, L. (1971). «Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system». En: *Functional Analysis and Its Applications* 5, págs. 280-287.
- Zhu, S. (ene. de 2001). «A scheme with a higher-order discrete invariant for the KdV equation». En: *Appl. Math. Lett.* 14, págs. 17-20.