



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

DEFLEXIÓN GRAVITACIONAL DE LA LUZ EN ESTRELLAS ULTRACOMPACTAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
OMAR ELÍAS VELASCO CASTILLO

TUTOR PRINCIPAL:
DANY PIERRE PAGE ROLLINET
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

COMITÉ TUTOR:
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA (ICN)
DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ (ICN)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, Enero 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Director de tesis

Dr. Dany Pierre Page Rollinet

Miembros del jurado

Dr. Marcelo Salgado Rodríguez

Dr. Néstor Enrique Ortiz Madrigal

Dr. Roberto Allan Sussman Livosky

Dr. Emilio Tejeda Rodríguez

Dr. Tonatiuh Matos Chassin

Agradecimientos

En múltiples ocasiones, hay poca oportunidad de tomarse el tiempo para agradecer a aquellas personas que logran motivarnos en el día a día y nos acompañan en el proceso académico. El dar gracias a tanta gente resulta siempre secundario y muchas veces es relegado únicamente al inconsciente y jamás externado, aun cuando existe posibilidad. En la redacción de este trabajo se incluye el espacio para hacerlo, así que buscaré del mejor modo completar esta tarea.

Debo primeramente agradecer a mis padres, Leticia y Helio, quienes me dieron la vida y quienes forjaron mi crecimiento, dándome valiosas lecciones diarias y dejando simiente en cada una de ellas. Es invaluable e incalculable lo que su instrucción y amor han logrado en mí, soy de ellos espejo y sin duda alguna me siento afortunado de haber sido hijo único de cada uno.

Hace años para mí la ciencia era un tema incipiente en mi cabeza al que apenas y me acercaba en educación secundaria. Tomar la decisión de estudiar la carrera de Física y finalmente decantarme por una Maestría dentro de la misma disciplina en el área de Gravitación y Astrofísica fue una elección que me llevó muchos años tomar y razonar, acompañado de gente que me inspiró a hacerlo y que tendió su mano de menor o mayor forma. A ellos les debo todo.

Debo empezar primero agradeciendo a mis maestros que más me inspiraron en el área de las ciencias exactas en el bachillerato, el Ing. Roberto Macías y el Ing. Eduardo Hugues. También al M. en I. (y deidad) Eduardo de la Vega y al Lic. Marco Ronzón, quienes también pusieron una semilla en mi formación personal en esa etapa. Posteriormente, ya en la licenciatura, las raíces empezaron a crecer de la mano del Dr. Darío Núñez, de quien es un gusto siempre permanecer cerca: toda oportunidad de compartir espacio con él es entretenida y enriquecedora. El acercamiento y celo al área de Astrofísica vino impulsado por la Dra. Julieta Fierro y el Dr. Antonio Ramírez Q.E.P.D., quienes con sus lecciones me hicieron ver el papel que juega la Física no solamente en la Tierra, sino en sus alrededores y en confines más o menos lejanos del Universo.

Aurora y Emmanuel fueron mis compañeros más cercanos de la Licenciatura en la Facultad. Que les quede claro, chicos, que hoy no estaría en este lugar de no haber estado acompañado de ustedes. Todos los contratiempos que tuvimos, todas esas jornadas de trabajo que pensábamos que estaba de más y nuestra redistribución del mismo, que en muchas ocasiones se nos salía de las manos controlar, cobran sentido ahora. A ustedes me debo hoy y por eso estoy muy agradecido.

También debo agradecer a todos los Enci-amigos, llevo una parte de ustedes conmigo en donde sea. En concreto Rigo, Aldo y Paco son personas a las que agradezco ver crecer, así como también me pone feliz que sigamos manteniendo el cariño y respeto de cuando empezamos a ser amigos desde niños.

De personas antes y del Posgrado, aparte de todos los anteriores, también agradezco a Carlos Reyes, a Antonio Galván, a Ulises y a Rocío Lucero quienes siempre tuvieron no solamente el tiempo, sino la atención y la actitud de acompañarme y apoyarme en cuanto fuera posible. También agradezco a mi mejor amigo en la Ciudad de México, Javier, y a mis otros amigos de la Facultad de Ciencias y la Universidad Nacional, la

cual siempre ha sido mi mayor núcleo de actividad académica.

Ya para casi culminar, mi profundo agradecimiento va para el Dr. Dany Page, quien con su personalidad diligente, sus inteligentes retroalimentaciones e incontables lecciones, el solo hecho de pertenecer a su grupo de alumnos es un privilegio, puesto que únicamente su ejemplo basta para poner manos a la obra. A los doctores Marcelo Salgado y Néstor Ortiz, por tomarse el tiempo para leer y mandar correcciones muy atinadas y enriquecedoras para este trabajo. Y por último, quiero agradecer también a la unidad del Instituto de Ciencias Físicas en la ciudad de Cuernavaca, quienes aunque solo me vieron partir de este viaje, hicieron en mí agarrar la fuerza necesaria para tomar esta aventura.

Esta tesis y mi trabajo de Maestría fue financiada con estímulo de Beca Nacional para Maestría del programa PNPC del CONACYT.

Unidades, Notación y Convenciones Utilizadas

Durante la extensión de este trabajo, se empleará a menos que sea indicado lo contrario, el sistema gaussiano de unidades físicas como es habitual en Astrofísica.

Para cantidades relativistas, se toman los valores para las constantes c y G como vienen indicados en cgs. En su defecto y siempre que sea indicado, en las teorías de Relatividad debe hacerse la conversión a unidades geométricas en las cuales $c = G = 1$. Para sortear este hecho, se ha decidido emplear múltiplos del radio de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$.

Los ángulos serán explícitamente expresados en grados sexagesimales a menos que vengan evaluados o convertidos de cantidades adimensionales, a los que les corresponderán los radianes.

La convención utilizada normalmente en la literatura para la notación de índices en 4-vectores \vec{V} , expresados en una base coordenada estándar adecuada, es con las letras del alfabeto griego y las 4 componentes V^α , así como los 4-vectores base \vec{e}_α , corren desde el 0 hasta el 3: 0, 1, 2, 3.

La base coordenada estándar \vec{e}_α que no es necesariamente ortonormal, a menos que se le señale como tal y en cuyo caso se escribirá \hat{e}_α ; contempla así para un 4-vector \vec{V} las 4 componentes V^0, V^1, V^2 y V^3 . Además, la asignación de los índices puede ser más específica en el texto según la elección del sistema coordenado. Por ejemplo, para el caso cartesiano, se pueden denotar en vez de números del 0 al 3 las letras de las coordenadas correspondientes a cada componente: t, x, y y z . O bien, para el caso de coordenadas esféricas: t, r, θ y ϕ . Con lo cual, donde se haga mención de la componente u^t en su base coordenada, se estaría refiriendo de manera única a la primera componente u^0 y así de ahí en adelante con el resto de índices. Estas reglas son también aplicables para índices en vectores duales u_α y tensores mixtos, así como también para cualquier otra elección de sistema coordenado.

Nuestra convención de signos para la métrica empleada en las teorías de Relatividad será la $(-, +, +, +)$.

Notación y simbología

Se incluye una tabla con la notación y los símbolos que serán empleadas a lo largo de este trabajo en la página siguiente, solamente se eligieron para este fin los más representativos y que permitan seguir fielmente la lectura a lo largo de todos los capítulos.

Cantidad	Símbolo
Velocidad de la luz	c
Constante de la gravitación universal	G
Masa gravitacional de un objeto compacto astrofísico (estrella o agujero negro)	M
Masa Solar	M_{\odot}
Radio de una estrella	R^*
Radio de Schwarzschild de una estrella	R_s
Presión, densidad de energía (de un fluido de materia de estrella de neutrones)	p, ε
Curva situada en el espacio-tiempo	\mathcal{C}
Cono de luz de un evento centrado en el punto p	C_p
Corrimiento al rojo medido por un observador al infinito ($1 + z$)	$e^{-\Phi(R^*)}$
Función Lagrangiana de una partícula en un sistema	\mathcal{L}
Función Hamiltoniana de una partícula en un sistema	\mathcal{H}
Parámetro de impacto de una trayectoria de luz saliendo de una estrella	b
Radio aparente al infinito (parámetro de impacto máximo medido)	R_{∞}
Ángulo de salida de un fotón en su punto de emisión respecto a la normal en la superficie de la estrella	δ
Proyección perpendicular del vector de salida de un fotón en su punto de emisión	x
Ángulo que forma la magnetización de un campo \vec{B} respecto a la normal en la superficie de la estrella	γ
Número de fotones que escapan de la estrella con un campo \vec{B} dipolar por unidad de área y de tiempo	\mathcal{N}_{dip}
Intensidad específica luminosa (monocromática)	I_{ν}
Densidad monocromática de flujo luminoso	F_{ν}
Flujo luminoso	F
Luminosidad	L

Índice general

1. Motivación	3
2. Un Breve Repaso de Relatividad Especial y General	5
2.1. Variedades diferenciables y Relatividad Especial: espacio-tiempo.	5
2.2. Vectores y curvas	6
2.3. Tensores	8
2.4. Elemento de línea y causalidad	9
2.5. Principio de equivalencia y Relatividad General	9
2.6. Tensor métrico, producto escalar y elemento de línea	11
2.7. Derivada covariante, transporte paralelo y conexión afín.	12
2.8. Principio de acción mínima y geodésicas en Relatividad General	16
2.9. Curvatura y tensor de Riemann	18
2.10. Ecuaciones de Einstein	19
3. Antecedentes y conceptos preliminares	21
3.1. Objetos compactos (OC)	21
3.2. Semblanza histórica de las estrellas de neutrones	22
3.3. Modelos y la ecuación de estado para estrellas de neutrones	23
3.4. Estrellas <i>extrañas</i>	24
4. Estrellas compactas y ecuaciones relativistas de estructura	27
4.1. Soluciones esféricamente simétricas para estrellas	27
4.2. Métrica de Schwarzschild	28
4.3. Equilibrio hidrostático para una estrella en Relatividad General	29
4.4. Teorema de Buchdahl	31
4.5. Límite de la compresibilidad de una estrella de neutrones impuesto por la causalidad	33
4.6. Estrellas maximalmente compactas	34
4.7. Estrellas ultracompactas	35
5. Trayectorias de Fotones en Relatividad General	37
5.1. Geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild	37
5.2. Parámetro de impacto máximo de los fotones y apariencia de la estrella ultracompacta	43
5.3. Integración de las trayectorias de fotones para estrellas ultracompactas	43
6. Una mirada al problema con radiación térmica	51
6.1. Coordenadas sobre la estrella y el detector	51
6.2. Flujo de fotones térmicos desviados por un campo gravitacional	54
6.3. Luminosidad térmica	56
6.4. Curvas de luz para un modelo de atmósfera con campo magnético dipolar	59
6.5. Implementación del modelo y código	60

7. Resultados y Discusión	63
7.1. Imágenes	63
7.2. Curvas de Luz	72
8. Conclusiones	77
A. Solución completa al problema de Schwarzschild para partículas nulas.	79
A.1. Integración analítica de la ecuación de movimiento para la variable coordenada θ en el problema de Schwarzschild.	79
A.2. Método de Hamilton-Jacobi para el problema de Schwarzschild.	80
B. Geodésicas en un espacio-tiempo con simetría esférica	83
B.1. Ecuaciones de movimiento para la métrica de una distribución con simetría esférica.	83
B.1.1. Caso 1. Ecuación de estado con densidad constante (Buchdahl): $\varepsilon_* = \text{cte.}$	84
B.1.2. Caso 2. Ecuación de estado maximalmente compacta: $p = (\varepsilon - \varepsilon_c)\theta(\varepsilon - \varepsilon_c)$	85
B.1.3. Caso 3. Ecuación de estado Tolman-VII	85
C. Modelo de atmósfera para la temperatura de una estrella compacta.	89
C.1. Función de temperatura superficial para una estrella con magnetización constante en el eje z	89
C.2. Función de temperatura para un campo magnético con magnetización arbitraria	90
Bibliografía	92

*Dedicado a mi mamá
Leticia Castillo, este trabajo de Maestría,
a quien en todo momento ha sido mi principal maestra.*

Capítulo 1

Motivación

El estudio de los objetos compactos estelares en Astrofísica, como lo son las enanas blancas y las estrellas de neutrones, está ampliamente extendido para configuraciones y ecuaciones en las que se admite a los detectados hasta la actualidad. En el caso de las estrellas de neutrones, esto comprende los radios de 10 a 13 km y el rango de masas entre 1.4 y 2.1 M_{\odot} .

Desde un trabajo publicado por Hartle *et al.* (1975), se comenzó a plantear de manera plausible la existencia de estrellas de neutrones con ecuaciones de estado suficientemente *blandas* para presentar $R_s < R^* \leq 1.5R_s$, es decir, tener su radio propio R^* adentro de su órbita de fotones en $R_c = 1.5R_s$. Este último es el radio para la esfera de fotones que se descubre en la solución de Schwarzschild: la última órbita circular inestable para partículas de tipo luz. Iyer *et al.* (1985) denominaron por primera vez a los objetos que pudieran exhibir su propia esfera de fotones por afuera del radio del mismo objeto como *ultracompactos*.

El estudio de la naturaleza y la inclusión de los objetos ultracompactos ha sido ignorado por varios autores, como las ecuaciones de estado presentadas por Özel & Freire (2016), las cuales desechan la existencia de estrellas ultracompactas. Se incluye la Figura 7b de su trabajo en la página siguiente, donde se puede notar cómo hay una región de color gris oscuro que denominan "*inside photon orbit*", inglés para "interior de la última órbita [*sic*] de fotones", la cual ellos restringieron - y otros autores más han ido restringiendo - como límite para integrar las ecuaciones de estado.

En la actualidad hay un número considerable de trabajos que han realizado menciones al tema y a este nombre para dicha clase de objetos (ver una mención desde, *e.g.* Bahcall *et al.*, 1990), y su popularidad ha venido creciendo en los últimos años. Sin embargo, ha habido muy escasa preocupación en estudiar las emisiones y el comportamiento de la luz que proviene de ellos. Como un ejemplo, en Nemiroff *et al.* (1993) se realizaron correcciones relativistas al límite de Eddington para estudiar las luminosidades en destellos de rayos X que pudieran venir de estos objetos.

Al día de hoy, ya se conoce que una ecuación de estado para la configuración de una estrella en el límite de causalidad para sus ondas sonoras en un fluido dentro de una distribución con simetría esférica, mencionada en Lattimer (2012), admite compacidad maximal para una estrella de neutrones que pueda alcanzar como mínimo, un radio aproximadamente igual a $R^* = 1.412R_s$. Otras ecuaciones de estado, como las de la familia de estrellas extrañas o SQM (materia de quarks blanda, por sus siglas en inglés), contemplan admitir también radios igual de pequeños.

El presente trabajo incluye un estudio de cómo se vería la emisión de fotones directo de la superficie de estrellas ultracompactas, así como también una descripción de su imagen y demás pormenores astrofísicos relacionados, como la luminosidad y las curvas de luz.

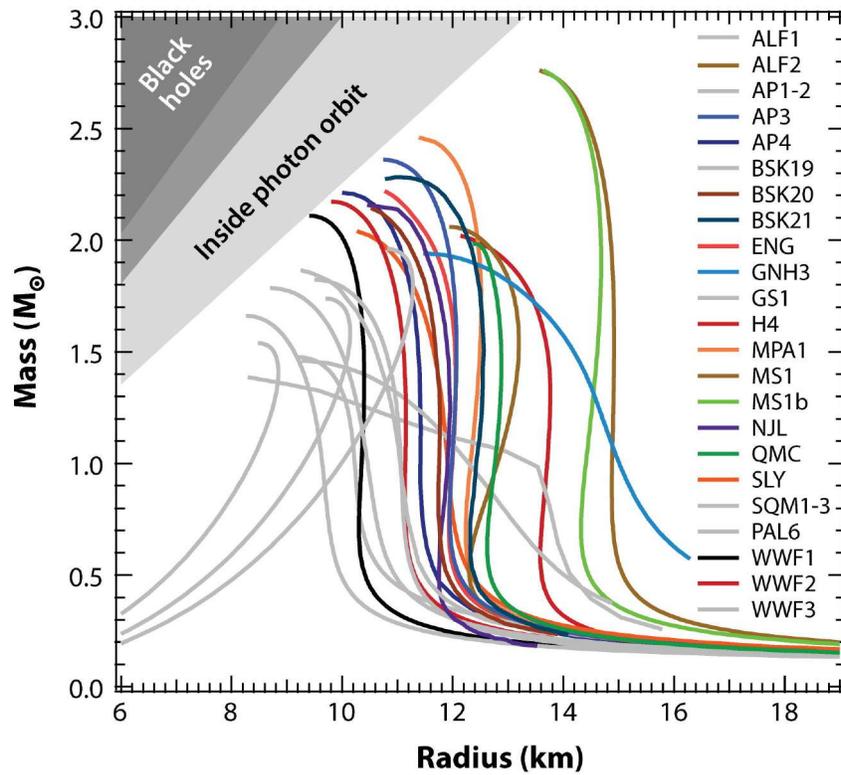


Figura 1.1: Figura sacada de Özel & Freire (2016), que muestra las ecuaciones de estado válidas de acuerdo con los autores para materia nuclear de estrellas de neutrones en una relación Masa (en masas solares) vs. Radio (en kilómetros).

Capítulo 2

Un Breve Repaso de Relatividad Especial y General

La Astrofísica Relativista es una rama de la Astrofísica que busca estudiar y describir principalmente fenómenos acontecidos cerca de objetos compactos, por lo cual debe tratarse con las teorías de la Relatividad (Especial y General) de Albert Einstein. En la actualidad, estas siguen siendo la mejor descripción que se tiene de lo que conocemos como *gravedad* como una interacción fundamental en la Física. Para empezar cualquier estudio y tratamiento de la dinámica de partículas de prueba alrededor de estrellas de neutrones y demás objetos compactos, debe realizarse una semblanza conceptual de estas teorías. Seguimos el texto de Auger & Plagnol (2017) del cual tomamos las definiciones (traducidas al español) que citamos a continuación y las figuras, así como el libro de Carroll (2004).

2.1. Variedades diferenciables y Relatividad Especial: espacio-tiempo.

La teoría de Relatividad Especial fue propuesta por Albert Einstein en 1905 para resolver, entre otras interrogantes, que la teoría electromagnética clásica dada por Maxwell décadas atrás no fuera compatible con el grupo de transformaciones de Galileo. Para ello se emplearon a las transformaciones de Lorentz, mismas que sí demostraron poder dejar invariantes a las ecuaciones de Maxwell.

En la actualidad se conoce que la Relatividad Especial nace de dos postulados:

1. Asumir la covarianza de las leyes físicas en sistemas de referencia inerciales, es decir, obedecer que las leyes de la física deben permanecer iguales para cualquier observador dentro de sistemas de referencia inerciales.
2. La universalidad de la velocidad de la luz, es decir, tomar que la magnitud de la velocidad de la luz en el vacío sea una constante física para todo sistema de referencia inercial.

Existiendo distintas descripciones sobre los fenómenos físicos para un número indeterminado de observadores (sistemas o marcos de referencia), estos dos principios son aplicables únicamente para aquellos que sean inerciales, i.e. que vayan desplazándose a velocidad constante (incluso así, en reposo). En Relatividad Especial podemos entonces entender y asumir que las partículas de prueba son libres y así se desplazan en trayectorias en movimiento rectilíneo uniforme en su espacio-tiempo dado.

Tanto las teorías de la Relatividad Especial y la Relatividad General, suponen una unión en la Física de los conceptos clásicamente distintos de espacio y tiempo en uno solo: el espacio-tiempo.

La definición formalizada que se utilizará aquí para espacio-tiempo (ver la Definición 20), requiere que se revisen conceptos y definiciones previas, que conviene mencionar en este trabajo.

Definición 1 (Variedad de dimensión n y sistema coordenado). *Sea A un conjunto numerable y \mathcal{M} un espacio topológico. Se dice que \mathcal{M} es una variedad de dimensión n si \mathcal{M} está cubierto por un mapeo $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que va de conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ contenidos en \mathcal{M} a \mathbb{R}^n . Una variedad entonces es un espacio topológico tal que, para cada uno de sus puntos $p \in \mathcal{M}$, es posible definir una vecindad local abierta alrededor de ellos que sea homeomorfa a un conjunto abierto de \mathbb{R}^n :*

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p \in \mathcal{M} &\longmapsto (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n) := \varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cada aplicación φ_α se conoce como carta o sistema coordenado, entendido como la imagen de los mapeos.

Una variedad hereda así, después de la aplicación del mapeo formado por el conjunto de cartas $\{\varphi_\alpha\}$, todas las propiedades de carácter topológico de los abiertos en \mathcal{M} revisadas por la Geometría y la Topología Diferencial para poder interaccionar con ellas en abiertos en \mathbb{R}^n , que son más familiares para su estudio.

Definición 2 (Variedad diferenciable). *Una variedad se dice que es diferenciable cuando se cumple que para cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ en ella, la función $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es diferenciable.*

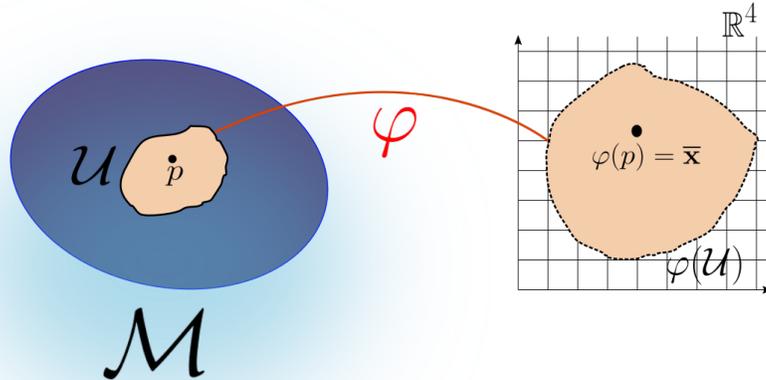


Figura 2.1: Una variedad 4-dimensional \mathcal{M} que presenta una vecindad abierta U de un punto $p \in \mathcal{M}$. La vecindad es mapeada a un subconjunto $\varphi(U)$ en \mathbb{R}^4 , en particular el punto p tiene como imagen un 4-vector $\bar{x} = \varphi(p)$ que tiene por componentes coordenadas x^μ . El diagrama es meramente representativo.

El espacio-tiempo es entonces una variedad diferenciable pseudoriemanniana (ver Definición 19) de 4 dimensiones (tres coordenadas espaciales y una temporal). Un sistema coordenado para el espacio tiempo se puede escribir como $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

2.2. Vectores y curvas

Sobre el espacio-tiempo en el que se va a trabajar será importante definir dos objetos para los fines aquí contenidos: los 4-vectores y las curvas. Antes de comenzar con toda la descripción y nomenclaturas, el

concepto primario con el que se debe comenzar para poder definir estas nuevas cantidades y las posteriores, es con una definición de un campo escalar que provenga de la variedad:

Definición 3 (Campo escalar). *Se denomina campo escalar a la aplicación $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ una imagen que tiene por valor un número real $S(\mathbf{p})$. La regla de transformación de un campo escalar ante un cambio de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ es sencillamente $S'(x') = S(x)$.*

El campo escalar, al confrontar junto con el caso para \mathbb{R}^n , en algún momento cumplirá el requisito de mapear puntos de la variedad a números reales; como puede ser por supuesto, en una noción de módulo o norma de un vector en el caso de \mathbb{R}^n , entre otros.

Los 4-vectores son funciones vectoriales y a la hora de elegirles un sistema coordenado, vienen definidos para un observador en algún marco de referencia particular. En general, se pueden pensar como los vectores tangentes en un punto a lo largo de curvas que representan trayectorias de partículas. Empleando el sentido común, un 4-vector hace las veces de un segmento lineal dirigido o vector en un espacio euclidiano, porque los vectores tangentes sobre las líneas rectas del espacio cartesiano yacen sobre las mismas rectas. Además, así como en el espacio cartesiano se pueden sumar y restar otros vectores, y también multiplicárseles por un escalar; del mismo modo se lograrán generalizar estas nociones de espacio vectorial para 4-vectores. En otras palabras, una variedad \mathcal{M} de dimensión n también satisfará las condiciones para poder generar un espacio vectorial tangente \mathcal{T}_p en cada uno de sus puntos \mathbf{p} .

Definición 4 (Curva). *Sea un sistema coordenado $x^\mu \in \mathbb{R}^n$. Una curva \mathcal{C} es toda función paramétrica de n ecuaciones dada en la forma $x^\mu = X^\mu(\lambda)$ con $\mu = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ un parámetro a lo largo de esa curva.*

Definición 5 (Vector tangente a una curva). *Un vector tangente \mathbf{v} a la curva \mathcal{C} en el punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ es el operador que asocia a cada campo escalar $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ su derivada direccional a lo largo de la curva \mathcal{C} :*

$$\mathbf{v}(f) \equiv \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \quad (2.2)$$

Definición 6 (Líneas coordenadas (de mundo)). *Sea \mathbf{p} un punto en una variedad \mathcal{M} de dimensión n . Las líneas coordenadas \mathcal{C}_α son las n curvas asociadas al sistema coordenado x^α , para toda $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Cada línea coordenada \mathcal{C}_α es la curva parametrizada por $\lambda = x^\alpha$ a través del punto \mathbf{p} tal que para cada $\beta \neq \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, n-1$, el resto de las coordenadas x^β , son constantes en él.*

Definición 7 (Base coordenada de vectores). *Sea una línea coordenada \mathcal{C}_α . Se define el vector tangente a la curva \mathcal{C}_α como \mathbf{e}_α y actúa por definición sobre un campo escalar f como:*

$$\mathbf{e}_\alpha(f) = \left. \frac{df}{dx^\alpha} \right|_{\mathcal{C}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad (2.3)$$

El conjunto de los $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ con $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$ se conoce como base coordenada de vectores, o base del sistema coordenado. Para todo campo escalar f y vector tangente \mathbf{v} , se consigue pues:

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} v^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (2.4)$$

donde $v^\alpha = dX^\alpha/d\lambda$ son las componentes del vector \mathbf{v} con respecto a la base coordenada de vectores \mathbf{e}_α .

Definición 8 (Espacio tangente). *Se define el espacio tangente \mathcal{T}_p en un punto \mathbf{p} como el espacio n -dimensional generado por los n vectores base \mathbf{e}_α en el punto \mathbf{p} .*

Así, los vectores tangentes a las líneas coordenadas no hacen otra cosa más que regresar las derivadas parciales con respecto a las coordenadas del sistema coordenado. La elección de coordenadas para representar a una variedad es arbitraria, de hecho, se puede ver con una transformación de coordenadas simple de la forma $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ que las componentes de un vector \mathbf{v} se transforman como:

$$v'^\mu(x') = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu(x) \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu(x). \quad (2.5)$$

En la última igualdad o equivalencia de la ecuación pasada, se introdujo la convención de suma de Einstein sobre dos índices repetidos, la cual se usará de ahora en adelante en el texto.

Existe otro objeto definido como 4-vector dual, covector o 1-forma, el cual es un elemento que pertenece a la colección de mapeos lineales que van del espacio tangente a \mathbb{R} . El conjunto de estos mapeos genera pues a su vez un espacio vectorial, conocido como espacio dual.

Definición 9 (Vector dual). *Un vector dual o 1-forma es un mapeo $\omega : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia un número real a cada vector definido en un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, tal que cumpla una propiedad de linealidad $\omega(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\omega(\mathbf{u}) + \omega(\mathbf{v})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}_p$.*

Definición 10 (Espacio dual). *El espacio de todos los vectores duales, o el espacio vectorial generado por la base coordenada de vectores duales $\{\omega_\alpha\}$, es un espacio vectorial en \mathcal{T}_p y se conoce como espacio dual, o \mathcal{T}_p^* .*

Un cambio de sistema coordenado modifica las componentes de la base coordenada de los duales como:

$$\omega'_\alpha(x) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \omega_\beta(x) \quad (2.6)$$

2.3. Tensores

Un tensor de tipo (r, s) se puede entender como un conjunto de mapeos multilineales, funciones lineales en cada una de sus componentes, que parten de tomar r vectores duales o 1-formas y s vectores para dar por imágenes números reales. Revisando lo comentado justo arriba, se puede entender a una 1-forma como un tensor $(0, 1)$ pues toma un vector y opera con él de manera única para regresar un número real.

Según sea el orden de cualquier tensor mixto dado, se denotará con expresiones del tipo $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}$; por ejemplo, para un tensor de orden (r, s) .

Definición 11 (Tensor de tipo u orden (r, s)). *Sea \mathcal{M} una variedad de dimensión finita n , $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ un punto en ella. Un tensor de tipo (r, s) en el punto \mathbf{p} es un mapeo multilineal, i.e., que es lineal con respecto a cada uno de las componentes y entradas que lo conforman se ve de la forma:*

$$\mathbb{T} : \underbrace{\mathcal{T}_p^* \times \dots \times \mathcal{T}_p^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathcal{T}_p \times \dots \times \mathcal{T}_p}_{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

puesto que asocia un número real a r vectores duales y s vectores. Cualquier tensor de tipo (r, s) puede expresarse como una combinación lineal de una "base de tensores", formada por el producto tensorial de bases coordenadas de vectores duales con vectores, que en total tienen n^{r+s} componentes. A la cantidad $r + s$ de un tensor de tipo (r, s) se le conoce como rango del tensor.

Las componentes de un tensor de tipo (r, s) bajo una transformación de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha(x)$, se transforman como:

$$T'^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\beta_s}} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \quad (2.8)$$

2.4. Elemento de línea y causalidad

En Relatividad Especial, un intervalo espacio-temporal Δs entre dos puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} queda expresado por sus diferencias coordenadas $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$, con respecto a un sistema de referencia global inercial como:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (2.9)$$

La forma de este intervalo es cuadrática en las diferencias coordenadas y es un invariante ante el grupo de traslaciones, rotaciones y boosts (Poincaré). Esto asegura que la velocidad de la luz va a ser constante en cualquier sistema inercial y además, puede así entenderse que la Relatividad Especial resulta ser una teoría de la geometría Lorentziana de cualquier espacio-tiempo 4-dimensional, como lo hace la Euclidiana en el espacio 3-dimensional.

Definición 12 (Cono de luz). *Considérese un evento $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Se definirá un cono de luz C_p en \mathbf{p} como el conjunto de eventos $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ tales que $\Delta s^2 = 0$ entre \mathbf{p} y \mathbf{q} .*

Definición 13 (Intervalo nulo, intervalo temporal e intervalo espacial). *Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos eventos en \mathcal{M} , Δs^2 el intervalo espacio-temporal entre ellos.*

1. *Si $\Delta s^2 = 0$, se dirá que el intervalo entre ambos eventos es nulo.*
2. *Si $\Delta s^2 < 0$, se dirá que el intervalo es tipo tiempo o temporal. En este caso, cualquier partícula con masa atravesando a \mathbf{p} en principio puede alcanzar a tocar \mathbf{q} , sin importar su sitio dentro de la región en el futuro dentro del cono centrado en \mathbf{p} (ver Figura 2.2).*
3. *El último caso, $\Delta s^2 > 0$, demarca los puntos \mathbf{q} que están relacionados con \mathbf{p} con un intervalo tipo espacio o espacial. Estos puntos no pueden ser alcanzados por ninguna partícula masiva ni fotón, una vez que atravesaron \mathbf{p} . Se entiende pues que 2 eventos localizados fuera de la región dentro del cono de luz C_p de la Figura 2.2, no pueden estar causalmente conectados entre sí.*

Un intervalo en el espacio-tiempo es una función auxiliar que servirá para explorar la estructura causal del espacio-tiempo en la vecindad de cualquiera de sus puntos. Este concepto preliminar definido así en Relatividad Especial será generalizado para el caso de espacio-tiempo curvo de Relatividad General, con ayuda también del tensor métrico, ambos conceptos revisados en la Sección 2.6.

2.5. Principio de equivalencia y Relatividad General

Aún después de introducir a la Relatividad Especial, sigue apareciendo la necesidad de generalizar los resultados clásicos ya conocidos por la teoría newtoniana de la gravedad, a una teoría que pueda describir objetos que sí presenten aceleración y ya no se desplacen a velocidad constante, ya sea porque son objetos acelerándose por caída libre o por la presencia de algún objeto externo con una fuerza o potencial que hace acelerarlos.

Para este fin, la interacción que clásicamente se conoce como gravedad y que antes solamente se pensaba como un campo escalar adicional que se propaga a través de todo el espacio-tiempo, se puede pensar mejor como un campo tensorial dinámico que viene de un tensor métrico y que describe la curvatura del mismo espacio-tiempo. Einstein buscaba representar estas ideas y la universalidad de la interacción gravitacional, conocida antes como ley de gravitación universal de Newton, en un nuevo tratamiento.

De esta manera es que enuncia un principio que hace las veces del primer postulado pero para esta nueva descripción, el principio de equivalencia débil:

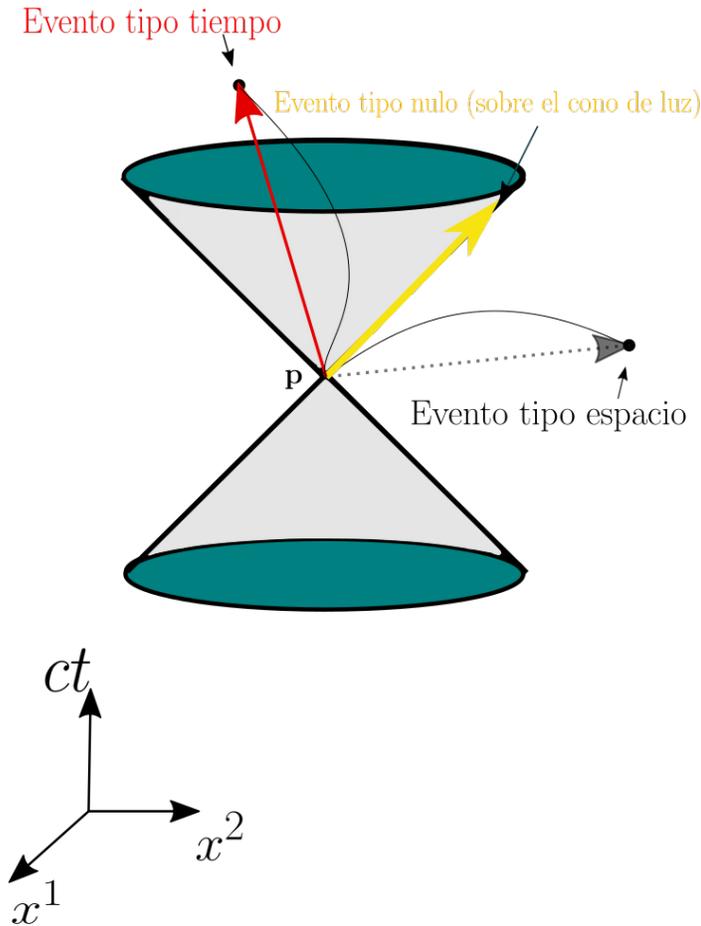


Figura 2.2: Diagrama del cono de luz C_p (centrado en el punto \mathbf{p}), mostrando de color gris los puntos accesibles dentro del cono, en el pasado y el futuro para los intervalos con tiempo coordenado ct y su parte espacial, que se muestra sin pérdida de generalidad para 2 coordenadas ortogonales x^1 y x^2 . Se ilustran los tres tipos de eventos y sus correspondientes vectores de desplazamiento en el espacio-tiempo: de amarillo un vector nulo, de rojo un vector temporal (eventos causales con \mathbf{p}). De color negro y en línea punteada se muestra un vector espacial, cuyo evento es inalcanzable desde \mathbf{p} . C_p vive en un 4-espacio (una coordenada temporal y tres espaciales), pero por motivos ilustrativos se representan solamente dos de las tres coordenadas espaciales y se tiene que el eje vertical corresponde al eje temporal. Así, esta región se puede visualizar en forma de cono de tres dimensiones en un papel de dos dimensiones.

Definición 14 (Principio de equivalencia débil). *Un campo gravitacional uniforme es físicamente equivalente a un referencial uniformemente acelerado, relativo este último a un observador situado en un sistema de referencia inercial.*

Dadas la misma posición y velocidades iniciales, dos o más partículas de prueba sujetas al mismo campo gravitacional caen de manera libre y a través de las mismas trayectorias, de acuerdo con este principio. Existe

pues una primera equivalencia física entre movimiento uniformemente acelerado y caída libre, que puede refinarse con una agudización de este principio. El mismo Einstein amplió posteriormente este principio a una forma más elaborada, que contempla experimentos que involucren leyes físicas no gravitacionales en un marco de referencia localmente inercial:

Definición 15 (Principio de equivalencia fuerte (o de Einstein)). *Cualquier experimento físico local que no involucre a la gravedad tendrá los mismos resultados si se realiza en un sistema de referencia en caída libre que si se mide en un espacio-tiempo plano, es decir, uno que contemple únicamente lo dictado por la Relatividad Especial.*

El principio débil nos remite a las ideas ya encontradas y discutidas por Galileo y Newton de la equivalencia entre la masa inercial de un objeto y la masa gravitacional del mismo. El principio fuerte ya nos extiende la idea a un nuevo entendimiento de la localidad del observador y de los experimentos que se realizan en sistemas con caída libre, y se compara su caso con el de la Relatividad Especial. La localidad en los experimentos aquí se entiende a que se contemplen en ellos acciones a distancias pequeñas, dentro de un sistema inercial local, contrario a como pasa con los campos vectoriales clásicos como el newtoniano o los de la electrostática, en donde los campos son permanentes en todo el espacio-tiempo y de efecto inmediato, por ejemplo.

Con estos principios en mente se puede entonces introducir esta nueva descripción para la gravedad, denominada Relatividad General. A continuación, se necesitan definir conceptos relacionados ahora con la curvatura de un espacio-tiempo.

2.6. Tensor métrico, producto escalar y elemento de línea

Es ahora necesario definir un producto escalar en los sistemas coordenados que describen a la variedad de nuestro espacio-tiempo. En Relatividad Especial, el producto escalar entre dos 4-vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \equiv \eta_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (2.10)$$

que es muy semejante al producto escalar revisado en \mathbb{R}^4 , salvo por el primer término sumado negativo. Las componentes $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ denotan a la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ con respecto a la base coordenada dada por el sistema coordenado inercial global de variables (ct, x, y, z) .

En un espacio vectorial real, el producto escalar emula una proyección de un vector sobre otro, a veces usando a un vector auxiliar que vaya de uno de los vectores a otro para esta tarea. No obstante, para poder definir un producto escalar en Relatividad General no es posible conectar 2 puntos cualesquiera en la variedad espacio-temporal \mathcal{M} por el vector o el intervalo que hay entre ellos. Adoptando los principios de equivalencia, es necesario trabajar de manera local a un punto \mathbf{p} en su espacio tangente $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}$.

Definición 16 (Tensor métrico). *Para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, se define un tensor simétrico g_{ab} de rango 2 como tensor métrico en \mathbf{p} , el cual actúa de manera lineal en cualesquiera dos vectores en $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}$.*

Definición 17 (Producto escalar). *El producto escalar entre dos vectores con componentes u^α y v^β se ve como:*

$$g_{ab} u^a v^b = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (2.11)$$

donde $g_{\alpha\beta}$, u^α , v^β denotan las componentes del tensor g_{ab} y los vectores u^a y v^b en la base dada del sistema coordenado x^α . Este producto es no degenerado, de manera que si $g_{ab} u^a v^b = 0$ para todo v^b , entonces $u^a = 0$. También, como ya se anticipó de los intervalos espacio-temporales, no es necesariamente positivo definido.

Definición 18 (Métrica). *Al conjunto de mapeos dados por el campo tensorial g_{ab} en todos los puntos de \mathcal{M} , se le conoce como métrica.*

Definición 19 (Variedad pseudoriemanniana y variedad lorentziana). *Se dice que una variedad \mathcal{M} es pseudoriemanniana cuando el producto escalar definido en ella, con ayuda de la métrica no es necesariamente positivo definido. Se dirá que es lorentziana si en el producto escalar definido entre dos vectores en ella, uno de los sumandos es de signo contrario al restante de los sumandos con mismo signo. Es decir, en ella todas las componentes comparten el mismo signo, salvo por una.*

Se entiende además como métrica Euclidiana cualquier métrica tridimensional que presenta el mismo signo en cada componente. La signatura usada en este trabajo $(-, +, +, +)$ es así lorentziana. En ella reside el carácter de considerar una variedad pseudoriemanniana a nuestro espacio-tiempo, esto es, que no tiene su producto escalar definido positivo exclusivamente.

Definición 20 (Espacio-tiempo). *Se denota como espacio-tiempo al par (\mathcal{M}, g_{ab}) , dado por la variedad pseudoriemanniana \mathcal{M} de dimensión 4 que contiene todos los eventos \mathbf{p} y el tensor métrico g_{ab} que actúa sobre ellos.*

Ahora bien, para introducir una noción de intervalo infinitesimal ds entre dos eventos de cualquier espacio-tiempo, se debe pensar en una curva que los conecte. Integrando a la largo de esa curva el elemento de línea $(\pm ds^2)^{1/2}$, se consigue el intervalo completo. Esta integral al ser de línea solamente depende de la trayectoria elegida para la integración.

Definición 21 (Elemento de línea). *Sea un sistema coordenado (x^α) en \mathcal{M} , sean 2 eventos vecinos \mathbf{p} y \mathbf{q} con coordenadas (x_0^α) y $(x_0^\alpha + dx_0^\alpha)$. Si $g_{\alpha\beta}$ denota las componentes del tensor métrico con respecto a las coordenadas (x^α) , entonces el intervalo espacio-temporal o elemento de línea entre \mathbf{p} y \mathbf{q} es:*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.12)$$

Este elemento de línea quedará expresado según sean las componentes del tensor métrico con que se trabaje, así como de la signatura empleada. Sin embargo, tal y como fue determinado por Minkowski, al ser un escalar será un invariante relativista ante cualquier sistema de coordenadas empleado.

Aun más, es importante introducir las operaciones sobre índices en Relatividad. Se sabe que existen relaciones uno a uno entre los vectores y sus duales, por lo cual definiendo un tensor métrico inverso g^{ab} de tal manera que:

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a, \quad (2.13)$$

donde δ_c^a sea el operador identidad que va de \mathcal{T}_p a \mathcal{T}_p ; se pueden a su vez definir las operaciones de subir y bajar índices para mapear vectores a sus duales y viceversa:

$$v_a = g_{ab} v^b \quad (2.14)$$

$$\omega^a = g^{ab} \omega_b \quad (2.15)$$

Finalmente, con la norma al cuadrado de cada vector no cero se pueden clasificar los vectores por su tipo con el intervalo que se recorre desde un origen coordenado:

Definición 22 (Tipos de evento). *Considérese la norma al cuadrado de un vector no cero v^a , dada por $g_{ab} v^a v^b = v_a v^a$. Se dirá que el vector es nulo si y sólo si $v_a v^a = 0$, será vector tipo tiempo o temporal si y sólo si $v_a v^a < 0$ y tipo espacio o espacial si y sólo si $v_a v^a > 0$.*

2.7. Derivada covariante, transporte paralelo y conexión afín.

Conociendo que las leyes de la física vienen típicamente expuestas en ecuaciones diferenciales, debe generalizarse esta noción también a un espacio-tiempo con curvatura: definir la derivada de un campo vectorial o tensorial. Ahora bien, si se definen dos puntos o eventos vecinos \mathbf{p} y \mathbf{q} en el espacio-tiempo y consideramos sus

espacios tangentes \mathcal{T}_p y \mathcal{T}_q , existe un sinfín de posibles conexiones entre ambos espacios definidos para esos puntos. Como se verá a continuación, hay una en particular que es especial para el contexto de Relatividad General.

Definición 23 (Derivada covariante (conexión)). *Sea una variedad \mathcal{M} de dimensión finita. Una derivada covariante, o conexión, es una aplicación ∇ que asocia cualquier campo tensorial $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ de tipo (r, s) a un campo tensorial $\nabla_c T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ de tipo $(r, s + 1)$ que obedece las propiedades usuales de un operador diferencial: linealidad y la regla del producto de Leibniz. En el caso en que $r = s = 0$, se tiene que nabra coincide con el operador diferencial o derivada para una función de variable real.*

Definición 24 (Símbolos de la conexión). *Para cierta base coordenada de vectores $(\{e_\alpha\})$, la acción de una conexión ∇ en un campo vectorial dado por el vector $\mathbf{v} = v^\beta \mathbf{e}_\beta$, se puede ver componente a componente como:*

$$\nabla_\alpha \mathbf{v} = \nabla_\alpha (v^\beta \mathbf{e}_\beta) = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \mathbf{e}_\beta + (\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta) \cdot v^\beta, \quad (2.16)$$

donde se usa el hecho de que cada componente v^β es un campo escalar en \mathcal{M} . Por lo cual, para determinar completamente al operador derivada covariante ∇ , se deben especificar una colección de escalares $C^\gamma_{\alpha\beta}$ que se denominarán coeficientes o símbolos de la conexión, tales que:

$$\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma. \quad (2.17)$$

Existen dos conceptos que vienen ubicados para una conexión que se mencionarán ahora más no son muy necesarios de revisar profundamente en este trabajo. Primeramente, una *conexión afín* preserva la linealidad para cada vector sobre los que opera, de manera que es una aplicación bilineal que sirve de ayuda para mantener distancias en una variedad. El segundo es el concepto de torsión.

Definición 25 (Torsión). *Sean $\mathbf{u} = x^a \mathbf{e}_a$ y $\mathbf{v} = y^b \mathbf{e}_b$ dos campos vectoriales en un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g_{ab}) . Se definirá la torsión como la cantidad tensorial dada por:*

$$\mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad i.e., \quad (2.18)$$

$$\mathcal{T}^c_{ab} = C^c_{ab} - C^c_{ba} - \gamma^c_{ab}; \quad (2.19)$$

donde $\gamma^c_{ab} \mathbf{e}_c = [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b]$.

La *torsión* de una conexión es un campo tensorial que nos ayuda para determinar la conexión afín utilizada en Relatividad General. Recurriendo a una definición auxiliar, se dice que para un campo escalar S que viene mapeado del sistema coordenado en nuestro espacio-tiempo hay ausencia de torsión, cuando se cumple la condición:

$$\nabla_a \nabla_b S = \nabla_b \nabla_a S \quad (2.20)$$

en cualquier base coordenada dada. La derivada covariante de un campo escalar S es simplemente:

$$\nabla_\alpha S = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}. \quad (2.21)$$

Para vectores y tensores de mayor orden, se debe tener especial atención en cómo actúa este operador. Se puede escribir con un cambio de índices mudos a que las componentes de la derivada covariante $\nabla_\alpha v^\beta$ del campo tensorial de tipo $(1, 1)$ $\nabla_\alpha v^\beta$ se ven simplemente como:

$$\nabla_\alpha v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + C^\beta_{\alpha\gamma} v^\gamma. \quad (2.22)$$

En general, para un tensor de tipo (r, s) se puede extender la noción de derivada covariante a:

$$\nabla_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \partial_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} + \sum_{i=1}^r C^{\alpha_i}_{\gamma\sigma} T^{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} - \sum_{j=1}^s C^\sigma_{\gamma\beta_j} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \sigma \dots \beta_s} \quad (2.23)$$

Definición 26 (Transporte paralelo). *Sea un vector v^α asociado a un punto en una variedad de dimensión finita. Se dice que v^α se transporta de manera paralela a lo largo de una curva \mathcal{C} con vector tangente t^α si y sólo si*

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \quad (2.24)$$

Si se considera en particular una base coordenada de vectores, se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{dv^\alpha}{d\lambda} + C^\alpha_{\beta\gamma} t^\beta v^\gamma = 0. \quad (2.25)$$

Esto muestra que cualquier vector t^α tangente a un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{C}$ y una conexión $C^\alpha_{\beta\gamma}$, el transporte paralelo define un vector único v^α para cada punto \mathbf{q} a lo largo de esa curva.

El transporte paralelo se puede entender también como una generalización del caso de mantener un vector constante en un espacio vectorial real.

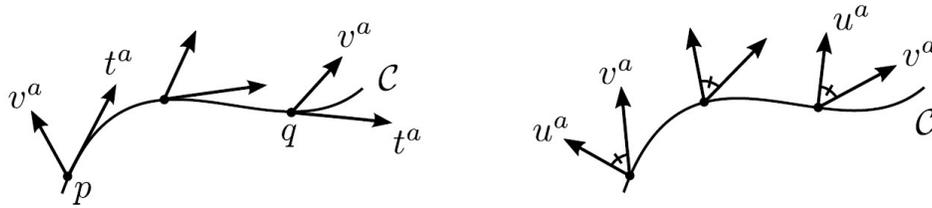


Figura 2.3: Diagramas ilustrativos de la noción de transporte paralelo, tomados de Auger & Plagnol (2017). Izq: Un 4-vector v^α transportado de manera paralela a lo largo de una curva \mathcal{C} , con 4-vector tangente t^α . Der: El producto escalar $g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$ entre dos 4-vectores u^α y v^α se conserva bajo una métrica de conexión compatible: se muestra cómo ambos vectores se transportan de manera paralela a través de la curva \mathcal{C} .

Definición 27 (Compatibilidad de una conexión o derivada covariante con una métrica g_{ab}). *Sea una curva \mathcal{C} con vector tangente t^α , sean también dos campos vectoriales u^α y v^β que satisfagan la ecuación del transporte paralelo a lo largo de esa curva. Dada la métrica g_{ab} de ese espacio y una conexión ∇_c para este, se dice que la conexión o la derivada covariante es compatible con la métrica cuando se cumple la condición:*

$$\nabla_c g_{ab} = 0; \quad (2.26)$$

requerimiento que proviene del hecho de que se solicita que el producto escalar entre u^α y v^β se conserve bajo el transporte paralelo asociado con ∇_γ sin importar la base del sistema coordenado, i.e. que se cumpla que $t^c \nabla_c (g_{ab} u^a v^b) = 0$.

La única conexión compatible con cualquier métrica g_{ab} y que sea libre de torsión, es la así denominada *conexión de Levi-Civita*. Esta conexión $C^\alpha_{\beta\gamma}$ tiene por coeficientes a los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, que son:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (2.27)$$

La condición de torsión nula proviene del hecho de que en la definición dada por la Ec. 2.19: $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} = 0$.

Intuitivamente, se puede entender a una geodésica como una curva cuya “curvatura” sea “lo más pequeña posible”. Queriendo decir esto que, sea la curva que muestre la trayectoria más y “recta” posible entre dos puntos situados en un espacio curvo.

Definición 28 (Geodésica). *Una geodésica es una curva cuyo vector tangente en cada punto se transporta de manera paralela a lo largo de ella, i.e. tal que:*

$$t^a \nabla_a t^b = 0. \quad (2.28)$$

Sea un sistema coordenado (x^α) y una base coordenada asociada a él. Si se tiene una parametrización de la geodésica dada por $X^\alpha(\lambda) = x^\alpha$, entonces por regla de la cadena se tiene sencillamente que las componentes de los vectores tangentes a la curva vienen dadas por $t^\alpha = dX^\alpha/d\lambda$. Se puede entonces expresar un conjunto de ecuaciones diferenciales para las componentes de la parametrización de la forma:

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dX^\beta}{d\lambda} \frac{dX^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (2.29)$$

y estas ecuaciones tienen solución y es única para cualquier punto al que se le pueda asociar una curva geodésica en el espacio-tiempo.

En Relatividad Especial y más aún en su extensión a la General, la trayectoria de una partícula sin masa (como el fotón) a través del espacio-tiempo es una geodésica nula, una curva por la cual se desplazan estas partículas y cuyos vectores tangentes siempre serán tipo luz; yaciendo así sobre el cono de luz al atravesar cualquier punto \mathbf{p} determinado en el espacio-tiempo y obedeciendo la ecuación geodésica (2.29)

Por otra parte, la trayectoria de una partícula masiva en el espacio-tiempo se conoce como línea de mundo, i.e. una curva cuyos vectores tangentes siempre serán tipo tiempo. El vector tangente a una línea de mundo debe yacer necesariamente dentro del cono de luz local para todo punto sobre ella misma (para satisfacer así siempre el postulado 2 de Relatividad Especial y no viajar más rápido que la velocidad de la luz). Sean \mathbf{p} y

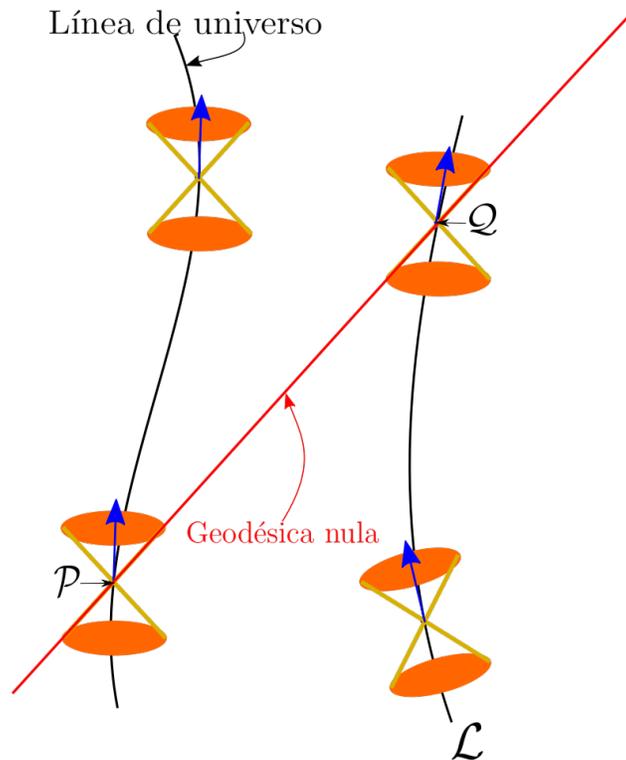


Figura 2.4: El vector tangente a una línea de mundo \mathcal{L} por la que viaja una partícula siempre debe yacer dentro del cono de luz definido localmente para cualquier punto que ella atraviere. En una extensión a un espacio curvo, la presencia de un campo gravitacional puede ocasionar que los conos de luz aparezcan inclinados en su representación en el espacio-tiempo (no hay un marco de referencia inercial global, únicamente local).

\mathbf{q} dos puntos que representen dos eventos cercanos a lo largo de \mathcal{L} . Como el vector tangente a esta curva es

tipo tiempo, el intervalo o elemento de línea entre ambos será negativo.

Se define así entonces el tiempo propio τ transcurrido entre ambos eventos como $ds^2 = -c^2 d\tau^2$. Este es el tiempo físico que un reloj ideal desplazándose junto con una partícula (en reposo en su sistema de referencia) mediría el tiempo transcurrido entre ambos puntos. Haciendo $\lambda = \tau$ como parámetro para la curva coordenada de la línea de mundo, el vector tangente a algún evento dado se entiende como una 4-velocidad $u^\mu = dx^\mu/d\tau$.

Para partículas sin masa, como lo son los fotones (y en buena aproximación los neutrinos), se debe tener cuidado con la parametrización. De acuerdo con la Def. 2.2, para parametrizar una curva debe elegirse un parámetro λ sobre ella, mientras esta parametrización sea uno a uno entre punto (vector tangente) y valor del parámetro. Para el caso de partículas masivas, con masa definida m , el tiempo propio τ puede ser de ayuda para esta aplicación.

2.8. Principio de acción mínima y geodésicas en Relatividad General

Para fines de notación de ahora en adelante en el texto, denótese a $x^\mu = X^\mu(\lambda)$ una curva sobre una variedad \mathcal{M} , que representa la línea coordenada de mundo de una partícula libre.

Para partículas masivas, con su masa en reposo m_0 , es común encontrar en la literatura que su acción viene dada por:

$$S_m = -m_0 c^2 \int d\tau, \quad (2.30)$$

donde τ es el parámetro de tiempo propio:

$$d\tau^2 = -\frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{c^2}. \quad (2.31)$$

Por el principio de invariancia del elemento de línea, estas son cantidades invariantes de Lorentz, para una curva parametrizada por τ , i.e. $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Tomando que el 4-vector tangente de velocidad $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ es un vector tipo tiempo que satisface: $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$, la acción relativista para esta partícula viene dada por:

$$S_m \left[x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda \right] = -m_0 c \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \int d\lambda \mathcal{L}_m, \quad (2.32)$$

donde se introduce el parámetro arbitrario λ tal que:

$$c d\tau = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.33)$$

De manera que salvo una constante $-m_0 c$ que no altera la dinámica del problema planteado por la acción original, ni depende de las variables del sistema coordenado, las 4-velocidades ni el parámetro λ ; se puede tomar que la acción y la Lagrangiana para una partícula masiva relativista vienen dadas por:

$$S = \int d\lambda \mathcal{L}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda \right) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (2.35)$$

Cuando se tiene que la partícula libre a considerar no tiene masa, como es el ejemplo de un fotón, se encuentra un gran problema para poder extremar esta acción y llegar a las ecuaciones que la minimizan con respecto al parámetro λ . No se puede emplear la Lagrangiana para encontrar las ecuaciones de movimiento para partículas sin masa, puesto que (2.35) para ellas se vuelve cero y al querer extremar la acción asociada a ella, el cálculo arroja un resultado indeterminado.

Para sortear este problema se puede proponer una nueva Lagrangiana similar, partiendo justo de que el término al interior de la raíz en (2.35) es una forma cuadrática para las 4-velocidades y lo que es más, una función homogénea de segundo grado en ellas. Se elige pues ahora de manera conveniente:

$$\mathcal{L}' \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.36)$$

que es idéntica a la Lagrangiana revisada en Mecánica Clásica escrita de manera específica, por unidad de masa, para un sistema sustentando únicamente energía cinética en su movimiento.

Puede verse que esta Lagrangiana y la que se escribió arriba anteriormente son ambas funciones homogéneas de segundo grado en sus 4-velocidades. Además, observando que se puede escribir una en función de la otra, $\mathcal{L}' = F(\mathcal{L})$ y F a su vez es monótona, pues $F = \mathcal{L}^2/2$. Para ver que ambas en efecto, son equivalentes, nótese que viniendo nuevamente del principio de acción mínima, ahora para esta nueva Lagrangiana la acción relativista es:

$$S' \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda \right) = \int d\lambda \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \int d\lambda g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (2.37)$$

Para la Lagrangiana original se tiene que a la hora de extremar para minimizar la acción S , se llega a que \mathcal{L} cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.38)$$

Si se toma por hipótesis que \mathcal{L} cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces $\mathcal{L}' = F(\mathcal{L})$ también las cumplirá:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} &= \mathcal{L} \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right] + \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \\ &= \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Considerando este resultado, se puede ver que la Lagrangiana (2.36) puede ser útil para partículas masivas y no masivas. Únicamente se debe refinar una sutileza: el parámetro λ es ahora para partículas masivas un parámetro afín independiente de la parametrización que se elija, mientras que para partículas sin masa solo puede ser un parámetro afín que recorra el cono de luz, por lo cual no puede ser el tiempo propio τ ni cualquier reparametrización de este último.

El método variacional sobre la nueva Lagrangiana deben regresar las ya conocidas ecuaciones de movi-

miento del sistema de coordenadas para las curvas geodésicas. En efecto, puede observarse que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \left(\frac{dx^\gamma}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\gamma} &= \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\gamma\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\
&= \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\gamma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] + g_{\gamma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\
&= g_{\gamma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \right] \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{2.40}
\end{aligned}$$

y finalmente multiplicando por la izquierda por una métrica inversa $g^{\sigma\gamma}$:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{2.41}$$

2.9. Curvatura y tensor de Riemann

La curvatura en cualquier conjunto abierto en nuestro espacio-tiempo puede ser estudiada utilizando la noción de transformar a un vector en ese subespacio a lo largo de una trayectoria cerrada.

Si un vector V^ρ se transporta de manera paralela en una trayectoria infinitesimal cerrada, se puede estudiar localmente el cambio del vector cuando es transportado de manera paralela en las direcciones de dos vectores A^μ y B^ν sobre esa trayectoria, de manera que si se empieza en un punto, se desplace el vector sobre estas direcciones y al cerrar la trayectoria se regrese al mismo punto. El cambio infinitesimal de este vector al ser transportado de manera paralela sobre estas direcciones en la trayectoria cerrada vendrá pues dada por una expresión de la forma:

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu, \tag{2.42}$$

donde la cantidad tensorial $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ se conoce como tensor de Riemann. Para ubicar una expresión relacionada al tensor de Riemann, se puede calcular el conmutador entre dos conexiones dadas por derivadas covariantes:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \left(\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \right) V^\sigma - \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right) V^\rho \tag{2.43}$$

$$= R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - \mathcal{T}^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho. \tag{2.44}$$

El tensor de Riemann es el objeto tensorial más importante en la así llamada geometría riemanniana, la cual estudia por completo a las variedades diferenciales y los conceptos hasta ahora revisados en este trabajo. De él son importantes mencionar las identidades de Bianchi:

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_d R_{abec} + \nabla_c R_{abde} = 0, \tag{2.45}$$

las cuales se aplican para el tensor de Riemann con índices abajo: $R_{abcd} = g_{af} R^f_{bcd}$. También son de importancia el tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R^c_{acb}, \tag{2.46}$$

y el escalar de curvatura de Ricci:

$$R = g^{ab} R_{ab}. \tag{2.47}$$

2.10. Ecuaciones de Einstein

Según se revisa en la mecánica newtoniana, la acción de un campo vectorial gravitacional actuando en un punto \vec{r} yace en la descripción de un campo escalar $\phi(\vec{r})$ para ella. Dicho campo escalar satisface una ecuación diferencial de Poisson del tipo:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}), \quad (2.48)$$

con $\rho(\vec{r})$ la función de densidad de materia.

Si bien en el presente trabajo no se extenderá de manera completa una plena noción y uso de las siguientes ecuaciones, se mencionarán aquí porque son el logro más representativo e importante de la teoría de la Relatividad General. Estas son las ecuaciones de Einstein ¹, que escritas de forma covariante toman la forma:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (2.49)$$

donde:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}. \quad (2.50)$$

Aquí, G_{ab} representa al tensor de Einstein, el cual es un operador diferencial no lineal, de segundo orden, que actúa sobre el tensor métrico g_{ab} . La forma de este operador nos hace pensar en que resolver este sistema será un problema de Cauchy escrito en ecuaciones con derivadas parciales, de segundo orden, no lineales. El término a la derecha de la Ec. (2.49) es proporcional a otro operador tensorial asociado a una fuente para estas ecuaciones (pues en general, las vuelve no homogéneas): el tensor de energía momento T_{ab} .

Si se obtiene la traza de la Ec. (2.49), se obtiene que $R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$, donde T es la traza de T_{ab} y ahora se puede reescribir la ecuación de Einstein (2.49) como:

$$R_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right). \quad (2.51)$$

La constante de proporcionalidad $\kappa = 8\pi G/c^4$ entre el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento se encuentra a la hora de imponer a las ecuaciones un caso en el que se desprecian los efectos más significativos de la curvatura en el espacio-tiempo. Bajo este régimen, se mantiene únicamente la premisa de reproducir campos gravitacionales débiles que correspondan a la función de energía de la dinámica newtoniana: la energía cinética de una partícula situada en un punto \vec{r} y la energía potencial dada en el campo $\phi(\vec{r})$ sobre ese punto. Al realizar este caso límite, se regresa a la ecuación de Poisson (2.48).

¹Las ecuaciones de campo de Einstein-Bianchi, sin considerar a la constante cosmológica Λ .

Capítulo 3

Antecedentes y conceptos preliminares

*"I was searching, you were on a mission,
and our hearts combined like a neutron star collision.
I have nothing left to lose, you took your time to choose.
Then we told each other, with no trace of fear that our love would be forever.
And if we die, we die together.
And lie, I said never, 'cause our love would be forever..."*

"Neutron Star Collision", Muse.

3.1. Objetos compactos (OC)

Los *objetos compactos*, abreviados aquí como OC por sus siglas, conforman en Astrofísica a las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros. Los OC estelares son objetos en el Universo que nacen después de que ciertas estrellas "mueren", es decir, su aparición ocurre cuando el mayor porcentaje del combustible nuclear de sus estrellas progenitoras se ha consumido. Representan pues la última etapa en la evolución estelar.

Las 2 razones fundamentales por la cual los OC difieren de las estrellas comunes son:

1. Presentan un tamaño excesivamente pequeño, en comparación con las estrellas progenitoras que las anteceden.
2. Cuando el combustible nuclear en estas estrellas progenitoras se ha consumido, no hay ningún fenómeno ni mecanismo que las detenga de colapsar de manera gravitacional hacia sus partes más internas. De este fenómeno los objetos compactos se presentan como estrellas u objetos remanentes tras el colapso.

Situando el comienzo de nuestra descripción de objetos compactos en las enanas blancas y estrellas de neutrones, es conocido que cuando estas ya fueron formadas, en vez de la precedente presión térmica de las partículas que componían a sus estrellas antecesoras, ahora estas se mantienen estables gracias a una presión de degeneración de electrones y de neutrones, respectivamente, que logra equilibrar de manera hidrostática a la estrella remanente. Por otro lado, la clase de agujeros negros de masa estelar o masa intermedia son estrellas completamente colapsadas, donde esto aquí se entiende como estrellas que no pudieron encontrar ningún medio para frenar el empuje gravitacional hacia su interior, tal que las partículas de prueba cruzando su horizonte sean inevitablemente atraídas hacia él. Y también se tienen a los agujeros negros supermasivos, quienes todavía hoy siguen siendo estudiados para comprender su origen y demás pormenores físicos.

Las cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza que se listan por: electromagnetismo, gravitación, nuclear y débil, juegan un papel importante en las fuerzas que intervienen en la estructura y fenomenología de los OC. En particular, los campos gravitacionales que existen en sus superficies son notoriamente grandes: razón por la que se termina necesitando a la Relatividad General para poder describir con detalle su estructura, evolución y comportamiento.

Se piensa que un factor primario para determinar si una estrella terminaría como enana blanca, estrella de neutrones o agujero negro es la masa de la estrella que las engendró. En la actualidad, se sabe que las estrellas de neutrones y agujeros negros son originados de estrellas mucho más masivas que las que anteceden a las enanas blancas. Sin embargo, la línea divisoria entre estrellas que terminan como las primeras o como los segundos es todavía vaga. Para estrellas de neutrones se sabe que deben venir de progenitoras de un orden mayor al intervalo de 6 a $8 M_{\odot}$, estrellas masivas que tras quemar su combustible nuclear estallan en una así conocida como explosión de supernova. Lamentablemente, aun al día de hoy las etapas finales de la evolución de estrellas masivas no alcanzan completa comprensión para delimitar esta cota con mayor sutileza.

3.2. Semblanza histórica de las estrellas de neutrones

Baade & Zwicky (1934a) apuntaron por primera vez hacia la idea de estrellas de neutrones, diciendo que deberían ser de una densidad muy alta y radio pequeño, originadas de estallidos de supernovas; también que presentarían un campo gravitatorio mucho más intenso que otras estrellas ordinarias. Oppenheimer & Volkoff (1939) y Tolman (1939) realizaron los primeros cálculos de un modelo de estrella de neutrones. Asumieron que la materia debería estar compuesta de un gas ideal de neutrones libres a alta densidad.

Un argumento popular que se usaba para descartar las estrellas de neutrones era que debido a su área demasiado pequeña, el espectro de su radiación térmica residual sería muy tenue para ser observado a distancias astronómicas donde nos encontramos en la Tierra, con telescopios ópticos. Sin embargo, el hallazgo de fuentes no solares de rayos X realizado por Giacconi y otros en 1962 regeneró el interés en ellas. Para terminar finalmente con el reducto de escépticos, llegó el descubrimiento de los pulsares a finales de 1967 por Jocelyn Bell. Un año después estos fueron descritos por Gold como estrellas de neutrones rotantes, a las que ya se les había encontrado una frecuencia constante y por tanto, un periodo rotacional intrínseco para sus pulsaciones. El satélite UHURU estimularía el vasto trabajo de campo que ya se estaba realizando con el descubrimiento de los pulsares de rayos X, en el año de 1971. Sin olvidar mencionar que el descubrimiento simultáneo de los pulsares del Cangrejo y Vela en 1968 como objetos compactos centrales situados en dos remanentes de supernovas, apoyarían la evidencia de que se forman tras estallidos de estas estrellas. Años después se tuvo que el hallazgo del sistema binario de pulsares de Hulse y Taylor permitiría la primera medición de sus masas y de su radiación gravitacional.

Actualmente se reconoce que las estrellas de neutrones de rotación lenta, que por lo tanto no se manifiestan como púlsares, y que no presentan el fenómeno de acreción son casi indetectables. Sin embargo, desde que el satélite de rayos X ROSAT detectó RX J185635 – 3754 en la década de 1990, se han detectado algunas estrellas de neutrones cercanas que parecen emitir principalmente radiación térmica. Se conjetura que los destellos de rayos gamma suaves son debidos a un tipo de estrella de neutrones con campos magnéticos muy fuertes, a los cuales se les conoce como magnetares . Las estrellas de neutrones que han podido ser observadas directamente hasta ahora son muy calientes y normalmente tienen una temperatura superficial de alrededor de 10^6 K. Sus campos magnéticos pueden comprender un rango entre 10^8 y 10^{15} más grande que el campo magnético de la Tierra.

También se tiene teorizado que las estrellas de neutrones en los sistemas binarios pueden sufrir acreción, lo que generalmente hace que el sistema emita en rayos X, mientras que el material que cae sobre la estrella de neutrones puede formar regiones calientes que rotan dentro y fuera de la vista en los sistemas de púlsares

de rayos X identificados. Además, dicha acumulación puede reciclar viejos púlsares y potencialmente hacer que acumulen masa y giren a velocidades de rotación muy rápidas, formando los así llamados púlsares de milisegundos. Estos sistemas binarios seguirán evolucionando y, finalmente, sus estrellas compañeras pueden convertirse en objetos compactos, como enanas blancas o estrellas de neutrones, aunque otras posibilidades incluyen la destrucción completa del compañero por ablación.

La fusión de estrellas de neutrones binarias se ha demostrado ser la fuente de estallidos de rayos gamma de corta duración y de ondas gravitacionales. En 2017, se observó una detección directa (GW170817, Abbott *et al.* 2017) de las ondas gravitacionales de tal evento.

Las tres estrellas de neutrones más masivas, con la menor incertidumbre detectada hasta ahora en sus barras de error y en un rango de confiabilidad de al menos $\pm 1\sigma$ son los púlsares milisegundo PSR J1614–2230 ($1,97 \pm 0,04 M_{\odot}$, Demorest *et al.* 2010), PSR J0348 + 0432 ($2,01 \pm 0,04 M_{\odot}$, Antoniadis *et al.* 2013) y PSR J0740 + 6620 ($2,14 \pm 0,1 M_{\odot}$, Cromartie *et al.* 2020)¹. La estrella de neutrones que se conoce gira más rápido por ahora es PSR J1748-2446ad (Hessels *et al.*, 2006), pues se ha medido que gira a una velocidad de 716 veces por segundo o $4,3 \times 10^3$ revoluciones por minuto, dando una velocidad lineal en la superficie del orden de $0.24c$ (es decir, casi un cuarto de la velocidad de la luz).

3.3. Modelos y la ecuación de estado para estrellas de neutrones

Para estudiar la estructura de las enanas blancas se pueden seguir considerando los cálculos clásicos de la mecánica de Newton, salvo pequeñas correcciones relativistas, debido a que la presión de degeneración de los electrones ocurre a densidades muy bajas comparadas con las de nucleones y estas estrellas no se compactan a órdenes relativistas como sus otros objetos compactos hermanos. El rango de densidades centrales para las enanas blancas es de 10^6 hasta 10^{10} g/cm³.

A densidades mayores, la presión de Fermi de los nucleones complementada por las fuerzas nucleares, que repele las partículas entre sí, ocasiona una segunda configuración estable para los objetos compactos: las estrellas de neutrones. De las ecuaciones de estructura y equilibrio hidrostático para las estrellas de neutrones, ver capítulo siguiente, se puede ver que tanto la presión como la densidad de energía en ellas son fuentes de atracción gravitacional. Lo que es más, al resolver estas ecuaciones, siempre existirán condiciones sobre la densidad del medio que limiten las cantidades como son el radio y la masa de la estrella, que dependen de la estructura y la ecuación de estado de la materia que compone a los objetos.

La materia que ha sido completamente procesada por reacciones nucleares, de modo que toda la energía disponible en cada uno de los estados accesibles por densidad ha sido extraída completamente, es materia hadrónica en su estado fundamental, a menudo denominada "materia fría catalizada". A presión cero, tal materia está compuesta de átomos de ⁵⁶Fe, cuyos núcleos se conoce son los que tienen mayor energía de enlace. Al ir aumentando la densidad, los átomos se vuelven progresivamente más ionizados, y los electrones llenan los espacios intersticiales entre los núcleos. Así se forma una red cristalina de Coulomb de núcleos en el gas de electrones que se sabe minimiza la energía a baja temperatura.

A mayor densidad (tal que el potencial químico de los electrones es suficientemente grande para inducir los decaimientos beta inversos), un estado de menor energía es logrado a través de la captura de electrones energéticos por los núcleos. Los neutrinos y fotones producidos se difunden fuera de la estrella, reduciendo así su energía. Los núcleos se vuelven cada vez más ricos en neutrones por este mencionado proceso de neu-

¹Cabe señalar que existen registros de ciertas estrellas de neutrones cuyas masas medidas han resultado mayores o similares. Tal es el caso de aquellas con mediciones provenientes, por ejemplo, de fuentes ópticas de rayos X y la de una de las estrellas del sistema binario detectado por la onda gravitacional GW170817. Sin embargo, estos casos fueron excluidos porque tienen una barra de error mayor a las aquí presentadas, ya que no emplearon técnicas más sofisticadas para su medición.

tronización. La neutronización se establece a una densidad para la cual el potencial químico de electrones, o energía de Fermi $\mu_e \equiv \sqrt{m_e^2 + k_e^2}$ es igual al umbral para la reacción. Tómese la diferencia de masa protón-neutrón $Q \sim 1$ MeV para este umbral. La densidad umbral para la neutronización es $\sim 8 \times 10^6 \text{ g/cm}^3$ (Baym *et al.*, 1971).

A densidades tan altas como $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, los neutrones más débilmente unidos se filtran y "escurren" de los núcleos, y un gas de neutrones y electrones ocuparán los espacios intersticiales. La densidad de este fenómeno de escurrimiento (también denominado goteo de neutrones) es alta en comparación con la densidad más alta en las enanas blancas estables, aunque bien ocurre en la corteza de las estrellas de neutrones. A una densidad aún más alta alrededor de la densidad de saturación de la materia nuclear, $\epsilon_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, los núcleos se desarmen y forman una materia homogénea neutral, mezcla de bariones y leptones. Esto es a lo que nos referimos como materia de estrella de neutrones, una materia nuclear que es de carga neutra y en su estado de energía más bajo. Esta materia contiene tantas especies de bariones en cada densidad, según se requiera para mantener el equilibrio, de modo que no se produzcan intercambios o transformaciones de partículas por desintegración beta o de algún otro modo. La materia de estrellas de neutrones en densidades por encima de $\epsilon_0/2$, se utiliza para describir el interior de las estrellas de neutrones. La región inferior a esta saturación descrita anteriormente sirve para definir la ecuación de estado en la corteza.

Varios autores han contribuido al cálculo de la ecuación de estado para materia fría catalizada en varios dominios de densidad a debajo de la saturación nuclear: Feynman-Metropolis-Teller de 15 a 10^4 g/cm^3 , Chandrasekhar hasta a 10^7 g/cm^3 , Harrison-Wheeler-Wakano hasta 10^{12} g/cm^3 , Bonche-Negele-Vautherin hasta 10^{13} g/cm^3 . El compendio de resultados citado anteriormente a veces se denomina la ecuación de estado Harrison-Wheeler (HW) (Shapiro & Teukolsky, 1983).

Las fuerzas nucleares con su repulsión de corto alcance endurecerán la ecuación de estado y aumentarán la masa límite. Los núcleos están unidos por la atracción de la fuerza nuclear y tienen una densidad de saturación que es casi la misma en todos los núcleos debido a la repulsión de corto alcance. Por el contrario, las estrellas de neutrones se mantienen unidas por la gravedad, y la densidad es tan alta que los nucleones experimentan repulsión por su interacción con los demás. De hecho, la energía requerida para comprimir nucleones a la densidad que se encuentran los núcleos de las estrellas de neutrones es de $200\text{-}300$ MeV por nucleón.

3.4. Estrellas *extrañas*

De una naturaleza muy diferente a las estrellas de neutrones, se encuentran las así denominadas estrellas extrañas. Así como las estrellas de neutrones son muy densas, las densidades de estos nuevos objetos también están en el mismo orden que las del fluido de neutrones en las otras. No obstante, es importante considerar que su misma existencia depende de una hipótesis que al principio puede parecer un poco absurda.

Según esta hipótesis, a veces referida como la hipótesis de la materia extraña, la materia de quarks que conformaría el fluido de esta estrella, consistiría en aproximadamente una cantidad similar en número de quarks arriba, abajo y extraño; y tendría una energía de balance por barión que sea menor que la energía-masa del nucleón o la energía por nucleón del núcleo más ligado, el Hierro. En otras palabras, bajo esta hipótesis, esta materia extraña de quarks sería necesariamente el estado fundamental absoluto de la interacción fuerte (Witten, 1984).

Es visto de manera común que los sistemas, si no están en su estado fundamental, fácilmente decaen a éste. Por supuesto, esto no siempre es así. Incluso en objetos bien conocidos como los núcleos atómicos, hay ciertos estados excitados cuya naturaleza es tal que se complica la transición al estado base fundamental. Por ejemplo, el primer estado excitado de ^{180}Ta tiene una vida media de 10^{15} años, cinco órdenes de magnitud

más que la misma edad del universo. De la mano de este hecho se encuentra que la hipótesis de la materia extraña es consistente con el universo actual - visto pues como un estado excitado de larga duración- siempre que la materia extraña comprenda a este estado fundamental. La estructura de las estrellas extrañas se tiene como fascinante, así iguales son algunas de sus propiedades (Alcock *et al.*, 1986).

Capítulo 4

Estrellas compactas y ecuaciones relativistas de estructura

Resulta importante el poder estudiar la composición de la estrella en términos de la física que resultaría válida en su régimen de estudio. Desde luego, como se revisó en el capítulo pasado, la Relatividad General debe estar presente dentro de la descripción de las propiedades de las estrellas compactas.

En la Astrofísica estelar newtoniana, se descubre que las ecuaciones constitutivas para el estudio de las cantidades como masa m , densidad ε y presión p , vienen dadas por ecuaciones de equilibrio hidrostático y la ecuación de Lane-Emden en el caso de polítopos. Estas relaciones de equilibrio se sofistican para el caso de la Astrofísica Relativista, dando origen a la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, como se verá en este capítulo.

4.1. Soluciones esféricamente simétricas para estrellas

Para imponer soluciones estáticas ¹ y esféricamente simétricas para estrellas en el marco de la Relatividad General, se puede iniciar primero con un elemento de línea que incluya un sistema coordenado útil para este nuevo espacio: las coordenadas esféricas $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$. La métrica de Minkowski incorporada al elemento de línea se ve en este espacio-tiempo como:

$$ds_{\text{Minkowski}}^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

donde se está tomando al subelemento de línea de la 2-esfera \mathbb{S}^2 de radio 1: $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Tómese ahora un cambio de coordenadas arbitrario que transforme el elemento de línea presente. La simetría esférica se mantendrá para nuevos elementos de línea que surjan siempre que su subelemento nuevo, llámese ahora, $d\Omega_*^2$; sea proporcional al $d\Omega^2$ original, salvo el producto de una función que no dependa de θ ni ϕ . Asimismo, nos interesa resolver por ahora el caso estacionario para este problema, por lo cual no nos interesarán transformaciones que dependan de t . Se propone entonces un nuevo elemento de línea para cualquier espacio-tiempo estático con simetría esférica dado por:

$$ds^2 = -e^{2f(r)} c^2 dt^2 + e^{2g(r)} dr^2 + e^{2h(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

¹Soluciones que cumplan las ecuaciones de Einstein para cierta métrica $g_{\mu\nu}$ y que representen a un cierto espacio tiempo. Por estático se puede tomar la definición común y corriente de que la métrica en cuestión (i) no tenga componentes g_{ti} ó g_{it} con i corriendo en r, θ y ϕ o cualesquiera que fueran las coordenadas en la parte espacial, y (ii) que la métrica no dependa de manera explícita del tiempo coordenado t .

donde se pasa a un nuevo elemento de línea general que solo depende de r .

Se puede demostrar matemáticamente que esta forma es de hecho la forma más general de un elemento de línea en estas condiciones (ver, e.g., Carroll 2004). Este elemento de línea tiene pues entradas $[g_{\mu\nu}] := \text{diag}(-e^{2f(r)}, e^{2g(r)}, e^{2h(r)}r^2, e^{2h(r)}r^2 \sin^2 \theta)$, que por su forma exponencial garantizan preservar los signos de la signatura de la métrica en cada componente. Asimismo, es importante hacer notar también que estos coeficientes de la métrica deben de respetar que en un límite cuando $r \rightarrow \infty$, se recupere la métrica plana de Minkowski, de manera que $f(r), g(r), h(r) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$.

Antes de continuar, todavía es conveniente reescribir este elemento de línea con una nueva transformación puntual de coordenadas. Ahora se propone:

$$\bar{r} = e^{h(r)}r \quad (4.3)$$

$$d\bar{r} = e^h dr + e^h r dh = \left(1 + r \frac{dh}{dr}\right) e^h dr. \quad (4.4)$$

Así, se tiene ahora el nuevo elemento de línea:

$$ds^2 = -e^{2f(r)}c^2 dt^2 + \left(1 + r \frac{dh}{dr}\right)^{-2} e^{2[g(r)-h(r)]} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \quad (4.5)$$

Este elemento de línea es reeditable y puede escribirse de una manera más conveniente, como el coeficiente $g_{11}(r) = \left(1 + r \frac{dh}{dr}\right)^{-2} e^{2[g(r)-h(r)]} = e^{2\Lambda(r)}$. La variable \bar{r} es una nueva coordenada radial diferente a la etiquetada originalmente como r . Sin embargo, se puede seguir nombrando a esta nueva coordenada radial como la original para reducir cambios en la notación. De esta manera se puede tener el elemento de línea:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.6)$$

el cual ya coincide con el más comúnmente encontrado en la literatura (también se ha reemplazado f con Φ y g con Λ para respetar notaciones casi universales).

4.2. Métrica de Schwarzschild

Considérese la métrica estática y esféricamente simétrica dada por la Ec. (4.6). Ahora, el escenario que nos gustaría resolver para las ecuaciones de Einstein es un espacio-tiempo vacío, i.e. $T_{\mu\nu} = 0$.

Habiendo calculado el tensor de Ricci arriba, de las ecuaciones de Einstein en su forma (2.51) se tiene que $R_{\mu\nu} = 0$ para cada μ, ν y con esto en mente, se puede llegar a escribir que:

$$e^{2(\Lambda-\Phi)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \Phi + \partial_r \Lambda) = 0$$

$$\Phi + \Lambda = C_1 \quad \text{pero } C_1 = 0 \text{ recordando que } \Phi, \Lambda \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

$$\Phi(r) = -\Lambda(r) \quad (4.8)$$

También:

$$R_{\theta\theta} = 0$$

$$e^{2\Phi}(2r\partial_r\Phi + 1) - 1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\partial_r(re^{2\Phi}) = 1 \quad (4.10)$$

$$re^{2\Phi} = r + C_2 \quad \text{y haciendo } C_2 = -R_s \quad (4.11)$$

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{R_s}{r}; \quad (4.12)$$

para R_s una constante sin determinar. Por lo tanto, se llega a un elemento de línea que se ve como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.13)$$

A esta métrica se le conoce como la *métrica de Schwarzschild* y R_s el radio de Schwarzschild. En analogía con Ec. (4.31) se escribe $R_s = 2GM/c^2$ con M formalmente teniendo unidades de masa.

También, veamos que $r = 0$ es una singularidad física del espacio tiempo para la métrica, la cual se puede pensar como un punto de curvatura infinita, es decir, uno donde las geodésicas del espacio-tiempo no están definidas. En este sistema de coordenadas el radio $r = R_s$ es también singular, pero esta peculiaridad se puede remover al cambiar de sistema de coordenadas, por ejemplo, al pasar a las de Kruskal-Szekeres (ver, e.g., Carroll 2004). Trabajar con esta métrica de Schwarzschild también nos limita a que la misma solo tiene sentido físico mientras se tome $r > R_s$.

Finalmente, los vectores de la base coordenada en un punto \mathbf{p} , i.e. $\vec{\mathbf{e}}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\mathbf{p}}$, cumplen $\vec{\mathbf{e}}_\mu \cdot \vec{\mathbf{e}}_\nu = g_{\mu\nu}$ y de ellos obtenemos una base ortonormal:

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \frac{\vec{\mathbf{e}}_t}{\sqrt{1 - R_s/r}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \sqrt{1 - R_s/r} \vec{\mathbf{e}}_r, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \vec{\mathbf{e}}_\theta, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \vec{\mathbf{e}}_\phi, \quad (4.14)$$

que nos servirá mas adelante.

4.3. Equilibrio hidrostático para una estrella en Relatividad General

Nos gustaría encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo no vacío, por lo cual, de las Ecs (2.51). se tiene:

$$R_{tt} = e^{2(\Phi-\Lambda)} \left[\partial_r \partial_r \Phi + (\partial_r \Phi)^2 - \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{2}{r} \partial_r \Phi \right], \quad (4.15)$$

$$R_{rr} = -\partial_r \partial_r \Phi - (\partial_r \Phi)^2 + \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{2}{r} \partial_r \Lambda, \quad (4.16)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda} [r(\partial_r \Lambda - \partial_r \Phi) - 1] + 1, \quad (4.17)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (4.18)$$

Además:

$$R = -2e^{-2\Lambda} \left[\partial_r \partial_r \Phi + (\partial_r \Phi)^2 - \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{2}{r} (\partial_r \Phi - \partial_r \Lambda) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\Lambda}) \right] \quad (4.19)$$

Por lo tanto:

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\Phi-\Lambda)} (2r \partial_r \Lambda - 1 + e^{2\Lambda}), \quad (4.20)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (2r \partial_r \Phi + 1 - e^{2\Lambda}), \quad (4.21)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[\partial_r \partial_r \Phi + (\partial_r \Phi)^2 - \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{1}{r} (\partial_r \Phi - \partial_r \Lambda) \right], \quad (4.22)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \quad (4.23)$$

Se modelará a la estrella como un fluido perfecto, con el tensor de energía-momento dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (4.24)$$

Las funciones de densidad de energía ε y la presión p serán únicamente funciones de la coordenada r . Aquí se toma a U^μ como la 4-velocidad del fluido y es un vector tipo tiempo normalizado, es decir, $U_\mu U^\mu = -1$ ². Para satisfacer la condición de estaticidad, resulta que este 4-vector se puede escribir como:

$$U_\mu = (-e^\Phi, 0, 0, 0). \quad (4.25)$$

El tensor de energía-momento tomará así la forma:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon(r) e^{2\Phi}, p(r) e^{2\Lambda}, p(r) r^2, p(r) r^2 \sin^2 \theta). \quad (4.26)$$

Las componentes independientes de las ecuaciones de Einstein serán:

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\Lambda} (2r \partial_r \Lambda - 1 + e^{2\Lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon(r) \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\Lambda} (2r \partial_r \Phi + 1 - e^{2\Lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} p(r) \quad (4.28)$$

$$e^{-2\Lambda} \left[\partial_r \partial_r \Phi + (\partial_r \Phi)^2 - \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{1}{r} (\partial_r \Phi - \partial_r \Lambda) \right] = \frac{8\pi G}{c^4} p(r) \quad (4.29)$$

Si se reescribe la Ec. (4.27) con el uso de una nueva función $m = m(r)$ tal que:

$$m(r) = \frac{c^2}{2G} (r - r e^{-2\Lambda(r)}), \quad \text{o bien,} \quad (4.30)$$

$$e^{2\Lambda(r)} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)^{-1}; \quad (4.31)$$

la Ec.(4.27) se pasará a ver como:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \frac{\varepsilon(r)}{c^2} r^2. \quad (4.32)$$

Introduciendo la nueva variable $m(r)$, la Ec. (4.28) se pasa a ver como:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G m(r) + \frac{4\pi G p(r) r^3}{c^2}}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r c^2} \right)} \quad (4.33)$$

La última ecuación puede encontrarse de la relación $\nabla_r T^{rr} = 0$, que lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -[\varepsilon(r) + p(r)] \frac{d\Phi}{dr} \\ &= -[\varepsilon(r) + p(r)] \frac{G m(r) + \frac{4\pi G p(r) r^3}{c^2}}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La Ec. (4.34) se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, y a las Ecs. (4.32, 4.34) se les llama comúnmente como ecuaciones relativistas de estructura.

²Bajo una reparametrización afín que en la Ec.(2.33), se puede tomar para un parámetro λ tal que $\lambda = c\tau$, con τ el tiempo propio medido en el referencial estático del fluido en reposo. Es decir, aquí la 4-velocidad es $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

Para poder resolver estas ecuaciones es necesario cerrar este sistema de ecuaciones con una extra: una ecuación de estado para la estrella como fluido perfecto. En general, esta ecuación vendría dada como la presión en términos de la densidad de energía y la entropía específica: $p = p(\varepsilon, s)$. Si la entropía del fluido está restringida a fluctuaciones despreciables, se puede operar de manera primaria con una ecuación de estado que tome la forma:

$$p = p(\varepsilon). \quad (4.35)$$

Nótese del signo de la Ec. (4.34) que p siempre decrece dentro de la estrella, por lo cual, tendremos un radio R^* en el cual $p = 0$ que definirá al radio de la estrella. A su vez también definimos la masa gravitacional de la estrella como:

$$M = m(R^*). \quad (4.36)$$

Finalmente, puede verse que para $r > R^* > R_s$ la métrica del espacio tiempo alrededor de una estrella se reduce a la de Schwarzschild.

4.4. Teorema de Buchdahl

Ahora resultará interesante discutir las soluciones interiores, para las cuales el tensor de energía-momento no es igual a cero en todas sus componentes. Considérese el modelo más simple para una estrella relativista en $r \leq R^*$, la cual consta de un fluido esférico incompresible, de densidad constante en la estrella tal que:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_* & \text{para } r \leq R^*, \\ 0 & \text{para } r > R^*. \end{cases} \quad (4.37)$$

Este modelo aunque no está físicamente presente en la naturaleza puesto que una estrella no puede ser formada por un fluido incompresible, es bueno para visualizar el resultado de un límite máximo entre las estrellas compactas y su gap intermedio a agujeros negros.

Tómese la primera ecuación de estructura, la Ec. (4.32). Para $r < R^*$, de la definición de $\varepsilon(r) = \varepsilon_*$, tenemos que:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \frac{\varepsilon_*}{c^2} r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon_*}{c^2} r^3$$

En cambio, como $\varepsilon(r) = 0$ para $r > R^*$, $\frac{d}{dr}m(r) = 0$. Entonces, $m(r) = M = \text{constante}$ para $r > R^*$. Para determinar la constante ε_* , sencillamente se toma $m(R^*) = M$ y se pegan ambas soluciones (la interior y la exterior) en el borde dado por el radio de la estrella R^* . Por lo tanto,

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\varepsilon_*}{3c^2} r^3 = M \frac{r^3}{(R^*)^3} & \text{para } r < R^*, \\ \frac{4\pi\varepsilon_*}{3c^2} (R^*)^3 = M & \text{para } r \geq R^*. \end{cases} \quad (4.38)$$

Para este modelo, la Ec. (4.34) se pasa a ver como:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi Gr}{c^2} \frac{(\varepsilon_* + p) \left(\frac{1}{3}\varepsilon_* + p\right)}{1 - \frac{8\pi G\varepsilon_* r^2}{3c^4}} \quad (4.39)$$

De integrar desde el exterior de la estrella donde $p = 0$ en $r = R^*$ hacia el centro, se consigue:

$$\frac{p + \varepsilon_*}{3p + \varepsilon_*} = \frac{1 - \frac{8\pi G\varepsilon_*(R^*)^2}{3c^4}}{1 - \frac{8\pi G\varepsilon_* r^2}{3c^4}} \quad (4.40)$$

Despejando para p y reescribiendo de un modo más compacto y conveniente:

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon_* \left[\frac{R^* \sqrt{R^* - R_s} - \sqrt{(R^*)^3 - R_s r^2}}{\sqrt{(R^*)^3 - R_s r^2} - 3R^* \sqrt{R^* - R_s}} \right] = -\varepsilon_* \left[1 + \frac{2R^* \sqrt{R^* - R_s}}{\sqrt{(R^*)^3 - R_s r^2} - 3R^* \sqrt{R^* - R_s}} \right] \\ &= -\varepsilon_* \left[1 + \frac{2R^* \chi}{\sqrt{(R^*)^3 - R_s r^2} - 3R^* \chi} \right] \quad \text{con } \chi = \sqrt{R^* - R_s} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se tomará ahora que el factor de máxima compacidad es aquél para el cual el valor de la presión es máxima para el origen (presión central p_c), pensando en que la estrella debe ser lo más compacta en ese punto. Entonces, siendo que el denominador de p sea igual a cero en $r = 0$:

$$\left. \sqrt{(R^*)^3 - R_s r^2} - 3R^* \chi \right|_{r=0} = 0 \quad (4.42)$$

Así:

$$\begin{aligned} 9(R^*)^2 \chi^2 &= (R^*)^3 \\ 9(R^* - R_s) &= R^* \\ \frac{8}{9} R^* &= R_s \end{aligned}$$

Con lo cual, se llega a un valor crítico que no se puede sobrepasar:

$$R_{\text{crít}}^* = \frac{9}{8} R_s; \quad \text{o bien,} \quad (4.43)$$

$$\left(\frac{M}{R^*} \right)_{\text{crít}} = \frac{4c^2}{9G}. \quad (4.44)$$

Finalmente véase que dado que $M = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_* R^3$ se satisface siempre:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{R^*} \right)_{\text{crít}} &= \frac{4\pi \varepsilon_*}{3c^2} R_{\text{crít}}^2, \\ R_{\text{crít}}^* &= \frac{c^2}{\sqrt{3\pi G \varepsilon_*}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$M_{\text{crít}} = \frac{4\pi c^4}{9} \frac{1}{\sqrt{3\pi^3 G^3 \varepsilon_*}} \quad (4.46)$$

para este tipo de modelo.

Más aún, de acuerdo con Weinberg (1972), se puede demostrar que debajo del valor crítico de compacidad $R_s/R^* = 8/9$ no puede existir configuración estable para cualquier estrella compacta, sin importar la ecuación de estado que se utilice para su composición, y aunque no se emplee necesariamente la hipótesis de una densidad constante.

Teorema 1. *Considérese una función arbitraria de densidad de energía gravitacional $\varepsilon = \varepsilon(r)$ finita y siempre definida positiva, sujeta únicamente a las condiciones:*

1. *El radio de la estrella R^* está fijo, de manera que se cumple que fuera del borde de la estrella:*

$$\varepsilon(r) = 0 \quad \text{para } r > R^*. \quad (4.47)$$

2. La masa gravitacional está también fija, es decir existe un valor M tal que:

$$M = \int_0^{R^*} 4\pi \frac{\varepsilon(r)}{c^2} r^2 dr = m(R^*). \quad (4.48)$$

3. La función $\Lambda(r)$ no puede ser una función singular en algún punto del dominio de r , es decir que se debe cumplir necesariamente la desigualdad estricta:

$$m(r) < \frac{rc^2}{2G}, \quad (4.49)$$

donde:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \frac{\varepsilon(r')}{c^2} r'^2 dr'. \quad (4.50)$$

4. La función de densidad de energía $\varepsilon(r)$ debe ser monótonamente decreciente. Es decir, no se puede tener estabilidad en un fluido dentro de una distribución con simetría esférica si conforme uno asciende a los puntos cerca del borde de la estrella, encuentra que éstos tienen mayor densidad que la que hay presente en el núcleo:

$$\frac{d\varepsilon(r)}{dr} \leq 0 \text{ para } r \leq R^*. \quad (4.51)$$

Cuando se satisfacen los puntos anteriores, se afirma que esta configuración cumple a su vez que:

$$\frac{R_s}{R^*} < \frac{8}{9}, \quad (4.52)$$

en donde ahora este resultado se generaliza para estrellas que no son de densidad constante. La importancia de este resultado es alta cuando se estudia el gap entre estrellas de neutrones y agujeros negros. Por ejemplo, no se puede contemplar como solución física una estrella compacta en un modelo que sobrepase el valor de $z = 2$ para el corrimiento al rojo gravitacional de luz emitida sobre la superficie de una estrella, es decir:

$$1 + z_{grav} = e^{-\Phi(R^*)} < 3. \quad (4.53)$$

4.5. Límite de la compresibilidad de una estrella de neutrones impuesto por la causalidad

Los primeros autores en estudiar el límite superior para la masa de una estrella de neutrones, son Rhoades & Ruffini (1974), llegando en ese trabajo a que debe ser a lo máximo $3.2M_\odot$. Ellos proponen resolver la ecuación de estado para un intervalo arbitrario de densidades en la estrella mediante la integración de las Ecs. (4.32, 4.34) y además, respetar la causalidad para las ondas de sonido en la estrella. En concreto, la hipótesis que condicionaba a todo su modelo se resumió en:

$$0 \leq \frac{dp}{d\varepsilon} = \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 < 1. \quad (4.54)$$

Una estrella constituida por distintas especies debe obedecer causalidad en todas sus fracciones, por lo cual tendrá a lo más la velocidad de fase en cada una de sus ondas sonoras c_s igual o menor que c . El modelo más sencillo a estudiar es aquél que toma en cuenta una ecuación de estado de un solo parámetro para la presión como función de la densidad de energía, $p = p(\varepsilon)$. Si se propone que la presión sea una función lineal de la densidad, entonces:

$$p(\varepsilon) = \varepsilon + a. \quad (4.55)$$

La forma de esta ecuación nos permitirá poder entender para la presión del fluido lo siguiente: actúa de manera lineal con respecto de la densidad de energía y posee un valor numérico en el cual subyace un parámetro

crítico y proviene de la misma ecuación de estado. Este valor crítico se encuentra al recordar que la presión debe respetar la condición de frontera más importante para la compresibilidad de la estrella: $p = 0$ en la frontera de alguna región en la estrella. Por lo tanto, el parámetro libre de la ecuación de estado ε_c se consigue en esta frontera: $a = -\varepsilon_c$ y entonces:

$$p(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_c) \theta(\varepsilon - \varepsilon_c) = \begin{cases} \varepsilon - \varepsilon_c & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_c \\ 0 & \text{para } \varepsilon \leq \varepsilon_c. \end{cases} \quad (4.56)$$

Como consecuencia, en la superficie de la estrella, donde por definición $p = 0$, la densidad es finita: $\varepsilon = \varepsilon_c$.

La Ec. (4.56) es útil para definir la ecuación de estado para una estrella maximalmente compacta, la cual conduce a una refinación en el resultado de Rhoades & Ruffini, mismo que se mostrará a continuación (ver, e.g., Lattimer 2012).

4.6. Estrellas maximalmente compactas

Considérese una estrella de neutrones con función de masa $m(r)$ y función de presión $p(r)$. La configuración de equilibrio hidrostático para ella debe obedecer las ecuaciones relativistas de estructura, como ya se revisó más arriba.

Si se introduce la ecuación de estado (4.56), se pueden reescribir estas ecuaciones para nuevas variables adimensionales, con la introducción de la nueva variable $w = \varepsilon/\varepsilon_c$ y nuevas variables por encontrar $x = \alpha r$ y $y = \beta m$. Se consigue:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{(2w-1)(y+4\pi x^2(w-1))}{x(x-2y)} \quad (4.57)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\pi x^2 w \quad (4.58)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{y+4\pi x^2(w-1)}{x(x-2y)} \quad (4.59)$$

para $1 \leq w \leq w_0$, donde w_0 corresponde al valor de la presión central del núcleo p_0 . Se consigue que los valores para reescalar a x y y son $\alpha = \sqrt{G\varepsilon_c}/c^2$ y $\beta = \sqrt{G^3\varepsilon_c}/c^4$. Entonces, el dominio para ambas variables es de $0 \leq x \leq \mathcal{X}$ y $0 \leq y \leq \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X} = x(R^*)$ y $\mathcal{Y} = y(M)$ corresponden a los valores reescalados de R^* y M . En la Figura (4.1) se grafican en color verde dos curvas ejemplo de masa gravitacional M en función del radio estelar R^* para esta nueva ecuación de estado, partiendo de 2 valores diferentes de w_0 .

Recordando la idea de la configuración de la estrella con máxima compacidad, se deben resolver las ecuaciones para valores que maximicen a \mathcal{Y} cuando $w = w_c = 1$: se obtiene cuando $w_0 = 3.034$ resultando en $\mathcal{X}_c = 0.2404$ y $\mathcal{Y}_c = 0.08513$. Dado que $\mathcal{X}_c/\mathcal{Y}_c = 2.824$ en este caso obtenemos:

$$R_{\text{maximal}} = 2.824 \frac{GM}{c^2} = 1.412R_s. \quad (4.60)$$

Nuevamente si se observa la Figura (4.1), la semirregión de color verde limón en la parte superior izquierda de la gráfica (etiquetada como región prohibida por la causalidad, "causality" en inglés), viene delimitada primero por la curva de los posibles valores $y(x)$ solución a la Ec. (4.58) que comienzan exclusivamente con la presión central en $w_0 = 3.034$ y luego por la recta que cumple precisamente la Ec. (4.60). Se dice que esta semirregión verde limón se excluye por causalidad debido a que precisamente, al considerar que la ecuación de estado (4.56) tiene su origen del hecho de que $dp/d\varepsilon = 1$ (ver Ec. (4.54)), esto resulta en que la velocidad de sonido del fluido sea $c_s = c$, es decir, igual a la velocidad de la luz. Tener una velocidad $c_s > c$ sería entonces situarse dentro de esta semirregión, lo cual viola el postulado 2 de la Relatividad Especial (ver Sección 2.1).

4.7. Estrellas ultracompactas

Iyer *et al.* (1985) fueron los primeros en proponer un nombre para los objetos compactos que tienen la propiedad de tener un radio R^* menor que el valor $1.5R_s$ (i.e. $3GM/c^2$), eligiendo como nombre el de objetos ultracompactos. Ellos tuvieron como motivación el justificar que dichos objetos pueden existir en el marco de la Relatividad General. Para el trabajo aquí presente se adoptará también el mismo nombre para referirse a ellos.

Hay un estudio anterior donde se exhiben configuraciones de estrellas que entran en el régimen ultracompacto, llamadas aquí para este fin estrellas ultracompactas, que merece mencionarse en el contexto de

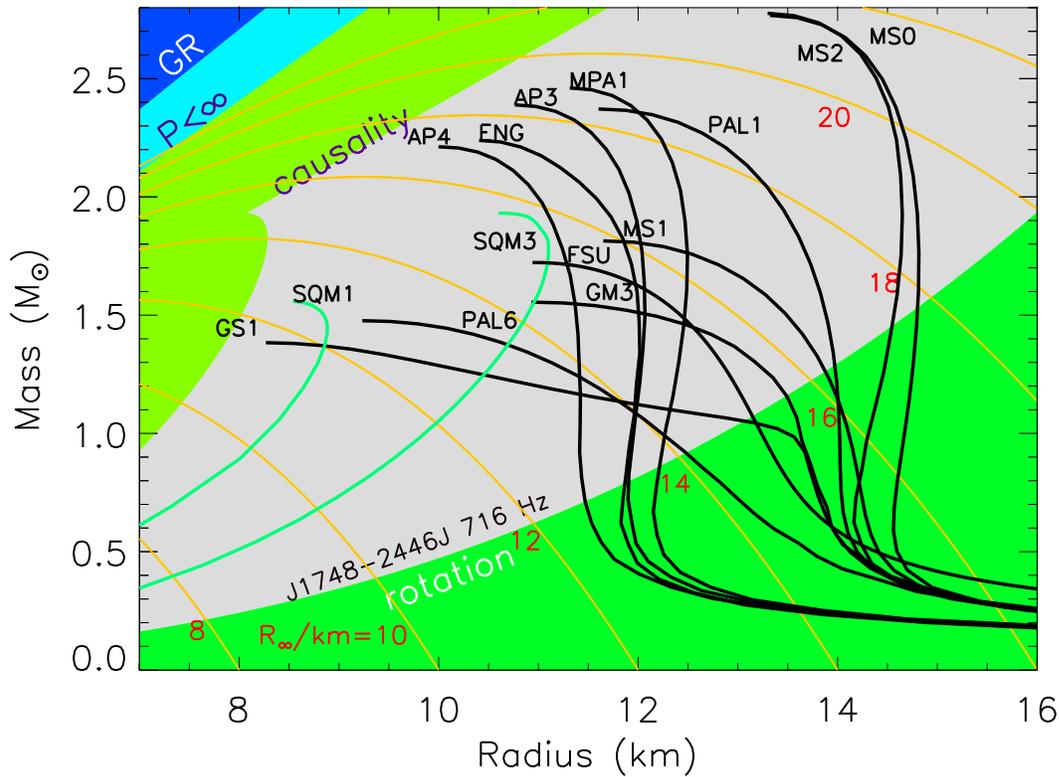


Figura 4.1: Diagrama Masa-Radius para diferentes ecuaciones de estado para estrellas compactas. En el diagrama, pueden observarse distintas regiones. La región de color gris es la que comprende soluciones físicamente viables con los refinamientos que se han logrado hasta la actualidad. Arriba, a la izquierda, se encuentran las cotas inviolables del horizonte de eventos en Schwarzschild (color azul rey), límite de compresibilidad finita por el teorema de Buchdahl (color cian) y la causalidad integrada para la cota inferior encontrada en la ecuación maximalmente compacta. Los límites por rotación se encuentran en la esquina inferior derecha pero se salen de los objetivos de este trabajo. Figura tomada de Lattimer (2012)

este trabajo. Este se incluye en Hartle *et al.* (1975), donde se estudiaron ecuaciones de estado cerca de las densidades nucleares para materia en su estado base tomando en cuenta un efecto adicional: se añade el fenómeno de condensación de la carga negativa de piones neutralizando a la carga positiva de los nucleones (protones y neutrones), lo cual modifica de manera significativa la estructura y configuración de estrellas de neutrones sin rotación.

Posterior a este trabajo y a Iyer *et al.*, muy similares a la línea de estudio que se considera aquí, están Bahcall *et al.* (1990), Nemiroff *et al.* (1993) que sí adoptan el nombre para la misma clase de objetos; y también Lattimer (2012), que como ya se vio en la sección pasada, exhiben una ecuación de estado tomando en cuenta causalidad. Hay más trabajos que pueden contarse en los últimos años, que tratan a objetos ultracompactos desde diversas perspectivas, pero que se salen de los fines indicados en el presente trabajo.

En la siguiente sección se desarrollará un tratamiento en Relatividad General para entender la emisión de fotones desde la superficie de las estrellas ultracompactas, tomando para ello únicamente el espacio tiempo de Schwarzschild.

Capítulo 5

Trayectorias de Fotones en Relatividad General

*"Holding me back,
gravity's holding me back..."*

HARRY STYLES.

En este capítulo se planteará y desarrollará la dinámica del problema de la emisión de fotones en la superficie de una estrella compacta, desde el punto de vista de la Relatividad General. A continuación, en la Figura 5.1, se incluye un dibujo que representa la situación a estudiar para una estrella con radio $R^* > R_s$.

Las trayectorias de los fotones que se emiten desde la estrella, mostradas en amarillo, comienzan en algún punto arbitrario sobre su superficie. La flecha roja indica la dirección del vector tangente al fotón saliendo de la estrella, haciendo un ángulo δ con respecto a la normal en el punto de emisión.

La distancia radial con respecto a un eje de simetría desde el origen de la estrella hasta el máximo alcance perpendicular a la trayectoria define un parámetro de impacto b de la deflexión que experimenta la luz emergiendo. Otra manera de definirse en problemas astrofísicos semejantes es tomando el cociente del momento angular específico $h = L/m_0$ y la energía específica $e = E/m_0$, y para fotones hacer el límite $m_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{L/m_0}{E/m_0} = \frac{h}{e} = \frac{b}{c} \quad (5.1)$$

5.1. Geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild describe la geometría en el espacio-tiempo vacío en el exterior del horizonte de eventos de un agujero negro esférico: $r > R_s$ y el exterior de una estrella también esférica: $r > R^* > R_s$. Bajo estas condiciones, es la única solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein, de acuerdo con el teorema de Birkhoff (ver *e.g.*, Misner *et al.* 2017).

En el sistema de coordenadas de Schwarzschild que nos da el elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.2)$$

uno puede también expresar la Lagrangiana del problema de la trayectoria de una partícula libre en el fondo de Schwarzschild, afuera del horizonte de eventos en $R_s = 2GM/c^2$ de una distribución de masa esférica de

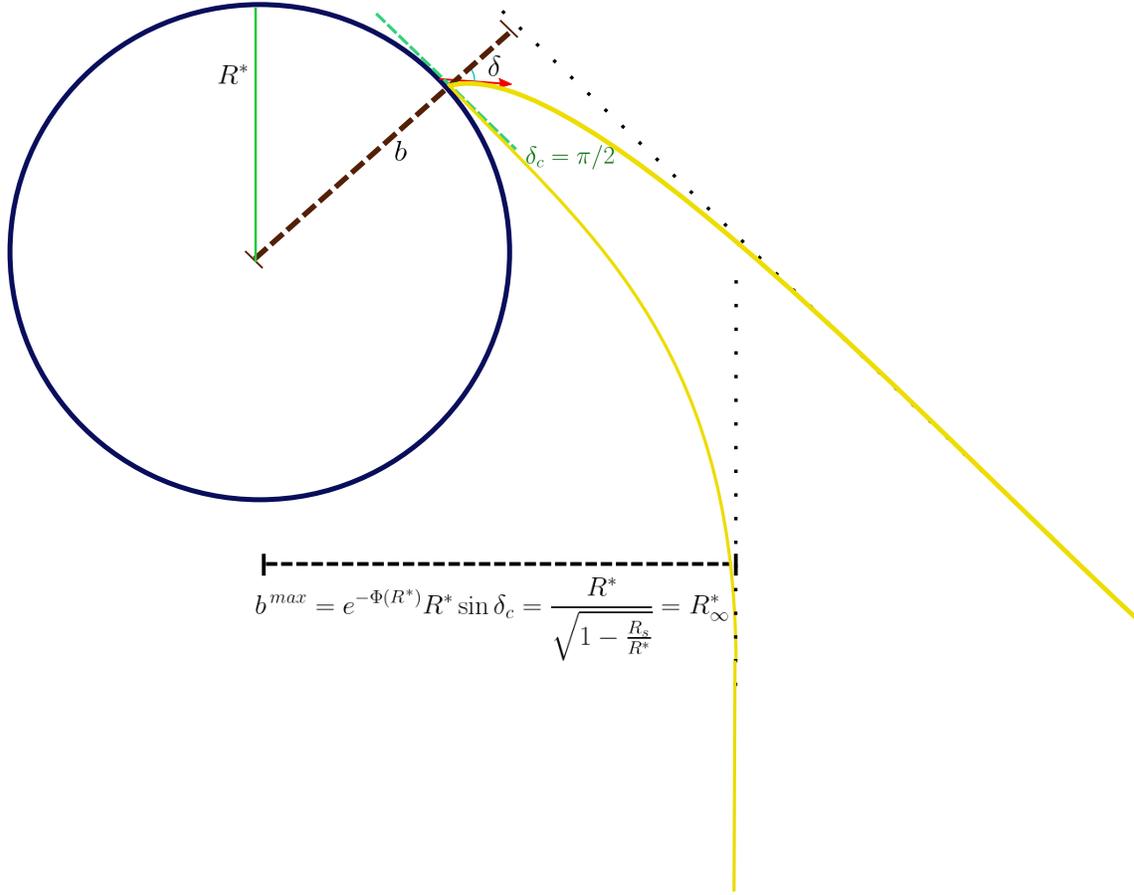


Figura 5.1: Dibujo que muestra dos trayectorias de luz emitidas en la superficie de la estrella $r = R^*$, ambas contenidas en el mismo plano. En el caso general, un fotón puede salir hacia cualquier dirección que forme un ángulo δ con respecto a la normal en el punto de emisión (la normal es la dirección señalada por el vector $\hat{\mathbf{e}}_r$ en coordenadas esféricas). El vector tangente a la curva de su trayectoria mostrado en color rojo indica la dirección de salida del fotón. Asintóticamente las trayectorias se vuelven rectas, indicadas por las líneas punteadas en el dibujo, y la distancia de esta línea al centro de la estrella define el parámetro de impacto, b , de la trayectoria. El valor máximo de δ , llamado δ_c , da el valor máximo de b , b^{max} .

radio M (ver Ec. (2.36)) como:

$$\mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] \quad (5.4)$$

donde la derivada con punto en la expresión es respecto a λ , un parámetro arbitrario a lo largo de su trayectoria y $r > R_s$.

De la Lagrangiana se pueden obtener las ecuaciones de movimiento en la forma de Euler-Lagrange:

$$\frac{dp_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (5.5)$$

donde ahora λ ya es un parámetro afín porque estas ecuaciones extremizan la acción para regresarnos las ecuaciones de movimiento para las curvas geodésicas. En este caso, por la forma de la Lagrangiana:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (5.6)$$

Obsérvese que la Lagrangiana contiene 3 variables que no aparecen de manera explícita en su expresión: el tiempo coordinado t , la coordenada de ángulo azimutal ϕ y finalmente el parámetro λ . Estas variables del sistema de coordenadas esféricas van a pasar a ser lo que en Mecánica de Lagrange y Hamilton se conocen como variables cíclicas, y a su vez tienen asociadas constantes de movimiento (ver *e.g.*, Jose & Saletan 1998). De aquí se puede inferir, que de entrada se tienen, 3 cantidades conservadas: primero con ayuda de la Ec. (5.5), p_t y p_ϕ . Finalmente, también se conserva la energía del sistema asociada al Hamiltoniano $\mathcal{H} = p_\mu \dot{q}^\mu - \mathcal{L}$. En efecto, haciendo los cálculos:

$$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 \dot{t} = \text{constante} \equiv -e, \quad (5.7)$$

$$\frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{constante} \equiv \ell_z, \quad (5.8)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\lambda) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{constante}. \quad (5.9)$$

Así,

$$\dot{t} = \frac{e}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \quad (5.10)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\ell_z}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.11)$$

Para una partícula de masa en reposo $m_0 \neq 0$, se toma como parámetro afín al tiempo propio τ y escribiendo a la energía E y la componente del momento angular orbital L_z ¹, sobre esta partícula de prueba, se consigue:

$$-e = p_t = -\frac{E}{m_0}, \quad (5.12)$$

$$\ell_z = p_\phi = \frac{L_z}{m_0}. \quad (5.13)$$

Por conveniencia se acostumbra usar al tiempo propio τ como el parámetro λ en partículas masivas, sino, cualquier reparametrización afín de éste también será un buen parámetro afín: $\lambda' = a\lambda + b$, con $a \neq 0$. Para partículas sin masa, como es el caso de los fotones, se explicará más adelante cuál es un buen parámetro afín λ a utilizar.

Véase que para obtener la ecuación para θ hay que escribir su ecuación de Euler-Lagrange completa, porque no es una variable cíclica en la Lagrangiana y entonces $p_\theta = r^2 \dot{\theta}$ no es constante como en los casos anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{\ell_z^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

¹Esta componente va en la dirección z de coordenadas cartesianas, si bien aquí se eligieron a las coordenadas esféricas para la solución de Schwarzschild. Esto ocurre porque $\vec{L} = m_0 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m_0 (r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi})) = m_0 r^2 [\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) + \sin\theta\dot{\phi}(\hat{r} \times \hat{\phi})] = m_0 r^2 [\dot{\theta}\hat{\phi} - \sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta}]$ y como también $\hat{r} \times \hat{\phi} = -\sin\theta\hat{z}$ entonces la componente $L_\theta \hat{\theta} = -m_0 r^2 \sin\theta\dot{\phi}\hat{\theta}$ o bien, $L_z \hat{z} = m_0 r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}\hat{z}$ va en efecto, en la dirección de z . A partir de ahora en adelante, esta dirección se entenderá como el eje perpendicular al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

Para resolver esta ecuación se puede apoyar ahora en la simetría esférica y sin pérdida de generalidad, se aplica una rotación de ejes conveniente, la cual permita colocar al fotón (o cualquier partícula) saliendo inicialmente de la estrella con un ángulo polar o de colatitud θ inicial en el ecuador: $\theta_0 = \pi/2$. En este caso obtenemos trivialmente que $\theta(\lambda) = \theta_0$ es solución general de la Ec. (5.14): la trayectoria permanece en el plano ecuatorial. De esta manera y de forma general, se prueba que las trayectorias de las curvas geodésicas yacen y se extienden sobre un plano.

Aun hay otra manera de determinar que ésta es una solución general para todas las trayectorias en el espacio-tiempo de Schwarzschild, o lo que es más, que cualquier trayectoria en él va a quedar confinada en un plano. Este es un resultado famoso y es debido a la simetría esférica del problema, que permite siempre llevar las trayectorias al plano ecuatorial bajo una rotación adecuada de los ejes. Para derivar por otro procedimiento este mismo resultado, se puede hacer uso de integración a mano o por medio de la Hamiltoniana del sistema y la formulación de Hamilton-Jacobi que describimos en el Apéndice A. En ese apartado, se muestra que para el problema en el plano ecuatorial $\ell_z = h$, donde h es el momento angular orbital total, por unidad de masa. De manera que este momento angular orbital está apuntando totalmente en dirección de un eje de simetría, el cual en el sistema de coordenadas euclidiano, es la dirección z .

Concentrando pues las soluciones en $\theta = \pi/2$ se pueden recrear todas las soluciones posibles bajo la ya mencionada rotación de ejes por la simetría esférica. Ahora bien, reescribiendo el parámetro λ bajo una transformación afín como $\lambda = R_s \xi / \ell_z$, sea $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\xi}$ algún vector tangente arbitrario a la curva geodésica reparametrizada con ξ que se busca determinar. Desarrollando, se llega a que:

$$\begin{aligned}
g(V,V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu &= - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 \\
&= - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 \left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 \\
&= - \frac{R_s^2}{b^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \frac{R_s^2}{r^2} \\
&= 2\mathcal{H}(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 = \text{constante}, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

donde $b = \ell_z c / e$.

Para vectores nulos, $\mathcal{H} = 0$ porque tanto λ como ξ son parámetros afines que recorren el cono de luz. La elección que se hizo del nuevo parámetro afín ξ en (5.15) brinda una ecuación diferencial adimensional para r :

$$\frac{dr}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{R_s^2}{b^2} - \frac{R_s^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}. \tag{5.16}$$

Resulta interesante estudiar esta ecuación radial en r , misma que se puede escribir en una forma similar a la propuesta en Misner *et al.* (2017):

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{R_s^2}{b^2}, \tag{5.17}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{R_s^2}{B^2(r)} = \frac{R_s^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right). \tag{5.18}$$

La gráfica de este potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ versus la coordenada radial normalizada r/R_s se muestra en la Fig. (5.2). Escrita así, ya se puede estudiar la dinámica de las trayectorias de los fotones si se considera

cómo se comporta su desplazamiento en el diagrama frente a la gráfica de la curva de la función $V_{\text{eff}}(r)$. Si se calculan los puntos críticos de esta función se encuentra que $dV_{\text{eff}}/dr = 0$ para un valor de r dado por:

$$R_c = 1.5R_s = 3GM/c^2. \quad (5.19)$$

Este radio representa la solución de una última órbita circular de fotones y es una órbita inestable, por la cual estos pueden dar un número sinfín de vueltas alrededor del objeto compacto y escapar, o caer de nuevo hacia el objeto atraídos por su intenso potencial gravitatorio.

Siguiendo en el plano ecuatorial, ahora defínase el vector tangente a la trayectoria de un fotón saliendo de la superficie de la estrella con un ángulo δ entre su dirección de salida y la dirección radial ². Se puede escribir que el 4-vector tangente nulo a la trayectoria de un fotón en su base ortonormal es:

$$\vec{V} = \hat{e}_t + \cos \delta \hat{e}_r + \sin \delta \hat{e}_\phi + 0 \hat{e}_\theta. \quad (5.20)$$

Pasando a la base coordenada estándar en coordenadas esféricas (ver Ec. (4.14)), las componentes son:

$$V^\mu \vec{e}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - R_s/R^*}} \vec{e}_t + \cos \delta \sqrt{1 - R_s/R^*} \vec{e}_r + \frac{\sin \delta}{R^*} \vec{e}_\phi. \quad (5.21)$$

Se puede encontrar la relación entre δ y el parámetro b usando (5.15) y las Ecs. (A.18, A.20) del Anexo A para escribir:

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{r=R^*} = \left. \frac{d\phi/d\xi}{dt/d\xi} \right|_{r=R^*} = \left. \frac{V^\phi(r)}{V^t(r)} \right|_{r=R^*} = \frac{\frac{\sin \delta}{R^*}}{\frac{1}{\sqrt{1 - R_s/R^*}}} = \frac{\frac{1}{R^{*2}}}{\frac{1}{b(1 - R_s/R^*)}}. \quad (5.22)$$

Así se encuentra una relación entre el parámetro de impacto b de un fotón emitiéndose a un radio R^* y su dirección de salida δ :

$$b(\delta) = \frac{R^* \sin \delta}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R^*}}} = e^{-\Phi(R^*)} R^* \sin \delta. \quad (5.23)$$

Ahora bien, de la Ec. (5.23) se consigue:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{\sin \delta} \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{1}{(R^*)^2} - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{\sin^2 \delta}{r^2}}. \quad (5.24)$$

Esta ecuación es buena para resolverse en un entorno cercano alrededor de la estrella. Sin embargo, es de interés estudiar los rayos de luz que se estén dirigiendo hacia un observador en particular, por lo tanto debe proponerse un método que logre estudiar los fotones que son disparados hacia una dirección privilegiada.

Sustituyendo la coordenada radial por $u = R_s/2r$ y reescribiendo el problema para ϕ , nos queda la ecuación adimensional:

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{x}{\sqrt{(1 - 2U)U^2 - (1 - 2u)x^2u^2}} \quad (5.25)$$

con $x = \sin \delta$ y $U = R_s/2R^*$. El dominio de integración para esta ecuación será $u_{\text{obs}} < u < U$.

²Se puede tomar sin pérdida de generalidad que δ se mide de manera inercial y localmente en un entorno vecino muy cercano a la estrella, pero en realidad su valor realista debería considerarse desde el referencial de un observador inercial lejano situado por ejemplo, hacia el infinito. Para hallar ese valor se puede seguir el procedimiento mostrado en Abramowicz *et al.* (1990), que se sale de los fines de este trabajo.

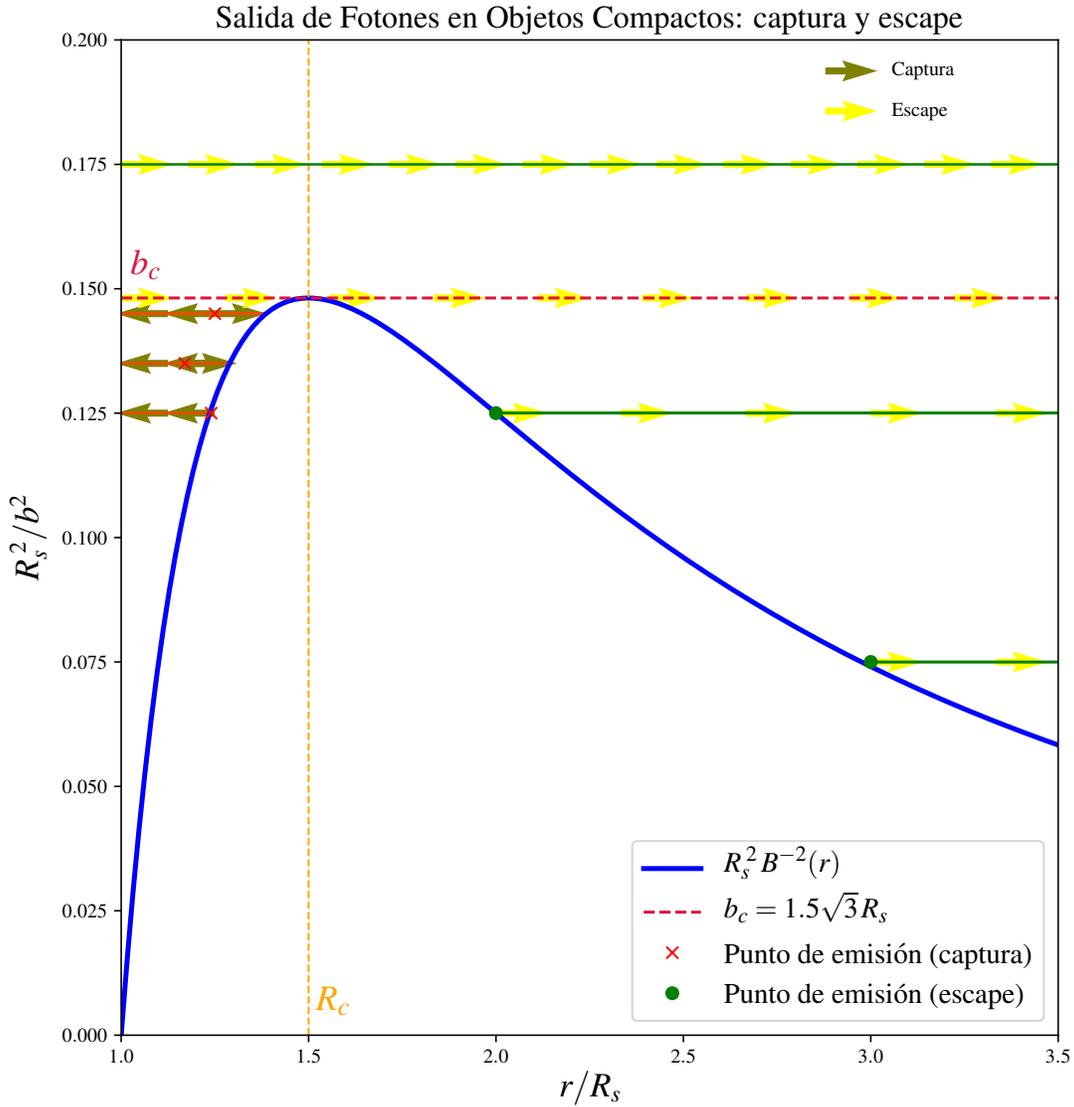


Figura 5.2: Gráfico del "potencial efectivo" $R_s B^{-2}(r)$, Ec. (5.18), para fotones saliendo desde distintos valores de la coordenada radial r . Se grafican varios casos, tomando en cuenta parámetros de impacto más grandes que b_c (más abajo en la gráfica, captura en el caso $r < R_c$, escape en el caso $r > R_c$) y un parámetro de impacto más chico que b_c (escape de fotones para cualquier valor de r). Para $b = b_c$, los fotones se depositan en el máximo del potencial a $r = R_c$ y pueden abandonar ese radio o anillo de fotones con cualquier cambio en su energía o momento angular. En el caso de un hoyo negro un fotón puede ser emitido desde cualquier radio r superior a R_s , mientras en el caso de una estrella de neutrones obviamente solo radios iniciales r superior a R^* son posibles.

Ahora se requiere aquí una condición inicial para el ángulo ϕ_{obs} al cual se encuentre un observador estático, que sin pérdida de generalidad y para estudiar cualquier amplitud angular dada al integrar la Ec. (5.25) desde el origen, se puede elegir que sea $\phi_{\text{obs}} = \phi(0) = 0$. Entonces, $\phi_{\text{obs}} = 0$ y también $u_{\text{obs}} = 0$ de ahora en adelante se van a referir así a las nuevas coordenadas espaciales del observador "al infinito", en un

plano que por simetría se puede rotar para que coincida con el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

5.2. Parámetro de impacto máximo de los fotones y apariencia de la estrella ultracompacta

Considérese una estrella compacta con radio $R^* > 1.5R_s$. De la Fig. (5.1), si la dirección del fotón cuando este emerge es tangente a la circunferencia de la estrella, i.e. $\delta = \pi/2 \equiv \delta^{\text{máx}}$, se consigue el parámetro de impacto máximo $b^{\text{máx}}$, definido como el radio máximo de la estrella medido por un observador al infinito R_∞ .

Observando ahora la Fig. (5.2), esto supone que cualquier fotón emitido a la derecha de la línea punteada amarilla dada justamente por el radio fotónico $R_c = 1.5R_s$, tiene por parámetro máximo aquél igual a $b(\pi/2)$, i.e. cualquier punto sobre la curva de color verde. Para una métrica estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana como la de Schwarzschild en la Ec. (5.2), R^* se corresponde ahora con el radio de la estrella corrido al rojo medido al infinito: $R_\infty = (1+z)R^* = e^{-\Phi(R^*)}R^*$. Además, nótese que la región debajo de la curva azul de $V_{\text{eff}}(r)$ se encuentra prohibida puesto que correspondería a raíces imaginarias en la Ec. 5.16 y en todas las ecuaciones relacionadas.

En el caso ultracompacto $R^* \leq 1.5R_s$, como se puede ver de la gráfica en la Fig. (5.2) y más adelante en el diagrama de la Fig. (5.6), ocurre captura de fotones y el radio máximo de la estrella observado al infinito es simplemente el del radio fotónico $R_c = 1.5R_s$ corrido al rojo. En ambos casos entonces el radio medido por un observador al infinito es:

$$R_\infty = \begin{cases} \frac{R^*}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R^*}}} = b^{\text{máx}} = b(\pi/2) & \text{para } R^* > 1.5R_s, \\ 1.5\sqrt{3}R_s = b_c^{\text{máx}} = b(\delta^{\text{máx}}(R_c)) \simeq 2.598R_s & \text{para } R_s < R^* \leq 1.5R_s. \end{cases} \quad (5.26)$$

Esta relación se ilustra en la Fig. (5.3). Notar que cuando $R^* \gg R_s$, tenemos $R_\infty/R^* \rightarrow 1$ pero, curiosamente, $R_\infty - R^* \rightarrow \frac{1}{2}R_s$: aunque estemos en el límite Newtoniano, ¡sobrevive un pequeño efecto relativista!

Además, en el caso del anillo de fotones formado en el radio crítico $r = R_c$, se tiene que el parámetro de impacto de las trayectorias toma el valor $b_c^{\text{máx}} = b^{\text{máx}}(R_c) = 1.5\sqrt{3}R_s$ para $\delta^{\text{máx}}$. Este valor servirá para distinguir qué trayectorias se escapan del campo gravitatorio del objeto compacto o qué trayectorias saldrán de éste, como se puede ver en la gráfica de la Fig. (5.2).

5.3. Integración de las trayectorias de fotones para estrellas ultracompactas

Nos interesaría ver qué ocurre para las trayectorias de luz en estrellas ultracompactas, donde $R_s < R^* < 1.5R_s$. Veamos que la Ec. (5.25) es finita siempre que en el término de la raíz no se cumpla que:

$$x^2(1-2u)u^2 = (1-2U)U^2 \quad (5.27)$$

Cuando se cumple esta igualdad, hay una singularidad y la derivada presenta una divergencia. Entonces, como ya se anticipaba arriba, para estrellas ultracompactas existe un parámetro de impacto $b^{\text{máx}}(x^{\text{máx}})$ para el cual la luz no puede salir de la estrella y se queda atrapada sobre la superficie dada por la esfera de fotones $u = U_c = 1/3$, que para este caso representa a un fotón dando un infinito número de vueltas tras integrar la Ec. (5.25). De ahora en adelante también se va a denotar como $\Delta\phi$ al resultado de integrar esa ecuación diferencial midiendo desde el referencial de un observador al infinito, por lo cual en este caso esto quiere decir

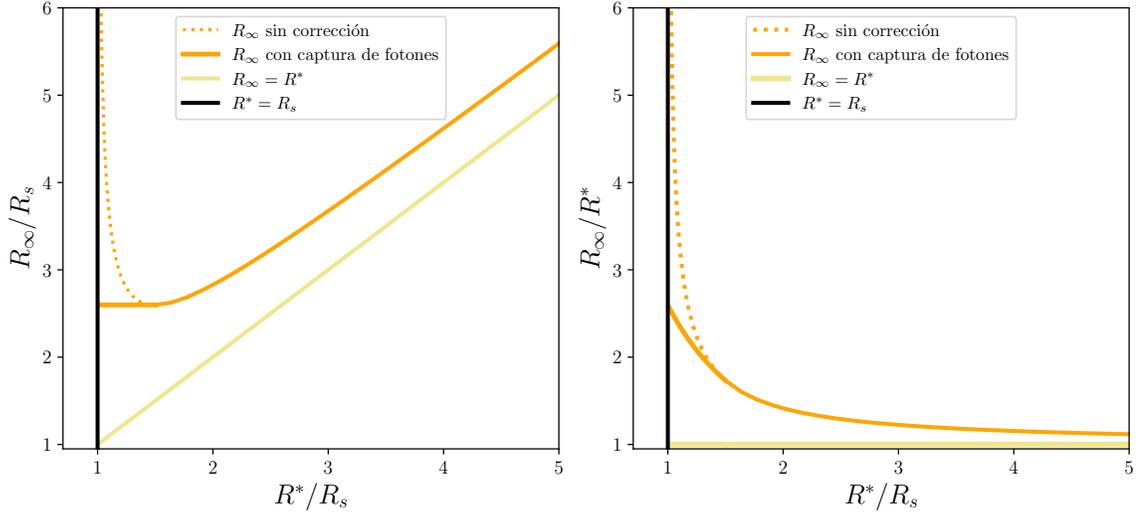


Figura 5.3: Variación del radio al infinito R_∞ , o radio aparente, de una estrella con masa fija, conforme su radio $R^* > R_s$ decrece, según la ecuación (5.26). Se comparan los casos R_∞/R_s y R_∞/R^* en las ordenadas, respectivamente. En cualquiera de los dos casos, las curvas coinciden para $R^*/R_s \geq 1.5$, tomando en cuenta o no la corrección por captura de fotones. La relación $R_\infty = R^*$ es en ambas gráficas una línea recta, diagonal en la gráfica izquierda y horizontal en la gráfica derecha.

que $\Delta\phi \rightarrow \infty$.

Mientras la estrella no sea ultracompacta, como se mencionó arriba, $\delta^{\text{máx}} = 90^\circ$, i.e. $x^{\text{máx}} = 1$. De esta nueva manera, se tienen ahora dos casos en $\delta^{\text{máx}}$:

$$\delta^{\text{máx}} = \begin{cases} 90^\circ & \text{para } R^* \geq 1.5R_s, \\ \arcsin\left(3U\sqrt{3(1-2U)}\right) & \text{para } R_s < R^* < 1.5R_s. \end{cases} \quad (5.28)$$

O en términos del parámetro $x^{\text{máx}} = \sin \delta^{\text{máx}}$:

$$x^{\text{máx}} = \begin{cases} 1 & \text{para } R^* \geq 1.5R_s, \\ 3U\sqrt{3(1-2U)} = \frac{U\sqrt{1-2U}}{U_c\sqrt{1-2U_c}} & \text{para } R_s < R^* < 1.5R_s. \end{cases} \quad (5.29)$$

El nuevo valor para $x^{\text{máx}}$ aparece únicamente en estrellas ultracompactas, ver que es el caso de la igualdad en la Ec. (5.27). De esta manera, la deflexión de luz debido al campo gravitacional en ellas puede presentar tres casos distintos: para $x^{\text{máx}}$ se queda atrapada dando un número sinfín de vueltas a la estrella a un radio constante $r = R_c = 1.5R_s$ y si $x \neq x^{\text{máx}}$, tenemos que considerar dos posibilidades: si $x < x^{\text{máx}}$, el fotón sale de la estrella desviado por el campo gravitacional y cuando $x > x^{\text{máx}}$, el fotón se regresa en medio de su camino al interior de la misma, ni siquiera pudiendo aproximarse a la órbita circular de fotones.

Este comportamiento se puede observar también en la Fig. (5.2), las flechas de color marrón muestran la emisión de fotones para $x = \sin \delta$ por arriba del valor de $x^{\text{máx}}$, lo cual hace que sean recapturadas nuevamente por la curvatura del espacio tiempo cercano a la estrella ultracompacta (chocan con la curva azul y

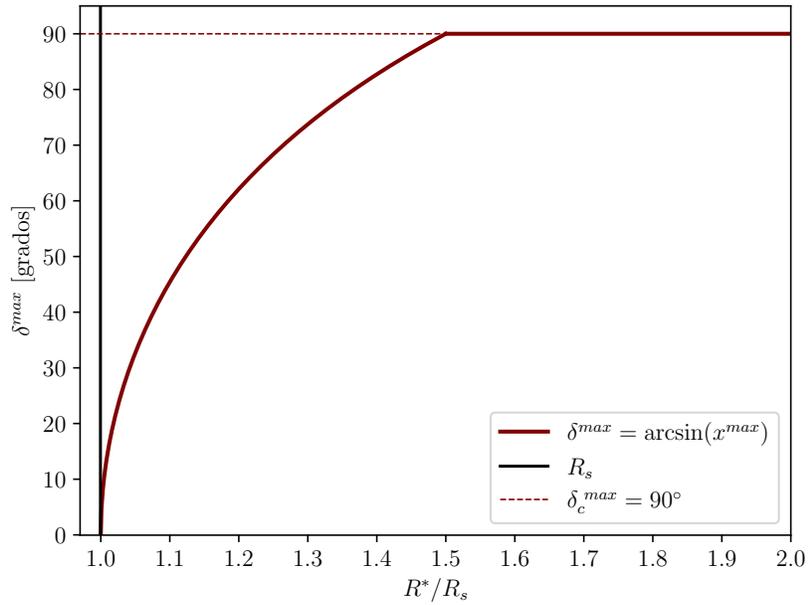


Figura 5.4: Ángulo máximo de emisión de fotones $\delta^{máx} = \arcsin(x^{máx})$ en función del radio R^*/R_s , representado por el parámetro de impacto máximo dado por la Ec. (5.28). Para el caso en el que la estrella deja de ser ultracompacta ($R^* \geq 1,5R_s$), tenemos el caso general sin captura de fotones: el parámetro de impacto de salida equivale a los fotones saliendo de manera tangencial a la estrella, i.e. $\delta^{máx} = 90^\circ$.

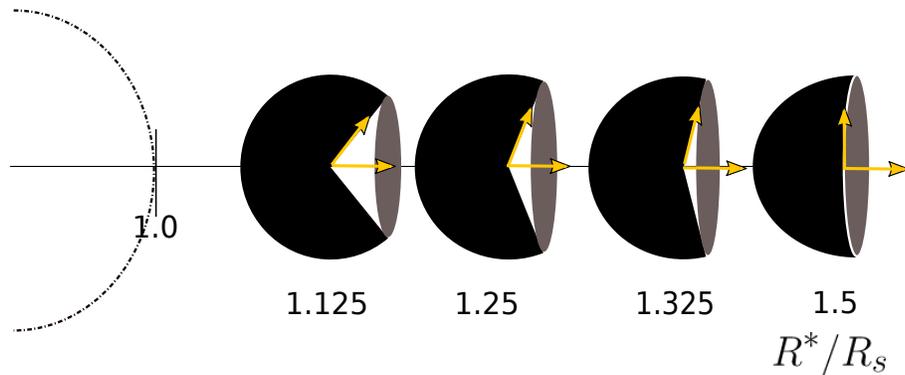


Figura 5.5: Diagrama que muestra la captura de fotones emitidos de la superficie de objetos ultracompactos hacia afuera, para diferentes valores de su radio físico. Se muestran casos entre $R^* = R_s$ y $R^* = R_c = 1,5R_s$. Las cavidades cónicas de color blanco y sombra interior gris que se presentan son medidas por un observador asintóticamente plano desde un marco de referencia ortonormal (ver también el cono gris de la Fig. 5.6). En $R^* = 1,125R_s$ se muestra el límite dado por el teorema de Buchdahl.

se dirigen en la dirección hacia R_s). Cuando la estrella no es ultracompacta simplemente se tiene una región prohibida, ya que el ángulo de salida δ no puede ser mayor a 90° , i.e. la dirección tangencial a la superficie de la misma estrella. Esta región corresponde a toda la que está encerrada por debajo de la curva azul del potencial efectivo. Por otro lado, las flechas de color amarillo muestran fotones salientes que logran escapar de la estrella, al ser emitidos con una x menor a $x^{\text{máx}}$.

Para incrementar la precisión en los cálculos de la deflexión angular total de la luz, es conveniente refinar los valores posibles para $\Delta\phi$ en configuraciones que requieran estar muy cercanas a la estrella y muy cerca también del parámetro máximo de salida $x^{\text{máx}}$. Para esto, considérese el cambio de variable $u = 1/3 \mp t^2$ donde el signo $-$ es para $0 \leq u \leq U_c$ y el signo $+$ para $U_c \leq u \leq U$ (Press *et al.*, 1992).

De integrar la Ec. (5.25) modificada con esta nueva variable se conocerá el valor para $\Delta\phi$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & \int_0^{\sqrt{U_c - u_{\text{obs}}}} \frac{2tx \, dt}{\sqrt{(1 - 2U)U^2 - (1 - 2(U_c - t^2))x^2 (U_c - t^2)^2}} \\ & + \int_0^{\sqrt{U - U_c}} \frac{2tx \, dt}{\sqrt{(1 - 2U)U^2 - (1 - 2(U_c + t^2))x^2 (U_c + t^2)^2}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

No olvidar que nuestra motivación para integrar estas trayectorias es estudiar toda clase de fotones salientes que logran escapar de la estrella ultracompacta, estos son los de interés observacional, puesto que son los que pueden llegar a nuestros ojos.

A continuación, en la Fig. (5.6) se ilustran los tres casos que se han descrito en los últimos párrafos y para interpretarla de manera correcta, también se recomienda compararla con la gráfica del potencial efectivo en la Figura (5.2). Se tiene por primer caso los fotones representados con una línea sólida amarilla, los cuales logran de manera satisfactoria escapar de la estrella y que bajo nuestro análisis, corresponden a aquéllos que cuentan con un parámetro x menor a $x^{\text{máx}}$ que son también, los que cuentan con un parámetro de impacto b que los hace situarse por encima de la línea roja punteada marcada por b_c en la gráfica del potencial efectivo.

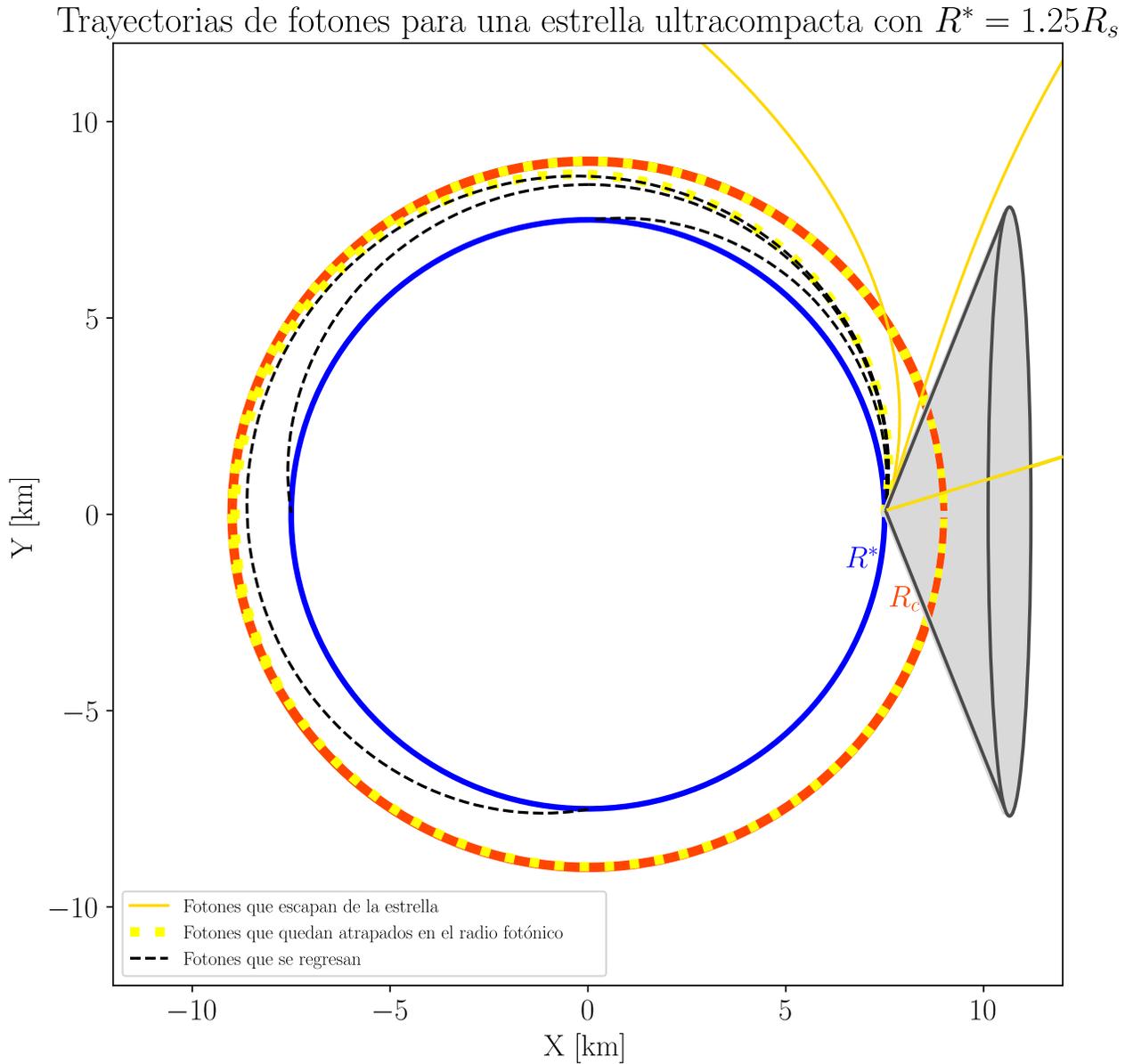


Figura 5.6: *Distintas trayectorias en un plano XY escalado en kilómetros cuadrados. Para los 3 casos revisados en estrellas ultracompactas se grafican, la circunferencia en azul delimita a la estrella y el amarillo con puntos rojos a la órbita circular del radio fotónico $r = R_c$. Existe una cavidad con forma cónica, mostrada en color gris, dentro de la cual se colocan los vectores tangentes a las trayectorias que sí pueden escapar del campo gravitatorio de la estrella.*

En el segundo caso, están los fotones que se quedan confinados en la esfera de fotones de color rojo, marcados con la línea discontinua de puntos amarillos. Estos fotones se sitúan en el máximo del potencial efectivo y cualquier pequeña perturbación en sus parámetros x o b , los puede hacer de igual manera escapar o ser capturados por la estrella. Por último, están los fotones que retornan a la estrella, con la línea discontinua en color negro, aquéllos con parámetro x más grande que $x^{\text{máx}}$ y que no pueden escapar más allá de la esfera de fotones. Estos últimos son los fotones que chocan con la barrera impuesta por el potencial efectivo y no pueden escaparse de ahí hacia nosotros.

En la Fig. (5.7) se muestra cómo la deflexión angular o el valor $\Delta\phi$ es función del ángulo de salida δ (o sea el parámetro x) y aumenta desproporcionadamente alrededor de la estrella conforme el fotón sale haciendo un ángulo cercano al ángulo crítico $\delta^{\text{máx}} = \arcsin(x^{\text{máx}})$. Se observa pues cómo el factor de compacidad U tendrá asociado un valor distinto de $\delta^{\text{máx}}$. Por último, se incluye el estudio en la Fig. (5.8) para los 3 casos mencionados de arriba al integrar la Ec. (5.30) considerando 3 valores distintos para δ (o x) y tras fijar el radio y la masa de cierta estrella (el valor de U).

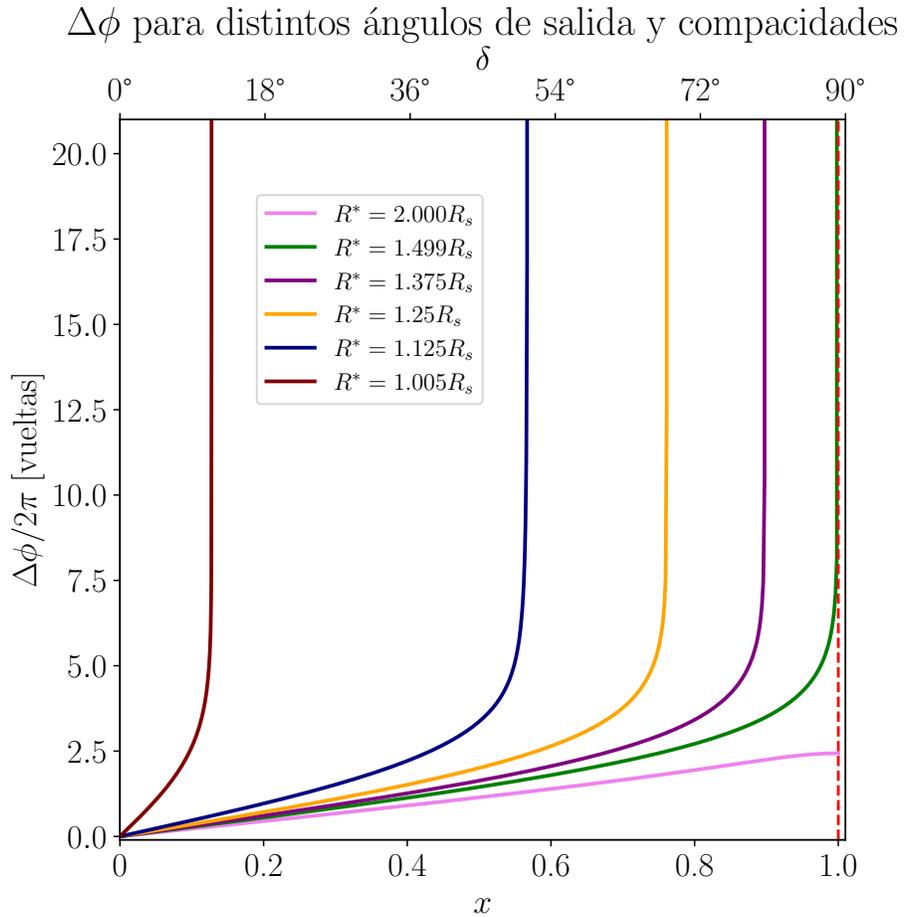


Figura 5.7: Se muestra $\Delta\phi$ en términos de giro completo (de 2π) alrededor de la estrella en función del ángulo de salida δ y el parámetro $x = \sin\delta$ para distintos radios estelares.

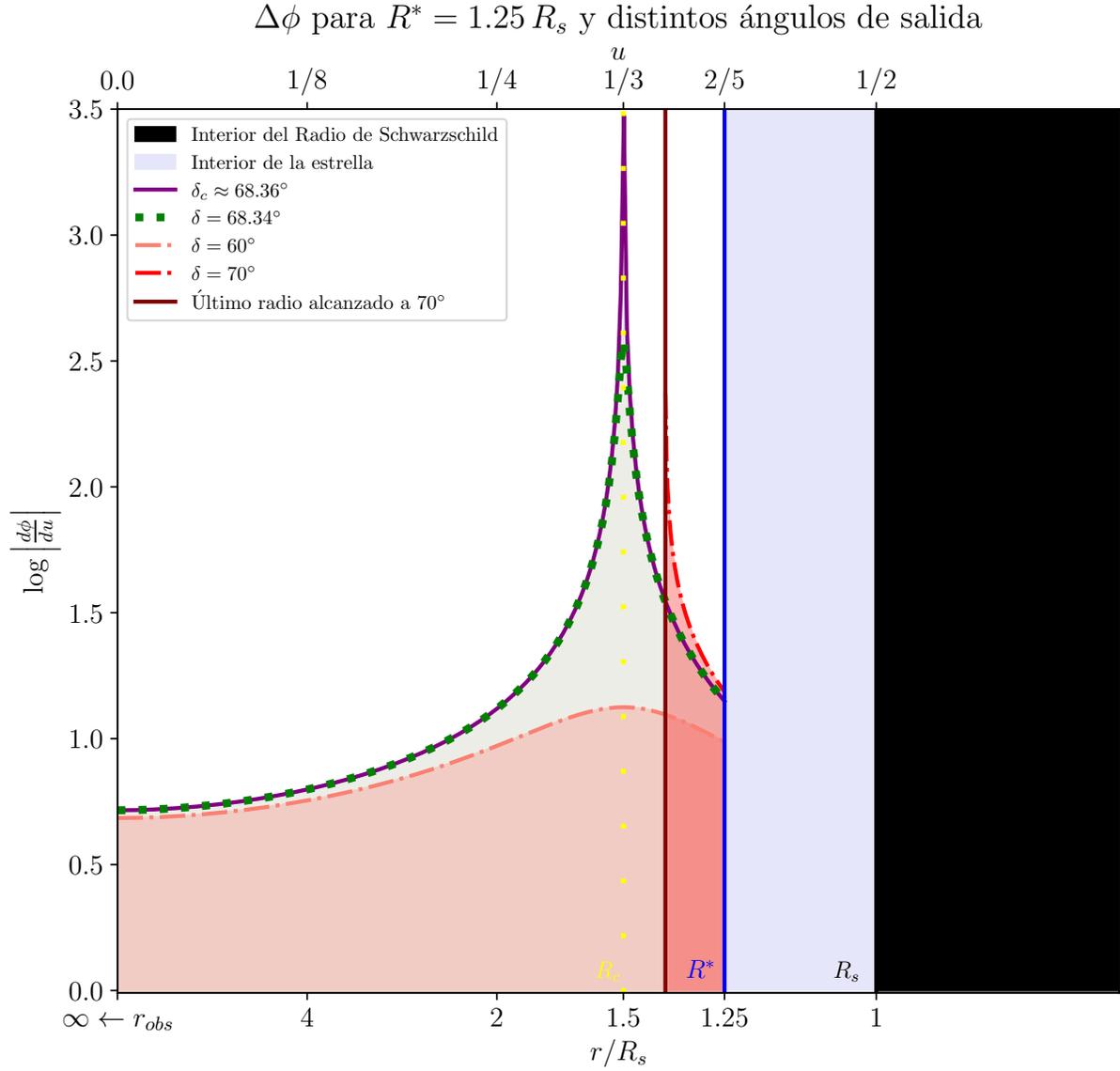


Figura 5.8: Se muestran las amplitudes angulares $\Delta\phi$ para luz saliendo de una estrella ultracompacta y llegando a un observador al infinito. Se consideran 3 casos diferentes: la luz sale de la estrella formando 3 ángulos δ distintos respecto a la normal. El área sombreada bajo cada curva (integral definida) es la amplitud.

Capítulo 6

Una mirada al problema con radiación térmica

En el capítulo anterior se estudió el comportamiento y la dinámica de las trayectorias de los fotones emergiendo de un objeto con simetría esférica bajo el marco de la Relatividad General. Este tratamiento apoya a este trabajo a poder entender cómo la curvatura del espacio-tiempo defleca las trayectorias de la luz que en una teoría clásica serían completamente rectas; como puede ser, en el entorno de estrellas de baja masa en secuencia principal ¹ o aquellas con diámetros mucho mayores que los objetos compactos.

El propósito de este capítulo es poder generar la imagen de una estrella ultracompacta para un observador que se encuentra a una distancia astronómicamente lejana, así como también estudiar las funciones de intensidad de radiación, de flujo de fotones y de luminosidad para esta configuración.

El escenario final que se busca es mirar con detalle cómo se depositarían esos rayos de luz concentrados en una dirección privilegiada, como lo es para un observador fijo al infinito, sobre la pantalla de un detector plano. Habiendo revisado previamente la dinámica de las trayectorias nulas para fotones, y con las ecuaciones de movimiento para ellos, se puede trabajar en un modelo que muestre la vista de la estrella como una imagen para un sistema de referencia situado al infinito. Se supondrán emisiones generadas meramente por fuentes de radiación térmica en la estrella y se explicará en detalle cómo se logra el código final para la visualización de la estrella. Además, se trabajará para llegar a expresiones para el flujo de fotones recibido por el detector y su relación con las cantidades astrofísicas de flujo de fotones emitidos en la superficie de la estrella.

6.1. Coordenadas sobre la estrella y el detector

El primer paso para completar nuestro estudio será determinar el espacio de configuraciones del sistema de referencia de nuestro observador (un detector), donde se observará la imagen de una estrella compacta (ultracompacta).

Inicialmente, considérese un único sistema coordenado espacial representado por coordenadas euclidianas ortogonales: $\{x^1, x^2, x^3\}$. Estas coordenadas son medidas por observador estático, que es exterior y ajeno al problema. Se situará el origen de este sistema coordenado euclidiano en el centro del objeto compacto (ultracompacto), haciendo que su origen coincida con el origen de las coordenadas de la métrica de Schwarzschild. Se orienta este sistema de tal manera que el eje x^1 coincide con el eje perpendicular al plano ecuatorial que

¹Estrellas con masas chicas que en la mayor parte de su vida fusionan Hidrógeno en Helio y no terminan su evolución estelar en supernovas. Para leer un poco más acerca de la clasificación de estrellas, en particular de la secuencia principal en el diagrama de Hertzsprung-Russell, revisar *e.g.*, Kippenhahn *et al.* (2013)

está dado por el plano (x^2, x^3) .

De aquí, es importante considerar dos lugares en este sistema coordinado: (i) los puntos $\{X_E, Y_E, Z_E\}$ sobre la superficie de la estrella, y (ii) los puntos sobre el detector, cuyo origen yace en el plano ecuatorial (x^2, x^3) , que está asociado al problema como el observador estático, situado ambos a una distancia $D \gg R^*$ que tiende hacia el infinito. En particular se deberá prestar atención a estos puntos pues es donde son emitidos los fotones y en donde llegarán los fotones viajeros.

La relación $X_E^2 + Y_E^2 + Z_E^2 = (R^*)^2$ representará los puntos en la superficie de la estrella, para lo cual se introduce también al sistema coordinado: $\{r_E, \theta_E, \phi_E\}$. Por otra parte, tómesese que la pantalla del detector está situada en un plano colocado en $x^1 = D$, paralelo al plano (x^2, x^3) . De esta forma, será conveniente introducir además a las coordenadas polares en el origen de la superficie del detector vertical: (ρ_D, φ_D) . A continuación se escriben las expresiones para estas posiciones:

Coordenadas para puntos sobre la superficie de la estrella:

$$x^1 = R^* \sin \theta_E \cos \phi_E = X_E, \quad (6.1)$$

$$y^1 = R^* \sin \theta_E \sin \phi_E = Y_E, \quad (6.2)$$

$$z^1 = R^* \cos \theta_E = Z_E. \quad (6.3)$$

Coordenadas para puntos sobre la superficie del detector:

$$x^1 = D = X_D, \quad (6.4)$$

$$x^2 = \rho_D \cos \varphi_D = Y_D, \quad (6.5)$$

$$x^3 = \rho_D \sin \varphi_D = Z_D. \quad (6.6)$$

donde la dirección $\varphi_D = 0$ apunta a lo largo del eje $Y_D > 0$ y $Z_D = 0$, es decir en el plano ecuatorial. Los lugares geométricos de los puntos mencionados y el sistema coordinado se ilustran en la Fig. (6.1). Una forma de entender cómo se irá dibujando la imagen de la estrella depositada verticalmente en la pantalla del detector, es que se irán dibujando tantas circunferencias graficadas desde el centro del detector hacia su exterior como valores de ρ_D se estén recorriendo en la pantalla. Estos son los así llamados *anillos de Einstein* en la imagen, y vendrán determinados por las proyecciones en coordenadas polares $\rho = \rho_D$ de los fotones saliendo desde la estrella con parámetro $x_D = \sin \delta$, a su vez determinado por el ángulo δ de la salida de los fotones desde la estrella, i.e.

$$\rho_D = \sin \delta R_\infty = x_D R_\infty; \quad (6.7)$$

para valores de x_D tal que $0 \leq x_D \leq x_D^{m\acute{a}x}$, revisar Ec. (5.29).

Comenzando pues ahora con el procedimiento para graficar las trayectorias de los fotones que alcanzan a depositarse en el detector, si se empieza con aquellos que salen del plano ecuatorial de la estrella, i.e. $\theta_E = \pi/2$; en el detector se verán únicamente como una línea horizontal iluminada correspondiente a $\varphi_D = 0$, i.e. una línea sobre el eje Y_D . Es por esto que a continuación, se deben recorrer todas las trayectorias que provengan del sistema coordinado en la estrella, para todas las colatitudes θ_E que se tienen. Esto será igual a recorrer los ángulos φ_D de 0 a 2π en el sistema coordinado del detector, sacando provecho de la simetría esférica del problema que se tiene en ambos sistemas coordinados. Por lo cual, se tiene hasta ahora que para el observador universal, la imagen en el detector tiene por tamaño los siguientes valores:

$$x^1 = D, \quad (6.8)$$

$$x^2 = Y_D = x_D R_\infty \cos \varphi_D, \quad (6.9)$$

$$x^3 = Z_D = x_D R_\infty \sin \varphi_D. \quad (6.10)$$

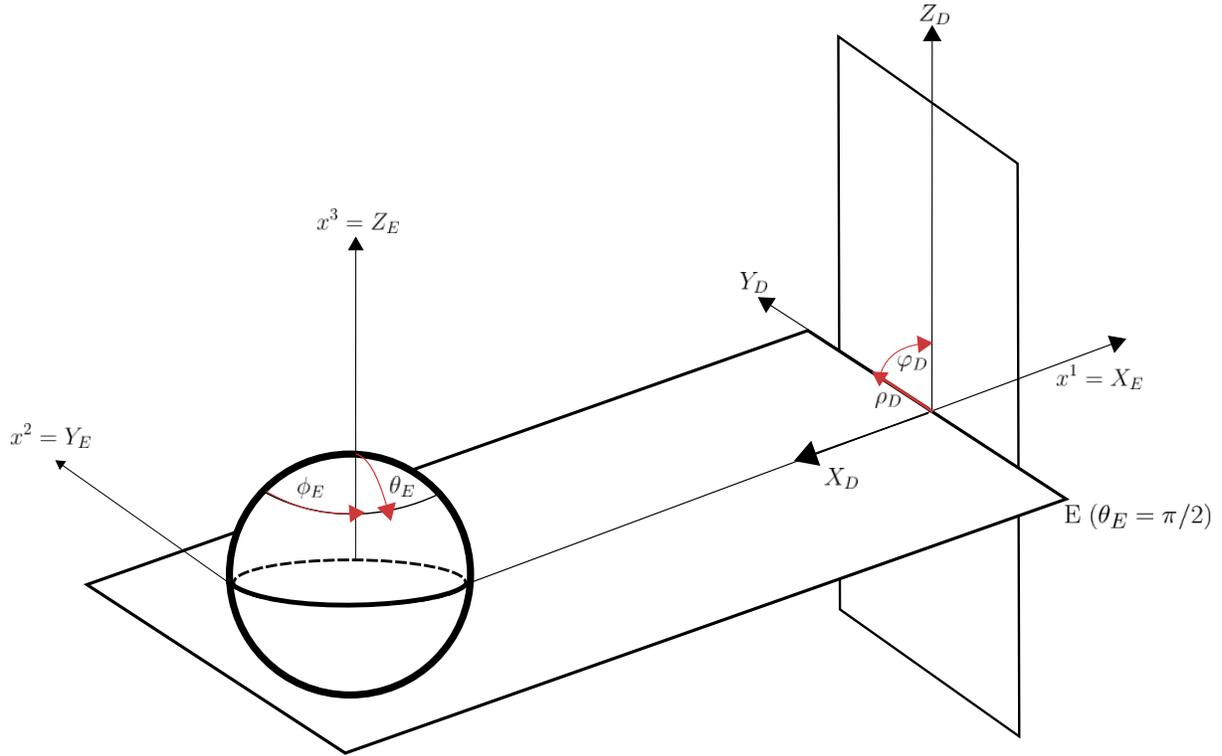


Figura 6.1: Presentación de los dos lugares geométricos de interés, (X_E, Y_E, Z_E) y (X_D, Y_D, Z_D) en el sistema coordenado (x^1, x^2, x^3) . El eje x^1 coincide con el eje de rotación de la estrella y el plano E es el plano ecuatorial.

Finalmente, se tiene la introducción de dos nuevos grados de libertad en el observador situado en el detector al infinito: un ángulo de inclinación con respecto al eje perpendicular al plano ecuatorial $\theta_E = \pi/2$ del objeto compacto y además, un acimut desde donde se observe la estrella, llámese β . Sin pérdida de generalidad, tómesese un eje de simetría polar en la dirección x^3 , i.e. Z_E en el referencial de la estrella. La orientación del plano del detector con respecto a este eje viene dado aproximadamente por un ángulo de inclinación α . Entonces se introduce un nuevo lugar geométrico, (iii) los puntos del detector rotados a un ángulo α de inclinación con respecto al eje de simetría Z_E de la estrella. De esta manera, se tiene en el sistema inclinado del detector que las coordenadas de los puntos dibujados sobre el detector son:

$$x^1 = X_D \cos \alpha + R_\infty \sin \delta \sin(\varphi_D + \beta) \sin \alpha = X'_D, \quad (6.11)$$

$$x^2 = R_\infty \sin \delta \cos(\varphi_D + \beta) = Y'_D, \quad (6.12)$$

$$x^3 = -X_D \sin \alpha + R_\infty \sin \delta \sin(\varphi_D + \beta) \cos \alpha = Z'_D. \quad (6.13)$$

como se ilustra en la Fig. (6.2).

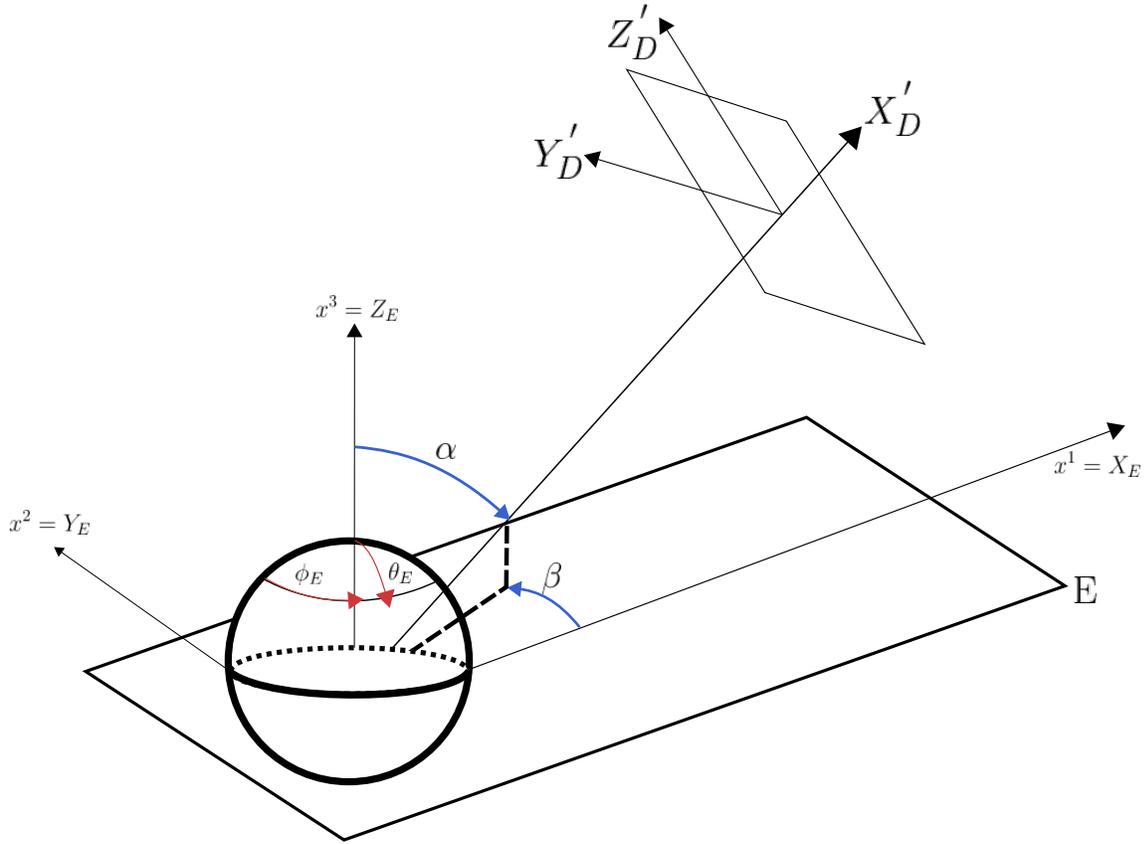


Figura 6.2: Representación de los lugares geométricos de interés en el sistema rotado para el detector (X'_D, Y'_D, Z'_D) .

6.2. Flujo de fotones térmicos desviados por un campo gravitacional

Para continuar con el desarrollo de las emisiones térmicas y cantidades asociadas en Astrofísica, se tomará el procedimiento usual: revisar primero con Mecánica Estadística la expresión para el flujo de fotones y el flujo bolométrico para fotones térmicos y secundamente abordar la teoría para la emisión térmica en estrellas, con un enfoque en particular que se mencionará en la siguiente sección. Para el primero, revisar *e.g.*, Page (1995), mismo tratamiento que se incluye a continuación.

Al inicio, se parte de la expresión para el número d^6N , en un elemento de volumen $d^3q d^3p$ del espacio fase, de un ensamble de fotones con una distribución de ocupación de estados con energía E dada por $n(E)$ y dos estados de polarización:

$$d^6N = 2 \frac{d^3q d^3p}{h^3} n(E). \quad (6.14)$$

El elemento de volumen espacial d^3q es el cilindro formado por la distancia de viaje de una colección de fotones $c dt$ entre el intervalo t y $t + dt$, medido por un observador con tiempo coordinado t , tras haberse emitido los fotones desde un elemento de área en la superficie de la estrella a un radio constante $r = R$. Se debe tomar en cuenta este elemento de área eficaz en coordenadas esféricas y de manera infinitesimal, proyectado

sobre la normal a la superficie en el punto de emisión en el objeto emisor. Esto es, $dS = \hat{n} \cdot d^2\vec{A} = d^2A \cos \delta$, recordando la Figura (5.1). Para el elemento de volumen en el espacio de momentos, se toma el elemento de volumen $d^3p = p^2 dp d\Omega_p$ para una esfera de momento p constante en el espacio de momentos. El ángulo sólido infinitesimal $d\Omega_p$ se puede entender como la sección eficaz de energía o momento que recibirá la radiación de los fotones.

Ahora bien, debe tomarse el caso para espacio-tiempo con curvatura, esto es, en el cual la luz se verá curvada como en la Figura (5.1). Si se hace una transformación de los valores en el espacio de momentos a un espectro de energía dentro de intervalo infinitesimal $[E, E + dE]$, los elementos de volumen en el espacio de posiciones y de momentos de acuerdo con Page (1995)) se ven como:

$$d^3q = c dt d^2A \cos \delta = c dt (R^*)^2 \sin \theta \cos \delta d\theta d\phi, \quad (6.15)$$

$$d^3p = p^2 dp d\Omega_p = \frac{E^2 dE}{c^3} \frac{x dx}{\cos \delta \sin \theta d\theta} \frac{d^2\mathcal{A}(E)}{D^2}, \quad (6.16)$$

tomando en cuenta que $E = pc$ para fotones y que la sección eficaz que recibirá la radiación vendrá dada por el elemento $d\Omega_p$. En espacio plano simplemente $d\Omega_p = d^2\mathcal{A}(E)/D^2$ donde $d^2\mathcal{A}(E)$ es el elemento de área medido en la superficie detectora y D la distancia del detector a la estrella. En espacio de Schwarzschild $d\Omega_p$ es modificado por el factor $x dx / (\cos \delta \sin \theta d\theta)$ como se demuestra en el Apéndice de Pechenick *et al.* (1983).

Con lo anterior, para espacio-tiempo con curvatura se tiene pues que:

$$d^6N(E) = \frac{2}{h^3} c dt (R^*)^2 x dx d\phi \frac{E^2}{c^3} \frac{d^2\mathcal{A}(E)}{D^2} n(E) dE. \quad (6.17)$$

En esta ecuación el ángulo ϕ es la coordenada angular en la superficie de la estrella, ϕ_E , definida anteriormente. Para emisión de fotones por un cuerpo negro, se revisa que la distribución estadística que siguen es la de Planck, que viene dada por la función de distribución: $n(E) = 1/(\exp(E/k_B T) - 1)$ donde T es la temperatura de la superficie en el punto de coordenadas (θ_E, ϕ_E) .

En general, se considerará que la temperatura $T = T(\theta_E, \phi_E)$ es una función que dependerá de la colatitud y el ángulo acimutal en la que se de la emisión de fotones. Si se considera un modelo de atmósfera para la emisión de la estrella en vez del cuerpo negro se reemplazará la distribución $n(E)$ por una función adecuada. Esta expresión Ec. (6.17) nos da el número de fotones emitidos por el elemento de área d^2A en un intervalo de tiempo dt y recibidos en el área $\mathcal{A}(E)$ del detector.

Para modelos realistas se debe además incluir un coeficiente de absorción interestelar $\exp(-N_H \sigma(E))$ donde N_H es la “densidad columnal de hidrógeno” entre la estrella y el detector y $\sigma(E)$ la sección transversal de absorción del medio interestelar para fotones de energía E . Este efecto es mas allá de este trabajo y se deja para trabajo futuro.

Para medir el flujo de fotones que llegan a un detector situado a una posición remotamente lejana (un observador al infinito), se pueden elaborar las integrales para la expresión en la Ecuación (6.17).

Primeramente se puede medir el espectro del flujo de fotones que arriban al detector, por unidad de área, por unidad de tiempo, por unidad de energía. Esta expresión se integraría únicamente en la sección eficaz de ángulo sólido efectiva en donde los fotones fueran emitidos y le corresponderán valores distintos en diferentes intervalos de energía. Entendiendo a esta cantidad como un flujo \mathcal{N} , se podrá expresar como:

$$d^4\mathcal{N}(E) = \iint d^6N(E) = \left[2 \frac{(R^*)^2}{D^2} \frac{1}{c^2 h^3} \int_0^{x_c} dx x \int_0^{2\pi} d\phi \frac{E^2}{\exp(E/k_B T(\theta_E, \phi_E)) - 1} \right] d^2\mathcal{A}(E) dt dE \quad (6.18)$$

Ahora bien, si nos interesa el flujo de fotones por unidad de área y unidad de tiempo, integrando en todo el espectro de valores para la energía disponibles,

$$d^3\mathcal{N}_{\text{bol}} = \int d^4\mathcal{N}(E) = \left[\frac{2(R^*)^2}{D^2 c^2 h^3} \cdot \int_0^{x_c} dx_D x_D \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^\infty dE \frac{E^2}{\exp(E/k_B T(\theta_E, \phi_E)) - 1} \right] d^2\mathcal{A}(E) dt. \quad (6.19)$$

El caso para espacio-tiempo plano, esto es, para estrellas que no requieren del tratamiento de Relatividad General; las trayectorias de luz salen como líneas rectas y se debe reemplazar en (6.17) que $\delta = \theta$ y $x = \sin \theta$, por lo cual simplemente $d\Omega_p = d^2\mathcal{A}(E)/D^2$. Además, como no se presenta fenómeno de captura de fotones, entonces $x_c = 1$. Más adelante se obtendrán expresiones para casos con curvatura.

6.3. Luminosidad térmica

En el caso de la Relatividad General, como se revisa de las soluciones con curvatura, el espacio-tiempo curva a la luz en la vecindad de un objeto compacto.

Como un primer paso se van a introducir los conceptos básicos y el cálculo estándar en espacio plano, que pueden hallarse, *e.g.*, en Rybicki & Lightman (1986). Primero se tiene a la intensidad específica I_ν definida por:

$$d^6 E = I_\nu d\nu d^2\vec{\Omega} d^2\vec{A} dt, \quad (6.20)$$

donde $d^6 E$ es la energía emitida en un tiempo dt por un elemento de área $d^2\vec{A}$ (representado por un vector perpendicular a d^2A) en la dirección del elemento de ángulo sólido $d^2\vec{\Omega}$ (representado por un vector en la dirección de emisión) en un rango de frecuencias $d\nu$. Integrando este $d^6 E$ sobre todas las direcciones de emisión obtenemos el flujo específico F_ν :

$$F_\nu = \int_\Omega d^2\Omega I_\nu \cos \delta, \quad (6.21)$$

(donde δ es el ángulo entre el vector normal $d^2\vec{A}$ y la dirección de emisión $d^2\vec{\Omega}$) e integrando sobre la frecuencia ν llegamos al flujo total o bolométrico F :

$$F = \int_0^\infty d\nu F_\nu, \quad (6.22)$$

que es expresado en energía por unidad de área y de tiempo.

En espacio curvado nos interesa calcular la energía que escapa de la estrella y puede ser detectada por un observador al infinito. Para una estrella que no es ultracompacta todos los fotones emitidos “hacia fuera” pueden escaparse de la estrella pero en el caso de una estrella ultracompacta sabemos que solamente fotones emitidos a un ángulo δ inferior al ángulo crítico δ_c pueden escaparse. Entonces tenemos que corregir la Ec. (6.21) para obtener

$$F_\nu = \int d^2\Omega I_\nu \cos \delta = \int_0^{\pi/2} \cos \delta \sin \delta d\delta \int_0^{2\pi} d\phi I_\nu \longrightarrow F_\nu = \int_0^{\delta_c} \cos \delta \sin \delta d\delta \int_0^{2\pi} d\phi I_\nu. \quad (6.23)$$

Como primer escenario consideramos que el objeto compacto está emitiendo luz de manera uniforme sobre cada uno de los puntos de su superficie y además que la emisión es isotrópica, es decir, igual en todas las direcciones sobre cada punto en su superficie. Escribese pues la intensidad $I_\nu(\Omega)$ como:

$$I_\nu(\Omega) = \begin{cases} I_\nu(0) & \text{para } 0 \leq \delta \leq \pi/2, \\ 0 & \text{para } \pi/2 < \delta \leq \pi. \end{cases} \quad (6.24)$$

Para el primer ejemplo concreto, se puede suponer emisión de cuerpo negro que viene expresado por la función de Planck:

$$I_\nu(0) = B_\nu = \frac{2hv^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}, \quad (6.25)$$

la cual nos da:

$$F_\nu = \int_0^{\delta_c} \cos \delta \sin \delta \, d\delta \int_0^{2\pi} d\phi I_\nu = B_\nu \int_0^{\delta_c} \cos \delta \sin \delta \, d\delta \int_0^{2\pi} d\phi = B_\nu \pi x_c^2; \quad (6.26)$$

donde usamos $\sin \delta = x$ y $x_c \equiv \sin \delta_c$, para el flujo F_ν que puede escaparse de la estrella. Integrando sobre el espacio completo de frecuencias, se llega a un nuevo resultado de la ley de Stefan-Boltzmann para objetos ultracompactos, que se descubre que es:

$$\boxed{F = x_c^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}, \quad (6.27)$$

con la constante de Stefan-Boltzmann σ y T_{eff} una temperatura efectiva sobre la superficie del cuerpo negro, en este caso, el objeto ultracompacto o la estrella ultracompacta. Este resultado se reduce al ya conocido para objetos en la aproximación clásica, sin curvatura, considerando que en ese límite $\delta_c = \pi/2$, es decir $x_c = 1$.

En el caso de una estrella de radio R^* , sin curvatura ni efecto gravitatorio, para el sector de área d^2A integrado en su superficie esférica se tiene que la luminosidad es:

$$L = 4\pi(R^*)^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (6.28)$$

resultado ampliamente revisado en la literatura, ver *e.g.*, Mihalas (1978).

En el caso de una estrella compacta esta fórmula tiene dos correcciones. La primera es la corrección entre el tiempo de la estrella, i.e., su tiempo propio $d\tau = ds/c$, y el tiempo del observador al infinito, dt . En la métrica de Schwarzschild tenemos que

$$dt = e^{-\Phi(R^*)} d\tau = (1 - R/R_s)^{-1/2} d\tau \quad (6.29)$$

(ver Ec. (4.6) y (4.13)) La segunda corrección es que un fotón emitido con energía E llega al infinito con una energía

$$E_\infty = e^{\Phi(R^*)} E = (1 - R/R_s)^{1/2} E, \quad (6.30)$$

dándonos un segundo factor de corrimiento el rojo. Entonces la luminosidad medida por un observador al infinito es

$$L_\infty = e^{2\Phi(R^*)} L. \quad (6.31)$$

Por analogía con la energía E se acostumbra introducir una temperatura al infinito, $T_\infty = e^{\Phi(R^*)} T_{\text{eff}}$, y agregar además el efecto que la estrella se ve como un círculo de radio R_∞ (ver Ecs. (5.26) y (6.7)). Por lo tanto, para una fuente con radio $R^* > 1,5R_s$, con $R_\infty = e^{-\Phi(R^*)} R^*$:

$$\boxed{L_\infty = 4\pi R_\infty^2 \sigma T_\infty^4 = 4\pi(R^*)^2 \left(1 - \frac{R_s}{R^*}\right) \sigma T_{\text{eff}}^4.} \quad (6.32)$$

En el caso ultracompacto, recordar que $R_s < R^* \leq 1,5R_s$. Tomando que $R_\infty = 1,5\sqrt{3}R_s$ y $x_c^2 = 27/4 (R_s^2/(R^*)^2) (1 - R_s/R^*)$, se obtiene:

$$\boxed{L_\infty^{\text{euc}} = 4\pi R_\infty^2 x_c^2 \sigma T_\infty^4 = 27\pi R_s^2 \left(1 - \frac{R_s}{R^*}\right)^2 \sigma T_{\text{eff}}^4.} \quad (6.33)$$

Considerar ahora la Fig. (6.3). Con este nuevo resultado, para un radio del objeto $R^* = R_s$, la luminosidad térmica se anula, lo cual coincide con la esperada de un agujero negro de Schwarzschild. Este comportamiento y la nueva luminosidad para cualquier objeto compacto yendo al régimen ultracompacto, hasta el radio del horizonte de eventos de Schwarzschild, se representa con la curva de color rojo anaranjado. Para la curva de color amarillo, se considera el resultado clásico que se tenía previamente, revisar la Ec. (6.28). Además, ya que todo objeto ultracompacto, como lo es también un agujero negro de Schwarzschild, tiene sección eficaz de captura de fotones igual a $27\pi R_s^2$ (revisar *e.g.*, Misner *et al.* 2017 y Shapiro & Teukolsky 1983); este resultado ya nos arroja el cálculo de la luminosidad térmica sobre esta sección eficaz con efectos relativistas (los corrimientos al rojo de la temperatura y el radio del objeto).

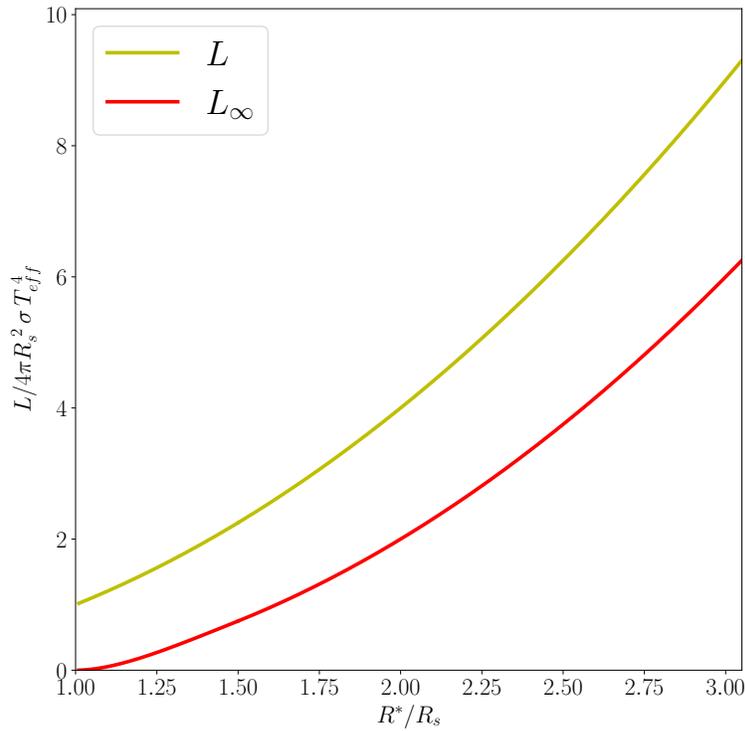


Figura 6.3: Luminosidades observadas para objetos compactos con diversos cocientes de radios R^*/R_s . En color amarillo se muestra el caso clásico de la luminosidad medida localmente en la estrella, sin la corrección relativista del desplazamiento al rojo, *i.e.* sin considerar captura de fotones ni deflexión gravitacional de la luz. En color rojo aparece el observado por un sistema situado al infinito, desplazado hacia el rojo y con los efectos relativistas. Puede verse que para el supuesto de una distribución esférica en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild, se recupera el caso esperado de luminosidad cero.

6.4. Curvas de luz para un modelo de atmósfera con campo magnético dipolar

Para el ojo humano, la mayoría de las estrellas nos parece que mantienen constantes sus propiedades observables a lo largo de cualquier escala de tiempo. No obstante, de acuerdo con las observaciones astronómicas, existen algunas estrellas que pueden variar en su brillo en escalas de tiempo medibles para el ojo humano, que van de escasos segundos, a días, meses o años. A las estrellas con estos cambios medibles por un observador, se les conoce como estrellas variables y la variabilidad en objetos astrofísicos y estrellas es un concepto y campo vastamente mencionado, que ha dado origen al estudio y descubrimiento de los púlsares (ver *e.g.*, Green *et al.*, 2004) y es ampliamente estudiado en la literatura. Los cambios en el brillo de los objetos pueden ser regulares en el tiempo, es decir periódicos; o bien, semirregulares o completamente irregulares.

En el caso de los cambios periódicos, pueden estar asociados a factores intrínsecos al objeto, como es su período de rotación. En el caso de los púlsares de radio, se tiene el "modelo del faro de luz" como el modelo todavía aceptado hasta la actualidad (ver *e.g.*, Becker, 2009). En él, una estrella de neutrones se encuentra girando de manera veloz (Hewish *et al.*, 1968), con un campo magnético muy potente, del orden de $10^8 - 10^{15}$ G (Haensel *et al.*, 2007); y emite un haz de radiación luminosa que típicamente no se encuentra alineado con el eje de rotación de la propia estrella. Cada vez que la estrella termine de completar uno de sus periodos, un pulso de emisión en radio, de banda ancha y polarizado, viajará por el espacio hasta cruzarse con la línea de visión de la Tierra, en donde un observador medirá los cambios aparentes en su brillo proveniente de la radiación de esos fotones.

De acuerdo con Green *et al.* (2004), para la medición de las variaciones en la radiación detectada, se introduce el concepto de una curva de luz, la cual es la gráfica del cambio de la magnitud de la estrella (o bien, cualquier parámetro físico directamente proporcional, por ejemplo un flujo o brillo intrínseco), como función del tiempo de una estrella variable. Una forma particular para graficar una curva de luz es como la gráfica del flujo de fotones que arriben a un observador, versus la fase de rotación $\varphi \in [0, 2\pi]$ del objeto emisor; puesto que hay una relación uno a uno entre el tiempo coordinado medido desde un sistema inercial t y la fase para un periodo constante P de rotación de la estrella, a saber: $\varphi = 2\pi t/P$ (ver *e.g.*, Becker, 2009). Los instrumentos modernos permiten al observador limpiar, entre otros factores de ruido presentes en la primera señal que llega a la Tierra, los factores dispersivos del medio interestelar que "manchen" la señal original de los púlsares.

En nuestro caso las pulsaciones resultan de una distribución no-uniforme de temperatura en la superficie de la estrella, siguiendo el modelo presentado por Page (1995) y aplicando el modelo de temperatura para una estrella magnetizada (de neutrones) propuesto por Greenstein & Hartke (1983).

Considérese para este nuevo caso un objeto compacto (como lo es una estrella de neutrones), con superficie magnetizada por la presencia de un campo magnético. Como hipótesis adicional, se va a tomar la influencia de este campo es mayoritariamente hasta un orden dipolar, despreciando órdenes mayores en la expansión multipolar para fines convenientes de los cálculos.

La expresión general encontrada en Greenstein & Hartke (1983), para la temperatura superficial de un objeto esférico magnetizado es:

$$T_s(\Theta_B) = \chi(\Theta_B) T_s(\Theta_B = 0), \quad (6.34)$$

donde $\chi(\Theta_B)$ y Θ_B se calculan a su vez de las expresiones:

$$\chi(\Theta_B) = [\cos^2 \Theta_B + \chi_0^4 \sin^2 \Theta_B]^{1/4}, \quad (6.35)$$

$$\Theta_B = \arccos \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{r}}{|\vec{B}|r} \right). \quad (6.36)$$

El ángulo Θ_B es el comprendido entre la dirección del campo magnético dipolar y el vector normal sobre la superficie de la estrella, dado por el unitario en la dirección $\hat{r} = \vec{r}/r$. Mientras tanto, $\chi_0 = K_\perp/K_\parallel = T_\perp/T_\parallel$ es el cociente entre los valores de la conductividad térmica (o equivalentemente, la temperatura) en la superficie de las capas polares K_\parallel (T_\parallel) y el ecuador del objeto esférico K_\perp (T_\perp). Con los valores para estos parámetros, se pueden considerar distintas funciones de temperatura que dependan de χ_0 y del ángulo de colatitud en la estrella θ_E .

Primero se resolverá para un caso donde la configuración es tal que la magnetización $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ se encuentra completamente orientada en el eje de simetría Z_E . Los cálculos se incluyen en el Anexo C de este trabajo y regresan una expresión para el flujo de fotones que requiere la integración de una función de la temperatura superficial como la Ec. (6.34), para un campo magnético dipolar, sin curvatura; la cual a su vez dependerá de la coordenada angular θ_E , y misma que se verá como:

$$\mathcal{N}_{\text{dip}} = \frac{2(R^*)^2}{D^2 c^2 h^3} \cdot \int_0^{x_c} dx_D x_D \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^\infty dE \frac{E^2}{\exp(E/k_B T_\parallel f(u)) - 1} \quad (6.37)$$

$$= \frac{4\pi(R^*)^2}{D^2 c^2 h^3} k_B^3 \zeta(3) T_\parallel^3 \cdot \int_0^{x_c} dx_D x_D f(u)^3, \quad \text{con:} \quad (6.38)$$

$$f(u) = \left[1 + \left(\frac{T_\perp^4}{T_\parallel^4} - 1 \right) \frac{u^2}{1 + 3(1 - u^2)} \right]^{1/4} \quad \text{y } u = \sin \theta_E. \quad (6.39)$$

En un segundo caso en el cual la magnetización $\vec{M} = M \cos \gamma \hat{x} + M \sin \gamma \hat{z}$ ahora esté orientada en el plano $Z_E X_E$ del referencial medido en la estrella, formando un ángulo γ con respecto a un eje de simetría de la estrella (puede entenderse como el eje de rotación, que sin pérdida de generalidad puede ser la dirección Z_E); la expresión a resolver (revisar Anexo C) tomará la forma:

$$\mathcal{N}_{\text{dip}} = \frac{4k_B^3 \zeta(3)(R^*)^2}{D^2 c^2 h^3} \int_0^{x_c} dx_D x_D \int_0^{2\pi} d\varphi_D T^3(\theta_E, \phi_E; \gamma). \quad (6.40)$$

Introduciendo los efectos de la curvatura del espacio-tiempo para el campo magnético y la deflexión gravitacional de la luz, la expresión adecuada para esta cantidad de flujo de fotones por unidad de área, por unidad de tiempo, se puede mejorar todavía a su forma relativista más específica. Sofisticar este cálculo hasta ese punto se sale de los objetivos de este trabajo (para ello ver, *e.g.*, Page & Sarmiento (1996)), que solamente busca mencionar la contribución de la deflexión gravitacional en las expresiones aquí mostradas.

6.5. Implementación del modelo y código

En la presente sección, se va a describir cómo se implementó todo el contenido mencionado en el Capítulo 5 y el presente Capítulo 6 en la elaboración de un código que permite, como tareas generales:

1. Integrar las curvas geodésicas de la solución de Schwarzschild para fotones en el plano ecuatorial $\theta_0 = \pi/2$, saliendo desde una estrella u objeto ultracompacto con cierta compacidad $U = R_s/2R^*$ y que lleguen hasta el infinito. Se integra para diferentes valores de los parámetros de salida $x(\delta(x))$.
2. Calcular nuevas curvas que partan de rotar las trayectorias originales calculadas en el plano ecuatorial para k valores de φ_D en $[0, 2\pi]$, de manera que sus puntos queden situados en el plano de cada una de las direcciones correspondientes a esas k rotaciones. Esto regresará las trayectorias calculadas para una configuración en la que $\alpha, \beta = 0^\circ$.
3. Teniendo las trayectorias calculadas para esta configuración, realizar las rotaciones adecuada para cualesquiera valores iniciales que el usuario meta de entrada para α y β .

4. Tomar una imagen con ciertas dimensiones de un archivo externo y vincular cada pixel en ella con un punto (θ_E, ϕ_E) situado sobre la estrella u objeto ultracompacto, que está emitiendo fotones que viajan por las curvas geodésicas y cuya trayectoria termina hasta los puntos en el detector (x_D, φ_D) ubicado a una distancia al infinito (astronómicamente muy lejano).
5. Imprimir la imagen de salida sobre la pantalla del detector para poder visualizarla con los pixeles que le correspondan al terminar el viaje.
6. Tomando las Ecs. (6.34) y (6.40), graficar las curvas de luz para diferentes valores de R^*/R_s y distintos parámetros iniciales para α y χ_0 .

A continuación, se detallará un poco más acerca de cada una de ellas y cómo fueron implementadas en lenguaje de programación FORTRAN.

Para el paso 1, se elaboró un integrador de la ecuación diferencial (5.25) en (u, ϕ) , que yace en el plano $\theta = \pi/2$, para un valor de entrada fijo del radio del objeto $U = R_s/2R^*$ y para un dominio posible de valores de x entre 0 y x^{\max} (ver Ec. (5.29)). Se tomó la subrutina ODEINT del libro de Press *et al.* (1992), que emplea un método en Runge-Kutta de orden 4 adaptativo, el cual integra para pocos puntos al infinito (lejos de la estrella, hacia el detector), mientras que cerca de la estrella refina sus pasos de integración y los hace más pequeños, aumentando la resolución en el dominio de integración. Para el punto final en el dominio de integración, se realiza la integral similar al método en la Ec. (5.30) entre el penúltimo y el último punto que corresponde al valor U en el radio de la estrella. Para esta integral se utilizan también las subrutinas de Press *et al.* llamadas MIDSQ, MIDSQU y QROMO. De aquí se consiguen pues N_x trayectorias ecuatoriales para una malla de N_x puntos en el intervalo de parámetros $x \in (0, x^{\max})$.

Para el paso 2, se efectúa la rotación de las trayectorias en el plano ecuatorial hacia una malla de N_{th} ángulos en una circunferencia de 0 a 2π . Esto es, se reproducen las trayectorias halladas en el paso 1 para distintos valores de N_{th} ángulos $\varphi_D \in [2\pi j_{th}/(N_{th} + 1), 2\pi N_{th}/(N_{th} + 1)]$ para $j_{th} = 0, 1, 2, \dots, N_{th} - 1$ que llegarán a depositarse en el detector. Este procedimiento es equivalente a rotar las trayectorias que salen desde la superficie.

El paso 2 ya consiguió las N_x trayectorias para distintos valores de los parámetros de salida x , rotados en una malla de N_{th} direcciones. Ahora, se debe además de ello: (i) considerar que la estrella se observa a un ángulo de inclinación con respecto al eje de simetría de la estrella, α y (ii) considerar un grado de libertad del ángulo de visión acimutal para la estrella, β . Entonces, el paso 3 consiste en realizar las rotaciones adecuadas para lograr calcular estos casos más generales, en los que los fotones son emitidos con esta nueva configuración más realista y sobre la dirección de un ángulo de inclinación privilegiado del observador. Las expresiones para realizar estos cálculos ya vienen dadas por las Ecs. (6.11 - 6.13).

En el paso 4, se dispone de una imagen de un archivo externo que va a hacer las veces de la imagen de la estrella o el objeto ultracompacto. Cada pixel de la imagen va a tener una relación uno a uno con las coordenadas de colatitud y acimut (θ_E, ϕ_E) , que correspondan con los últimos puntos integrados en el paso 1 y rotados de manera adecuada con los pasos 2 y 3. Entonces deben de tenerse dos números enteros D_1 y D_2 que corresponden a D_1 pixeles o puntos para los ángulos acimutales (pensando a la imagen como un mapamundi, corresponde a las longitudes) y D_2 pixeles o puntos para las colatitudes en la imagen (pensando nuevamente en el mapamundi). Se utilizan dos índices mudos j_x y j_{th} para cada uno de los puntos que se pueden dibujar en el detector, y se regresan al último punto de la ecuación diferencial integrada, que corresponde al punto de emisión sobre la estrella. Con estas correspondencias, se pueden vincular cada una de las trayectorias salientes con sus puntos en el detector (ρ_D, φ_D) . Ya en el paso 5 es cuando puede imprimirse la imagen saliente con los pasos anteriores.

Finalmente, en el paso 6 se realiza la integración de la Ec. (6.40), utilizando la Ec. (6.34). Para ello, se deben introducir como parámetros iniciales el ángulo de inclinación α y además el cociente χ_0 , el cual puede calcularse de manera indirecta suponiendo valores teóricos para T_{\perp} y T_{\parallel} (ver *e.g.*, Page (1995)).

Todas estas tareas están contenidas en subrutinas de FORTRAN y para su manipulación y uso, se utilizó el compilador de GNU FORTRAN, y un módulo llamado `f2py` para poder importar todas las mismas como un módulo dentro de PYTHON.

Capítulo 7

Resultados y Discusión

7.1. Imágenes

Como primer paso se presentan diferentes imágenes generadas por el código fuente en FORTRAN para los resultados de los códigos mencionados en el Capítulo 6 mostrando las diferentes vistas que puede tener la imagen de una estrella dependiendo de su compacidad. Para el caso de las imágenes de archivo externo, yéndose al régimen ultracompacto, según fuera el caso; se utilizan dos casos para imágenes de origen que vienen de la estrella: un mapa de un tablero de ajedrez y un mapa de la Tierra, ver Fig. (7.1).

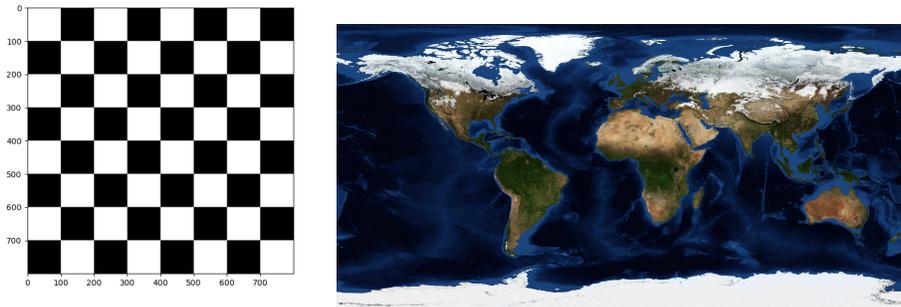


Figura 7.1: *Imágenes de prueba colocadas sobre la superficie de los objetos a visualizar.*

En las Figs.(7.2 - 7.5) se muestran, usando la imagen de tablero, los efectos de la deflexión gravitacional de la luz que proviene de una estrella compacta que va encogiéndose hasta el régimen ultracompacto, y que mostrará su imagen distorsionada para un observador situado en una posición remotamente lejana, a medida que la misma deflexión va haciendo que los fotones recorran diferentes trayectorias hacia el observador. En cada caso también se presentan vistas con cuatro orientaciones del observador con una colatitud $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \text{ y } 90^\circ$. En la Fig.(7.6) se marcan algunas estructuras notables para el caso $R = 1,25R_s$ y $\alpha = 90^\circ$. El uso del patrón de ajedrez, con sus casillas blancas y negras, permitió analizar a ojo con buena calidad cómo este fenómeno genera una imagen aparente de la estrella con fotones recibidos de puntos de la estrella que típicamente no estarían frontales al observador.

En el caso de la estrella compacta de $2R_s$ para $\alpha = 0^\circ, 30^\circ$, ver Figs. (7.2a, 7.2b) pueden observarse sin problema las 8 casillas por cada fila del tablero de ajedrez que aparece sin necesidad de hacer un giro alrededor de la estrella, mientras que por cada columna se alcanzan a apreciar 7 casillas. Ya para el ángulo $\alpha = 60^\circ$, ver

Fig. (7.2c) se pueden mirar en cada columna de frente al observador las 8 casillas por columna, y junto con el caso $\alpha = 30^\circ$, algunas casillas de las columnas traseras a la estrella aparecen magnificadas también en la parte superior de la imagen. A medida que avanzamos del polo norte de la estrella en $\alpha = 0^\circ$ hacia el ecuador $\alpha = 90^\circ$, estas casillas traseras que provienen de la parte trasera de la estrella parecen expandirse sobre los bordes de la proyección circular de ella en el detector. Finalmente, para la vista ecuatorial en $\alpha = 90^\circ$, ver Fig. (7.2d), podemos ver los dos polos, norte y sur, sin necesidad de subir o bajar en colatitud, simplemente desde el privilegio de esa posición. Aquí también algunos de los fotones o puntos de las casillas de la parte trasera también logran pintarse sobre el detector, haciendo que las columnas del tablero de ajedrez puedan mostrar sus 8 casillas más además 2 casillas de las columnas traseras al sector frontal de la estrella, logrando que las columnas luzcan más largas que en los casos anteriores al ser pintadas.

A medida que la estrella se va haciendo cada vez más y más compacta y entra al régimen ultracompacto, se puede notar que las columnas del tablero van pintando cada vez más casillas que solo las 8 que hay en la imagen original, haciendo las casillas traseras a la vista frontal de la estrella parte de una misma columna, comportamiento que ya era apreciable desde el caso en $R^* = 2 R_s$ (ver e.g., Fig. 7.2d). Otro efecto interesante que puede mirarse para estrellas en este régimen es que sin mucho problema se puede inspeccionar que la imagen sobre el detector parece que logra pintar sin problema las 8 casillas por fila, sin importar el ángulo de visión α . Mas aún, en los casos más compactos, ver e.g. Fig. (7.5), se vuelve a observar que las casillas pertenecientes a filas traseras a la vista frontal de la estrella, se pintan como continuación de las filas existentes que ya empiezan a aparecer, como haciendo lucir a las filas más largas de lo que son en realidad.

En resumen, tal parece que en el régimen ultracompacto no parece haber un problema en cuanto a la visualización de todas las casillas del tablero de ajedrez de 8×8 , tomando cualquier ángulo de visión, sobre la imagen proyectada en el detector.

Posteriores a las imágenes del tablero de ajedrez, se ilustran primeramente el efecto de deflexión gravitacional de la luz para una estrella ultracompacta con masa igual a 2 masas solares, para distintos ángulos u orientaciones de longitud o acimut de la estrella. Estos resultados son mostrados en las Figs. (7.7 - 7.8).

Ahora bien, para el uso de la imagen del mapamundi del planeta Tierra, se eligieron 4 distintas compacidades, a saber: $1.499 R_s$, $1.375 R_s$, $1.25 R_s$, y $1.0001 R_s$ fijando para cada corrida un único valor de coordenada acimutal β , y fijando en todas ellas la condición de observador orientado en el ecuador de la estrella, i.e., $\alpha = 90^\circ$. Nuevamente para estos casos los polos Norte y Sur logran verse sin importar el valor de β , como lo hallado en nuestra primera generación de imágenes. Sin embargo, el resultado más interesante que se puede ver al generar las imágenes de la estrella con este mapa terrestre se logra al acercarse cada vez más al radio de Schwarzschild, R_s . En ese caso, empiezan a hacerse notorios el Polo Norte y la Antártida sobre la misma imagen en dos ocasiones, es decir, a la hora de subir y bajar verticalmente en la imagen proyectada en el detector ambos polos aparecen duplicados.

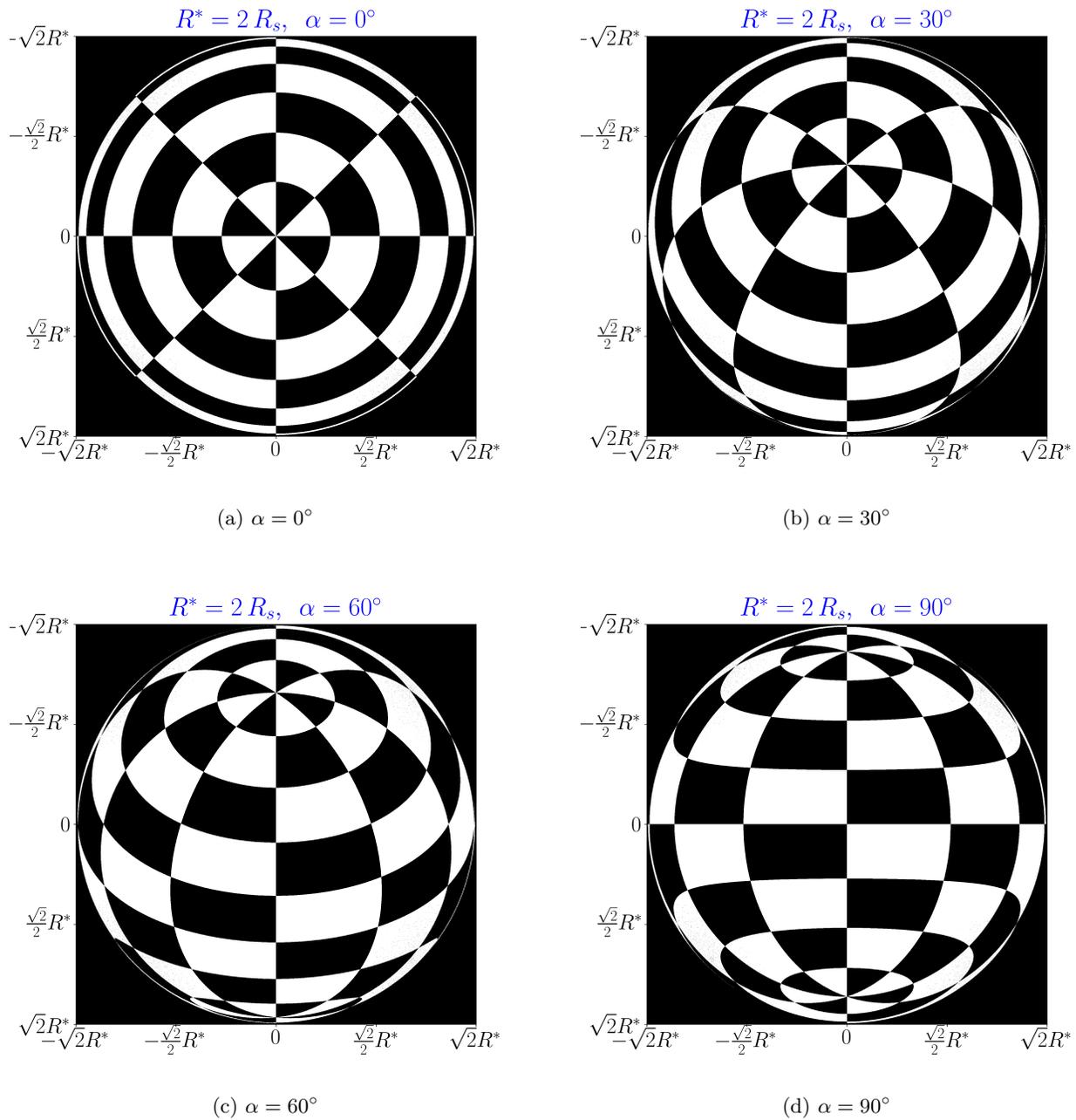


Figura 7.2: Estrella compacta con $R^* = 2R_s$ vista desde ángulos de inclinación de 0° , 30° , 60° , 90°

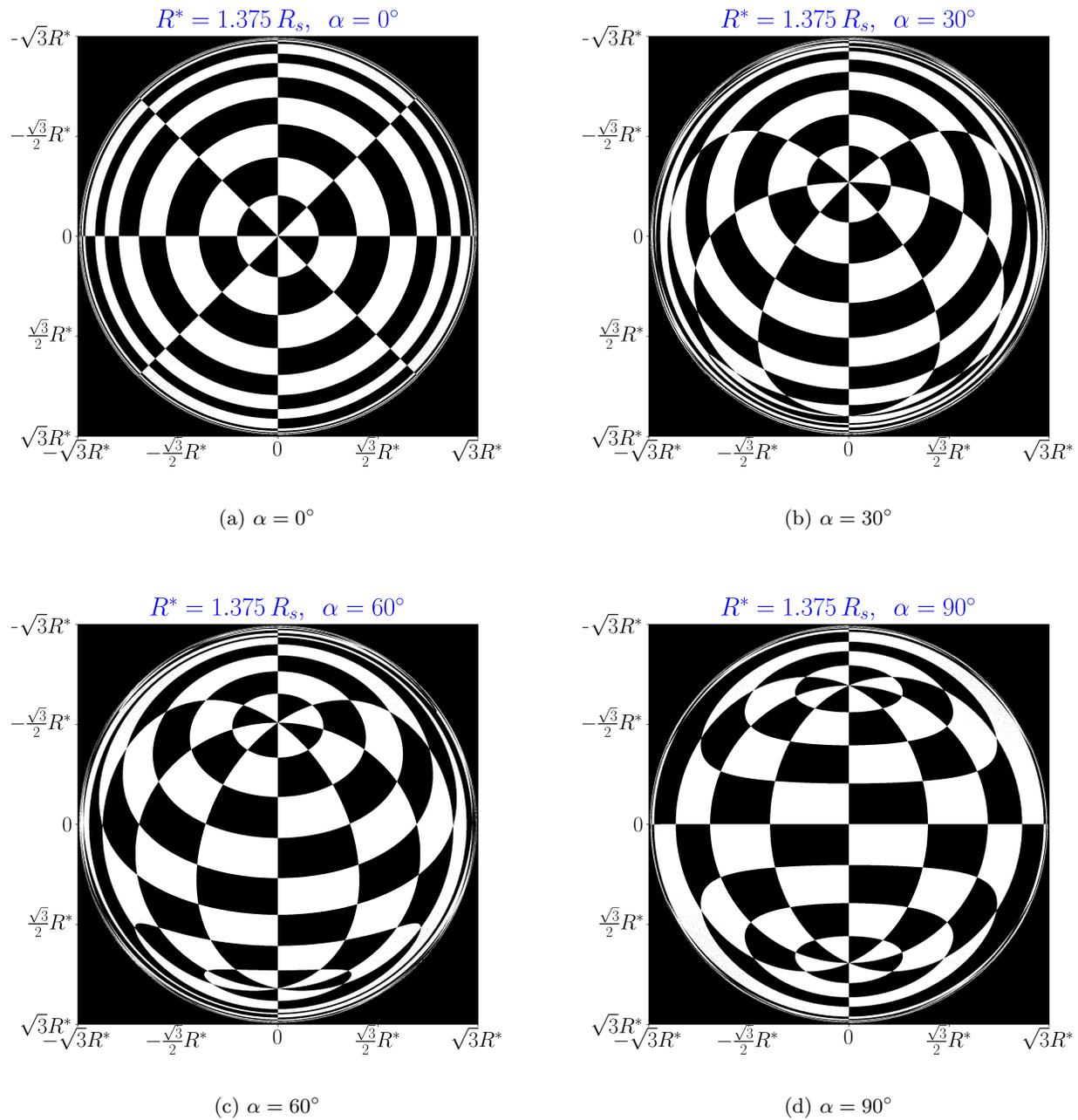


Figura 7.3: Estrella ultracompacta con $R^* = 1.375 R_s$ vista desde ángulos de inclinación de 0° , 30° , 60° , 90°

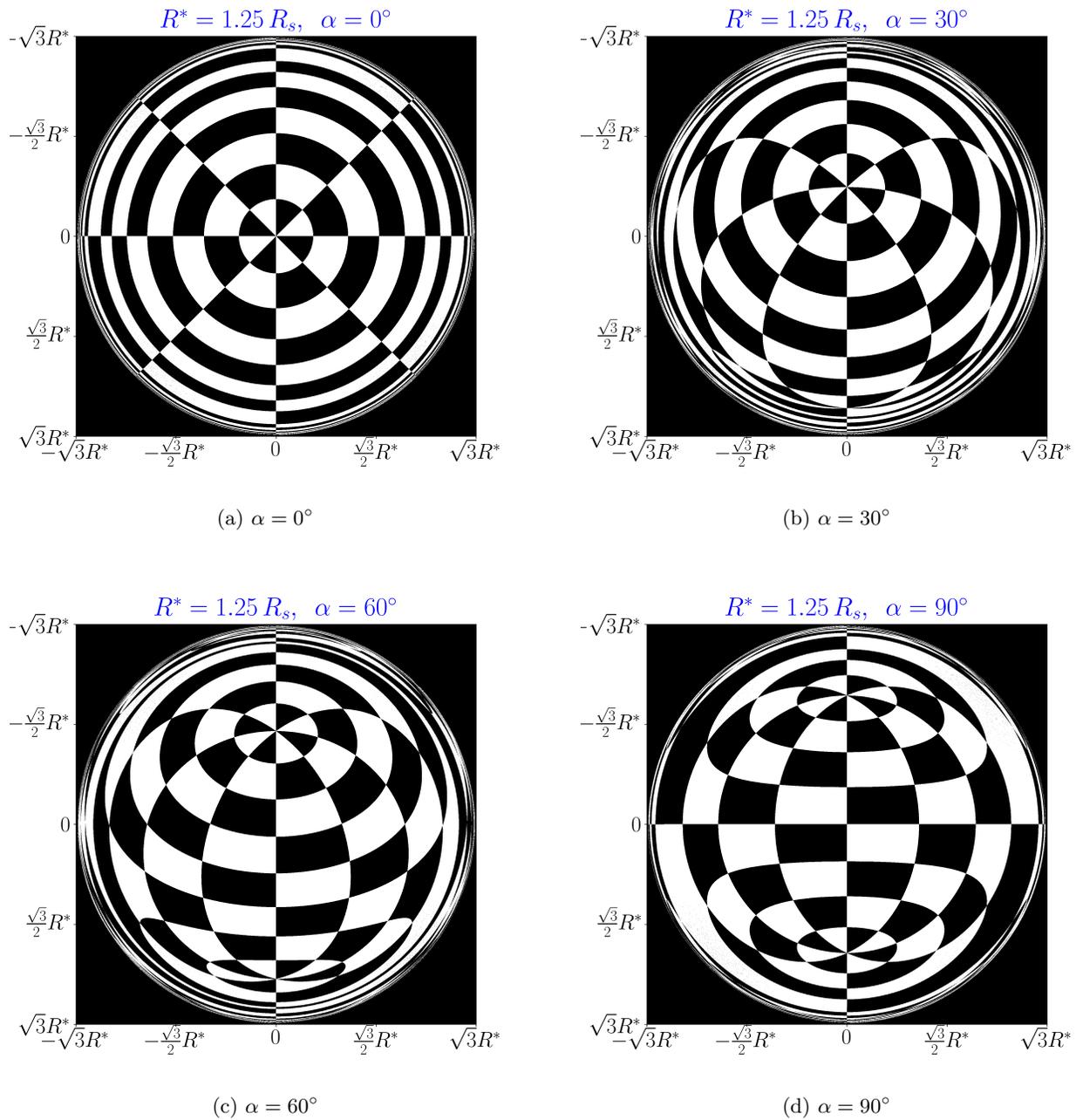


Figura 7.4: Estrella compacta con $R^* = 1.25 R_s$ vista desde ángulos de inclinación de 0° , 30° , 60° , 90°

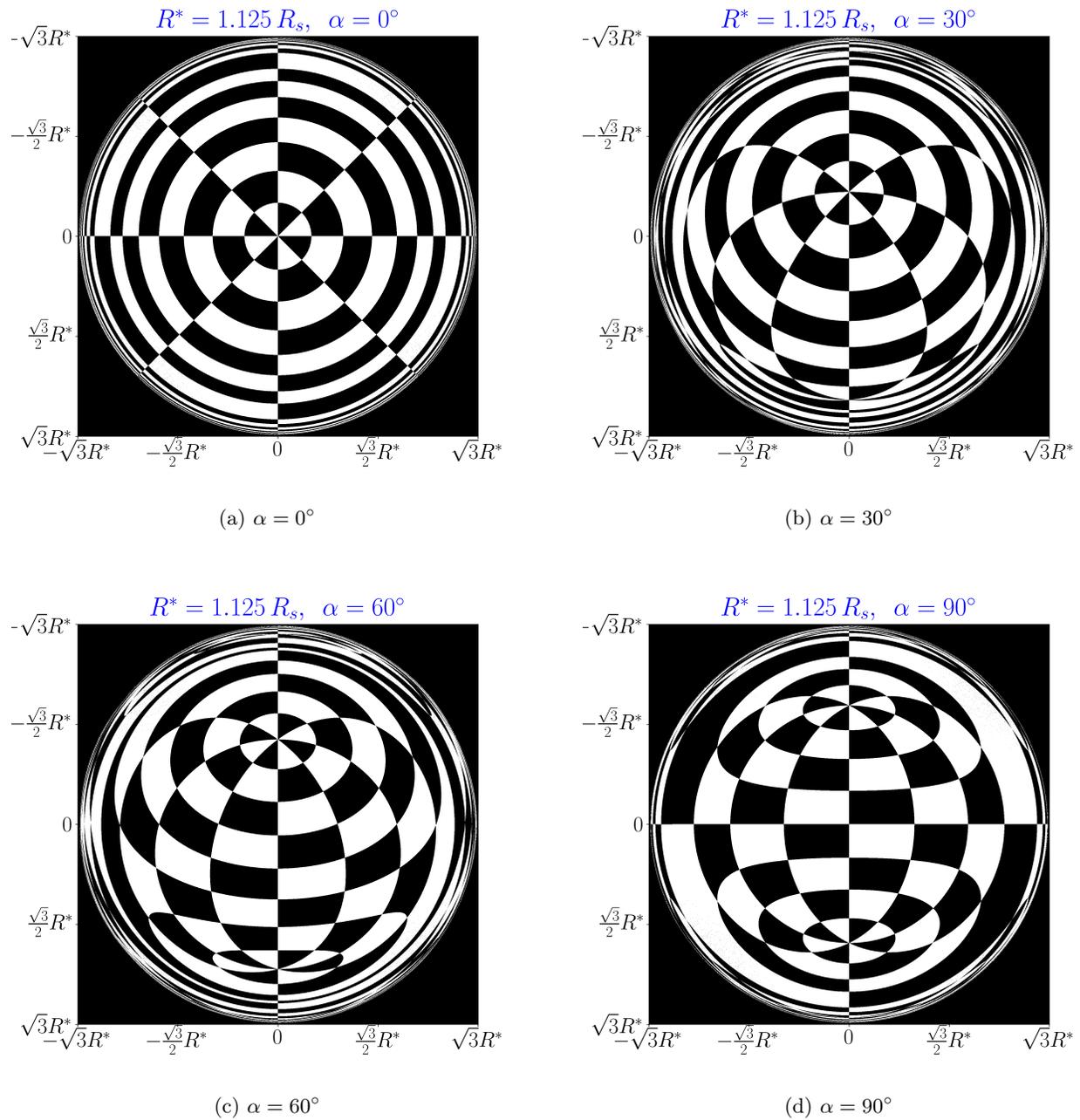


Figura 7.5: Estrella compacta con $R^* = 1.125 R_s$ vista desde ángulos de inclinación de 0° , 30° , 60° , 90°

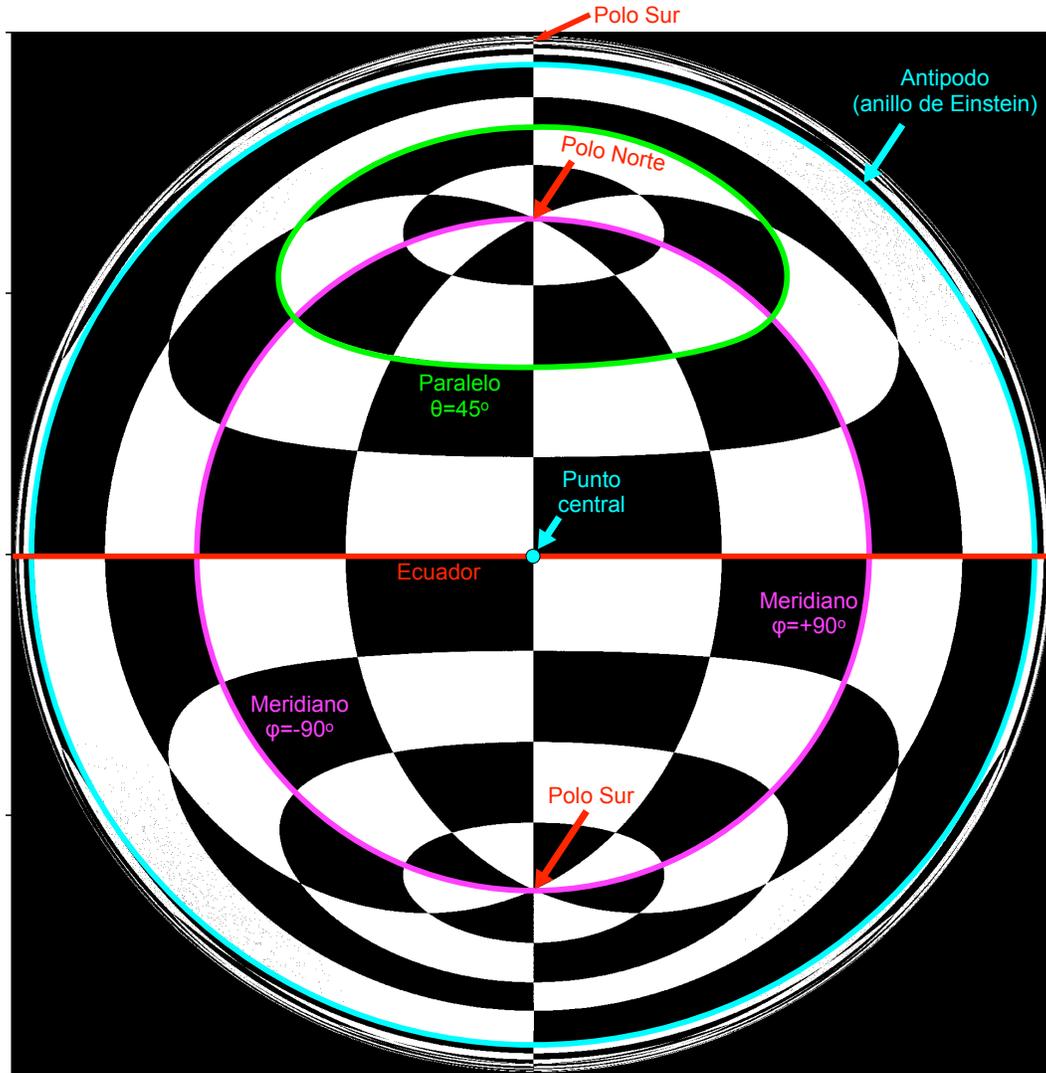


Figura 7.6: Detalles de la imagen con $R = 1.25R_s$ y $\alpha = 90^\circ$: se marcan el punto central y su antípodo que aparece como un anillo de Einstein, los meridianos $\varphi = +90^\circ$ y -90° que serían el borde visible de la estrella en espacio plano, y un paralelo en $\theta = 45^\circ$, así como los polos norte y sur y la segunda imagen del polo sur. Si pudiéramos alcanzar una resolución infinita cada una de estas marcas aparecería un número infinito de veces ya que la estrella es ultracompacta.

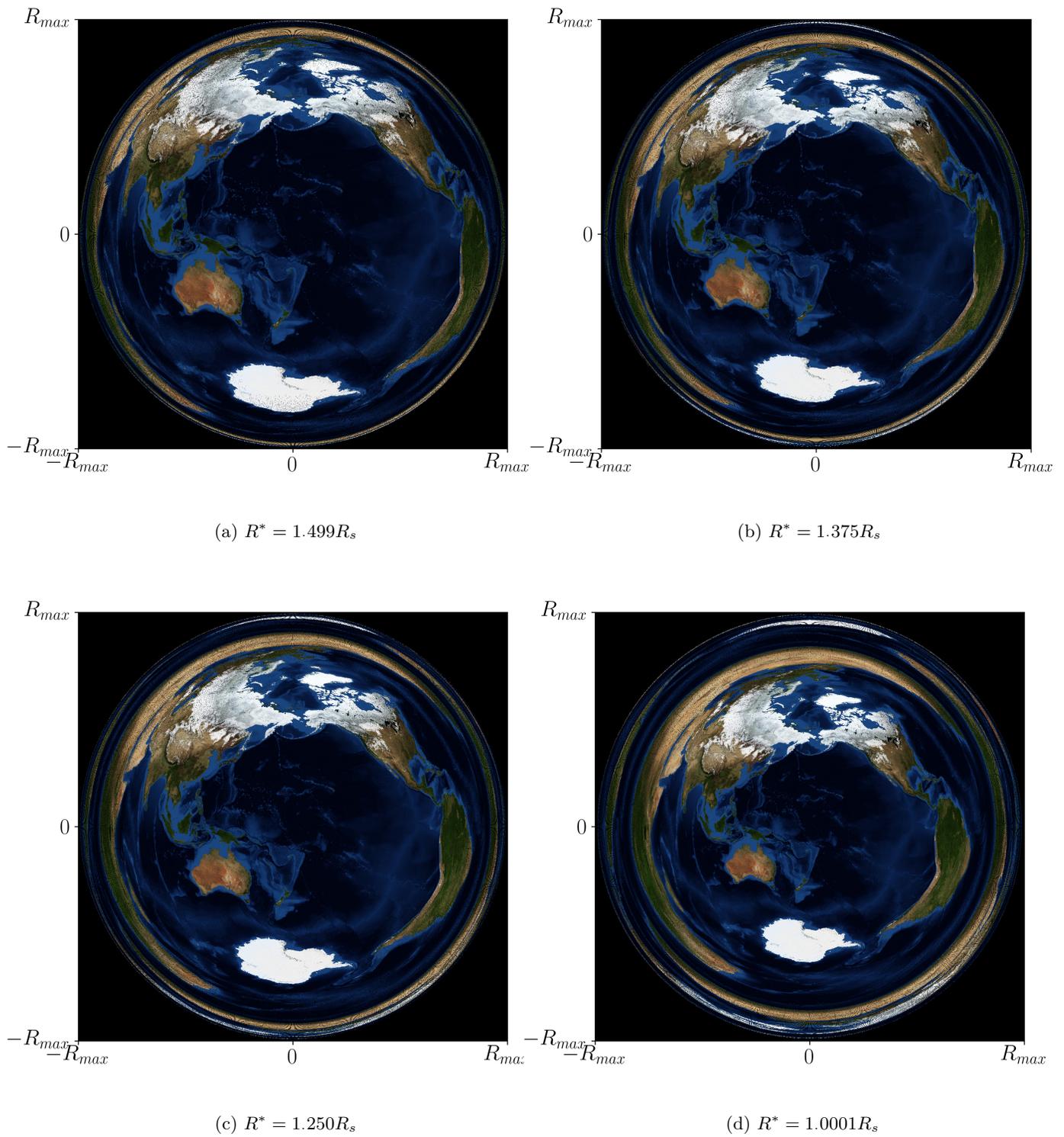


Figura 7.7: Estrella ultracompacta con distintos valores de R^* vista desde la longitud $\beta = 0^\circ$ y la latitud $\alpha = 90^\circ$

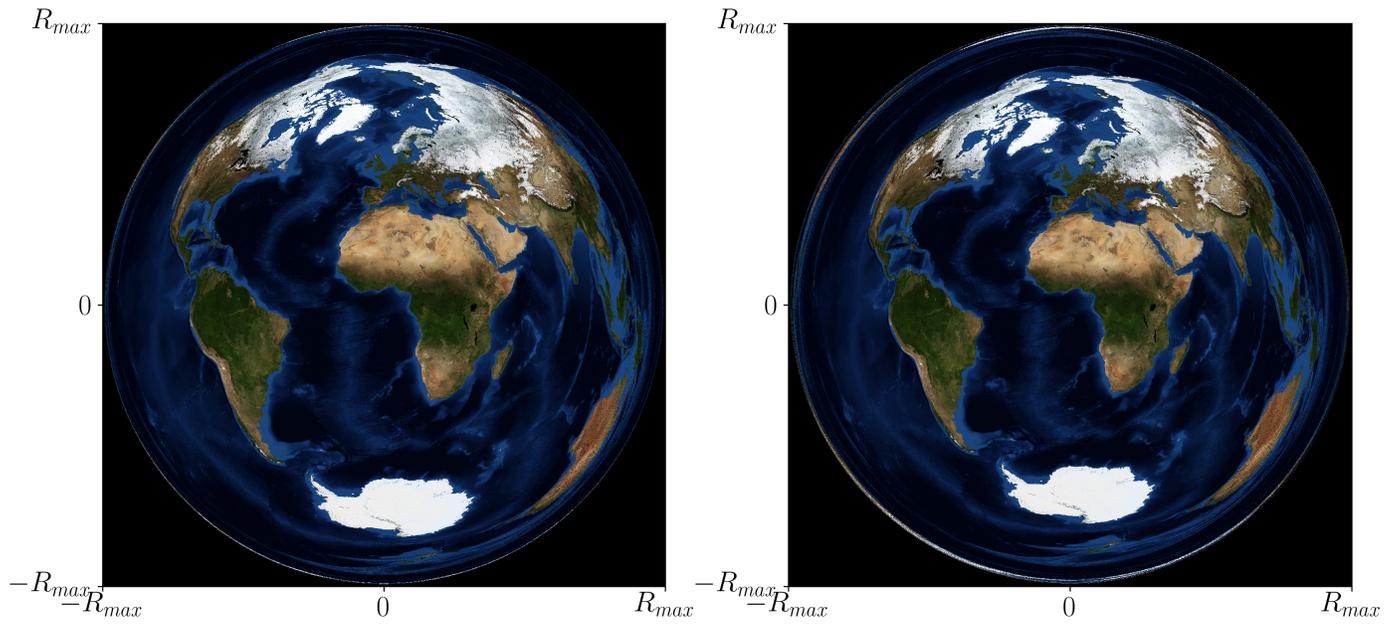
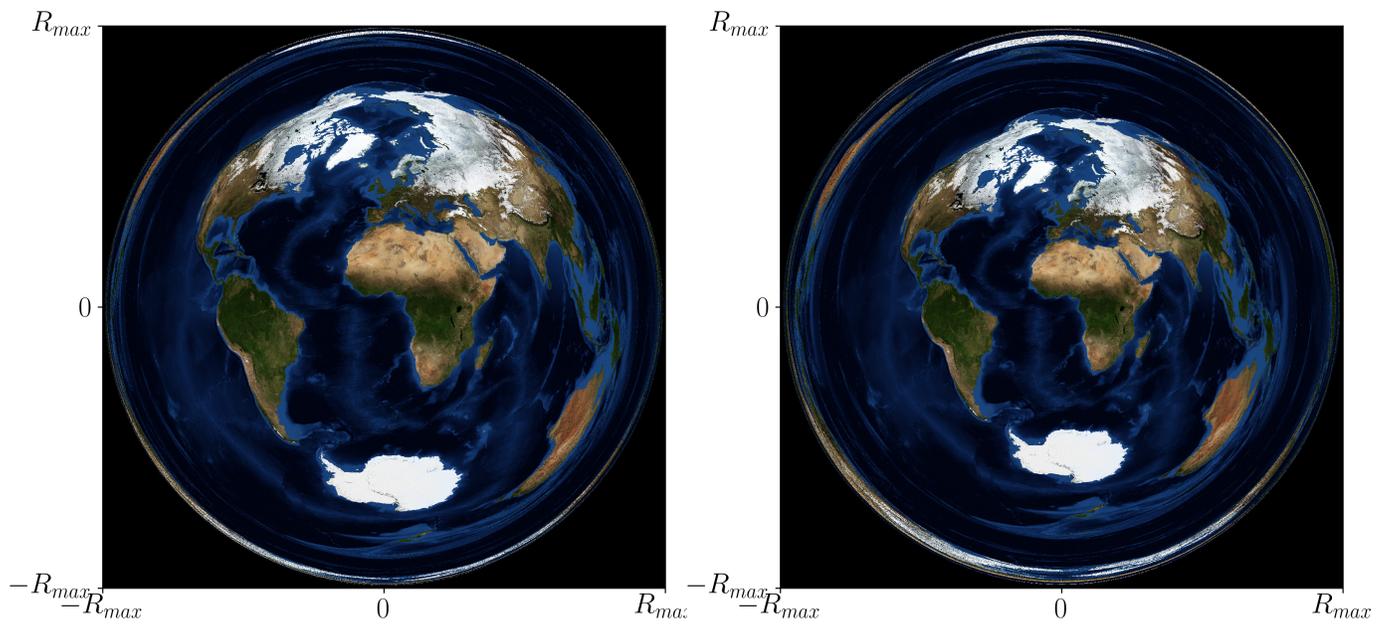
(a) $R^* = 1.499R_s$ (b) $R^* = 1.375R_s$ (c) $R^* = 1.250R_s$ (d) $R^* = 1.0001R_s$

Figura 7.8: Estrella ultracompacta con distintos valores de R^* vista desde la longitud $\beta = 180^\circ$ y la latitud $\alpha = 90^\circ$

7.2. Curvas de Luz

En esta sección final de resultados, se mostrarán las curvas de luz para distintas configuraciones de estrellas de neutrones, manteniendo constante la masa de la estrella y variando así el tamaño de los radios para obtener distintas compacidades o cocientes R^*/R_s . Asimismo, se toman por referencia los valores en $\chi_0 = T_\perp/T_\parallel$ de 0.135, 0.405 y 0.811, tomados de referencia del mapa de temperaturas mostrado en Page (1995).

Ahora es turno de reportar los resultados encontrados para las curvas de luz de diferentes configuraciones posibles en estrellas compactas y ultracompactas. Se fija un valor constante para la masa de las estrellas en $M = 2M_\odot$ y se irá variando el valor del radio R^* . Los otros parámetros a modificar son, el ángulo γ que la magnetización \vec{M} forme con un eje de simetría de la estrella, que sin pérdida de generalidad se asumió como el eje z (ver Capítulo 5 y Anexo C); el cociente de temperaturas polar y ecuatorial χ_0 y finalmente, el ángulo de visión del observador α .

En las Figs. (7.9) y (7.10) se puede ver cómo la amplitud del flujo de fotones crece con el ángulo de la magnetización γ , en donde dos series de curvas de luz para el mismo valor de cociente de temperaturas va variando en amplitud de acuerdo con las compacidades desde $1.125 R_s$ hasta $3.5 R_s$ y las amplitudes más grandes aparecen en el caso en que $\gamma = 90^\circ$, ver Fig. (7.9). En la Fig. (7.11) se muestra un grupo de 3 series de curvas de luz pero ahora para distintos valores del cociente χ_0 , fijando el valor del ángulo de magnetización del dipolo en $\gamma = 60^\circ$. En ella podemos ver que el comportamiento de las curvas de luz modificando ahora el cociente de temperaturas, parece implicar que la amplitud de las curvas también disminuya.

Se puede notar también que las curvas de luz presentan un periodo bien definido de 180° en cada ciclo, ya que sin importar el radio de la estrella, el valor de χ_0 ni tampoco la orientación γ de la magnetización, sigue preservándose la misma fase entre crestas. El motivo para ello viene de la dependencia en el ángulo acimutal ϕ_E en la expresión para $T_s(\theta_E, \phi_E; \gamma)$ en la Ec. C.23 del Anexo C, una vez que se introduce para integrar la Ec. 6.40 para el flujo de fotones. Esa expresión tiene un periodo de 180° en la fase dada por ϕ_E , una vez que se fijan los valores para T_\parallel , θ_E y γ . Este periodo se mantiene a la hora de hacer la integración numérica de la Ec. 6.40.

Aun hay otro comportamiento interesante en ambas series de curvas de luz salta a la vista para el valor de compacidad $R^* = 1.75 R_s$ y alrededor de $R^* = 2.125 R_s$. Para estos valores, parece que la curva se aplanan, es decir, la amplitud de la señal de los fotones que llegan al detector al infinito parece permanecer constante. Dado este fenómeno y que ocurra análogamente para cualquier caso, sin importar los parámetros γ , α , M y χ_0 , nos hace ver que empíricamente este valor de compacidad supone que sin importar el ángulo acimutal β de visión, se obtienen el mismo número de fotones en el detector, sin importar el hemisferio donde se hayan emitido o ninguna posición privilegiada del observador.

Por último, puede notarse en la Fig. (7.12) cómo la amplitud de las curvas va aplanándose a medida que la estrella ultracompacta se acercara más y más al horizonte de eventos dado por el radio de Schwarzschild, resultado esperado del hecho de que el objeto ya no logra emitir fotones fuera de su esfera de fotones para ese radio.

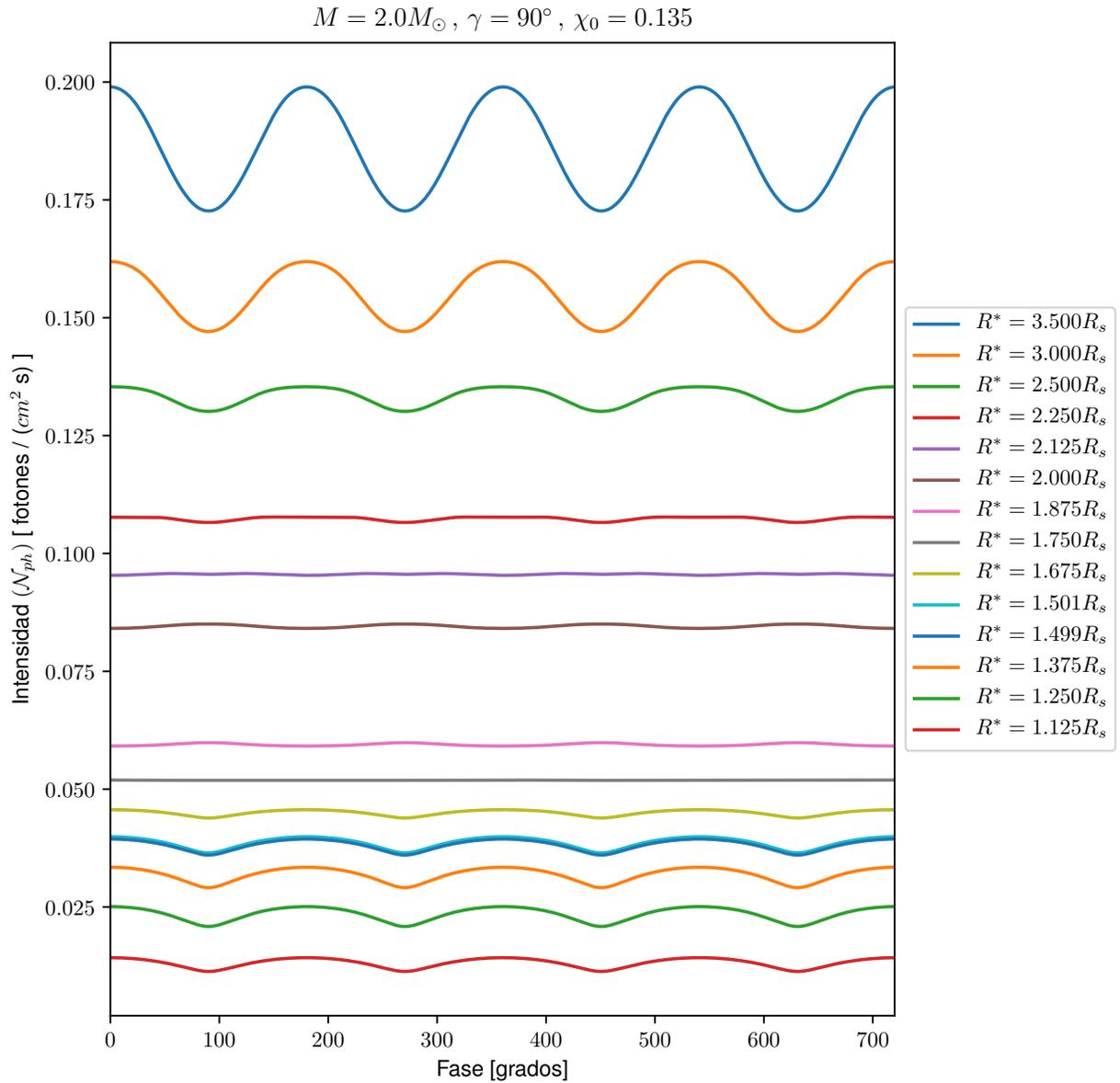


Figura 7.9: Gráfica mostrando curvas de luz para distintos radios en estrellas de masa $M = 2.0M_{\odot}$, para el valor de temperaturas dado por $\chi_0 = 0,135$. El observador está en el plano ecuatorial, i.e., $\alpha = 90^{\circ}$ y el dipolo magnético está orientado en $\gamma = 90^{\circ}$. Resultados para radios todavía mas pequeños, cerca de R_s , se muestran en la Figura 7.12.

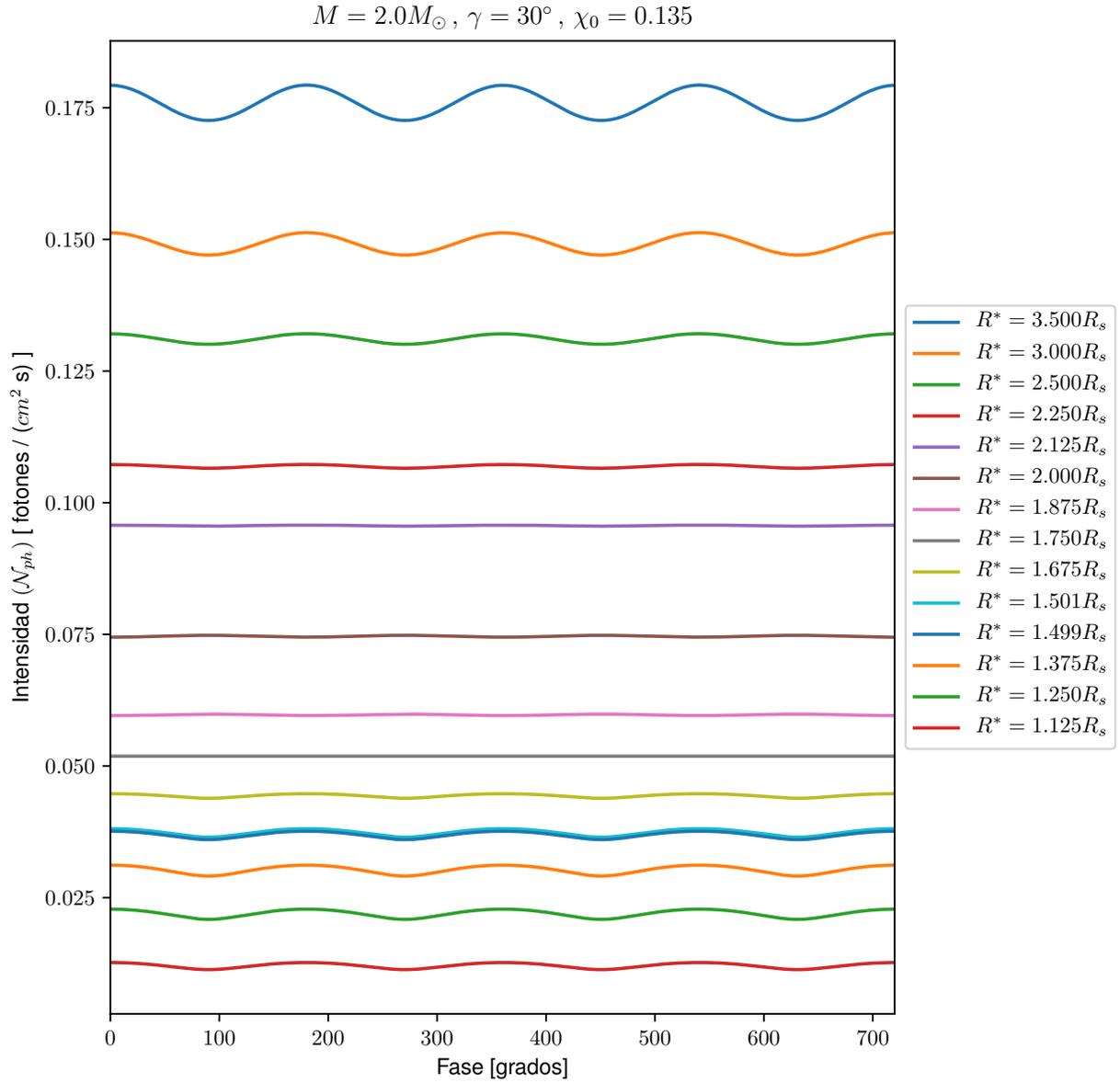


Figura 7.10: Gráfica mostrando curvas de luz para distintos radios en estrellas de masa $M = 2,0M_{\odot}$, para el valor de temperaturas dado por $\chi_0 = 0,135$. El observador está en el plano ecuatorial, i.e., $\alpha = 90^{\circ}$ y el dipolo magnético está orientado en $\gamma = 30^{\circ}$. Resultados para radios todavía mas pequeños, cerca de R_s , se muestran en la Figura 7.12.

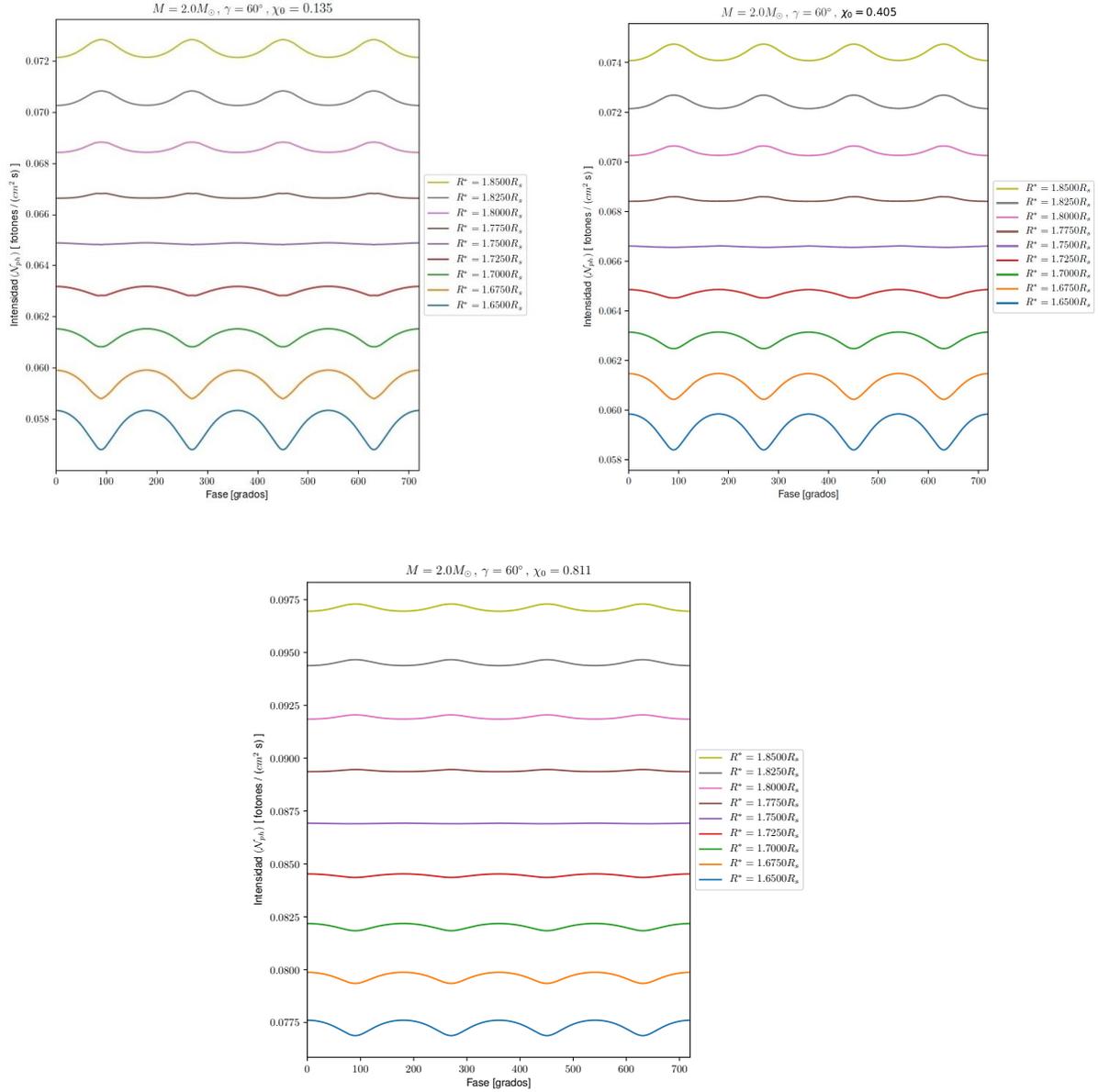


Figura 7.11: Curvas de luz para estrellas compactas con masa $M = 2,0M_{\odot}$. El observador está en el plano ecuatorial, i.e., $\alpha = 90^\circ$ y el dipolo magnético está orientado en $\gamma = 60^\circ$. Se muestran tres figuras que representan las curvas para distintos valores de T_{\parallel} y T_{\perp} , mostrados en los tres cocientes $\chi_0 = T_{\perp}/T_{\parallel} = 0.135, 0.405, 0.811$. Las curvas de luz mostradas son cerca del valor crítico $R = 1,75R_s$, que se ve en la figura pasada. Se puede mirar que a medida que el gradiente de temperaturas entre los polos de la estrella y su ecuador son menores, es decir, a medida que χ_0 crece, las curvas de luz se van aplanando. Note que la escala vertical es mas pequeña que en las dos figuras anteriores.

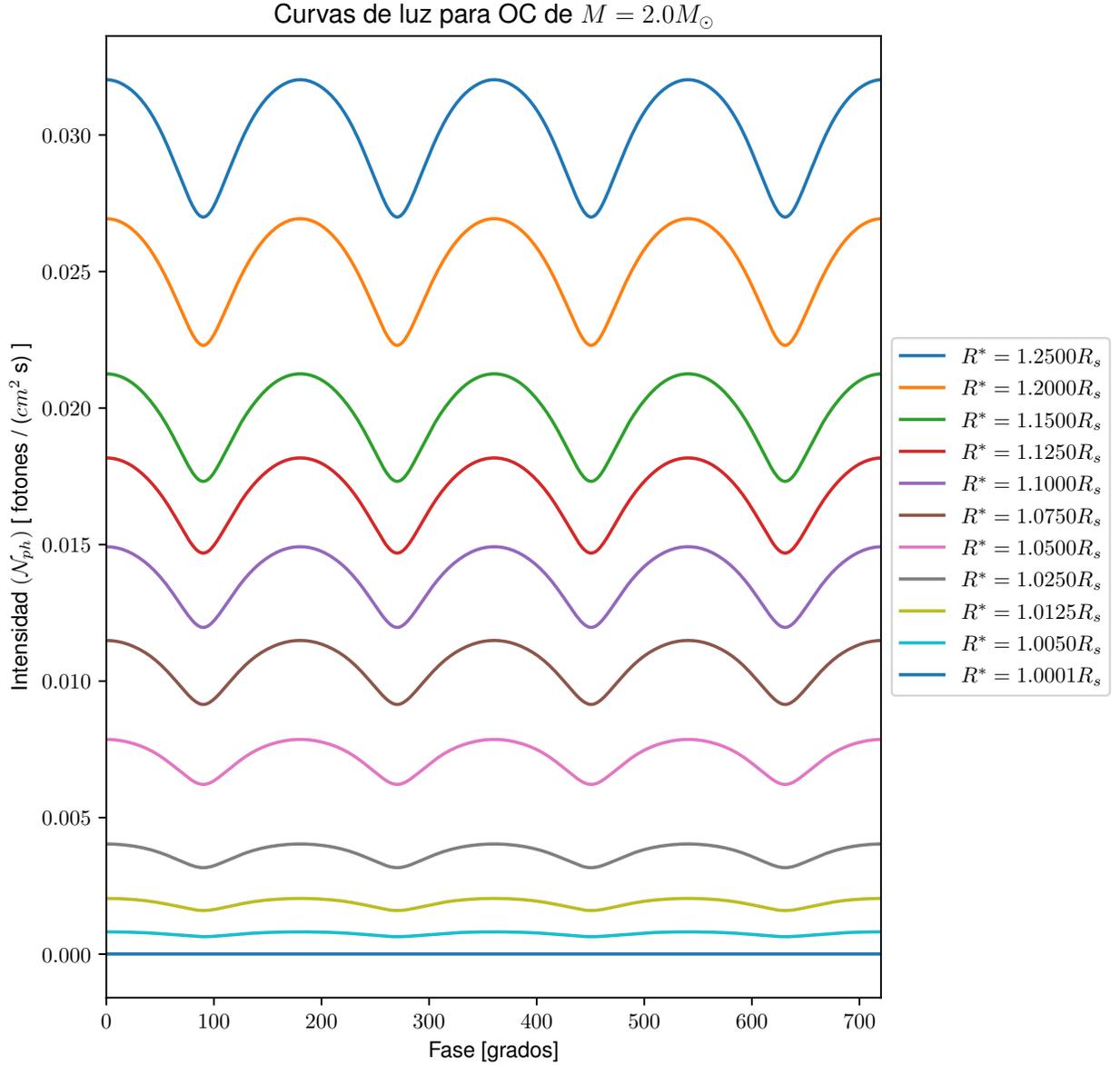


Figura 7.12: Curvas de luz para objetos ultracompactos con masa $M = 2,0M_{\odot}$ cerca del radio de Schwarzschild. El observador está en el plano ecuatorial, i.e., $\alpha = 90^{\circ}$ y el dipolo magnético está orientado en $\gamma = 90^{\circ}$. Los cambios de temperatura entre los polos y el ecuador se ven reflejados por el cociente $\chi_0 = T_{\perp}/T_{\parallel} = 0,405$. Se puede notar cómo la amplitud de las curvas se va aplanando a medida que uno se acerca a la superficie del horizonte de eventos de Schwarzschild, en donde ya no se tiene emisión de fotones. Notar además que la escala vertical es mucho mas pequeña que en las tres figuras anteriores.

Capítulo 8

Conclusiones

En el marco de este trabajo, la deflexión gravitacional de la luz es un fenómeno que resulta de la curvatura del espacio-tiempo alrededor de los objetos emisores de luz. Se pudo ver cómo en efecto, la presencia de un objeto compacto como lo son las estrellas de neutrones o estrellas ultracompactas, curvan o deflecan las trayectorias de fotones que emergen desde su superficie, y que, fijando la configuración inicial del radio y la masa de la estrella, cada una de esas trayectorias se forma dependiendo del ángulo que forme el fotón en su punto de emisión con la normal a la estrella. Los fotones recorren sus respectivas curvas geodésicas y en el caso en el que logramos observarlos en la Tierra, es porque se escapan de la estrella hacia cualquier punto lejano o hacia el infinito, venciendo el pozo gravitacional ejercido por ella.

En el caso que tengamos una configuración tal que $R^* > 1.5R_s$ (donde R^* es el radio de la estrella y R_s su radio de Schwarzschild, ver Ec. (4.13)), cualquier fotón que llegue al infinito y que haya sido emitido hacia el exterior desde su superficie, escapó del mencionado pozo gravitacional. Para el caso de las estrellas ultracompactas, con $R^* < 1.5R_s$, nos llegarán aquellos fotones que sean emitidos siempre y cuando su ángulo de salida (e intrínsecamente, energía específica y momento angular específico), se encuentre dentro del umbral del cono gris de la Fig. (5.6) de ángulo δ^{\max} , Ec. (5.29) y Fig. (5.4). Todo fotón emitido con un ángulo inicial δ tal que queda fuera de esa región delimitada por el cono (i.e., con $x > x^{\max}$), no avanza más allá de la esfera de fotones y es así capturado por la intensidad del campo gravitacional cercano de la estrella. El espacio-tiempo de una estrella ultracompacta impide que estos fotones puedan escaparse de la región interior a $r = R_c = 1.5R_s$. Como consecuencia de esta deflexión de las trayectorias de fotones, vista por un observador “al infinito” la estrella tiene un radio aparente R_∞ más grande que R^* , dado por la ecuación Ec. (5.26) donde hemos generalizado la fórmula estandar al caso de estrellas ultracompactas. Esta dependencia de R_∞ con el tamaño de la estrella, i.e., R_s , se ilustra en la Fig. (5.3).

Otro efecto conocido de la curvatura del espacio-tiempo es la alteración de la luminosidad térmica L de la estrella. Los fotones pierden energía al escaparse al infinito, llegando con una energía E_∞ , ver Ec. (6.30). Similarmente los fotones emitidos durante un tiempo local $d\tau$ se reciben durante un tiempo dt mayor, ver Ec. (6.29). Con estos dos efectos la luminosidad observada al infinito es reducida por dos factores de “corrimiento al rojo”, ver Ec. (6.32). En el caso de una estrella ultracompacta no todos los fotones emitidos en la superficie se puede escapar y luminosidad L_∞ es todavía mas reducida al punto de desaparecer cuando $R^* = R_s$, como mostramos en la Ec. (6.33).

Una vez que los fotones provenientes de una estrella llegan a depositarse en su imagen al infinito, podemos asociar cada punto sobre el plano del detector (ρ_D, φ_D) con algún punto emitido desde la superficie de la estrella (θ_E, ϕ_E). A medida que la estrella va haciéndose cada vez más compacta, el proceso de identificar los pixeles en nuestro detector con los puntos sobre la estrella ya deja de ser una relación uno a uno, puesto que al hacer la transformación que lleva desde las coordenadas cartesianas en el detector a las coordenadas esféricas

de la estrella, trayectoria por trayectoria, se pueden tener distintos valores idénticos para el par (θ_E, ϕ_E) que vienen asociados diferentes curvas, determinadas a su vez por diferentes ángulos de emisión δ , y por lo tanto terminan en diferentes puntos en el detector. Esto ocurre porque fijándonos en un punto sobre la estrella, el fotón puede dar varias vueltas alrededor del objeto, antes de escaparse de la región cercana a su superficie. Si el radio de la estrella, R^* , es superior a R_c pero cercano a ese valor, el número máximo de vueltas posible es finito mientras cuando $R^* < R_c$ el número de vueltas que puede dar un fotón antes de escaparse puede tomar cualquier valor (entero): el ángulo máximo de deflexión $\Delta\phi$ (ver Fig. (5.7)) diverge. Esta visión múltiple de un mismo punto sobre la superficie de la estrella se describe en la Fig. (7.6) y se ilustra en la secuencia de imágenes de Fig. (7.2) a (7.5) así como Fig. (7.7) y (7.8).

Los resultados finales de este trabajo consisten en la descripción de las curvas de luz resultantes de una distribución no uniforme de temperatura en la superficie de la estrella, como se sabe resulta de la presencia de un campo magnético intenso, ver la sección 6.4, y la rotación de la misma. En las Fig. (7.9) a (7.12) extendimos los resultados de Page (1995) al caso de una estrella ultracompacta. El efecto general de la curvatura del espacio tiempo que implica que el observador al infinito alcance a ver más de la mitad de la estrella también resulta en una disminución de la amplitud de las curvas de luz, como ya era bien sabido. Volvimos a notar dos radios críticos en los cuales las curvas de luz están totalmente aplanadas (este caso crítico ocurre cuando a nuestro detector llegan de manera asombrosa únicamente los fotones de la parte posterior o trasera de la estrella). También podemos observar a radios intermedios que los picos o las crestas del conteo del número de fotones están desfasadas. Para estrellas ultracompactas, notamos un aplanamiento cada vez mas pronunciado de las curvas de luz así como un decrecimiento de la intensidad observada, de acuerdo con la reducción de la luminosidad L_∞ . No hemos notado ningún efecto muy dramático cuando la estrella es ultracompacta, solamente el efecto esperado de la progresiva desaparición de la estrella cuando $R^* \rightarrow R_s$ como ilustrado en la Fig. (7.12). Sin embargo se nota claramente una evolución progresiva de la forma de la curvas de luz. A radios grandes son parecidas a sinusoidales mientras cuando el radio está entre los dos radios críticos (en los cuales las curvas de luz se vuelven planas) los picos son mas estrechos que los valles y cuando la estrella es ultracompacta lo contrario ocurre: los picos son muy anchos y los valles estrechos como se ve claramente en la Fig. (7.11).

Apéndice A

Solución completa al problema de Schwarzschild para partículas nulas.

El problema de Schwarzschild es el de una partícula moviéndose en una trayectoria libre afuera del radio de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$ de una distribución de masa M con simetría esférica, como puede ser en el contexto de la Astrofísica para una estrella esférica o un agujero negro esférico. Este problema viene descrito por la Lagrangiana de la Ec. 5.4. En esta sección se presentará la solución general para partículas nulas, *i.e.* desplazándose sobre el cono de luz.

A.1. Integración analítica de la ecuación de movimiento para la variable coordenada θ en el problema de Schwarzschild.

Del la Ec. (5.14), que se ubica en el Capítulo 5, se tiene que:

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{\ell_z^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}. \quad (\text{A.1})$$

Hay una manera ingeniosa para pasar esta ecuación diferencial a una de primer orden. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $p_\theta = r^2 \dot{\theta}$, se tiene que:

$$p_\theta \frac{dp_\theta}{d\lambda} = \frac{\ell_z^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \dot{\theta}. \quad (\text{A.2})$$

Recordando que $\dot{\theta} = d\theta/d\lambda$, hágase ahora la integración de ambos lados de la ecuación, para conseguir:

$$\frac{1}{2} p_\theta^2 = -\frac{\ell_z^2}{2 \sin^2 \theta} + C. \quad (\text{A.3})$$

Véase que necesariamente se solicita que $C > 0$ para que la ecuación anterior sea definida positiva y además, $C \geq \ell_z^2/2 \sin^2 \theta$. Elíjase pues ahora que la constante se pueda reescribir como $C = h^2/2$, por lo cual:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{r^2} \sqrt{h^2 - \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.4})$$

$$h^2 = p_\theta^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta}. \quad (\text{A.5})$$

La cantidad h^2 corresponde al módulo al cuadrado del momento angular orbital medido por partícula, por unidad de masa, expresado en coordenadas esféricas. Esta misma cantidad corresponde en coordenadas cartesianas a $h^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2$, el módulo al cuadrado del momento angular orbital específico, por unidad de masa, en las variables x, y, z .

Para la solución general $\theta = \pi/2$, se tiene que $p_\theta = 0$ y $\ell_z = h$, como se espera de la simetría de la trayectoria yaciendo en un plano: que el momento angular orbital total apunte en la dirección de z .

A.2. Método de Hamilton-Jacobi para el problema de Schwarzschild.

La Hamiltoniana del problema de Schwarzschild se puede escribir como:

$$\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu; \lambda) = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}\left(x^\mu, p_\mu \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right); \lambda\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{p_t^2}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (\text{A.7})$$

para $r > R_s$, *i.e.* para una partícula libre afuera del horizonte de eventos en R_s y con λ un parámetro arbitrario sobre la curva de la trayectoria de la partícula. Como $d\mathcal{H}/d\lambda = 0$, entonces se tiene $\mathcal{H} = H = \text{const}$. Procediendo como indica el método de Hamilton-Jacobi, se realiza una transformación canónica sobre las variables del sistema (x^μ, p_μ) tales que la Hamiltoniana \mathcal{H} pasa a ser $\mathcal{K} = 0$, bajo la ecuación de Hamilton-Jacobi que relaciona ambas junto con la función generadora S ahora en las variables (x^μ, P_μ) , tal que:

$$\mathcal{H}\left(x^\mu, \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right); \lambda\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$S(x^\mu, p_\mu; \lambda) = -\lambda H + x^\mu p_\mu, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{dP_\mu}{d\lambda} = 0 \quad ; \quad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.10})$$

Por la forma en como vienen escritas las ecuaciones y las cantidades, $P_t = p_t = e$ y $P_\phi = p_\phi = \ell_z$, para las constantes de movimiento halladas en las Ecs. (5.7) y (5.8).

Las expresiones anteriores para la función generadora S pueden escribirse pues como:

$$S(x^\mu, P_\mu; \lambda) = -\lambda H - e t + \ell_z \phi + W(r, \theta). \quad (\text{A.11})$$

Y la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi se ve entonces como:

$$2H = -\frac{e^2}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\ell_z^2}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (\text{A.12})$$

Reescribiéndola de una manera más conveniente:

$$2Hr^2 + \frac{e^2 r^2}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} - r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta} = k^2, \quad (\text{A.13})$$

donde k es una constante real tal que $k^2 \geq 0$ es nuestra constante de separación para resolver para W . Esta aparece como una cuarta constante de integración para el sistema, de donde se observa entonces que el

sistema ya es resoluble para sus cuatro coordenadas. Así que como por (A.10), $p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = r^2 \dot{\theta}$:

$$k^2 = r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2 \theta}, \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - \ell_z^2}. \quad (\text{A.15})$$

Recapitulando, para t y ϕ ya se tiene:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\ell_z}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (\text{A.17})$$

Ahora bien, siendo λ el parámetro original, siempre podemos reparametrizarlo de manera afín con una transformación lineal $\lambda' = \alpha\lambda + \beta$, donde α y β son constantes. Definiendo a $\xi = \ell_z \lambda / R_s$ y $q = k / \ell_z$, las ecuaciones de arriba son:

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{R_s}{bc \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{R_s}{r^2 \sin \theta} \sqrt{q^2 \sin^2 \theta - 1}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{R_s}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (\text{A.20})$$

donde $b = \ell_z c / e$. Para la solución $\theta = \pi/2$, se ve que como $k = \ell_z$, entonces $d\theta/d\xi$ tiene solución para toda ξ real, puesto que así $q = 1$ y la raíz cuadrada en la ecuación se vuelve cero, donde como ya se sabe la derivada de θ se anula para todo valor de θ por ser una solución constante. Se pueden también rotar los ejes y la solución en θ siempre puede mantenerse en un plano por la simetría esférica en el problema.

Con lo cual, finalmente:

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{R_s}{bc \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{R_s}{r^2}. \quad (\text{A.23})$$

Y de la solución en el plano ecuatorial se tiene que $\partial W / \partial \theta = 0$, además de que para cualquier trayectoria geodésica que recorra el cono de luz, se tiene que $\mathcal{H}(\lambda) = H = 0$. Así que por último:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{R_s}{r}}, \quad (\text{A.24})$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} \left[\frac{e^2}{c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} - \frac{\ell_z^2}{r^2} \right], \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{r}^2 = \frac{e^2}{c^2} - \frac{\ell_z^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = \frac{\ell_z^2}{R_s^2} \left[\frac{R_s^2}{b^2} - \frac{R_s^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \right], \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{dr}{d\xi} = \sqrt{\frac{R_s^2}{b^2} - \frac{R_s^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}. \quad (\text{A.27})$$

Apéndice B

Geodésicas en un espacio-tiempo con simetría esférica

B.1. Ecuaciones de movimiento para la métrica de una distribución con simetría esférica.

Se pretende ahora encontrar las ecuaciones y posteriormente las soluciones para las ecuaciones de las geodésicas en el espacio-tiempo que se encuentra entre el radio $r = R^*$ y el radio de Schwarzschild ubicado en el interior de la estrella. Se va a considerar por ahora solamente la ecuación de estado (4.56).

La Lagrangiana del problema para una partícula libre recorriendo la trayectoria de una geodésica parametrizada de manera afín por un parámetro λ en un sistema coordenado $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ con simetría esférica se puede escribir como:

$$\mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}; \lambda\right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{1}{2} \left[-e^{2\Phi(r)} c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] \quad (\text{B.2})$$

Las cantidades conservadas del problema sobre las curvas geodésicas serán análogamente:

$$p_t = -e^{2\Phi(r)} c^2 \dot{t} = \text{constante} \equiv -\epsilon, \quad (\text{B.3})$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{constante} \equiv l_z, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{H}(\lambda) = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \text{constante}, \text{ que puede reescribirse tal que } k \equiv 2\mathcal{H}; \quad (\text{B.5})$$

para el parámetro afín λ arbitrario. Por lo cual, se hallaría:

$$\dot{t} = \frac{\epsilon}{c^2} e^{-2\Phi(r)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\phi} = \frac{l_z}{r^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right) \left(\frac{l_z^2}{r^2} + k\right) = \frac{\epsilon^2}{c^2} e^{-2\Phi(r)} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right) = \mathcal{E}^2(r); \quad (\text{B.8})$$

válidas para la región $R_s < r < R^*$. $\mathcal{E}^2(r)$ es una función de la coordenada radial r que depende del cuadrado de una cantidad conservada, ϵ^2 . En el caso de Schwarzschild, $\mathcal{E}^2(r) = \epsilon^2/c^2$.

Ahora, vamos a reescribir las ecuaciones de movimiento ante una reparametrización afín $\lambda' = A\lambda$, con $A \neq 0$, según convenga. Esta nueva forma será conveniente para los dos tipos de casos de geodésicas: temporales y nulas (i.e. partículas masivas y nulas).

Primero tratemos el caso de partículas masivas de masa m_0 . En ese caso, se puede elegir para las curvas de las soluciones al parámetro afín λ como el tiempo propio τ y considerar que para ellas, las cantidades conservadas son la energía específica y el momento angular orbital específico en el eje z , es decir, $\epsilon = E/m_0$, $l_z = L_z/m_0$ (ver Ecs. 5.12, 5.13). Bajo una reparametrización afín dada por un nuevo parámetro $\sigma = \tau/m_0 c$, se llega a las ecuaciones:

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\epsilon}{c} e^{-2\Phi(r)}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{L_z c}{r^2}, \quad (\text{B.10})$$

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right) \left(\frac{L_z^2 c^2}{r^2} - m_0^2 c^4\right) = E^2 e^{-2\Phi(r)} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right). \quad (\text{B.11})$$

En cambio, para neutrinos¹ o partículas sin masa como fotones, se usa el tratamiento para geodésicas de partículas nulas. Recurriendo al parámetro de impacto b de la Ec. (5.1) y a una reparametrización afín dada por otro nuevo parámetro $\xi = l_z \lambda / R_s$, se pueden reescribir las ecuaciones de movimiento para cualquier solución esféricamente simétrica como:

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{R_s}{bc} e^{-2\Phi(r)}, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{R_s}{r^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \frac{R_s^2}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right) = \frac{R_s^2 e^{-2\Phi(r)}}{b^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right); \quad (\text{B.14})$$

válidas para el interior de la estrella $R^* > r > R_s$ y en donde $m(r)$ viene dada por la integración de la Ec. (4.32) para este dominio de r .

En general, se tienen pues ecuaciones de movimiento para la coordenada r de la forma:

$$r'^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{E}^2(r)}{A^2}. \quad (\text{B.15})$$

La derivada respecto a un parámetro afín λ' viene representada por la notación $r' \equiv dr/d\lambda'$.

Escribir de esta forma la ecuación de movimiento recuerda al tratamiento clásico de la dinámica de una partícula bajo la influencia de un potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$. Sin embargo, en este caso no hay una relación entre la función $\Phi(r)$ que en el límite no relativista tiende al potencial newtoniano y $V_{\text{eff}}(r)$, a diferencia de su contraparte en el caso clásico y el potencial gravitacional. Las unidades de $V_{\text{eff}}(r)$ van a depender enteramente de la elección del parámetro afín. En el caso seguido en este trabajo y solamente para partículas nulas, se usa el parámetro $\xi = l_z \lambda / R_s$ y así ambas funciones son adimensionales.

B.1.1. Caso 1. Ecuación de estado con densidad constante (Buchdahl): $\varepsilon_* = \text{cte}$.

Para el caso revisado en el Capítulo 5, la ecuación de movimiento en r tomará la forma:

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \frac{R_s^2}{r^2} - \frac{R_s^3}{(R^*)^3} = \frac{R_s^2}{b^2} e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{r^2/R_s^2}{(R^*)^3/R_s^3}\right). \quad (\text{B.16})$$

¹Los neutrinos tienen una masa sumamente pequeña por lo cual pueden aproximarse también como partículas nulas. Sin embargo, es importante recordar que ellos sí tienen masa, contrario a los fotones.

para el interior de la estrella. Mientras tanto, de la Ec. (4.33), la ecuación a resolver para la función $\Phi(r/R_s)$ se verá como:

$$\frac{d\Phi}{d(r/R_s)} = -\frac{1}{1 - \frac{r^2/R_s^2}{(R^*)^3/R_s^3}} \frac{r/R_s}{(R^*)^3/R_s^3} \left(1 + \frac{3 \frac{R^*}{R_s} \sqrt{\frac{R^*}{R_s} - 1}}{\sqrt{\frac{(R^*)^3}{R_s^3} - \frac{r^2}{R_s^2} + 3 \frac{R^*}{R_s} \sqrt{\frac{R^*}{R_s} - 1}}} \right), \quad (\text{B.17})$$

la cual también es una ecuación diferencial adimensional.

De esta manera, se determina que el potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ toma la forma:

$$V_{\text{eff}}(r/R_s) = \frac{1}{(r/R_s)^2} - \frac{1}{(R^*/R_s)^3}, \quad (\text{B.18})$$

$$V(x_s) = \frac{1}{x_s^2} - \frac{1}{a^3}. \quad (\text{B.19})$$

y tras integrar la ecuación para Φ se llega a que:

$$\Phi(x_s) = \ln \left[3a\sqrt{a-1} - \sqrt{a^3 - x_s^2} \right] + C_1, \quad (\text{B.20})$$

donde se reescribió que $x_s = r/R_s$ y $a = R^*/R_s$.

Se debe considerar que con la condición a la frontera en $x = a$ de que la estrella se una a la métrica de Schwarzschild, se tiene que: $\Phi(a) = \ln \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$. Así, finalmente se consigue:

$$\Phi(x_s) = \ln \left[\frac{3}{2a} \sqrt{1 - \frac{1}{a}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{x_s^2}{a^3}} \right]. \quad (\text{B.21})$$

B.1.2. Caso 2. Ecuación de estado maximalmente compacta: $p = (\varepsilon - \varepsilon_c)\theta(\varepsilon - \varepsilon_c)$.

Para este caso, se tiene que $\frac{R_s}{r} = \frac{1}{r/R_s} = \frac{2\mathcal{Y}_c}{x}$ (ver Secc. (4.6)). Por lo tanto:

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{4\mathcal{Y}_c^2}{x^2} \left(1 - \frac{2y}{x} \right), \quad \text{o bien,} \quad (\text{B.22})$$

$$V_{\text{eff}}(x_s) = \frac{1}{(r/R_s)^2} \left(1 - \frac{y/\mathcal{Y}_c}{x_s} \right); \quad (\text{B.23})$$

para el interior de la estrella maximalmente compacta, i.e. $1 < r/R_s \lesssim 1.412$ y donde $\mathcal{Y}_c \approx 0.08513$ (Lattimer, 2012).

B.1.3. Caso 3. Ecuación de estado Tolman-VII

Se tiene además la ecuación de estado VII de Tolman (Tolman, 1939), cuyo efecto puede estudiarse en función de la expresión de la densidad de la estrella reescrita por Lattimer & Prakash (2001):

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_c \left[1 - \left(\frac{r}{R^*} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.24})$$

Con lo cual,

$$V_{\text{eff}}(r/R_s) = \frac{1}{(r/R_s)^2} \left[1 - \frac{8\pi G\varepsilon_c}{c^4} r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{(R^*)^2} \right) \right] \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{1}{(r/R_s)^2} \left[1 - \frac{15}{2} \frac{(r/R_s)^2}{(R^*/R_s)^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{(r/R_s)^2}{5(R^*/R_s)^2} \right) \right]. \quad (\text{B.26})$$

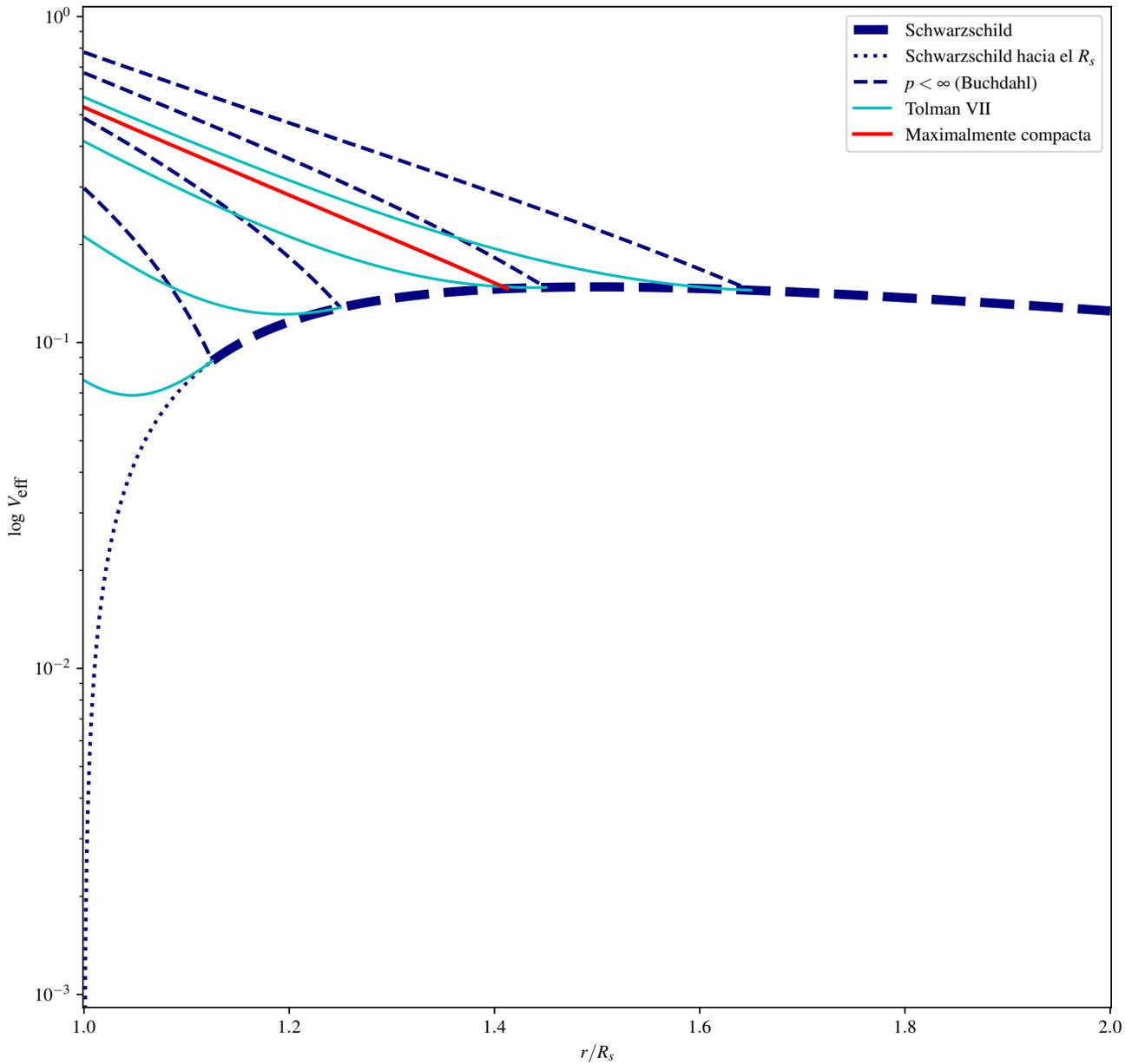


Figura B.1: Se grafica el potencial efectivo V_{eff} de las ecuaciones de movimiento de partículas nulas para distintas soluciones de simetría esférica. Se incluyen los modelos interiores de presión finita en el límite de Buchdahl, la solución de Tolman-VII y la ecuación de movimiento al exterior del objeto compacto, el cual ya se conoce viene regido por la métrica de Schwarzschild. Para los modelos interiores se eligen objetos ultracompactos con radios $R^* = 1,65R_s, 1,45R_s, 1,25R_s$ y $1,125R_s$.

Apéndice C

Modelo de atmósfera para la temperatura de una estrella compacta.

C.1. Función de temperatura superficial para una estrella con magnetización constante en el eje z

En Electrodinámica Clásica, en un espacio-tiempo sin curvatura, se tiene que la expresión para el campo magnético de un dipolo magnético se puede expresar como:

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}; \quad (\text{C.1})$$

con \vec{m} el momento magnético del dipolo y \vec{r} cualquier punto del espacio en presencia del campo magnético. La expresión para el momento magnético de un campo va de la mano con la magnetización \vec{M} :

$$\vec{m} = \iiint d^3x \vec{M}. \quad (\text{C.2})$$

En presencia de un espacio-tiempo sin curvatura, se tiene que la expresión para un campo magnético dipolar, expresado en coordenadas esféricas, tiene la forma:

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} = \frac{M_0 V}{r^3} (2 \cos \theta_E \hat{r} + \sin \theta_E \hat{\theta}); \quad (\text{C.3})$$

para un objeto esférico de volumen $V = 4\pi R^3/3$, con magnetización:

$$\vec{M} = M_0 \hat{z} = M_0 (\cos \theta_E \hat{r} - \sin \theta_E \hat{\theta}), \quad (\text{C.4})$$

y momento dipolar magnético dado por $\vec{m} = \iiint d^3x \vec{M} = M_0 V (\cos \theta_E \hat{r} - \sin \theta_E \hat{\theta})$.

Para una contribución principalmente dipolar del campo magnético del objeto, empleando la relación $\cos \Theta_B = \vec{B} \cdot \hat{r} / (|\vec{B}| |\hat{r}|)$ para hallar la inclinación del campo magnético con respecto a la normal en cualquier punto de la superficie de la estrella, se tiene haciendo el álgebra que:

$$\cos \Theta_B^{\text{dip}} = \frac{2 \cos \theta_E}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_E}}, \quad (\text{C.5})$$

$$\sin \Theta_B^{\text{dip}} = \frac{\sin \theta_E}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_E}}. \quad (\text{C.6})$$

Por lo tanto, se encuentra que:

$$\tan \Theta_B^{\text{dip}} = \frac{1}{2} \tan \theta_E, \quad (\text{C.7})$$

$$\chi(\Theta_B^{\text{dip}}) = \left[\frac{4 \cos^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} + \chi_0^4 \frac{\sin^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} \right]^{1/4} \quad (\text{C.8})$$

$$= \left[\frac{1 + 3 \cos^2 \theta_E - \sin^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} + \chi_0^4 \frac{\sin^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} \right]^{1/4} \quad (\text{C.9})$$

$$= \left[1 + (\chi_0^4 - 1) \frac{\sin^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} \right]^{1/4}. \quad (\text{C.10})$$

Y, finalmente:

$$T_s(\theta_E) = \left[1 + \left(\frac{T_{\perp}^4}{T_{\parallel}^4} - 1 \right) \frac{\sin^2 \theta_E}{1 + 3 \cos^2 \theta_E} \right]^{1/4} T_{\parallel}. \quad (\text{C.11})$$

C.2. Función de temperatura para un campo magnético con magnetización arbitraria

Se va a dar ahora una expresión para el campo magnético de un dipolo magnético con magnetización arbitraria en el espacio. El caso más conocido es el que ya se revisaba arriba, en el cual $\vec{M} = M \hat{z}$, es decir, la magnetización coincide con el eje vertical. En el caso astrofísico que se considera en este trabajo, este puede pensarse como el eje de rotación del objeto. Considérese ahora una magnetización \vec{M} arbitraria en cualquier dirección, expresada en coordenadas cartesianas:

$$\vec{M} = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z}. \quad (\text{C.12})$$

De la fórmula para el momento magnético, siempre que la magnetización no sea una función de las coordenadas, se consigue siempre que: $m_i = V M_i$, i.e. para este caso $\vec{m} = V \vec{M}$. Supóngase el primer caso a considerar una magnetización en el plano ZX , se tiene que:

$$\vec{M} = M(\sin \gamma \hat{x} + \cos \gamma \hat{z}), \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{m} = MV(\sin \gamma \hat{x} + \cos \gamma \hat{z}). \quad (\text{C.14})$$

De manera que primeramente:

$$(\vec{m} \cdot \vec{r}) = MV \mu_r = MV(x \sin \gamma + z \cos \gamma). \quad (\text{C.15})$$

Por lo cual, para la expresión para el campo magnético de un dipolo, se consigue:

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{MV}{r^3} \cdot [(3\mu_r x - r^2 \sin \gamma) \hat{x} + (3\mu_r y) \hat{y} + (3\mu_r z - r^2 \cos \gamma) \hat{z}]. \quad (\text{C.16})$$

Entonces, el módulo del campo magnético se ve como:

$$\left| \vec{B}_{\text{dip}} \right|^2 = \vec{B}_{\text{dip}} \cdot \vec{B}_{\text{dip}} = \frac{M^2 V^2}{r^6} [3(x \sin \gamma + z \cos \gamma)^2 + r^2], \quad (\text{C.17})$$

$$\left| \vec{B}_{\text{dip}} \right| = \frac{MV}{r^3} \sqrt{1 + 3 [\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma]^2}. \quad (\text{C.18})$$

Con lo cual, la expresión para el ángulo formado entre la normal de la superficie y el campo magnético en el punto de emisión térmica viene dada por:

$$\cos(\Theta_B) = \frac{\vec{B}_{\text{dip}} \cdot \vec{r}}{\left| \vec{B}_{\text{dip}} \right| r} = \frac{2 [\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma]}{\sqrt{1 + 3 [\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma]^2}}. \quad (\text{C.19})$$

La función de temperatura superficial expresada por Greenstein-Hartke y Page tomará pues la forma:

$$T_s(\Theta_B) = \chi(\Theta_B) T_{\parallel} \quad (\text{C.20})$$

$$= [\cos^2(\Theta_B)(1 - \chi_0^4) + \chi_0^4]^{1/4} T_{\parallel}, \quad (\text{C.21})$$

$$T_s(\theta_E, \phi_E; \gamma) = \left[\frac{4 (\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma)^2}{1 + 3 (\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma)^2} (1 - \chi_0^4) + \chi_0^4 \right]^{1/4} T_{\parallel}. \quad (\text{C.22})$$

Finalmente, para valores de temperaturas en los que el gradiente de temperatura entre los polos y el ecuador del objeto compacto es muy pronunciado, se tiene que $\chi_0^4 \ll 1$. Por lo cual, de manera aproximada, se puede llegar a la expresión final:

$$T_s(\theta_E, \phi_E; \gamma) \simeq \frac{\sqrt{2 (\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma)}}{\left[1 + 3 (\sin \theta_E \cos \phi_E \sin \gamma + \cos \theta_E \cos \gamma)^2 \right]^{1/4}} T_{\parallel}. \quad (\text{C.23})$$

Bibliografía

- Abbott B. P. *et al.*, 2017, *Phys. Rev. Lett.*, 119, 161101
- Abramowicz M. A., Ellis G. F. R., Lanza A., 1990, *Ap. J.*, 361, 470
- Alcock C., Farhi E., Olinto A., 1986, *Ap. J.*, 310, 261
- Antoniadis J. *et al.*, 2013, *Science*, 340, 448
- Auger G., Plagnol E., 2017, Overview of gravitational waves: Theory, sources and detection
- Baade W., Zwicky F., 1934a, *Proceedings of the National Academy of Science*, 20, 259
- Baade W., Zwicky F., 1934b, *Physical Review*, 46, 76
- Bahcall S., Lynn B. W., Selipsky S. B., 1990, *Ap. J.*, 362, 251
- Bardeen J. M., 1970, *Ap. J.*, 162, 71
- Baym G., Pethick C., Sutherland P., 1971, *Ap. J.*, 170, 299
- Becker W., 2009, *Neutron Stars and Pulsars*, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 357
- Cardoso V., Pani P., Cadoni M., Cavaglià M., 2008, *Phys. Rev. D.*, 77, 124044
- Carroll B. W., Ostlie D. A., 2006, *An introduction to modern astrophysics and cosmology*
- Carroll S. M., 2004, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*
- Cromartie H. T. *et al.*, 2020, *Nature Astronomy*, 4, 72
- Demorest P. B., Pennucci T., Ransom S. M., Roberts M. S. E., Hessels J. W. T., 2010, *Nature*, 467, 1081
- Glendenning N., 2012, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. *Astronomy and Astrophysics Library*, Springer New York
- Green S. F., Jones M. H., Clark J. S., Burnell S. J. B., 2004, *An Introduction to the Sun and Stars*. Cambridge University Press
- Greenstein G., Hartke G. J., 1983, *Ap. J.*, 271, 283
- Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G., 2007, *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*, Vol. 326
- Hartle J. B., 1967, *Ap. J.*, 150, 1005
- Hartle J. B., Thorne K. S., 1968, *Ap. J.*, 153, 807

- Hartle J. B., Sawyer R. F., Scalapino D. J., 1975, *Ap. J.*, 199, 471
- Hessels J. W. T., Ransom S. M., Stairs I. H., Freire P. C. C., Kaspi V. M., Camilo F., 2006, *Science*, 311, 1901
- Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F., Collins R. A., 1968, *Nature*, 217, 709
- Iyer B. R., Vishveshwara C. V., Dhurandhar S. V., 1985, *Classical and Quantum Gravity*, 2, 219
- Jose J. V., Saletan E. J., 1998, *Classical dynamics : a contemporary approach*
- Kalogera V., Baym G., 1996, *Astrophys. J. Lett.*, 470, L61
- Kippenhahn R., Weigert A., Weiss A., 2013, *Stellar Structure and Evolution*
- Koranda S., Stergioulas N., Friedman J. L., 1997, *Ap. J.*, 488, 799
- Kraus U., 1998, *Light Deflection Near Neutron Stars*
- Lattimer J. M., 2012, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62, 485
- Lattimer J. M., 2019, *Universe*, 5, 159
- Lattimer J. M., Prakash M., 2001, *Ap. J.*, 550, 426
- Lightman A. P., Press W. H., Price R. H., Teukolsky S. A., 2017, *Problem Book in Relativity and Gravitation*
- Luminet J. P., 1979, *Astron. Astrophys.*, 75, 228
- Mihalas D., 1978, *Stellar atmospheres*
- Miller M. C. *et al.*, 2021, *Astrophys. J. Lett.*, 918, L28
- Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., 2017, *Gravitation*
- Nättilä J., Pihajoki P., 2018, *Astron. Astrophys.*, 615, A50
- Nemiroff R. J., 1993, *American Journal of Physics*, 61, 619
- Nemiroff R. J., Becker P. A., Wood K. S., 1993, *Ap. J.*, 406, 590
- Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., 1939, *Phys. Rev.*, 55, 374
- Özel F., Freire P., 2016, *Annu. Rev. Astron. & Astrophys.*, 54, 401
- Page D., 1995, *Ap. J.*, 442, 273
- Page D., Sarmiento A., 1996, *Ap. J.*, 473, 1067
- Paschalidis V., Stergioulas N., 2017, *Living Reviews in Relativity*, 20, 7
- Pechenick K. R., Ftaclas C., Cohen J. M., 1983, *Ap. J.*, 274, 846
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1992, *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*
- Rhoades C. E., Ruffini R., 1974, *Phys. Rev. Lett.*, 32, 324
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 1986, *Radiative Processes in Astrophysics*
- Schutz B., 2009, *A First Course in General Relativity*

Shapiro S. L., Teukolsky S. A., 1983, Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects

Tolman R. C., 1939, Physical Review, 55, 364

Wald R., 2010, General Relativity. University of Chicago Press

Weinberg S., 1972, Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons

Witten E., 1984, Phys. Rev. D., 30, 272

Woodhouse N. M. J., 2007, General Relativity

Zavlin V. E., Pavlov G. G., Shibano Y. A., 1996, Astron. Astrophys., 315, 141