



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
DOCTORADO EN INGENIERÍA CIVIL– HIDRÁULICA

ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT Y RICHARDS EN EL  
RIEGO POR SURCOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:

**M.I. LEONID VLADIMIR CASTANEDO GUERRA**

TUTOR DE TESIS:

DR. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

CUERNAVACA, MOR. FEBRERO DE 2024



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ

Secretario: DR. CARLOS FUENTES RUIZ

1<sup>er</sup>.Vocal: DR. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS

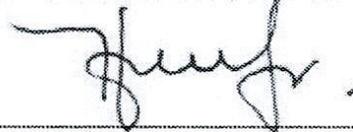
2<sup>do</sup>. Vocal Suplente: DR. VÍCTOR MANUEL ARROYO CORREA

3<sup>er</sup>. Vocal Suplente: DR. FELIPE ZATARÁIN MENDOZA

Lugar donde se realizó la tesis: CUERNAVACA, MOR.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS



\_\_\_\_\_  
**FIRMA**

*“El hidráulico ha de ser ante todo algo  
así como un psicólogo del agua, un conocedor  
profundo de su naturaleza. No es con violencia  
como se pueden hurtar sus secretos, sino con amor;  
con esa comprensión que se deriva de una larga  
convivencia con ella”.*

**Enzo Levi**

EL AGUA SEGÚN LA CIENCIA

*“El agua es la fuerza motriz de toda la naturaleza”*

**Leonardo da Vinci**

## DEDICATORIAS

A Dios G.:A.:D.:U.:

Por darme la oportunidad de vivir, por permitirme llegar hasta este punto y haberme proporcionado salud, fortaleza, e iluminar mi mente con sabiduría para así poder lograr los objetivos.

A mi mami Olivia<sup>†</sup>, la mejor mamá del mundo, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, ejemplo de fortaleza y valentía, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero sobre todo por su amor. Te extraño mami y siempre haré todo para que te sientas orgullosa de mi.

A mi esposa Sandra, a mis hijos Leonid Eduardo y Lenin Valentino por ser mi fortaleza, mi motivación, por su amor, por toda la felicidad que generan en mí, por ser lo más importante en mi vida.

A mi papá Juan por el apoyo cuando más lo necesité y por su amor.

A mis hermanos, Edna por ser la mejor hermana por sus consejos y por su amor; Topi por su ejemplo, su apoyo, por ser el mejor hermano, por su amor, Juan y Mauro que, aunque estamos a distancia son parte importante de la familia.

A mi tío Juan “el Pollito<sup>†</sup>”, ejemplo a seguir.

A mis maestros por su apoyo y sabiduría transmitida.

A mis amigos que, gracias a su apoyo y amistad, hicieron de esta experiencia una de las más agradables. A la memoria de mi amigo y compañero Erikdel Castillo<sup>†</sup>.

A mis familiares por estar en los buenos y malos momentos.

A mi Logia Opus Magnum No. 23, y mi Logia Othoniel Chávez Arias No. 78.

## AGRADECIMIENTOS

El Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas que, por el gran apoyo y ayuda brindada, es parte importante en los logros obtenidos de quien aquí suscribe, y que además reconociendo su verdadera amistad agradezco de la manera más sincera.

Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz por el apoyo en el momento indicado.

A los compañeros de la Maestría y Doctorado, los cuales fueron parte del proceso de formación.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, a la Comisión Nacional del Agua.

A los señores revisores de este trabajo:

Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas  
Dr. Carlos Fuentes Ruiz  
Dr. Ariosto Aguilar Chávez  
Dr. Felipe Zataráin Mendoza  
Dr. Víctor Manuel Arroyo Correa

¡Por mi raza hablará el espíritu! ¡México! ¡Pumas! ¡Universidad!

¡Goya! ¡Goya! ¡Cachún, Cachún, Ra, Ra! ¡Goya!

**¡UNIVERSIDAD!**

## ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT Y RICHARDS EN EL RIEGO POR SURCOS: FASE DE AVANCE

INTRODUCCIÓN .....	1
OBJETIVOS .....	2
1. ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN DEL RIEGO POR SURCOS .....	3
1.1 Introducción.....	3
1.2 Fases hidráulicas en el riego por gravedad .....	4
1.3 Enfoques de la modelación del riego por gravedad .....	5
1.4 Descripción del flujo del agua a superficie libre.....	7
1.4.1 Las ecuaciones de Saint-Venant .....	7
1.4.1.1 El problema de cerradura .....	7
1.4.2 Modelos simplificados.....	9
1.4.2.1 Modelo de la onda difusiva o de inercia nula (ZI) .....	9
1.4.2.2 Modelo de onda cinemática (KW) .....	9
1.4.2.3 Modelo de la onda inercial .....	10
1.4.2.4 Modelo hidrológico o de balance de volumen (VB).....	11
1.4.2.5 Modelo hidrodinámico (HD).....	12
1.5 Investigaciones previas: Aplicación de los modelos en el riego por surcos .....	12
1.6 Descripción del flujo del agua en el suelo .....	14
1.6.1 Ecuación de Richards.....	14
1.6.2 La ecuación de Fokker-Planck.....	15
1.6.3 La ecuación de Kirchhoff .....	16
1.7 Soluciones analíticas en el riego por gravedad .....	16
1.8 Modelos utilizados para simular la infiltración.....	17

1.8.1	Modelo hidrológico o de balance de volumen.....	17
1.8.1.1	Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	17
1.8.1.2	Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras...17	
1.8.2	Modelo de onda cinemática.....	18
1.8.2.1	Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	18
1.8.3	Modelo de inercia cero .....	18
1.8.3.1	Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	18
1.8.4	Modelos con ecuaciones de Saint-Venant simplificadas .....	19
1.8.4.1	Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	19
1.8.4.2	Leyes de infiltración con base físico-matemática .....	20
1.8.5	Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa21	
1.8.5.1	Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	21
1.8.5.2	Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras...21	
1.8.5.3	Leyes de infiltración conforme a la ecuación de Richards .....	22
1.9	Modelos utilizados para simular la infiltración en la actualidad.....	22
2.	DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT Y RICHARDS EN LA FASE DE AVANCE DEL RIEGO POR SURCOS .....	24
2.1	Flujo del agua en el suelo: ecuación de Richards .....	24
2.1.1	Condiciones límites.....	25
2.1.2	Características hidrodinámicas .....	26
2.1.3	Cálculo de la lámina infiltrada .....	26
2.1.4	Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional .....	27
2.2	Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant .....	29

2.2.1	Esquema numérico para la fase de avance .....	29
2.2.2	Condiciones límites.....	29
2.2.3	Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant .....	30
2.2.3.1	Continuidad .....	33
	Primera celda .....	33
	Celdas interiores.....	33
	Última celda .....	33
2.2.3.2	Cantidad de movimiento .....	34
	Primera celda .....	34
	Celdas interiores.....	34
	Última celda .....	35
2.2.3.3	Para el primer nivel de tiempo.....	35
	Continuidad .....	35
	Cantidad de movimiento .....	36
3.	VALIDACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO .....	37
3.1	Características del dominio de solución .....	37
3.2	Condición de frontera en el surco.....	38
3.3	Resultados .....	40
3.4	Validación del modelo con resultados de soluciones analíticas.....	50
4.	APLICACIONES .....	57
4.1	Comparación de la estimación de características hidrodinámicas del suelo aplicando modelación del riego por surcos y melgas .....	57
5.	CONCLUSIONES.....	61
6.	REFERENCIAS.....	62

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.....	24
Ilustración 2. Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.....	30
Ilustración 3. Mallas No 1 y No 5 de elementos finitos para la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional.....	37
Ilustración 4. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco arenoso. ....	39
Ilustración 5. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco limoso. ....	39
Ilustración 6. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco arcilloso.....	40
Ilustración 7. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 horas.....	41
Ilustración 8. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 horas.....	41
Ilustración 9. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 horas.....	42
Ilustración 10. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 1.2 horas, en el suelo franco arenoso, $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ (100% de saturación). ....	42
Ilustración 11. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 6.2 horas, en el suelo franco limoso, $\theta_s = 0.525 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ (100 % de Saturación).....	43

Ilustración 12. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 31.4 horas, en el suelo franco arcilloso, $\theta_s = 0.475 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ (100% de saturación).....	43
Ilustración 13. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 1.0 y 5.0 s. ....	44
Ilustración 14. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 10.0 y 30.0 s. ....	44
Ilustración 15. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 60.0 s. ....	45
Ilustración 16. Valores del RECM para diferentes pasos de tiempo. ....	45
Ilustración 17. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 horas. $RCECM=0.460 \text{ cm}$ . ....	46
Ilustración 18. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 horas. $RCECM=0.292 \text{ cm}$ . ....	46
Ilustración 19. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 horas. $RCECM=0.267 \text{ cm}$ . ....	47
Ilustración 20. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 h. Se obtiene un $RECM= 0.721 \text{ cm}$ de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.....	49
Ilustración 21. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 h. Se obtiene un $RECM= 0.516 \text{ cm}$ de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.....	49

Ilustración 22. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 h. Se obtiene un RECM= 0.365 cm de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.....	50
Ilustración 23. Detalle de la malla de elementos finitos.....	54
Ilustración 24. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arcilla clara de Yolo: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s. ....	55
Ilustración 25. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arena del río Isère: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s. ....	56
Ilustración 26. Verificación de la aplicabilidad del modelo de riego por surcos para la fase de avance, $\Delta t = 0.25 s$ , $R2 = 0.9998$ . ....	58
Ilustración 27. Evolución de la lámina infiltrada en el surco para el suelo Franco de Montecillo con $Ks = 1.98 cmh$ y $\Psi d = -35.25 cm$ ; $\Delta t = 0.25 s$ .....	59
Ilustración 28. Evolución del tirante en en la cabecera del surco para el suelo Franco de Montecillo con $Ks = 1.98 cmh$ y $\Psi d = -35.25 cm$ ; $\Delta t = 0.25 s$ .....	59
Ilustración 29. Balance de masa .....	60

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Características de las mallas de elementos finitos.....	38
Tabla 3.2 Características hidrodinámicas para tres texturas de suelos.....	38
Tabla 3.3 Características hidrodinámicas para los tres tipos de suelo usados en HYDRUS-2D.....	48
Tabla 3.4 Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange para dos suelos contrastantes.....	54
Tabla 3.5 Error máximo obtenido al comparar las soluciones analítica y de elemento finito para dos suelos contrastantes.....	55
Tabla 4.1 Variables hidrodinámicas.....	57
Tabla 4.2 Variables hidráulicas.....	58

## RESUMEN

Se modela el riego por surcos acoplando numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua en la superficie del suelo y la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo. La solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se desarrolla mediante un esquema lagrangiano en diferencias finitas, para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos en el espacio y diferencias finitas implícitas en el tiempo. Se propone un esquema numérico que genera una solución monótona para la fase de avance, la solución numérica se obtiene mediante un esquema de paso constante. Se verifica la hipótesis que la caracterización hidrodinámica de un suelo es similar, cuando se emplean modelos con el mismo grado de aproximación, tanto para riego por surcos como riego por melgas, basados ambos en el empleo de las ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales de Saint-Venant y Richards, para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y para modelar el flujo del agua en el suelo respectivamente; lo anterior se debe básicamente a que las características hidrodinámicas del suelo dependen de su granulometría.

## SUMMARY

Furrow irrigation is simulated by using a numerical model based on the coupled system of Saint-Venant equations to describe water flow in soil surface and Richards equation to describe the water flow in soil. Is developed a numerical solution of Saint-Venant equations using a Lagrangian scheme in finite differences, finite elements in space and implicit finite differences in time for Richards equation are used. For advance phase a numerical scheme is proposed that generates a monotonic solution, numerical solution is obtained by means of a constant step scheme. Hypothesis is verified, this is that the hydrodynamic characterization of a soil is similar when border irrigation and furrow irrigation tests are used, that is, when models with the same approximation degree are used, both based on the use of the highly nonlinear partial differential equations of Saint-Venant and Richards, to describe water flow on soil surface and to model water flow in soil respectively. The above is due to the fact that the hydrodynamic characteristics of soil depend on its granulometry.

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende por una parte la descripción detallada y suficientemente precisa, en el contexto de la mecánica de Newton, del fenómeno físico-matemático denominado riego por surcos en su fase de avance.

La herramienta fundamental adoptada en este trabajo es el uso de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales, que partiendo de la hipótesis del continuo describen las razones de cambio de las variables hidráulicas del riego por surcos en el tiempo y en el espacio. La base de la descripción es el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo con la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo, la interacción se produce vía el tirante de agua sobre la superficie del suelo y la lámina de agua infiltrada en el mismo, considerando que el cálculo de cualquiera de ellos hace necesario conocer el otro.

En el capítulo I se presentan las ecuaciones de base y una revisión de los modelos más difundidos que se han utilizado para simular el flujo del agua en el riego por surcos (Estado del Arte).

En el capítulo II se presenta un esquema numérico desarrollado en este trabajo que permite obtener una solución monótona para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por surcos. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un método lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo.

Los resultados obtenidos se muestran en el capítulo III. Se presentan las gráficas del frente de avance en el surco. En el capítulo IV se compara la estimación de características hidrodinámicas del suelo aplicando modelación del riego por surcos y melgas.

## **OBJETIVOS**

El objetivo de este trabajo es modelar la fase de avance en el riego por surcos mediante el acoplamiento numérico interno de las ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales de Saint-Venant y Richards, la primera de ellas es utilizada para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo, y la segunda para modelar el flujo del agua en el suelo. Los objetivos particulares son la aplicación del acoplamiento para riego por surcos en los siguientes casos: i) verificación numérica del grado de influencia de la función de la evolución del tirante en la superficie del surco, sobre la lámina infiltrada en el suelo, ii) estimación de las características hidrodinámicas del suelo (conductividad hidráulica a saturación y presión en el frente de humedecimiento).

## **HIPÓTESIS**

La caracterización hidrodinámica de un suelo (conductividad hidráulica a saturación y presión en el frente de humedecimiento), al depender básicamente de la granulometría del mismo, debe ser similar cuando se emplean herramientas con un mismo grado de aproximación, en este caso modelos hidrodinámicos de riego por melgas y riego por surcos, basados en el acoplamiento numérico interno de las ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales de Saint-Venant y Richards, para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y para modelar el flujo del agua en el suelo respectivamente.

## 1. ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN DEL RIEGO POR SURCOS

### Resumen

Se presenta una revisión de los modelos más difundidos, hasta fechas recientes, que se utilizan para simular el flujo del agua en el riego por gravedad, y como caso particular el riego por surcos, haciendo diferencia conforme al tipo de aproximaciones que utilizan para simular el flujo del agua en la superficie del suelo como el flujo en el suelo. Se ha tenido en cuenta la primera de las fases del riego de las cuatro que describen el proceso completo: avance, almacenamiento, consumo y recesión. Se reporta lacónicamente el tipo de método numérico para la solución de las ecuaciones diferenciales involucradas en la descripción del fenómeno.

### 1.1 Introducción

Es hasta fechas recientes que se ha dado una mayor importancia al papel que desempeña el suelo en la modelación del riego por gravedad, en los modelos pioneros reportados en la literatura e incluso en varios actuales, se tiene en cuenta su efecto a través de leyes de infiltración simplificadas que tienen deficiencias desde el punto de vista de la representación físico-matemática del proceso. Una limitante a tener en cuenta es, por ejemplo, que la estimación de los parámetros que intervienen en estas leyes de infiltración dependen de la condición inicial y de frontera en que se efectúan las pruebas de infiltración que sirven para calibrar los parámetros que en ellas intervienen.

La complejidad que presenta el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales que pueden utilizarse para modelar el riego por gravedad, ha motivado que se hayan desarrollado un número reducido de funciones analíticas para describir el fenómeno, obtenidas para formas simplificadas de las ecuaciones de movimiento. Esta situación ha motivado el uso de aproximaciones numéricas para la obtención de soluciones discretas, que permiten determinar las formas de las variables hidráulicas para puntos particulares del dominio de la solución de las ecuaciones diferenciales.

En la modelación del riego a superficie libre se emplean básicamente cuatro modelos para simular sus cuatro fases, inercia cero (ZI), onda cinemática (KW), y balance de volumen (VB), hidrodinámico (HD).

Las ecuaciones utilizadas en los modelos matemáticos para describir el flujo superficial en el riego por gravedad son las ecuaciones de conservación de masa y conservación de cantidad de movimiento, conocidas como las ecuaciones de Saint-Venant (Chow, 1959; Strelkoff, 1969), o formas simplificadas de los mismos.

## **1.2 Fases hidráulicas en el riego por gravedad**

El riego por gravedad consiste en el aporte de agua en la cabecera de un canal o cauce inclinado construido en la parcela, como un surco o una melga, con la finalidad de aprovechar el campo gravitacional para proporcionar la cantidad necesaria de agua para el desarrollo del cultivo.

En la modelación del riego el movimiento del agua se separa en un movimiento superficial, que ocurre sobre la superficie porosa del cauce, y un movimiento subsuperficial, que ocurre en el suelo por debajo de la superficie porosa, también llamado infiltración del agua en el suelo.

En el riego por gravedad continuo se distinguen cuatro fases en el movimiento superficial del agua. La primera comienza cuando se aporta el caudal de agua en el cauce seco hasta que la onda de agua alcanza la parte final del mismo, se le conoce como fase de avance. La segunda comienza desde el arribo de la onda al final del cauce hasta que se suspende el aporte de agua, se le conoce como fase de almacenamiento. Finalmente, la tercera y cuarta fase, son conocidas como consumo y recesión. La fase de consumo comienza a partir de la suspensión del aporte hasta que el tirante en la cabecera del cauce desaparece y la recesión comienza a partir de la desaparición del tirante en la cabecera y termina cuando el tirante en la parte final del cauce desaparece.

En el riego por gravedad intermitente el aporte del caudal de riego se lleva a cabo por impulsos, de modo que las fases presentes en el riego continuo se pueden presentar al mismo tiempo a lo largo del cauce de riego. Esta modalidad se utiliza para aumentar la eficiencia de riego que puede lograrse con un riego continuo.

### 1.3 Enfoques de la modelación del riego por gravedad

De acuerdo con los principios utilizados en la modelación, se pueden agrupar los trabajos reportados en la literatura en el contexto de cuatro enfoques (Fuentes *et al.*, 2004):

- 1) La modelación de los movimientos superficial y subterráneo se aborda de una manera totalmente empírica (*e.g.* Fok y Bishop, 1965; Willardson y Bishop, 1967);
- 2) El movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones, y el movimiento subterráneo con ecuaciones empíricas como las de Kostiaikov (1932) y Mezencev (1948) (*e.g.* Hart *et al.*, 1968; Chen, 1970; Kincaid *et al.*, 1972; Smith, 1972; Sakkas y Strelkoff, 1974; Cunge y Woolhiser, 1975; Basset y Fitzsimmons, 1976; Katopodes y Strelkoff, 1977; Strelkoff y Katopodes, 1977; Bautista y Wallender, 1992);
- 3) El movimiento superficial se modela con ecuaciones simplificadas de Saint-Venant (onda cinemática, onda difusiva o inercia nula y modelo hidrológico) y en la modelación del movimiento subterráneo existe la posibilidad de utilizar ecuaciones racionales (*e.g.* Lewis y Milne, 1938; Philip y Farrel, 1964; Ángeles *et al.*, 1998; González *et al.*, 2006);
- 4) El movimiento superficial se modela con las ecuaciones de Saint-Venant y el movimiento subterráneo con la ecuación de Richards (1931). En el trabajo para modelar el riego por melgas desarrollado por Schmitz *et al.*, 1985, se resuelven con el método de las características las ecuaciones completas de Saint-Venant y se utiliza para el movimiento subterráneo la solución analítica de la infiltración obtenida por Parlange *et al.*, 1985, a partir de la ecuación de Richards, para el caso de una columna semi-infinita de suelo sujeta a una presión constante sobre la superficie del suelo (tirante de agua constante); puesto que el tirante de agua es en realidad una función del tiempo la solución es aproximada, es decir las ecuaciones están parcialmente acopladas. Saucedo, 2003, y Saucedo *et al.* 2003, 2005, 2011, acoplan las ecuaciones de Saint-Venant y de Richards en el riego por melgas, las primeras se resuelven con un método lagrangiano y la segunda con el método del elemento finito.

Es de señalar que la solución de la ecuación bidimensional de Richards de Saucedo y colaboradores es aplicable para un corte longitudinal de una melga. La solución es acoplada con las ecuaciones de Saint-Venant y luego se valida la hipótesis del tiempo de contacto, que consiste en asumir que la infiltración es solamente una función del tiempo que tiene contacto el agua en un punto dado de la melga, la cual permite utilizar la ecuación de Richards en su forma unidimensional. En esta línea de razonamiento, la modelación completa del riego por surcos utiliza la solución de la ecuación tridimensional de Richards y con la hipótesis del tiempo de contacto la solución de la ecuación se reduce a su forma bidimensional en un corte transversal del surco. La solución de esta última puede ser realizada con el método del elemento finito o con una adaptación de la solución presentada por López *et al.* (1997) en diferencias finitas.

Se pueden citar trabajos reportados recientemente en la literatura relacionados con el tema, por ejemplo:

Banti *et al.*, 2011, presentan una modelación del riego por surcos utilizando las ecuaciones de Saint-Venant (1-D) y Richards (2-D), Bautista *et al.*, 2014, presentan una solución de la ecuación de Richards bidimensional como la suma de la infiltración en una dimensión y parámetros de ajuste; Dong *et al.*, 2013, presentan un modelo híbrido de acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego, este consiste en que la ecuación de conservación de masa en el flujo superficial y subsuperficial son acopladas en la base del acoplamiento iterativo, y la ecuación de momentum del flujo superficial se acopla externamente en la base de los valores de convergencia del tirante y la lámina infiltrada para actualizar los valores de la velocidad del flujo en la superficie; Koech *et al.*, 2010, presentan un modelo de simulación en sistemas de riego superficial en tiempo real considerando las ecuaciones de Saint-Venant para modelar el flujo del agua en la superficie y la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo. Burguete *et al.*, 2014, presentan un modelo para simular el riego por surcos resolviendo las ecuaciones de Saint-Venant en combinación con la ecuación de difusión; aplican ecuaciones empíricas y semi - empíricas para simular la infiltración del agua en el suelo. Castanedo *et al.*, 2019, presentan un acoplamiento numérico interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards (2D) para modelar la fase de avance en el riego por surcos.

## 1.4 Descripción del flujo del agua a superficie libre

### 1.4.1 Las ecuaciones de Saint-Venant

En un surco la relación que guarda el tirante y la geometría del surco permite considerar las ecuaciones correspondientes al escurrimiento sobre un canal prismático (Strelkoff, 1969; Wallender y Rayej, 1990; Saucedo *et al.*, 2005):

Continuidad:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_o - S_f) - \beta \frac{Q}{A} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1.2)$$

donde:  $A$  es el área de la sección transversal del flujo [ $L^2$ ];  $Q$  es el gasto [ $L^3/T$ ];  $h$  es el tirante de agua [ $L$ ];  $t$  es el tiempo [ $T$ ];  $x$  es la coordenada espacial a lo largo de la dirección principal del movimiento del agua en el surco [ $L$ ];  $g$  es la aceleración gravitacional [ $L/T^{-2}$ ];  $V_i = \frac{\partial I}{\partial t}$  es el flujo de infiltración [ $L^2/T$ ], es decir, el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de longitud del surco;  $I$  es la lámina infiltrada [ $L$ ];  $S_o$  es la pendiente del terreno [ $L/L$ ],  $S_f$  es la pendiente de fricción [ $L/L$ ] y el parámetro adimensional  $\beta = 1 - \alpha$ , siendo  $\alpha = 1 - U_{Ix}/U$ , donde  $U_{Ix}$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración.

#### 1.4.1.1 El problema de cerradura

Las ecuaciones de Saint-Venant, considerando que la densidad del agua es prácticamente constante, están formadas por la ecuación de continuidad (1.1) y por la ecuación de cantidad de movimiento o impulsión (1.2). Para cerrar el sistema es necesario disponer de una relación entre las variables hidráulicas  $Q$  y  $h$  con la pendiente de fricción, dicha relación se denomina ley de resistencia hidráulica. Fuentes *et al.*, 2004, han demostrado que no es posible utilizar la ley de resistencia de Manning-Strickler en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. Lo anterior tiene como

base el análisis en los tiempos muy cortos del acoplamiento, se deduce que la ley de resistencia de Manning-Strickler solamente puede ser utilizada para un reducido número de funciones gasto de riego aplicado en la cabecera de la melga, en particular para cuando el gasto de riego se comporta como una función potencia  $1/6$  del tiempo, en consecuencia, dicha ley resistencia no debe utilizarse en el caso importante en que el gasto de riego es constante. Asimismo, se deduce que, en caso de hacer uso de dicha ley de resistencia, sus parámetros dependen de las condiciones de frontera, en particular la evolución de la lámina de riego en los tiempos muy cortos dependerá del gasto de riego, situación que es falsa en el contexto de la ley de infiltración proporcionada por la ecuación de Richards. En consecuencia, en este trabajo se adopta el uso de una ley potencial de resistencia (Fuentes *et al.*, 2004).

La ley de resistencia generalmente utilizada en hidráulica de canales abiertos es una ley en potencia cuya estructura es la siguiente:

$$U = c R_h^b S_f^d \quad (1.3)$$

donde  $R_h = A/P_m$  es el radio hidráulico definido como la razón entre el área hidráulica y el perímetro mojado;  $c$ ,  $b$  y  $d$  son parámetros de la ley en potencia.

La ecuación (1.3) incluye las formulaciones clásicas de Chézy con  $b = d = 1/2$  y  $c = C_h$ , donde  $C_h$  es un coeficiente empírico dimensional; de Manning-Strickler con  $b = 2/3$ ,  $d = 1/2$ , y  $c = 1/n$  donde  $n$  es un coeficiente de rugosidad dimensional; de Poiseuille con  $b = 2$ ,  $d = 1$  y  $c = k g/\nu$ , donde  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática y  $k$  es un factor adimensional, cuyo valor en el flujo sobre superficies lisas es  $k = 1/3$  (e.g. Landau y Lifchitz, 1989). Asimismo, incluye la fórmula de Hazen-Williams, utilizada en el diseño de redes de tuberías (King *et al.*, 1952), con  $b = 0.63$ ,  $d = 0.54$  y  $c = C_{HW}$ , donde  $C_{HW}$  es un coeficiente dimensional. La ley también incluye la ley de Prandtl utilizada por Blasius para estimar el factor de fricción de la fórmula de Darcy-Weisbach con  $b = 5/7$ ,  $d = 4/7$  y  $c = C_{PB}$ , donde  $C_{PB}$  es un coeficiente dimensional.

En cuanto a la resolución del sistema de ecuaciones, ésta es generalmente de naturaleza numérica con métodos eulerianos o lagrangianos que utilizan esquemas en diferencias finitas, elementos finitos, ecuaciones características o una combinación de éstos. Se han

propuesto en la literatura especializada formas simplificadas; como se expone a continuación.

### 1.4.2 Modelos simplificados

Los modelos simplificados se obtienen al hacer algunas consideraciones en la ecuación de cantidad de movimiento; entre estos se encuentran los modelos de onda difusiva o inercia nula, onda cinemática y onda inercial. Se encuentra también el modelo hidrológico que se basa en la expresión integral de la ecuación de continuidad considerando algunas simplificaciones.

#### 1.4.2.1 Modelo de la onda difusiva o de inercia nula (ZI)

El modelo de inercia cero puede obtenerse eliminando los términos inerciales de la ecuación de momentum (ecuación 1.2):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = S_o - S_f \quad (1.4)$$

de tal manera que las ecuaciones (1.1) y (1.4) constituyen el modelo de inercia cero.

#### 1.4.2.2 Modelo de onda cinemática (KW)

El modelo de onda cinemática considera que en la ecuación de cantidad de movimiento los términos inerciales y de presión son despreciables, con respecto a los términos de fricción y gravedad. Con dichos supuestos la ecuación de momentum resulta:

$$S_f = S_o \quad (1.5)$$

Como se considera que las fuerzas de fricción y gravitacional son iguales no existe una aceleración apreciable del flujo y por lo tanto el modelo es aplicable a escurrimientos con gastos pequeños y pendientes suaves como en el riego por gravedad. Woolhiser y Liggett (1967) a partir de simulaciones en canales de distintas características geométricas y operativas han establecido que el modelo de la onda cinemática representa adecuadamente la dinámica del flujo siempre que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$K = \frac{S_o L_o}{F_o^2 h_n} > 30 \quad (1.6)$$

donde  $K$  es un número cinemático,  $S_o$  la pendiente del fondo del cauce,  $L_o$  la longitud normalizada del cauce que puede tomarse como la longitud del cauce,  $F_o^2 = Q^2 T / g A^3$  el número de Froude y  $h_n$  el tirante normal.

Con el modelo de la onda cinemática sólo es posible representar la fase de avance, ya que no permite la representación de ondas que remonten la corriente debido a que no considera las condiciones de frontera aguas abajo y consecuentemente no es posible analizar la fase de almacenamiento del riego. Debido a la hipótesis de que las fuerzas de fricción son equivalentes a las fuerzas gravitacionales, el movimiento se realiza en forma de pistón rectangular sobre la superficie del suelo.

#### 1.4.2.3 Modelo de la onda inercial

En este modelo se considera que en la ecuación de cantidad de movimiento los términos de gravedad y de fricción son despreciables, respecto a los inerciales y de presión por lo que la forma simplificada resulta:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = W \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Este tipo de modelo tiene poco interés en el análisis del riego por gravedad debido a que no es posible caracterizar las propiedades físicas de los suelos, ya que en la ecuación (1.8) no intervienen la fuerza de fricción causada por la rugosidad del cauce.

De acuerdo con De León *et al.*, (2006, 2007) este modelo es aplicable en el análisis local de fenómenos como el aforo de caudales en compuertas, y la representación y operación de estructuras de control. Estos autores establecieron una ecuación de segundo grado en  $dQ/dz$  para representar la variación local del caudal y del tirante en la vecindad de una estructura de control.

$$\frac{1}{gTA} \left( \frac{dQ}{dz} \right)^2 - \frac{2Q}{gA^2} \frac{dQ}{dz} + \frac{Q^2 T}{gA^3} = 1 \quad (1.9)$$

donde  $Z = Z_r + h$  y  $Z_r$  es la cota de la rasante con respecto a un nivel de referencia.

Las soluciones de la ecuación (1.8) son las ecuaciones:

$$\frac{dQ}{dz} = (U \pm C)T, \quad (1.10)$$

$$\frac{Q^2 T}{A^3 g} = 1 \quad (1.11)$$

donde  $U$  es la velocidad media del flujo y  $C = \sqrt{gAT}$  es la celeridad de las ondas producidas por la maniobra de la estructura.

La ecuación (1.10) establece la condición básica para el flujo en régimen crítico en un conducto de cualquier sección transversal. De esta ecuación se relacionan los tirantes aguas arriba ( $Z_1$ ) y aguas abajo ( $Z_2$ ) con las características de la compuerta. Para el caso de una compuerta rectangular de abertura ( $a$ ) se obtiene la condición necesaria para alcanzar diferentes grados de precisión y niveles de confiabilidad en los aforos realizados en éstas. Esta condición se expresa mediante:

$$Z_1 \geq Z_2 + \frac{a}{2} \quad (1.12)$$

#### 1.4.2.4 Modelo hidrológico o de balance de volumen (VB)

Si se ignora la ecuación de cantidad de movimiento y se resuelve solamente la ecuación de continuidad (ecuación 1.1) se obtiene el modelo de balance de volumen o modelo hidrológico. La versión integral de la ecuación de continuidad puede escribirse para el caso de un surco como:

$$Q_o t = \int_0^{x_f} A(x, t) dx + \int_0^{x_f} I(x, t) dx \quad (1.13)$$

donde  $x_f$  es la posición del frente de avance en el tiempo. Si se considera un valor medio del área hidráulica y que el suelo es homogéneo se puede escribir:

$$Q_o t = \bar{A} x_f(t) + \int_0^{x_f} I(\tau) dx \quad (1.14)$$

donde  $\tau = t - t_x$  es el tiempo de contacto, siendo  $t_x$  el tiempo que tarda el frente de avance en llegar a una distancia  $x$ . Es común utilizar una función exponencial o potencia para expresar la función de avance  $x_f(t)$  y existen diversas aproximaciones para estimar el área hidráulica media  $\bar{A}$ .

Los modelos de onda cinemática e hidrológico, tienen un rango de aplicabilidad limitado en comparación con el modelo hidrodinámico constituido por la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant, y con el modelo de inercia cero. El modelo de onda cinemática se limita respecto a las condiciones de pendiente y no puede manejar condiciones de frontera aguas abajo que afectan el flujo aguas arriba (Cunge *et. al.*, 1980). El uso del modelo de balance de volumen también está limitado por las condiciones de la pendiente topográfica del surco.

#### 1.4.2.5 Modelo hidrodinámico (HD)

El Modelo Hidrodinámico Completo se desarrolla con bases físico-matemáticas y utiliza la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant. La aplicación de este modelo correctamente aplicado, puede proporcionar simulaciones que son más precisas en un amplio intervalo de condiciones de campo, en comparación con los modelos simplificados. Debido a su exactitud, a menudo se utiliza para la calibración y evaluación de modelos simplificados (Ebrahimian y Liaghat, 2011).

### 1.5 Investigaciones previas: Aplicación de los modelos en el riego por surcos

Valiantzas *et al.*, 2001, estiman la infiltración en el surco solo en un tiempo y en un determinado punto del avance utilizando el modelo de VB.

Esfandiari y Maheshwari (2001) evaluaron modelos de riego por surcos incluyendo el HD, ZI y KW. Se encontró que los modelos HD y ZI realizan mejor el cálculo en los

tiempos de la fase de avance y los modelos ZI y KW han tenido el mejor desempeño en tiempos de la fase recesión. La aproximación de KW en el modelo de Walker no es adecuada para la simulación del riego en surcos con pendientes de hasta el 0.1%.

Latif y Mahmood, 2004, simulan y obtienen tasas de avance para riego por surcos. Los resultados simulados por el modelo KW revelan que las curvas del frente de avance coinciden estrechamente con las observadas en la mayoría de los tratamientos.

Wohling *et al.* 2004, analizaron con base física la modelación al interactuar flujo superficial y subsuperficial durante la fase de avance en el riego por surcos usando el modelo ZI. La comparación entre los resultados de laboratorio y el modelo de riego numérico mostró que, en los tiempos de la fase de avance el primer y tercer riego, se comparan favorablemente con los datos experimentales, como fue el caso para el flujo subsuperficial. Sin embargo, los resultados del segundo riego presentan agrietamiento del suelo, debido a un alto contenido de arcilla combinado con un período de secado relativamente largo antes del experimento de riego, lo cual tuvo un impacto considerable en el proceso de infiltración.

Eldeiry *et al.*, 2005, diseñaron un sistema de riego por surcos para suelos arcillosos en regiones áridas. Un modelo VB se aplicó para simular el flujo de agua en el sistema de surcos, y los resultados se compararon con los obtenidos de las mediciones de campo. Este estudio mostró que el modelo VB puede aplicarse satisfactoriamente a los suelos arcillosos, y la longitud del surco y el gasto de entrada son los principales factores que afectan la eficiencia de la aplicación. Sin embargo, el uso de longitudes cortas de surco con gastos de entrada bajos no se recomienda para suelos arcillosos.

Walker, 2005, calibra la infiltración en el surco y la rugosidad, utilizando un esquema de niveles multipasos. La aproximación de niveles para la formulación de estimaciones de los parámetros de entrada y de rugosidad fue una simplificación sustancial sobre otras metodologías.

Bakker *et al.*, 2006, estudiaron la eficacia de aplicación y funciones de infiltración del riego por surcos en el cultivo de caña de azúcar utilizando el modelo de ZI. Se determinó que el incremento en el rendimiento de hasta un 20% se puede lograr aplicando el riego con eficiencia.

Mailapalli *et al.*, 2009, presenta un modelo con base física para simular el flujo en riego por surcos utilizando el modelo ZI. El desarrollo del modelo se extiende para simular

sedimentos, nutrientes y el transporte de plaguicidas en espacio y tiempo para predecir el impacto sobre el medio ambiente considerando el manejo óptimo del riego.

Holzapfel *et al.*, 2010, evalúan el manejo y criterios de diseño de riego por surcos utilizando parámetros de eficiencia y utilizando el modelo de VB satisfactoriamente.

Valipour y Montazar (2012a, 2012b, 2012c) y Valipour (2012, 2013) compararon los modelos HD, ZI y KW para optimizar los parámetros de infiltración en los sistemas de riego por surcos. El autor llegó a la conclusión de que el rendimiento del HD y ZI fue similar y aún mejor que el modelo KW en todos los experimentos de riego.

Soroush *et al.*, 2013, simularon las fases de avance, consumo y recesión, en el riego por surcos utilizando la ecuación de flujo-lento/cambio-lento y lo comparó con los modelos de ZI y KW. Las ecuaciones utilizadas se basan en las ecuaciones de onda cinemática para un canal en una dimensión, utilizando las cantidades integradas del área de la sección transversal del flujo  $A$  y el caudal volumétrico  $Q$ . Se utiliza la aproximación común de la ecuación del momentum. Concluyeron que el modelo propuesto puede proporcionar una adecuada y simple herramienta de simulación numérica para el diseño y evaluación de riego por surcos para diferentes condiciones de frontera y pendientes del terreno.

Se observa una cierta tendencia de los investigadores al momento de utilizar modelos de simulación en el riego superficial. El riego por surcos fue el más simulado de los métodos. A pesar de que el HD es el modelo más preciso, el modelo que más se aplicó fue el de KW debido a sus simplificaciones y el menor tiempo de cómputo que requiere. La mayoría de los modelos que simulan el riego utilizan el de KW. La fase de avance se simuló en más ocasiones que las otras fases, y la fase de consumo ocupó el segundo lugar. De la revisión de los diferentes trabajos reportados en la literatura se concluye que, el riego por surcos fue el fenómeno más simulado, sin embargo, de los resultados presentados, resulta que los modelos de simulación de riego por melgas presentaron menores márgenes de error en los resultados. Es por lo anterior que el presente trabajo simula el riego por surcos a través de la solución de ecuaciones con bases físico-matemáticas y así obtener resultados con un menor margen de error.

## **1.6 Descripción del flujo del agua en el suelo**

### **1.6.1 Ecuación de Richards**

La ecuación general que rige el movimiento del agua en el suelo es el resultado de una ecuación de continuidad y una dinámica o de cantidad de movimiento. La primera resulta del principio de conservación de la masa y la segunda es una ley empírica descubierta por Darcy (1856), la cual representa una forma simplificada del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

La introducción del concepto de capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (1.15)$$

permite obtener una ecuación de transferencia en la que la presión es la variable dependiente. Esta ecuación es conocida como ecuación de Richards (1931).

La ecuación de Richards (1931), resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy y que, en su forma tridimensional, sin tener en cuenta la extracción del agua por las plantas, se escribe como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.16)$$

donde  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo expresado como la altura de una columna equivalente de agua [L] (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo;  $C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}$  es denominada la capacidad específica de humedad del suelo [ $L^{-1}$ ],  $\theta = \theta(\psi)$  es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua [ $L^3L^{-3}$ ] y es una función de  $\psi$  conocida como curva de retención del agua;  $K = K(\psi)$  es la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ] que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial  $z$  orientada positivamente hacia abajo [L],  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  es el operador gradiente:  $x, y$  son las otras dos coordenadas espaciales [L] y  $t$  es el tiempo [T].

En el segundo miembro de la ecuación (1.16), el primer término representa los efectos de la presión y el segundo los de la gravitación.

### 1.6.2 La ecuación de Fokker-Planck

Childs y Collis-George (1950) introdujeron el concepto de difusividad capilar o difusividad hidráulica:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} \quad (1.17)$$

Para obtener a partir de la ecuación (1.15) una ecuación tipo Fokker-Planck para la infiltración, en donde se ha supuesto que existen las funciones  $\Psi(\theta)$  y  $K(\theta)$ :

$$\nabla \cdot [D(\theta)\nabla(\theta)] + \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (1.18)$$

En el primer miembro de la ecuación (1.18), el primer término representa los efectos de la difusión y el segundo los de la gravitación.

### 1.6.3 La ecuación de Kirchhoff

La introducción del potencial de Kirchhoff definido por:

$$\Phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} K(\tilde{\psi})d\tilde{\psi} = \int_{\theta_r}^{\theta} D(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} = \Phi(\theta) \quad (1.19)$$

permite escribir la ecuación de transferencia como:

$$\nabla^2\Phi + \frac{dK}{d\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial z} + W = \frac{1}{D(\Phi)} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (1.20)$$

donde  $\nabla^2 = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2 + \partial/\partial z^2$  es el operador de Laplace,  $\theta_r = \theta(-\infty)$  es un contenido volumétrico de agua residual que puede ser igual a cero (Brooks y Corey, 1964),  $D(\Phi)$  y  $K(\Phi)$  son, respectivamente, la difusividad y conductividad hidráulicas como funciones del potencial de Kirchhoff.

## 1.7 Soluciones analíticas en el riego por gravedad

El tratamiento analítico para el caso de la interacción entre el flujo del agua a superficie libre y el flujo subsuperficial ha tenido un desarrollo limitado. La búsqueda de soluciones analíticas se ha realizado básicamente para los modelos de onda cinemática

y de balance de volumen o hidrológico, es aún menor la cantidad de trabajos que utilizan al menos la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant.

El desarrollo de soluciones analíticas para el caso del modelo hidrológico o de balance de volumen se ha enfocado teniendo en cuenta formas de ley de infiltración en potencia tipo Kostiakov (Wilke y Smerdon, 1965, Hart *et al.*, 1968), la ley de infiltración de Parlange (1971, 1972b) (Parlange, 1973) o la ley de infiltración proporcionada por una forma de la solución de Philip (1957a) (Philip y Farrell, 1964).

La obtención de soluciones analíticas para el modelo de onda cinemática del flujo del agua sobre la superficie del suelo, ha sido abordada asumiendo leyes de infiltración constante (Sherman y Singh, 1982) o lineal (Weir, 1983).

## **1.8 Modelos utilizados para simular la infiltración**

Es posible distinguir diferentes modelos para el riego por gravedad dependiendo de la aproximación que utilizan para describir tanto el flujo del agua a superficie libre como el flujo del agua en el suelo, además de tener en cuenta los métodos numéricos utilizados para su implementación y las fases del riego que son capaces de simular. A continuación, se presentan los modelos que tienen mayor difusión tanto para riego por surcos como para riego por melgas.

### **1.8.1 Modelo hidrológico o de balance de volumen**

#### **1.8.1.1 Leyes de infiltración sin base físico-matemática**

En combinación con el modelo hidrológico para describir el flujo del agua a superficie libre se han utilizado diversas aproximaciones para modelar el flujo del agua en el suelo. Lewis y Milne (1938) utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para resolver la forma integral de la ecuación de conservación de masa, la solución numérica para el flujo a superficie libre se obtiene utilizando una aproximación en diferencias finitas haciendo uso generalmente de un paso de tiempo constante.

#### **1.8.1.2 Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras**

Una mejora en la descripción del flujo del agua en el suelo es realizada por Rendón *et al.*, 1997, quienes utilizan la ecuación de Green y Ampt (1911) para describir el flujo del agua en el suelo. El modelo desarrollado permite simular las cuatro fases del riego, tanto para surcos como para melgas y se constituye en una herramienta que tiene difusión entre los diseñadores del riego por gravedad en México.

## **1.8.2 Modelo de onda cinemática**

### **1.8.2.1 Leyes de infiltración sin base físico-matemática**

En combinación con el modelo de onda cinemática se utiliza generalmente la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo: Walker y Humpherys (1983), Chen (1970) y Smith (1972).

El modelo de Walker y Humpherys (1983) es de los que mayor difusión han tenido y fue desarrollado para describir tres fases del riego por surcos: avance, almacenamiento y recesión, debido a que en el modelo de onda cinemática no es posible incorporar la fase de consumo, asociada a la recesión vertical, asimismo, dado que en dicho modelo no es posible incorporar condiciones de frontera aguas abajo que alteren el flujo aguas arriba se hace necesario considerar un surco o una melga con extremo final abierto. Se tiene en cuenta tanto la aplicación continua del gasto en el inicio del surco o melga como una aplicación intermitente y se utiliza la aproximación numérica presentada por Strelkoff y Katopodes (1977) para el caso de las ecuaciones de Saint-Venant en forma de inercia cero, adaptada en este caso para la solución numérica de la ecuación de continuidad.

## **1.8.3 Modelo de inercia cero**

### **1.8.3.1 Leyes de infiltración sin base físico-matemática**

El modelo de Strelkoff y Katopodes (1977) ha permanecido como un clásico en la modelación del riego por melgas, los autores desarrollan una solución numérica para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant que tiene como base un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para describir el flujo del agua en el suelo se adopta la ecuación de Kostiakov-Lewis. El modelo desarrollado

permite describir las fases de avance, consumo y recesión. Los autores hacen énfasis en que el modelo de onda cinemática y el modelo hidrológico o de balance de volumen presentan serias deficiencias al describir la evolución del frente de avance para pendientes topográficas pequeñas según se observó en pruebas de riego efectuadas en Idaho, Estados Unidos.

#### **1.8.4 Modelos con ecuaciones de Saint-Venant simplificadas**

##### **1.8.4.1 Leyes de infiltración sin base físico-matemática**

En esta categoría se encuentra el trabajo de Sakkas y Strelkoff (1974) quienes utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua a superficie libre, el modelo presentado permite describir solamente la fase de avance del riego por melgas. Se utiliza una aproximación basada en el método de las características para obtener una solución numérica, las ecuaciones características son resueltas utilizando un algoritmo predictor-corrector haciendo uso de un método de Euler y de la regla trapezoidal respectivamente.

El modelo desarrollado por Katopodes y Strelkoff (1977) permite describir las fases de avance, consumo y recesión del riego por melgas haciendo uso de la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua a superficie libre. Las ecuaciones de Saint-Venant son resueltas utilizando el método de las características, se hace uso de un método en diferencias finitas con paso de tiempo prescrito para resolver las ecuaciones características teniendo en cuenta un algoritmo de malla móvil.

Wallender y Rayej (1990) utilizan la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo. Las aplicaciones se realizan para modelar el riego por surcos utilizando una aproximación en diferencias finitas con una malla fija en el espacio, se hace uso de un algoritmo de "disparo" para calcular el paso del tiempo necesario para alcanzar las posiciones

sucesivas en la malla espacial. Se describe solamente la fase de avance del riego por surcos.

Bautista y Wallender (1992) presentan un modelo que es básicamente una extensión del expuesto anteriormente aplicando el método de “disparo” a las fases tanto de avance como de almacenamiento y recesión del riego por surcos. El modelo tiene como base el uso de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo y una forma modificada de la ecuación de Kostiakov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo, se indica que el modelo puede considerar funciones de infiltración estocásticas para representar la variabilidad de la infiltración a lo largo del surco, pero que esta situación puede generar problemas de convergencia en el algoritmo de “disparo”. Las ecuaciones de movimiento son resueltas utilizando un esquema numérico en diferencias finitas con paso de espacio constante.

En los dos trabajos puede apreciarse el uso de pasos de tiempo que en el contexto de los modelos hidrodinámicos pueden considerarse muy grandes ( $\delta t > 2 \text{ min}$ ) en el primero y ( $\delta t > 5 \text{ min}$ ) en el segundo.

García (1994) resuelve las ecuaciones de flujo a superficie libre utilizando una aproximación en diferencias finitas desarrolladas para una malla adaptiva, es decir, una malla que se obtiene haciendo uso de una transformación de coordenadas teniendo en cuenta el dominio de flujo como una región de longitud unitaria. Para la discretización de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant con forma de momentum incompleta se utiliza el método de interpolación integral. La ecuación de Kostiakov-Lewis es adoptada para describir el flujo del agua en el suelo y se hace uso de una correlación con la ecuación de Green y Ampt para calcular los parámetros para diferentes contenidos volumétricos de agua iniciales. El modelo simula las cuatro fases del riego tanto continuo como intermitente.

#### **1.8.4.2 Leyes de infiltración con base físico-matemática**

En estos trabajos se hace uso de leyes de infiltración que tienen base físico-matemática, es decir, que son soluciones analíticas aproximadas de la ecuación de Fokker-Planck de la infiltración unidimensional. Singh y Ballamundi (1996) utilizan la ecuación de

Parlange (Haverkamp *et al.* 1990) para describir el flujo del agua en el suelo. Para resolver las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum incompleta se utiliza un esquema en diferencias finitas tipo MacCormack de naturaleza explícita, efectuándose iteraciones solamente para resolver la ecuación de Parlange discretizada en diferencias finitas, habiéndose resuelto las formas discretas mediante un método de Newton-Raphson.

### **1.8.5 Modelos con ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa**

#### **1.8.5.1 Leyes de infiltración sin base físico-matemática**

Akanbi y Katopodes (1988) modelan el riego por cuadros de inundación utilizando una aproximación tipo Petrov-Galerkin de elementos finitos para resolver la forma bidimensional de las ecuaciones de Saint-Venant conocidas como ecuaciones de aguas someras, haciendo uso de una malla deformable que se obtiene mediante una transformación de coordenadas. La ecuación de Kostikov es utilizada para describir el flujo del agua en el suelo. La verificación de la aplicabilidad del modelo se realiza comparando los resultados generados mediante su aplicación con datos experimentales obtenidos en una prueba de riego por melgas reportada en la literatura, esto es, se valida utilizando un experimento básicamente unidimensional. Un paso de tiempo máximo de un segundo es utilizado al inicio de las simulaciones.

Playán, Walker y Merkley (1994), realizan una modelación del riego por cuadros de inundación, hacen uso de un esquema explícito en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa en su forma bidimensional y utilizan la ecuación de Kostikov-Lewis para representar el flujo del agua en el suelo. Se utiliza una condición inicial diferente de cero debido, según los autores, a la necesidad de evitar singularidades en el proceso de simulación, sin embargo, esta situación no guarda concordancia con el planteamiento físico-matemático del problema del riego por gravedad.

#### **1.8.5.2 Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadoras**

Catalán *et al.*, 1988, desarrollan un modelo para describir la fase de avance del riego por melgas haciendo uso de la ecuación de Parlange (1985) para modelar el flujo del

agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa para describir el flujo del agua sobre la superficie del suelo, sin embargo, el procedimiento no tiene en cuenta el efecto en la lámina infiltrada debido al cambio del tirante de agua sobre la superficie del suelo. Las ecuaciones de Barré de Saint-Venant son resueltas utilizando una aproximación lagrangiana en diferencias finitas centradas en espacio y tiempo, resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante mediante un procedimiento Newton-Raphson recomendado por Walker y Skogerboe (1983) y Strelkoff (1983).

### **1.8.5.3 Leyes de infiltración conforme a la ecuación de Richards**

Saucedo *et al.*, (2000, 2001, 2002, 2003) presentan diversos trabajos en los cuales se modelan las cuatro fases del riego por gravedad mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant con forma de momentum completa con la ecuación de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional. La aproximación se realiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Saint-Venant, mientras que la ecuación de Richards es integrada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante una aproximación en diferencias finitas implícitas.

## **1.9 Modelos utilizados para simular la infiltración en la actualidad**

Regularmente en estudios sobre infiltración bidimensional en surcos se utilizan modelos para simular la infiltración acumulada y la percolación profunda. Algunos de los modelos que existen pueden ser utilizados solamente para simular la infiltración unidimensional, mientras que otros se pueden aplicar para flujo del agua en dos dimensiones o tres dimensiones.

Estos modelos pueden estar limitados a cierto tipo de suelos o condiciones iniciales del agua sobre la superficie del suelo. Se mencionan cinco modelos de simulación: SWMS\_2D desarrollado por Simunek *et al.*, (1994); HYDRUS\_1D desarrollado por Simunek *et al.*, (1998); HYDRUS\_2D desarrollado por Simunek *et al.*, (1999); PolyRES desarrollado por Hills *et al.*, (1995).

Conceptualmente HYDRUS\_2D y SWMS\_2D son similares, la diferencia que existe radica en que HYDRUS\_2D resuelve de manera simultánea la ecuación de flujo de calor

y se integra una subrutina para generar la malla discretizada del dominio. HYDRUS\_1D, como su nombre lo indica, es un modelo unidimensional.

El modelo SWMS\_2D resuelve la ecuación diferencial de Richards en dos dimensiones (se puede encontrar la solución del flujo de agua en tres dimensiones en aquellos problemas que exhiben simetría radial en relación al eje vertical) para simular el flujo del agua y la ecuación de convección-dispersión para describir el transporte de solutos en el suelo.

En la ecuación del flujo de agua se puede considerar la presencia de una fuente o un sumidero; una fuente en el caso de un gotero, por ejemplo, que agrega agua al perfil del suelo y un sumidero en el caso de absorción de agua por las plantas. HYDRUS\_2D usa las mismas ecuaciones que SWMS\_2D para el flujo de agua y solutos.

HYDRUS\_1D comparte las mismas características que HYDRUS\_2D, pero resuelve problemas de flujo en una sola dimensión. PolyRES resuelve la ecuación bidimensional de Richards. Con este modelo no se pueden resolver problemas de flujo tridimensional o problemas con presencia de fuentes o sumideros. Este modelo está constituido por dos componentes, "Watermap" y "Water". Watermap requiere de los datos introducidos por el usuario (geometría del dominio, condiciones iniciales, condiciones de frontera, propiedades hidráulicas del suelo y formatos de salida) para generar la geometría de los elementos rectangulares y tamaño de registros en archivos de salida. Water toma la información de Watermap y obtiene la solución de la ecuación de Richards unidimensional.

En el modelo NFUR se obtiene la solución de la ecuación de Richards (expresada en términos de la carga de presión y contenido de humedad del suelo) para resolver problemas de flujo bidimensional del agua. Mediante este modelo no se pueden abordar problemas de flujo de agua en tres dimensiones, ni problemas conteniendo fuentes o sumideros.

## 2. DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT Y RICHARDS EN LA FASE DE AVANCE DEL RIEGO POR SURCOS

### Resumen

En este capítulo se presenta un esquema numérico propuesto para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por surcos en la fase de avance. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo.

### 2.1 Flujo del agua en el suelo: ecuación de Richards

El riego es un fenómeno que se efectúa en tres dimensiones, lo cual hace necesario que el flujo del agua en el suelo sea descrito utilizando la ecuación (1.16), sin embargo, es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno se efectúa en planos paralelos al desarrollo del surco; entonces es posible utilizar la forma bidimensional de la ecuación de Richards:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.1)$$

la cual debe resolverse sobre un dominio de solución como el que se muestra en la Ilustración 1.

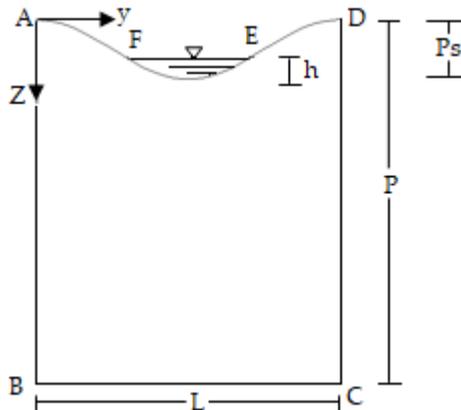


Ilustración 1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.

Donde  $z$  es la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo,  $y$  es la coordenada horizontal,  $P$  es la profundidad del perfil del suelo,  $P_s$  es la profundidad

del surco,  $L$  es el ancho del surco y  $h$  es el tirante al centro del surco. A, B, C, D, E y F son puntos de la frontera del dominio de solución empleados para definir las condiciones de frontera.

La forma del dominio de solución en su frontera superior, utilizado en este trabajo, se aproxima conforme a (López Avendaño *et al.*, 1997):

$$z = \frac{P_s}{2} \left[ 1 - \cos \left( \pi \frac{2y}{L} \right) \right] \quad (2.2)$$

### 2.1.1 Condiciones límites

Como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards bidimensional se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\psi = \psi_o(y, z) \quad (2.3)$$

Las condiciones de frontera correspondientes pueden considerarse como sigue:  $\overline{EF}$  frontera tipo Dirichlet, con potencial prescrito conforme al tirante al centro del surco,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  y  $\overline{FA}$  fronteras tipo Neumann con flujo nulo,  $\overline{BC}$  frontera bajo gradiente unitario:

$$\psi = h - (z_{L/2} - z), \quad y \in \overline{EF}, \quad z \in \overline{AB}, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi-z)}{\partial z} = 0, \quad y \in \overline{FA}, \quad z \in \overline{AB}, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi-z)}{\partial z} = 0, \quad y \in \overline{DE}, \quad z \in \overline{CD}, \quad t > 0 \quad (2.6)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi)}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \in \overline{AB}, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi)}{\partial y} = 0, \quad y = L, \quad z \in \overline{CD}, \quad t > 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\psi-z)}{\partial z} = -1, \quad y \in \overline{BC}, \quad z = P, \quad t > 0 \quad (2.9)$$

Los límites de las condiciones de frontera son  $A(0,0)$ ,  $B(0,P)$ ,  $C(L,P)$ ,  $D(L,0)$ ,  $E \left( L - \frac{L}{2\pi} \arccos \left( 1 - \frac{2(P_s-h)}{P_s} \right), (P_s - h) \right)$ ,  $F \left( \frac{L}{2\pi} \arccos \left( 1 - \frac{2(P_s-h)}{P_s} \right), (P_s - h) \right)$ .

### 2.1.2 Características hidrodinámicas

La solución de la ecuación de Richards hace indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo, expresando el potencial de presión ( $\psi$ ) como una función del contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ) y la conductividad hidráulica ( $K$ ) como una función de  $\theta$ .

Para la descripción del flujo del agua es necesaria la caracterización hidráulica del suelo. Como es señalado por Fuentes *et al.*, (1992), la combinación de las características de Fujita (1952) y Parlange *et al.*, (1982) es conveniente en estudios teóricos, como la construcción de soluciones analíticas exactas; en estudios experimentales puede ser más conveniente la utilización de la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (2.10)$$

donde  $\psi_d$  es un valor característico de la presión del agua en el suelo;  $m$  y  $n$  son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953):  $m = 1 - 2/n$ , con  $0 < m < 1$  y  $n > 2$ ;  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación efectiva del suelo, y  $\theta_r$  es el contenido volumétrico de agua residual.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (2.11)$$

donde  $\eta$  es un parámetro de forma empírico y positivo.

### 2.1.3 Cálculo de la lámina infiltrada

El volumen infiltrado por unidad de longitud de cauce ( $A_I$ ) se calcula como:

$$A_I(x, t) = \int_{P_m} q_I(x, y, z, t) dP_m \quad (2.12)$$

donde  $q_I(x, y, z, t)$  es el caudal de infiltración por unidad de superficie de surco o caudal unitario y  $P_m$  es el perímetro mojado en el surco.

#### 2.1.4 Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional

La ecuación de Richards bidimensional es discretizada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante un esquema implícito en diferencias finitas. La solución del sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método de elemento finito es efectuada empleando el método del gradiente conjugado precondicionado (Noor y Peters, 1987), el cual ha sido adaptado para utilizar un almacenamiento computacional matricial libre de ceros.

Se multiplica la ecuación 2.1 por una función de peso ( $v$ ), se integra usando el teorema de Green sobre el dominio de solución ( $R$ ) limitado por la frontera ( $\mathfrak{R}$ ) y se obtiene la siguiente expresión para la forma débil de la ecuación de Richards bidimensional:

$$\int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v dR + \int_R K(\psi) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dR = \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} dR + \int_{\Gamma} qv d\Gamma \quad (2.13)$$

donde se ha denotado como  $\Gamma$  a la fracción de  $\mathfrak{R}$  sujeta a condición de Neumann con flujo prescrito  $q$ . Se asume la solución de la ecuación (2.13) como una combinación lineal de funciones de base  $\varphi_i(y, z)$  definidas en relación con la función delta de Kronecker:

$$\hat{\psi}_n(y, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(y, z) \quad (2.14)$$

donde  $a_j(t)$  son coeficientes a ser determinados y  $n$  el número de nudos donde se obtiene la solución de elemento finito. Se sustituye en la primera forma débil de la ecuación de Richards (ecuación 2.13), teniendo en cuenta lo siguiente: i) Se consideran las funciones de peso iguales a las funciones de base ( $\varphi$ ) correspondientes a los nudos interiores. ii) Se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento, expresándola mediante las funciones de forma, i.e.:  $\hat{C} = \varphi_g C_g$  y  $\hat{K} = \varphi_g K_g$ . iii) Se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal y para mejorar la estabilidad del esquema (Neumann, 1973; Mori, 1983). Se aproxima la derivada temporal mediante un esquema implícito en diferencias finitas y se obtiene:

$$\left[ \frac{M^{k+1}}{\Delta t} + K^{k+1} \right] a^{k+1} = \left[ \frac{M^{k+1}}{\Delta t} \right] a^k + B^{k+1} + Q^{k+1} \quad (2.15)$$

donde las matrices se calculan como se indica a continuación cuando se utilizan funciones de base lineales:

$$M_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[ C_g \int_R \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k dR \right] = \sum_e C_j \frac{\Delta}{3} \quad (2.16)$$

$$K_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[ K_g \int_R \varphi_g \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] = \sum_e \frac{\bar{K}}{4\Delta} (m_j m_k + p_j p_k) \quad (2.17)$$

$$B_k = K_g \int_R \varphi_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} p_k \quad (2.18)$$

$$Q_k = \int_{\Gamma} q \bar{\varphi}_k d\Gamma = \sum_e \frac{q L_j}{2} \quad (2.19)$$

En las ecuaciones anteriores  $\bar{\varphi}$  representa la función denominada de masa concentrada, definida como una función unitaria en la región baricéntrica correspondiente a un nudo específico, y cero en el resto del dominio.  $\Delta$  es el área del elemento,  $\bar{K}$  es la conductividad en el elemento calculada como el promedio aritmético de las conductividades obtenidas en cada una de sus esquinas (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base),  $C_j$  es la capacidad específica estimada en el nudo  $j$ ,  $L_j$  es la longitud de frontera correspondiente a cada nudo bajo condición de Neumann,  $m$  y  $p$  son factores geométricos definidos según las funciones de base:  $m_i = z_j - z_k$  y  $p_i = y_j - y_k$  donde los subíndices  $i$ ,  $j$  y  $k$  corresponden a las esquinas del elemento triangular y corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciadas.

## 2.2 Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant

### 2.2.1 Esquema numérico para la fase de avance

Las ecuaciones de la hidráulica son establecidas por Saint-Venant en 1871. La hipótesis fundamental utilizada es conocida como de agua poco profunda, o hipótesis hidráulica, de modo que las características del movimiento están promediadas en la vertical y la distribución de presiones en dicha dirección utiliza la aproximación hidrostática. Esto origina que la superficie del agua es gradualmente variada, sin cambios bruscos en su pendiente.

Las ecuaciones de Saint-Venant están conformadas por la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento. La primera resulta del principio de conservación de la masa mientras que la segunda resulta del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

El tirante proporcionado por la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se utiliza para definir una condición de frontera tipo Dirichlet para la ecuación de Richards, cuya solución numérica permite el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant, teniéndose por lo tanto un procedimiento iterativo.

El esquema numérico para resolver las ecuaciones de Saint-Venant en su forma completa (ecuaciones 1.1 y 1.2) tiene como base el esquema presentado por Strelkoff y Katopodes (1977) para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant.

La solución de las formas discretas linealizadas de las ecuaciones de Saint-Venant obtenida aproximando el gasto y tirante medios para cada celda de cálculo centrados en el espacio e implícitos en el tiempo, permite obtener una solución numérica para la forma del perfil de flujo superficial que cumple con el requisito de ser monótona decreciente en el sentido del movimiento del agua.

### 2.2.2 Condiciones límites

Las condiciones inicial y de frontera que deben sujetar a las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por surcos son las siguientes:

$$Q(x, 0) = 0 \quad h(x, 0) = 0$$

$$Q(0, t) = Q_o \quad Q(x_f, 0) = 0 \quad h(x, t) = 0$$

donde  $x_f(t)$  es la posición del frente de onda para el tiempo  $t$  y  $Q_o$  el gasto de aporte en la entrada del surco, que también puede variar en el tiempo. Debe tenerse en cuenta que:

$$Q(x_f, t) = 0 \quad h(x_f, t) = 0.$$

### 2.2.3 Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant

Según Strelkoff y Katopodes (1977), la ecuación de continuidad se discretiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas considerando la deformación de la frontera del dominio de solución para seguir el frente de avance. En la Ilustración 2 se muestra la disposición de las celdas para expresar en diferencias finitas las ecuaciones de Saint-Venant.

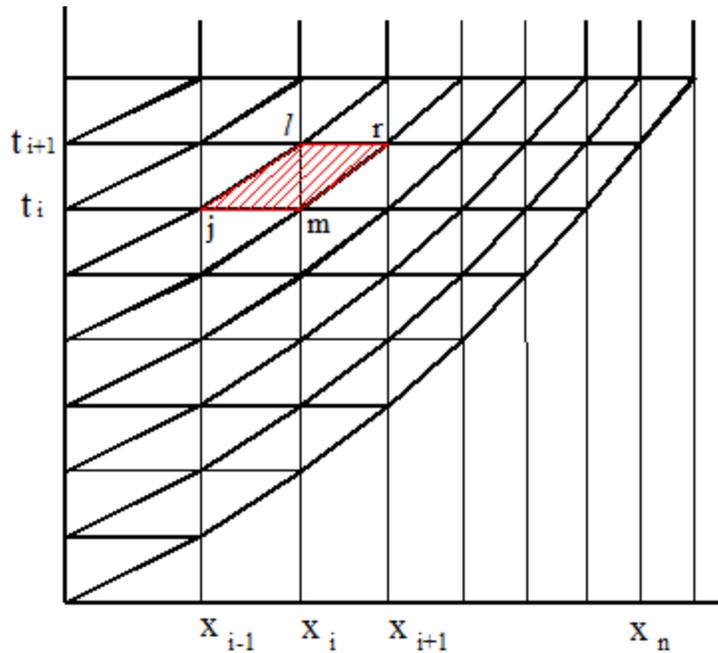


Ilustración 2. Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.

Para obtener una solución numérica monótona para la ecuación de momentum es conveniente efectuar la discretización de la ecuación teniendo en cuenta los siguientes aspectos: i) las derivadas en el espacio y pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan

utilizando una forma ponderada en el tiempo y espacio, iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior (Saucedo *et. al.*, 2005).

En las ecuaciones de Saint-Venant se deben proporcionar la función que relaciona el área de la sección transversal del cauce con el tirante de agua, así como la pendiente de la plantilla del cauce. Para condiciones iniciales y de frontera dadas las ecuaciones se resuelven para calcular, en principio, la evolución del área hidráulica y el caudal. Sin embargo, esto no es posible a menos que se proporcionen la variación de la pendiente de fricción con respecto a la geometría del cauce y el caudal, conocida como ley de resistencia al flujo o ley de resistencia hidráulica.

Como se ha mencionado, en este trabajo se adopta el uso de una ley potencial de resistencia propuesta por (Fuentes *et al.*, 2004).

Con base en la disposición de las celdas para expresar en diferencias finitas las ecuaciones de Saint-Venant, la forma discreta de la ecuación de continuidad es:

$$\begin{aligned} & \omega \delta t (Q_l - Q_r) + (1 - \omega) \delta t (Q_j - Q_m) \\ & + [\phi (A_j + I_j) + (1 - \phi) (A_m + I_m) - \omega (A_l + I_l) \\ & - (1 - \omega) (A_j + I_j)] (X_m - X_j) \\ & + [\omega (A_r + I_r) + (1 - \omega) (A_m + I_m) - \phi (A_l + I_l) \\ & - (1 - \phi) (A_r + I_l)] (X_r - X_l) = 0 \end{aligned} \quad 2.20$$

Para obtener formas monótonas de los perfiles de flujo superficial, se propone la siguiente forma de discretización de la ecuación de momentum:

$$\begin{aligned} & -\frac{32\bar{Q}\delta t}{\bar{A}^4} \delta Q_l + \frac{32\bar{Q}\delta t}{\bar{A}^4} \delta Q_r - \left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64 \cdot \bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t \cdot \delta A_l + \left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64 \cdot \bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t \cdot \delta A_r \\ & + \frac{4(1 - \phi)(X_r - X_l)}{\bar{A}^2} \delta Q_l + \frac{4(\phi)(X_r - X_l)}{\bar{A}^2} \delta Q_r \\ & + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \cdot \frac{(1 - \phi)}{d} \cdot \frac{J_j}{Q_j} \cdot \delta Q_l + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \cdot \frac{(\phi)}{d} \cdot \frac{J_m}{Q_m} \cdot \delta Q_r \\ & - \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \cdot \frac{3(1 - \phi)}{d} \cdot \frac{J_j}{A_j} \cdot \delta A_l - \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \cdot \frac{(3\phi)}{d} \cdot \frac{J_m}{A_m} \cdot \delta A_r = \quad 2.21 \\ & - \frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t [Q_m - Q_j] - \left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64 \cdot \bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t [A_m - A_j] \\ & - \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) [\phi J_m + (1 - \phi) J_j - J_o] \\ & - 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^2} (X_r - X_l) [\phi I_r + (1 - \phi) I_l - \phi I_m - (1 - \phi) I_j] \end{aligned}$$

De acuerdo con (Saucedo *et al.*, 2005) es conveniente calcular los valores medios de gasto y área hidráulica para cada celda ponderando en el espacio y utilizando valores explícitos en el tiempo:

$$\bar{Q} = (1 - \phi)Q_m + \phi Q_j \quad 2.22$$

$$\bar{A} = (1 - \phi)A_m + \phi A_j \quad 2.23$$

Se introducen las variables pequeñas (Strelkoff, 1983)  $\delta A_r$ ,  $\delta Q_r$ ,  $\delta A_l$ ,  $\delta Q_l$  tales que, para las celdas interiores se tiene:

$$A_l = A_j + \delta A_l \quad 2.24$$

$$A_r = A_m + \delta A_r \quad 2.25$$

$$Q_l = Q_j + \delta Q_l \quad 2.26$$

$$Q_r = Q_m + \delta Q_r \quad 2.27$$

La variable  $\delta Q_r$  de la última celda es sustituida por la variable  $\delta\delta$  que denota la corrección a la posición del frente de avance:

$$X_{fi} = X_{fi-1} + \delta\delta \quad 2.28$$

donde  $X_{fi}$  es la posición del frente de avance para el tiempo  $i$ -ésimo. Para la primera celda se escribe:

$$A_l = A_m + \delta A_l \quad 2.29$$

$$Q_l = Q_m + \delta Q_l \quad 2.30$$

El sistema de ecuaciones algebraicas es resuelto utilizando el método del gradiente conjugado preconditionado. Debido a la naturaleza implícita del cálculo de los valores medios de gasto y tirante para cada celda de cálculo, solamente se resuelve una vez el sistema para adelantar los perfiles de flujo en el tiempo.

El paso de tiempo se denota como  $\delta t$  y los factores de peso en el tiempo y en el espacio como  $\omega$  y  $\phi$  respectivamente. Las expresiones que definen las entradas al sistema matricial se muestran a continuación según el tipo de celda que se trate.

### 2.2.3.1 Continuidad

Primera celda

$$\begin{aligned} [-\phi X_2] \delta A_l + [-\omega \delta t] \delta Q_r + [(\omega + \phi - 1) X_2] \delta A_r = \\ -\omega \delta t \delta Q_l - [(\omega + \phi - 1) I_r + (1 - \omega) I_m - \phi I_l] X_2 \end{aligned} \quad 2.31$$

Para el caso donde  $\delta Q_l = 0$  (gasto constante en la cabecera del surco) se tiene:

$$\begin{aligned} [-\phi X_2] \delta A_l + [-\omega \delta t] \delta Q_r + [(\omega + \phi - 1) X_2] \delta A_r = \\ -[(\omega + \phi - 1) I_r + (1 - \omega) I_m - \phi I_l] X_2 \end{aligned} \quad 2.32$$

Celdas interiores

$$\begin{aligned} [\omega \delta t] \delta Q_l + [-\omega (X_m - X_j) - \phi (X_r - X_l)] \delta A_l \\ + [-\omega \delta t] \delta Q_r + [(\omega + \phi - 1) (X_r - X_l)] \delta A_r = \\ Q_m \delta t - Q_j \delta t - [\phi A_j + \phi_z I_j + (1 - \phi) A_m + (1 - \phi_z) I_m - \omega (A_j + I_l) \\ - (1 - \omega) (A_j + I_j)] (X_m - X_j) \end{aligned} \quad 2.332$$

$$-[\omega (A_r + I_r) + (1 - \omega) (A_m + I_m) - \phi A_j - \phi_z I_l - (1 - \phi) A_m - (1 - \phi_z) I_r] (X_r - X_l)$$

Última celda

$$\begin{aligned} [\omega \delta t] \delta Q_l + [(-\omega - \phi) (X_m - X_j)] \delta A_l + [-\phi (A_j + I_l)] \delta \delta = \\ -\delta t Q_j - [(\phi_z + \omega - 1) I_j - (\omega + \phi_z) I_l - A_j] (X_m - X_j) \end{aligned} \quad 2.34$$

### 2.2.3.2 Cantidad de movimiento

Primera celda

$$\begin{aligned}
 & \left[ -\frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t + \frac{4(1-\phi)X_2}{\bar{A}^2} + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t X_2 \frac{(1-\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{Q_m} \right] \delta Q_l + \\
 & \left[ -\left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} \delta t - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t X_2 \frac{3(1-\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{A_m} \right] \delta A_l + \\
 & \left[ \frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t + \frac{4(\phi)X_2}{\bar{A}^2} + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t X_2 \frac{(\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{Q_m} \right] \delta Q_r + \\
 & \left[ \left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} \delta t - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t X_2 \frac{3(\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{A_m} \right] \delta A_r = \\
 & -\frac{g}{\bar{A}^3} \delta t X_2 [J_m - J_o] - 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^4} X_2 [\phi I_r + (1-\phi)I_l - I_m]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Celdas interiores

$$\begin{aligned}
 & \left[ -\frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t + \frac{4(1-\phi)(X_r - X_l)}{\bar{A}^2} + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \frac{(1-\phi)J_j}{d} \frac{J_j}{Q_j} \right] \delta Q_l + \\
 & \left[ \frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t + \frac{4(\phi)(X_r - X_l)}{\bar{A}^2} + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \frac{(\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{Q_m} \right] \delta Q_r + \\
 & \left[ -\left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t - \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \frac{3(1-\phi)J_j}{d} \frac{J_j}{A_j} \right] \delta A_l + \\
 & \left[ \left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t - \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (X_r - X_l) \frac{3(\phi)J_m}{d} \frac{J_m}{A_m} \right] \delta A_r =
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4}\delta t[Q_m - Q_j] - \left(\frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6}\right)\delta t[A_m - A_j] - \\
& \frac{g}{\bar{A}^3}\delta t(X_r - X_l)[\phi J_m + (1 - \phi)J_j - J_o] - \\
& 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^4}(X_r - X_l)[\phi I_r + (1 - \phi)I_l - \phi I_m - (1 - \phi)I_j]
\end{aligned}$$

Última celda

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4}\delta t + \frac{4(X_m - X_j)}{\bar{A}^2}(1 - \phi) + \frac{g}{\bar{A}^3}\delta t(X_m - X_j)\frac{1}{d} \frac{J_j}{Q_j} \right] \delta Q_l + \\
& \left[ -\left(\frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6}\right)\delta t - \frac{g}{\bar{A}^3}\delta t(X_m - X_j)\frac{3}{d} \frac{J_j}{A_j} \right] \delta A_l + \\
& \left[ \frac{g}{\bar{A}^3}\delta t(J_j - J_o) + 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^2}[(1 - \phi)I_l - (1 - \phi)I_j]\delta\delta \right] = \tag{2.37} \\
& \frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4}\delta t[Q_j] + \left(\frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64\bar{Q}^2}{\bar{A}^6}\right)\delta t[A_j] - \\
& \frac{g}{\bar{A}^3}\delta t(X_m - X_j)[J_j - J_o] - \\
& 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^4}(X_m - X_j)[(1 - \phi)I_l - (1 - \phi)I_j]
\end{aligned}$$

### 2.2.3.3 Para el primer nivel de tiempo

Continuidad

$$[-\phi X_r]\delta A_l + [-\phi_z I_l]X_r = -\omega\delta t Q_1 - \omega\delta t \delta Q_l \tag{2.38}$$

Para el caso donde  $\delta Q_l = 0$  (gasto constante en la cabecera del surco) se tiene:

$$[-\phi X_r] \delta A_l + [-\phi_z I_l] X_r = -\omega \delta t Q_1 \quad 2.39$$

Cantidad de movimiento

$$\left[ -\left( \frac{c \cdot g}{\bar{A}^3} - \frac{c \cdot 64 \bar{Q}^2}{\bar{A}^6} \right) \delta t \right] A_l + \left[ \frac{4(1-\phi)Q_1}{\bar{A}^2} + \frac{g}{\bar{A}^3} \delta t (J_l - J_o) + 16\beta \frac{\bar{Q}}{\bar{A}^4} (1-\phi) I_l \right] X_r = \left[ \frac{32\bar{Q}}{\bar{A}^4} \delta t \right] Q_1 \quad 2.40$$

Donde  $c$  representa la relación que existe entre el tirante y el área hidráulica en el surco según la función propuesta por López Avendaño *et al.*, (1997), y relacionado al gasto ( $Q_0$ ) correspondiente al análisis.

La forma discreta de las ecuaciones de movimiento para el primer paso de tiempo es resuelta utilizando un método Newton-Raphson.

En las formas discretas se ha considerado el factor de peso en el espacio  $\phi = 1/2$  para las celdas interiores (Strelkoff y Katopodes, 1977), para la última celda y el primer nivel de tiempo se ha utilizado  $\phi = \pi/4$  deducido a partir del análisis de los tiempos cortos del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards presentado por Fuentes (1992). El factor de peso en el tiempo asignado es  $\omega = 0.60$  (Strelkoff y Katopodes, 1977).

### 3. VALIDACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO

El análisis para la validación del esquema se hace se realiza con el cálculo de la lámina infiltrada para tres diferentes texturas de suelo contrastantes, y la comparación se realiza calculando el indicador raíz del error cuadrático medio (RECM), calculado con la ecuación  $RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{I}_i - I_i)^2}{n}}$ , donde  $\hat{I}_i$  es la lámina infiltrada calculada con una condición de frontera variable (evolución del tirante en la cabecera del surco),  $I_i$  es la lámina infiltrada calculada con una condición de frontera fija (tirante constante en la cabecera del surco),  $n$  es el número del total de datos a analizar. La comparación se realizó a partir de la selección de cinco mallas de elemento finito con diferentes densidades para discretizar en el espacio el dominio de solución de la ecuación de Richards bidimensional, combinado con diferentes pasos de tiempo.

#### 3.1 Características del dominio de solución

La sección transversal del surco se propone con las siguientes dimensiones: un ancho de 100 cm, profundidad de 150 cm, con  $P_s = 25$  cm; en la parte superior del dominio se introduce la forma del surco que se obtiene con la ecuación 2.2.

Para resolver numéricamente la ecuación de Richards bidimensional se han construido cinco diferentes mallas de elementos finitos con diferentes densidades, como ejemplo en la Ilustración 3 se muestra la Malla No. 1 y la Malla No 5. Las características de cada una de las mallas se muestran en la Tabla 3.1.

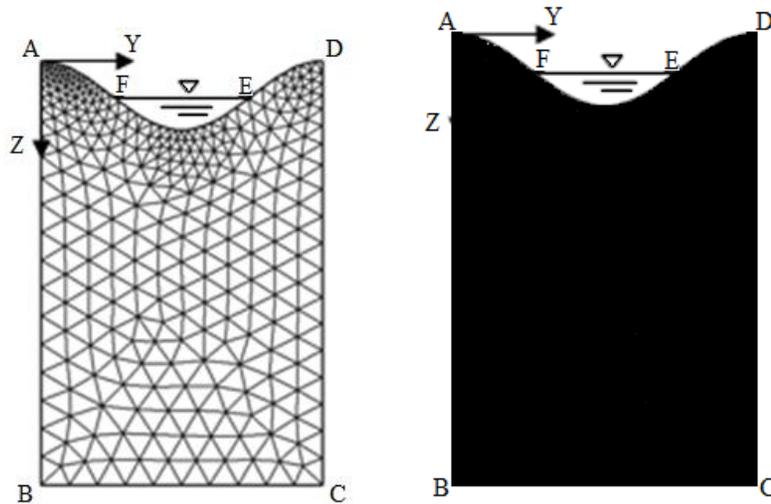


Ilustración 3. Mallas No 1 y No 5 de elementos finitos para la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional.

Tabla 3.1 Características de las mallas de elementos finitos.

No de Malla	No de Elementos	No de Nodos	Máximo incremento $\Delta x$ (cm)	Máximo incremento $\Delta z$ (cm)
1	575	334	10.0	10.0
2	1,401	764	5.0	5.0
3	8,122	4,197	2.0	2.0
4	32,014	16,272	1.0	1.0
5	127,732	64,387	0.5	0.5

Los pasos de tiempo que se consideran en la discretización son:  $\Delta t = 1.0$ ,  $\Delta t = 5.0$ ,  $\Delta t = 10.0$ ,  $\Delta t = 30.0$  y  $\Delta t = 60.0$  segundos. Las características hidrodinámicas de tres tipos de suelo contrastantes, se muestran en la Tabla 3.2 (Saucedo *et al.*, 2013).

Tabla 3.2 Características hidrodinámicas para tres texturas de suelos.

Suelo	$\theta_r$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$\theta_s$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$\psi_d$ (cm)	$K_s$ (cm/h)	$m = 1 - 2/n$	$\eta$
Franco Arenoso	0.0	0.450	9.52	5.0	0.1004	13.62
Franco Limoso	0.0	0.525	29.35	0.60	0.1165	12.01
Franco Arcilloso	0.0	0.475	34.15	0.15	0.0714	19.30

### 3.2 Condición de frontera en el surco

Para resolver numéricamente la ecuación de Richards bidimensional se requiere conocer la evolución en el tiempo del tirante de agua en el surco. La aplicación de la hipótesis del tiempo de contacto (Saucedo *et al.*, 2006) permite proponer como una primera aproximación, una forma única de la evolución en el tiempo del tirante en el surco a lo largo del desarrollo del mismo. En este capítulo se propone considerar una aproximación de la forma de la evolución del tirante, obtenida mediante el acoplamiento numérico interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards para el riego por surcos.

En las Ilustraciones 4, 5 y 6 se muestra la evolución del tirante en la cabecera del surco obtenidas mediante el acoplamiento numérico interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por surcos para los tres tipos de suelo.

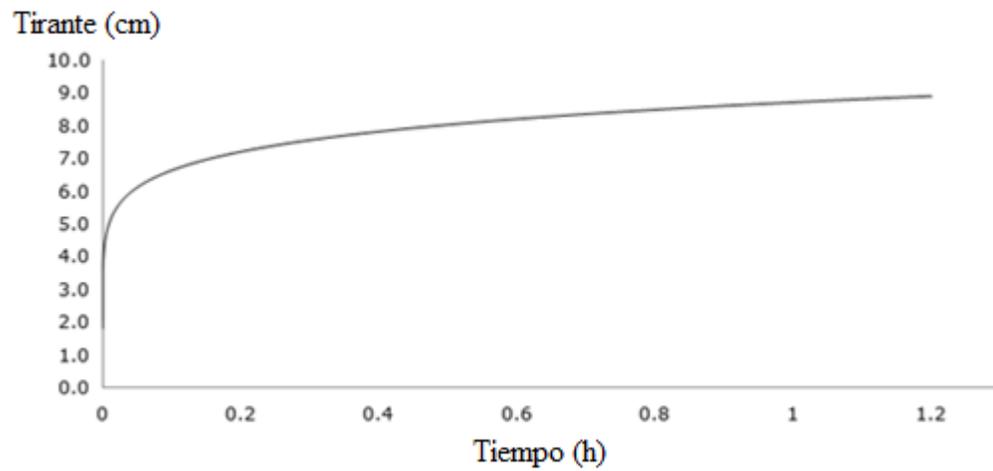


Ilustración 4. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco arenoso.

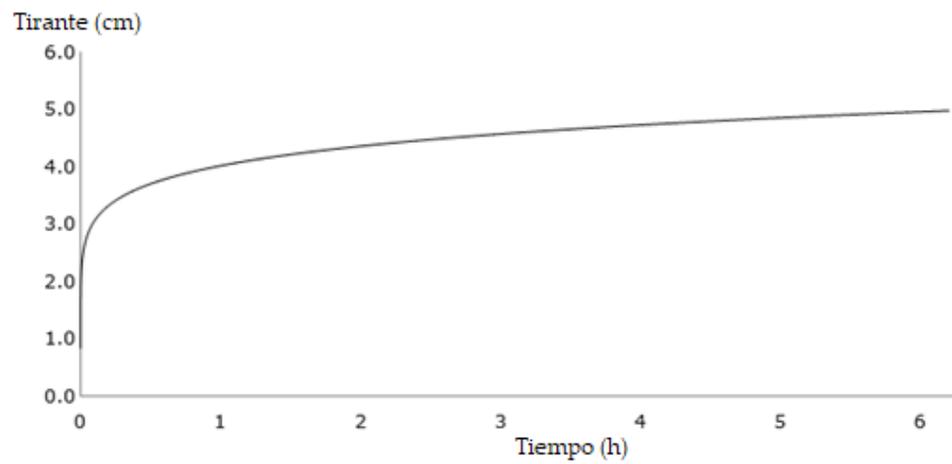


Ilustración 5. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco limoso.

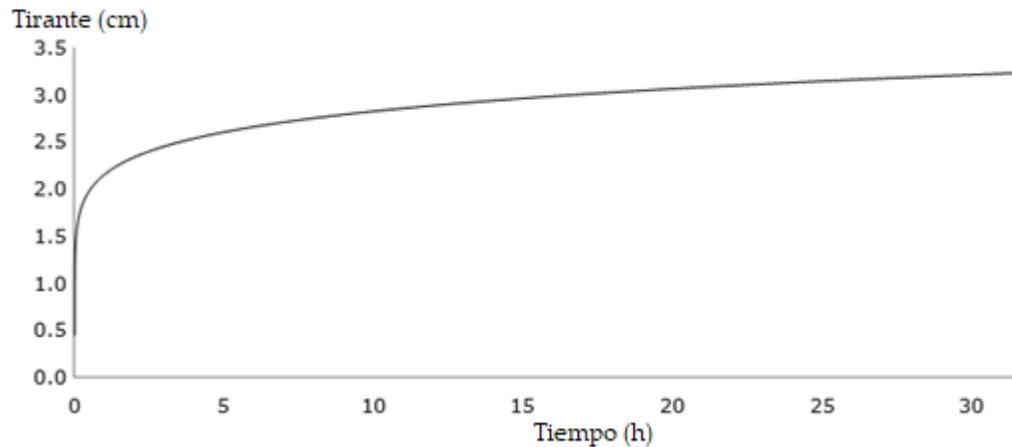


Ilustración 6. Evolución del tirante en la cabecera del surco para el suelo franco arcilloso.

El criterio de estabilidad se asume como Banti *et al.*, 2011, por lo tanto, se trabaja con una discretización espacial en una menor escala que en el proceso de validación referido, y se trabajan diferentes pasos de tiempo, en su mayoría menores o igual a 30.0 s, obteniendo un error relativo máximo similar al estimado en el trabajo en comento.

### 3.3 Resultados

La solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional combinada con la aproximación temporal basada en diferencias finitas implícitas, fue programada en C++. El modelo así obtenido fue aplicado para calcular la lámina infiltrada al dominio de solución en tres tipos de suelo contrastantes. Se realizó una comparación de los resultados obtenidos con diferentes discretizaciones en espacio y tiempo, en particular, se emplearon cinco mallas de elemento finito y cinco pasos de tiempo.

En las Ilustraciones 7, 8, y 9 se muestran los resultados del cálculo de la lámina infiltrada para los tres diferentes tipos de suelo, para las dos mallas de elemento finito más finas y para un paso de tiempo de 1.0 segundos.

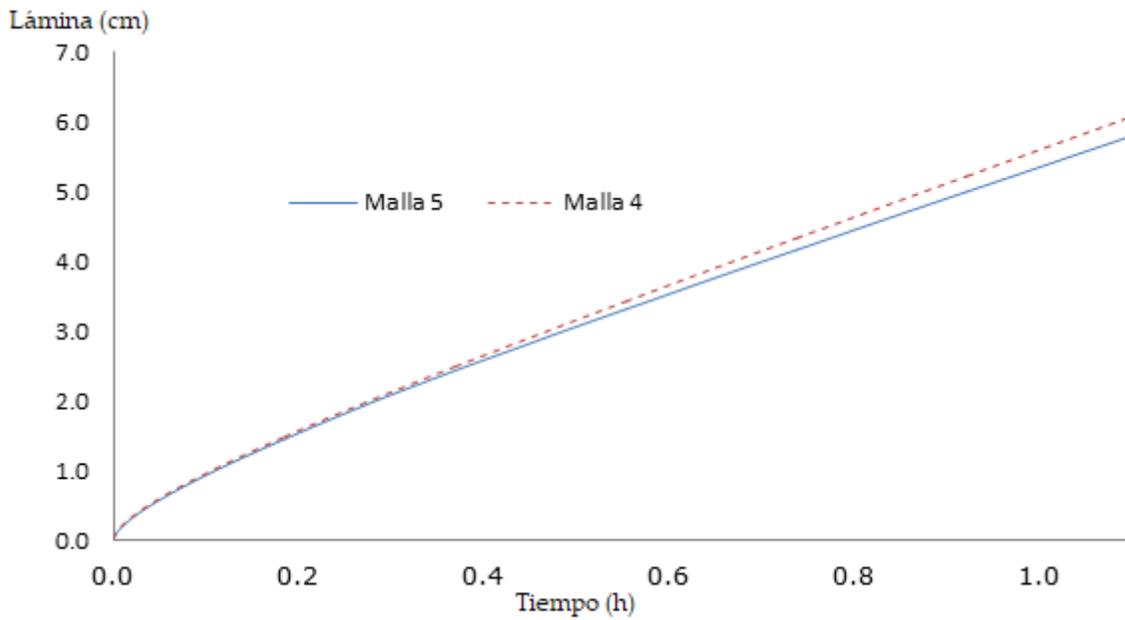


Ilustración 7. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 horas.

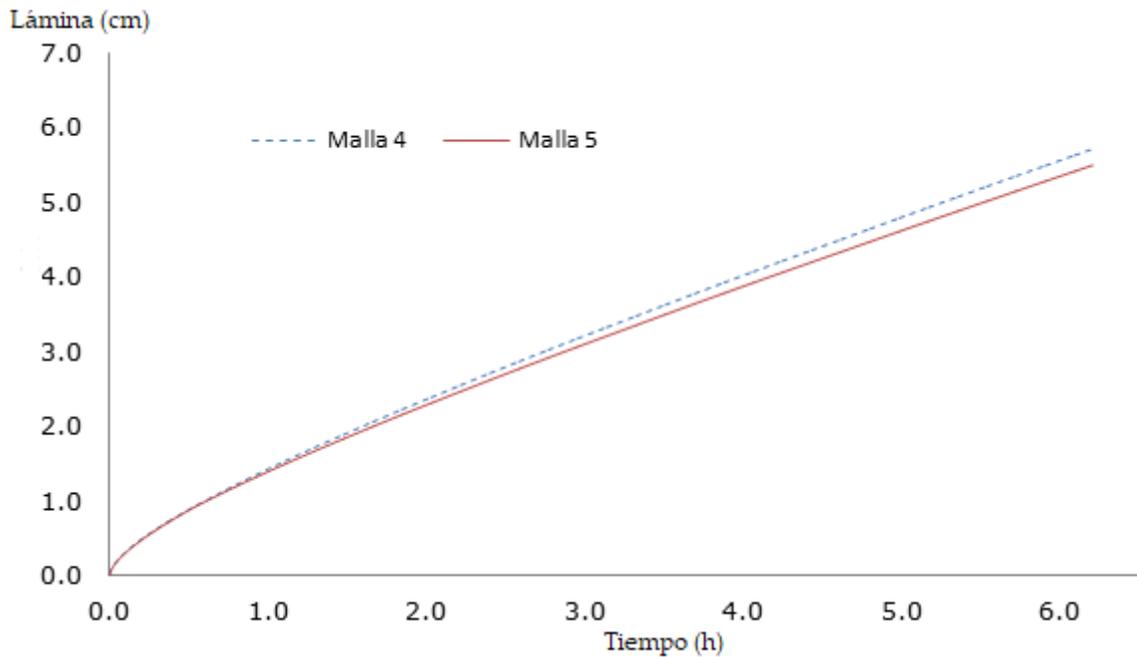


Ilustración 8. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 horas.

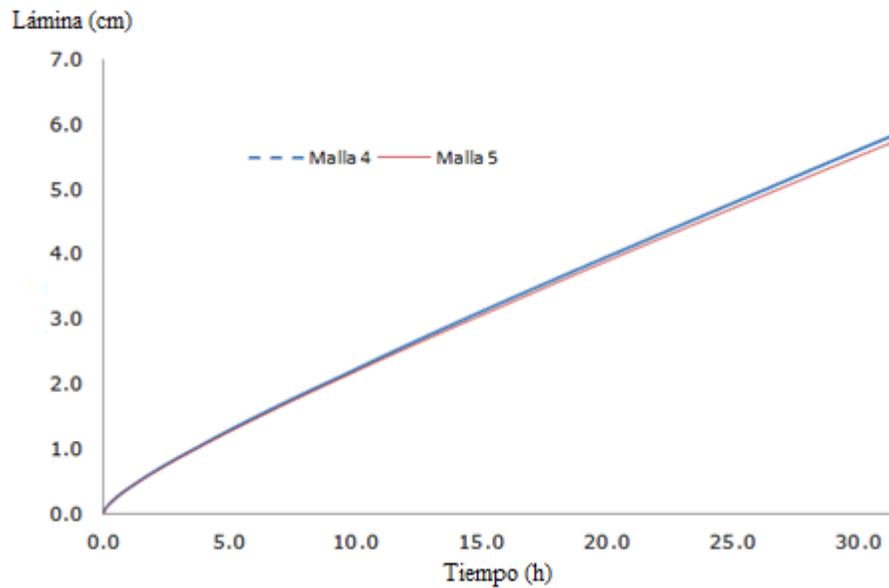


Ilustración 9. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 horas.

En las Ilustraciones 10, 11, y 12 se muestran líneas de igual contenido de humedad para los tiempos de riego típicos anteriormente mencionados, los resultados presentados consideran un paso de tiempo de 1.0 segundo, con discretización en el espacio conforme a la malla de elemento finito más fina.

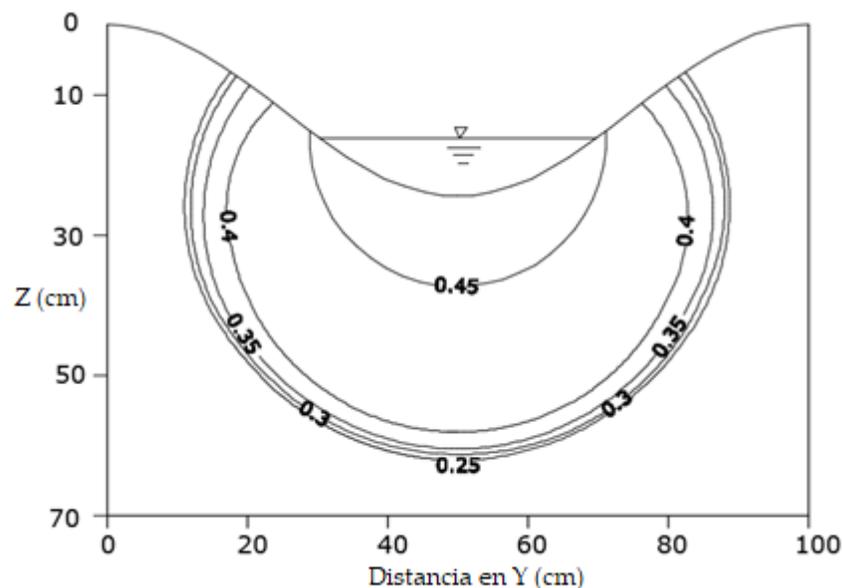


Ilustración 10. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 1.2 horas, en el suelo franco arenoso,  $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  (100% de saturación).

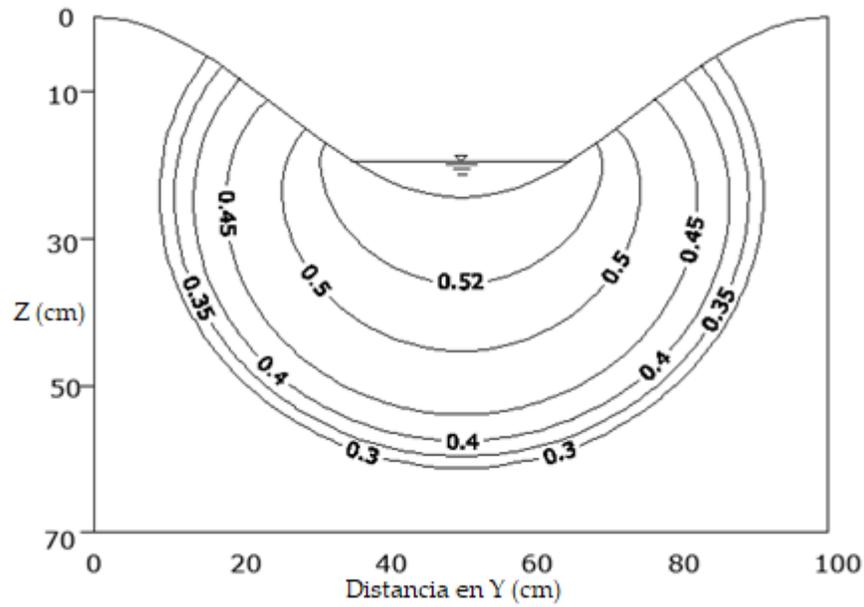


Ilustración 11. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 6.2 horas, en el suelo franco limoso,  $\theta_s = 0.525 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  (100 % de Saturación).

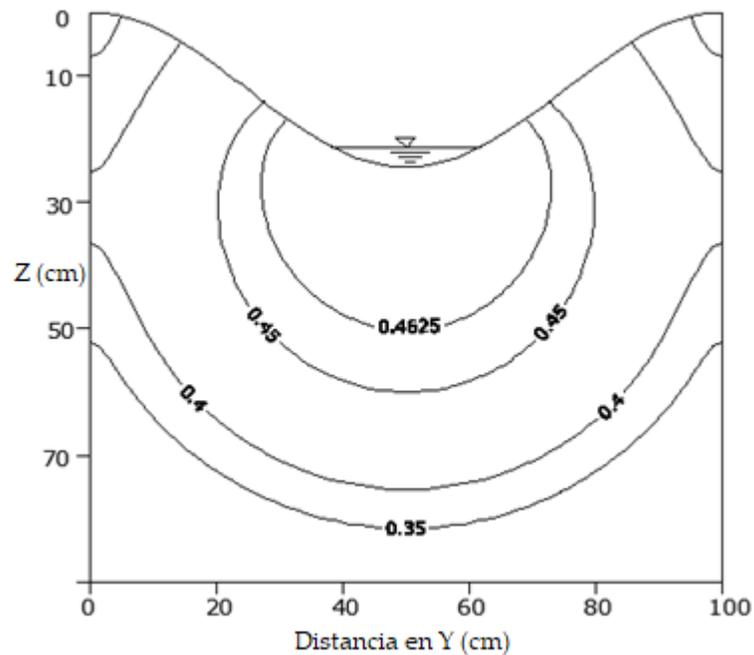


Ilustración 12. Distribución de humedad obtenida con la modelación, considerando un tiempo típico de riego de 31.4 horas, en el suelo franco arcilloso,  $\theta_s = 0.475 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  (100% de saturación).

En las Ilustraciones 13 - 15 se muestra el valor del RECM, correspondiente a los resultados de lámina infiltrada obtenidos utilizando la malla No 5, respecto a los resultados obtenidos con las mallas No 1, 2, 3 y 4. Con esta combinación, que tiene como base la malla No 5, se presenta el máximo error en los resultados; cualquier otra combinación de las mallas para determinar el indicador RECM presenta un valor menor que el presentado a continuación:

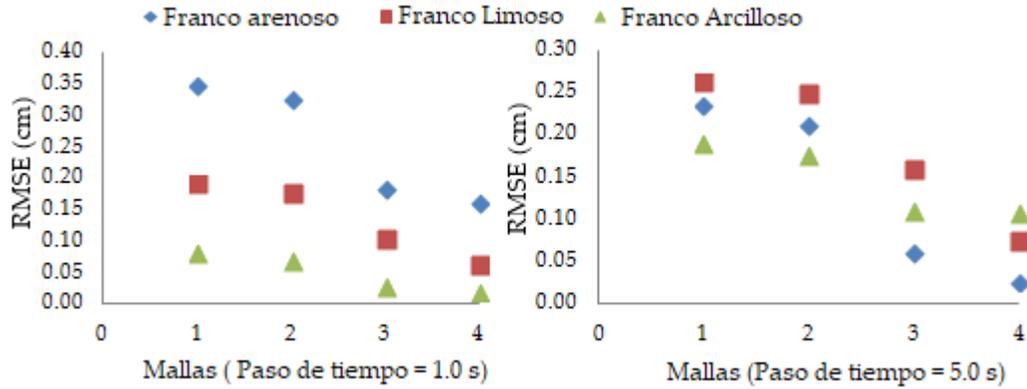


Ilustración 13. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 1.0 y 5.0 s.

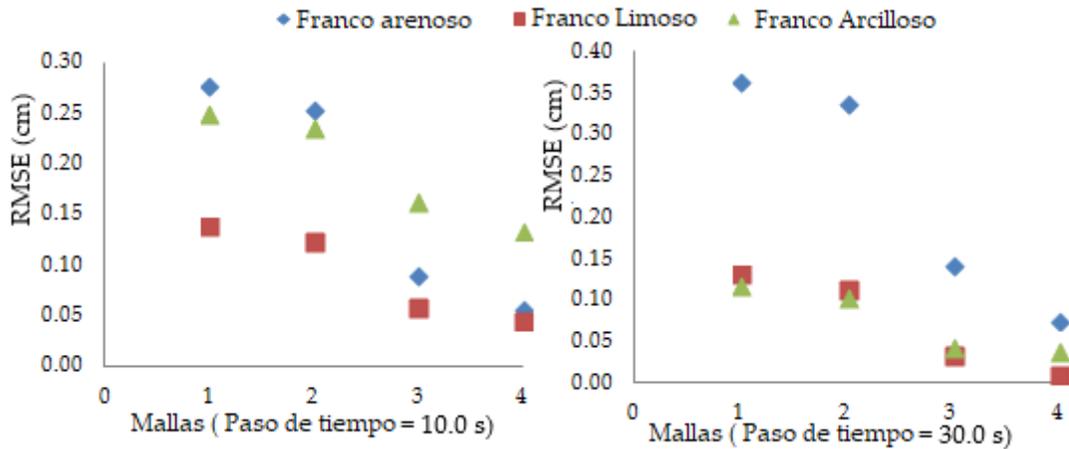


Ilustración 14. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 10.0 y 30.0 s.

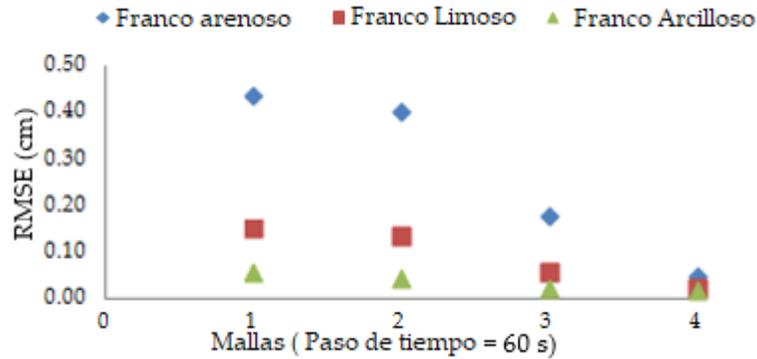


Ilustración 15. Valores del RECM comparando la lámina infiltrada para tres texturas de suelo y cinco mallas de elemento finito, paso de tiempo de 60.0 s.

Como se presenta anteriormente, los resultados fueron comparados considerando los cinco pasos de tiempo como referencia. En la Ilustración 16 se muestran los valores del indicador RECM que comparan los resultados de la evolución de la lámina infiltrada, considerando como estándar la malla más fina en combinación con el menor paso de tiempo.

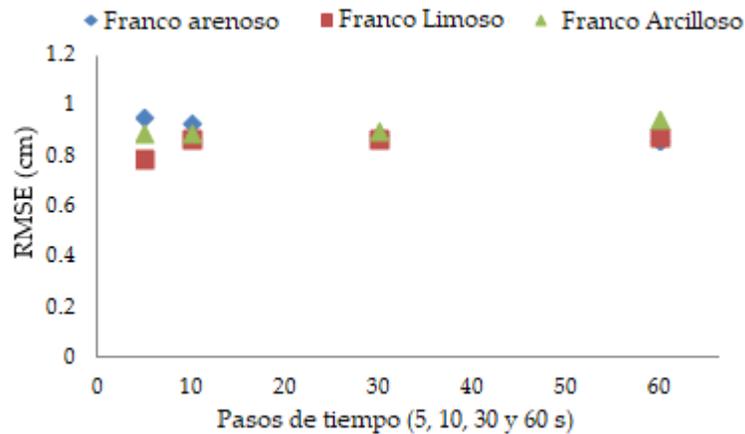


Ilustración 16. Valores del RECM para diferentes pasos de tiempo.

La inestabilidad en los resultados de lámina infiltrada para el suelo franco arenoso fue evidente cuando los pasos de tiempo son mayores a 10.0 s. Estos resultados son similares a los reportados en la literatura por Selker *et al.*, (1991) y Hendrickx *et al.*, 1996.

Otro objetivo de este capítulo es comparar los resultados de la evolución de la lámina infiltrada obtenidos cuando se considera un tirante constante en el surco con aquellos obtenidos del acoplamiento numérico interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards. Los resultados se muestran en las Ilustraciones 17 - 19. Se utiliza la malla 5 y un paso de tiempo de 1.0 s.

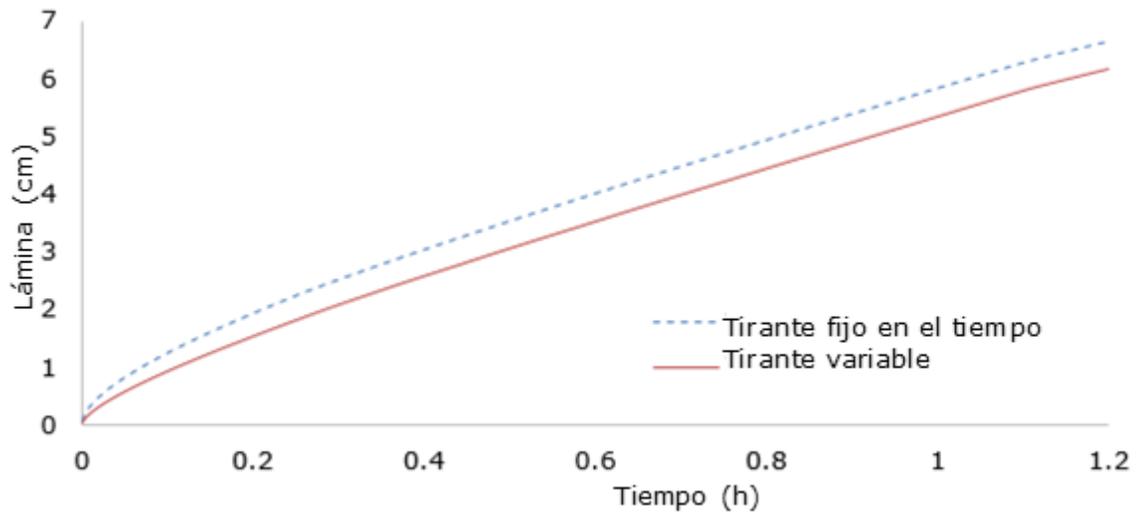


Ilustración 17. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 horas. RCECM=0.460 cm.

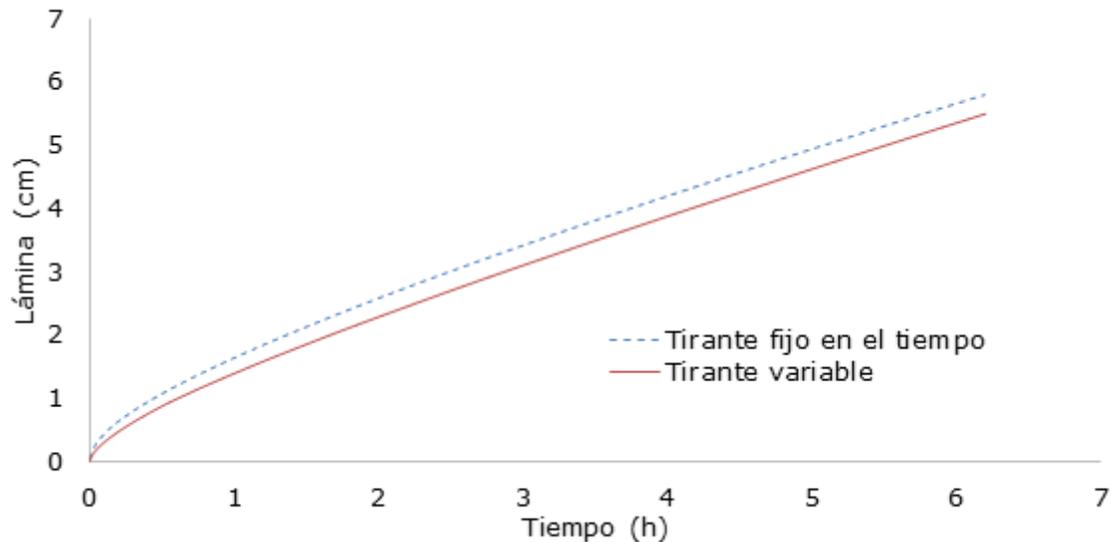


Ilustración 18. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 horas. RCECM=0.292 cm.

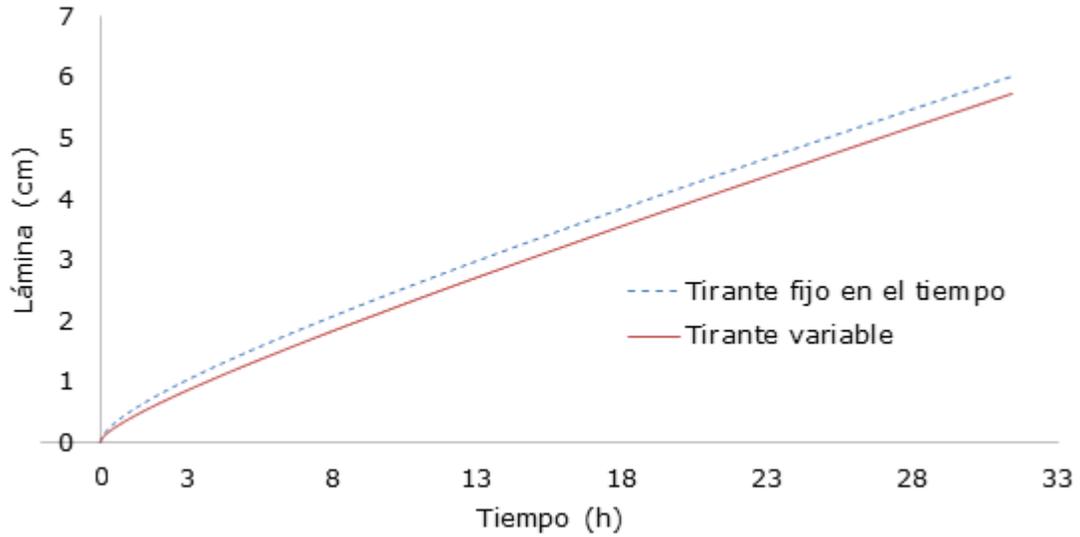


Ilustración 19. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 horas. RCECM=0.267 cm.

Los resultados evidencian lo conveniente de considerar la evolución del tirante en el tiempo en la simulación de la infiltración. Los valores del indicador RECM mostrados en las Ilustraciones 17 - 19 son mayores que los mostrados en las Ilustraciones 13 - 15.

Para ampliar el alcance de este capítulo y para una exploración más completa del tema, los resultados se compararon con aquellos obtenidos al aplicar el programa HYDRUS-2D (Versión 2.0, PC-Progress, Praga, República Checa). El programa HYDRUS resuelve numéricamente la ecuación de Richards bidimensional. HYDRUS implementa las características hidrodinámicas de van Genuchten (1980), utilizando el modelo estadístico de distribución de poros de Mualem (1976) para obtener una ecuación predictiva para la función de conductividad hidráulica no saturada en términos de los parámetros de retención de agua del suelo. Las expresiones de van Genuchten (1980) son:

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha\psi|^n]^m} & \psi < 0 \\ \theta_s & \psi \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.2)

$$K(\psi) = K_s S_e^l \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right]^2$$

donde

$$m = 1 - 1/n, n > 1 \quad (3.3)$$

Las ecuaciones anteriores contienen seis parámetros independientes:  $\theta_r$ ,  $\theta_s$ ,  $\alpha$ ,  $n$ ,  $K_s$  y  $l$ . El parámetro de porosidad-conectividad  $l$  en la función de la conductividad hidráulica se estima de acuerdo con Mualem (1976), y se considera un valor de 0.5, el cual es el promedio para varios tipos de suelo.  $S_e$  es el porcentaje de saturación.

Los resultados mostrados en las Ilustraciones 17 – 19 se comparan con aquellos obtenidos aplicando el tirante normal indicado las Ilustraciones 4 - 6 (se considera un tirante constante en el tiempo) en el programa HYDRUS-2D. Los parámetros usados para implementar en el suelo la función hidráulica de van Genuchten-Mualem para obtener la ecuación predictiva de la función de conductividad hidráulica se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3 Características hidrodinámicas para los tres tipos de suelo usados en HYDRUS-2D.

Suelo	$\theta_s$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	$K_s$ (m/s)	$m = 1 - 1/n$	$n$ ( $n > 1$ )	$l$
Franco arenoso	0.450	$1.390 \times 10^{-5}$	0.1004	1.1116	0.5
Franco limoso	0.525	$0.0167 \times 10^{-4}$	0.1165	1.1318	0.5
Franco arcilloso	0.475	$0.0042 \times 10^{-4}$	0.0714	1.0769	0.5

Los resultados se muestran en las Ilustraciones 20 - 22. Una malla similar a la malla No 5 es usada en el programa HYDRUS-2D, se aplica un paso de tiempo de 1.0 s.

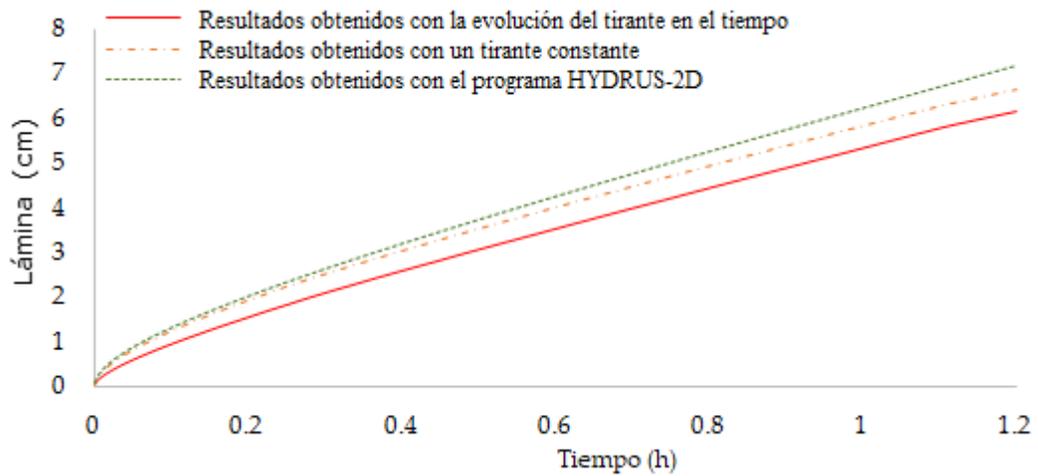


Ilustración 20. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arenoso. Tiempo típico de riego de 1.2 h. Se obtiene un RECM= 0.721 cm de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.

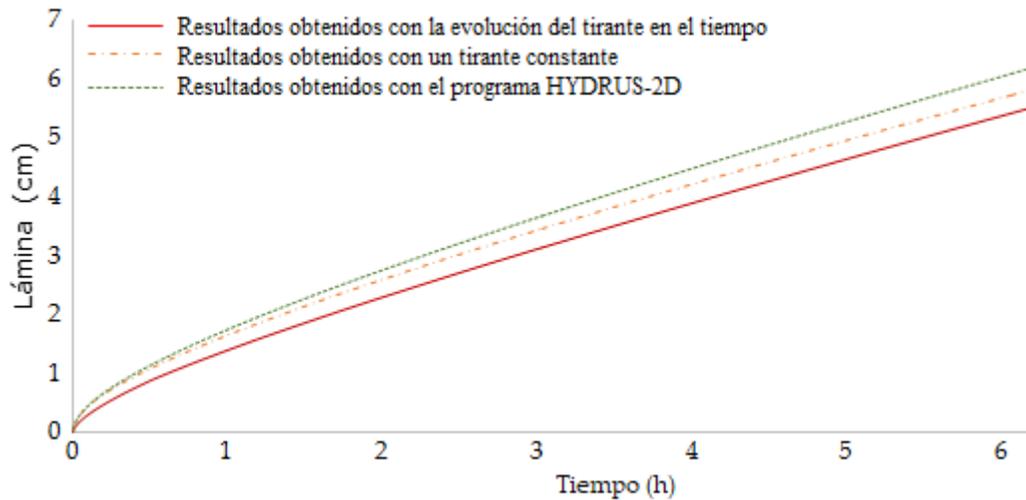


Ilustración 21. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco limoso. Tiempo típico de riego de 6.2 h. Se obtiene un RECM= 0.516 cm de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.

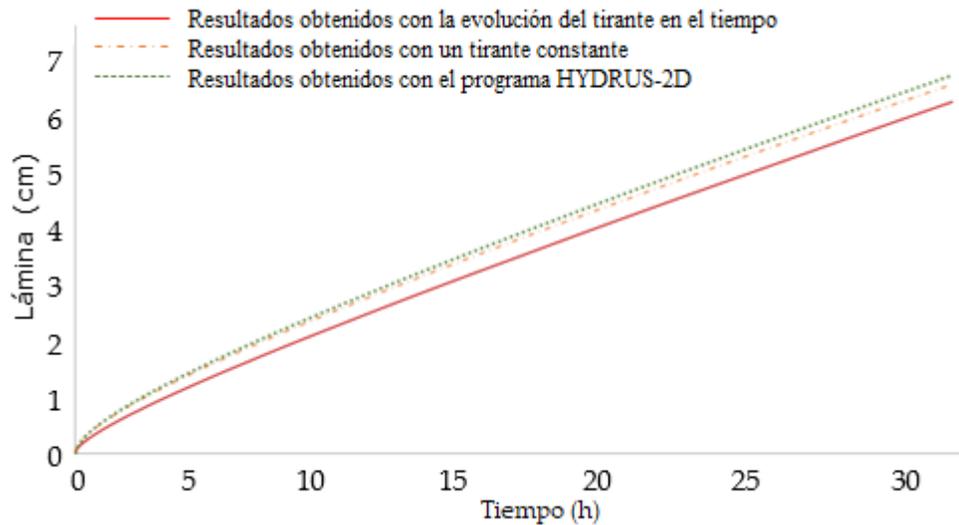


Ilustración 22. Evolución de la lámina infiltrada para el suelo franco arcilloso. Tiempo típico de riego de 31.4 h. Se obtiene un RECM= 0.365 cm de la comparación de los resultados obtenidos con la evolución del tirante en el tiempo y los obtenidos con el programa HYDRUS-2D.

Los resultados confirman que es importante considerar el acoplamiento completo de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards para mejorar las simulaciones del riego por surcos.

### 3.4 Validación del modelo con resultados de soluciones analíticas.

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards bidimensional, hace necesario validar el modelo desarrollado comparando los resultados obtenidos mediante su aplicación y aquellos proporcionados por una solución analítica.

La simetría del surco seleccionado permite inferir que el flujo horizontal en la sección sobre el surco es nulo, y en consecuencia el movimiento del agua en esta sección es unidimensional vertical para todo tiempo. En consecuencia, la solución numérica sobre el centro del surco puede ser validada con una solución analítica para una columna de suelo.

Existen soluciones exactas para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie de la misma. Las soluciones exactas se han construido para las características hidrodinámicas propuestas por Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982).

La forma para la difusividad hidráulica propuesta por Fujita (1952) es:

$$D(\theta) = \left( \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \left[ \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\theta)^2} \right] \quad (3.4)$$

donde  $\Theta$  representa el grado de saturación:

$$\theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (3.5)$$

$\theta_r$  es el contenido volumétrico de agua residual,  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación,  $K_s$  la conductividad hidráulica a saturación,  $\lambda_c$  es la escala de Bouwer (1964), y  $\alpha$  es un parámetro de forma ( $1 < \alpha < 1$ ).

De la relación entre la difusividad y conductividad hidráulicas propuesta por Parlange *et al.* (1982) se deduce (Fuentes *et al.*, 1992):

$$K(\theta) = K_s \frac{\theta[1 - \beta + (\beta - \alpha)\theta]}{1 - \alpha\theta} \quad (3.6)$$

donde  $\beta$  es un parámetro adimensional ( $0 < \beta < 1$ ).

La curva característica de humedad o curva de retención resulta de la definición  $D(\theta) = K(\theta)d\Psi/d\theta$ , es decir:

$$\Psi = \Psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha\theta}{(1 - \alpha)\theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\theta}{(1 - \alpha)\theta} \right] \right\} \quad (3.7)$$

donde  $\Psi_c = -\lambda_c$ .

Para las características de Fujita y Parlange, con el caso particular de  $\alpha$  variable y  $\beta = 1$ , se han desarrollado soluciones analíticas exactas en una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie del suelo y a un contenido de agua inicial constante. En flujo bifásico la solución es presentada por Rogers *et al.* (1983), y en flujo monofásico por Sanders *et al.* (1988).

La solución del último trabajo ha sido adaptada por Warrick y Parkin (1995) para el caso del drenaje en una columna semi-infinita de suelo y para el flujo del agua en una

columna finita por Hills y Warrick (1993). La solución para el caso general de  $\alpha$  y  $\beta$  variables es presentada por Fuentes (1992):

$$\theta(\zeta, t_*) = \frac{\mu(\zeta, t_*)}{1 - \alpha + \alpha\mu(\zeta, t_*)} \quad (3.8)$$

$$\mu(\zeta, t_*) = \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} - \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\beta[u_f(\zeta, t_*) + u_c(\zeta, t_*)]} \left[ \frac{\partial u_f(\zeta, t_*)}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_c(\zeta, t_*)}{\partial \zeta} \right] \quad (3.9)$$

$$z_*(\zeta, t_*) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \left[ \left( 1 - \alpha + \alpha \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} \right) \zeta \right] + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{\exp(\lambda^2 t_*)}{u_f(\zeta, t_*) + u_c(\zeta, t_*)} \right] \quad (3.10)$$

siendo:

$$u_f = \frac{1}{2} \exp(-\lambda \zeta + \lambda^2 t_*) \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{t_*}} - \lambda\sqrt{t_*} \right) + \frac{1}{2} \exp(\lambda \zeta + \lambda^2 t_*) \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{t_*}} + \lambda\sqrt{t_*} \right) \quad (3.11)$$

$$u_c = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_*}} \int_0^\infty \exp[A(\bar{\zeta})] \left[ \exp\left(-\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{4t_*}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta + \bar{\zeta})^2}{4t_*}\right) \right] d\bar{\zeta} \quad (3.12)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \sqrt{(1 - \beta)^2 + 2[2\beta(1 - \alpha) - \alpha(1 - \beta)]Q + (\alpha Q)^2} \quad (3.13)$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha}} \left[ \alpha Q \zeta - \int_0^\zeta (1 - \beta + 2\beta\mu_i(\bar{\zeta})) d\bar{\zeta} \right] \quad (3.14)$$

en donde las variables adimensionales están definidas por:

$$z_* = \frac{z}{\lambda_c}, \quad t_* = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r)\lambda_c} t \quad (3.15)$$

El cálculo de la función  $A(\zeta)$  requiere del conocimiento de la condición inicial. Por simplicidad se escogerá un contenido de agua constante en todo el perfil ( $\theta_i$ ). El valor correspondiente  $\mu_i$  se calcula utilizando la ecuación (3.8). La función resultante  $A(\zeta) = [\alpha Q - (1 - \beta + 2\beta\mu_i)]\zeta/2\sqrt{1 - \alpha}$ , permite obtener de la ecuación (3.12) la solución para  $u_c$  de manera cerrada.

La solución analítica para el perfil de humedad  $\theta(z, t)$  es paramétrica, es decir de la forma  $\theta(\zeta t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)\Theta[\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$  y  $z = \lambda_c z_* [\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$ , con  $\zeta \geq 0$  como parámetro.

La semejanza entre los perfiles de humedad generados con el esquema numérico y los proporcionados por la solución exacta está influenciada básicamente por la discretización del dominio en el espacio y el tiempo. Debido al esfuerzo de cómputo que se requiere para realizar verificaciones del comportamiento de la solución de elemento finito, se ha optado por mantener fija la discretización del espacio y modificar la discretización en el tiempo. El paso de tiempo inicial escogido es  $\Delta t = 0.50$  s, el cual se incrementa gradualmente conforme al número de iteraciones que es necesario realizar dentro de cada paso de tiempo hasta alcanzar un paso de tiempo máximo fijado ( $\Delta t_{max}$ ). Se han adoptado las siguientes reglas: para una tolerancia dada, si el esquema converge en un número menor o igual a  $P$  iteraciones, el paso de tiempo se incrementa en, por ejemplo, 5%; si el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es mayor que  $W$ , donde  $W > P$ , se reduce el paso de tiempo en, por ejemplo, 25%.

Un detalle de la discretización del espacio utilizada tanto para la validación del modelo como para la simulación de la transferencia de agua en un surco se aprecia en la Ilustración 23. La malla completa consta de 8,136 nudos, distribuidos en 16,007 elementos, y ha sido elaborada respetando la condición de uniformidad (Mori, 1983) con el programa Argus One. Los pasos de espacio mínimos escogidos son  $\Delta y_{min} = 1.0$  cm, y  $\Delta z_{min} = 1.0$  cm, y los máximos son  $\Delta y_{max} = 10.0$  cm y  $\Delta z_{max} = 10.0$  cm. Se ha utilizado el método del gradiente conjugado preconditionado (Noor *et al.* 1987) con almacenamiento libre de ceros para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas que resulta de la aplicación del método del elemento finito.

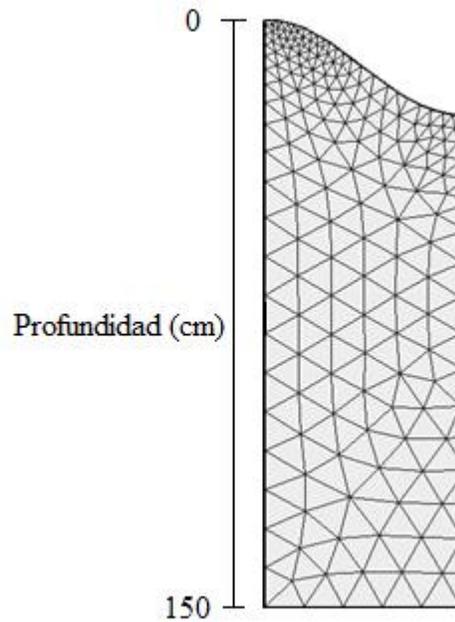


Ilustración 23. Detalle de la malla de elementos finitos.

La validación del modelo es realizada en una arcilla clara de Yolo, USA y una arena del río Isère, Francia, cuyos valores de los parámetros de Fujita y Parlange son reportados por Fuentes *et al.* (1992) y se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4 Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange para dos suelos contrastantes.

Suelo	$\theta_r$ [cm <sup>3</sup> / cm <sup>3</sup> ]	$\theta_s$ [cm <sup>3</sup> / cm <sup>3</sup> ]	$\lambda_c$ [cm]	$K_s$ [cm / h]	$\alpha$	$\beta$
Arcilla clara de Yolo, USA	0.2285	0.4950	27.05	0.0443	0.8912	1.0
Arena del Isère, Francia	0.0438	0.3120	9.20	15.3700	0.8820	1.0

En la Tabla 3.5 se presentan los valores del contenido de agua inicial y del flujo de agua en la superficie del suelo seleccionados para realizar la comparación entre los perfiles de humedad calculados con la solución numérica y la solución analítica en los dos suelos presentados en la Tabla 3.4.

Tabla 0.1 Error máximo obtenido al comparar las soluciones analítica y de elemento finito para dos suelos contrastantes.

Suelo	$\theta_0$ [cm <sup>3</sup> / cm <sup>3</sup> ]	$q_0$ [cm/h]	$\Delta t_{max} = 30$ s	$\Delta t_{max} = 180$ s
			$E_{max}$ (%)	$E_{max}$ (%)
Arcilla clara de Yolo, USA	0.2500	0.040	0.210	0.211
Arena del Isère, Francia	0.1000	4.000	0.172	0.315

La comparación gráfica entre los perfiles de humedad para los dos pasos de tiempo máximos escogidos,  $\Delta t_{max} = 30$  s y 180 s, es mostrada en la Ilustración 24 para la arcilla, y en la Ilustración 25 para la arena.

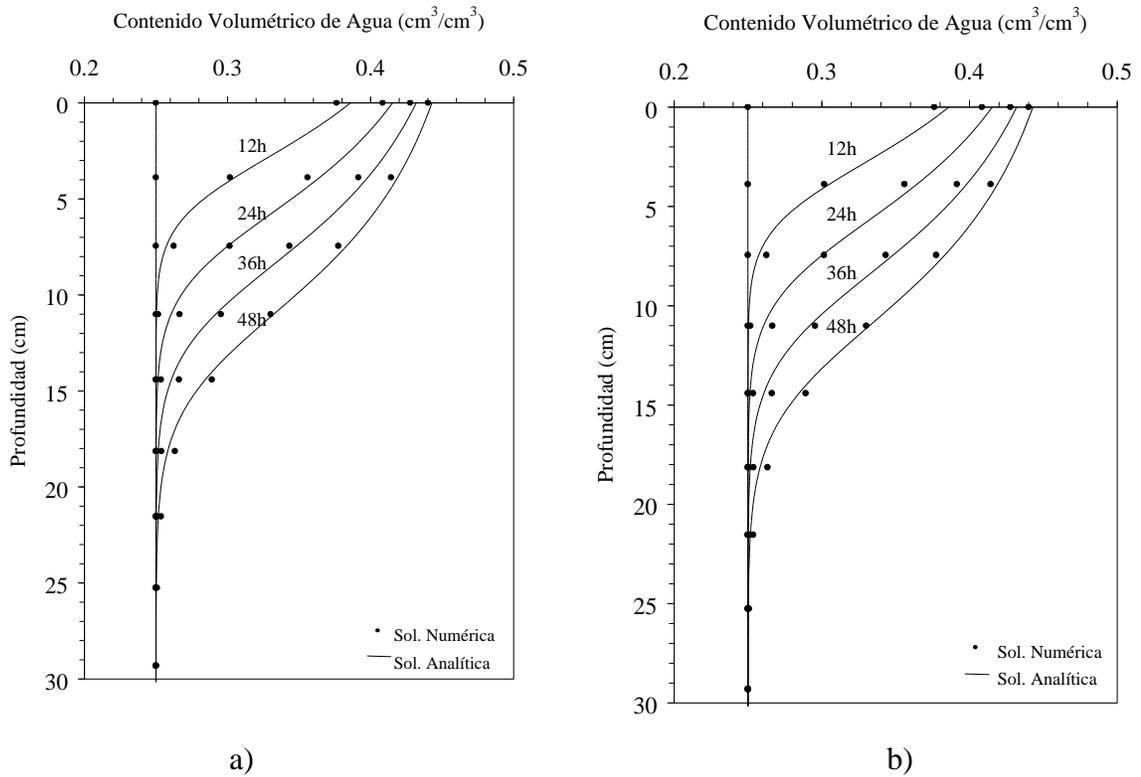


Ilustración 24. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arcilla clara de Yolo: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.

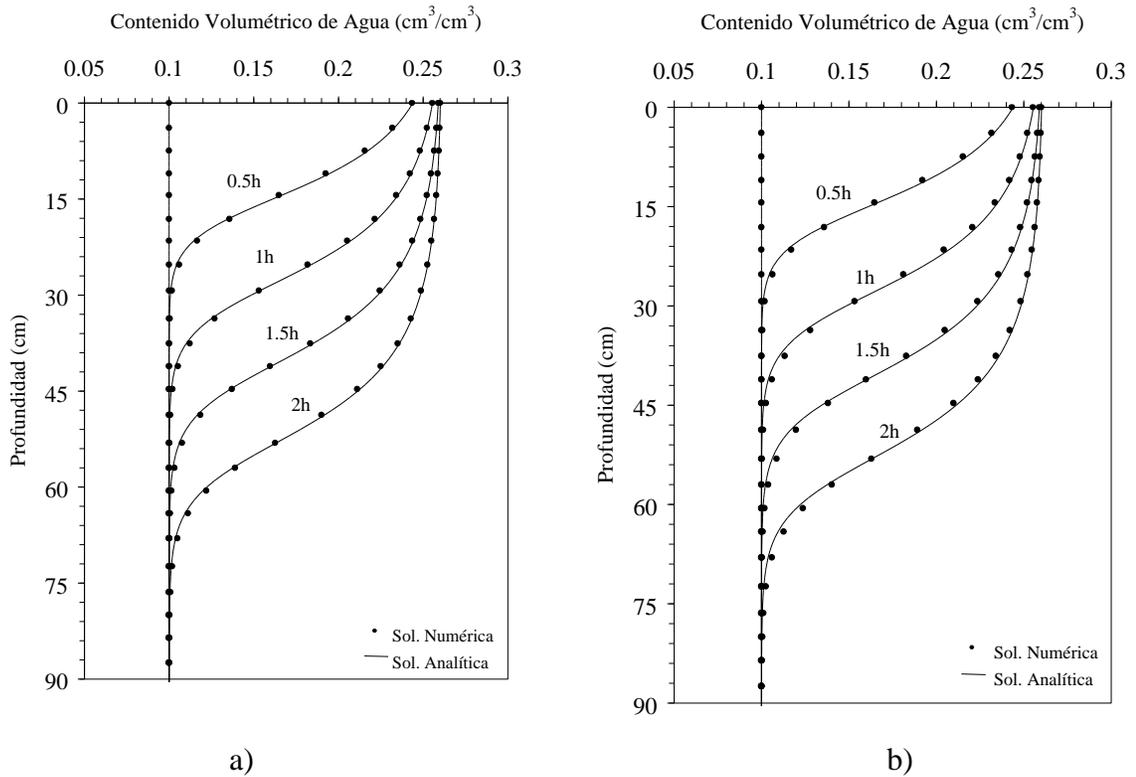


Ilustración 25. Comparación de la solución analítica y la solución numérica en la arena del río Isère: a) paso de tiempo máximo de 30 s, b) paso de tiempo máximo de 180 s.

Los errores relativos máximos entre las dos soluciones para los dos pasos de tiempo escogidos son calculados con la expresión:

$$E_{max} = \max \left| \frac{\theta_{num} - \theta_{exacta}}{\theta_{exacta}} \right| \times 100 \quad (3.16)$$

Los errores presentados en la Tabla 3.5, para los dos pasos de tiempo mencionados, muestran que el error en la arcilla no es significativo mientras que el error en la arena es de aproximadamente el doble. Si se desea aceptar un error menor de 0.25% en ambos suelos se puede escoger como paso de tiempo máximo:  $\Delta t_{max} = 30$  s.

## 4. APLICACIONES

### 4.1 Comparación de la estimación de características hidrodinámicas del suelo aplicando modelación del riego por surcos y melgas

El modelo numérico se utiliza para describir el flujo del agua durante un riego por surcos, se toma como referencia el experimento de riego por melgas reportado por Fuentes (1992) y se dispone de los siguientes datos: parámetros para la característica de van Genuchten (1980):  $\theta_s = 0.4865$ ,  $\theta_r = 0.0$ ,  $m = 0.1258$ ,  $n = 2.2878$ , parámetro para la conductividad de Brooks y Corey (1964);  $\eta = 11.0$ , parámetros para la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004):  $d = 1$ ,  $\kappa = 1/54$ , valor inicial del contenido volumétrico de agua  $\theta_o = 0.2749$ , gasto  $Q_o = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}$ , pendiente topográfica  $J_o = 0.002 \text{ cm/cm}$ , longitud del surco  $L = 100 \text{ m}$ . Los valores de los parámetros  $\Psi_d = -35.25$  y  $K_s = 1.98 \text{ cm/h}$  fueron calibrados utilizando un procedimiento inverso para describir datos de pruebas de riego. La geometría del surco tiene como profundidad del surco  $P_s = 25 \text{ cm}$ , la profundidad del dominio de solución es  $P = 150 \text{ cm}$  y el ancho del surco es de  $100 \text{ cm}$ .

En la Tabla 4.1., se muestran los valores que mejor permiten ajustar la curva de avance utilizando las ecuaciones de Saint-Venant para riego por surcos y melgas, en combinación con el correspondiente dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional de corte transversal (surcos) o longitudinal al escurrimiento (melgas). Se modela el riego para  $dt = 0.25 \text{ s}$ , se ha utilizado la Malla No 5 con un paso de espacio  $\Delta z_{min} = 0.5 \text{ cm}$  (presentada en el capítulo 3).

Tabla 4.1 Variables hidrodinámicas

Condición	Conductividad hidráulica a saturación (cm/h)	Presión de entrada de aire (cm)
Ajuste utilizando ecuaciones de Saint-Venant para riego por surcos y dominio bidimensional para la ecuación de Richards en corte transversal al escurrimiento.	1.98	- 35.25
Ajuste utilizando ecuaciones de Saint-Venant para riego por melgas y dominio bidimensional para la ecuación de Richards en corte longitudinal al escurrimiento.	1.84	- 32.75

Existe una diferencia poco significativa entre los valores de la conductividad hidráulica a saturación y la presión de entrada de aire, determinados de manera de minimizar el error cuadrático medio entre lo observado en la prueba de avance y lo simulado, aplicando los modelos de flujo para surcos y melgas (Tabla 4.1). El ajuste puede apreciarse en la ilustración 26.

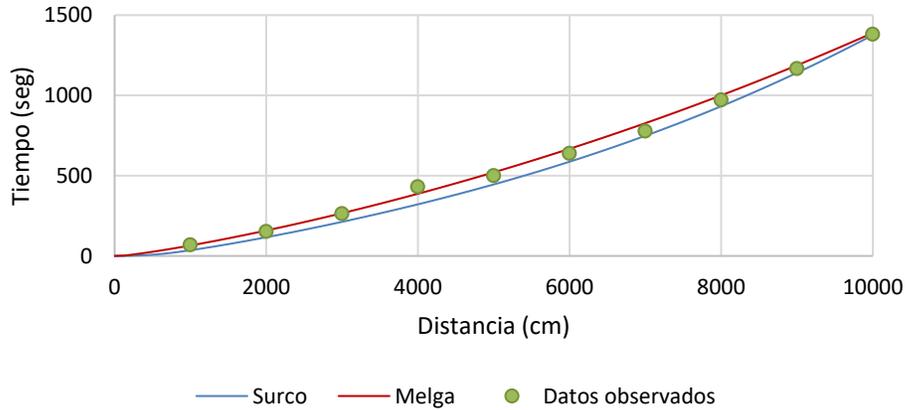


Ilustración 26. Verificación de la aplicabilidad del modelo de riego por surcos para la fase de avance,  $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ ,  $R^2 = 0.9998$ .

Valores significativamente diferentes se presentan en algunas variables relacionadas con el flujo (Tabla 4.2): perímetro mojado, tirante máximo simulado, lámina infiltrada máxima simulada y volumen máximo por unidad de longitud de surco o melga (Tabla 4.2).

Tabla 4.2 Variables hidráulicas

Condición	Perímetro mojado (cm)	Tirante máximo simulado (cm)	Volumen máximo por unidad de longitud (cm <sup>3</sup> )	Lámina infiltrada Máxima simulada (cm)
Ajuste utilizando ecuaciones de Saint-Venant para riego por surcos y dominio bidimensional para la ecuación de Richards en corte transversal al escurrimiento.	52.31	10.09	25,640	3.01
Ajuste utilizando ecuaciones de Saint-Venant para riego por melgas y dominio bidimensional para la ecuación de Richards en corte longitudinal al escurrimiento.	100	2.04	20,400	3.73

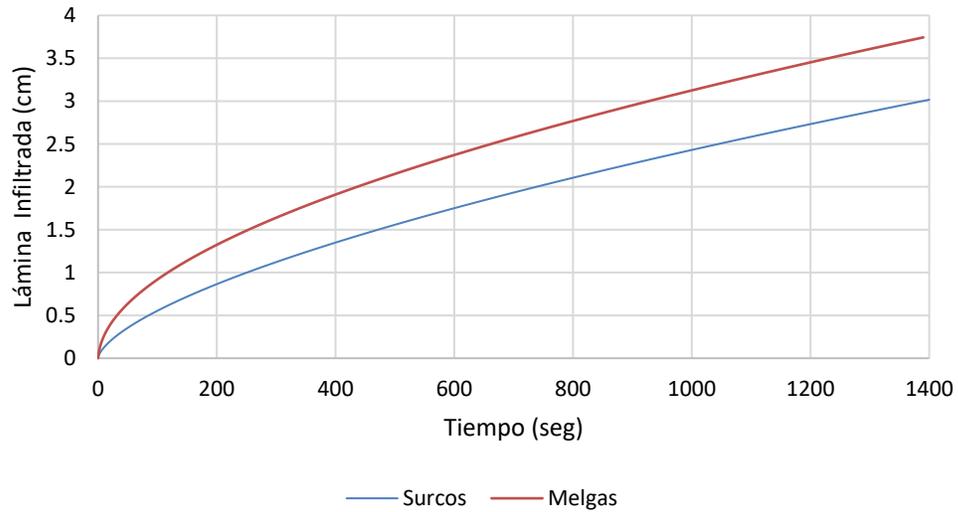


Ilustración 27. Evolución de la lámina infiltrada en el surco para el suelo Franco de Montecillo con  $K_s = 1.98 \text{ cm/h}$  y  $\Psi_d = -35.25 \text{ cm}$ ;  $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ .

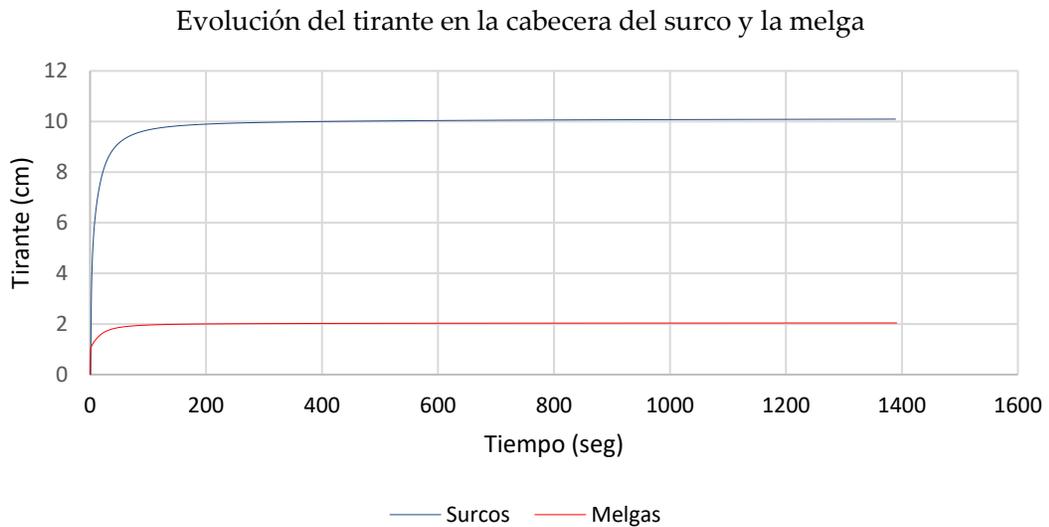


Ilustración 28. Evolución del tirante en en la cabecera del surco para el suelo Franco de Montecillo con  $K_s = 1.98 \text{ cm/h}$  y  $\Psi_d = -35.25 \text{ cm}$ ;  $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ .

Es de notar que la lámina infiltrada en la cabecera es menor para el caso del riego por surcos, como consecuencia del volumen que permanece contenido en el mismo.

En la ilustración 29 se presenta el resultado de la estimación del balance de masa, lo cual garantiza que el modelo del acoplamiento interno de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards para modelar la fase de avance en el riego por surcos conserva masa, lo que garantiza los resultados obtenidos del modelo.

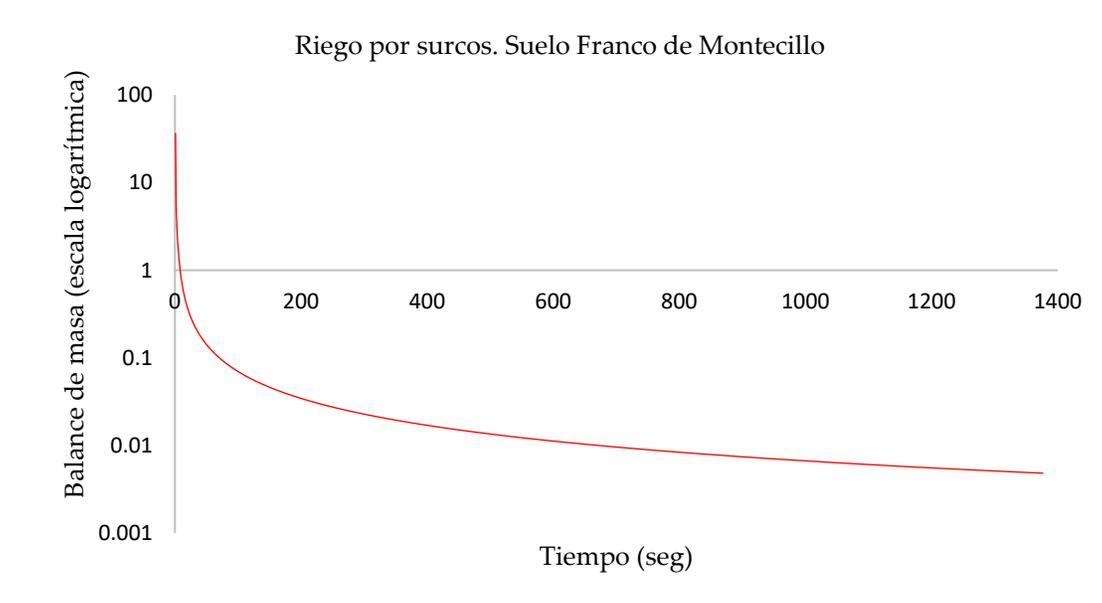


Ilustración 29. Balance de masa (escala logarítmica).

## 5. CONCLUSIONES

La aplicación de ecuaciones diferenciales parciales altamente no lineales es la herramienta básica utilizada en este trabajo para describir el flujo del agua en el riego por gravedad en surcos. La modelación ha sido efectuada mediante el acoplamiento numérico interno de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo del agua a superficie libre que se presenta sobre el suelo y la ecuación de Richards para modelar el flujo del agua en el suelo.

Se concluye que el modelo desarrollado para describir la fase de avance en el riego por surcos, que tiene como base el uso de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards, genera resultados que son aplicables a las escalas de tiempo y espacio relacionadas con pruebas de riego efectuadas en campo. Se ha verificado que la función que describe la evolución del tirante en el surco, influye de manera significativa en la lámina infiltrada en el suelo, y en consecuencia, es importante considerar el acoplamiento completo de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards para mejorar las simulaciones del riego por surcos. Se ha comparado la estimación de características hidrodinámicas del suelo aplicando la modelación del riego por surcos y melgas, evidenciando que existe una diferencia poco significativa entre los valores de la conductividad hidráulica a saturación y presión de entrada de aire, determinados de manera de minimizar el error cuadrático medio entre la posición del frente de avance simulada y aquella observada en campo, por lo que se verifica la hipótesis que la caracterización hidrodinámica de un suelo es similar cuando se emplean modelos con un mismo grado de aproximación, lo cual se debe a que las características hidrodinámicas de un suelo dependen básicamente de la granulometría del mismo.

## 6. REFERENCIAS

- 1 Akanbi, A., N. Katopodes, 1988, *Model for flood propagation on initially dry land*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol 114, No 4, pp., 689-706.
- 2 Ángeles, J. M., L. Rendón, O. Palacios, O. Acosta, 1998, *Development and evaluation of a kinematic wave model applied to border irrigation and comparison with the hydrologic model*. Agrociencia, 32(1), (1405-3195).
- 3 Bakker D. M., G. Plunkett b, J. Sherrard b, 2006, *Application efficiencies and furrow infiltration functions of irrigations in sugar cane in the Ord River Irrigation Area of North Western Australia and the scope for improvement*. Aricultural Water Management, Vol. 83, Issues 1–2, pp. 162-172.
- 4 Banti, M.; Zissis, T.; Anastasiadou-Partheniou, E., 2011, *Furrow Irrigation Advance Simulation using a Surface-Subsurface Interaction Model*. J. Irrig. Drain. Eng., 137, 304–314.
- 5 Basset, D.L. y D. W. Fitzsimmons, 1976, *Simulating overland flow in border irrigation*. Transactions of the ASAE. Vol. 19, No 4, pp. 666-671.
- 6 Bautista, E.; Wallender, W.W., 1992, *Hydrodynamic furrow irrigation model with specified space steps*. Journal of irrigation and drainage engineering (USA), ISS: 0733-9437, Vol 118, pp. 450-465.
- 7 Bautista, E.; Warrick, A.W.; Strelkoff, T.S., 2014, *New Results for an Approximate Method for Calculating Two-Dimensional Furrow Infiltration*. J. Irrig. Drain. Eng, 140, 10.
- 8 Bouwer, H., 1964. *Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soils as significant parameters in flow system analysis*. Water Resources Res., 36: 411-424.
- 9 Brooks, R.H.; Corey, A.T., 1994, *Hydraulic Properties of Porous Media*; Colorado State University: Fort Collins, CO, USA.
- 10 Burdine, N.T., 1953, *Relative permeability calculation from size distributions data*. Trans. AIME, 198, 171–199.
- 11 Burguete, J; Lacasta, A.; García-Navarro, P., 2014, *SURCOS: A software tool to simulate irrigation and fertigation in isolated furrows and furrow networks*. Computers and Electronics in Agriculture. Volume 103, Pages 91-103.
- 12 Castanedo, V.; Saucedo, H.; Fuentes, C., 2019, *Modeling Two-Dimensional Infiltration with Constant and Time-Variable Water Depth*. Water, 11(2), 371.

- 13 Chen C.L., 1970. *Surface irrigation using kinematic-wave method*. Journal of irrigation and Drainage Division, ASCE, 118(3):450-465.
- 14 Childs, E. C. y N. Collis-George, 1950, *The Permeability of porous materias*. Proc. Roy. Soc. Ser. A (201):392-405.
- 15 Chow, V.T., 1959, *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- 16 Cunge, J. A., F. M. Holly, y A. Verwey, 1980, *Practical aspects of computacional river hydraulics*. Pitman publishing limited, London.
- 17 Cunge, J.A. y Woolhiser, D. *Irrigation systems*, 1975, K. Mahmood and V. Yevyevich, Eds. Fort Collins, Colorado, Estados Unidos de América: Water Resources Publication, pp. 509-537.
- 18 D León, B. y Prado, V., 2006, *Ejecución de la maniobra de compuertas en una red de canales de riego*. Documento Interno. Jiutepec: IMTA, 22 pp.
- 19 Darcy, H., 1856, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dijon, París.
- 20 De León, B., Prado, V., Verdier, J. y Fuentes, C., *Simulación numérica del movimiento de estructuras de control en canales de riego*. Agrocencia. Vol. 41, núm. 1, 2007, pp. 75-86.
- 21 Dong, Q.; Xu, D.; Zhang, S.; Meijian, B.; Yinong, L. A., 2013, *Hybrid Coupled Model of Surface and Subsurface Flow for Surface Irrigation*. J. Hydrol., 500, 62-74.
- 22 Ebrahimian, H., Liaghat, A., Parsinejad, M., Abbasi, F., and Navabian, M., 2011, *Yield production and water use efficiency under conventional and alternate furrow fertigrations*. ICID's 21st International Congress on Irrigation and Drainage, Tehran, Iran.
- 23 Eldeiry, A., L.A. Garcia, A.S. El-Zaher, and M.E. Kiwan. 2005, *Furrow irrigation system design for clay soils in arid regions*. Appl. Eng. Agric. 21:411-420.
- 24 Esfandiari, M., B. Maheshwari, 2001, *SW—Soil and Water: Field Evaluation of Furrow Irrigation Models*, Journal of Agricultural Engineering Research 79(4):459-479.
- 25 Fok, Y.S., y Bishop A.A., 1965, *Analysis of water advance in surface irrigation*. Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE. Vol. 91, pp. 99-116.

- 26 Fuentes, C., De León, B., Saucedo, H., Parlange, J.Y. y Antonino, A., 2004, *El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica*. Ingeniería hidráulica en México. Vol. XVIII, núm. 2, pp. 121-131.
- 27 Fuentes, C., J-Y. Parlange y H. Saucedo, 2001, *Una solución de similitud de las ecuaciones de Saint-Venant*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
- 28 Fuentes, C.; Haverkamp, R.; Parlange, J.Y., 1992, *Parameter constraints on closed-form soil-water relationships*. J. Hydrol., 134, 117-142.
- 29 Fujita, H., 1952, *The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part I*. Textile Research Journal. Vol. 22, pp. 757-761.
- 30 García, N.H., 1994, *Simulación numérica de flujo intermitente para diseño de riego parcelario por gravedad*. Tesis de doctorado. México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 316 pp.
- 31 González-Camacho, J. M., B. Muñoz-Hernandez, R. AcostaHernandez, y R., J. C. Mailhol. 2006. *Modelo de la onda cinemática adaptado al riego por surcos cerrados*. Agrociencia 40: 731-740.
- 32 Green, W. H., y G. A. Ampt, 1911, *Studies in soil physics, I: the flow of air and water through soils*. J. Agric. Sci., 4:1-24.
- 33 Hart; W.E., Basset, D.L. y Strelkoff, T., 1969, *Surface irrigation hydraulics-kinematics*. Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE. Vol.94, pp. 419-440.
- 34 Haverkamp R., Parlange, J,-Y, Starr, J.L., Schmitz, G. y Fuentes, C., 1990, *Infiltration under ponded conditions: A predictive equation based on physical parameters*. Soil Sci. 149, pp. 292-300.
- 35 Hendrickx, J.M.H.; Tzung-Mow, Y., 1996, *Prediction of wetting front stability in dry field soils using soil and precipitation data*. Geoderma. Glob. J. Soil Sci., 70, 265-280.
- 36 Hills, R. G., P. D. Meyer, and M. L. Rockhold. 1995. *PolyRES: A polygon-based Richards Equation Solver*. Technical Report, NUREG/CR-6366, PNL-10709. Department of Mechanical Engineering, New Mexico State University, Las Cruces, NM. 57p.

- 37 Holzapfel, Eduardo A. et al., 2010, *Furrow Irrigation Management and Design Criteria Using Efficiency Parameters and Simulation Models*. Chilean J. Agric. Res., vol.70, n.2, pp.278-296.
- 38 Katopodes, N. D. Y Strelkoff, T., 1977, *Hydrodynamics of border irrigation complete model*. Journal of irrigation and Drainage Engineering, ASCE, 103 (IR3): 309 – 324.
- 39 Kincaid, D.C., Heermann, D.F. y Kruse, E.G., 1972, *Hydrodynamics of border irrigation advance*. Transactions of the ASAE. Vol. 15, núm. 4, pp. 674-680.
- 40 King, H.W., Wisler, y Woodburn, J.G., 1952, *Hydraulics*. New York: John Wiley Sons, Inc., 351 pp.
- 41 Koech, R., R. Smith y M. Gillies, 2010, *Automation and Control in Surface Irrigation Systems: Current Status and Expected Future Trends*. University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia. 7 pp.
- 42 Kostiaikov, A. N. 1932. *On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration*. Trans. Sixth Comm. Intl. Soc. Soil Sci., Russian Part A: 17-21.
- 43 Landau, L. y E., Lifchitz, 1989, *Physique théorique. Mécanique des fluides*. Tomo 6, Segunda edición. Moscú: Éditions Mir, 784 pp.
- 44 Latif, M. y S., Mahmood, 2004, *Field Measurements and Simulation of Advance Rates for Continuous and Surge Irrigated Furrows*. Irrigation and Drainage Journal. International Commission on Irrigation and Drainage. (53): pp., 437-447.
- 45 Lewis, M.R. y W.E. Milne, 1938, *Analysis of border irrigation*. Agri. Engr., Vol. 19, pp. 267-272.
- 46 López-Avenidaño, J.E.; O.L., Palacios; C., Fuentes; L. Rendón, y N., García, 1997, *Two-dimensional analysis infiltration in furrow irrigation*. Agrociencias, Vol. 31, pp. 259–269.
- 47 Mailapalli D. R.; S. Rajendra; N. Raghuwanshi; 2009, *Physically Based Model for Simulating Flow in Furrow Irrigation. I: Model Development*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 135(6).
- 48 Mezencev, V. J. 1948. *Theory of formation of the surface runoff*. Meteorologia I Hidrologia. 3: 33-40.

- 49 Mori, M., 1893, *The finite element method and its applications*. Ed. Macmillan. USA.
- 50 Mualem, Y., 1976, *A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media*. Water Resour. Res. 12, 513–522.
- 51 Neumann, S.P., 1973, *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. J. Hydraul. Div., 12, 2233–2250.
- 52 Noor, K.A.; J.M., Peters, 1987, *Preconditioned Conjugate Gradient Technique for the analysis of symmetric structures*. Int. J. Numer. Methods Eng., 24, 2057–2070.
- 53 Parlange, J.-Y., 1971, *Theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration*. Soil Sci., 111:170-174.
- 54 Parlange, J.-Y., 1972b, *Theory of water movement in soils, 6, Effect of water depth over soil*. Soil Sci., 113: 308-312.
- 55 Parlange, J.-Y., 1973, *Note on the infiltration advance front form border irrigation*. Water Resources Research, 9(4): 1075-1078.
- 56 Parlange, J.-Y., Braddock, R.D., Lisle, I., y Smith, R.E., 1982, *Three parameter infiltration equation*. Soil Sci. Vol. 111, pp. 170-174.
- 57 Parlange, J.-Y., Haverkamp R. y Touma, J., 1985, *Infiltration under ponded conditions: Optimal analytical solution and comparison with experimental observations*. Soil Sci. Vol. 139, núm.4, pp. 305-311.
- 58 Philip J.R. y Farrell, D.A., 1964, *General solution of the infiltration- advance problem in irrigation hydraulics*. Journal of Geophysical Res. Vol. 69, pp. 621-631.
- 59 Philip, J. R. 1957a. *The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution*. Soil Sci. 83: 345-357.
- 60 Playán, E., Walker, W.R., y Merkley, G.P., 1994, *Two-dimensional simulation of basin irrigation. II: Applications*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 120, No. 5.
- 61 Rendón, L.; C., Fuentes y G., Magaña, 1997, *Diseño del riego por gravedad. En Manual para Diseño de zonas de Riego Pequeñas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México.

- 62 Richards, L.A., 1931, *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. *Physic*, 1, 318–333.
- 63 Rogers, C., M.P. Stallybrass, y D.L. Clements, 1983. *On two-phase filtration under gravity and with boundary infiltration : Application of a Bäclund transformation*. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 7: 785-799.
- 64 Saint-Venant, A.J.C. Barre De, 1871, *Théorie du mouvement non permant des eaux, avec application aux crues des rivières et a l'introduction des marées dans leur lits*. *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*. Vol. 73, pp. 147-154 y 237-240.
- 65 Sakkas, J.G. y Strelkoff, T., 1974, *Hydrodinamics of surface irrigation-advance phase*. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 100, pp. 31-48.
- 66 Sanders, G.C., J.-Y. Parlange, V. Kühnel, W.I. Hogart, D. Lockington, y J.P.J. O'Kane, 1988. *Exact nonlinear solution for constant flux infiltration*. *J. of Hydrology*, 97: 341-346.
- 67 Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2000. *Acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por melgas*. *Memorias del X Congreso Nacional de Irrigación, Chihuahua, México*.
- 68 Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Gasto óptimo en el riego por melgas*. *Memorias del XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas, Zac., México*. Mesa 8. Modelación hidroagrícola.
- 69 Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y J.-Y. Parlange, 2001. *La hipótesis del tiempo de contacto en el riego por gravedad*. *Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México*.
- 70 Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y M. Vauclin, 2002. *Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo*. *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. XVII, núm. 1, pp. 93-105.
- 71 Saucedo, H., Fuentes, C. y Zavala, M., 2005, *El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 2. Acoplamiento numérico para la fase de avance en el riego por melgas*. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XX, núm. 2, 2005, pp. 109-119.
- 72 Saucedo, H., Fuentes, C. y Zavala, M., 2006, *El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 3. Verificación numérica de la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas*. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XXI, núm. 4, pp. 135-143.

- 73 Saucedo, H., M. Zavala, y C. Fuentes. 2011. *Modelo hidrodinámico completo para el riego por melgas*. *Tecnol. Cien. Agua* 2: 23-38.
- 74 Saucedo, H.; Zavala, M.; Fuentes, C.; Castanedo, V., 2013, *Optimal flow model for plot irrigation*. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 4, pp. 135–148.
- 75 Schmitz, G., Haverkamp, R. y Palacios, O. A, 1985, *Coupled surface-subsurface model for shallow water flow over initially dry soil*. *Proc. 21st, Congr: IAHR, Int. Assoc. For Hydr. Res.* pp. 23-31.
- 76 Selker, J.S.; Steenhuis, T.S.; Parlange, J.Y., 1991, *Wetting front instability in homogeneous Sandy soils under continuous infiltration*. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 56, 1346–1350.
- 77 Sherman, B., V. P. Singh, 1982, *Correction to 'A kinematic model for surface irrigation*. *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 3, pp. 449-672.
- 78 Šimůnek, J., K. Huang, and M. Th. van Genuchten, *The HYDRUS code for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media*. Version 6.0, Research Report No. 144, U.S. Salinity Laboratory, USDA, ARS, Riverside, California, 164 pp., 1998.
- 79 Šimůnek, J., M. Šejna and M. Th. van Genuchten, 1999, *The HYDRUS-2D Software Package for Simulating the Two-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media*. U.S. salinity laboratory agricultural research service u. s. department of agriculture Riverside.
- 80 Šimůnek, J., T. Vogel and M. Th. van Genuchten. 1994. *The SWMS-2D Code for Simulating Water Flow and Solute Transport in Two-Dimensional Variably Saturated Media*. Version 1.21. Research Report No. 132, USDA-ARS U.S. Salinity Laboratory, Riverside, California.
- 81 Singh, V., y S. M. Bhallamundi, 1996. *Complete hydrodynamic border-strip irrigation model*. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122(4):189-197.
- 82 Smith, R.E., 1972, *Border irrigation advance and ephemeral flood waves*. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*. Vol. 98, pp. 289-307.
- 83 Soroush, F.; Fenton, J.D.; Mostafazadeh-Fard, B.; Mousavi, S.F.; Abbasi, F., 2013, *Simulation of furrow irrigation using the Slow-change/slow-flow equation*. *Agric. Water Manag.*, 116, 160–174.

- 84 Strelkoff T., 1983. *BRDFLW, a mathematical model of border irrigation*. US Department of Agriculture. Agricultural Research Service. Phoenix, Arizona, USA.
- 85 Strelkoff, T., 1969, *One-Dimensional equations of open-channel flow*. Journal of the Hydraulics Divisions, vol, 95, No Hy 3, Proc Paper 6557, pp 861-876.
- 86 Strelkoff, T.; Katopodes, N., 1977, *Border irrigation hydraulics with zero inertia*. J. Irrig. Drain. Div., 3, 325-342.
- 87 Valiantzas, J.D., S. Aggelides, A, Salsalou, 2001, *Furrow infiltration estimation from time to a single advance point*. J. Agricultural Water Management, Vol 52, Issue 1, pp 17-32.
- 88 Van Genuchten, M. Th, 1980, *A closed-form equations for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Sci. Soc. Amer. J., 44: 892-898.
- 89 Walker, W. R., 2005, *Multilevel Calibration of Furrow Infiltration and Roughness*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering Vol. 131, Issue 2 (April 2005).
- 90 Walker, W. R., y A. A. Humpherys, 1983, *Kinematic-wave furrow irrigation model*. Journal of the Irrigation and Drainage Engineering, Loganm Utah, USA.
- 91 Walker, W. R., y G. V. Scogerbe, 1983, *The theory and practice of surface irrigation*. A guide for study in Surface Irrigation Engineering, Loganm Utah, USA.
- 92 Wallender W., y M. Rajej, 1990, *Shooting method for Saint-Venant equations of furrow irrigation*. Journal of irrigation and Drainage Engineering. Vol. 116, No. 1.
- 93 Warrick, A.W., y G.W. Parkin, 1995. *Analytical solution for one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms*. Water Resources Res., 31: 2891-2894.
- 94 Weir, G. J., 1983, *A mathematical model for border strip irrigation*. Water Resources Research 19(4): 1011-1018.
- 95 Wike, O. C., y E. T. Smerdon, 1965, *A solution to the irrigation advance problem*. J. Irr, and Drain. Div., ASCE, 91(3): 23-34.
- 96 Willardson L., A. A. Bishop, 1967, *Analysis of Surface Irrigation Application Efficiency*. Environmental Science, Journal of the Irrigation and Drainage Division. Vol 93, pp 21-36.

- 97 Wöhling T., R. Singh, G. H. Schmitz, 2004, *Physically Based Modeling of Interacting Surface–Subsurface Flow During Furrow Irrigation Advance*. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Vol 130(5):349-356.
- 98 Woolhiser D.A. y J.A. Liggett, 1967. *Unsteady, one dimensional flow over a plane — the rising hydrograph*. *Water Resources Research* 3(3): pp. 753–771.