



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PEDAGOGÍA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
CONSTRUCCIÓN DE SABERES PEDAGÓGICOS

**DISEÑO DE ENTORNOS VIRTUALES PARA PROMOVER EL PROCESO DE LA
MATEMATIZACIÓN EN ALUMNOS DEL BACHILLERATO A PARTIR DE LA
GESTIÓN DEL DOCENTE**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:

JANETTE SANTIAGO ABASOLO

TUTORA PRINCIPAL:

DRA. FRIDA DÍAZ BARRIGA ARCEO – FACULTAD DE PSICOLOGÍA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

MTRO. JAVIER ALATORRE RICO - FACULTAD DE PSICOLOGÍA, UNAM

MTRA. MARCELA GÓMEZ SOLLANO- FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS, UNAM

DRA. MARTHA CORENSTEIN ZASLAV- FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS, UNAM

MTRA. ALMA PATRICIA PIÑONES VÁZQUEZ- FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS,
UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX., NOVIEMBRE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Graduación con trabajo escrito)**

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción 1, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la Institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado:

**Diseño de entornos virtuales para promover el proceso de la matematización en
alumnos del Bachillerato a partir de la gestión del docente**

que presenté para obtener el grado de maestría es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi programa de posgrado, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo. En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de graduación.

Atentamente

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Janette Santiago Abasola', written over a horizontal line.

Janette Santiago Abasola 305074292
(Nombre, firma y Número de cuenta del (la) alumno (a))

ÍNDICE

RESUMEN	15
INTRODUCCIÓN	16
CAPÍTULO 1. LAS MATEMÁTICAS Y SU RELEVANCIA EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MÉXICO EN EL SIGLO XXI	23
1.1. La enseñanza de las matemáticas en la Educación Media Superior en México	24
1.2. Situación actual del aprendizaje de las matemáticas en la Educación Media Superior en México	26
1.3. La cultura matemática en la Escuela Nacional Preparatoria	31
CAPÍTULO 2. LA MATEMATIZACIÓN COMO OBJETIVO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	37
2.1. La realidad socio-histórica de las matemáticas	38
2.2. La matematización como acciones simbólicas en la enseñanza	40
2.2.1. Interpretación (del plano real al plano disciplinar).....	44
2.2.2. Transformación (dentro del plano disciplinar)	44
2.2.3. Comunicación matemática (del plano disciplinar al plano real).....	45
2.3. Integración del pensamiento matemático	46
CAPÍTULO 3. ALEPH-5: ENTORNOS VIRTUALES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	50
3.1. Modalidades de Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje	51
3.2. Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado como espacio dinámico para la enseñanza de las matemáticas desde la Perspectiva Sociocultural	56
3.3. Entornos Virtuales para la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato	62
3.3.1. Diseño del Entorno Enseñanza Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas en la ENP.....	64
CAPÍTULO 4. PERSPECTIVA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO PARA EL DISEÑO DE UN ENTORNO VIRTUAL	67
4.1. Diseño en contextos auténticos	68
4.2. Diálogos cogenerativos: Docente reflexivo	71
4.3. Ciclo iterativo de la Investigación Basada en Diseño	73

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DEL CONTEXTO Y DISEÑO DEL AMBIENTE VIRTUAL PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATIZACIÓN	79
5.1. Proceso de análisis curricular de los planes y programas de la ENP	81
5.1.1. Análisis del contexto y condiciones de la Escuela Nacional Preparatoria.....	87
5.1.2. Comprensión del currículo y el contexto para el diseño del entorno virtual.....	93
5.2. Diseño del Entorno Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas en la asignatura de VI de la ENP	96
5.2.1. Actividades reales.....	97
5.2.2. Diseño de Secuencias Didácticas.....	99
5.2.3. Distribución y organización de las actividades.....	113
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN	117
6.1. La actividad matemática que favorece el proceso de la matematización	120
6.1.1. La estructura de la actividad matemática que determina cada una de las acciones.....	126
6.1.2. Meta de la actividad como una producción compleja	136
6.2. Uso reiterativo de múltiples recursos para pensar juntos	140
6.3. Guía docente para el logro de la meta establecida	146
6.4. Visión holística del sistema matemático	152
CAPÍTULO 7. IMPLICACIONES PARA EL REDISEÑO	160
7.1. Enriquecimiento del Entorno Virtual Coordinado: Secuencias Didácticas	161
7.2. Consideraciones generales	168
REFERENCIAS	175
ANEXOS	183

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Pensamiento matemático especializado (elaboración propia).....	42
Figura 2. Dimensiones del proceso de matematización con sus respectivas acciones matemáticas enmarcadas en la actividad matemática (elaboración propia).....	43
Figura 3. Dimensiones del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado distribuidas en el espacio sincrónico y asincrónico.	57
Figura 4. Fases del ciclo iterativo de la Perspectiva de Investigación Basada en Diseño en la ENP (elaboración propia).	74
Figura 5. Fase 1 de la Investigación Basada en Diseño correspondiente proceso de análisis del contexto y Diseño del Entorno Virtual Coordinado.....	80
Figura 6. Segmento curricular de las matemáticas en la ENP como un todo holístico.	84
Figura 7. Contenidos para usar en cada etapa del segmento curricular de las matemáticas en la ENP como un todo holístico.	85
Figura 8. El currículum desde una visión holística que contempla las materias de matemáticas y cada una de las secuencias didácticas.....	95
Figura 9. La actividad societal.	98
Figura 10. Secuencias Didácticas.....	100
Figura 11. Coordinación del espacio sincrónico (azul) y asincrónico (verde) para el desarrollo de la actividad.	102
Figura 12. Contrato didáctico.....	104
Figura 13. Estructura del contrato didáctico por sesión, tanto sincrónica (azul) como asincrónica (verde).	105
Figura 14. Estructura de la Secuencia Didáctica “Aterrizaje de los aviones”.....	107
Figura 15. Estructura de la Secuencia Didáctica “Básquetbol”.	108
Figura 16. Estructura de la Secuencia Didáctica “Historia de las matemáticas”.	109
Figura 17. Estructura de la Secuencia Didáctica “Caricatura matemática”.	110
Figura 18. Estructura de la Secuencia Didáctica “Fábrica de empaques”.....	110
Figura 19. Estructura de la Secuencia Didáctica ¿Existe la suerte?.....	111
Figura 20. Estructura de la Secuencia Didáctica “caso de enseñanza”.	113
Figura 21. Proceso de análisis de la implementación de las secuencias didácticas.....	118
Figura 22. Representaciones utilizadas en los textos revisados por los alumnos para conocer la historia del número y la geometría.	123
Figura 23. Producto final: línea del tiempo elaborada por alumnos de VI.....	124

Figura 24. Reflexiones de los alumnos sobre la importancia de la historicidad en el chat de zoom.....	125
Figura 25. Representaciones de uno de los equipos para estimar la extensión de la lengua de lava, en papel y en GeoGebra.....	127
Figura 26. Alumnos trabajando en equipo para estimar el cambio en la evolución de los sismos y terremotos en un periodo de tiempo determinado.	130
Figura 27. Alumnos presentando la solución al supuesto matemático.....	131
Figura 28. Alumnos presentando la validación de su modelo matemático.	132
Figura 29. Conclusión de uno de los equipos de M-VI después de realizar cada una de las acciones matemáticas implicadas en el caso de enseñanza.	133
Figura 30. Conclusión de uno de los equipos de M-VI después de realizar cada una de las acciones matemáticas implicadas en el caso de enseñanza.	134
Figura 31. Introducción del primer Informe matemático que elaboraron los alumnos en equipo para la SD “Aterrizaje de los aviones”.....	137
Figura 32. Presentación del modelo gráfico y algebraico del primer Informe matemático que elaboraron los alumnos en equipo para la SD “Aterrizaje de los aviones”.....	138
Figura 33. Modelos matemáticos recuperados de las fuentes publicadas por vulcanólogos y geólogos.	141
Figura 34. Representación geométrica (concreta) elaborada por los alumnos en la SD de Básquetbol... ..	143
Figura 35. Representación algebraica elaborada por los alumnos en la SD de Básquetbol.	144
Figura 36. Modelo matemático preestablecido para interpretar las variables que afectan a un avión.	147
Figura 37. Modelización de las diferentes funciones, por parte de la maestra en el momento de contextualización de la actividad de aterrizaje de los aviones.	148
Figura 38. Modelo matemático elaborado por los alumnos en la secuencia didáctica de aterrizaje de los aviones.....	149
Figura 39. Modelos matemáticos de la SD Fábrica de empaques, elaborada por la docente.	151
Figura 40. Informe matemático de la primera actividad “La sobrepoblación: el caso de china”. Equipo 2 de Matemáticas de VI, previo a la implementación.	154
Figura 41. Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.	155
Figura 42. Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.	156
Figura 43. Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.	157
Figura 44. Proceso rediseño del entorno de enseñanza y aprendizaje.....	161

DEDICATORIA

A mí padre, Eusebio Luis Santiago García, el hombre que me enseñó a luchar por mis sueños, porque sé que estaría muy orgulloso de verme lograr este nivel académico. Siempre será la fuerza que me impulse a seguir adelante, porque aunque no esté físicamente conmigo, vive en mi corazón; a él le dedico este maravilloso logro.

A Sofía Sarahí y Regina Abigail, mis pequeñas sobrinas de 8 y 4 años. Dedico este trabajo especialmente a ustedes porque son mi inspiración y siento un enorme compromiso con ustedes que inician su camino académico, sé que llegarán muy lejos y yo las acompañaré en ese camino así como lo han hecho ustedes conmigo.

Sofi, gracias por tu solidaridad, recuerdo las veces que nos conectamos por videollamada para hacer la tarea juntas, y llevo presente en mi corazón la respuesta que me diste cuando visitamos juntas la Biblioteca Central de la UNAM y te pregunte, ¿qué te gustaría estudiar? y me dijiste sin dudar, “lo mismo que tú, la maestría”; sé que el camino que tienes que recorrer aún es largo, pero lo lograras y yo estaré allí para apoyarte.

Regi, que siendo tan pequeñita, a tus 4 años muestras tanto entusiasmo por aprender y estudiar, eres un ejemplo porque siempre encuentras la manera de expresar tus ideas y compartir lo que piensas y sientes, gracias por abrazarme con tanto cariño a la distancia cuando me sentía cansada.

Gracias por su amor y cariño, las amo con todo mi corazón.

AGRADECIMIENTOS ACADÉMICOS

Agradezco a Dios por haberme permitido el encuentro con las personas indicadas, quienes con un trato humano me apoyaron para el logro de este gran éxito profesional.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por ser el espacio en el cual pude participar, construir nuevos saberes y desarrollarme académica y profesionalmente.

De igual manera agradezco al proyecto Aleph del cual tengo el gusto de formar parte desde hace 13 años, cuando cursaba la licenciatura, porque ha sido el espacio en el cual he podido tener un acercamiento al ámbito profesional, ya que cada una de las acciones y propuestas que hemos ido desarrollando a lo largo de este tiempo han sido pensadas para transformar la realidad educativa, primero en el nivel de educación preescolar y, desde hace 5 años, en la Escuela Nacional Preparatoria. Me ha permitido poner en juego mis capacidades de reflexión, análisis y síntesis para obtener los datos que sustentan esta investigación.

En este sentido, quiero agradecer a cada una de las personas que formaron parte de este logro:

Al maestro Javier Alatorre Rico, por todos y cada uno de tus consejos profesionales que siempre tienes a bien compartir conmigo para enriquecer mi trabajo profesional y por impulsarme para desarrollar y enriquecer mis capacidades y habilidades como profesionista a lo largo de estos 13 años que llevamos trabajando juntos. Por la confianza que has depositado en mí para coordinar uno de los campos que forman parte del proyecto Aleph y para realizar las múltiples actividades que esto implica. Eres un ejemplo a seguir, por la dedicación, empeño, ética profesional y compromiso que pones no sólo en las asignaturas que impartes, sino por la preocupación e interés que tienes de formar profesionistas expertos en el campo de la educación. Gracias por acompañarme en este proceso de la maestría y por alentarme a continuar con mi formación profesional, haciéndome participe de experiencias que representan un reto para mí pero que con tu apoyo siempre logro concretar.

A las maestras y maestros de los seminarios que curse a lo largo de la maestría, por abrir momentos de discusión y reflexión para conocer el campo de la pedagogía y por compartir sus experiencias profesionales y saberes con los cuales enriquecieron mis aprendizajes; espacio que también me permitió compartir el proceso de otros compañeros y colegas.

Agradezco especialmente a la Dra. Frida Díaz por aceptar ser mi tutora, por la confianza, el tiempo y los momentos de discusión dedicados para la revisión de los avances de esta investigación, por sus consejos para lograr cerrar este trabajo tan importante y por toda la experiencia que amablemente comparte conmigo.

A la Dra. Marcela Gómez Sollano, por todas las sugerencias y reflexiones compartidas en los seminarios que enriquecieron mi mirada sobre la educación, y en especial en el seminario de integración, ya que fue un momento crucial en donde pude concretar e integrar todo el trabajo que había estado desarrollando en la maestría, lo cual no fue fácil pero escuchando las aportaciones de otros compañeros y compañeras se fueron aclarando.

A la Dra. Martha Corenstein y a la Mtra. Paty Piñones, por aceptar formar parte del sínodo, por sus comentarios y sugerencias realizadas, las cuales fueron de mucha ayuda para la mejora de esta tesis.

Al pensar en una iniciativa educativa que transforme la educación es importante considerar a los docentes que imparten las asignaturas y a los alumnos que se ven beneficiados con la misma y el formar parte del proyecto Aleph me permitió tener un acercamiento con la institución educativa. Por ello, quiero agradecer a las docentes de matemáticas que han participado en el proyecto, a las maestras Leticia Sánchez López, Maricela Lugo Zacarías, Eva Del Ángel Trejo, Olga Flores González y Loiret Alejandra Dosal Trujillo quien se ha incorporado recientemente al proyecto. Gracias por el compromiso, trabajo, tiempo y dedicación puestos a lo largo de todo el proceso de la investigación y por todo lo que compartieron conmigo desde su experiencia como matemáticas.

Finalmente quiero agradecer a todo el equipo Aleph, en general, y particularmente a Daniela Madrigal por compartir conmigo tu experiencia en el trabajo con las y los docentes de la ENP,

por el apoyo que me diste cuando inicié mi proyecto de investigación, por tu amistad y solidaridad en este proceso, eres una persona maravillosa. A Karen Corchado, porque desde que te integraste al proyecto has mostrado compromiso y dedicación con cada una de las actividades que realizamos, agradezco tu comprensión, apoyo y solidaridad para la culminación de este trabajo de tesis.

La maestría representó un gran reto para mí, en todos los sentidos. En lo profesional, fue una gran oportunidad para desarrollar capacidades y habilidades que me permiten contribuir a la investigación educativa y crear espacios de aprendizaje en colaboración con otros expertos. En lo personal, me permitió conocer y compartir espacios de reflexión con personas maravillosas de diferentes lugares y que enriquecieron mi forma de ver el mundo. Además de ser un soporte para transitar por momentos y procesos de cambio complejos.

AGRADECIMIENTO A LA MTRA. EVA DEL ANGEL TREJO

Ocupo estas líneas para agradecer especialmente a la maestra Eva Del Angel Trejo, quien participó en el diseño, implementación, evaluación y rediseño de la propuesta educativa en la asignatura que se reporta en esta investigación.

Eva, eres una persona admirable, haber coincidido en este proceso fue algo muy afortunado para mí y muy enriquecedor, sin tí este trabajo no habría sido posible; durante el tiempo que has colaborado en el proyecto he sido testigo del compromiso, entusiasmo y dedicación con que impartes tus asignaturas y con cada una de las actividades que realizamos en el proyecto.

El trabajo en el proyecto representó un gran reto para ambas, al encontrarnos en medio de una situación social complicada, pero entre las dos pudimos superar las dificultades que se nos presentaron a lo largo del ciclo escolar, dedicando varias horas de trabajo al día y en ocasiones en fines de semana para poder terminar el diseño de las actividades que escribíamos juntas, pero a distancia. Con tu trabajo y apoyo fue posible obtener los datos de esta tesis, lo cual te agradezco profundamente y comparto contigo este gran logro.

Siento una gran admiración por la forma en la cual impartes tus clases, es maravilloso escuchar los comentarios que hacen tus alumnos sobre la forma en la que les enseñas, reconocen que eres una excelente maestra y yo estoy de acuerdo con ellos. Además, observar tus clases y reflexionar después contigo me ayudó a conocer más sobre las matemáticas y a comprender las dificultades que como docente enfrentas en la institución.

Durante todo este proceso tú y tus alumnos eran la razón por la cual me levantaba todas las mañanas para tener listas las actividades que implementarías, siempre había algo que aportar y trabajar tardes y noches contigo permitió que el trabajo funcionara.

Gracias por todo Eva, sigamos construyendo nuevas oportunidades para los alumnos.

AGRADECIMIENTO AL DR. EUGENIO DÍAZ BARRIGA ARCEO

En este proceso fue importante contar con el apoyo de expertos en la disciplina de las matemáticas, por ello, agradezco particularmente al Dr. Eugenio Díaz Barriga Arceo por haber aceptado participar en el proyecto Aleph como asesor experto en el área de matemáticas.

Dr. Eugenio, gracias por el compromiso y el tiempo dedicado para dialogar respecto a la importancia de las matemáticas y los diferentes temas que podíamos abordar en cada una de las actividades de enseñanza.

Gracias por compartir sus saberes conmigo, por explicarme temas matemáticos que para mí resultaban complejos, y por compartir estrategias y herramientas tecnológicas que pudimos utilizar en las actividades de enseñanza; herramientas que no solo me han sido de utilidad para esta investigación, sino también para implementarlas en el ámbito profesional con los niños y niñas que apoyo para que aprendan matemáticas en otros niveles educativos, en preescolar, primaria y secundaria.

Gracias por todo el apoyo brindado, por sus consejos respetuosos y amables, por las sugerencias, reflexiones desde las matemáticas que contribuyeron de forma positiva al trabajo que realizamos en el campo de matemáticas y a mi comprensión con respecto a estos temas.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

En este proceso académico estuvieron presentes varias personas que forman parte de mi familia y amistades muy importantes, a quienes también me gustaría agradecerles por transitar conmigo este camino.

A mí madre, Julia Abasolo, por ser mi compañera a lo largo de mi formación profesional. Sé que el proceso representó cambios en ambas y que tuvimos que enfrentar diferentes circunstancias pero entre las dos pudimos superarlas. Gracias por apoyarme en todos los sentidos para poder culminar este trabajo de tesis. Agradezco profundamente tus palabras de aliento para seguir adelante.

A toda mi familia en general, a mi hermana y hermano, a mis primos y sobrinos que siempre tienen palabras alentadoras que me impulsan a seguir con mi carrera profesional, gracias por el apoyo que me han dado.

A mí mejor amiga, Lore, porque ha sido muy afortunado compartir el proceso de la maestría contigo, desde el primer día, porque eres un ejemplo de perseverancia y me has enseñado que los obstáculos no existen y que las metas se pueden cumplir con esfuerzo y dedicación. Te agradezco por los momentos que compartimos para reflexionar sobre los temas de los seminarios o sobre el proyecto, pero sobre todo por todas aquellas pláticas que compartimos y que me ayudaron a seguir adelante en el proceso, gracias infinitas por tu valiosa amistad y cariño.

A Santa Ortega y Elizabeth García, dos de mis mejores amigas, colegas y compañeras de trabajo en el CENDI, mujeres maravillosas, gracias por sus valiosos consejos que me impulsaron a continuar con mi formación profesional, ha sido muy enriquecedor encontrarlas y compartir experiencias en diferentes momentos, sigamos andando.

A mis amigos que aún a la distancia me motivan para seguir adelante, me daban palabras de aliento y que además confiaban en mí y en que lo lograría.

Muchas gracias por acompañarme en este camino y contribuir para el logro de esta tesis.

Esta investigación fue posible gracias al apoyo del **Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT)**, por medio de la beca otorgada para mis estudios en el Programa de Maestría y Doctorado en Pedagogía, reconocido en el Programa Nacional de Posgrado de Calidad. Dicho apoyo fue acreditado por medio del Currículum Vitae Único (CVU) **1104498**.

RESUMEN

Desde la pedagogía reflexionamos ante la problemática que existe en la enseñanza de las matemáticas para construir una propuesta educativa que permita formar sujetos que sean capaces de matematizar el mundo. Actualmente, el panorama de la educación en México muestra pobres resultados educativos en la Educación Media Superior; y en el caso de las matemáticas existe un bajo nivel de desempeño del aprendizaje de las matemáticas que alcanzan los alumnos, ya que no logran el dominio de los conocimientos ni desarrollan las competencias que implican el uso de los conocimientos establecidos en el currículo. Ante esta problemática, la presente investigación tiene como objetivo el diseño de entornos virtuales para promover el proceso de la matematización en los alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria, al ser partícipes dentro de actividades sociales en las que hagan uso del sistema disciplinar de las matemáticas. Dichas actividades, descansan en la perspectiva constructivista sociocultural en donde se incorpora la actividad como unidad de análisis y se consideran las bases metodológicas de la Investigación Basada en Diseño (IBD). El trabajo de investigación se realiza como parte del Proyecto Aleph5 que es una iniciativa que tiene como anhelo favorecer la calidad educativa en el nivel bachillerato creando las condiciones para que surjan las capacidades de pensamiento especializado. Los resultados muestran el diseño del entorno de enseñanza virtual coordinado, el cual está conformado por un conjunto de actividades de enseñanza que están pensadas para propiciar las dimensiones del proceso de matematización en alumnos que cursan la asignatura de matemáticas VI, correspondiente al área I y II, del nivel propedéutico. Se resalta como consideración importante la participación del docente a lo largo de todo el diseño de la propuesta educativa ya que son los encargados de hacer que el currículum funcione dentro del aula para que los alumnos logren alcanzar los objetivos de aprendizaje; diseño que se realiza desde dentro de la institución para hacer viable la iniciativa y muy importante para generar un cambio en la institución; es decir, para transformar la institución.

Palabras clave: Entorno virtual, matematización, matemáticas, Educación Media Superior, Teoría sociocultural, Investigación Basada en Diseño.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación aborda el problema que enfrenta actualmente la enseñanza de las matemáticas en el contexto del bachillerato en México, ya que, en la actualidad es frecuente que los estudiantes no tengan una idea clara de ¿por qué aprender matemáticas?, y se lleguen a preguntar: ¿esto para qué sirve?, ¿dónde están las matemáticas en la vida cotidiana? La respuesta a ello es sencilla, ya que basta únicamente con usar un teléfono celular o una computadora para estar cerca de las matemáticas (Siglo XXI, 2010; SUMEM, 2014). En la enseñanza de las matemáticas es importante considerar su aplicabilidad, historicidad, valor cultural y científico, para reconocer aquello que le dio origen. Por ejemplo, los temas de cálculo diferencial deben presentarse considerando las actividades socio-históricas que les dieron origen en el ámbito científico, mostrando su utilidad para solucionar problemas reales; pero esto no suele suceder, ya que se presentan únicamente como meros procedimientos que los alumnos deben desarrollar para aprender el concepto de derivada, la noción de funciones y sus transformaciones (SUMEM, 2014).

En matemáticas el pensamiento que se debe desarrollar es el pensamiento matemático y a esa forma de pensar especializada es a la que llamamos *Matematización*; la capacidad de interpretar el mundo matemáticamente. Es decir, el humano puede generar un modelo matemático de cualquier fenómeno como, por ejemplo: el lanzamiento de un tiro de básquetbol o la velocidad a la que se expande la lengua de lava en una erupción volcánica. Matematizar el mundo, es tener la capacidad de crear un modelo matemático e interpretarlo matemáticamente bajo un contexto de actividad societal. Desde nuestra perspectiva, estas capacidades de pensamiento que conforman el proceso de la matematización son de origen sociocultural, dado que surgen como parte de las actividades humanas, mediadas por múltiples medios semióticos; es decir, a diferencia de los contenidos o conocimientos declarativos que se pueden exponer o enseñar en una clase tradicional; las formas de pensar o capacidades intelectuales, no se pueden transmitir, dado que éstas se desarrollan bajo un contexto de actividad que las propicie (Daniels, 2003; Wertsch, 1988).

Por lo anterior, el proceso de matematización resulta viable para la enseñanza en la que se incorporan problemas de la realidad para relacionarnos con el mundo de las matemáticas, así mismo, constituye el medio para que los jóvenes mejoren la comprensión de conceptos matemáticos y puedan descubrir la función de las matemáticas la cual es: *servir como herramienta para interpretar la realidad*. Por ello, en esta investigación se consideró el proceso de la

matematización como un objetivo de aprendizaje, el cual refiere a la capacidad de realizar acciones simbólicas con el sistema matemático y constatar cómo los matemáticos “hacen matemáticas”; cómo razonan matemáticamente (Santiago Abasolo, 2019, p. 61). Dicho proceso comprende tres grandes dimensiones: la formulación y simplificación del problema enmarcado en la realidad, reconociendo que se puede modelar matemáticamente; la modelización e interpretación matemática (operar con las matemáticas para representar una parte de la realidad); y, la validación del modelo matemático, la cual implica argumentar matemáticamente (Millroy, 1992; INEE, 2008; Blum & Borromeo, 2009; Solar y Azcárate, 2011; Acebo y Rodríguez, 2021). Es importante señalar que recuperamos el concepto de “*realidad*” haciendo referencia a lo que concierne a la realidad social de las matemáticas, teniendo presente que el humano no puede acceder o tener una relación directa con la realidad, por lo tanto, necesita de un objeto de conocimiento específico que lo acerque a ella, porque dicho objeto apela a la realidad, dado que es una abstracción de la misma realidad (SUMEM, 2016). En este caso particular, el objeto de conocimiento específico son las matemáticas, y en este sentido, son ellas las que le permiten al humano acceder e interpretar la realidad matemáticamente.

Dado que las matemáticas forman parte de la cultura, resulta importante considerar cómo se ha abordado su enseñanza en los diferentes niveles educativos; por fines particulares a esta investigación se consideró únicamente el nivel de la Educación Media Superior (EMS), específicamente la Escuela Nacional Preparatoria que forma parte de uno de los bachilleratos de la UNAM. Dado que, el bachillerato debe desarrollar en el estudiante aspectos fundamentales de la cultura matemática que le permitan desempeñarse de manera satisfactoria tanto en el transcurso de sus estudios de bachillerato como en los superiores; además de desarrollar conocimientos que le permitan aplicar las matemáticas en situaciones extraescolares, reconociéndolas como parte de su vida cotidiana. El bachillerato toma relevancia en esta investigación dado que forma parte de la educación obligatoria, por ello, es indispensable que la escuela tenga como visión primordial formar ciudadanos que estén capacitados para hacer uso de los conocimientos o herramientas matemáticas en su entorno real, el cual está impregnado de ideas y conceptos matemáticos; *matematizar*. Para que esto sea posible resulta indispensable cambiar la concepción que se tiene de la escuela y dejar de considerarla únicamente como proveedora de contenidos desvinculados de la realidad, porque enseñar a repetir conocimientos no le ayudará al estudiante a resolver problemas

en el contexto profesional real, por ello, la escuela debe buscar promover formas de pensar especializadas.

En el bachillerato se hace necesario atender la situación que evidencia el enorme reto que se tiene en la educación, para poder reducir las brechas de conocimiento, oportunidades y condiciones generales de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas para que todos los alumnos puedan ejercer plenamente su derecho a recibir una educación de calidad. Es interesante mencionar que aunque se han creado propuestas como: la elaborada por el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática organizado por el Dr. José Narro Robles en 2013, en la UNAM, frente al deficiente desempeño de los estudiantes, con el objetivo de conocer la problemática en la enseñanza de las matemáticas y realizar propuestas para favorecer los aprendizajes de las mismas (SUMEM, 2016) y atender “*¿Qué deben aprender los estudiantes del bachillerato y por qué?*”; así mismo, las modificaciones que realizó la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), en sus planes y programas, primero en 1964 y también en 1996, en donde se consideraba el aprendizaje desde un enfoque centrado en el alumno, como el arquitecto o constructor de su propio conocimiento, y posteriormente, en el periodo de 2012 a 2018, se trabajó en la actualización curricular del Plan de Estudios de 1996 para favorecer la calidad de la educación en dicho nivel (Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019); los indicadores de acuerdo con los resultados de las evaluaciones en: el *Dominio de los aprendizajes clave establecidos en el currículo al concluir el bachillerato* (PLANEA, 2017); el *Uso de los conocimientos para razonar matemáticamente al concluir el bachillerato* (PISA G12, OCDE, 2013); y, los *Diagnósticos de los conocimientos adquiridos al inicio del bachillerato y al ingreso al nivel Superior* (CUAIEED, 2021; CODEIC-UNAM, 2020), reflejan que en las últimas décadas se obtienen pobres resultados educativos en matemáticas; es decir, no se concreta el objetivo planteado por el SUMEM que es lograr que los estudiantes egresados del Bachillerato de la UNAM sean los mejores del mundo en matemáticas (SUMEM, 2016). Al transitar por los diferentes niveles educativos no se logra una mejora, sino por el contrario, la problemática se acentúa; lo cual significa que el currículum propuesto no se está concretando de manera adecuada, y, por ende, no se están cumpliendo los objetivos de aprendizaje planteados en los planes y programas de estudio.

Ahora bien, cabe señalar que el presente trabajo de investigación forma parte de un proyecto amplio llamado Aleph, el cual es una *iniciativa* que tiene como propósito favorecer la calidad educativa a través de crear las condiciones para el logro educativo en tres campos disciplinares:

Matemáticas, Biología e Historia. Al mismo tiempo, se ha conformado una comunidad de docentes e investigadores educativos que participan en el diseño de la propuesta educativa. Dicha iniciativa lleva más de 15 años, iniciando su trabajo en el nivel de educación preescolar de manera presencial (Alatorre, 2008) y posteriormente en el año 2018, inició su trabajo en el contexto del bachillerato de la UNAM, primero de forma presencial y posteriormente de manera virtual.

Dentro del marco del proyecto Aleph, mi trabajo de investigación centra su atención en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, formalizando el primer diseño e implementación del Entorno Virtual, el cual surge en respuesta a las problemáticas que existen en el nivel bachillerato. Ante esto surge el siguiente cuestionamiento *¿cómo creamos las condiciones para que se desarrollen las capacidades especializadas?* Por lo que resulta pertinente una propuesta desde la virtualidad en la que se coordinen el espacio síncrono y asíncrono, asumiendo que el aprendizaje y el desarrollo cultural se despliega al participar dentro de actividades sociales haciendo uso de sistemas semióticos particulares. Bajo esta perspectiva, la mediación docente es fundamental para promover: la incorporación de los estudiantes a las actividades; la negociación de significados y la construcción de sentidos; la creación de espacios colectivos de intersubjetividad; y su integración en comunidades de práctica (Leontiev, 1975; Rogoff, 1997; Mercer, 2001).

Cabe mencionar que una de las acciones fundamentales que llevamos a cabo dentro del proyecto es la ***intervención educativa***, la cual implica principalmente el diseño de los ambientes o entornos virtuales de enseñanza que propicien los aprendizajes propuestos en el Bachillerato, en particular los referentes a la asignatura de matemáticas. En este mismo sentido cabe preguntarnos *¿por qué es importante hacer una propuesta virtual para la enseñanza de las matemáticas?*, por lo que en el proyecto se considera que la perspectiva sociocultural nos ofrece herramientas para indagar y favorecer el desarrollo de las capacidades y formas de pensar que los individuos necesitan para enfrentar los retos de la sociedad, la cual está cada vez más industrializada e implica el uso de la tecnología; y hacer virtual la propuesta potencia el uso de múltiples medios semióticos, dado que los recursos virtuales ofrecen otras oportunidades que en lo presencial no podrían ser posible de forma inmediata y, al mismo tiempo permite potenciar los mecanismos que desde la visión sociocultural proponemos.

Por lo anterior, en la presente investigación se planteó como ***propósito***: Favorecer la calidad educativa y asegurar el logro del perfil de egreso en los estudiantes de la Escuela Nacional

Preparatoria participando en actividades contextualizadas. Se consideró como *objetivo*: El diseño de ambientes virtuales complejos para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato.

Así mismo, se plantearon los *objetivos específicos* que determinaron las condiciones del estudio: diseño de material didáctico digitalizado para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; diseño e implementación de secuencias didácticas que contemplan el espacio sincrónico y el asincrónico; apoyo y trabajo colaborativo con una comunidad de docentes; y, diseño de un instrumento de evaluación del aprendizaje de las matemáticas.

En el diseño de los entornos virtuales para la enseñanza de la matematización, se utilizó como marco metodológico la Investigación Basada en Diseño (IBD) de Rinaudo y Donolo (2012), la cual, en la investigación educativa busca responder a las problemáticas educativas dentro de contextos auténticos, para incidir en la práctica educativa (Siry y Zawatski, 2011; Castro, 2019). También nos permite cerrar la brecha entre las propuestas educativas como la Reforma Integral de Educación Media Superior, el Modelo Educativo, en su momento el SUMEM y las actualizaciones de los planes y programas de la ENP. Bajo este marco metodológico, la propuesta se realizó dentro del contexto de la ENP, y como rasgo particular se conformó una comunidad de docentes expertos en matemáticas quienes colaboraron conmigo y con otros investigadores educativos, en todas las fases del ciclo de la IBD, para diseñar, probar y a la par realizar reflexiones sobre su práctica al implementar las actividades sociales para hacer la propuesta viable (Schön, 1992). En este trabajo de investigación, a partir de la IBD, se llevaron a cabo las siguientes fases del ciclo Iterativo: En primer lugar, se realizó el análisis curricular y del contexto de la institución, para construir una reinterpretación de los objetivos de aprendizaje establecidos en el currículo, en términos de la matematización y construir una mirada compartida con los docentes. En segundo lugar, se diseñaron las Secuencias Didácticas (SD), para lo cual se consideró como marco de referencia la perspectiva sociocultural por lo que recuperamos las siguientes dimensiones: la actividad social que son actividades socialmente reconocidas y que implican usar las matemáticas y realizar acciones matemáticas para interpretar la realidad bajo una problemática real; estas actividades implican la interacción social, la mediación docente y la mediación semiótica. En tercer lugar, se llevó a cabo la implementación de las secuencias didácticas considerando el espacio sincrónico y el asincrónico, en el que el papel del docente fue fundamental dado que fue el encargado de gestionar todas las acciones que ocurrieron dentro de la actividad y de poner a disposición de los

alumnos múltiples recursos semióticos que son en particular representaciones externas, como modelos matemáticos expertos, que le permiten a los alumnos realizar una interpretación compartida de la actividad en la que participan; dentro de estas actividades, la participación es una condición necesaria porque es dentro de ellas en donde se ponen en juego las dimensiones del proceso de la matematización. En cuarto lugar, se llevó a cabo la evaluación y el rediseño del entorno, recuperando las observaciones realizadas tanto por los investigadores educativos, como por los docentes, las cuales se discutieron y revisaron en sesiones periódicas de seguimiento a lo largo de todo el ciclo escolar.

Recuperar las premisas socioculturales y la metodología de la Investigación Basada en Diseño (IBD), nos permite desarrollar sistemáticamente los elementos que debe tener el diseño de una propuesta de Entorno Virtual para la enseñanza y crear las condiciones que propicien el desarrollo de los objetivos de aprendizaje y con ello, formar sujetos que sean capaces de matematizar. Sin olvidar la importancia que tiene la colaboración del colectivo de docentes expertos en matemáticas para la construcción del entorno con el propósito de articular los objetivos de aprendizaje y las perspectivas hacia un mismo perfil de egreso; estableciendo diálogos cogenerativos entre docentes dentro de un espacio de reflexión compartido. La estructura del presente trabajo de tesis es la siguiente:

En el capítulo 1, se da a conocer la relevancia que tienen las matemáticas en la Educación Media Superior y se aborda la situación actual que existe en México respecto a los aprendizajes de los estudiantes que ingresan y egresan de este nivel educativo, en particular en el contexto de la ENP.

En el capítulo 2, se plantea la noción del proceso de matematización el cual es considerado como objetivo de aprendizaje en el bachillerato, para interpretar la realidad desde la disciplina de las matemáticas. Se desarrollan las dimensiones que lo conforman y la forma en la que estas capacidades de pensamiento se integran y objetivan en la escritura matemática.

En el capítulo 3, se explican algunas de las modalidades de entornos virtuales de enseñanza y particularmente se desarrolla la propuesta de entorno virtual coordinado como espacio dinámico para favorecer la enseñanza de las matemáticas y por ende, el desarrollo de la matematización. Todo desde la perspectiva sociocultural la cual se utiliza como herramienta teórica en el diseño del entorno virtual.

En el capítulo 4, se aborda la perspectiva metodológica de la IBD, que se asume en la presente investigación. Se aborda el diseño en contextos auténticos y los diálogos cogenerativos entre docentes e investigadores educativos, así como las fases del ciclo iterativo para el diseño del entorno de enseñanza.

En el capítulo 5, se desarrolla la primera fase del ciclo iterativo, correspondiente al análisis del contexto de la ENP, la comprensión del currículum para el diseño del entorno virtual coordinado. Mientras que en el capítulo 6, se presenta la segunda fase del ciclo, enfocada en el análisis de la implementación de cada una de las secuencias didácticas que conforman el entorno.

Para finalizar, en el capítulo 7, se desarrollan las implicaciones de la implementación para el rediseño de la nueva versión del entorno de enseñanza virtual para su próxima implementación y se agrega un apartado de consideraciones generales que surgieron de toda la investigación.

CAPÍTULO 1. LAS MATEMÁTICAS Y SU RELEVANCIA EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MÉXICO EN EL SIGLO XXI

Actualmente, existe una gran necesidad de contar con un modelo de intervención basado en políticas educativas de calidad, flexibles y que mejoren la comunicación entre los actores principales para favorecer la permanencia de los alumnos al sistema escolar y mejorar la eficiencia terminal de la Educación Media Superior (EMS); ya que uno de los problemas educativos que enfrenta México es el abandono escolar y el bajo nivel de aprendizaje que alcanzan los alumnos en este nivel educativo, específicamente en lo que concierne al ámbito de las matemáticas como dominio de conocimiento específico.

Las matemáticas, a lo largo del tiempo, siendo consideradas una ciencia exacta y formal, han sido objeto de enseñanza a través de la repetición de los mismos procesos de producción de conocimiento, como la descripción, la explicación, demostración y la ejemplificación o paradigma del ejercicio (Angulo, 2019). En este sentido, siendo las matemáticas tan necesarias en la sociedad contemporánea, se han convertido en uno de los principales objetivos de enseñanza en los diferentes niveles educativos en México, por lo que es indispensable repensar las prácticas de enseñanza en las que los docentes trabajan con ejercicios rutinarios haciendo énfasis en procedimientos que generen una solución mecánica, lo cual deja de lado la posibilidad de reflexionar y permitir que los alumnos utilicen los conocimientos en actividades reales que favorezcan su pensamiento (Ayil, 2018).

Ante esto, es importante señalar que la UNESCO en el 2013 definió los conocimientos básicos de aritmética y matemática como uno de los siete dominios claves para el aprendizaje de los niños; ya que, es fundamental desarrollar la capacidad para utilizar la ciencia numérica y el lenguaje cuantitativo de manera universal para representar los fenómenos observados en la realidad (Waissbluth, 2018).

De igual manera, las matemáticas forman parte de la cultura, por ello, resulta importante considerar cómo se ha abordado su enseñanza en los diferentes niveles educativos; por fines particulares a esta investigación se considerará únicamente el nivel de la Educación Media Superior (EMS). Dado que, el bachillerato debe desarrollar en el estudiante aspectos fundamentales de la Cultura Matemática que le permitan desempeñarse de manera satisfactoria tanto en el transcurso de sus estudios de bachillerato como en los superiores; además de desarrollar conocimientos que

le permitan aplicar las matemáticas en situaciones extraescolares, reconociendo que forman parte de su vida cotidiana.

Dicho proceso de alfabetización matemática puede desarrollarse tanto en ámbitos escolarizados, presenciales, como en entornos virtuales de aprendizaje, ya sea a distancia o en un modelo híbrido en el que se consideran dos tipos de interacción, sincrónicas y asincrónicas. En dicho proceso, el rol de los docentes juega un papel sustancial, ya que son ellos los que participan como facilitadores del aprendizaje, favoreciendo el trabajo colaborativo (INEE, 2008; UNAM, 2020).

Por lo que se hace necesario innovar en el sistema educativo, considerando los cambios tecnológicos que enfrentamos en el contexto actual, siendo viable pensar en la incorporación de las nuevas tecnologías como medios de representación matemática, que favorecen y complementan la enseñanza y el aprendizaje de este campo disciplinar; y, como señala Brunner (2000), considerando la educación virtual como aquella que permite alcanzar objetivos que durante mucho tiempo han estado fuera del alcance de la institución educativa, logrando con ello poner a disposición de los alumnos la información y el conocimiento. Lo cual, también implica atender la inequidad social y la segregación, dado que no toda la población cuenta con los recursos para acceder a la educación; y la educación es la clave para superar las brechas de la globalización y las desigualdades de conocimiento y poder (Brunner, 2000; Waissbluth, 2018).

1.1. La enseñanza de las matemáticas en la Educación Media Superior en México

El siglo XXI es un momento que está teniendo transformaciones, por lo que resulta necesario preparar ciudadanos capacitados para actuar frente a las problemáticas de la vida social real. Por ende, la educación se encuentra ante la necesidad de plantearse un giro radical, de repensar sus fundamentos, definir de nuevo sus objetivos y reorganizar sus funciones en respuesta a los cambios acelerados en México y en América Latina (Brunner, 2000; Waissbluth, 2018).

Ante esta situación, la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha desarrollado planes y programas para mejorar la calidad de la educación obligatoria y recientemente ha planteado la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), en la cual se establecieron desde el 2008, los siguientes elementos: 1) un Marco Curricular Común (MCC); 2) cinco campos disciplinares (Ciencias experimentales, Ciencias sociales, Comunicación, Humanidades y

Matemáticas y; 3) tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales, incluyendo también, aprendizajes clave, ejes de los campos disciplinares, componentes de los ejes, contenidos centrales y específicos, aprendizajes y productos esperados; conceptos con los cuales permite dar más especificidad al currículo y lograr una mayor profundidad de los aprendizajes en los estudiantes (SEP, 2017, Villa, 2010). Actualmente, la idea central de la RIEMS es respetar los currículos, tanto de las distintas modalidades, como de las diferentes instituciones que la ofrecen, siendo la concepción de competencia lo que les da coherencia (Villa, 2010).

Una de las aportaciones del nuevo modelo educativo en la Educación Media Superior ha sido definir el perfil de egreso que los jóvenes alcanzaran al concluir este nivel educativo en diferentes ámbitos entre los que se encuentra el Pensamiento Matemático, cuyo propósito es lograr que los alumnos construyan e interpreten situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático, formulen y resuelvan problemas aplicando diferentes enfoques y argumenten la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos (SEP, 2017).

Pero en México, este nivel educativo enfrenta un desafío importante, el cual implica la mejora de los resultados en los aprendizajes de los alumnos, ya que los jóvenes que terminan el nivel bachillerato cuentan con un nivel de dominio equivalente a tercero de secundaria. Por lo que es prioridad el desarrollo de políticas educativas que potencien el papel de la acción escolar para que ésta influya en el desempeño de los alumnos (Tuirán, 2019).

Es importante mencionar que, en los planes y programas propuestos para el nivel bachillerato aún no se está tomando en cuenta la implementación de actividades socialmente significativas, ya que, no se considera la relación que existe entre las matemáticas y el mundo real, entendido como el mundo social en el cual están inmersos los estudiantes, presentando las diferentes asignaturas correspondientes a esta disciplina a partir de temas que están descontextualizados, es decir, sin un uso práctico y social. Pero en la enseñanza de las matemáticas es importante considerar su aplicabilidad, historicidad, valor cultural y científico, para reconocer aquello que les dio origen. Por ejemplo, los temas de cálculo diferencial deben presentarse considerando las actividades socio-históricas que les dieron origen en el ámbito científico, mostrando su utilidad para solucionar problemas reales; pero esto no suele suceder, ya que se presentan únicamente como meros procedimientos que los alumnos deben desarrollar para aprender el concepto de derivada, la noción de funciones y sus transformaciones (SUMEM, 2014).

Por ello es indispensable que la escuela tenga como visión primordial formar ciudadanos que estén capacitados para hacer uso de los conocimientos matemáticos en su entorno real el cual está impregnado de ideas y conceptos matemáticos; pero para que esto sea posible resulta indispensable cambiar la concepción que se tiene de la escuela y dejar de considerarla únicamente como proveedora de contenidos desvinculados de la realidad y que logre contribuir con el desarrollo de los aprendizajes establecidos en el currículo.

En este sentido, en la actualidad la formación de los estudiantes que cursan el nivel bachillerato debe estar encaminada a privilegiar el desarrollo del razonamiento y el pensamiento especializado, más que en sólo poner énfasis en el aprendizaje de procedimientos y fórmulas que no son útiles en sí mismos cuando los estudiantes se enfrentan con su contexto social real. Ya que, para que los estudiantes puedan atender un problema enmarcado en la realidad social, es indispensable que desarrollen la capacidad de razonar matemáticamente y hacer uso de las herramientas matemáticas y procedimientos que le permita interpretar dicha realidad, comprendiendo la relación que existe entre las matemáticas y otras disciplinas.

A partir de lo anterior es relevante preguntarnos si los estudiantes que egresan del bachillerato realmente están bien preparados para enfrentar los desafíos del futuro; si son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas de manera efectiva haciendo uso del lenguaje matemático y, si realmente con lo que han aprendido pueden contribuir como miembros productivos a la economía y sociedad, como lo plantea la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, por sus siglas en inglés, 2013). Por ello, en el siguiente apartado se recupera el panorama de la educación en México que muestra pobres resultados educativos en la Educación Media Superior, en términos de eficacia y rendimiento académico.

1.2. Situación actual del aprendizaje de las matemáticas en la Educación Media Superior en México

La presente investigación se sitúa frente a la problemática y desafíos que enfrenta actualmente México en la Educación Media Superior (EMS) en el ámbito de las matemáticas, como lo es el abandono escolar y el bajo nivel de aprendizaje que alcanzan los alumnos, la cual se ve reflejada en los resultados de las pruebas tanto nacionales como internacionales, como lo es el caso de PLANEA, 2017, (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes), que evalúa el nivel de

dominio que los alumnos logran de un conjunto de aprendizajes clave establecidos en el currículo; y la prueba PISA G12 (Programme for International Student Assessment), que evalúa en términos de competencias matemáticas, es decir, evalúa el uso de los conocimientos para razonar matemáticamente; y, las Evaluaciones Diagnósticas de Conocimientos realizadas por la UNAM. A continuación, se describe la problemática en términos del rendimiento académico y el logro de los aprendizajes establecidos en el currículo a partir del análisis de los datos de las pruebas antes mencionadas.

Dominio de los aprendizajes clave establecidos en el currículo al concluir el bachillerato

Con respecto a los alumnos que salen del bachillerato e ingresan a la licenciatura, en la siguiente gráfica se puede observar que aproximadamente el 90% no logran el dominio de los aprendizajes establecidos en el currículo y únicamente el 2.5% alcanza el dominio destacado (nivel superior), es decir, dominan las reglas para transformar y operar con el lenguaje matemático (por ejemplo, las leyes de los signos); expresan en lenguaje matemático las relaciones que existen entre dos variables de una situación o fenómeno; y determinan algunas de sus características (por ejemplo, deducen la ecuación de la línea recta a partir de su gráfica) (INEE, 2017).

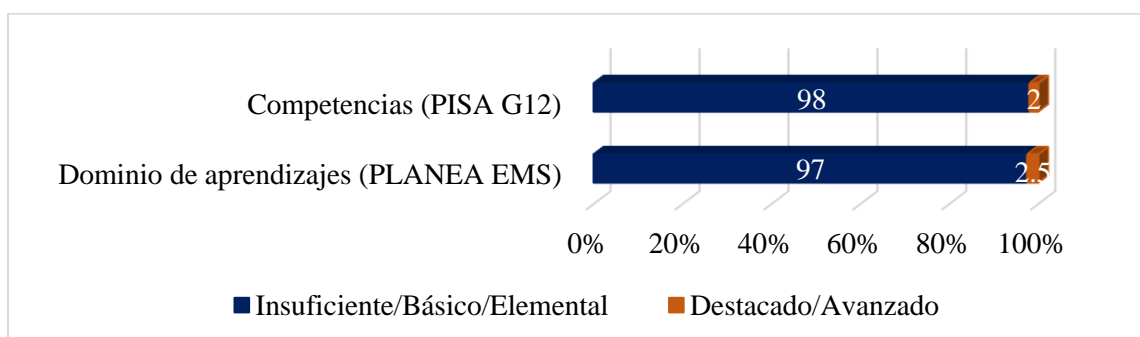


Gráfico 1. Problemática actual de las matemáticas (INEE, 2017 y OECD, 2013).

Uso de los conocimientos para razonar matemáticamente al concluir el bachillerato

La problemática se agrava cuando observamos que los alumnos no logran hacer uso de las competencias que se establecen en el currículo y que son evaluadas por la prueba de PISA G12, ya que únicamente 2% de la población logra razonar matemáticamente y hacer uso de los contenidos

matemáticos en situaciones y contextos diversos; mientras que, más del 90% no desarrollan la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos; esto incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos (Gráfico 1). De acuerdo con PISA, esta competencia matemática le ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OECD, 2013).

Diagnóstico de los conocimientos adquiridos al inicio del bachillerato y al ingreso al nivel Superior

Por su parte, la Universidad Nacional Autónoma de México, desde agosto del 2008, diseña, aplica y analiza los resultados del examen diagnóstico de conocimientos, aplicado a los estudiantes que ingresan al bachillerato, con el propósito de realizar acciones de apoyo pedagógico para mejorar su preparación y futuro desempeño y fortalecer y mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Los resultados son procesados y analizados en la Coordinación de Análisis de Resultados de Evaluación Educativa y en la dirección de Evaluación Educativa de la Coordinación de Universidad Abierta, Innovación Educativa y Evaluación a Distancia (CUAIEED) de la UNAM.

Dicho examen fue aplicado en línea, compuesto por 124 reactivos, de los cuales 42 comprenden conocimientos de matemáticas. En el gráfico 2, se observan los resultados obtenidos de los estudiantes de la generación 2021 que ingresaron al bachillerato en septiembre del 2020, los cuales muestran que los alumnos obtienen menos del 50% de los aciertos en matemáticas, lo cual significa que el grado de preparación y los conocimientos y habilidades con los que cuentan los estudiantes al iniciar este nivel educativo es deficiente (CUAIEED, 2021).

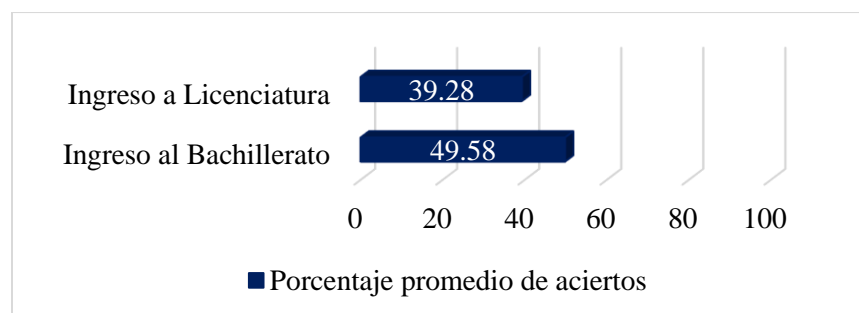


Gráfico 2. Probleática actual de las matemáticas (CUAIEED, 2021; CODEIC-UNAM, 2020).

Así mismo, la UNAM, ante la necesidad de fortalecer la vida académica universitaria, de contribuir al desarrollo educativo, a la innovación como signo distintivo, al reto de consolidar una educación media superior y superior avanzada, crea en 2015 la Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular (CODEIC), que tienen como misión proporcionar apoyo y soluciones innovadoras sobre aspectos de desarrollo y evaluación educativos a las diversas instancias institucionales, para mejorar la calidad educativa e impulsar el aprendizaje complejo en los estudiantes. Por ello diseña y aplica y analiza el examen de diagnóstico de conocimientos al ingreso a la licenciatura con la finalidad de conocer el nivel formativo que tienen los alumnos.

En el gráfico 2, también observamos que los estudiantes que entran al bachillerato presentan, en general, bajo nivel de desarrollo de las competencias establecidas en el currículum, lo que impone a la educación media superior un enorme reto para que puedan alcanzar los objetivos de aprendizaje esperados en el bachillerato. Sin embargo, como lo muestran los resultados del CODEIC, 2020, al finalizar el bachillerato e ingresar al nivel de licenciatura, las dificultades persisten y gran parte de los estudiantes que terminan este nivel educativo no alcanzan esos aprendizajes esperados. Lo cual nos muestra que en el bachillerato ingresan alumnos con un nivel de dominio de conocimientos en matemáticas, pero al egresar este no mejora, es decir, no hay un cambio en los aprendizajes durante la formación en la Educación Media Superior, y que existe un problema general nacional pues no parecen existir los logros en el desarrollo de aprendizajes esperados.

Al comparar los resultados de las pruebas anteriores podemos dar cuenta de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es deficiente dado que, al transitar por los diferentes niveles educativos no se logra una mejora, sino por el contrario, la problemática se acentúa; lo cual significa que el currículum propuesto no se está concretando de manera adecuada, y, por ende, no

se están cumpliendo los objetivos de aprendizaje planeados en los planes y programas de estudio. Por tal motivo, resulta necesario realizar intervenciones educativas que generen cambios en la enseñanza de las matemáticas y al mismo tiempo fomentar la *cultura de la evaluación* de dichas propuestas para que sean de calidad.

Cabe mencionar que en América Latina actualmente no se cuenta con las herramientas para enfrentar los desafíos educativos del mundo global contemporáneo, ya que además de que la educación mantiene niveles preocupantes de exclusión y segregación, también mantiene una muy baja calidad educativa, en relación con el bajo desempeño del aprendizaje de las matemáticas en la EMS; ante esto Waissbluth (2018) menciona:

Aunque suene rudo decirlo, por más que hayamos avanzado, los latinoamericanos somos en materia de resultados educativos el basurero de los países desarrollados, al menos en lo que a test estandarizados se refiere... (p. 27).

Lo cual deja ver que, aunque existe un incremento en la cobertura, mejoras en la infraestructura, diseño de nuevos currículos y formación docente, eso no es suficiente para lograr una educación de calidad. Es decir, el hecho de que un niño o joven asista a la escuela y permanezca en ella no garantiza que la educación o formación que está recibiendo sea de calidad, que le permitan desarrollar habilidades propias para desempeñarse ante las exigencias del siglo XXI (Waissbluth, 2018).

El desafío no es lograr que ingresen a este nivel educativo, sino también lograr su permanencia, ya que en América Latina existen muchos países con problemas de deserción en la Educación Media Superior. Pero desafortunadamente los sistemas educativos centran su atención en los procesos de evaluación y aplicación de test estandarizados, los cuales se han convertido en un fin en sí mismo para evaluar la cantidad y no la calidad educativa; en lugar de que se utilicen para hacer un análisis del desempeño de los alumnos en comparación con sus prácticas educativas, y con ello mejorar los aprendizajes, mejorar las prácticas docentes y beneficiar a las escuelas (Waissbluth, 2018).

Por ello, se hace necesario atender esta situación que evidencia el enorme reto que se tiene en el bachillerato, para poder reducir las brechas de conocimiento, oportunidades y condiciones generales de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas para que todos los alumnos puedan

ejercer plenamente su derecho a recibir una educación de calidad. Logrando que todos los jóvenes que concluyan este nivel educativo hayan desarrollado la capacidad de emplear y transformar los aprendizajes matemáticos en herramientas que les permitan dar solución a diferentes problemas y continuar con sus estudios, o para incorporarse al campo laboral; que desarrollen la cultura matemática (INEE, 2017, Villa, 2010).

1.3. La cultura matemática en la Escuela Nacional Preparatoria

Las matemáticas han sido y siguen siendo de gran importancia como parte de nuestra cultura y se han convertido en herramientas útiles para entender fenómenos y resolver problemas relacionados con la ciencia, la tecnología o de algún aspecto de la actividad humana; y, al mismo tiempo, porque se considera que la formación en matemáticas es fundamental para el desarrollo del pensamiento racional en dichas actividades. Cabe mencionar que, a lo largo de la historia, las políticas y prácticas educativas han surgido cambios revolucionarios, a nivel macro, los cuales dejan a la luz los grandes desafíos que de acuerdo a los diferentes contextos históricos se han intentado resolver y atender, buscando incidir en los principales factores que impactan en los procesos de enseñanza y aprendizaje en México; pero, como se comentó en el apartado anterior, los resultados siguen siendo muy malos en cuestión de calidad educativa en el aprendizaje de las matemáticas (Waissbluth, 2018).

A pesar de que desde el México independiente se consideró como una necesidad en la educación, el contemplar un nivel de enseñanza posterior a los considerados en la educación elemental, los cuales sentarán las bases para estudios profesoriales, fue hasta 1867 cuando se consolida con la creación de la Escuela Preparatoria por Gabino Barreda (Villa, 2010), la cual, desde sus orígenes es considerada como una institución de carácter público, que debe responder a los retos y demandas de la sociedad en su conjunto. Actualmente, la ENP forma parte del sistema educativo mexicano y es uno de los dos sistemas de bachillerato de la UNAM y de manera paralela a lo establecido en la EMS, la ENP también realizó una modificación en sus planes de estudio planteando estándares disciplinarios. En el marco curricular del bachillerato se establece el perfil de egreso basados en competencias que los alumnos deben dominar al egresar, los cuales se engloban en el concepto de competencia matemática.

Es por ello que, el bachillerato es un nivel clave en el que se deben ofrecer oportunidades a los jóvenes para desarrollar aspectos fundamentales de la cultura matemática, que le permitan desempeñarse de manera satisfactoria, tanto en el transcurso de sus estudios de bachillerato como en los superiores; además de desarrollar conocimientos que le permitan aplicar las matemáticas, como se señaló en su momento, en la propuesta elaborada por el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática organizado por el Dr. José Narro Robles en 2013, frente al deficiente desempeño de los estudiantes, con el objetivo de conocer la problemática en la enseñanza de las matemáticas y realizar propuestas para favorecer los aprendizajes de las mismas (SUMEM, 2016).

Una de las cuestiones claves que se abordaban en la propuesta del SUMEM y que enfrenta el bachillerato de la UNAM es que si, *“las matemáticas son parte fundamental de la cultura y permean toda actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones artísticas”* (SUMEM, 2014, p.18), *“¿Qué deben aprender los estudiantes del bachillerato y por qué?”* En este sentido, las matemáticas se deben presentar desde una visión integradora en el bachillerato y no de forma fragmentada, pero frecuentemente se comete el error de recurrir a repasar los temas simples que los alumnos ya deberían saber en el bachillerato, en lugar de presentar los temas correspondientes al nivel educativo que son más abstractos, complejos y que implican el uso de temas básicos, lo cual favorece, no sólo que los estudiantes aprendan un tema nuevo sino también remediar la deficiencia que vienen arrastrando; y, en dicho proceso de enseñanza el alumno debe ser un partícipe activo del pensamiento matemático, que se apropie del mismo y aprendan a usarlo. Es decir, que adquieran la capacidad de crear modelos abstractos que le permitan entender y analizar situaciones concretas. Por tal motivo, los estándares de matemáticas deben representar un reto importante tanto en los maestros como en los estudiantes, para que los alumnos egresados del Bachillerato de la UNAM sean los mejores del mundo en matemáticas (SUMEM, 2016).

Para cambiar la percepción negativa que se tiene sobre las matemáticas, una tarea urgente es promover la cultura matemática y los profesores son parte importante de la promoción de dicha cultura al igual que el currículo que contiene los aprendizajes esperados. A partir de las consideraciones realizadas por el SUMEM, se recupera que la cultura matemática de los egresados de bachillerato debe estar conformada por diversos temas, los cuales no deben ser presentados de forma aislada, sino desde una visión integradora. Por ello, el bachillerato de la UNAM debe

favorecer el desarrollo de los aspectos fundamentales de la cultura matemática, la cual comprende: el desarrollo del pensamiento y del razonamiento lógico-deductivo; la comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales (aritméticos, algebraicos, geométricos, probabilísticos y de cálculo); el reconocimiento de los factores que inciden en el desarrollo de las matemáticas; el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas dentro y fuera del ámbito matemático; uso de las herramientas tecnológicas para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de conocimiento; además de fomentar valores (como responsabilidad, respeto, tolerancia, cooperación y solidaridad) que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y la investigación. Así mismo, el desarrollo del pensamiento matemático está relacionado con el aprendizaje de los conceptos fundamentales de las matemáticas, los cuales están distribuidos en las ramas tradicionales de la disciplina matemática: aritmética, álgebra, estadística, probabilidad, geometría, geometría analítica, trigonometría y cálculo. Al mismo tiempo, es de suma importancia dar a conocer cómo surgieron las matemáticas, es decir, retomar las fuentes históricas, conceptuales y prácticas para desarrollar en los estudiantes una visión unificadora de las matemáticas como campo de conocimiento. Particularmente en cálculo se espera que todos los estudiantes egresados del bachillerato adquieran conocimientos, habilidades, actitudes y valores en torno a los temas de funciones y cálculo; entre los temas que deben abordar se encuentran (SUMEM, 2014).:

- El concepto de función.
- Modelación con funciones.
- La idea intuitiva de aproximación y del concepto de límite
- Tangente a una curva.
- La razón de cambio instantánea y su relación con la tangente a una curva.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Cálculo de tangentes a ciertas curvas usando la definición de límite.
- Análisis de las gráficas de funciones.
- Cálculo de máximos y mínimos.
- Idea intuitiva de la integral en términos de sumas de Riemann.
- Aplicaciones del concepto de integral
- Problemas que involucran ecuaciones diferenciales simples
- Desarrollo histórico de los conceptos del cálculo

Así mismo, la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), que forma parte de uno de los Bachilleratos de la UNAM, cuyas modificaciones ocurrieron primero en 1964 y también en 1996, en donde se consideraba el aprendizaje desde un enfoque centrado en el alumno, como el arquitecto o constructor de su propio conocimiento. Posteriormente, en el periodo de 2012 a 2018, se trabajó en la actualización curricular del Plan de Estudios de 1996 para favorecer la calidad de la educación en dicho nivel (Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019).

Si bien, aunque la ENP ha intentado responder a las necesidades educativas actuales, también se hace necesario trabajar en el diseño de materiales didácticos, fomentar la planeación didáctica, la discusión colegiada y la reflexión (Alvarado, Sánchez y Lugo, 2019). Además de atender la formación docente para alcanzar los objetivos planteados, es decir, que el docente esté familiarizado con los programas y con las tecnologías de la información, teniendo cierto dominio de habilidades en computación, lo cual también forma parte de un desafío, ya que esto no siempre sucede (Waissbluth, 2018). Es importante resaltar que el hecho de incorporar nuevas tecnologías para favorecer el aprendizaje no deja de lado la labor del docente como mediador del aprendizaje; los medios digitales, le permiten complementar su práctica educativa de calidad. Como menciona Brunner (2000), las tecnologías de la información y la comunicación crean una nueva organización social para las actividades de conocimiento basadas en la innovación para adaptarse al nuevo entorno y la cultura.

Bajo este enfoque de un nuevo modelo educativo, también surgieron cambios de manera interna, en los programas de estudio de esta disciplina (matemáticas), para pasar de un modelo tradicional a un marco de la Educación Matemática Realista (EMR), en el que, a diferencia de la educación tradicional, los docentes utilizan los problemas en contexto y situaciones de la vida real, porque las matemáticas surgen en la realidad. Lo cual, nos lleva a plantearnos las siguientes interrogantes, ¿Qué está sucediendo de manera interna en las instituciones para que la educación siga siendo deficiente, para que los alumnos no desarrollen sus capacidades matemáticas?, ¿De qué manera el rol del docente influye en esta mejora?, ¿Cuál es el rol del alumno y cómo se responsabiliza de su aprendizaje?, y ¿Cuál es la función de las instituciones en dicho cambio?

En su caso particular, la ENP en su Plan de Estudios correspondiente a la asignatura de Matemáticas VI, áreas I y II tiene como propósito “*que los alumnos apliquen los conceptos básicos del cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida,*

mediante el análisis de procesos infinitos. Este último curso de Matemáticas del bachillerato introduce a los estudiantes, de manera gradual, a los conceptos de derivada e integral, así como a los problemas que históricamente dieron lugar al desarrollo del cálculo”. Y como objetivo general: “que el alumno desarrollará habilidades para visualizar, conjeturar, analizar, generalizar, sintetizar y modelar el cambio y la medida a través del estudio del cálculo Diferencial e Integral. Reconocerá el cálculo como un instrumento para acceder al estudio de procesos infinitos. Se apoyará en las tecnologías digitales como herramientas para representar, analizar y resolver problemas de diversos contextos. Realizará un primer acercamiento formal al estudio de estos contenidos como una preparación propedéutica para los estudios de nivel superior” (UNAM, 2018).

Por lo anterior, los sistemas educativos, formales e informales, tienen una función muy importante dado que son el mecanismo que utilizan las sociedades para la transmisión de la cultura, los valores, las habilidades y los conocimientos de una generación a otra, desarrollando habilidades intrapersonales e interpersonales y habilidades para el trabajo, entre ellas la habilidad para adaptarse a las nuevas tecnologías y la cultura digital (Brunner, 2000); pero en América Latina aún se carece de políticas de evaluación que sean claras y adecuadas para evaluar los aprendizajes de los alumnos y estas habilidades; además de que se carece de programas de formación de maestros, dirigidos a la enseñanza y desarrollo de las mismas (Waissbluth, 2018).

Se sigue observando un rezago educativo que va en aumento conforme avanzan los niveles educativos, como lo podemos ver en el nivel de la EMS en el que sigue existiendo una problemática de manera general, pero también particular en la disciplina de las matemáticas, en la que los alumnos presentan problemas para usar las matemáticas; debido a que los cambios en las políticas no son eficientes para desarrollar a los ciudadanos y al país, porque sigue existiendo un gran abismo entre lo que se enseña y lo que hace falta en la sociedad que está surgiendo (Brunner, 2000).

El bachillerato debe dar cuenta de qué deben aprender los estudiantes y el por qué, pero al mismo tiempo, realizar un análisis más profundo para saber *¿Qué es lo que de la matemática llega a la escuela al punto que le permita al docente decir que lo que está enseñando es matemática?*

En este nivel educativo podemos recuperar que sí hay currículo (docentes, alumnos) y sí hay iniciativas, como las mencionadas anteriormente (SUMEM, MADEMS, Planes y Programas de la ENP) con la intención de realizar mejoras en el bachillerato, pero la problemática radica en que dichas propuestas no se ven concretadas en el aula, es decir, no se implementan. Al mismo

tiempo, aunque se ha mejorado en términos de cobertura, se ha dejado de lado los procesos de aprendizaje dentro del aula.

Aunado a ello, se observa que uno de los errores que se han cometido en la educación matemática, es pensar que a los estudiantes se les debe facilitar la vida y al mismo tiempo a los docentes y por ello únicamente se le presentan a los alumnos tareas simples, que no implican un desafío intelectual. Se tiene la intención de mejorar los resultados de las evaluaciones y para lograrlo se han eliminado de los planes de estudio algunos temas que los estudiantes presentan grandes dificultades en ellos, por tal motivo, algunos temas como, la trigonometría en tres dimensiones, las demostraciones de teoremas y las aplicaciones de cálculo a la mecánica, por mencionar algunos, han ido desapareciendo del currículo.

Por ello el desafío que enfrentamos es muy grande, complejo y crítico, ya que debe estar encaminado a formar a quienes serán los futuros habitantes de nuestra nación. Por ello, es viable pensar en la creación de entornos de aprendizaje, virtuales o presenciales, que favorezcan la construcción de los conocimientos de los alumnos, considerando el acompañamiento y trabajo colaborativo con los docentes expertos en la disciplina, para que no sólo se informe de que existe un nuevo plan educativo, sino que pueda reflexionar su práctica educativa a partir del mismo y lo pueda implementar de manera pertinente atendiendo las necesidades de los alumnos.

CAPÍTULO 2. LA MATEMATIZACIÓN COMO OBJETIVO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla.

(Suárez y Cordero, 2005)

Como ya se mencionó, en la presente investigación se presenta una propuesta de diseño de entorno de enseñanza y para que este diseño sea coherente con las demandas del currículum es imprescindible reconocer qué capacidades de pensamiento queremos desarrollar; y en este caso el objetivo es potencializar las capacidades de pensamiento especializadas en matemáticas, por lo que el objetivo del presente capítulo es describir cada una de las capacidades que se deben promover en los alumnos preparatorianos para que puedan desempeñarse en la vida profesional y logren alcanzar los objetivos establecidos en el currículum.

Por ello resulta pertinente abordar en el primer apartado la mirada socio-histórica de las matemáticas para vincular las matemáticas con las actividades que ocurren dentro del aula, ya que el aula no es natural, depende del currículum y del contexto, por ello, en el diseño de la propuesta partimos de un problema real y no de las matemáticas mismas.

En el segundo apartado se recupera la importancia del desarrollo de las competencias matemáticas a las cuales nos referiremos como “acciones matemáticas” que están articuladas a lo largo del proceso de matematización; proceso que se aborda como objetivo de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas, es decir, las acciones simbólicas que los alumnos preparatorianos pueden poner en juego al ser partícipes dentro de actividades contextualizadas.

Como cierre se incluye un tercer apartado en el cual, se comentará cómo es que a partir de múltiples experiencias el pensamiento matemático se integra y se vuelve cada vez más complejo, y se ve reflejado en las producciones que realizan los alumnos a lo largo de cada una de las actividades, particularmente en la integración de un informe matemático que es análogo a un artículo matemático que elaboran los expertos en investigación matemática.

2.1. La realidad socio-histórica de las matemáticas

En la actualidad es frecuente que las personas no tengan una idea clara de ¿por qué aprender matemáticas?, y se llegan a preguntar: ¿para qué sirven? y ¿Dónde están las matemáticas en la vida cotidiana? La respuesta a ello es sencilla, ya que basta únicamente con usar un teléfono celular o una computadora para estar cerca de las matemáticas (Siglo XXI, 2010; SUMEM, 2014).

Las matemáticas no nacieron plenamente formadas, son y fueron creadas a través de actividades humanas, se fueron construyendo gracias a los esfuerzos acumulativos de muchas personas que procedían de culturas diferentes y por lo tanto hacían uso de lenguas diferentes (Stewart, 2007). Por lo tanto, son reconocidas social y culturalmente y a lo largo de la historia han sido de gran utilidad para el hombre en la resolución de situaciones de la vida cotidiana en términos de funciones sociales, por lo que esta disciplina en tanto saber cultural y social se construye en interacción con otros; muchas de las ideas matemáticas que datan de hace más de 4,000 años aún se siguen utilizando en la actualidad (González y Weinstein, 2001; Duhalde y González, 1997).

Las matemáticas son una ciencia peculiar, iniciaron con los números y los números siguen siendo fundamentales; las matemáticas son abstractas y tienen aplicaciones en la ciencia, la industria, el comercio e incluso en el arte (Stewart, 2007). A lo largo de muchos siglos, el hombre ha intentado modelar y comprender su entorno apoyándose para ello en esta disciplina, concibiéndolas como el lenguaje adecuado para explicar las propiedades y el comportamiento del mundo que le rodea. Al ser un fenómeno cultural, las matemáticas se pueden conocer al actuar sobre el mundo usando la cultura y al igual que otras ciencias, su enseñanza debe ser contextualizada (Siglo XXI, 2010; Duhalde y González, 1997).

Por ejemplo, el pensamiento aritmético del antiguo Egipto y Babilonia surgió como resultado de operar con signos para que las personas lograran resolver de forma sistemática problemas elementales que estaban relacionados con el conteo y la medición. De ahí la importancia del papel de los signos para el desarrollo del pensamiento matemático (Radford, 2018). En la ciencia, la importancia del papel de las matemáticas se ha ido fortaleciendo con el tiempo, debido a que han permitido comprender fenómenos de la naturaleza a partir de la construcción de modelos matemáticos para realizar estimaciones o predicciones (De la Peña, 2008).

En este sentido, recuperamos el principio de *realidad* haciendo referencia a lo que concierne a la realidad social de las matemáticas, lo cual implica reconocer y seleccionar los fenómenos, situaciones o problemas en contexto (Córdoba, 2011). Pero, el humano no puede acceder o tener una relación directa con la realidad, por lo tanto, necesita de un objeto de conocimiento específico que lo acerque a ella, porque dicho objeto apela a la realidad, dado que es una abstracción de la misma realidad. En este caso particular, el objeto de conocimiento específico son las matemáticas, y son ellas las que le permiten al humano acceder e interpretar la realidad matemáticamente.

Es importante recuperar que aunque las matemáticas son abstractas estas tienen una estrecha relación con la realidad, es decir, cuando se pretende modelar o representar la altura de algún objeto, se realizan diferentes inscripciones matemáticas, desde representaciones pictóricas, icónicas, gráficas, hasta logra construir una generalización del modelo que permita resolver la problemática. Las representaciones que se elaboran cada vez van siendo más abstractas y en la medida de ello, se van alejando de la realidad a la cual hacen referencia, pero siguen manteniendo relación con el objeto real que se está midiendo, lo cual permite obtener un resultado matemático para responder al problema planteado (SUMEM, 2014).

En la presente investigación también se recupera el principio de *actividad matemática* propuesta por Freudenthal desde el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), recuperando que las matemáticas al ser consideradas como actividades humanas, su finalidad es matematizar, es decir, organizar el mundo que nos rodea. y al mismo tiempo la matematización es una actividad de búsqueda y resolución de problemas y organización de temas. Desde la perspectiva de este autor, matematizar involucra principalmente procesos de: generalización, el cual conlleva a un proceso de reflexión; y la formalización, la cual implica modelar, simbolizar, esquematizar, y definir; las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas, en contextos reales (Alsina, 2009).

La actividad real es la que produce la transformación del pensamiento, por ello, la matematización es el corazón de la actividad matemática. En este sentido, consideramos a la matematización como una práctica social que va más allá del aula, y en la presente investigación recuperamos actividades sociales reales y las traemos al aula, es decir, construimos un contexto artificial de la misma actividad real en la escuela para que los alumnos utilicen las matemáticas y sus inscripciones; para que piensen como matemáticos.

Es importante mencionar que los contenidos matemáticos están interconectados, es decir, el álgebra, la geometría, el cálculo, la estadística y todas las áreas de las matemáticas no tienen que ser tratadas de manera aislada una de otra, y las actividades de enseñanza deben incluir contenidos matemáticos interrelacionados, de acuerdo con la perspectiva de Freudenthal (Alsina, 2009).

El proceso de matematización puede llevarse a cabo independientemente del área de las matemáticas que se trabaje, es decir, si se utiliza el álgebra, aritmética, la geometría, trigonometría o cálculo diferencial e integral. En el siguiente apartado se desarrollan las capacidades de pensamiento especializado en matemáticas desde el marco de la matematización.

2.2. La matematización como acciones simbólicas en la enseñanza

Actualmente se ha encontrado que los alumnos que egresan de las carreras profesionales tienen dificultades para aplicar los contenidos que aprendieron en la Universidad debido a que, existe una desvinculación o una disociación entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, es decir, en el ambiente escolar el objetivo son las matemáticas en sí mismas y en el ambiente laboral o profesional las matemáticas son una herramienta que le permite al profesional realizar su actividad laboral (Sepúlveda, 2020; Acebo y Rodríguez, 2021).

Por otro lado, al hablar de evaluación en matemáticas, éstas tampoco contribuyen al desarrollo de capacidades de pensamiento matemático especializadas, porque son exámenes descontextualizados que únicamente centran su atención en la memorización y reproducción fórmulas, procedimientos, algoritmos y dejan de lado la aplicación de esos contenidos en contextos auténticos (Aravena, Caamaño, y Giménez, 2008).

Desde nuestra perspectiva, en el diseño educativo de matemáticas, es importante recuperar el contexto y no limitar las asignaturas de matemáticas a los temas más fáciles, dejando de lado algunos de los temas que son considerados como difíciles por su complejidad, así mismo es importante contemplar la relación que tienen las matemáticas con otras áreas o ámbitos disciplinares, es decir, ver a las matemáticas como un todo holístico en el que todo está articulado para el logro de los objetivos de aprendizaje, en este caso de capacidades de pensamiento especializadas que les permitan a los alumnos responder a las demandas del contexto actual; y con ello romper la fragmentación del currículum tradicional de las materias de matemáticas. A diferencia de los contenidos o conocimientos declarativos que se pueden exponer o enseñar en una

clase tradicional; las formas de pensar o capacidades intelectuales (Funciones Psicológicas Superiores, como lo llamaría Vygotsky), no se pueden enseñar, dado que éstas se desarrollan bajo un contexto de actividad que las propicie.

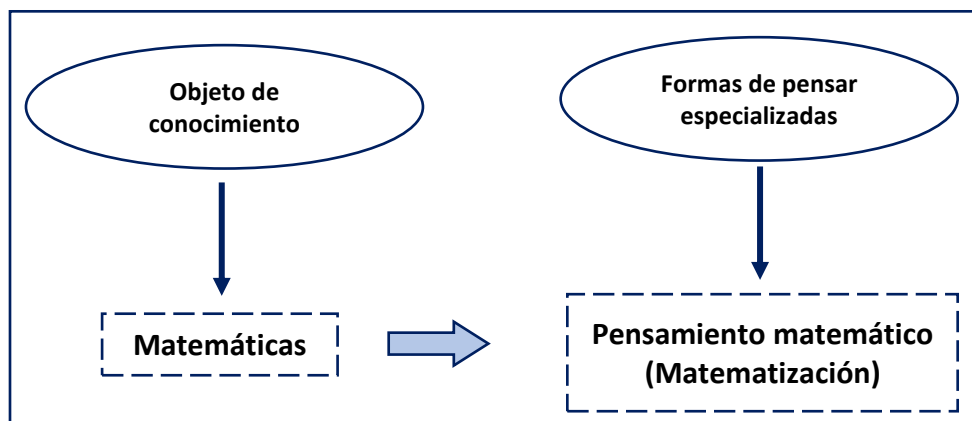
Ante dicha problemática se considera la enseñanza de las matemáticas en relación con la matematización, ya que este proceso resulta viable para la enseñanza en la que se incorporan problemas de la realidad para relacionarlos con el mundo de las matemáticas, y constituye el medio para que los alumnos mejoren la comprensión de conceptos matemáticos y descubran que la función de las matemáticas es: *servir como herramienta para interpretar la realidad* (Acebo y Rodríguez 2021, Arrieta, 2003). El término “matematización” encarna la acción y se refiere a la experiencia de un proceso activo de creación y utilización de las ideas matemáticas como herramientas.

Como parte del proceso de matematización se distingue el momento de modelación que es una forma particular de participar y representar el mundo y los acontecimientos de la realidad. De esta forma lo cuadrático, lo lineal, lo exponencial, lo periódico, lo inversamente proporcional, entre otras, son herramientas, son artefactos utilizados en las prácticas sociales de modelación ejercidas en contextos sociales (Arrieta, 2003; Bocco, 2010).

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, en matemáticas el pensamiento que se pretende desarrollar es el pensamiento matemático y a esa forma de pensar especializada es a la que llamamos *Matematización*; la capacidad de interpretar el mundo matemáticamente. Es decir, el humano puede modelar o generar un modelo matemático de cualquier fenómeno como, por ejemplo: el lanzamiento de un tiro de básquetbol, o la velocidad a la que se expande la lengua de lava en una erupción volcánica. En este sentido, matematizar el mundo, es tener la capacidad de crear un modelo matemático e interpretarlo matemáticamente bajo un contexto de actividad social (ver figura 1).

Figura 1.

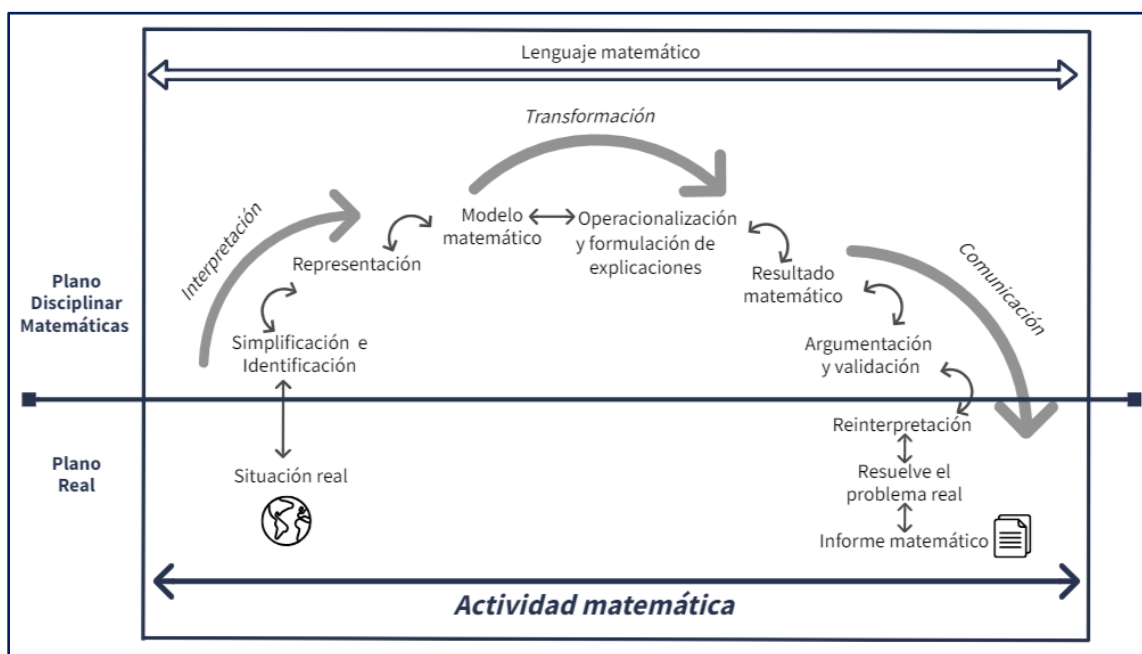
Pensamiento matemático especializado (elaboración propia).



Por ello, en esta investigación se considera el *proceso de la matemización* como un *objetivo de aprendizaje*, el cual refiere a la capacidad de realizar acciones simbólicas con el sistema matemático; iniciando con la simplificación de un problema enmarcado en la realidad, que debe ser interpretado y representado en términos del sistema matemático; realizando acciones matemáticas, como, construir modelos para representar el problema real, empleando conceptos, axiomas, postulados y operar con reglas para darle solución, haciendo uso de las herramientas materiales y simbólicas correspondientes a este sistema; y, finaliza con la traducción de la solución matemática en el plano disciplinar ahora en términos de la situación real (plano real), lo cual implica argumentar, razonar y validar dicho modelo para el logro de la meta establecida. Con este procedimiento se puede constatar cómo los matemáticos *hacen matemáticas*, es decir cómo razonan matemáticamente (INEE, 2008; Santiago Abasolo, 2019) (ver figura 2).

Figura 2.

Dimensiones del proceso de matematización con sus respectivas acciones matemáticas enmarcadas en la actividad matemática (elaboración propia).



A partir de la investigación realizada, en este trabajo se han clasificado las *acciones matemáticas* que están implicadas en el proceso de matematización, en 3 grandes dimensiones:

- **Interpretación:** Formular situaciones matemáticas, simplificando y representando las variables.
- **Transformación:** Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos matemáticos; modelización y operacionalización con el sistema.
- **Comunicación matemática:** Interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos. Argumentar, validar y elaborar una reinterpretación desde el plano disciplinar al plano real para dar solución al problema en contexto.

Es importante señalar que al referirnos al lenguaje matemático estamos considerando que aparece a lo largo de todo el proceso de matematización porque es el sistema que los alumnos están utilizando para comunicar sus ideas, las cuales están relacionadas con múltiples objetivaciones que forman parte del campo disciplinar de las matemáticas.

En los siguientes apartados se profundizará en cada una de las dimensiones que conforman el proceso de matematización y en cada una de las acciones matemáticas que están implicadas y que forman parte de los objetivos de aprendizaje que se espera que los alumnos preparatorianos logren alcanzar al concluir el bachillerato.

2.2.1. Interpretación (del plano real al plano disciplinar)

1. **Identificación del problema.** Identifica y comprende el problema real considerando los aspectos matemáticos que le serán de utilidad para resolver la problemática.
2. **Simplificación del problema para su análisis matemático.** Simplifica la situación real, haciendo uso de un supuesto matemático, para identificar los datos y variables relevantes que están implicadas en el problema real para traducirlo a un problema matemático y plantear una solución en el contexto real.
3. **Representación.** Reconoce que la problemática puede ser modelada matemáticamente e interpreta y organiza las variables y parámetros que le permitirán construir su modelo matemático.

2.2.2. Transformación (dentro del plano disciplinar)

4. **Modelización:** Genera un modelo matemático geométrico o algebraico para representar el problema real dentro del contexto de las matemáticas (diagramas, gráficos, ecuación o función algebraica) describiendo cada una de las variables que lo conforman (extrae la información matemática de los mismos).
5. **Operacionalización.** Emplea axiomas y propiedades para solucionar el problema (trabajo matemático). Selecciona el modelo adecuado, sustituyendo correctamente los valores del modelo establecido o construido y resuelve la operación (modelo matemático) correctamente, en el contexto de las matemáticas.
 - **Formulación de explicaciones usando la notación matemática.** Usa los elementos de la nominalización y los conecta e integra para resolver la

problemática. Emplea el lenguaje formal, técnico, simbólico (\wedge), subíndices y notaciones, para discutir y argumentar.

- **Uso de herramientas matemáticas tecnológicas (objetivaciones).** Utiliza gráficas, tablas y diagramas para representar, interpretar y comunicar sus resultados. Usa herramientas matemáticas físicas, como los instrumentos de medición, además de calculadoras y herramientas tecnológicas (hojas de cálculo, GeoGebra, Excel), para representar el modelo del problema contextualizado y a partir de ello, tomar decisiones.
 - **Visualización.** Implica el reconocimiento y uso de las representaciones geométricas para formular conjeturas, analizar y desarrollar un lenguaje para comunicar sus resultados. Interpreta el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades.
6. **Resultado matemático (generalización y abstracción).** Implica la abstracción y elaboración del modelo algebraico (representación simbólica en discurso o en ecuaciones) el cual puede interpretarse para resolver diferentes problemáticas del mismo tipo (generaliza los resultados obtenidos en una situación específica). Tiene que ver con la construcción simbólica (dibujo, icono, símbolo).

2.2.3. Comunicación matemática (del plano disciplinar al plano real)

7. **Validación y Argumentación matemática.** Su argumentación es consistente con la disciplina matemática. Hace supuestos y reconoce las limitaciones de su modelo matemático y reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o desarrollar las soluciones existentes de diferentes maneras.
8. **Reinterpretación de los resultados matemáticos.** Propone estimaciones a partir del modelo matemático y contrasta los resultados con la problemática del contexto real.
9. **Comunicación matemática, verbal o escrita para tomar un posicionamiento y reflexionar sobre la argumentación en un artículo matemático.** Integra la información y expresa de forma oral y escrita su modelo matemático, usando la nominalización para explicar sus cálculos y sus resultados (procedimientos

matemáticos) hasta la explicación de cuestiones que comporten relaciones complejas, incluidas las relaciones lógicas, haciendo uso del lenguaje formal matemático. Implica así mismo, que comprenda los planteamientos escritos y orales de terceros sobre la misma problemática. Reconoce la importancia y el uso del modelo matemático para la resolución de la problemática a partir de un supuesto matemático que le permita tomar un posicionamiento (Solar y Azcárate, 2011).

10. **Transferencia.** Implica la capacidad de utilizar un modelo matemático para resolver problemas profesionales y cotidianos que van más allá de la escuela (Ciltas e Isik, 2013, citado en Acebo y Rodríguez, 2021).

2.3. Integración del pensamiento matemático

La actividad de enseñanza implica, para los alumnos, realizar diversas acciones simbólicas, entre ellas el discurso y operar con el sistema matemático, siendo en la acción en donde se formaliza el uso de múltiples representaciones que parecerían rudimentarias pero que se sobreponen, como el uso de, números, lenguaje (palabras), diagramas, modelos geométricos y algebraicos, etc., es decir, se arma un entramado de significantes o una cadena de significantes. Esto es, que el pensamiento está materializado en el ámbito social en donde se llevan a cabo acciones simbólicas, eso es matematizar. Desde este planteamiento consideramos que toda la actividad matemática es compleja e integra todo, dado que todo está interconectado como un sistema dinámico complejo y el proceso de matematización es el centro de la actividad matemática (J. Alatorre Rico, comunicación personal, 14 de Agosto del 2023).

En este sentido es importante resaltar que si el pensamiento forma parte de la actividad matemática, entonces la mente o el pensamiento que desarrolle el alumno corresponderá a la misma actividad matemática de la que fue partícipe (Cárdenas, Lugo, 2020). De igual manera, recuperar la idea de lo que Vygotsky llama Funciones Psicológicas Superiores (FPS) y la metodología de la Investigación Basada en Diseño (IBD), nos permite desarrollar sistemáticamente los elementos que debe tener el diseño de la propuesta de entorno virtual de aprendizaje para crear las condiciones que propicien el desarrollo de los objetivos de aprendizaje; la matematización.

Es importante señalar que para desarrollar estas capacidades de pensamiento en los alumnos se diseñaron actividades que propiciarán el despliegue de las mismas, por lo tanto, se consideró

como meta de cada una de las actividades la escritura matemática en donde también se pone en juego la argumentación matemática que es una de las capacidades en la que los alumnos presentan mayor dificultad. En general, los escritos matemáticos se elaboraban en equipos, porque se considera imprescindible la interacción entre pares en la construcción del pensamiento matemático, dado que se propicia la discusión y argumentación entre ellos (Cordero, 1995). Para ello, en colaboración con las maestras de matemáticas y con la asesoría del Dr. Eugenio Días Barriga, se diseñó un formato para que los alumnos reconocieran qué es un informe matemático y sus características, en el cual también se definió qué es un modelo matemático:

- *Informe matemático.* Es un escrito breve en el que el autor debe presentar sus argumentos o tesis, en el que pretende explicar un fenómeno, regularidad o patrón, mediante un modelo matemático con el cual valida y justifica sus razonamientos. Puede contener gráficos, esquemas, tablas, fórmulas, ecuaciones algebraicas, algoritmos en el desarrollo del mismo, además de una explicación verbal bien estructurada.
- *Modelo matemático.* Es una representación simplificada de la realidad, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, en las que se explicitan las relaciones entre variables mediante fórmulas, ecuaciones y uso de números en general. Son una herramienta que sirve para interpretar la realidad matemáticamente (Acebo y Rodríguez, 2021; Bocco, 2010).

En este sentido, la elaboración del informe matemático implica una producción original por parte de los alumnos, al igual que la integración de todos los pasos que han seguido para solucionar una problemática en contexto, es decir, el informe escrito demandaba la integración de: la introducción, en donde debían describir el objetivo, el contenido del texto y explicar su planteamiento frente a la problemática así como el supuesto matemático a resolver; la presentación del modelo matemático, por medio de gráficas, esquemas, fórmulas, algoritmos, ecuaciones algebraicas, etc., realizando la descripción del procedimiento que se siguió y los resultados; la validación del modelo, que implica contrastar el modelo en términos del problema real, para considerar sus alcances y limitaciones, reconociendo las disciplinas de las matemáticas que ayudarán a validar su modelo; y posteriormente la conclusión, en donde se plantean los argumentos más importantes para justificar y dar respuesta (según los resultados obtenidos) a la problemática

que se está proponiendo a partir del modelo matemático propuesto, buscando principalmente convencer de que los puntos (vistos ya desde un amplio contexto) que se vieron anteriormente son correctos y pretende demostrar nuevamente la validez, para finalizar el artículo; y por último debe incluir las referencias para respaldar el informe.

De acuerdo con Aravena, Caamaño y Giménez (2008) el proceso culmina con la exposición oral del informe matemático elaborado, esto para propiciar que los alumnos sean capaces de plantear los argumentos desarrollados en el escrito y contrastarlos con las propuestas de los demás compañeros, siendo capaces de justificar sus modelos de manera verbal, haciendo uso del lenguaje formal matemático.

Al escribir en matemáticas los alumnos se ven en la necesidad de plantear argumentos matemáticos y esta capacidad de pensamiento debe plantearse desde el diseño curricular en la enseñanza de las matemáticas, porque es una de las capacidades que los alumnos deben desarrollar. Algunos de los análisis que refieren a la argumentación en el aula consideran como base el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), quien sugiere un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones; en el caso de las matemáticas, éstas siguen un proceso particular debido a que al escribir un argumento matemático se deben tomar en cuenta sus reglas, convenciones y contenidos particulares, y de igual manera en el proceso de argumentación se han propuesto diferentes niveles de complejidad como: la reproducción, la conexión, la generalización y la reflexión (Solar, Azcárate, y Deulofeu, 2012; Solar, García, Rojas y Coronado, 2014).

En síntesis, lo anterior es de suma importancia porque desde la perspectiva de la presente investigación, se considera que escribir es pensar, y la escritura forma parte de la actividad, porque es en la actividad en donde tiene sentido; está situada. Esto es que, el pensamiento matemático, esta materializado en la escritura la cual es una objetivación de la realidad, es decir, de la actividad. Por lo tanto, leer y escribir son acciones disciplinares y para el caso de las matemáticas, la escritura implica usar todos los tipos de inscripciones como los gráficos, tablas, ecuaciones, funciones, etc., además del uso de palabras para escribir en matemáticas.

Entonces escribimos para pensar y en la escritura se objetiva el pensamiento, los conocimientos y las acciones matemáticas, como la argumentación; los alumnos escriben para aprender a representar los contenidos y el lenguaje de la disciplina que están aprendiendo, en el caso de Aleph vinculado al contexto que enmarca la actividad societal en la que participan los estudiantes. Cabe señalar que las matemáticas, como cualquier otra disciplina, tiene un lenguaje

propio y muy específico pero este no se reduce solo a las ecuaciones o modelos porque estos no pueden estar aislados de la escritura en prosa, porque cada fórmula o modelo tienen un lenguaje verbal (significados verbales) y adquieren sentido en el contexto particular (Flesher, 2003).

Para favorecer el pensamiento matemático es importante escribir en matemáticas, al igual que en otras disciplinas, porque enseñar a repetir conocimientos no le ayudará al alumno a resolver problemas en el contexto profesional real. La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en el uso de los conocimientos dentro de la actividad en la cual adquieren sentido, no se trata de memorizar, sino de entender (Miller, 1991; Flesher, 2003; De la Peña, 2008). En este sentido escribir en matemáticas es importante por las siguientes razones:

- Permite que los alumnos organicen sus pensamientos, es decir, les permite representar el mundo de manera concreta a partir de un modelo matemático con sus respectivas variables y al mismo tiempo permite que realicen la revisión de sus propuestas y las analicen desde otros puntos de vista al momento de compartirlas con sus compañeros.
- En el papel, los alumnos concretan sus ideas y visualizan sus errores.
- La docente puede ofrecer ayudas y retroalimentación de forma más puntual.

En conclusión, al exponer a los alumnos a diferentes secuencias en las que el producto o meta final de la actividad implica la elaboración de un artículo o informe matemático, en Aleph les estamos ofreciendo múltiples oportunidades para usar el lenguaje (nominalización) bajo un contexto, a escribir para aprender a usar las matemáticas y pensar cómo piensan los matemáticos. En el siguiente apartado se desarrollará la importancia de los entornos virtuales para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático.

CAPÍTULO 3. ALEPH-5: ENTORNOS VIRTUALES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El presente capítulo tiene como intención conceptualizar y definir qué son los Entornos de enseñanza, y en particular los Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA). Posteriormente será importante hablar sobre la perspectiva teórica que se utilizó en la presente investigación y desde la cual se concibe el diseño de los EVEA, lo cual dará la pauta para describir el Entorno Virtual que se propone a partir de esta perspectiva. Para ello, es importante considerar la incorporación de las nuevas tecnologías y las diferentes modalidades de entornos virtuales que se han implementado, las características que los definen y sus áreas de oportunidad.

Al hablar de *entornos de enseñanza* podemos referirnos a diferentes cuestiones, por lo que es necesario tener claridad de lo que implica dicho concepto. Los entornos de enseñanza se pueden entender como un espacio dinámico físico o salón de clase, en la cual se enmarca todo el proceso de enseñanza y aprendizaje, porque es allí en donde se establecen convenciones entre el docente y los alumnos que participan en el desarrollo de diversas actividades que están encaminadas al logro de un objetivo en particular para promover el aprendizaje respecto a un dominio de conocimiento específico, como lo son las matemáticas, por ejemplo. Las actividades que se llevan a cabo en estos espacios definen las acciones que permiten poner en juego un sistema de conocimiento específico, propician las interacciones entre los sujetos que participan en las mismas, quienes ponen a disposición, en un plano social, conocimientos previos de otros contextos en los que han sido partícipes, y con ello contribuyen con el desarrollo de sus aprendizajes; cabe resaltar que dentro de estos entornos de enseñanza la participación es una condición necesaria para que se desplieguen las capacidades de pensamiento de los sujetos involucrados.

Por otro lado, cuando nos referimos a un entorno de enseñanza mediado por las tecnologías, o Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA), éste puede entenderse como un microcontexto, que también se construye con la intención de formar personas que puedan desarrollar un pensamiento especializado y, desde su diseño pedagógico se considera el rol del docente, el papel del alumno, la comunidad, las herramientas tecnológicas, la organización de las acciones, los contenidos y el tipo de actividades formativas, las estrategias didácticas y las herramientas de evaluación que se utilizara para dar cuenta del cumplimiento de los aprendizajes curriculares. En estos espacios, para favorecer el surgimiento de los procesos de aprendizaje, se incorporan herramientas tecnológicas

que se usan como instrumentos de mediación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es importante señalar que si centramos la atención en el diseño pedagógico, la tecnología forma parte de los recursos utilizados para la conformación del espacio de enseñanza y aprendizaje, un espacio en donde el docente asume un rol de mediador del proceso de enseñanza, se establecen convenciones entre sujetos, con el propósito de lograr desarrollar los objetivos de aprendizaje, los cuales se ponen en juego a lo largo de las actividades (Bossolasco, 2013, p. 78).

Es importante mencionar que debido al impacto que está teniendo la tecnología en la educación, la virtualidad tiene un papel muy importante para definir los EVEA, dado que estos son espacios dinámicos que tienen un espacio en la red, como ya se mencionó anteriormente, y desde nuestra perspectiva el Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje, no hace referencia directa a una plataforma virtual, sino que referimos a él desde un marco más amplio. Por ello, en los siguientes subapartados se abordan las diferentes modalidades de entornos virtuales que se han propuesto para mejorar las prácticas de enseñanza-aprendizaje; la propuesta del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado como espacio dinámico desde la perspectiva sociocultural; los Entornos Virtuales para la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato y por último, se presenta el diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el contexto de la Escuela Nacional Preparatoria.

3.1. Modalidades de Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje

La incorporación de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo ha tenido mucha relevancia en el siglo XXI, y pueden contribuir para mejorar la educación siempre y cuando se entremen en pedagogías que pongan el foco en los sujetos de aprendizaje, reconociendo los cambios culturales y resignificando los contenidos de enseñanza para favorecer el desarrollo de habilidades fundamentales para que respondan a las demandas de su contexto (Soletic, 2021). Por tal motivo, ha dado oportunidad de diversificar las formas de enseñanza para favorecer los aprendizajes en los diferentes niveles educativos, por lo que a continuación se abordan algunas modalidades que han tenido gran relevancia cuando hablamos de Entornos Virtuales de Enseñanza Aprendizaje, se plantean las características que los definen y sus áreas de oportunidad.

Ahora bien, es importante definir que los Entornos Virtuales de Enseñanza Aprendizaje son un espacio alojado en la red y los podemos entender desde tres modalidades: los MOOC, la

modalidad híbrida y los Entornos Coordinados, propuesta que se plantea en esta investigación, por lo que a continuación describiremos las características que definen a estas modalidades.

Una de las modalidades de Entornos de Enseñanza Virtuales han sido los **MOOC**, por sus siglas en inglés (*Massive Open Online Courses*), los cuales son cursos en línea que en general son abiertos y masivos, que tienen como propósito expandir la oferta educativa al público en general, ofertando cursos de diversos temas como informática, poesía, historia, matemáticas, por mencionar algunos ejemplos. Algunos MOOCs son gratuitos y ofrecen una constancia de participación sin valor curricular, pero existen otros que son de pago y es posible obtener un certificado con validez oficial. Entre las cualidades de los MOOCs se encuentran que los participantes no necesitan un perfil predeterminado para participar, por tanto la edad y las características profesionales son muy heterogéneas (García Peñalvo, Fidalgo Blanco y Sein Echaluze, 2017). En el caso de las plataformas como México X y Coursera, se especifica que estos cursos están abiertos para todo público en general, y que el requisito más importante es contar con una computadora con acceso a internet (México X, 2021). La *masificación* quizás es la característica más importante, ya que dentro de una plataforma que ofrezca cursos MOOC pueden participar entre 2,000 y 1,000,000 participantes (México X, 2021), por tanto, tienen un amplio alcance. Respecto a las plataformas que se utilizan para impartirlos, se caracterizan por disponer de diversos recursos didácticos entre los que destacan los audiovisuales, cuentan con canales de comunicación y cooperación entre los alumnos como los foros, y además tienen pruebas para la evaluación de los participantes; y todo el trabajo que se realiza dentro de estos espacios es compartido y queda accesible para que todas las personas puedan leer, reflexionar, participar y tener acceso a todos los materiales en el momento que lo requiera. Sin embargo el principal diferenciador de las plataformas, donde se alojan los MOOCs, es su alta capacidad para trabajar de forma simultánea con miles de usuarios, es decir, la capacidad de gestionar un gran número de conexiones accediendo a diversos recursos como pruebas de evaluación y vídeos. Es innegable que los MOOC han tenido gran éxito en cuanto a personas que se inscriben en los mismos, número de universidades implicadas, número y crecimiento de cursos, y surgimiento de nuevas propuestas, pero los MOOC enfrentan una gran problemática que es la tasa de *abandono* (García Peñalvo, Fidalgo Blanco y Sein Echaluze, 2017). Según datos de México X el número de personas que finaliza un MOOC es del 30% de las personas que se matriculan (México X, 2021); desde el punto de vista académico cualquier curso que tenga

un gran abandono y con baja tasa de superación, es considerado un fracaso (García Peñalvo, Fidalgo Blanco y Sein Echaluze, 2017).

Los MOOC consideran las variables enseñar-aprender y son una forma de aprender en un mundo interconectado que se genera a partir de crear una red de personas interesadas en un mismo tema, son cursos que tienen un inicio y un final, cuentan con material instruccional, hay facilitadores y participantes, los cuales se reúnen virtualmente para hablar del tema en forma estructurada; pero en general los MOOC no responden a una *institución educativa, formal* particular, sino que es sólo una forma de conectarse y colaborar.

En el siglo XXI, debido a los cambios tecnológicos de la información y la comunicación en la sociedad, otra de las modalidades que recientemente se han puesto en marcha, es la *modalidad híbrida o blended learning* (aprendizaje combinado), la cual no reemplaza el trabajo escolar presencial tradicional sino que, su principal objetivo es la convergencia de diversas acciones formativas que tienen lugar en la presencialidad y en la virtualidad a distancia en un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) con la finalidad de generar una propuesta de aprendizaje integrador (Xicoténcatl-Ramírez, Romero-González, Jacques-García, Hernández-Valerio, & Olmos-Trejo, 2015; UNAM, 2020; Soletic, 2021). El uso de los recursos de Internet y de las aulas virtuales van en función del grado de presencialidad o distancia y en la interacción entre profesor y alumnado (Area, San Nicolás & Fariña, 2010).

Las aulas virtuales de *b-learning* están caracterizadas por tres dimensiones que constituyen el modelo de docencia virtual: la dimensión informativa, la dimensión comunicativa y la dimensión experiencial; los cuales deben presentar un equilibrio para ofrecer los siguientes recursos (Area, San Nicolás & Fariña, 2010): *recursos de tipo informativo*, destinados a facilitarle al estudiante el acceso al conocimiento que debe ser adquirido mediante documentos de lectura, a modo de apuntes, para el estudio o reelaboración de los contenidos de la asignatura, presentaciones multimedia, esquemas, gráficos o mapas conceptuales, videoclips o animaciones, biblioteca digital, etc.; *recursos para la comunicación*, tales como foros de debate, tableros de noticias, mensajería interna, los cuales, permiten la comunicación entre los estudiantes y entre éstos y su profesor, para que de este modo el docente pueda desempeñar la acción tutorial individual o grupal, además del seguimiento y evaluación continua del trabajo de los estudiantes; *recursos para el aprendizaje experiencial*, en donde se le presentan a los estudiantes actividades o tareas que tienen que realizar a través del aula virtual, es decir, se crean situaciones de aprendizaje donde el estudiante tiene que

aprender a través de una experiencia o acción: por ejemplo, redactar un documento o informe, buscar información para construir una base de datos, planificar y ejecutar un proyecto, resolver un problema, analizar un caso, construir un videoclip, etc. Xicoténcatl y colaboradores (2015), mencionan que, en la modalidad b-learning, algunos de los estudiantes están satisfechos con la capacitación recibida para el conocimiento y uso de la plataforma o campus virtual, están de acuerdo con el dominio de los profesores en el uso del campus virtual para proporcionar asesoría y también en cómo el uso de los recursos en la modalidad b-learning ha contribuido positivamente a su aprendizaje. Mientras que otros estudiantes están poco o nada satisfechos con la capacitación recibida para el uso del campus virtual y consideran que hacen falta asesorías por parte de los docentes. Es importante resaltar que la mayoría de los docentes, usan los recursos de documentos informativos y, tanto estudiantes como docentes, no utilizan los recursos de la dimensión comunicativa y los recursos de la dimensión experiencial. Por lo anterior, podemos destacar como características generales de las aulas virtuales de b-learning, que el papel del docente es fundamental dado que son los principales responsables, son creativas y de innovación docente, se crean materiales multimedia, se proponen distintas tareas de aprendizaje, existe gran actividad de interacción y comunicación social a través de foros; por lo que estas aulas deben servir de referente en la formación del profesorado, y al mismo tiempo para la promoción de modelos educativos innovadores. El campus virtual utiliza la plataforma de software libre Moodle 2.0. y las sesiones presenciales se realizan los sábados con una duración de 8 horas 20 minutos (Xicoténcatl-Ramírez, Romero-González, Jacques-García, Hernández-Valerio, & Olmos-Trejo, 2015).

En los escenarios promovidos por b-learning, los agentes y sujetos de formación se involucran en una dinámica de continuos intercambios que conducen a la construcción de conocimiento, desde una mayor intervención tutorial, una retroalimentación continua, sucesivos debates críticos, entre otros que amplifican y fortalecen las interacciones, que lo favorecen (Turpo y García, 2020). Pero, si bien es cierto que en esta modalidad el papel del docente es fundamental, aún queda de lado la cuestión de las acciones formativas presenciales, ya que todo queda anclado a la virtualidad. Como menciona Soletic (2021), estos entornos híbridos necesitan integrar un modelo pedagógico que promueva la autonomía de los estudiantes y sus aprendizajes en profundidad y al mismo tiempo abracen la cultura digital; así mismo, deben redefinir las formas de trabajo y las tareas docentes, para favorecer la construcción colectiva y horizontal; y, alentar el desarrollo de alternativas flexibles para agrupar a los y las estudiantes de acuerdo a sus intereses y

desempeño, para personalizar la enseñanza ofrecer un mejor acompañamiento de las trayectorias escolares; para que realmente puedan contribuir a la transformación del sistema educativo.

Para dar respuesta a las dificultades o limitaciones que se presentan en los entornos de enseñanza virtuales tradicionales como los MOOC o los entornos con modalidad híbrida, en la presente investigación se concibe que los Entornos de Enseñanza para el Aprendizaje pueden ser más amplios. Por lo que se propone una alternativa pedagógica de entorno de enseñanza virtual, la cual se ha conceptualizado como *Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado (EEVC)*, cuya aproximación da cuenta de la forma en que se puede coordinar actividades de aprendizaje entre los espacios sincrónicos y asincrónicos.

Los Entornos de Enseñanza Virtual Coordinados, implican una relación *dinámica compleja* de los procesos que suceden en los espacios sincrónicos y asincrónicos, que permitan aprovechar las bondades de la virtualidad para construir las condiciones simbólicas bajo las cuáles se den los procesos educativos de enseñanza que promuevan la construcción y el despliegue de capacidades de pensamiento especializadas y potencien la promoción de los procesos de construcción colectiva de conocimientos. Así mismo, este ambiente es complejo, flexible y trasciende las limitaciones de otras modalidades, dado que, por sus características puede responder ante contingencias o situaciones que requieran de un ajuste y, resignifica el uso de la tecnología de forma original, es decir, los recursos semióticos que en otras modalidades son inertes, son resignificados a partir de los procesos de interacción y mediación docente que promueven la participación bajo el contexto de la *actividad societal* que determina los procesos de significación y construcción de sentidos. Las interacciones que se dan entre el docente y los alumnos suceden en línea, tanto de forma sincrónica como asincrónica haciendo uso de las herramientas de Zoom y Moodle, respectivamente. En las sesiones que se llevan a cabo en el espacio sincrónico, los alumnos pueden interactuar y trabajar en equipos y el docente puede supervisar el trabajo que realizan gracias a las bondades que ofrece dicha plataforma, como si estuvieran en un salón de clases. Así mismo, el EEVC ofrece muchas facilidades y oportunidades para el *uso intencionado* de múltiples recursos tecnológicos, como videos documentales, artículos y softwares matemáticos dinámicos, como lo es GeoGebra¹, aunque en ellas mismas no descansa el proceso de enseñanza aprendizaje. Mientras que, el espacio asincrónico se efectúa por medio de las plataformas LMS (*Learning Management System*) cuya

¹ GeoGebra es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor.

intención es poder gestionar y dar continuidad a las actividades que se realizan en el espacio sincrónico. Por lo tanto, se asume que el aprendizaje y el desarrollo cultural se despliega al participar dentro de las actividades societales, las cuales determinan el uso de herramientas semióticas particulares y que el docente pondrá a disposición de los alumnos en el momento sincrónico y de manera inmediata o de manera asincrónica, como por ejemplo la representación gráfica de una parábola haciendo uso de GeoGebra para representar la trayectoria de un balón en el juego de basquetbol; pero tomando en cuenta que no es la herramienta en sí misma la que propiciará los aprendizajes.

Por ello, la propuesta de Diseño que se plantea en esta investigación resulta una alternativa viable y flexible que permite hacer un contraste entre la práctica y la investigación para alcanzar la potencialidad educativa que tienen los EEVC resaltando los factores o elementos que la caracterizan y sustentan; todo en un *contexto de educación formal*, dentro de la institución educativa que es la ENP. Partiendo de la idea del *diseño de entornos virtuales de enseñanza formales* que tienen como propósito el aprendizaje de un campo disciplinar, dentro de un contexto particular, es importante considerar que dicho aprendizaje tendrá lugar a través de la influencia educativa la cual ejerce el docente quien también participa en el diseño de dicho entorno.

Los ambientes se pueden desarrollar desde diferentes perspectivas, pero en la presente investigación se utilizaron las premisas socioculturales de la teoría Vigotskyana, desde las cuales se puede pensar el diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado, propuesta que tiene como objetivo comprender cómo se construye y desarrolla el pensamiento especializado en matemáticas en estudiantes de bachillerato. Por lo que, en el siguiente apartado se explicarán las premisas teóricas que subyacen al modelo y las condiciones y características del EEVC que hacen posible el aprendizaje de formas de pensar especializadas; la matematización².

3.2. Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado como espacio dinámico para la enseñanza de las matemáticas desde la Perspectiva Sociocultural

Esta investigación pone énfasis en la perspectiva histórico cultural que tiene sus raíces en las premisas socioculturales de la teoría Vigotskyana, la cual ofrece herramientas para indagar y

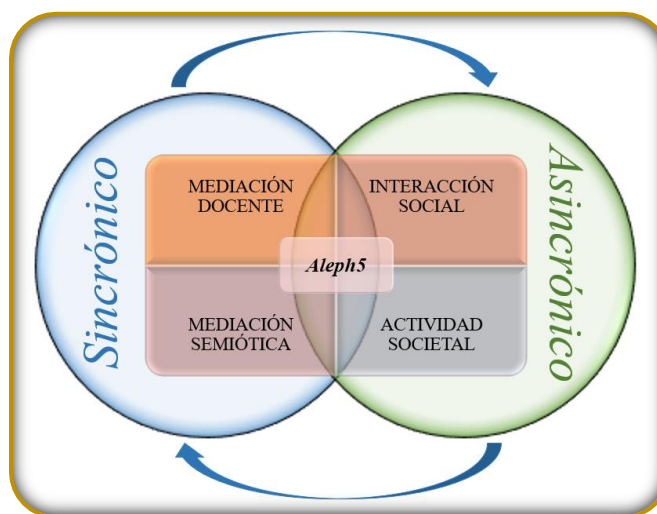
² En el capítulo 2 se abordan a profundidad las características del proceso de la matematización, como objetivo de aprendizaje.

favorecer el desarrollo de las capacidades y formas de pensar que los individuos necesitan para enfrentar los retos de la sociedad, la cual está cada vez más industrializada e implica el uso de la tecnología. Bajo esta perspectiva, se considera la *actividad societal* como principio explicativo del desarrollo intelectual, en tanto que, ésta determina la participación, las interacciones y el uso de los sistemas simbólicos, a partir de la incorporación del individuo en actividades socialmente reconocidas, las cuales poseen una estructura que incluye metas, acciones, reglas y valores particulares, y dentro éstas se usan sistemas y herramientas culturales con la asistencia de una persona más experimentada (Wertsch, 1988; Daniels, 2003).

El diseño del Entorno Virtual Coordinado es complejo, ya que estos tienen como objetivo propiciar los aprendizajes propuestos en el currículo, por lo que se destacan cuatro dimensiones importantes que los caracterizan: la actividad societal que hace referencia a actividades socialmente reconocidas, como lo es la creación de modelos matemáticos para estimar la evolución de una pandemia; y dichas actividades implican la mediación docente, la interacción social y la mediación semiótica, tanto en los espacios sincrónicos como asincrónicos (ver figura 3).

Figura 3.

Dimensiones del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado distribuidas en el espacio sincrónico y asincrónico.



Cabe resaltar que la mediación docente es fundamental para promover: la incorporación de los estudiantes a las actividades; la negociación de significados y la construcción de sentidos; la creación de espacios colectivos de intersubjetividad; y su integración en comunidades de práctica

(Leontiev, 1975; Rogoff, 1997; Mercer, 2001). Por lo que, a continuación se describen las premisas que caracterizan la presente propuesta bajo la modalidad de Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado y que se ponen en juego en el aula virtual.

La primera dimensión hace referencia a las *actividades societales complejas*, que son el contexto para propiciar el aprendizaje, y cuentan con una estructura interna propia que permite que se desencadenen una serie de acciones que tienen un sentido para lograr una meta en particular y descansa en un sistema simbólico específico (Wertsch, 1988). Por ello, creamos el entorno de aprendizaje en el cual surjan las capacidades de pensamiento especializado. Las actividades finalizan con el logro de *la meta establecida*, para ello el docente es el encargado de ofrecer apoyos y ajustar sus ayudas según las necesidades de sus alumnos, haciendo uso de diferentes medios de representación, trabajo entre pares, incluso si estas ayudas terminan siendo tan concretas como el hecho de que el docente modele la actividad para el alumno, después de que el alumno lo haya intentado y no lo haya podido lograr. Es importante mencionar que el proceso de aprendizaje comienza con la familiarización del alumno, tanto con la actividad como con los recursos de representación externa, testificando las acciones que observa que realiza el docente o incluso el trabajo de alguno de sus pares que sí lo lograron, permitiendo que el alumno copie dicha actividad, lo cual no tiene ninguna repercusión negativa en su aprendizaje, sino por el contrario favorece el proceso porque es la actividad la que le da sentido a dichas acciones (Santiago, 2019). El alumno al involucrarse en la actividad progresivamente entenderá las herramientas culturales, así como las acciones que permitirán lograr la meta establecida; permitiendo así su participación en ella, ya que es bajo estas condiciones que el alumno llevará a cabo un proceso de aprendizaje (Rogoff, 1997), y por lo tanto, donde tiene lugar el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales (Wertsch, 1988).

La segunda dimensión, es la *mediación docente*, en la que se resalta el papel del docente, no como tutor, asesor o facilitador, sino como experto en la disciplina, que guía, gestiona los procesos y distribuye la actividad en la virtualidad, entre los espacios sincrónicos y asincrónicos. Es decir, no por ser un entorno de enseñanza virtual el docente desaparece, por el contrario, su rol cobra mayor importancia porque sigue siendo el experto que pone a disposición de los alumnos la estructura de la actividad, las acciones, una serie de recursos semióticos, el conocimiento, ajusta sus ayudas en la medida en que los alumnos lo requieran, y además, elabora recursos para pensar con los alumnos dentro de los espacios sincrónicos; todo de manera intencionada dentro de la

actividad societal para favorecer la construcción social del pensamiento especializado (Rogoff, 1997; Mercer, 2001).

Como tercera dimensión se considera la *elaboración y uso de múltiples recursos semióticos para pensar*, los cuales pueden ser preestablecidos por el docente y psicólogos al momento del diseño de la actividad, o bien, pueden ser elaboraciones que los alumnos vayan construyendo al participar dentro de la actividad. Esto es posible, dada la estructura de la actividad, la cual, no sólo cuenta con una meta general sino que en cada momento de la misma hay submetas que se deben lograr y que implican la elaboración de un producto, como modelos gráficos, algebraicos, textos, videos cortos, por mencionar algunos; y que también funcionan como herramientas semióticas de representación externa para posteriores reinterpretaciones y reconstrucción de significados (Martí, 2003). Cabe señalar que desde esta propuesta aprovechamos las bondades de la virtualidad, porque permite hacer uso de múltiples recursos o herramientas semióticas para propiciar la interacción entre el docente y los alumnos para pensar juntos, lo cual no quiere decir que por la incorporación de muchas herramientas tecnológicas el entorno sea el adecuado, sino que éstas se van seleccionando de manera intencional y están dadas por la estructura de la actividad; la tecnología no determina las condiciones o las acciones del docente, el docente es el que gestiona el uso de la tecnología y de múltiples recursos tecnológicos.

La cuarta dimensión que tomamos en cuenta es la *interacción social*, porque en los Entornos de Enseñanza Virtuales Coordinados se fortalece la interacción directa entre el docente y los alumnos a partir del uso de chats o del diálogo que se establece en la sesión sincrónica, en los que los alumnos pueden compartir dudas y aportar comentarios; y en el momento asincrónico, por medio de las plataformas LSM, como el correo electrónico, páginas web, chats, entre otras. Al mismo tiempo, el docente puede realizar la supervisión y evaluación de los trabajos a partir del uso de rúbricas y escalas de estimación. Es importante señalar que no se pretende trasladar la clase presencial al entorno virtual, porque en este espacio no existen las mismas condiciones, por lo que se reestructura la dinámica social.

Es importante mencionar que la actividad societal contextualizada está *distribuida y organizada* en los espacios sincrónico y asincrónico, propiciando la interacción entre docente-alumno y entre pares. El trabajo en el espacio sincrónico es imprescindible, ya que abre las oportunidades para la construcción colectiva de conocimientos a través de diálogos que orienta el docente con el uso de motores cognitivos y medios de representación externa. Lo síncrono se

coordina con las actividades asíncronas para que las y los estudiantes reflexionen previamente sobre determinados recursos cognitivos que les servirán para discutir en clase con sus compañeras y compañeros. Es importante esclarecer la estructura de la actividad cuando se piensa en el trabajo asincrónico, porque ésta es la que organiza y da sentido a todas las acciones del alumno sin olvidar que las acciones que se diseñan en el trabajo asincrónico están en función de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr. De igual manera, se debe estructurar la presentación de los recursos de representación externa para los alumnos, con los cuales el docente favorecerá el pensamiento; por ello, los recursos deben de estar organizados y colocados en la plataforma con antelación, lo cual facilitará la gestión del docente para favorecer los procesos semióticos de aprendizaje, por ejemplo: videos o instructivos acompañados de preguntas, una guía por escrito o un podcast elaborado por el investigador o por el docente dando las instrucciones de cada actividad, las rúbricas, las escalas de estimación y el formato para elaborar el producto final complejo que es una objetivación del pensamiento especializado; un informe matemático.

Ahora bien, el EEVC es complejo porque nos permite reestructurar la dimensión social, al igual que potencializa el uso de múltiples medios de representación externa (medios semióticos), dado que nos permite utilizar los necesarios para cada actividad y crear nuevos para posteriores secuencias de aprendizaje. Todo con el acompañamiento docente que guía y gestiona las acciones bajo la estructura de la actividad del sistema de dominio de conocimiento específico; las matemáticas. En este entorno *las asignaturas se ofrecen desde una visión holística*, porque las materias no son en lo individual, todas juntas forman parte del pensamiento matemático, por ello no se pueden ver por separado, sino como una totalidad.

El pensamiento matemático, surge a partir de la incorporación del alumno en una actividad matemática, la cual es un espacio dinámico en la que se hace uso del sistema matemático, y su entendimiento es cada vez más especializado en interacción con otras personas, en un plano externo, en el que se pone a disposición de todos los que participan una serie de recursos que les permitan desempeñarse en la actividad de manera autónoma y comprenderla en su totalidad; creando así ambientes complejos de aprendizaje que favorecen el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales como el razonamiento matemático. En este espacio, el rol del docente como experto es importante porque es el intermediario social que realiza acciones matemáticas bajo la estructura de la actividad contextualizada que los guía y determina estas acciones. Lo cual, favorece en los alumnos el desarrollo de capacidades cognitivas de comunicación, haciendo uso

del lenguaje matemático a partir de representaciones externas, para interpretar la realidad matemáticamente (Santiago, 2019).

Por ejemplo, en la actividad del juego de Basquetbol, realizada por los alumnos de sexto de área 1 y 2, la meta consistía en que los alumnos elaborarán un informe matemático en el que presentaran un modelo matemático gráfico y algebraico de la trayectoria que debe seguir un balón para obtener el lanzamiento perfecto y argumentar por qué el modelo permite explicar dicho fenómeno; para ello, la docente guio cada una de las acciones de acuerdo con la estructura de la actividad, iniciando con el análisis de la problemática para identificar las herramientas matemáticas que les permitiría a los alumnos resolver la meta, y a lo largo de la actividad propició el uso de medios de representación semiótica como: videos de lanzamientos que los alumnos analizaron, modelos gráficos y algebraicos elaborados en el software de GeoGebra, los cuales iban acompañados de tutoriales del uso de GeoGebra para que los alumnos se familiarizaran con la herramienta tecnológica y pudieran usarla para elaborar sus modelos y al mismo tiempo interpretarlos matemáticamente. Así mismo, en el espacio sincrónico, se favoreció el trabajo en equipo para que los alumnos pudieran discutir sobre sus propuestas y estimaciones del lanzamiento perfecto; y en este mismo espacio la docente recuperaba cada una de las actividades asignadas en el espacio asincrónico para que los alumnos compartieran sus análisis y posicionamientos a los que iban llegando.

A manera de conclusión, podemos mencionar que las dimensiones teóricas que en esta investigación se recuperan se colocan en uso, es decir, las usamos como herramienta heurística para significar y analizar el potencial del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado el cual se concibe como el espacio para que se desarrollen los procesos de enseñanza y aprendizaje, dado que permiten mediar múltiples interacciones entre el docente y los alumnos para lograr los objetivos de aprendizajes (Bustos y Coll, 2010), y sobreponer múltiples planos de representación, es decir, hacer uso de múltiples recursos para crear un entramado simbólico y ofrece oportunidades para que el maestro sostenga y gestione toda la actividad, teniendo en cuenta que las herramientas tecnológicas que forman parte del EEVC, no constituyen en sí mismas dicho entorno, sino que éstas tienen una influencia mediacional dentro del entorno y lo que determina los usos de las herramientas tecnológicas no son las herramientas en sí, sino el propósito para el cual se utilizan (Guerrero, 2023). El EEVC es complejo, porque lo virtual también permite trascender los límites espacio-

temporales, ya que todo puede suceder simultáneamente, lo cual genera una experiencia compleja para los sujetos que participan en dicho entorno.

Después de haber puntualizado las características del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado desde la perspectiva teórica, y dado que a partir de ellas se crearon las condiciones bajo las cuales se desarrolla el pensamiento especializado en el campo disciplinar de las matemáticas para que los alumnos aprendan a interpretar la realidad matemáticamente; en el siguiente apartado, se abordarán algunas investigaciones que se han realizado en entornos virtuales para favorecer la enseñanza de las matemáticas en el nivel bachillerato y posteriormente se especificará el diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el contexto de la Escuela Nacional Preparatoria.

3.3. Entornos Virtuales para la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato

En la actualidad, el bachillerato enfrenta cambios significativos en torno al uso de la tecnología utilizada como dispositivo pedagógico para contribuir en la mejora de la calidad educativa de los estudiantes de este nivel; y los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) son una vía operativa importante que permiten complementar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en sus diferentes áreas que la conforman. Tal como lo mencionan Solares y Sandoval (2013), la geometría en particular ha sido más beneficiada, seguida por el álgebra y el cálculo, estando presentes las herramientas computacionales para la elaboración de representaciones de una función, tablas y gráficas.

En las investigaciones realizadas sobre geometría han resultado útiles los *entornos de geometría dinámica* para analizar los procesos de construcción de conceptos y producción de conjeturas y argumentos. Solares y Sandoval, (2013), resaltan la importancia del uso de un *software dinámico*, como el *Cabri-Géomètre*, como una herramienta poderosa que posibilita que los estudiantes generen representaciones dinámicas de los problemas en las que puedan identificar relaciones matemáticas, plantear conjeturas y argumentos en términos matemáticos que justifique sus conjeturas. Por otro lado, las actividades diseñadas en un *ambiente de geometría dinámica* también genera cambios en las prácticas docentes, en sus conocimientos, creencias, cuestiones afectivas y prácticas de enseñanza de las matemáticas en la Educación Media Superior, cambiando sus esquemas de argumentación tradicionales y reconociendo la relevancia del Software dinámico

para generar nuevas formas de exploración y reflexión sobre el conocimiento matemático por parte de sus estudiantes, dando prioridad al “aprendizaje efectivo de las matemáticas” (Solares y Sandoval, 2013).

De igual manera, Guiza, (2011), al abordar las prácticas docentes haciendo uso de las nuevas tecnologías dentro de Entornos Virtuales de Autogestión Docente (EVAD), resalta la importancia que tiene el que los docentes desarrollen competencias digitales para hacer uso adecuado de las mismas y favorecer el trabajo colaborativo a partir de la realización de foros virtuales en *Blackboard* y en trabajos de *Google Docs* y *Wiki EVAD*; siendo el EVAD el que ayuda al docente en el análisis, aprendizaje y aplicación del trabajo colaborativo entre docentes. Así mismo, demuestra que un entorno virtual donde las actividades han sido planeadas adecuadamente, para lograr una integración total de los participantes en actividades de trabajo colaborativo, no sólo facilita el desarrollo de las mismas sino que permite que los participantes se apoyen entre sí, para crear andamiajes que los lleve a la construcción colectiva de nuevos conocimientos.

Por su parte, Revelo y Carrillo (2018) mencionan que la utilización de las TIC como *recurso didáctico educativo*, permite desarrollar la *competencia matemática* mediante la interacción en tiempo real entre estudiantes y profesores, compañeros y consigo mismo a través de la red. Así mismo, mencionan que el uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas, permiten al estudiante construir un puente entre las ideas intuitivas y los conceptos matemáticos formales, además de proporcionar un ambiente adecuado mediante la interacción, la visualización y la interactividad; es decir, facilita el aprendizaje por descubrimiento de los estudiantes (López, 2010). Por lo anterior, las TIC promueven una nueva visión del conocimiento y del aprendizaje, en el que el *rol del docente* se transforma dentro del proceso de enseñanza–aprendizaje, colocándolo en la dinámica de creación y diseminación del conocimiento a través de la Red, aportando múltiples ventajas en el mejoramiento de la calidad docente en aspectos como el acceso desde áreas remotas, la flexibilidad en tiempo y espacio para el desarrollo de las actividades de aprendizaje y le permiten buscar, interactuar, recopilar y procesar información para generar nuevos conocimientos.

Como se observa, los EVA están propiciando nuevas y distintas formas de aprender mediante el apoyo de los recursos tecnológicos, las posibilidades que ofrecen son múltiples y cada día son más necesarias en un mundo donde prevalece el uso de la tecnología. Por lo que, para el fomento del uso de estos *entornos virtuales*, se vuelve una necesidad el adecuar las *prácticas docentes* para responder a las exigencias educativas del siglo XXI, lo cual implica un cambio en la

visión del educador para orientar sus objetivos educacionales al logro del aprendizaje recurriendo a la diversificación de sus estrategias para lograrlo. Esta modalidad es una realidad en diversas instituciones educativas y permite responder a las exigencias de la sociedad, además de favorecer la habilidad creativa tanto del docente como de los estudiantes a través del aprovechamiento de todo el potencial que ofrecen los *instrumentos tecnológicos* (Zambrano y García, 2020).

Por todo ello, es importante orientar nuestras acciones a entender la realidad de la educación, porque se hace indispensable mejorarla en beneficio del desarrollo de competencias que influyen en el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje de los educandos en relación al dominio de conocimiento específico, las matemáticas, y en cuyo proceso el rol de los docentes juega un papel sustancial, ya que son ellos los que participan como facilitadores del aprendizaje, favoreciendo el trabajo colaborativo y los momentos de interacción tanto de forma síncrona como asíncrona (UNAM, 2020).

3.3.1. Diseño del Entorno Enseñanza Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas en la ENP

Las matemáticas se han enseñado en entornos virtuales de diferentes formas, usando elementos desagregados, separados, a los que les falta profundidad. Por lo que, la presente investigación apoya el cambio educativo considerando la perspectiva histórico cultural y retomando, además, la actividad como papel fundamental para propiciar la participación, la interacción, así como el uso de las herramientas culturales como medios semióticos, creando así ambientes virtuales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es así, que ante este contexto social surge el *Proyecto Aleph 5*, cuyo objetivo es crear propuestas para mejorar la calidad educativa en diferentes áreas de conocimiento. Es importante mencionar que dicho proyecto ha sido aplicado con anterioridad en el desarrollo de competencias matemáticas y geométricas (Santiago, 2019) ampliando su enfoque a las comunidades de docentes, porque su papel es fundamental para el logro de las competencias en los estudiantes (Castro, 2019), mostrando cambios significativos. Recientemente enfoca sus trabajos en áreas de conocimiento establecidas en la ENP como: Literatura, Matemáticas, Historia, y Biología. Es importante aclarar que este proyecto inició en Educación Básica de manera presencial y ahora se utilizan las bases de este, para sustentar esta propuesta de innovación educativa en la que se coordinan el espacio

síncrono y asíncrono, asumiendo que el aprendizaje y el desarrollo cultural se despliega al participar dentro de actividades sociales haciendo uso de sistemas semióticos particulares, en este caso de las matemáticas.

Por lo que, en esta investigación, se recrean las condiciones bajo las cuales se favorecen las *prácticas pedagógicas* de enseñanza y aprendizaje, proponiendo el diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado, el cual surge como respuesta a las problemáticas que existen en el nivel bachillerato y en respuesta a la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS); dicho entorno nos ofrece una oportunidad de construir un ambiente complejo para promover la matematización en estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP). Al mismo tiempo, favorece experiencias en donde los alumnos de bachillerato pueden participar y adquirir bases sólidas de razonamiento e impulsar su continuo desarrollo en la educación superior y progresivamente puedan alcanzar los estándares esperados por el currículo. Incluyendo a una comunidad de docentes que participan como facilitadores del aprendizaje haciendo uso de *plataformas educativas y recursos tecnopedagógicos*. Con lo cual, se mostrará la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de este campo disciplinar a partir de la descripción, análisis e interpretación de lo que se observe durante la implementación; lo cual nos permitirá contribuir en la transformación de las prácticas educativas, y generar cambios en la percepción que se tiene de los procesos educativos.

A partir de lo mencionado anteriormente, en la presente investigación se planteó como ***propósito***:

Favorecer la calidad educativa y asegurar el logro del perfil de egreso en los estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria participando en actividades societales contextualizadas.

Se consideró como ***objetivo***:

El diseño de Entornos de Enseñanza Virtuales Coordinados para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato.

Así mismo, se plantearon los siguientes *objetivos específicos* lo cual permitió determinar las condiciones del estudio.

- ☞ Diseño e Implementación de secuencias didácticas que contemplen el espacio sincrónico y el asincrónico.
- ☞ Diseño de material didáctico digitalizado para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (la matematización desde el cálculo).
- ☞ Diseño de un instrumento de evaluación del aprendizaje de las matemáticas.
- ☞ Apoyo y trabajo colaborativo con una comunidad de docentes.

Se resaltan las siguientes **preguntas de investigación**.

- ☞ ¿El entorno complejo de aprendizaje favorece el desarrollo del pensamiento matemático?
- ☞ ¿Cómo contribuyen los diferentes elementos del entorno complejo en el desarrollo del pensamiento matemático?
- ☞ ¿Cuáles son las posibilidades que brinda el entorno virtual en el surgimiento de la matematización?
- ☞ ¿Cuáles son los obstáculos que se enfrentan en el desarrollo del pensamiento matemático bajo las condiciones del entorno?

A manera de conclusión, podemos mencionar que una de las acciones fundamentales al realizar esta propuesta desde la virtualidad, fue la *intervención educativa* que se llevó a cabo, para la cual se construyó una comunidad de docentes, expertos con los cuales se reflexiona sobre su práctica al implementar las actividades societales. Este entorno resulta una alternativa pedagógica importante en el contexto del bachillerato, debido a que este nivel educativo es el último que conforma la educación básica obligatoria, por lo tanto es una oportunidad para que los estudiantes desarrollen capacidades de pensamiento especializadas. Para ello, como ya se mencionó anteriormente, se construyó en colaboración con los docentes de matemáticas, dentro del contexto formal de la Escuela Nacional Preparatoria, con la finalidad de alcanzar los aprendizajes establecidos en el currículo de matemáticas. En el siguiente apartado se desarrollará el marco metodológico, bajo el cual se desarrolló la presente investigación, así como las fases que la conformaron.

CAPÍTULO 4. PERSPECTIVA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO PARA EL DISEÑO DE UN ENTORNO VIRTUAL

La intención de este capítulo es trazar la perspectiva metodológica que se utilizó en la presente investigación para el diseño de entornos virtuales de enseñanza, tomando en cuenta el propósito y los objetivos de esta investigación, planteados en el capítulo anterior, para el logro de los objetivos de aprendizaje, en este caso particular, crear las condiciones para favorecer la matematización en alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria.

En el diseño de los entornos virtuales para la enseñanza de la matematización, se utilizó como marco metodológico la *Investigación Basada en Diseño (IBD)* de Rinaudo y Donolo (2010), la cual, en la investigación educativa busca responder a las problemáticas de la realidad educativa dentro de contextos auténticos y con ello, poder incidir en la práctica educativa (Siry y Zawatski, 2011; Reimann, 2011; De Benito y Salinas, 2016). Al mismo tiempo, nos permite cerrar la brecha entre las propuestas educativas que se han planteado como lo es: la Reforma Integral de Educación Media Superior, el Modelo Educativo, en su momento el SUMEM y las actualizaciones de los planes y programas de la ENP.

La IBD está orientada a la innovación educativa y consiste en la intervención que se realiza en contextos auténticos de aprendizaje, mediante un diseño instructivo, para lograr una meta pedagógica; y se realiza a partir de continuos ciclos de análisis, diseño, implementación, evaluación y análisis retrospectivo y rediseño, con el fin de realizar mejoras al diseño educativo (entorno de aprendizaje); los cuales, se llevan a cabo en colaboración con el colectivo de docentes expertos e investigadores educativos, con el propósito de articular los objetivos de aprendizaje, las perspectivas y la didáctica hacia un mismo perfil de egreso (Rinaudo y Donolo, 2010; Siry y Zawatski, 2011; De Benito y Salinas, 2016; Castro, 2019); estableciendo diálogos cogenerativos entre docentes dentro de un espacio de reflexión compartido (Schön, 1992).

Desde la IBD, se asume que la investigación educativa no puede estar separada de la práctica, ya que dejaría de lado la influencia que tiene el contexto sobre la naturaleza compleja de los resultados o no permitiría identificar adecuadamente las restricciones y factores condicionantes en la práctica educativa. Es decir, la IBD trata de superar la brecha entre las investigaciones científicas desligadas de la práctica educativa y de las innovaciones realizadas de manera poco o nada rigurosas; por lo que resulta viable para crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo,

implementación y mantenimiento de entornos de aprendizaje innovadores. Dicha perspectiva, especifica cómo conducir continuos ciclos de diseño y generalmente lo que se diseña es un **“entorno de aprendizaje”** completo, que considera tareas, materiales, herramientas, entre otros elementos que apoyan el aprendizaje (Reimann, 2011).

En este mismo sentido, es importante señalar que los *diseños se realizan para generar nuevas teorías de aprendizaje, no simplemente para comprobar empíricamente “qué funciona”*; la intención teórica es identificar y describir patrones en el pensamiento del estudiante y relacionarlos con los medios utilizados para apoyar y organizar su desarrollo (Rinaudo y Donolo 2010; Reimann, 2011). Todo bajo un contexto particular de enseñanza, trabajando de forma colegiada con los profesionales de la práctica educativa con los cuales se co-construye el conocimiento y se realizan adaptaciones al proceso de enseñanza (De Benito y Salinas, 2016).

En los siguientes apartados se describe el desarrollo de dicha perspectiva metodológica que se utilizó, *resignificándola* en términos de esta investigación, por ello se abordará el contexto auténtico en el que se desarrolló la propuesta de entorno virtual, es decir la institución educativa y se incluye a la población participante. Posteriormente, se describirán como una de las características importantes de esta metodología, los diálogos cogenerativos que se construyen con la comunidad docente y, por último, se abordan las fases que siguió la investigación de acuerdo con el ciclo Iterativo de la Investigación Basada en Diseño.

4.1. Diseño en contextos auténticos

Desde la perspectiva de la presente investigación se consideran las características particulares del contexto educativo, en el cual se desarrolló la propuesta de diseño del entorno para la enseñanza, y se aprovecha como una coyuntura dado que también determinan los procesos educativos que suceden dentro del mismo, es decir, es un diseño situado en un contexto social auténtico (Rinaudo y Donolo, 2010).

El *contexto escolar* debe ser un espacio que ofrezca oportunidades para que surja el aprendizaje en los estudiantes, dado que es en ese contexto en el que se intercambian conocimientos, se construyen y reconstruyen saberes, surgiendo así el vínculo entre docente-alumno y también entre pares; dado que los aprendizajes se construyen en interacción social, mediante la observación de las acciones y verbalizaciones con los otros, haciendo uso de artefactos

o herramientas materiales, modelos explícitos o demostraciones y mediante interacciones colaborativas entre pares o comunidades de práctica, compartiendo y haciendo visible su pensamiento (Goldman y Pellegrino, 2017).

A pesar de que desde el México independiente se consideró como una necesidad en la educación, el contemplar un nivel de enseñanza posterior a los considerados en la educación elemental, los cuales sentaran las bases para estudios profesoriales, fue hasta 1867 cuando se consolida con la creación de la Escuela Preparatoria por Gabino Barreda y desde sus orígenes fue considerada como una institución de carácter público, la cual debe responder a los retos y demandas de la sociedad en su conjunto (Villa, 2010).

En el marco curricular del bachillerato, dado que se establece un *perfil de egreso* basado en competencias que los alumnos deben dominar al egresar, se tiene como reto crear políticas educativas que favorezcan el despliegue de las competencias matemáticas (Zorrilla, 2010), la cual consiste en: *La capacidad de movilizar los conocimientos y habilidades matemáticas que el individuo posee, para enfrentar racionalmente las situaciones problemáticas que se le presenten. En el nivel de bachillerato, esta capacidad debe incluir la voluntad de aprender nuevos conceptos y desarrollar nuevas habilidades matemáticas que pudieran ser necesarias para enfrentar alguna situación específica más complicada* (SUMEM, 2014, p. 44).

Dicha competencia, implica que el estudiante reconozca que muchas situaciones de la vida real pueden representarse matemáticamente; es decir, incluye las actitudes y los valores que impulsan al estudiante a pensar racionalmente y a buscar el camino para analizar situaciones y problemas de su interés, así como problemas de la sociedad y su entorno, comprenderlos y, si es posible, definir planteamientos y métodos matemáticos que los representen (SUMEM, 2014); buscando con ello formar ciudadanos alfabetizados en matemáticas, preparados cognoscitivamente en la perspectiva de seguir una carrera profesional y también de manera muy especial, la preparación para la vida y a la cual responde la estructura y organización curricular de la Escuela Nacional Preparatoria (UNAM, 2018), innovando con ello en la educación de dicho campo disciplinar y mejorando la eficiencia terminal de la educación media superior (Goldman y Pellegrino, 2017; Zorrilla, 2010, 2015).

Por lo cual, la implementación se llevó a cabo en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), que forma parte de uno de los bachilleratos de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), la cual es una institución más amplia, de carácter propedéutico y masivo y que desde sus

orígenes busca responder satisfactoriamente a los retos y demandas de la sociedad en su conjunto. Actualmente, el bachillerato considera brindar a sus alumnos una educación de calidad que les permita incorporarse con éxito a los estudios superiores y una formación integral para enfrentar los retos del mundo actual (DGENP, 2018).

La ENP que participó en esta investigación fue el Plantel No. 3. “Justo Sierra”, que se caracteriza por ser una escuela pública. De la cual, participaron 130 alumnos, que cursan Matemáticas VI, dividido en dos áreas: área 1, enfocada a las Ciencias Físico - Matemáticas y de las Ingenierías; y área 2, a las Ciencias Biológicas y de la Salud.

El segmento curricular de las matemáticas en la ENP está organizado en tres etapas: la introductoria (Matemáticas IV), la de profundización (Matemáticas V) y la Propedéutica (Matemáticas de VI) la cual está dividida en áreas disciplinares (DGENP, 2018). Las asignaturas se ofrecen desde una visión holística, es decir, las materias no son en lo individual, todas juntas forman parte del pensamiento matemático.

Para fines de esta investigación únicamente reportamos la implementación que se llevó a cabo en Matemáticas VI (área 1 y 2) cuyo objetivo es que los alumnos apliquen los conceptos básicos del cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida, mediante el análisis de procesos infinitos. Este último curso de Matemáticas del bachillerato introduce a los estudiantes, de manera gradual, a los conceptos de derivada e integral, así como a los problemas que históricamente dieron lugar al desarrollo del cálculo (DGENP, 2018).

Es importante mencionar que la propuesta nuestra propuesta educativa se ajustó a la modalidad en línea debido al momento socio-histórico que se estaba viviendo en educación; por lo que las clases no se impartieron de manera presencial en las aulas de la ENP, sino que se consideró la implementación en línea haciendo uso de la plataforma de zoom y la plataforma de Moodle para realizar las actividades sincrónicas y asincrónicas, respectivamente. Esta consideración es crucial dado que se está considerando el estudio del ambiente complejo con el propósito de comprender y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, los cuales son procesos situados en configuraciones socio-históricas particulares, como lo menciona Kelly (2006, citado en Rinaudo y Donolo, 2010) y con ello tener en cuenta los factores que intervienen en el logro de los propósitos educativos (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004).

Desde nuestra perspectiva, consideramos el contexto y establecemos las condiciones para construir el espacio educativo para la enseñanza, es decir, creamos las condiciones para que lo

propuesto en el currículo, opere y se alcancen los aprendizajes esperados. Cabe mencionar que los contextos educativos no son estáticos, están en constante cambio y nunca están libre de agentes (docentes, administradores, estudiantes) que participan para el logro de los propósitos educativos de la misma institución (Barab y Squier, 2004; Rinaudo y Donolo, 2010). Por lo que en el siguiente apartado se describe la importancia del trabajo entre docentes e investigadores educativos.

4.2. Diálogos cogenerativos: Docente reflexivo

Bajo este marco metodológico y de acuerdo con De Benito y Salinas (2018), es importante señalar que una de las características principales de la IBD es que es participativa, colaborativa, desde el momento en el que se inicia el trabajo grupal, el sistema de trabajo es colaborativo entre el equipo de investigadores y la comunidad docente conformada por los expertos en la enseñanza.

Dado que las IBD se ocupa de problemas enmarcados en un contexto educativo real auténtico, la participación de la comunidad docente es fundamental en el marco de esta investigación, dado que, son los profesionales que implementan en la práctica el currículo propuesto y pueden dar cuenta de los problemas reales que ocurren dentro del contexto educativo (Anderson, 2005).

Por su parte, Tobin y Roth (2006) mencionan que la *co-enseñanza* asume a la docencia como una actividad sociocultural en la que los participantes aprenden a enseñar enseñando, es decir, es un enfoque en el que los maestros aprenden a enseñar juntos y además participan en el análisis de lo que ocurrió dentro del aula en colaboración. En este mismo sentido, recuperamos las ideas de Donald Schön (1992), quien define la reflexión como un continuo entre el pensamiento y la acción, y afirma que un profesional, en su papel de práctico reflexivo, delibera sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, las hace explícitas, las critica, las reestructura y las aplica en la acción futura dentro del aula; reflexiona en y durante la acción, y posteriormente reflexiona sobre la acción y sobre la reflexión en la acción.

Construcción de la comunidad docente

Es así como, la propuesta se realizó dentro del contexto de la ENP, y como rasgo particular en esta investigación recuperamos, como una de las distinciones de la IBD, la conformación de

equipos de trabajo a los que nos referimos como comunidad docente³, la cual está conformada por investigadores y docentes expertos, considerando que todos participan con diferentes roles dentro de una institución educativa. La conformación de esta comunidad docente no es fortuita, es un emergente, una estructura construida simbólicamente (Castro, 2019) y es necesaria para llegar a representaciones compartidas acerca de la naturaleza del diseño, de la forma en la que se llevará a cabo y de los resultados que se esperan (Rinaudo y Donolo, 2010).

Participaron 4 docentes que ejercen su docencia, de tiempo completo, en el campo disciplinar de las Matemáticas. Todos cuentan con estudios de Posgrado, dos de ellas en Matemática Educativa, una en la MADEMS y uno en Actuaría. Tienen más de 20 años de experiencia en el aula y sólo una de ellas lleva 16 años dando clases. Los planteles a los que pertenecen son: ENP 3, “Justo Sierra” y ENP 8, “Miguel E. Schulz”. Así mismo, contamos con la asesoría del Dr. Eugenio Díaz Barriga Arceo, quien cuenta con Licenciatura en Física y Matemáticas, Maestría y Doctorado en Matemática Educativa, cuya participación ha sido de gran relevancia por su amplia experiencia en Geometría.

La participación de comunidad docente la tuvo como propósito articular los objetivos de aprendizaje, perspectivas de aprendizaje y la didáctica hacia un mismo perfil de egreso; estableciendo diálogos cogenerativos que, de acuerdo con a Siry y Martin (2010), son conversaciones entre los participantes del aula (profesores, estudiantes, investigadores, etc.) para discutir las interacciones en el aula, favorecer el análisis de sus propias acciones y la de sus pares dentro de un espacio de reflexión compartido; y centrarse en mejorar el diseño de los entornos virtuales que favorezcan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Siry y Zawatski, 2011).

Cabe mencionar que los diálogos cogenerativos que se establecieron con los profesionales de la educación en matemáticas, se dieron alrededor de las secuencias didácticas que se diseñaron, implementaron y posteriormente se rediseñaron, para ello se realizaron sesiones sistemáticas haciendo uso de la plataforma de zoom para mantener la comunicación, dichas sesiones se llevaron a cabo en el periodo interanual (antes y después de la implementación) y durante la implementación, 2 veces por semana.

³ Usamos la categoría de “comunidad docente” para referirnos a los profesores de matemáticas que imparten clase en la Escuela Nacional Preparatoria y que participaron en el diseño, implementación y rediseño de las secuencias didácticas que conforman el entorno virtual para la enseñanza de las matemáticas.

Esta característica en la IBD resulta imprescindible dado que permite encontrar mejores realidades para la educación, estableciendo posibilidades de acercar las perspectivas entre los agentes que participan, dado que los investigadores cuentan con conocimientos acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje y los docentes son especialistas en el dominio del conocimiento específico (las matemáticas) en el que se situada la presente investigación, para crear propuestas para mejorar dichos procesos (Rinaudo y Donolo (2010).

La comunidad docente colaboró con los investigadores educativos⁴, en todas las fases del ciclo de la IBD, para diseñar, probar y a la par realizar reflexiones sobre su práctica al implementar las actividades societales para hacer la propuesta viable (Schön, 1992). Por lo que en el siguiente apartado describiremos de manera general las fases del ciclo iterativo que siguió la investigación.

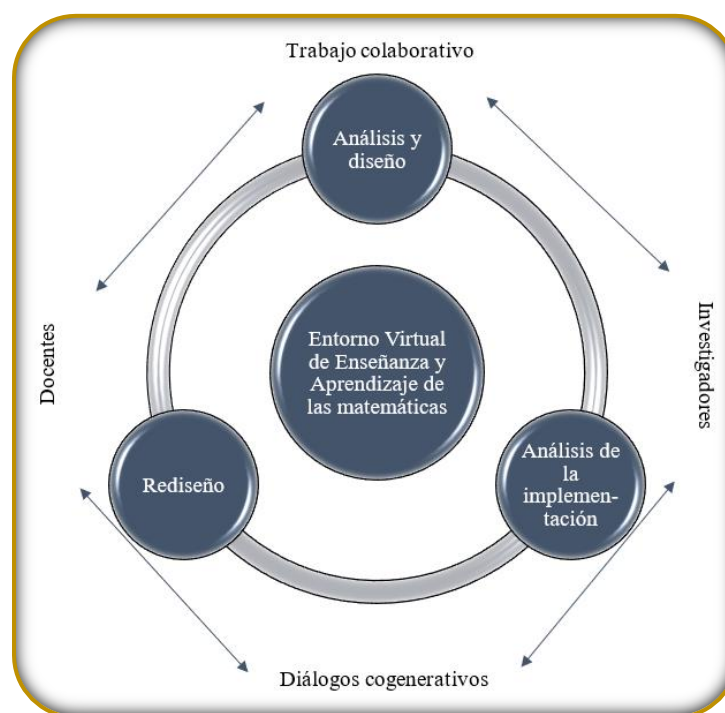
4.3. Ciclo Iterativo de la Investigación Basada en Diseño

Como ya se mencionó anteriormente, la IBD se realiza a partir de continuos ciclos de análisis, diseño, implementación, evaluación y análisis retrospectivo y rediseño, con el fin de realizar mejoras a la propuesta del entorno de enseñanza; los cuales, como ya se mencionó, se llevaron a cabo dentro del contexto de la ENP con el colectivo de docentes expertos en matemáticas, con el propósito de articular los objetivos de aprendizaje, perspectivas de aprendizaje y didáctica hacia un mismo perfil de egreso; y al mismo tiempo analizar sus propias acciones y la de sus pares dentro de un espacio de reflexión compartido (Rinaudo y Donolo, 2010; De Benito y Salinas, 2016). La presente investigación siguió un ciclo iterativo conformado por tres fases: el análisis del contexto y diseño del entorno; el análisis de la implementación; y el rediseño del entorno de enseñanza. Las cuales se llevaron a cabo dentro del contexto particular de la ENP 3 y los explicamos a continuación (ver figura 4):

⁴ El grupo de investigadores educativos, del cual formo parte desde el año 2010, está conformado por psicólogas y psicólogos del área educativa de la Facultad de Psicología de la UNAM y, por pedagogas y pedagogos de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM.

Figura 4.

Fases del ciclo iterativo de la Perspectiva de Investigación Basada en Diseño en la ENP (elaboración propia).

***Fase 1. Análisis del contexto y diseño***

Esta fase consistió en realizar la revisión y análisis de los planes y programas de la ENP y los estándares disciplinares establecidos en el SUMEN para el bachillerato de la UNAM, los cuales categorizamos en términos de competencias, es decir en términos de lo que los alumnos son capaces de hacer. Dicho análisis se complementó con la revisión crítica de la literatura relacionada con el proceso de la matematización, la argumentación y la modelización matemática, debido a que nuestra propuesta parte del supuesto de que las competencias matemáticas se desarrollan a partir de los contenidos establecidos en los programas y planes curriculares de la ENP.

Es decir, usamos el currículo como marco que define lo que debería suceder en la ENP, la intención no es definirlo, sino a partir de ello, crear las condiciones de enseñanza y aprendizaje para que opere el currículo dentro del aula y alcanzar los aprendizajes esperados. Por ello, lo que se propone es a partir del contexto para analizar su funcionamiento (como opera) y contar con

evidencias que permitan dar cuenta de que el diseño del entorno funciona. De igual manera, como mencionan Rinaudo y Donolo (2010) nos permite *anticipar y comprender* el modo en el que los diferentes elementos del contexto afectan el curso de los aprendizajes, cómo podría desarrollarse el pensamiento y la comprensión de los estudiantes, por ello fue importante contar con conocimientos sobre la disciplina de las matemáticas que es alrededor de la cual se realizó el diseño (Gravemeijer y Cobb, 2006, p. 19).

Posteriormente, se realizó el diseño de las secuencias didácticas las cuales fueron organizadas y objetivadas en el plan anual para poder llevar a cabo la implementación en tiempo y forma. El plan anual es una herramienta que nos permitió contemplar todo el ciclo escolar y tomar decisiones en función de cómo se distribuirán las secuencias a lo largo del año, es decir, realizar una distribución intencional a lo largo del ciclo escolar, que permitiera abordar las temáticas establecidas en la materia y decidir qué secuencias deberán implementarse y en qué periodo de tiempo. Así mismo, permite realizar los ajustes necesarios en caso de tener alguna eventualidad que no esté prevista durante la fase de implementación.

Cada una de las acciones realizadas en esta fase tenía como intención definir las metas de aprendizaje y diseñar el entorno de enseñanza para favorecer el desarrollo del proceso de la matematización en los estudiantes de la ENP.

Fase 2. Análisis de la Implementación

Esta fase consistió en la puesta en marcha de las secuencias diseñadas para lo cual, la participación de la docente que impartía la materia de Matemáticas de VI fue muy importante, dado que fue quien asumió la responsabilidad de implementar las secuencias didácticas diseñadas con la intención de probar y demostrar que el diseño funcionaba, y al mismo tiempo realizar las observaciones y ajustes pertinentes para mejorar el diseño planteado inicialmente (Rinaudo y Donolo, 2010).

Dicha implementación se complementó con la observación sistemática⁵ que se realizó dentro del aula (vía zoom) por parte de las y los investigadores educativos, lo cual permitió obtener

⁵ El investigador educativo tuvo siempre una presencia en el contexto en el que se desarrolló la investigación, como observador participante.

información de primera mano, para conocer cómo se llevaba a cabo la implementación, con la intención de recuperar los procesos que subyacen al desarrollo del pensamiento matemático. Para ello la investigadora entraba como observadora en el horario en el que la docente impartía la clase y posteriormente realizaba sugerencias y elaboraba una resignificación en términos teóricos de lo ocurrido en la clase para compartirla con la docente. Al mismo tiempo se realizó un análisis y evaluación de ésta, para comprobar que los resultados dieran cuenta de los cambios que produjo la implementación y que dicho entorno funcionaba.

Es importante señalar que bajo este marco metodológico los análisis inician desde la implementación dentro del aula para conocer el impacto que tiene el diseño y sus elementos los cuales funcionan en conjunto para mejorar la enseñanza y favorecer el aprendizaje. Por lo tanto, se hace necesario contar con un sistema de registro de documentos detallados del diseño que nos permita la comprensión de los fenómenos que ocurren dentro del aula; para ello se hizo uso de bitácoras, tanto de los docentes como de los investigadores, de las observaciones dentro del aula, grabaciones de video, audios y análisis de productos elaborados por los alumnos en las actividades; para dar cuenta de que la implementación funciona y distinguir los ajustes que sean necesarios. (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004; De Benito y Salinas, 2018; Reimann, 2011).

Lo anterior es importante dado que la validez de los hallazgos de la IBD debe estar formulada sobre la base de cambios demostrables en el contexto particular en el que se llevó a cabo la investigación, para dar cuenta del impacto que tuvo la enseñanza en el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes de la ENP 3 (Barab y Squire, 2004), dado que esta investigación pretende estudiar la propia actividad educativa, mejorarla y resolver los problemas concretos, en el propio contexto (De Benito y Salinas, 2018).

Fase 3. Rediseño

Esta fase tiene lugar al finalizar el análisis de la implementación, siendo este el momento para concretar y realizar los ajustes necesarios a partir de las observaciones realizadas dentro del aula y hacer mejoras al diseño de las secuencias didácticas planteadas en el diseño inicial; para ello, se requiere del análisis de los datos recabados en las fases anteriores, todo en colaboración con la docente que implementó las secuencias didácticas y que también aportó observaciones y

reflexiones sobre su práctica y los ajustes que tuvo que realizar al momento de llevar a cabo cada una de las actividades.

La implementación, del entorno virtual de enseñanza para el aprendizaje y desarrollo del proceso de la matematización, es un objeto socialmente construido, el cual está articulado sistemáticamente y analizado en diferentes ciclos con el rigor que se requiere. Es decir, el diseño implementado de manera puntual y las interpretaciones que fueron teniendo lugar a partir del análisis de la implementación y que permitieron considerar los ajustes pertinentes a la propuesta inicial, permite fundamentar la base para elaborar el análisis retrospectivo y el rediseño y comprender los procesos estudiados, de acuerdo con Bannan Ritland (2003, citados en Rinaudo y Donolo, 2010).

A manera de conclusión de este apartado podemos mencionar que la investigación educativa planteada desde el presente marco metodológico está orientada a producir y proponer avances y mejoras en la práctica dado que la propuesta de diseño está estructurada atendiendo las particularidades y necesidades del contexto educativo de la ENP. Al mismo tiempo existe una coordinación entre la investigación, el diseño, los planes y programas y la práctica que realizan los y las docentes.

De acuerdo con la lógica de la IBD, cabe señalar que en la presente investigación no se trata de una investigación empírica, cuantitativa orientada a la presentación de resultados, sino que se intenta dar cuenta de las implicaciones que tienen sobre la práctica educativa, cuyo énfasis es la solución de problemas y la co-construcción de conocimiento dirigido al diseño, desarrollo y evaluación del proceso educativo. Así como a desarrollar principios y orientaciones para futuras investigaciones y que cada día acumula mayor respaldo (De Benito y Salinas, 2018).

Como mencionan Rinaudo y Donolo (2010), la Investigación Basada en Diseño, constituye una herramienta útil en investigaciones que incluyen ambientes de aprendizaje mediados por las tecnologías y en este caso particular resulta viable para el diseño de entornos virtuales de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria. Es decir, en esta investigación, exploramos, diseñamos, analizamos cómo opera el diseño dentro del aula y evaluamos el impacto para proponer un rediseño; lo cual se realiza en colaboración con las y los docentes porque a menudo se observa que las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje no resultan relevantes para las prácticas en el aula, porque no son conocidas por los docentes que

son los responsables, en este caso, de dar la clase de matemáticas; y por ende no afectan las prácticas docentes ni las políticas educativas (Reimann, 2012).

En los siguientes apartados se describen a detalle las acciones correspondientes a las fases del: Análisis del contexto y diseño del entorno virtual en el que se diseñaron secuencias didácticas que se desarrollaron en el periodo interanual 2021; Análisis de la implementación que se llevó a cabo el ciclo escolar 2021-2022; y el Rediseño del entorno virtual coordinado (Anexo 1).

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DEL CONTEXTO Y DISEÑO DEL AMBIENTE VIRTUAL PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATIZACIÓN

...una auténtica solución de los problemas de la educación... presupone un cambio del tipo de pensamiento... mediante el contenido de las disciplinas y los métodos de enseñanza.

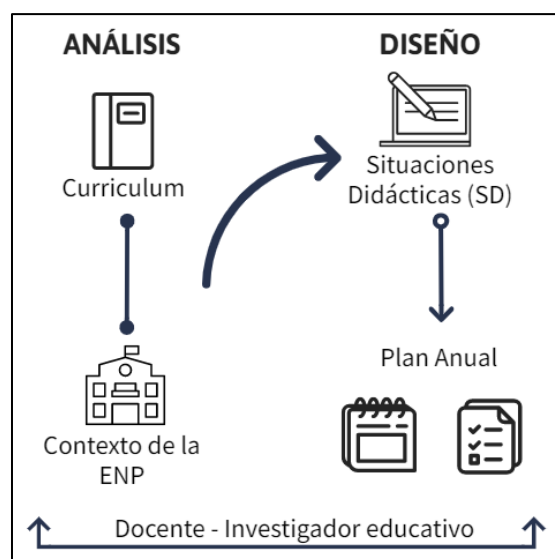
(V.V. Davidov)

Dado que la presente investigación tiene como objetivo el diseño de entornos virtuales coordinados para favorecer las prácticas pedagógicas de enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, haciendo uso de la virtualidad, para contribuir con el desarrollo de las capacidades de pensamiento matemático especializado (matematización) en alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria, al ser partícipes dentro de actividades reales en las que hagan uso del sistema disciplinar; dichas actividades descansan en la perspectiva constructivista sociocultural, considerando las bases metodológicas de la Investigación Basada en Diseño (IBD).

Por ello, el presente capítulo tiene la intención de ilustrar, la primera fase de la IBD que siguió esta investigación, la cual consistió en realizar un análisis de la institución en la que se llevó a cabo el diseño educativo, tomando en cuenta los planes y programas de estudio, el contexto de la misma institución bajo las condiciones virtuales y las implicaciones que tuvo en el diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado. Dicho análisis, es importante para poder realizar el diseño de una propuesta coherente que responda al contexto particular en el que se diseña y se lleva a cabo (ver figura 5).

Figura 5.

Fase 1 de la Investigación Basada en Diseño correspondiente proceso de análisis del contexto y Diseño del Entorno Virtual Coordinado.



En primer lugar, se describe el análisis curricular en donde se abordará el proceso que se siguió para la revisión de las propuestas educativas como la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), los estándares disciplinares establecidos en el SUMEN⁶ para el bachillerato de la UNAM, así como de los planes y programas de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP); de igual manera se describirá, el análisis del contexto y las condiciones de la ENP como institución educativa, detallando las dificultades a las que se enfrentaron docentes y alumnos en la modalidad virtual entre otras características que no están descritas en el currículum; y, se expondrá la comprensión del currículum y el contexto para el diseño del entorno virtual, es decir, se resaltará la interpretación que realizamos tanto del currículum como del contexto para realizar la propuesta educativa, ya que usamos el currículum como marco que define lo que debería suceder en la ENP, pero la intención no es definirlo, sino que a partir de ello, creamos las condiciones de enseñanza y aprendizaje para que opere el currículum dentro del aula y con ello alcanzar los aprendizajes esperados.

En segundo lugar, se describe el Diseño del Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado en el que se abordará el diseño de las Secuencias Didácticas (SD) y su distribución y organización

⁶ Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM (SUMEM).

tomando en cuenta el plan anual escolar de la ENP (DGAE, 2021). En el diseño se describirán los elementos que estructuran cada una de las SD y cómo se encuentran distribuidas las actividades en los momentos sincrónico y asincrónico, así como los recursos y materiales que los maestros utilizarían a lo largo de la actividad para el cumplimiento de una meta establecida, la cual consistía en la elaboración de un producto complejo que en este caso se denominó como informe matemático, en el que se puede ver consolidado o integrado el pensamiento matemático; cabe resaltar que en el diseño de dichas SD participaron los docentes expertos en matemáticas, por lo tanto el diseño fue colaborativo. Posteriormente, para la organización de las secuencias en el plan anual, se consideraron los días festivos y fechas en las que se realizaban las evaluaciones parciales establecidas en la ENP, entre otras actividades institucionales.

5.1. Proceso de Análisis curricular de los planes y programas de la ENP

Como ya se mencionó, en este trabajo de investigación se realizó el diseño del entorno de enseñanza para favorecer el proceso de matematización en alumnos preparatorianos que cursan la asignatura de Matemáticas de VI (área 1 y 2), la cual es relevante ya que forma parte del nivel propedéutico del bachillerato, y la cursan los alumnos que dirigen sus estudios profesionales al área de las Ciencias Físico – Matemáticas y de las Ingenierías o a las Ciencias Biológicas y de la Salud; lo cual quiere decir que es la última oportunidad que tienen los docentes para preparar a los alumnos para la vida profesional, y es aquí en donde tiene sentido la matematización como objetivo de aprendizaje, dado que es la capacidad de interpretar la realidad o el mundo matemáticamente; es decir, es la oportunidad para familiarizar a los estudiantes preparatorianos con las actividades matemáticas que hace un profesionalista.

Cabe mencionar que en años anteriores el proyecto Aleph ya había realizado diseños educativos en las asignaturas de matemáticas IV y V, por lo que la decisión de diseñar el entorno de enseñanza virtual en el nivel propedéutico permitió complementar una materia más para el desarrollo de la *matematización* aprovechando su posición dentro del currículum de la ENP, debido a que en esta asignatura se sintetizan los temas de los cursos anteriores a través del estudio de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones; favorece un proceso que permite a los alumnos transitar de una situación concreta a una abstracción, de un lenguaje

ordinario o de primer orden a uno de segundo orden o simbólico; brinda los conocimientos y habilidades necesarios para su desempeño en los estudios universitarios (DGENP, 2018).

Como parte del ciclo de la IBD, previo al diseño del entorno de enseñanza, se realizó el análisis de las propuestas educativas en colaboración con las docentes de Matemáticas para llegar a un común acuerdo sobre las capacidades que pretendían desarrollar a partir de la propuesta y lograr una interpretación colectiva entre los maestros expertos en la disciplina y los investigadores educativos sobre el currículum, para que el diseño de la propuesta educativa fuera coherente con las demandas del currículum de la ENP. Por ello, se inició revisando la propuesta de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), los estándares disciplinares establecidos en el SUMEN para el bachillerato de la UNAM, y por último la revisión de los planes y programas de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP).

La importancia de concretar el currículum propuesto, es decir, que los planes y programas de estudio operen de forma adecuada dentro del aula y por tanto, que los objetivos de aprendizajes estén puestos en el desarrollo de capacidades surge a partir del ciclo de reformas desarrolladas en educación básica iniciadas en 2004 y finalizadas en 2011 en donde, el foco principal estaba puesto en la calidad educativa, entendida como la mejora de los programas de estudio para el desarrollo de competencias (SEP, 2017).

Actualmente, la Educación Media Superior forma parte de la educación básica obligatoria, por lo que se realizó un análisis, a nivel macro, de la propuesta hecha por la Secretaría de Educación Pública (SEP) para mejorar la calidad de la educación obligatoria, estableciendo en la RIEMS, en 2008: 1) un Marco Curricular Común (MCC); 2) Cinco campos disciplinares (Ciencias experimentales, Ciencias sociales, Comunicación, Humanidades y Matemáticas; 3) tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales. Definiendo con este nuevo modelo educativo el perfil de egreso que, en el ámbito del pensamiento matemático, implica que los alumnos puedan construir e interpretar situaciones reales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Además de que formulen y resuelvan problemas aplicando diferentes enfoques y argumentando la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos (SEP, 2017, pág. 165).

Así mismo, partiendo de que las matemáticas son parte fundamental de la cultura y en consecuencia permean toda actividad humana, el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM) propuso, como consideración para mejorar la enseñanza de las

matemáticas en el Bachillerato de la UNAM, desarrollar en los estudiantes los aspectos fundamentales de la cultura matemática de tal manera que les permitiera desempeñarse a lo largo de su trayectoria escolar, contando con el conocimiento suficiente para aplicar las matemáticas en situaciones diversas. De igual manera, se asumió que en el desarrollo de la cultura matemática intervienen dos elementos que están relacionados mutuamente: el pensamiento matemático (numérico, geométrico, algebraico, probabilístico y funcional), el cual le permitirá al estudiante reconocer patrones, hacer generalizaciones, plantear argumentos matemáticos para justificar resultados y hacer uso de representaciones de un mismo objeto matemático; y, los conceptos fundamentales de las matemáticas, los cuales están distribuidos en las ramas tradicionales de la disciplina (Aritmética, Álgebra, Estadística, Probabilidad, Geometría, Geometría analítica, Trigonometría y Cálculo). Dicha propuesta se concretó en estándares disciplinarios por área en matemáticas (números y álgebra; geometría; funciones y cálculo; estadística y probabilidad) para el bachillerato de la UNAM, los cuales son una lista de indicadores que permiten dar cuenta cuándo un estudiante cumple o no con un estándar (SUMEM, 2014).

Ahora bien, en un nivel micro, la ENP como institución educativa realizó cambios estructurales de manera interna en sus planes de estudio de la disciplina de las matemáticas para favorecer la calidad de la educación de los estudiantes preparatorianos; ya que en sus inicios se consideraba, desde un modelo tradicional, el aprendizaje desde el enfoque centrado en el alumno como arquitecto de su propio conocimiento. Pero tomando en cuenta el enfoque del nuevo modelo educativo, adoptó el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), enfoque propuesto por Freudenthal, el cual implica que ahora los docentes utilicen problemas en contexto y enmarcados en situaciones de la vida real, ya que las matemáticas surgen en la realidad; por lo tanto, lo que quiere favorecer en el aula es la actividad matemática.

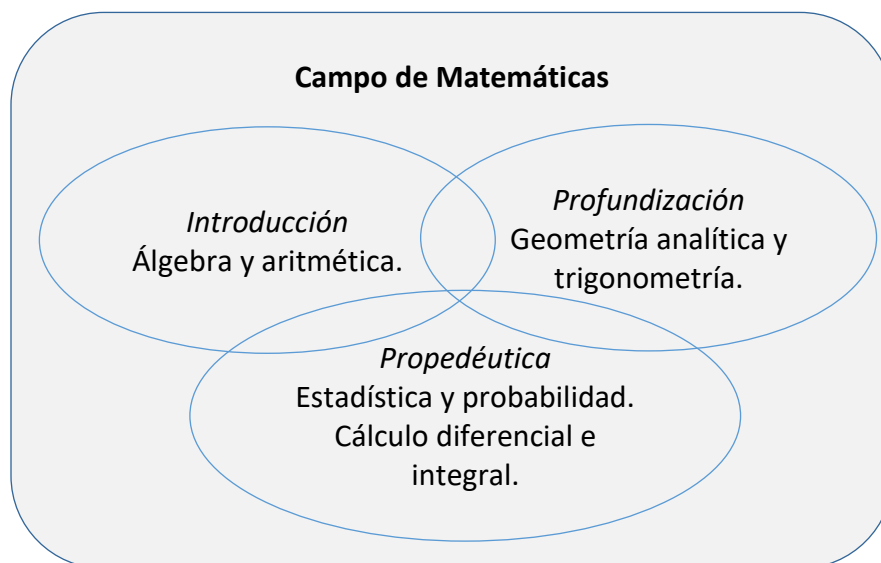
Por lo anterior, el modelo educativo de la ENP tiene como principal propósito la formación integral del educando: aquella que le proporciona elementos cognoscitivos, metodológicos y afectivos que, en síntesis, le permitan profundizar de manera progresiva en la comprensión de su medio natural y social, desarrollar su personalidad, definir su participación crítica y constructiva en la sociedad en que se desenvuelve e introducirse en el análisis de las problemáticas que constituyen el objeto de estudio de las diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, siempre con la perspectiva de la formación profesional universitaria. Las matemáticas se presentan como una herramienta de representación lógica, simbólica, numérica, algebraica y espacial o gráfica, así

como un recurso para la solución de problemas de la ciencia y del entorno; con el estudio del Álgebra, la Geometría y el Cálculo pretenden fortalecer el razonamiento lógico y la inducción, las capacidades de análisis, síntesis e inferencia, abstracción y generalización; y en Estadística y Probabilidad se pretende atender la organización de información y su representación descriptiva, y extender el aprendizaje del alumno hacia criterios no determinísticos (UNAM, 2018).

Con respecto a los *objetivos de aprendizaje*, establecidos en el segmento curricular de las matemáticas en la ENP, éstos están organizados en tres etapas: la introductoria (Matemáticas IV), la de profundización (Matemáticas V) y la Propedéutica (Matemáticas de VI) la cual está dividida en áreas disciplinares (DGENP, 2018) y, cada materia debe contribuir al desarrollo de las capacidades de pensamiento especializado en matemáticas. Las asignaturas están articuladas a partir de los objetivos de aprendizaje, aunque en cada una se enfatice una de las áreas que conforman este campo disciplinar; por ello, en esta investigación, se considera importante ofrecer dichas asignaturas desde una visión holística, dado que las asignaturas no son en lo individual, todas juntas forman parte del pensamiento matemático y por lo tanto no se pueden ver por separado, sino como una totalidad. Cabe mencionar, que desde este análisis, se considera que el proceso de la matematización se desarrollará a lo largo de todo el tránsito por el nivel bachillerato (ver figura 6).

Figura 6.

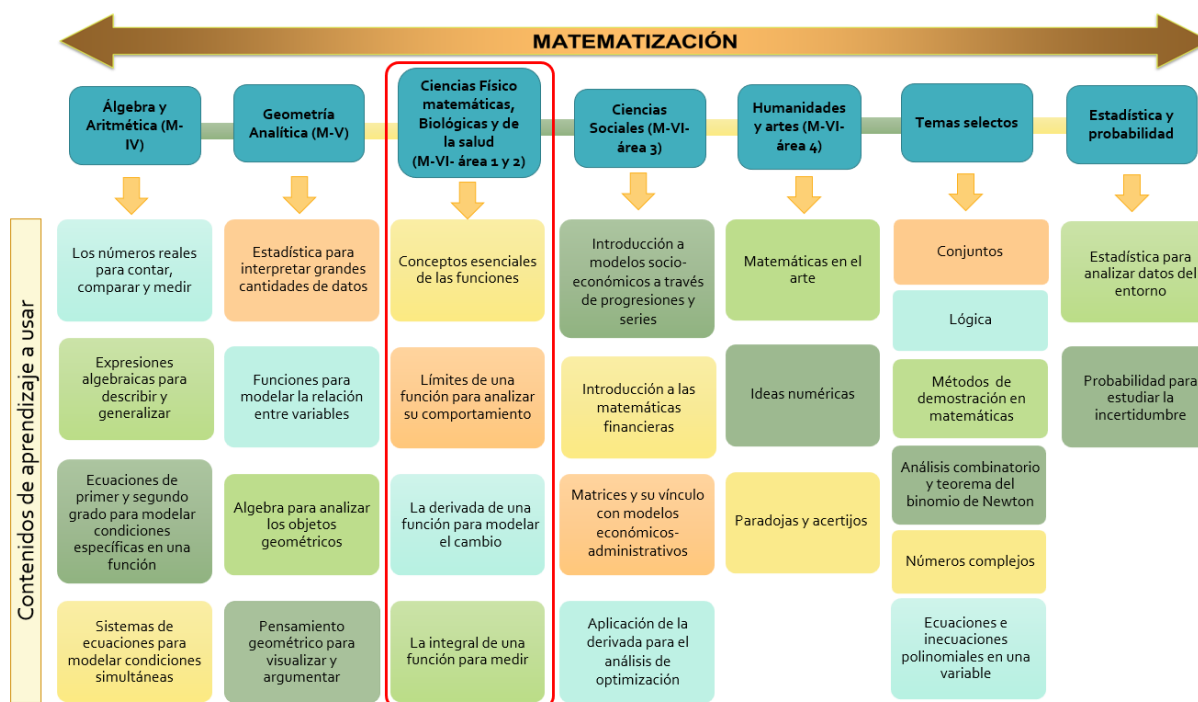
Segmento curricular de las matemáticas en la ENP como un todo holístico.



En este mismo sentido, fue muy importante tomar en cuenta los *contenidos de aprendizaje* establecidos en el programa de cada una de las asignaturas, dado que, para que surjan las capacidades de pensamiento especializado se requiere de dichos contenidos que los alumnos pondrán en uso a lo largo de las actividades. Para fines de esta investigación se resaltan los contenidos que se utilizaron para el diseño que se llevó a cabo con la docente que impartió la asignatura de Matemáticas VI (área 1 y 2) cuyo objetivo es: que los alumnos apliquen los conceptos básicos del cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida, mediante el análisis de procesos infinitos. Dado que en este último curso de Matemáticas del bachillerato introduce a los estudiantes, de manera gradual, a los conceptos de derivada e integral así como a los problemas que históricamente dieron lugar al desarrollo del cálculo (DGENP, 2018) (ver figura 7, cuadro rojo).

Figura 7.

Contenidos para usar en cada etapa del segmento curricular de las matemáticas en la ENP como un todo holístico.



Por último, es importante mencionar que la *escritura en matemáticas* es fundamental, tomando en cuenta que uno de los ejes transversales en los planes de la ENP se señala que los

alumnos deben realizar la lectura y escritura de textos para aprender y pensar, con énfasis en la producción de un ensayo argumental o un reporte de investigación, además de comprender textos de carácter técnico, en lenguas extranjeras, en los que se identifiquen las ideas principales; así mismo, realizar la presentación de la solución de un problema redactado con un lenguaje especializado, desarrollar la adopción del valor de la racionalidad por encima de la superstición, los dogmas y el poder fáctico, de manera consciente y significativa o funcional, así como el uso de software especializado que les permita visualizar, experimentar y manipular diferentes representaciones de un objeto matemático para formular y validar sus conjeturas (DGENP, 2018).

A manera de conclusión, podemos resaltar que las propuestas educativas de estas últimas dos décadas, a nivel nacional, han dirigido sus esfuerzos en el desarrollo de competencias matemáticas, las cuales constituyen hoy en día los objetivos de aprendizaje, se han centrado en formar un sujeto que piensa matemáticamente y han considerado el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero aún siguen quedando ancladas al contenido, a procesos memorísticos, a desarrollar la capacidad de ejecutar correctamente operaciones y algoritmos propios de las matemáticas y a utilizar la tecnología disponible sólo como apoyo para la comprensión de los contenidos matemáticos.

Por lo anterior, en el proyecto Aleph, buscamos una interpretación conjunta entre los docentes de matemáticas y los investigadores educativos, sobre las intenciones educativas que están planteadas en el programa de matemáticas, tener claridad sobre los objetivos de aprendizaje que se quieren desarrollar en los alumnos y compartir la idea de que las asignaturas no se vean aisladas, ya que no hay contenidos aislados, todas las asignaturas responden al desarrollo de los objetivos de aprendizaje, al desarrollo de capacidades especializadas; y el hecho de que la ENP se haya alineado al cambio educativo, abrió la posibilidad para crear y diseñar un entorno para la enseñanza de las matemáticas que posibilite la construcción de las capacidades de pensamiento planteadas en el currículo.

En relación con lo anterior, para que el diseño de la propuesta educativa fuera coherente y pudiera responder a las necesidades particulares de dicho contexto, fue pertinente conocer el contexto en general considerando las condiciones de la propia institución, para conocer las dificultades a las que tienen que responder y que influyen en la puesta en marcha de actividades de enseñanza y aprendizaje; las cuales se abordarán en el siguiente apartado.

5.1.1. Análisis del Contexto y Condiciones de la Escuela Nacional Preparatoria.

En este apartado se analiza el contexto de la ENP para conocer las condiciones sociales de la propia institución, los aspectos y dificultades a las que se enfrentan tanto docentes como alumnos al momento de llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje, las cuales se acentuaron en el contexto de la virtualidad y no están propiamente descritas en el currículum, pero tienen implicaciones en las decisiones para el diseño y en la puesta en marcha de las actividades académicas que conforman esta propuesta educativa.

A partir del año 2020, la ENP se vio en la necesidad de realizar cambios profundos en sus actividades, pasando de la presencialidad a la virtualidad de manera inesperada, por lo que en el ámbito de la educación, el distanciamiento representó un gran reto, ya que ni maestros ni alumnos estaban preparados para enseñar y aprender en escenarios virtuales mediados por tecnologías, desde casa y en distanciamiento social (Valle, 2020).

Es importante mencionar que antes del 2020 el proyecto Aleph5 inició su participación de manera presencial en el plantel 5 “José Vasconcelos”, experiencia que le permitió al equipo de investigadores educativos conocer la preparatoria y las prácticas que se realizan de forma extraescolar y que afectan el calendario de actividades académicas. Durante el ciclo escolar 2019-2020 se realizó la primera implementación de secuencias didácticas diseñadas para las asignaturas de Matemáticas IV, Matemáticas V, Inglés IV, Francés I e Historia de México. Esta primera implementación de actividades se vio afectada por las suspensiones de clases derivadas de paros y el distanciamiento social entre marzo y septiembre del 2020; sin embargo, el trabajo se retomó intensamente en agosto de 2020 en la modalidad virtual.

Del tiempo en que el proyecto Aleph 5 ha realizado su intervención en dicha institución existen investigaciones que han dado cuenta del contexto de la ENP y que sirvieron como insumo para conocer a fondo la institución (Madrigal González, 2021; González Luna, 2022). Actualmente, el acercamiento al contexto de la ENP fue posible gracias al apoyo y comunicación de los docentes participantes del proyecto, debido a que fueron el medio para informar a los investigadores educativos sobre las demandas que se iban presentando dentro de sus planteles. Por tal motivo, los maestros de la ENP y el grupo de investigadores educativos realizaron diversas acciones para poder responder ante dichas demandas a lo largo del ciclo escolar, las cuales, se describirán enmarcadas

en dos temáticas: la población estudiantil y condiciones socioeconómicas y de conectividad; el tiempo escolar para el trabajo efectivo y las actividades extraescolares que se llevaron a cabo.

Población estudiantil y condiciones socioeconómicas y de conectividad

Actualmente la ENP tiene una población estudiantil de aproximadamente 50,000 alumnos y 2,400 profesores, según el informe de gestión realizado durante el periodo 2018-2022 en la UNAM (2022). Como ya se mencionó anteriormente, en la presente investigación participaron 4 maestros que imparten la asignatura de Matemáticas IV, V y VI en diferentes planteles, pero por fines de esta investigación únicamente reportamos el trabajo realizado con la docente que imparte la asignatura de Matemáticas VI de área I y II en el plantel 3 “Justo Sierra”, quien tiene a su cargo 6 grupos (2 de V, 2 de VI área I y II, 1 de área III y 1 de área IV). Plantel en el cual asisten aproximadamente 1,400 alumnos, según datos de la Subdirección de Estudios Estadísticos de la UNAM (2021).

Debido al carácter masivo de la institución los alumnos son distribuidos de manera similar en los planteles, por grupos en ambos turnos y a cada profesor de matemáticas le son asignados de 60 a 70 alumnos por ciclo escolar. Cabe mencionar que únicamente cuentan con un tiempo de 50 a 100 minutos para poder impartir sus clases, y por el tamaño del grupo resulta complejo para los docentes el poder dedicar tiempo personalizado para atender dudas con cada uno de sus alumnos. Es importante considerar dicha información en el diseño de Secuencias Didácticas (SD) para que se logre el impacto esperado y se les ofrezca la misma oportunidad a todos los alumnos en el proceso de enseñanza⁷.

De la misma manera, para poder hacer viable la propuesta del diseño del entorno de enseñanza virtual y beneficiar a todos los estudiantes, en el proyecto Aleph 5 se tuvo particular interés por conocer las necesidades y dificultades a las que se enfrentaban los alumnos al tomar clases bajo el contexto de la virtualidad, ya que aunque la población es heterogénea la mayoría puede enfrentar problemas socioeconómicos las cuales afectan su acceso a la educación. Por ello, se diseñó un *Formulario de conectividad* en Google Forms con el objetivo de recuperar

⁷ Desde el 8 de julio de 1923 en que fue inaugurada la Escuela Nacional Preparatoria Plantel 3 como una Preparatoria Nocturna, los alumnos, maestros y trabajadores laboraron bajo el lema "La Misma Oportunidad para Todos". <http://enp3.unam.mx/historia.html>

información en seis categorías: datos generales, salud, conectividad, infraestructura, habilidades en el uso de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y socioeconómicas. Dicho cuestionario fue respondido por 300 alumnos aproximadamente de entre 14 y 18 años de edad, de los cuales 60% son mujeres y el 40% son hombres, y en su mayoría son solteros (99%). Los alumnos asisten a los planteles 3 (72%) y 8 (28%) y cursan las asignaturas de matemáticas IV (15%), matemáticas V (47%) y matemáticas VI de área 1 y 2 (38%). Las dificultades a las que se enfrentan los alumnos se señalan a continuación:

1. Condiciones de *salud*, ya que 1.5% de los alumnos tiene alguna condición física o psicológica que le impide realizar sus actividades en línea y un 5% tienen a un familiar a su cuidado.
2. En relación con la *conectividad* el 98% de los alumnos cuenta con internet en casa y algunos recurren al uso de datos móviles; en la mayoría de los casos para poder acceder a sus tareas de manera asincrónica lo hacía por medio de plataformas como Classroom (99%), correo electrónico (92%), WhatsApp (83%); mientras que para establecer una comunicación con sus compañeros hacían uso de WhatsApp, correo electrónico y Zoom que les permitía realizar reuniones para trabajar en equipos.
3. En el caso de las plataformas que usaron con más frecuencia para tomar sus clases de manera sincrónica sobresalieron Zoom, Google Meet y Aula Virtual en la que encontraban el enlace de acceso para su clase.
4. La mayoría de los alumnos reportaron tener acceso a internet en casa, pero un gran número de ellos se conecta al mismo tiempo que otros de sus familiares, que van desde 2 a 5 personas, lo cual afecta la eficiencia de la red; cuentan con recursos tecnológicos para realizar sus tareas, y en la mayoría de los casos hicieron uso del teléfono inteligente y/o de computadora o laptop propia en casa.
5. En algunos casos los alumnos pueden contar con teléfono inteligente o computadora, pero estos no están en buenas condiciones. En otros casos la computadora es prestada o compartida.
6. Otro aspecto importante por destacar es el *espacio* adecuado para que los alumnos realicen sus actividades académicas, las cuales por las condiciones del momento tenían que ser en casa, y aunque la mayoría contaba con un espacio propio, más del 50% de los alumnos compartían dicho espacio con otros familiares, lo cual, también tenía

implicaciones en el tiempo disponible para realizar sus actividades académicas el cual era de 2 hasta 8 horas, en el mejor de los casos.

7. Un porcentaje de los alumnos (14%) tiene otra responsabilidad que atender, la cual interfiere en su rendimiento académico, porque trabajan de manera remunerada para apoyar económicamente en los gastos de su casa debido a que alguno de sus familiares perdió el empleo; y aproximadamente un 50% no cuenta con ningún tipo de beca que les ayude a solventar sus gastos relacionados con sus actividades académicas.
8. Todos los alumnos de la UNAM deberían tener acceso remoto a la biblioteca digital de la UNAM, pero únicamente el 50% tiene acceso.

Por otro lado, la mayoría de los alumnos cuentan con *habilidades* suficientes para hacer uso de la tecnología, saben usar plataformas como Zoom, Meet, Moodle, paquetería de office y recursos para elaborar podcast y video. En algunos casos los alumnos ya usan GeoGebra, Khan Academy que son herramientas que se utilizan particularmente en matemáticas.

Tiempo escolar para el trabajo efectivo y actividades extraescolares

El tiempo fue un factor importante a considerar para el diseño e implementación de las actividades de enseñanza y aprendizaje, considerando el tiempo de trabajo efectivo dentro del aula presencial con sus alumnos y el tiempo que los docentes asignaban para participar en la planeación y diseño de las secuencias didácticas.

Respecto a la implementación de las secuencias didácticas estas se llevaron a cabo durante el ciclo escolar 2022-2023 (entre agosto del 2021 y abril del 2022). Según el calendario escolar, en total estaban destinados 149 días de trabajo, sin contar las vacaciones y los días inhábiles (DGAE, 2021) y aunque parece suficiente para llevar a cabo las actividades diseñadas, este tiempo se ve fragmentado por diferentes aspectos administrativos, técnicos, por otras actividades extracurriculares de tipo social que los docentes de matemáticas tienen que atender y sacrificar horas de clase y/o por alguna dificultad de conexión, las cuales se mencionan a continuación.

1. Las secuencias didácticas contemplaban un tiempo específico de duración y en matemáticas se tenía que considerar que a lo largo de la semana las maestras impartían 3 clases, 2 dos

de 100 minutos y una de 50 minutos, por lo que se tenían que hacer ajustes para que los docentes pudieran cubrir lo planeado para cada sesión, pero al llevar a cabo la implementación en la virtualidad el tiempo no era suficiente, las maestras atendían dudas de temas en los cuales los alumnos aún tenían dificultades u otras que se presentaban en torno a la actividad.

2. En algunos casos, tanto los alumnos como los docentes enfrentaron problemas técnicos para ingresar a la sesión de clase en zoom o tenían dificultades para tener acceso a los recursos de manera inmediata lo cual absorbía tiempo de la clase. Para poder solucionar estos problemas técnicos, se establecieron reglas de comunicación entre los alumnos para que aquellos que no tenían acceso a internet pudieran recibir el material que necesitaban al momento de la clase, se entregaban los recursos en diferentes formatos, y se enviaban los enlaces con anticipación para que los alumnos pudieran revisarlos antes de la clase.
3. A lo largo del ciclo escolar los maestros deben realizar tres evaluaciones parciales, las cuales están establecidas en el calendario de la ENP, y que deben entregar ya que la suma de las tres evaluaciones conformará la calificación final de los alumnos. Pero considerando que los docentes tienen grupos muy numerosos requieren de una semana para poder calificar trabajos y tareas considerados en el periodo correspondiente.
4. A lo largo del ciclo escolar, se toman en cuenta días que oficialmente no están estipulados como inhábiles, pero son representativos para la comunidad estudiantil por lo que se presenta una baja de asistencia a las clases, aunque estas sean en línea, y ante ello los docentes no imparten clases. Durante el ciclo escolar 2022-2023, esos días fueron el 1 de octubre (en conmemoración del 2 de octubre), el 14 de febrero (el estudiantado celebra el día del amor y la amistad), y el 8 y 9 de marzo (en conmemoración por el día internacional de la mujer).
5. Por otro lado en la ENP existen eventos representativos o prácticas sociales que se llevan a cabo ahora en modalidad en línea; y tanto docentes como alumnos deben participar dependiendo de las características del evento. De los eventos que se presentaron a lo largo del ciclo escolar fueron: El día Nacional de Pi; el Seminario de Análisis y Desarrollo de la Enseñanza, mejor conocido como el SADE; el Encuentro de Profesores Dominó TIC TAC (Tecnologías de la Información y la Comunicación y Tecnologías del Aprendizaje y el

Conocimiento), lo cual también redujo el tiempo de trabajo de clase para dar continuidad al desarrollo de las secuencias didácticas con sus alumnos.

Analizar el currículum y el contexto de la institución fue de suma importancia para poder tomar en cuenta todas las condiciones a las que se enfrentan los docentes, los alumnos y la misma institución para poder ofrecer una educación de calidad considerando que en el contexto de la virtualidad los esfuerzos se incrementan y por ello resulta necesario hacer ajustes acordes a las necesidades del contexto, a lo que se plantea en las secuencias didácticas en papel con respecto a lo que ocurre en la realidad dentro del aula para hacer viable la propuesta y que todos los alumnos se vean beneficiados.

Para atender a las necesidades que se fueron presentando la participación de los docentes fue muy importante desde el análisis, diseño y planeación hasta la implementación y evaluación de las actividades de aprendizaje, y para tener una interpretación colectiva de la idea del currículum, entenderlo y conocer los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr. Ante esto cabe señalar que a lo largo del semestre las docentes trabajaron en colaboración con los investigadores educativos, alrededor de 150 horas en el periodo interanual que se llevó a cabo del 20 de abril – al 29 de junio del 2021 y posterior a ello designaban de 10 a 15 horas a la semana para continuar con los ajustes, compartir y reflexionar sobre el proceso de la implementación.

Si bien es cierto que pasar a la virtualidad fue un buen momento para renovar las prácticas educativas que en su momento sólo se pensaba que tenían sentido en la presencialidad; en esta investigación nos permitió contribuir y dar continuidad al compromiso que se tiene en la ENP con la formación de los y las estudiantes preparatorianos y continuar realizando la tarea educativa para la cual fue creada desde que inició. Es decir, aprovechamos ese momento de transición de la presencialidad a la virtualidad para potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y aunque la tecnología tuvo un gran impacto en los espacios educativos es preciso tener presente que no sólo se trata de trasladar lo presencial a lo virtual, sino que repensamos el sentido y uso de las mismas para favorecer el pensamiento matemático, sin olvidar que el pensamiento es el centro de la propuesta educativa.

5.1.2. *Comprensión del currículo y el contexto para el diseño del entorno virtual*

En el presente apartado se abordan las implicaciones que tuvo el comprender y conocer el currículum y el contexto institucional de la ENP, para tomar decisiones pertinentes que se traducen en las condiciones para el diseño del entorno de enseñanza virtual. A lo largo de todo el proceso de análisis los docentes de matemáticas contribuyeron de manera colaborativa para consolidar la propuesta; pero *¿para qué nos sirvió analizar el currículo y el contexto con los docentes?*

En primer lugar, el proceso de análisis reflexivo hizo inteligible el currículo para los docentes, es decir, permitió construir una *visión holística, compartida y resignificada* del mismo, y profundizar en la intención que tiene, cómo se articula y estructura con otras materias para el logro del perfil de egreso. Al mismo tiempo, se pudo precisar y significar el sentido del currículo y los objetivos de aprendizaje, en conjunto con los investigadores educativos, para entender hacia donde se pueden dirigir los esfuerzos en la ENP; y con ello, poder iniciar con el diseño del entorno de enseñanza que fuera coherente con las demandas del contexto, tomando en cuenta los estándares disciplinares establecidos en el SUMEN para el bachillerato de la UNAM, los cuales categorizamos en términos de competencias, es decir, en términos de lo que los alumnos son capaces de hacer; análisis que se complementó con la revisión crítica de la literatura relacionada con el proceso de la matematización, la argumentación y la modelización matemática.

En segundo lugar, nos permitió definir los objetivos de aprendizaje y reconceptualizarlos, ya no en términos de contenidos sino, en términos del *proceso de matematización* llegando a un acuerdo en común sobre las capacidades que se querían desarrollar a partir de la propuesta y tener una interpretación colectiva entre los maestros expertos en la disciplina y los investigadores educativos sobre esta noción, ya que esta idea de matematizar no aparece de manera explícita en los programas de matemáticas de la ENP, pero sí se toman en consideración las acciones matemáticas que implica dicho proceso. En la siguiente tabla se muestran las tres grandes dimensiones del proceso de matematización⁸ el cual se concretó como objetivo de aprendizaje y se traducen en cada una de las secuencias didácticas para que el docente tenga en cuenta en qué momento de la actividad se movilizaron (ver tabla 1) (Blum & Borromeo, 2009; Solar y Azcárate, 2011; Acebo y Rodríguez, 2021).

⁸ En el capítulo 2 se aborda a detalle las características de cada una de las dimensiones del proceso de matematización.

Tabla 1.
Dimensiones del proceso de matematización.

Categoría	Objetivo de aprendizaje
Interpretación	1. Identificación del problema.
	2. Simplificación del problema para su análisis matemático.
	3. Representación del problema.
Transformación	4. Modelización.
	5. Operacionalización. a . Formulación de explicaciones usando la notación matemática. b . Uso de herramientas matemáticas tecnológicas (objetivaciones). c . Visualización.
	6. Resultado matemático (Generalización y Abstracción)
Comunicación	7. Validación y argumentación matemática.
	8. Reinterpretación de los resultados matemáticos con la realidad o el contexto del problema.
	9. Comunicación matemática, verbal o escrita para tomar un posicionamiento y reflexionar sobre la argumentación.
	10. Transferencia.

En tercer lugar, ayudó en la selección de temas relacionados con actividades reales que permitieran poner en juego el contenido disciplinar de las matemáticas y favorecieron el despliegue del proceso de matematización. En dichas temáticas también se consideró como parte importante la comprensión y elaboración de textos matemáticos lo cual aún resulta complejo en varias asignaturas, y más cuando hablamos de matemáticas, ya que ésta se piensa únicamente como procedimientos, pero estos no se podrían entender sin un texto que los acompañe y en el que se emplee el lenguaje formal matemático. Por lo que se pensó como producto final de las actividades la elaboración de un informe matemático el cual debía contener el modelo matemático, la argumentación y validación bajo el contexto de la actividad social en la que estuviera enmarcado. Esto con la finalidad de que las actividades que se diseñarán fueran lo suficientemente poderosas

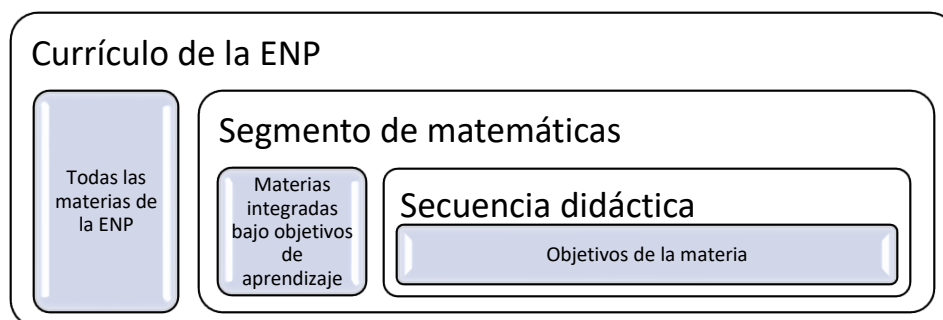
para impactar en los aprendizajes de los alumnos y favorecer el trabajo en equipo haciendo uso de múltiples recursos.

Por último, el análisis nos permitió considerar el tiempo académico total que realmente se tendría disponible para implementar las actividades de aprendizaje y en función de ello poder construir el plan anual de trabajo. Por eso, fue importante considerar las actividades extracurriculares que se realizan dentro de la ENP para que la planeación no se viera afectada; por ejemplo, en el caso de las actividades extracurriculares podemos mencionar el Día Nacional de Pi, que es una celebración en honor al número Pi, en la cual los alumnos y docentes participan con diferentes actividades y que resulta una oportunidad para compartir algunas de las temáticas o modelos matemáticos elaborados en alguna de las secuencias didácticas en las que han participado los alumnos.

En resumen, el análisis del currículum nos permitió anticipar y comprender el modo en el que los diferentes elementos del contexto afectan el curso de los aprendizajes y cuáles son los objetivos de aprendizaje que se quieren desarrollar (Rinaudo y Donolo, 2010). De igual manera permitió realizar discusiones y reflexiones colegiadas entre los docentes y los investigadores educativos, para tener al centro la actividad matemática y que lo que se quiere favorecer es el pensamiento matemático el cual forma parte de la misma actividad; es decir, crear las condiciones materiales para que surja la matematización. En Aleph5 estamos propiciando la visión integrada holística del currículum y de la materia, por ende, las secuencias son parte de un todo, de tal manera que la primera secuencia va a tener implicaciones en las siguientes secuencias didácticas (ver figura 8).

Figura 8.

El currículum desde una visión holística que contempla las materias de matemáticas y cada una de las secuencias didácticas.



Cabe señalar que toda esta interpretación la construimos en colaboración con los docentes de matemáticas y analizamos el currículum con la finalidad de diseñar una propuesta viable y acorde al contexto particular de la ENP. La interpretación que elaboramos del currículum es el currículum que vamos a implementar, no es algo que ya existía; es el marco de lo que vamos a diseñar. A partir de lo anterior, construimos la propuesta del entorno virtual coordinado la cual se abordará en el siguiente apartado.

5.2. Diseño del Entorno Virtual Coordinado para la enseñanza de las matemáticas en la asignatura de VI de la ENP

De acuerdo con la perspectiva metodológica de la IBD, esta fase corresponde al diseño del entorno virtual de enseñanza, el cual se refiere al diseño de todas las actividades de enseñanzas en conjunto y que se implementaron de forma virtual a lo largo del ciclo escolar 2021-2022. Como ya se mencionó el diseño de esta propuesta se realizó dentro de la ENP y a partir de allí se diseñó, se probó, se reflexionó y se rediseñó para hacerlo viable. El diseño se construyó de manera colectiva entre la comunidad de docentes e investigadores educativos (pedagogos).

Es importante mencionar que el diseño del entorno surge como respuesta a las problemáticas que existen en el nivel bachillerato y subyace a las premisas teóricas que definen al proyecto Entornos Complejos de Aprendizaje desde que inició en Educación Básica de manera presencial y que ahora se utilizan para sustentar esta propuesta educativa en la que se coordinan el espacio síncrono y asíncrono, asumiendo que el aprendizaje y el desarrollo cultural se despliega al participar dentro de actividades sociales haciendo uso de sistemas semióticos particulares.

Para realizar el diseño de las actividades de enseñanza y poder establecer el trabajo colaborativo con los docentes de matemáticas se conformó el taller de diseño y rediseño de secuencias didácticas, no sólo para diseñar las secuencias para la asignatura de matemáticas VI sino para rediseñar las SD que ya se habían diseñado e implementado en ciclos anteriores en

matemáticas V y V. Dicho taller se llevó a cabo en el periodo intersemestral⁹ durante los meses de abril a julio del año 2021.

En el caso particular del diseño de las SD para la asignatura de Matemáticas VI, durante este periodo intersemestral se investigaron y seleccionaron las actividades reales que permitirían el desarrollo de la matematización, al mismo tiempo se compartió con los docentes la perspectiva sociocultural la cual serviría como referente para el diseño de las condiciones bajo las cuales surge el pensamiento especializado. Es importante señalar que las secuencias didácticas se escribieron en colaboración con la docente de esta asignatura.

En los siguientes apartados se abordará cómo los supuestos teóricos de la visión Vigotskyana sirvieron como herramienta para diseñar las secuencias didácticas y de igual manera se describirá el diseño de secuencias didácticas y su organización en el plan anual para poder llevar a cabo la implementación en tiempo y forma.

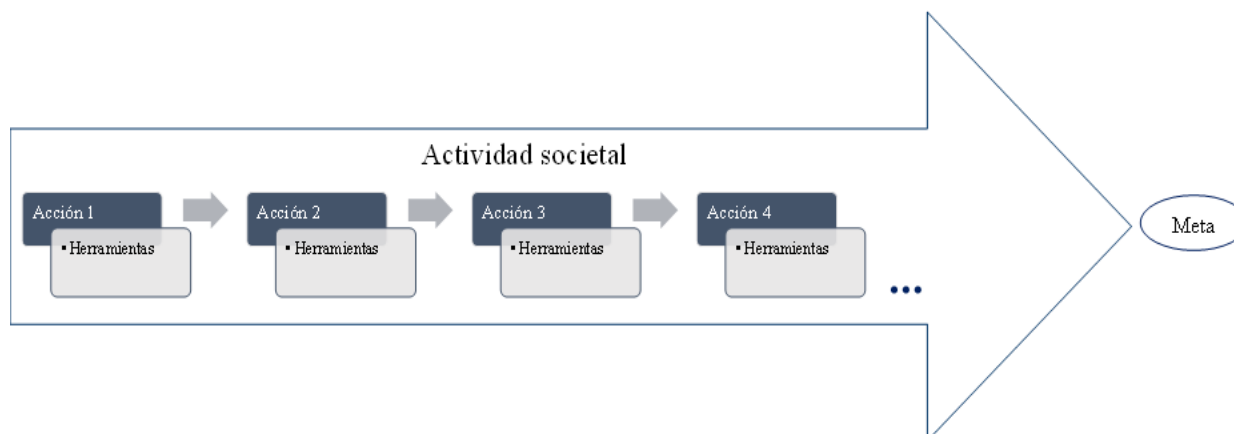
5.2.1. Actividades reales

A partir del análisis realizado anteriormente, la propuesta que aquí se plantea es para lograr favorecer el desarrollo de la matematización en alumnos preparatorianos, ante esto se requiere crear las condiciones particulares en las cuales los alumnos pongan en juego las dimensiones del proceso de matematización y alcancen los objetivos de aprendizaje establecidos en la asignatura correspondiente a matemáticas VI de la ENP.

De acuerdo con la perspectiva sociocultural, en esta investigación se parte de considerar a la actividad societal, como unidad de análisis, para promover el pensamiento matemático y la mediación docente como medio para el desarrollo de las capacidades especializadas dentro del aula. Las actividades societales son aquellas actividades que se han construido histórica y socialmente y tienen una estructura, reglas, un propósito particular con un fin último que se convierte en el motivo del individuo que participa en ella (Wertsch, 1988) (ver figura 9).

⁹ El periodo intersemestral se refiere al lapso en donde los maestros realizan actividades formativas como tomar talleres y cursos o se realizan reuniones colegiadas. En este tiempo ya no se imparten clases y para los alumnos representa el inicio del periodo vacacional, sin embargo, los maestros continúan trabajando.

Figura 9.
La actividad societal.



Nota. La actividad societal implica llevar a cabo diferentes acciones en las que se hace uso de diferentes herramientas semióticas, las cuales contribuyen en el logro de la meta socialmente establecida.

Por ello, de manera colaborativa con los docentes, en Aleph5 seleccionamos actividades societales porque permiten movilizar las capacidades de pensamiento especializado en matemáticas. En ellas se considera un problema real y un producto o meta particular compleja, en este caso un informe matemático, el cual permite la formalización del proceso de matematización, dado que es una objetivación del pensamiento matemático y le permite al alumno tener muchas formas de representar el fenómeno real. El alumno debe producir algo original y nuevo que no está determinado en ningún lado, es decir, no lo puede copiar de ninguna parte. De acuerdo con Cárdenas Lugo (2023) una actividad societal representa un reto para los estudiantes ya que los compromete y les exige usar el conocimiento disciplinar para la resolución de la actividad.

Como ya se mencionó, recuperamos el concepto de *realidad* haciendo referencia a lo que concierne a la realidad social de las matemáticas; dado que el humano no puede acceder o tener una relación directa con la realidad, requiere de un objeto de conocimiento específico que lo acerque a ella, porque dicho objeto apela a la realidad, dado que es una abstracción de la misma realidad (SUMEM, 2016). En este caso particular, las matemáticas son el objeto de conocimiento específico y le permiten al humano acceder e interpretar la realidad matemáticamente y desarrollar formas de pensar o capacidades intelectuales que, de acuerdo con las premisas socioculturales, se desarrollan bajo un contexto de actividad que las propicie.

Ahora bien, teniendo en cuenta que las matemáticas son parte de la actividad societal, para poder seleccionar las actividades sociales que servirían como dispositivo, se consideraron diferentes dimensiones para reconocer los contextos en los que un matemático realiza acciones matemáticas, entre ellos se encuentra el ámbito profesional, personal, social y científico (OCDE, 2015). La selección de éstas también implicó, reconocer los temas disciplinares de las matemáticas (álgebra, geometría, cálculo, estadística y probabilidad) que se ponen en juego y que se relacionan con otras disciplinas como: aeronáutica, vulcanología, física, ingeniería industrial, diseño, por mencionar algunas.

Por lo anterior, en el siguiente apartado se profundizará en las características que definen la estructura de cada una de las secuencias didácticas y las diferentes modalidades que se diseñaron bajo el contexto de la virtualidad y cómo las premisas socioculturales y la lógica de las actividades sociales sirvieron para crear las condiciones que propiciaron el desarrollo del pensamiento especializado en matemáticas.

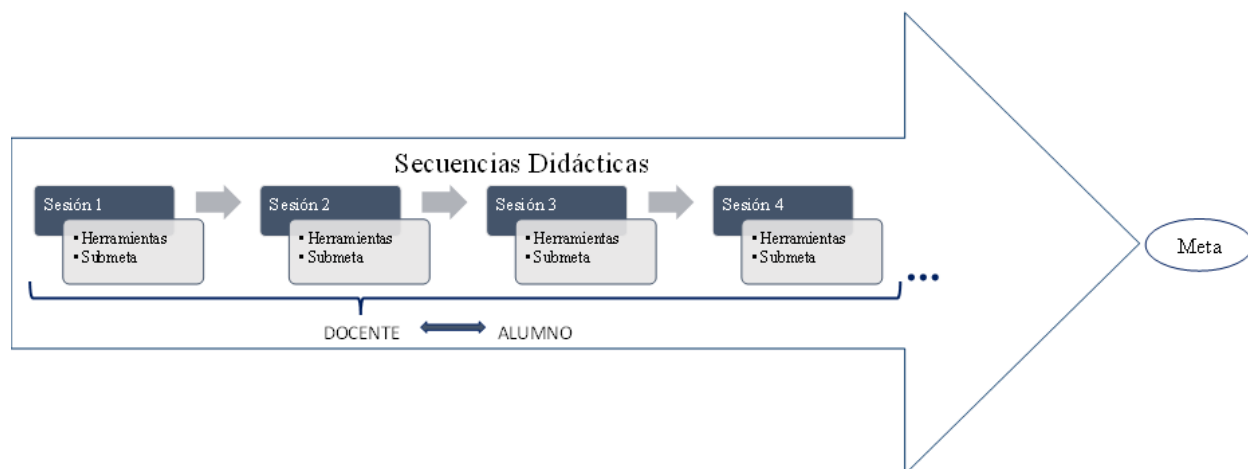
5.2.2. Diseño de Secuencias Didácticas

Dentro de las actividades sociales se movilizan capacidades de pensamiento y en el caso de esta investigación en Aleph5 tomamos esas actividades y las recreamos o reconstruimos dentro del aula en términos de Secuencias Didácticas, por lo tanto un rasgo importante de estas SD es que responden a las actividades sociales; es decir, reconstruimos la sociedad en el contexto escolar de la ENP, acercamos la cultura matemática al alumno dentro de la escuela y lo hacemos partícipe de ella. Al igual que en todo el proceso de investigación, dentro de estas actividades la gestión del docente es imprescindible dado que es el que va a gestionar todo el Entorno Virtual Coordinado (EVC) y con quien compartimos una interpretación sobre el currículo y los objetivos de aprendizaje que se pretenden desarrollar.

En este sentido, es pertinente aclarar que las secuencias didácticas no son una copia de la actividad social, pero tienen una correspondencia con la estructura de la actividad social matemática. En las SD se incorporan ayudas y recursos que el docente pone a disposición de los alumnos para el logro de la meta y las acciones corresponden a cada una de las sesiones de trabajo dentro del aula. Dichas secuencias determinan todo, las acciones del docente, las acciones del alumno, el uso de herramientas, las interacciones, el uso de motores cognitivos, por lo tanto la

construcción colectiva se da dentro de la misma actividad y es allí en donde surge el pensamiento. Las secuencias didácticas tienen intencionalidad y cada uno de los recursos que en ella se utiliza también y, para que se pongan en juego las dimensiones de la matematización cada secuencia didáctica debe representar un reto cognitivo para el alumno (Brousseau, 2007) (ver figura 10).

Figura 10.
Secuencias Didácticas.



Nota. Las secuencias didácticas implican llevar a cabo diferentes sesiones en las que se realizan acciones matemáticas con submetas particulares y en las que se hace uso de múltiples herramientas semióticas, las cuales contribuyen en el logro de la meta, gestionada por el docente.

Por lo anterior, desde nuestra perspectiva las SD son el instrumento que nos ayuda a formalizar las actividades académicas y para que funcionen como dispositivo pedagógico es imprescindible realizar ciertas adecuaciones. Es así que la categoría de Secuencias Didácticas la recuperamos de la propuesta realizada por Guy Brousseau¹⁰ quien estaba interesado por mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas y el proceso pedagógico que resulta indispensable para promover el aprendizaje de las matemáticas dentro del contexto escolar, por ello, propone su teoría de las Situaciones Didácticas las cuales define como un modelo de interacciones sociales establecidas entre alumnos, docente, los saberes matemáticos y un medio que comprende

¹⁰ La obra de Guy Brousseau comenzó desde los años 70's en Francia y se le ha reconocido como uno de los principales investigadores del campo de la Didáctica de las Matemáticas, por su contribución teórica sobre la teoría de las Situaciones Didácticas. En 1972, dentro del marco del Instituto de Investigación en Enseñanza de la Matemática (IREM) de la Universidad de Bordeaux, creó el Centro para la Observación e Investigación en Enseñanza de la Matemática (COREM) (Brousseau, 2007).

instrumentos y objetos, en el que se establecen un conjunto de condiciones que enmarcan acciones inteligibles y tienen por objetivo la enseñanza de un saber determinado, es decir lograr que los alumnos se apropien de los saberes matemáticos; en este mismo sentido el alumno es el encargado de interpretar la situación, las preguntas que le son planteadas y la información que le proporciona el docente dentro en su práctica de enseñanza (Brousseau, 2007).

Es importante mencionar que de la propuesta de Brousseau (2007) también recuperamos la importancia de considerar que las secuencias didácticas deben comprender diferentes momentos que definen los pasos de la actividad: el momento de *contextualización (inicio)*, en el que se le presenta al alumno el contexto y la meta de la actividad; el *desarrollo de la actividad*, que comprende todas las acciones que los docentes deberán realizar paso a paso con los alumnos, considerando los materiales y recursos como gráficas, modelos, esquemas y las pequeñas tareas que deberán realizar las cuales contribuyen al logro de la meta; y por último se agrega un *cierre*, es el momento en el que concluye la actividad y los alumnos deben presentar el producto final que hay elaborado y al mismo tiempo el docente puede dialogar con ellos sobre sus aprendizajes.

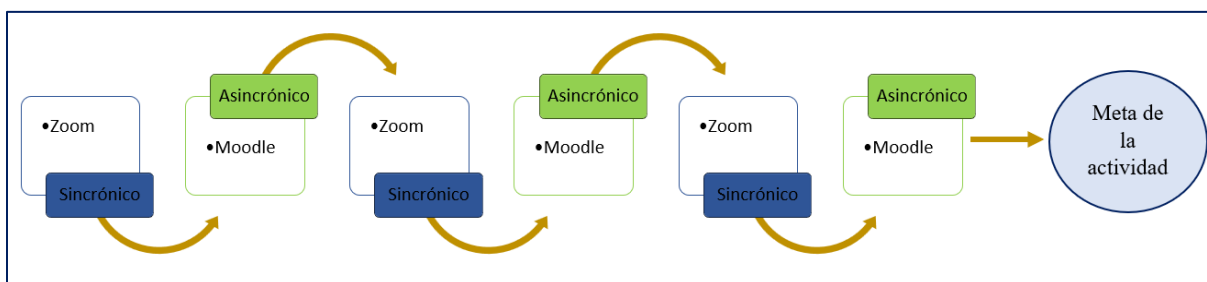
Ante esto, resulta importante tener presente: *¿Bajo qué condiciones se puede propiciar que un sujeto, en este caso los alumnos preparatorianos, tengan la necesidad de un conocimiento matemático determinado que les permita tomar ciertas decisiones dentro de un contexto específico?* En este sentido, en Aleph5 creamos las condiciones, los espacios que posibiliten los saberes de los alumnos, abriendo la ventana al conocimiento, y con ello proponemos nuevas alternativas pedagógicas que posibiliten la construcción de saberes socialmente productivos en la disciplina de las matemáticas, que les permitan a los alumnos posicionarse frente a su realidad y poderla interpretar desde dichos saberes.

Es así como hemos desarrollado Secuencias Didácticas (SD) en un formato en el que se organizan y establecen las interacciones que se desplegarán a lo largo de toda la actividad, el cual denominamos *dispositivo de gestión de actividades pedagógicas (azul y oro)*. Este documento es la base para las y los docentes, pues les permite ver paso a paso cómo se gestionan las actividades clase tras clase para el logro de la meta establecida, la cual orienta todas las acciones que se llevarán a cabo; incluye todos los recursos, plantillas, motores cognitivos que deberá emplear con los alumnos para detonar el desarrollo del pensamiento matemático, además de incluir listas de cotejo o rúbricas para la autoevaluación y co-evaluación que realizarán los alumnos al finalizar cada una de las actividades.

Para poder concretar las Secuencias Didácticas, entre los docentes e investigadores educativos se tomaron ciertas consideraciones para el diseño y un aspecto importante que guió el diseño de las SD fue el hecho de encontrarnos en el contexto de la virtualidad en el cual los maestros no podían implementar las SD de manera presencial dentro del aula, por lo que se tomó la decisión distribuir las actividades en dos espacios coordinados: el sincrónico para el cual se utilizó la plataforma de zoom, mientras que el espacio asincrónico se gestionó a partir de la plataforma LMS de Moodle y todas las acciones e instrucciones que se colocaron en dicha plataforma también estaban establecidas en el formato de secuencia didáctica (ver figura 11).

Figura 11.

Coordinación del espacio sincrónico (azul) y asincrónico (verde) para el desarrollo de la actividad.



En el espacio sincrónico, la docente procuraba ocupar de manera efectiva el tiempo designado para desarrollar todas las acciones planteadas para la sesión y aprovechaba todas las herramientas que le ofrecía la plataforma de zoom, en particular hacia uso del chat para favorecer la participación de los alumnos y poder conocer sus aportaciones, también según lo planteado en la estructura de la secuencia didáctica conformaba salas para que los alumnos pudieran realizar trabajo en pequeños equipos, los cuales se conformaban de 5 a 6 integrantes. De igual manera, la docente establecía todas las reglas de la actividad y puntualizaba cada una de las asignaciones o tareas que debían resolver de manera asincrónica. Mientras que en el espacio asincrónico las tareas que se asignaban tanto de manera individual como en equipos estaban dirigidas también al logro de la meta y los alumnos tenían que realizarlas para poder dar continuidad a la secuencia para la siguiente sesión sincrónica. Resulta relevante mencionar que aunque el momento era asincrónico también existía la guía del docente aunque de forma indirecta dado que colocaba instrucciones y motores cognitivos que ayudaban a que los alumnos pudieran resolver la tarea.

De igual manera, se tomó en cuenta para el diseño la selección y elaboración diversos recursos para lo cual los docentes contribuyeron elaborando modelos matemáticos como gráficas, funciones, tablas e incluso modelos tridimensionales elaborados en GeoGebra. Además de ello, se recuperaron modelos matemáticos de publicaciones relacionadas con la aeronáutica, la vulcanología, la física, la biología y ciencias de la salud, para acercarle a los alumnos modelos matemáticos elaborados por matemáticos profesionales; y dichos recursos se colocaban con una intencionalidad en cada paso de la SD. Cabe señalar que como herramientas tecnológicas se tomó la decisión de hacer uso de GeoGebra, herramienta que permite realizar tener al mismo tiempo diferentes representaciones como la algebraica y gráfica en dos y tres dimensiones, además contar con otros recursos como la calculadora.

Así mismo, en cada sesión de la secuencia quedaron establecidas las instrucciones de cada sesión las cuales incluían un breve diálogo que orientaba al docente hacia dónde debía dirigir el momento de la actividad y que recursos debía utilizar. Las acciones del maestro dentro de la actividad son sumamente relevante porque es el que guía y acompaña el proceso de los alumnos ofreciendo diferentes tipos de ayudas para que los alumnos alcancen la meta establecida en la actividad; para ello se plantearon y estructuraron motores cognitivos establecidos por la actividad como apoyo para que el docente entablara un diálogo intencionado con los alumnos, aunque en el momento de ir realizando la actividad con los alumnos surgieron otros motores cognitivos que no estaban contemplado en el papel, pero que el docente colocó para dar continuidad a la actividad y resolver las dudas particulares de los alumnos.

Como una decisión importante se estableció como meta de la actividad la elaboración de diferentes productos como infografías, caricaturas matemáticas, videos documentales, líneas del tiempo y en particular la elaboración de un producto complejo, un informe matemático, el cual se definió como un escrito breve en el que el alumno integra y presentar sus argumentos con los cuales pretende explicar un fenómeno, regularidad o patrón, mediante un modelo matemático con el cual valida y justifica sus razonamientos; dicho modelo es una representación simplificada de la realidad como gráficos, esquemas, tablas, fórmulas, ecuaciones algebraicas y algoritmos en los que se explicitan las relaciones entre variables.

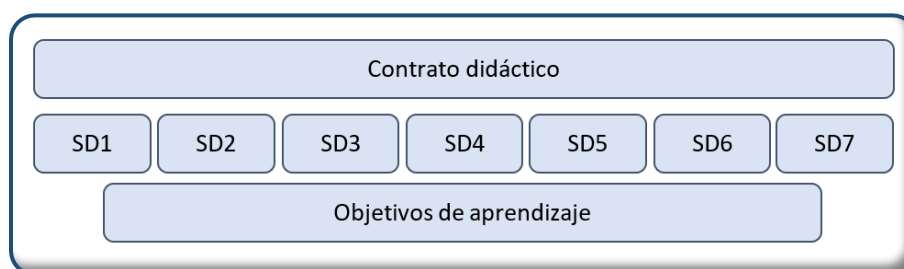
En colaboración con las docentes se concretó el diseño de un total de 7 secuencias didácticas (SD) para la asignatura de Matemáticas de VI, en diferentes modalidades: rutinas, proyectos, talleres, casos de enseñanza y juegos; las cuales, permitieron abordar los objetivos de aprendizaje

correspondientes a las competencias esperadas en el programa de la ENP. Las SD se elaboraron desde una perspectiva sociocultural y cada una de ellas fue la reproducción de una actividad societal humana como ya se mencionó, es decir, se recrean actividades cotidianas, públicas y laborales con una meta socialmente establecida. Bajo este contexto se crearon las condiciones desde el interior de la ENP para favorecer el surgimiento del pensamiento matemático de los jóvenes que cursan el bachillerato.

Antes de abordar cada una de las modalidades de las secuencias didácticas diseñadas es relevante mencionar que se realizó el diseño de una Situación didáctica a la que denominamos “Contrato didáctico” que se implementó previo a las diferentes modalidades de Situaciones Didácticas, el cual se utilizó como una herramienta de gestión colectiva e intencionada para darle unidad e integridad a todo el ciclo, para que el alumno pudiera reconocer lo que se esperaba que desarrollará a lo largo de su participación en las secuencias didácticas con la finalidad de que conocieran el proyecto Aleph5 para que tuvieran una mirada global de la forma de trabajo en los espacios sincrónicos y asincrónicos en los cuales serían partícipes (ver figura 12).

Figura 12.

Contrato didáctico.



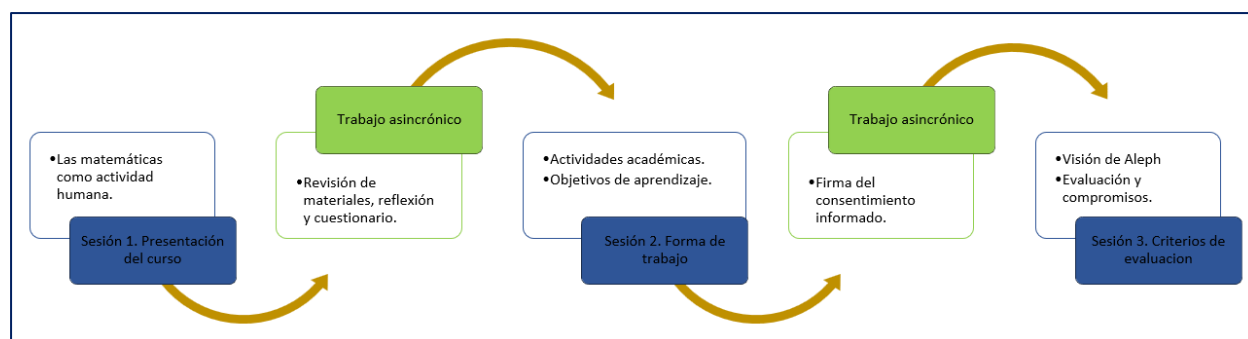
Nota: Esta secuencia didáctica se implementó al inicio del curso y coloca al centro los objetivos de aprendizaje que se abordarán en cada secuencia didáctica y que son los que se pretende desarrollar en los alumnos.

En Aleph5 se recupera la categoría de contrato didáctico propuesto por Brousseau (2007) y se implementa el contrato didáctico con el fin de establecer las reglas de lo que se espera del alumno, del profesor y también se explicita la distribución de las responsabilidades que tendrán tanto los docentes como los alumnos dando a conocer lo que se espera que aprendan: la matematización y los conocimientos que pondrán en juego. Se mencionan las dimensiones del pensamiento matemático que desarrollarán a lo largo del curso con el objetivo de que los alumnos

desde el inicio conozcan las capacidades que desarrollarán al participar de manera activa a lo largo del ciclo escolar, pero no se les da la clase del proceso de matematización. En el mismo contrato se le presentan al alumno las actividades en las que participará y los productos finales que entregarán. Un objetivo particular que tuvo el contrato didáctico fue situar a las matemáticas como actividad humana y cambiar la concepción que los alumnos traen de las matemáticas y que no saben para qué sirven. Por último, se dio a conocer la forma de evaluación y los porcentajes que tenían cada uno de los criterios establecidos como, la participación, tareas y el trabajo en equipo (ver figura 13).

Figura 13.

Estructura del contrato didáctico por sesión, tanto sincrónica (azul) como asincrónica (verde).



Posterior a la implementación del contrato didáctico se inició con la puesta en marcha de las Secuencias Didácticas que se fueron diseñando y en cada una de ellas se ponían en juego contenidos de aprendizaje y se realizaban acciones matemáticas las cuales forman parte del proceso de matematización el cual es el objetivo de aprendizaje que se buscaba desarrollar (ver tabla 2).

Tabla 2.

Secuencias didácticas por modalidad con sus respectivos contenidos y objetivos de aprendizaje.

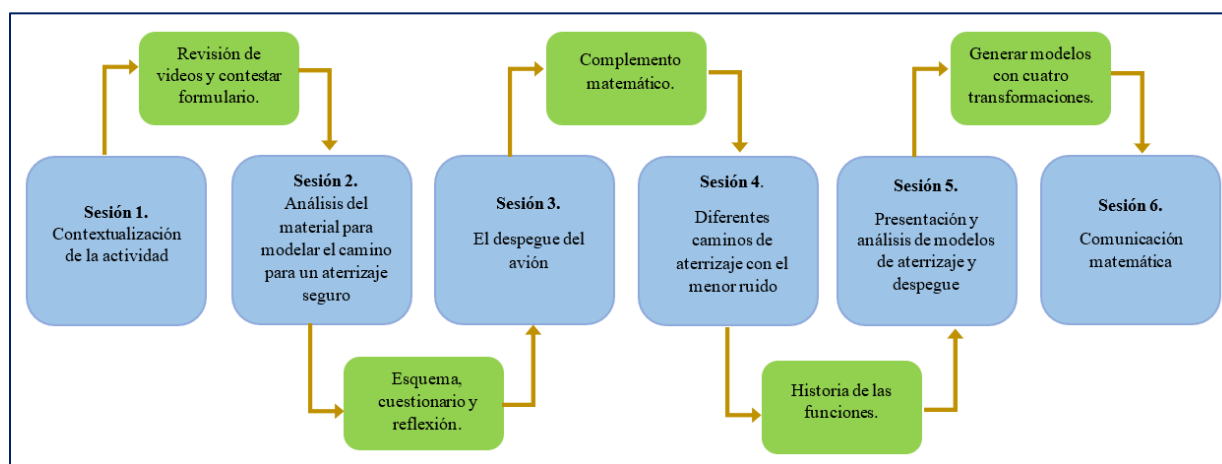
Modalidades	Secuencias Didácticas	Contenidos en uso	Objetivos de aprendizaje (Matematización)	Meta de la actividad
Proyectos	1. Aterrizaje de los aviones	Conceptos esenciales de las funciones algebraicas.	<p style="text-align: center;">Interpretación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificación del problema. • Simplificación del problema para su análisis matemático. • Representación del problema. 	Informe matemático
	2. Básquetbol	Conceptos esenciales de las funciones algebraicas. Dominio. Codominio o contradominio, y regla de correspondencia.		<p style="text-align: center;">Transformación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modelización. • Operacionalización. • Formulación de explicaciones usando la notación matemática. • Uso de herramientas matemáticas tecnológicas (objetivaciones). • Visualización. • Resultado matemático (Generalización y Abstracción).
Rutinas	3. Historia de las matemáticas	Número y geometría. cálculo.	<ul style="list-style-type: none"> • Modelización. • Operacionalización. • Formulación de explicaciones usando la notación matemática. • Uso de herramientas matemáticas tecnológicas (objetivaciones). • Visualización. • Resultado matemático (Generalización y Abstracción). 	Línea del tiempo
	4. Caricaturas matemáticas	Correspondiente al contenido de la SD trabajada (álgebra, geometría, estadística, cálculo...)		Caricatura matemática
Talleres	5. Fábrica de empaques	La derivada de una función para modelar el cambio.	<ul style="list-style-type: none"> • Resultado matemático (Generalización y Abstracción). 	Informe matemático
Juegos	6. ¿Existe la suerte?	La derivada de una función para modelar el cambio. La integral de una función para medir. Ley de los grandes números. Esperanza matemática.	<p style="text-align: center;">Comunicación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Validación y argumentación matemática. • Reinterpretación de los resultados matemáticos con la realidad o el contexto del problema. • Comunicación matemática verbal y/o escrita para tomar un posicionamiento y reflexionar sobre la argumentación. 	Mini video documental
Casos de enseñanza	7. ¿Las matemáticas pueden pronosticar las erupciones volcánicas? El caso de La Palma	La derivada como razón de cambio.	<ul style="list-style-type: none"> • Comunicación matemática verbal y/o escrita para tomar un posicionamiento y reflexionar sobre la argumentación. 	Informe matemático

La primera modalidad de secuencia didáctica correspondiente a los *proyectos* se caracteriza por ser actividades que se realizan durante un periodo de tiempo más largo durante el ciclo escolar y tienen un inicio y un final determinados, en ellos se requiere de la colaboración y el trabajo en equipo para poder obtener un producto final concreto (Cárdenas Lugo, 2020, pág. 97), en el caso de matemáticas un modelo matemático que explicara el cambio o el desplazamiento de un objeto el cual queda integrado en el informe matemático. Bajo esta modalidad se diseñaron dos secuencias didácticas y cada una tenía una estructura particular: Aterrizaje de los aviones y Básquetbol.

En el caso de “*Aterrizaje de los aviones*” con una duración de 2 semanas y constaba de 6 sesiones sincrónicas y 5 asincrónicas; la meta en concreto consistía en realizar un informe matemático en el cual debía responder la pregunta clave *¿Qué modelo matemático garantiza el despegue y aterrizaje seguro de un avión?* Para ello, hicieron uso de la intersección de la pendiente y de ecuaciones lineales, e hicieron uso de múltiples representaciones gráficas y algebraicas haciendo uso de GeoGebra y modelos de expertos en aviación en los que podían observar cómo se grafican las variables que pueden afectar a un avión de manera simultánea (García, 2008, pág. 37) (ver figura 14).

Figura 14.

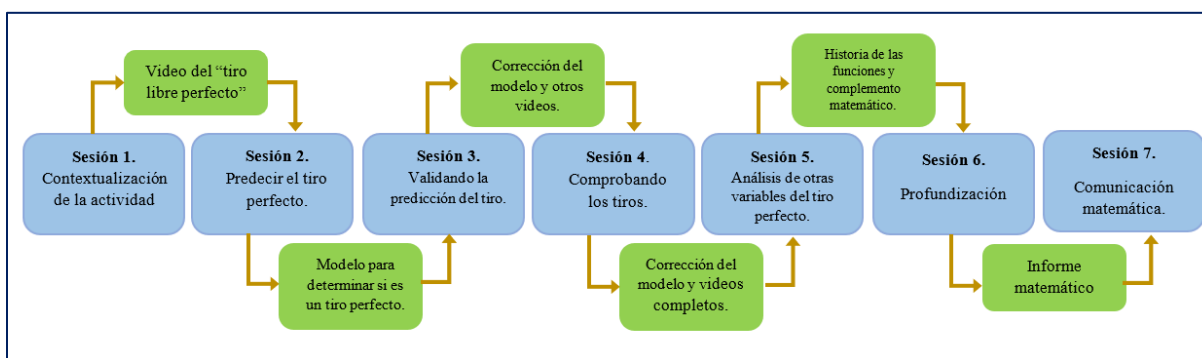
Estructura de la Secuencia Didáctica “Aterrizaje de los aviones”.



Por otro lado el proyecto de “*Básquetbol*” tuvo una duración de 7 sesiones sincrónicas y 6 asincrónicas; y en este caso el producto final que debían elaborar los alumnos fue un informe matemático acompañado de una infografía de divulgación matemática en dónde mostraran el

modelo geométrico y algebraico que representara el tiro perfecto en básquetbol. Debido a que los alumnos no podían encontrarse de manera presencial no pudieron elaborar sus propios videos de lanzamientos, por lo que la docente grabó diferentes lanzamientos del balón de básquetbol para utilizarlos como recursos que los alumnos debían analizar para determinar qué lanzamientos fueron perfectos y para ello hicieron uso de GeoGebra. De igual manera, para realizar sus predicciones los alumnos debían reconocer el lugar geométrico de la cónica, construir la ecuación de ésta y tener conocimiento de elementos como el vértice y la posición del foco o directriz (ver figura 15).

Figura 15.
Estructura de la Secuencia Didáctica “Básquetbol”.



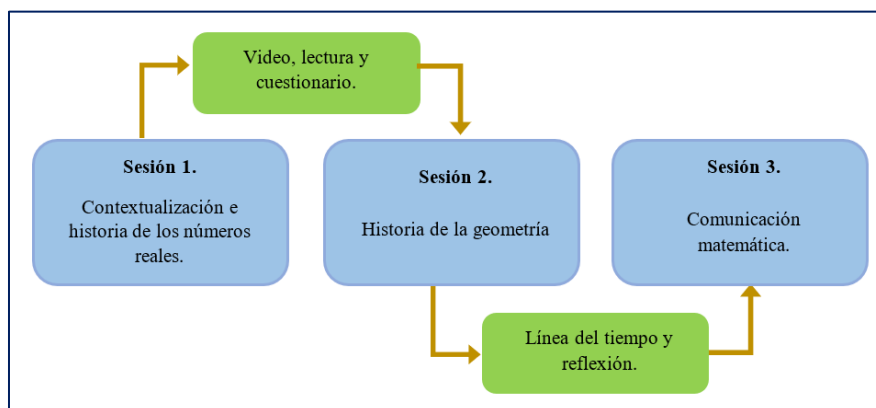
La siguiente modalidad que se implementó fueron las *rutinas*, las cuales son pequeñas actividades que guardan la misma estructura, tienen una meta específica y aparece en diferentes momentos a lo largo del ciclo escolar, con una duración de 2 a 3 sesiones. En este ciclo escolar se diseñaron 2 rutinas: Historia de las Matemáticas y Caricaturas matemáticas, las cuales se describen a continuación.

En el caso de la SD de “*Historia de las matemáticas*” se implementó en un primer momento como una secuencia individual y posteriormente en cada secuencia didáctica se agregó un momento en el cual los alumnos debían investigar o leer documentos sobre la historia del contenido matemático que estuvieran trabajando en cada secuencia, para recuperar el vínculo de las matemáticas con las actividades sociales. La secuencia didáctica tuvo una duración de 3 sesiones sincrónicas y 2 asincrónicas; y la meta fue que los alumnos reconocieran las matemáticas como actividad social humana y elaborarán una línea de tiempo acompañada de una reflexión que permitiera comprender en qué momento histórico y bajo qué actividad societal surgió el concepto

de número y la geometría. El recuperar los momentos históricos que dieron origen a las matemáticas y a sus diferentes conceptos fue de suma importancia en esta implementación ya que el exponer a los alumnos a información que da cuenta de cómo surgió el cálculo, por ejemplo, permite que comprendan el por qué deben aprender matemáticas y para qué sirven, que puedan constatar que las matemáticas surgieron de las actividades humanas y que son reconocidas social y culturalmente dado que han ayudado al humano a resolver diversos problemas sociales. Al mismo tiempo que las matemáticas son una construcción social ya que se construyen en interacción con los otros y requieren del uso de un lenguaje especializado (ver figura 16).

Figura 16.

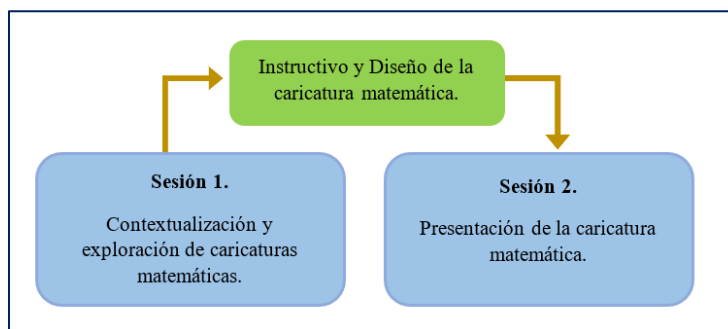
Estructura de la Secuencia Didáctica “Historia de las matemáticas”.



Mientras que la rutina de “*Caricaturas matemáticas*” tuvo una duración de 2 sesiones en su primera implementación para que la docente diera a conocer que esta actividad ayudaría a que los alumnos comprendieran y comunicarán contenidos matemáticos (Moseley, 2014). Esta rutina apareció después de algunas de las secuencias didácticas para que los alumnos elaborarán la caricatura correspondiente al contenido matemático que habían puesto en juego a lo largo de la SD que habían concluido (ver figura 17).

Figura 17.

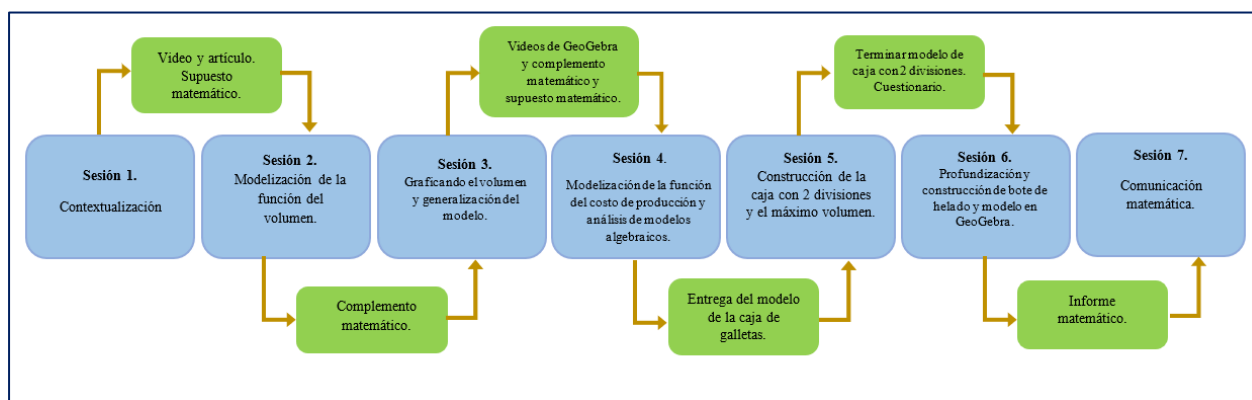
Estructura de la Secuencia Didáctica “Caricatura matemática”.



Otra de las modalidades implementadas fueron los *talleres* que son actividades en donde a través de una actividad manual y del trabajo colaborativo se elabora un producto o se persigue una meta específica (Cárdenas Lugo, 2020, p.98). En este caso la secuencia didáctica titulada “*Fábrica de empaque*” tuvo una duración de 3 semanas y los alumnos diseñaron en GeoGebra empaques sustentables con diferente forma geométrica tridimensional, haciendo uso de la derivada de una función, dicho diseño lo formalizaron en un informe matemático en el cual integraban sus argumentos (ver figura 18).

Figura 18.

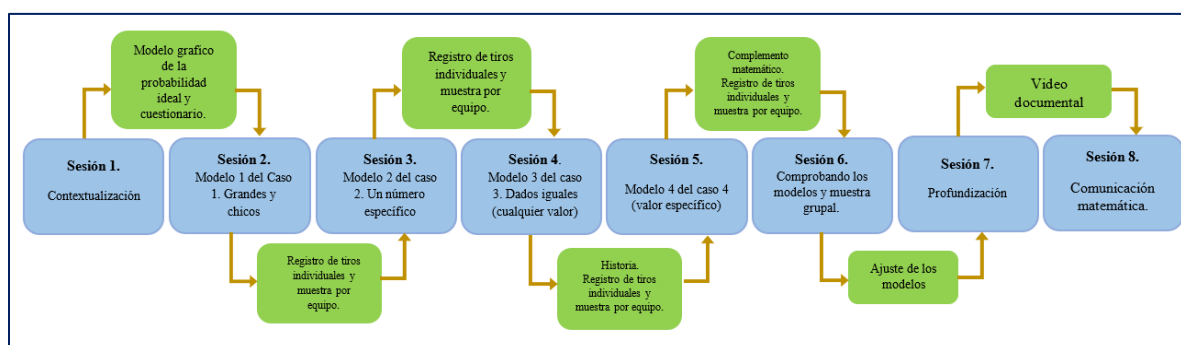
Estructura de la Secuencia Didáctica “Fábrica de empaques”.



La siguiente modalidad fueron los “*juegos*”, que implican que los alumnos participen en un juego y usen las matemáticas para poder construir estrategias que les permitan ganar. En este caso la secuencia didáctica titulada *¿Existe la suerte?*, tuvo una duración de 8 sesiones sincrónicas

y 7 sesiones asincrónicas, y la meta consistía en elaborar un pequeño video documental en el que reportarán la importancia de las matemáticas en los juegos de azar y mostrarán el modelo matemático que representa la probabilidad de ganar en el juego de dados. Para ello, los alumnos hicieron diferentes tiros de dados con consignas particulares para determinar la probabilidad de que un jugador logrará ganar o no (ver figura 19).

Figura 19.
Estructura de la Secuencia Didáctica ¿Existe la suerte?



En este ciclo escolar se diseñó una nueva modalidad, los *casos de enseñanza* en los cuales se plantea una problemática vigente y abierta para acercar a los alumnos a actividades reales que implican la interpretación y elaboración de modelos matemáticos ante un acontecimiento complejo. Para ello, se presenta el caso en forma de narrativa y el objetivo es que los alumnos se impliquen activamente en la elaboración de propuestas de análisis o encuentren soluciones (Coll, Mauri y Onrubia, 2008). El caso de enseñanza nos permite considerar diferentes disciplinas que están relacionadas con las matemáticas y abre la oportunidad de familiarizar a los alumnos con lo que hace un profesionalista, un matemático en contextos reales.

En Aleph5, se consideraron ciertos aspectos eje que orientaron el diseño del caso de enseñanza para que potencialice las acciones que están implicadas en el proceso de matematización:

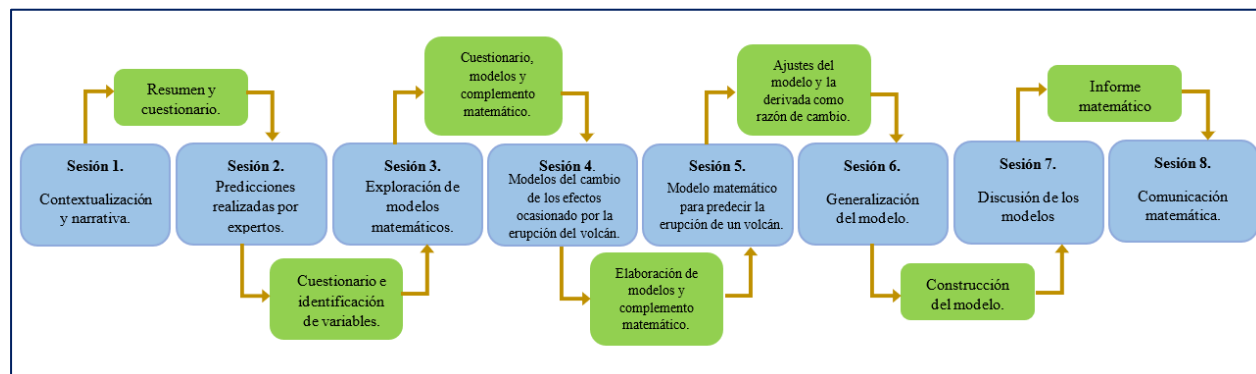
- Narrativa abierta: Tendrá un inicio, desarrollo y final, aunque se debe comprender que el caso es abierto y por ello no hay una sola salida sino múltiples soluciones plausibles. El estudiante debe examinar los hechos, evaluarlos y sopesar las posibles opciones y consecuencias de la decisión que debe sugerir. Debe tener una trama que sea interesante

para la audiencia. Debe tener drama y suspenso, pues estas características permiten que quienes aprenden se olviden de lo artificial de la tarea y se sientan inmersos en el asunto a tratar. Descansa en la interpretación que se realizó de varias fuentes.

- Complejidad: Uso de múltiples objetivaciones, es decir abre la posibilidad de hacer uso de una variedad de representaciones externas que ayuden a mover los objetivos de aprendizaje.
- Urgencia: El problema debe ser reciente, incluso, resulta mejor si es tratado en los medios de comunicación. De preferencia que sea controversial, pues las y los estudiantes deben sentir que el problema a tratar es importante y requiere de una solución inminente. Esta característica obliga a tomar decisiones, pues aunque no todos sean dilemas, debe existir cierta urgencia para que se vean obligados a tomar una posición y por ende, tomen acción en el caso.
- Estética: Busca documentar e iluminar la complejidad y el detalle de una experiencia o lugar único, esperando que el público se vea reflejado en él, confiando en que los lectores se sientan identificados. Un caso debe conmover a los estudiantes, porque los acerca a una situación real con personajes, historias y emociones reales.

El caso de enseñanza implementado se tituló *¿Las matemáticas pueden pronosticar las erupciones volcánicas? El caso de La Palma*, y se recuperó información reciente de lo que en ese momento se vivía en España. Dicho caso tuvo como meta la elaboración de un informe matemático en el cual incluyeran los modelos matemáticos que permitan realizar pronósticos para mitigar el impacto de las erupciones volcánicas; con la finalidad de que los alumnos fueran capaces de elaborar una producción compleja y tener una postura crítica desde la disciplina de las matemáticas, guiándose de la pregunta clave de la narrativa la cual estaba colocada desde la disciplina de las matemáticas. La duración del caso de enseñanza fue de 8 sesiones sincrónicas y 7 sesiones asincrónicas, siendo el objetivo de aprendizaje la matematización del cambio (ver figura 20).

Figura 20.
Estructura de la Secuencia Didáctica “caso de enseñanza”.



En general todas las secuencias didácticas están construidas para desplegar los objetivos de aprendizaje, son situadas ya que se coloca una situación real sobre las cuales se plantean motores cognitivos. En suma, están armadas bajo una serie de dimensiones que están enmarcadas en la teoría y constituyen en espacio que propicia formas de pensamiento especializado; ya que desde la base Vigotskyana consideramos que el pensamiento se desarrolla afuera en la actividad en el plano interpsicológico en las relaciones con los otros. Después de haber realizado el diseño de cada una de las secuencias didácticas se organizaron en el plan anual, el cual comentaremos en el siguiente apartado.

5.2.3. Distribución y organización de las actividades

El plan anual es una herramienta que nos permitió, a docentes e investigadores, contemplar todo el ciclo escolar y tomar decisiones en función de las necesidades de la institución para poder decidir cómo se distribuirán las secuencias a lo largo del año; es decir, qué secuencias se implementarían al inicio y en qué periodo de tiempo, teniendo en cuenta que a la semana los docentes de matemáticas imparten 5 horas de clase, distribuidas en tres días, considerando las semanas en las que los docentes debían realizar la evaluación de los parciales para poder determinar que productos se tomarían en cuenta en cada parcial. En la Tabla 3, se puede observar la distribución de todas las actividades en el orden de implementación.

Construir el Plan Anual en colaboración con la comunidad de docentes además de permitir tomar decisiones en el plano general de todo el ciclo escolar, también ayudó a establecer las condiciones de cada una de las sesiones en el espacio sincrónico y asincrónico, en un plano más específico, para planear día a día los ajustes a las secuencias didácticas próximas y atender eventualidades que no se tenían previstas en el diseño y que surgieron en el momento de la implementación, lo cual implicó hacer ajustes necesarios para que la actividad pudiera cumplir con su objetivo (Madrigal González, 2021).

A manera de cierre podemos mencionar que en cualquier parte existen contextos educativos pero en Aleph nos encontramos en el contexto particular de la ENP y es dentro de este contexto en el que diseñamos en colaboración con la comunidad de docentes una propuesta de diseño educativo viable y coherente con las demandas del contexto. Por ello, esta fase de análisis del contexto y diseño del entorno virtual coordinado nos permitió conocer los retos a los que se enfrentan los docentes a lo largo de su práctica educativa en la ENP. Bajo este contexto se diseñan los entornos de aprendizaje que consideran las actividades sociales, la mediación social, la mediación semiótica y la interacción; es decir, se crean las condiciones para que surja el pensamiento matemático de los jóvenes que cursan el bachillerato, ofreciendo las mismas oportunidades de aprendizaje para todos. Siendo importante construir los vínculos entre los ambientes escolares y los ambientes profesionales, incluyendo la matematización como objetivo de aprendizaje dentro del aula.

En suma, el entorno que se diseña es complejo, dado que toma en consideración todas las condiciones que favorezcan el despliegue de múltiples acciones matemáticas, el uso de sistemas semióticos que al colocarlos dentro de la actividad adquieren sentido, es decir las matemáticas se convierten en una necesidad para que el alumno pueda resolver un problema particular enmarcado en un contexto real. Es complejo porque el maestro gestiona el uso de los recursos virtuales además de guiar el trabajo de los alumnos; existe una sobreposición de recursos y acciones, por ello nuestra propuesta se complejiza porque se sobreponen las acciones de las plataformas como Moodle y Zoom. Por lo tanto en este entorno el maestro no desaparece, el maestro gestiona y se asegura de que la actividad suceda para que ocurran los procesos de construcción de conocimiento matemático.

La situación y el contexto actual son el tiempo propicio para repensar el sentido que tienen las acciones que realizamos como profesionales que nos dedicamos a la educación en las instituciones universitarias, contribuyendo a que los estudiantes obtengan un verdadero aprendizaje

y aportando en la transformación del espacio educativo (Escámez y Peris, 2021). En el siguiente capítulo de análisis de la implementación hablaremos sobre *¿cómo funcionaron los elementos de las SD?* y *¿cómo movilizó el pensamiento matemático?*

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN

“Nunca pude, a lo largo de toda mi vida, resignarme al saber parcelado, nunca pude aislar a un objeto de estudio de su contexto, de sus antecedentes, de su devenir. He aspirado siempre a un pensamiento multidimensional. Nunca he podido eliminar la contradicción interior. Siempre he sentido que las verdades profundas, antagonistas las unas de las otras, eran para mí complementarias, sin dejar de ser antagonistas. Nunca he querido reducir a la fuerza la incertidumbre y la ambigüedad”.

Edgar Morin.

El presente apartado tiene como objetivo ilustrar cómo funcionó la implementación del diseño del Entorno Virtual Coordinado bajo las condiciones que se crearon para que surgiera el pensamiento especializado en matemáticas, es decir, que los estudiantes matematizaran en diferentes contextos o problemáticas de la actividad. Por ello, el análisis de la implementación tuvo como finalidad poder testificar que la propuesta realmente promoviera dichos aprendizajes y al mismo tiempo permitiera realizar los ajustes pertinentes a las actividades, debido a que el contexto nunca es fijo y el diseño que se plantea se realiza en función de las premisas teóricas y de lo que sabemos, sobre todo, de lo que saben los maestros expertos en la disciplina y la dinámica de enseñanza en el contexto de la ENP.

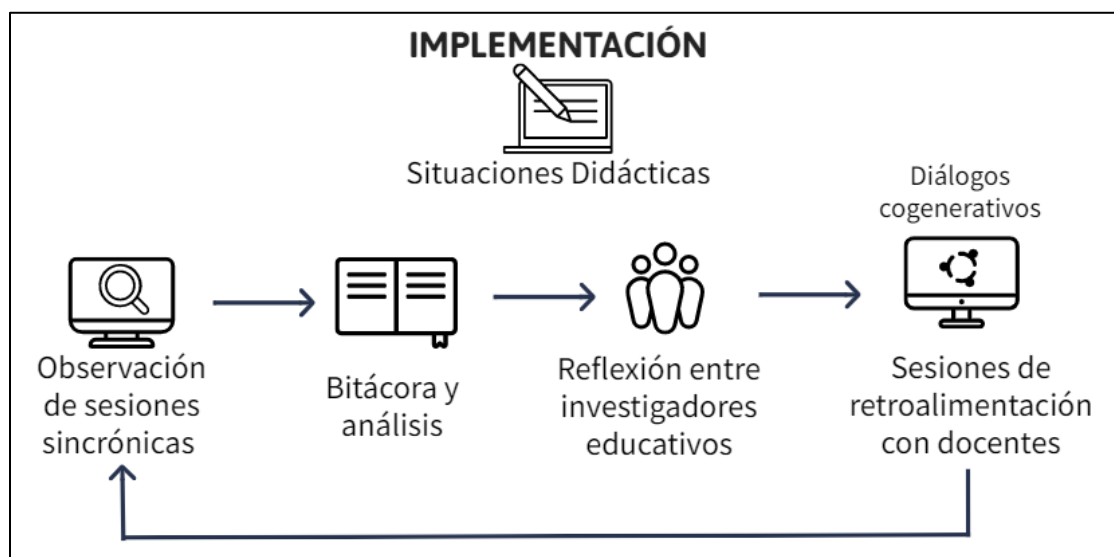
Después del diseño de secuencias didácticas, para dar seguimiento a la implementación los investigadores educativos llevaron a cabo diferentes acciones para contar con herramientas que permitieran un posterior análisis, las cuales fueron: la observación, toma de grabaciones y la elaboración de bitácoras, para posteriormente analizarlas y dialogar en sesiones de retroalimentación con las docentes que se encontraban implementando las actividades de enseñanza.

Los investigadores entraban a observar las clases sincrónicas que impartía la maestra de matemáticas de VI para dar cuenta de cómo operaba el entorno de enseñanza que se había diseñado y cómo se ponían en juego cada una de las condiciones que se habían establecido. La observación se realizaba desde una mirada crítica, enfocándose en la estructura de la actividad societal, la mediación y guía docente, el uso de recursos, la interacción entre pares y los objetivos de aprendizaje. El entrar a observar las sesiones permitió dar cuenta de que el aula va cambiando y,

en el transcurso de la implementación fue importante tomar en cuenta esos cambios que sufrió el contexto en sí mismo, siendo esta construcción dinámica la que hace que esta propuesta sea viable y responda al contexto en tiempo real. Durante la observación se realizaba la bitácora del día en la que se registraban los aspectos importantes que sucedieron durante la clase, resaltando lo que funcionó y los posibles ajustes que podrían hacerse a la actividad, los cuales también se mencionaban de manera breve al final de cada clase. Después de la observación, fue importante que el equipo de investigadores se reuniera para discutir y analizar lo ocurrido, ya que permitía reconocer si el entorno estaba siendo adecuado para promover los aprendizajes o si se requería de algún ajuste. Posteriormente, se seleccionaban los ejemplos importantes de la implementación y se colocaban en una presentación acompañada de una retroalimentación que daba la pauta para establecer el diálogo con las maestras sobre su implementación; cabe mencionar que dichas reuniones se realizaban de manera periódica 1 o 2 veces por semana para que en colaboración, docentes e investigadores, reflexionaran sobre las actividades que se habían puesto en marcha y realizaran sugerencias y ajustes para que éstas siguieran funcionando, reconociendo que el foco principal estaba puesto en el despliegue del pensamiento matemático; con ello, se fueron estableciendo diálogos cogenerativos con las docentes (ver figura 21).

Figura 21.

Proceso de análisis de la implementación de las secuencias didácticas.



Condiciones del diseño en la implementación

De acuerdo con la metodología de la presente investigación, se analiza en la acción para que el rediseño del entorno tenga sentido. Por lo que, se consideró todo aquello que ilustra que el desarrollo del diseño sí tuvo un efecto o impacto importante y permitió el despliegue de las dimensiones del proceso de la matematización. De igual manera, se recuperan las acciones y/o recursos que no se contemplaron en el diseño pero que en el contexto de la implementación se tomaron en cuenta y se realizaron los ajustes pertinentes, los cuales permitieron que funcionara el diseño; esto fue posible dado que “*analizamos en la acción*” y gracias a la reflexión en la acción con el docente, se pudieron implementar las soluciones que no estaban contempladas. Por último, se tomó en cuenta aquello que no funcionó y/o que no se pudo resolver, pero que ahora se considerará en el rediseño, y es allí en donde se solucionará para una próxima implementación.

En particular, se analiza la implementación que se llevó a cabo con estudiantes preparatorianos que cursaron la materia de Matemáticas de VI correspondientes al área 1 y 2, la cual fue impartida por la maestra Eva Del Angel Trejo en la Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 3. Como ya se mencionó, se pudieron implementar 7 secuencias didácticas tomando en cuenta el plan anual del ciclo escolar; cabe mencionar que, debido a los diferentes obstáculos que se presentaron se realizaron algunos ajustes en la marcha. La implementación se llevó a cabo considerando la distribución de las Secuencias didácticas en el plan anual, el cual inicio la segunda semana de agosto del 2021 y concluyó la primera semana de abril del 2022, debido a que iniciaron las evaluaciones de la ENP.

En dicha implementación se consideró la *organización de las condiciones en el aula* a partir de la Selección de recursos (medios semióticos) adecuados para el trabajo virtual, de manera intencional. Desarrollo de instructivos, manuales, rúbricas y esquemas. Uso de Moodle como herramienta para favorecer la participación y la socialización del conocimiento entre pares. También se tomaron en cuenta *las acciones que se realizaron para la construcción colectiva del conocimiento*, es decir, la mediación docente respecto al uso de motores cognitivos de manera sincrónica-directa (zoom) y de manera asincrónica-indirecta (Moodle). Por lo anterior, fue importante recuperar la información recabada en las herramientas de análisis que se utilizaron a lo largo de la implementación las cuales fueron: las bitácoras de las observaciones en las clases virtuales para dar una retroalimentación a los docentes y las bitácoras de las sesiones con las

docentes, lo cual, también nos permitió la construcción y reconstrucción de los recursos para las clases.

Cabe mencionar que en la presente investigación la perspectiva de los estudiantes es muy importante (Confrey, 2006, p. 140) ya que, nos permite conocer desde su voz cómo fue su experiencia al participar en cada una de las secuencias didácticas a lo largo del ciclo escolar con el proyecto Aleph5 y la nueva forma de enseñar. Por ello, al final del ciclo escolar 2022, el equipo de investigadores educativos solicitó a los maestros que convocarán a un grupo pequeño de estudiantes que quisiera colaborar en un grupo focal, en el cual podrían dar su testimonio sobre su experiencia como estudiantes dentro del curso de Matemáticas VI. El recuperar estas experiencias nos permitió visualizar en qué medida las actividades tuvieron un efecto en sus aprendizajes y si la intención con la que fueron diseñadas realmente se cumplió o requirieron de algún ajuste; para contar con evidencias claves que nos permitan hacer mejoras a la propuesta de diseño, como proponen Mckenny, Nieven y van den Acker, (2006, citados en Rinaudo y Donolo, 2010). Recuperar la voz de los propios estudiantes y que dieran su opinión sobre el curso fue muy importante y se tomó en cuenta como material de análisis para el presente capítulo.

6.1. La actividad matemática que favorece el proceso de la matematización

En esta propuesta de diseño virtual fue importante, como ya se mencionó, recuperar la historicidad de las matemáticas; dado que, ello nos permite dar cuenta de que las matemáticas son actividades sociales humanas, es decir, que surgieron en contextos sociales como parte de la organización social de las comunidades ante las necesidades del humano por resolver diversos problemas. En este sentido, fue importante exponer a los alumnos a información que da cuenta de cómo surgió el Número, la Geometría y Cálculo¹¹, centrandó la atención en que pudieran comprender el por qué deben aprender matemáticas y para qué sirven, además de constatar que las matemáticas surgieron de las actividades humanas y que son reconocidas social y culturalmente; y al mismo tiempo, que son una construcción social ya que se construyen en interacción con los otros y requieren del uso de un lenguaje especializado, la realización de acciones y el uso el uso de múltiples herramientas que se han ido desarrollando paulatinamente a lo largo del tiempo.

¹¹ En el capítulo 2 se aborda de manera más precisa la importancia de la historia de las matemáticas como actividad social humana.

Para ello, en colaboración con las maestras se construyó una perspectiva en torno a la relevancia de incorporar la historicidad en cada una de las secuencias didácticas, y se fue estableciendo en las sesiones de diálogo previo a la implementación de las actividades, lo cual se ilustra cuando se planteó con las maestras la importancia de poder recuperar actividades reales y comprender en dónde están las matemáticas y cómo dentro de las actividades reales los “contenidos” son fundamentales porque son los que el alumno utilizara para *pensar* con el sistema; y con ello lograr construir un *sujeto*, no un ciudadano, porque es un sujeto que piensa con las matemáticas. Es decir, las matemáticas deben ser una necesidad, deben ser posibles y desde nuestra perspectiva teórica se lleva a los alumnos de lo concreto a lo abstracto y de lo real a lo posible. Ante esta discusión una de las maestras de Matemáticas comparte el siguiente testimonio:

“Las matemáticas son el arte para pensar”.

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Mayo del 2021.

En el caso de los alumnos, cuando se les presentó la Secuencia Didáctica titulada “Contrato didáctico” y recuperando la información recabada en la bitácora de aula, podemos dar cuenta que después de haber visto el video sobre “Las matemáticas en problemas y situaciones del mundo”¹², logran cambiar la perspectiva tradicional que tienen al respecto de esta disciplina y la pueden reconocer como una actividad social humana que sirve para resolver diversas problemáticas, ya que observamos que los alumnos consideran que las matemáticas son indispensables para resolver problemáticas, además de darse cuenta de que las matemáticas suelen no gustarles porque únicamente se les enseñan fórmulas, ejercicios y procedimientos pero no se les dice cómo usarlas; así mismo, logran reflexionar que las matemáticas están en todas partes y se relacionan con otras disciplinas, y particularmente reconocen que las matemáticas son humanas y son un vestigio que les permite entender lo que ocurre en la actualidad (Extracto 1).

Momento de la actividad: Contextualización de la actividad “Contrato Didáctico”

- 1. M:** *ahora les voy a mostrar este vídeo para iniciar con la reflexión sobre la importancia de esta disciplina...* (Comparte la pantalla para presentar el video sobre “Las matemáticas en problemas y situaciones del mundo”).

(Después de ver el video la maestra guió los comentarios de los alumnos.)

¹² El video fue elaborado recuperando diferentes recursos que se encontraban en línea y lo pueden encontrar en el siguiente enlace: <https://drive.google.com/file/d/1TYgiYded2pXVZNgp3wgNSal596ecAz6j/view?usp=sharing>

-
2. **M:** *Ahora, ¿qué tan importantes consideran que son las matemáticas?*
 3. **Emiliano:** *“Un todo” ... de lo que dijimos no es nada de lo que pudimos ver en un sólo video”*
 4. **José:** *...se puede predecir...*
 5. **M:** *¿Creen que las matemáticas son necesarias para resolver problemáticas?*
 6. **Emiliano:** *Muy indispensables.*
 7. **Belem:** *Me gusto porque luego nos enseñan las fórmulas, las mate, pero no nos dicen cómo usarlo, por eso no nos gustan.*
 8. **Joshua:** *nos sirven para medir...*
 9. **M:** *¿Qué piensan de que las matemáticas son actividades humanas?*
 10. **Valentina:** *Todo el tiempo están presentes...*
 11. **Angelica:** *para calcular el índice de masa corporal...*
 12. **M:** *¿Con qué disciplinas están relacionadas?*
 13. **Varios alumnos:** *Física, química, música, psicología, medicina...*
 14. **M:** *¿Están de acuerdo con lo que mencionan los matemáticos en el video?*
 15. **José:** *...estoy de acuerdo, se usan en muchas cosas.*
 16. **Ángel:** *...las matemáticas son más humanas y son un vestigio.*
 17. **Emilio:** *Conocer la historia nos podría servir para ayudarnos a entender lo actual.*
-

Extracto 1. Bitácora de la SD. “Contrato didáctico. Sesión 1. Contextualización. MVI-613. Septiembre, 2021.

Así mismo, los alumnos logran cerrar este momento de actividad del contrato didáctico, haciendo los siguientes comentarios:

“Las matemáticas, un estilo de vida.”

“Hoy me di cuenta de que es posible medir el universo.”

“Las matemáticas nos hacen más humanos.”

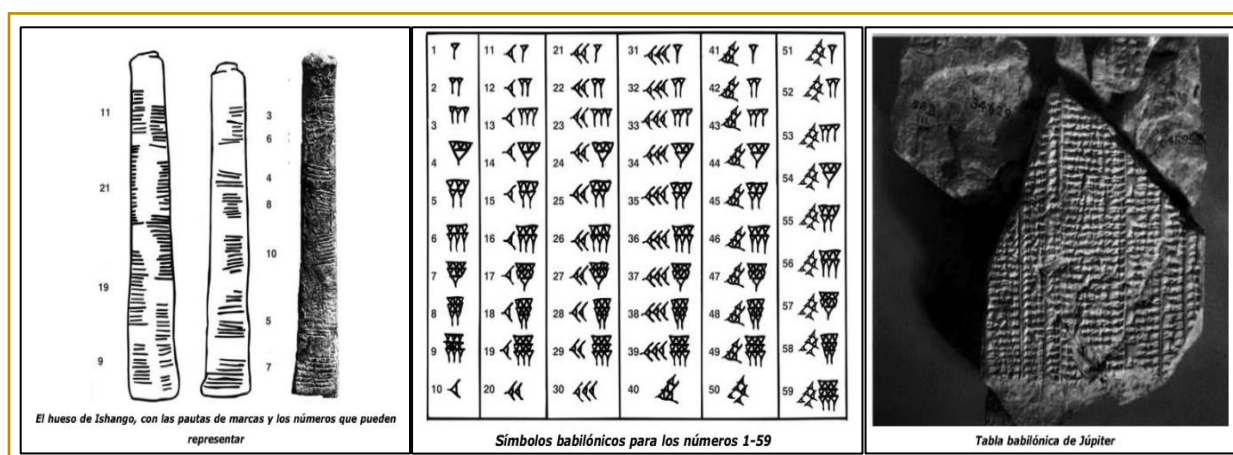
Testimonios de alumnos de VI-613, recuperados de la Sesión 1 correspondiente a la SD. “Contrato didáctico. Agosto del 2021.

En este mismo sentido el considerar la historicidad en cada una de las actividades realizadas nos permitió recuperar el vínculo de las matemáticas como actividades sociales” y para ilustrar la importancia de la historicidad y el cambio de pensamiento que tuvieron los alumnos respecto a la historia de las matemáticas, recuperamos la Secuencia Didáctica titulada “Historia de las matemáticas”, la cual se presentó al inicio del ciclo escolar y posteriormente en cada una de las secuencias didácticas se agregó un momento histórico del conocimiento matemático que se abordaría, por ello esta secuencia se consideró en la modalidad de rutina. Su objetivo principal era lograr que los alumnos reconocieran a las matemáticas como una actividad social humana y para

ello debían responder el siguiente cuestionamiento: *¿En qué momento histórico y bajo qué actividad societal humana surgió el concepto de número y la geometría?* Para llevar a cabo esta secuencia se recuperaron textos, noticias y videos de fuentes históricas que contenían representaciones matemáticas antiguas para que los alumnos conocieran cómo fueron surgiendo las matemáticas (ver figura 22).

Figura 22.

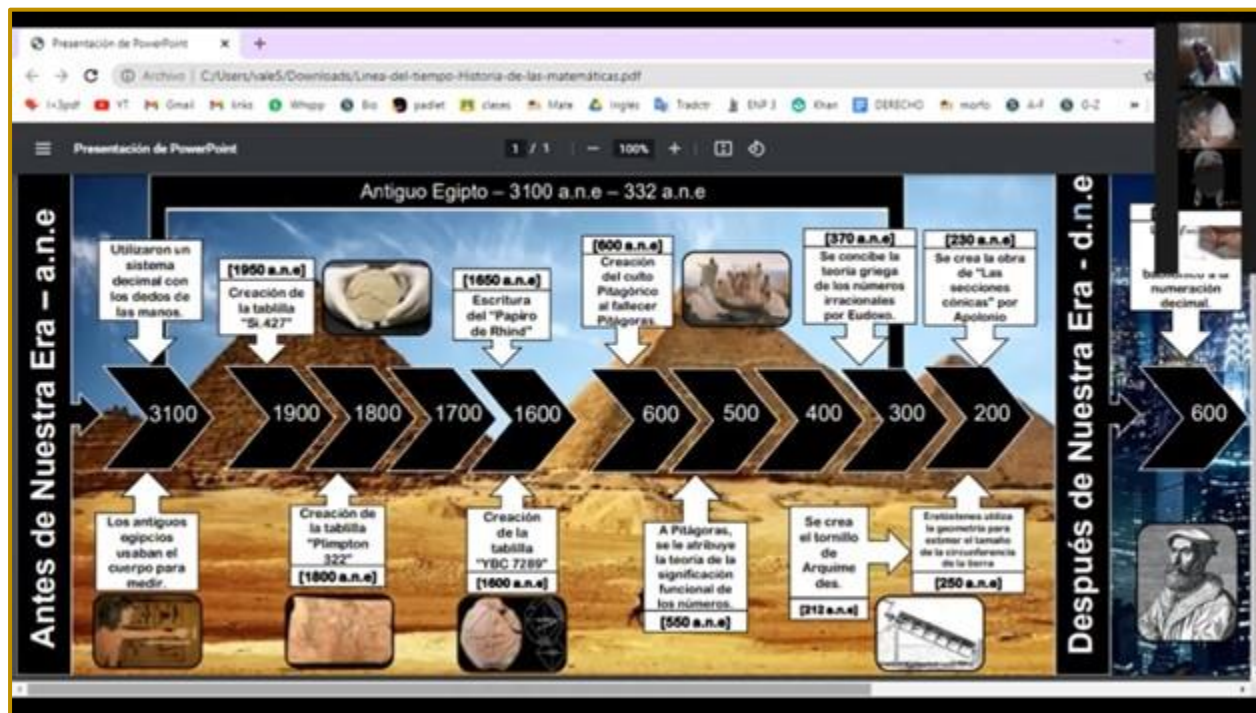
Representaciones utilizadas en los textos revisados por los alumnos para conocer la historia del número y la geometría.



Es importante mencionar que la meta de esta actividad era que, en equipo, los alumnos elaborarán una línea de tiempo en la cual recuperarán los acontecimientos relevantes con sus fechas correspondientes y que revisaron en los recursos a lo largo de la actividad, acompañándola de una reflexión sobre la importancia de conocer la historia de las matemáticas. Dicha línea de tiempo fue presentada en plenaria como cierre de la SD. A continuación se ilustra con uno de los productos elaborados por los alumnos (ver figura 23).

Figura 23.

Producto final: línea del tiempo elaborada por alumnos de VI.



Al finalizar la actividad los alumnos compartieron algunas de sus reflexiones de manera verbal, en la que resaltan que hacer una línea del tiempo les permitió conocer cómo surgieron las matemáticas, porque sólo les enseñan qué es una raíz o una ecuación pero nunca se les enseña cómo surgieron; también logran reconocer que en matemáticas no se acostumbra recuperar los datos históricos porque eso es parte de otra disciplina, como se puede ver en los siguientes comentarios enviados también por medio del chat de zoom (ver figura 24):

“La actividad estuvo muy interesante porque nos plantea en un contexto histórico de cómo fueron evolucionando las matemáticas no sólo en tiempos tan pasados como Egipto y todas esas culturas, sino que incluso investigando un poco más, llegando a lo de René Descartes y matemática un poco más moderna que tal vez no conocíamos no sabíamos cuándo se había inventado y nos han estado enseñando desde un contexto histórico mejor”.

“...Yo nunca me imaginé hacer una línea del tiempo en matemáticas, para mí es nada más como de la materia de historia, pero es importante conocer hace

cuánto surgieron esos métodos que utilizamos, los números, que es algo que considero esencial para las matemáticas”.

Testimonios de alumnos de VI-613, recuperados de la SD. “Historia de las matemáticas. Octubre del 2021.

Figura 24.

Reflexiones de los alumnos sobre la importancia de la historicidad en el chat de zoom.

```

13:59:33 De 613-Yamile Shirell a Todos:
Una nueva historia de las matemáticas
13:59:33 De 613 - Fernando ulises a Todos:
la historia de las matemáticas es muy interesante
13:59:35 De 613 : Flor a Todos:
sin comentarios, si entendí xd
13:59:35 De 613 - Sergio Alberto a Todos:
Historia matical
13:59:36 De 613-Maximiliano Joaquin a Todos:
"Antes escribían en piedras y va entendían mejor las matemáticas que vo con el internet"
13:59:36 De 613 - Isaac Mixtli a Todos:
La historia y las matematicas están muy relacionadas
13:59:37 De 613- Ángel Emiliano a Todos:
las matemáticas son necesidad
13:59:39 De 613 : Valentina a Todos:
Los números son como el tiempo, relativos
13:59:41 De 613-Kevin a Todos:
De hecho en esa época había matemáticas
13:59:41 De 613 : Natalia a Todos:
las matematicas pueden ser tranquilas
13:59:41 De 613 - José David a Todos:
Las mates antiguas y trabajo en equipo
13:59:41 De 613 - Yexalen a Todos:
babilonia ta pesau
13:59:42 De Christian a Todos:
interesantes los babilonios
13:59:48 De 613- Alejandra Paola a Todos:
El 0, un concepto interesante
13:59:54 De David Enrique a Todos:
las matemáticas y sus ramas durante la historia
13:59:56 De 613- Ixshel Avril a Todos:
Trabajando matematicas a través de la historia
13:59:57 De 613- Angélica a Todos:
Gracias a la historia de las matemáticas me he dado cuenta que son mas importantes de lo que pensaba.
13:59:58 De 613 Odette a Todos:

```

En suma, lo anterior permitió que los alumnos dieran cuenta de la importancia de las matemáticas como parte de las actividades sociales al conocer cómo han ido surgiendo a lo largo de la historia a partir de la guía docente y del uso de múltiples fuentes históricas. Esta incorporación permitió cambiar la perspectiva que tenían, tanto los docentes como los alumnos, sobre las matemáticas para poder utilizarlas en las siguientes actividades del curso. En el siguiente apartado abordaremos la importancia de la estructura de las SD y la meta socialmente establecida que debían producir los alumnos.

6.1.1. *La estructura de la actividad matemática que determina cada una de las acciones*

En la implementación se consideró como unidad de análisis a la actividad, por tal motivo fue importante considerar la estructura de cada una de las secuencias didácticas dado que en ellas quedaban establecidas, de manera intencional, cada una de las acciones matemáticas que realizarían la docente y los alumnos, para propiciar el despliegue de las dimensiones del proceso de matematización, el cual se objetivó en el logro de la meta de la actividad; estructura que era presentada a los alumnos de manera breve por medio una infografía (Anexo 2). Así mismo, en cada uno de los pasos de la secuencia didáctica se tuvo en cuenta el contenido matemático que utilizarían para pensar y resolver la problemática que se les planteaba, bajo el contexto real.

Cabe mencionar, que todas las secuencias didácticas se diseñaron bajo la estructura de las actividades sociales, pero de acuerdo con la modalidad correspondiente, éstas tenían una estructura particular con diferentes pasos que los alumnos debían desarrollar para hacer matemáticas; todas estuvieron encaminadas al desarrollo del razonamiento matemático. Tal fue el caso de la secuencia didáctica titulada “¿Las matemáticas pueden ayudar a pronosticar las erupciones volcánicas? El caso de la Palma”, cuya modalidad fue caso de enseñanza, la meta principal consistió en que los alumnos produjeran un informe matemático y respondieran la siguiente pregunta: *¿De qué manera los modelos matemáticos nos permiten realizar pronósticos para mitigar el impacto de las erupciones volcánicas?* Para ello, se inició con el momento de contextualización haciendo uso de la narrativa del caso, es decir, un documento elaborado con información de múltiples fuentes institucionales que nos permitieron ilustrar la implicación de los modelos matemáticos a lo largo de la historia y su importancia en la actualidad para atender fenómenos físicos como lo es la erupción de un volcán y al mismo tiempo poder situar la problemática en términos de la disciplina matemática, desde el punto de vista físico-matemático. Para ilustrar este momento, a continuación recuperamos algunos de los comentarios que hicieron los alumnos después de escuchar la lectura de la narrativa y lo que ahora les tocaba realizar para responder a la pregunta clave:

“Quizás sí sea posible entender un poco, cómo se comportan las erupciones de los volcanes y podríamos entender y sacar algo así como una media de qué probabilidades tienen de erupcionar los volcanes en cierto periodo de tiempo, digamos años, que cada año cumplido del volcán erupciona uno, digamos por

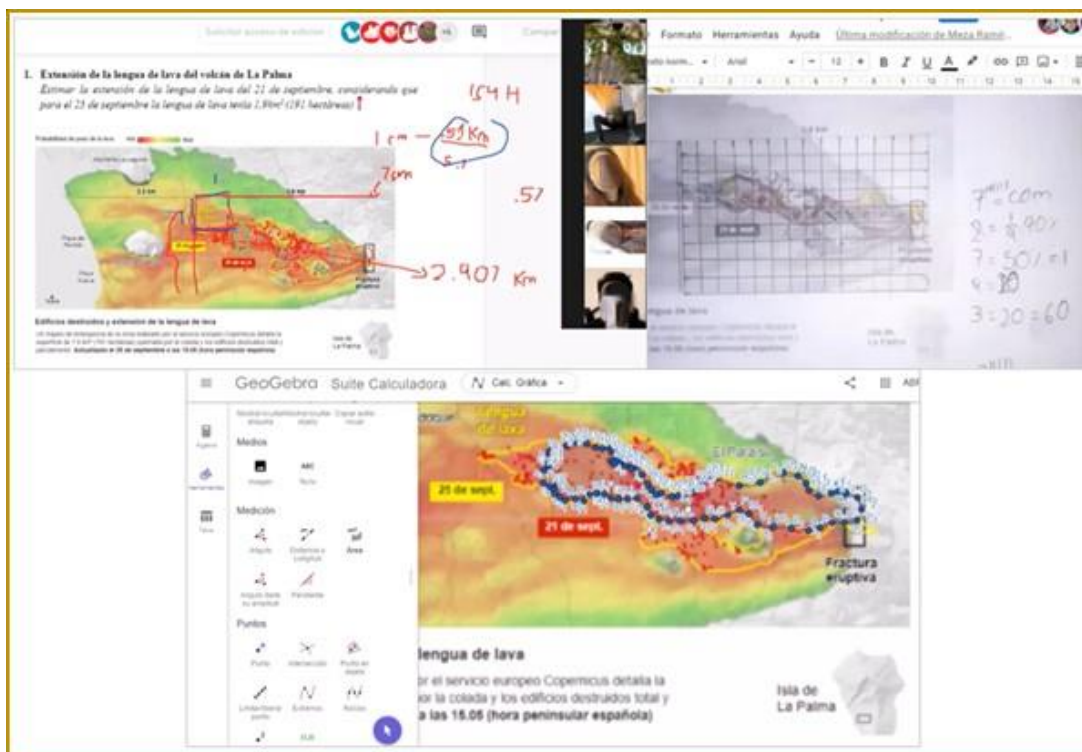
ejemplo el Popo después de cuántos años erupciona y otro volcán después de cuántos años y entonces de allí ya podríamos tener un grupo de control y decir aproximadamente después de cada 5 años erupciona un volcán. Y también ver después de un terremoto cómo es que los volcanes erupcionan, porque es otro punto importante que puede tomarse en cuenta para evaluarlo”.

Testimonio de un alumno de VI-655, recuperado de la SD. “Caso de enseñanza”. Enero del 2022.

Posteriormente, los alumnos hicieron uso de la derivada como razón de cambio y de diferentes modelos matemáticos recuperados de fuentes originales y actuales que en ese momento estaban publicadas en las noticias y la CENAPRE¹³, a partir de los cuales, debían identificar las variables que les ayudarían a construir un modelo matemático para estimar la extensión de la lengua de lava del volcán de la Palma en España en una fecha específica y, posteriormente usar la derivada como razón de cambio; momento que resolvieron en pequeños equipos de trabajo (ver figura 25).

Figura 25.

Representaciones de uno de los equipos para estimar la extensión de la lengua de lava, en papel y en GeoGebra.



¹³ Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED).

De igual manera, podemos observar que para resolver la problemática inicial, los alumnos dialogan y hacen uso de otros recursos o fuentes que investigan y que les permite estimar la extensión de la lengua de lava, usan una impresión en papel para estimar cuadrado por cuadrado el área del mapa y posteriormente deciden hacer uso de GeoGebra para comprobar sus resultados, apoyados en diferentes momentos por la asistencia de la docente, como se muestra en el siguiente extracto (Extracto 2).

Momento de la actividad: Profundización. Trabajo en equipos.

(Los alumnos investigan cómo utilizar el método de franjas Holanda para hacer su estimación.)

18. E. Osorno: (imprime el mapa en una hoja cuadrículada).

19. E. Meza: ... *toma un papel transparente, como por ejemplo un papel milimétrico delgado de un tamaño que dependerá del tamaño del área cuyo mapa se está haciendo. Ok, que son los cuadrantes que hiciste no, Samuel...*

20. Samuel: *Sí*

21. E. Meza: *dibuje una serie de bandas trazando unas líneas paralelas a intervalos fijos regulares, defina un ancho... ¡Ah pues sí, ya tenemos nuestra escala! Es .51 kilómetros equivale a 1 centímetro, y ese sería nuestro largo del cuadrante y falta el ancho...*

22. E. Osorno: *Sí, lo que nos falta es el ancho.*

23. Samuel: *pero, pues es igual no, porque es cuadrado...*

24. Sarahí: *es que les digo que sí del primer círculo verde mide 1cm, pues sería igual .51 kilómetros, pero sólo en esa área.*

25. Angélica: *Sí, pero hay que multiplicarlo o sumarlo por toda la longitud del área.*

26. Sarahi: *Pues con la segmentación que hizo Osorno yo creo que así lo hagamos, si un centímetro vale .51, entonces ¿cuánto valdrá medio centímetro? porque ya tenemos los cuadritos trazados.*

27. E. Meza: *...ya Osorno, en los cuadrantes que hiciste puedes colorear lo que abarca el área roja...*

28. Sarahí: *...Exacto, colorea los que son cuadrados completos, no? Mesita.*

29. E. Meza: *Sí y abarcan el área de la mancha roja...*

30. E. Osorno: *A ver, ... yo hice una línea cada que se cumplía un centímetro, en la mancha roja yo hice una línea, entonces esa al final cuando acabe de hacer todas las líneas sume todos los valores que medio 5.6 y luego lo multiplique por la escala, que me acaba dando 3.1 kilómetros...*

31. Sarahí: *¿y eso equivale?*

32. E. Osorno: *¿Cómo se sacan los Kilómetros cuadrados?*

33. Angelica: *Kilómetro por kilómetro, no?*

34. E. Osorno: *entonces tengo que multiplicar...si ya tengo que el ancho es 3.1 y el largo es de 2.9. ¿Cómo sacamos los kilómetros cuadrados?*

35. Samuel: *yo digo que serviría más el de los cuadrados...*

36. Sarahi: *yo también digo que el de los cuadrados, y nada más se colorean los que están completos...*

37. Samuel: *y los que quedan en el perímetro se dividen entre 2.*

38. Sarahi: *Exacto.*

39. Samuel: *y es un aproximado...*

40. E. Osorno: *pero no entiendo cómo hacer la coloreada...*

41. Samuel: *es que no hay ningún cuadrado que se coloree todo, hay que bajar la escala a milímetros...*

42. E. Osorno: *por si acaso estoy dividiendo mi escala a medio centímetro.*

43. Sarahi: *oigan chicos, y eso, ¿no lo podemos hacer en GeoGebra?, nada más copiamos la imagen y la pegamos. Lo voy a intentar.*

44. ...

(La maestra apoya en la elaboración del polígono en GeoGebra).

45. M: *¿con qué estimación se quedan?*

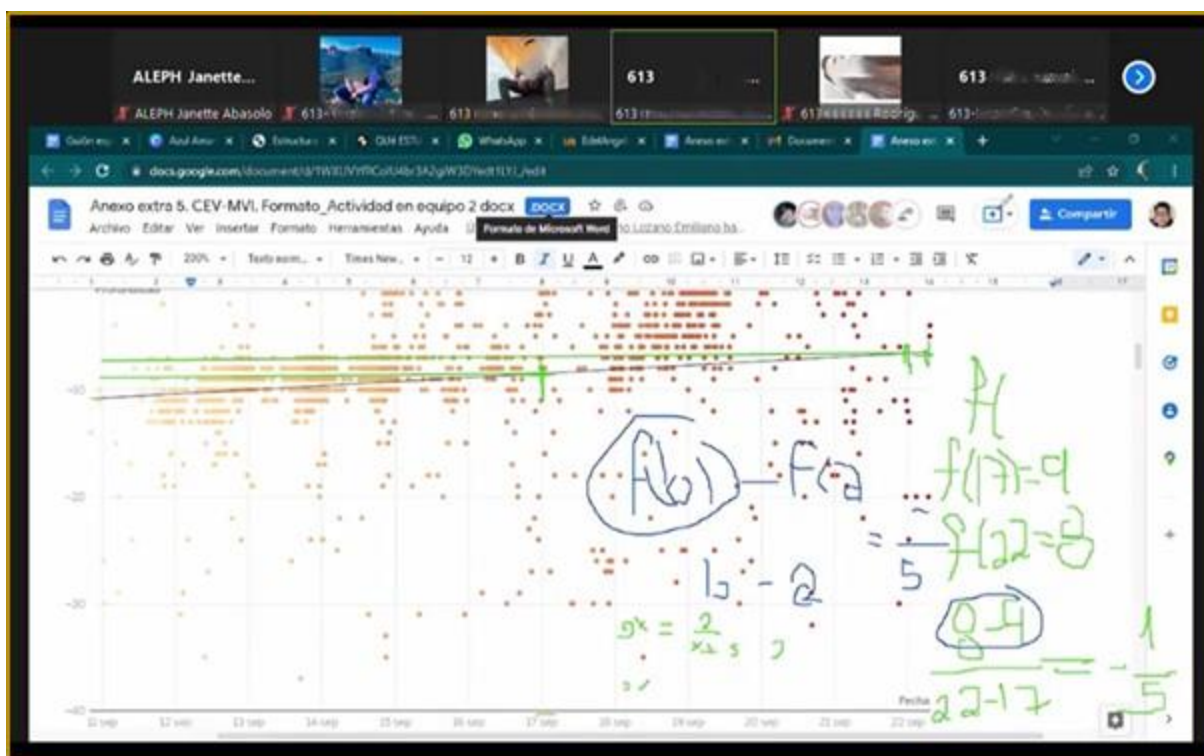
46. Samuel: *con la de papel, porque GeoGebra solo lo usamos para validar.*

Extracto 2. SD: “Caso de enseñanza”. Sesión 4. Modelos del cambio de los efectos ocasionados por la erupción del volcán. MVI-613. Febrero, 2022.

De igual manera, los alumnos reconocieron otras de las variables involucradas en el fenómeno natural, las cuales les permitieron construir modelos matemáticos para realizar el análisis de la evolución de la actividad sísmica y la magnitud de los terremotos cuando un volcán está activo, para ello continuaron trabajando con gráficos que ilustraban la profundidad y las fechas en las que ocurrían para el caso del volcán de La Palma. Al hacer sus predicciones los alumnos en colaboración logran realizar la matematización del cambio (ver figura 26).

Figura 26.

Alumnos trabajando en equipo para estimar el cambio en la evolución de los sismos y terremotos en un periodo de tiempo determinado.



Posteriormente, siguiendo con los pasos de la secuencia y considerando que en matemáticas es importante contar con supuestos matemáticos que consideran ciertas variables de datos reales para poder hacer una estimación de cómo se podrían presentar los cambios de algún fenómeno, los alumnos hicieron uso de un supuesto matemático para poder estimar la velocidad a la cual se desplazaría la lengua de lava del volcán de la Palma en España en un periodo de tiempo determinado, con la intención de conocer un estimado de *¿Con qué rapidez se expandía la lengua de lava?* Para ello, hicieron uso de una representación abstracta preestablecida¹⁴, la cual modela el desplazamiento de la lengua de lava y les permitía considerar la altura en metros del volcán sobre el nivel del mar, la razón constante a la cual se desplazaba la lengua de lava en el tiempo, así como el grosor o altura en metros de la lengua de lava, según lo informado por el Instituto Geográfico Nacional (IGN) (ver figura 27).

¹⁴ Al hablar de una representación preestablecida, nos referimos a modelos matemáticos como gráficos, esquemas, diagramas, tablas, funciones, etc. que ya están dadas y que los alumnos únicamente tienen que utilizar para interpretar. Esto se ilustra con más detalle en los siguientes subapartados de este capítulo.

Figura 27.

Alumnos presentando la solución al supuesto matemático.

ICP_Dinamita .DOCX

Archivo Editar Ver Insertar Formato Herramientas Ayuda Ver los nuevos cambios

Después de realizar lo antes mencionado resolvimos un supuesto matemático, en el cual tenemos que resolver ¿con qué rapidez se expande la lava?

Utilizando triángulos semejantes y razones trigonométricas llegamos a los siguientes cálculos:

$$x'(t) = V = 250 \text{ m/h}$$

$$\frac{a}{x(t)+x(t)} = \frac{b}{x(t)}$$

$a = 1124$ altura del volcán la palma

$b = 12\text{m}$ altura o grosor constante de la lengua de lava

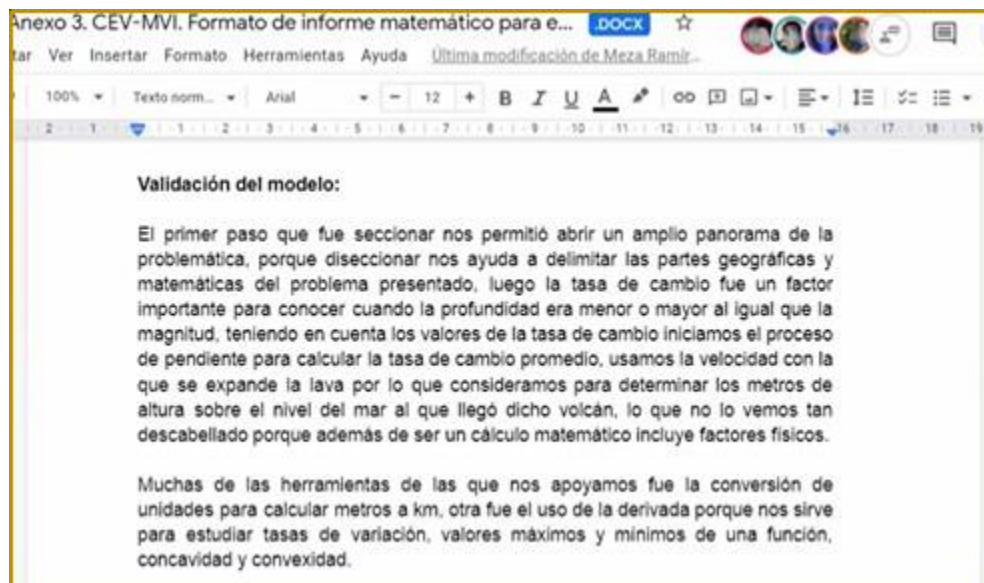
1124 12

En el ejemplo anterior, podemos resaltar que en cada uno de los momentos de la actividad era importante que los alumnos compartieran sus propuestas de modelos que iban generando para poder dialogar con la docente y con los demás compañeros del grupo y decidir si su modelo era válido o no.

En este sentido la actividad implicaba que los alumnos plantearán argumentos que les permitieran justificar y validar sus resultados haciendo uso del lenguaje matemático formal para explicar el procedimiento que siguieron para poder obtener su modelo matemático y trasladar su resultado a la problemática del contexto de las erupciones volcánicas (ver figura 28).

Figura 28.

Alumnos presentando la validación de su modelo matemático.



“El primer paso que fue seleccionar nos permitió abrir un amplio panorama de la problemática, porque diseccionar nos ayuda a delimitar las partes geográficas y matemáticas del problema presentado, luego la tasa de cambio fue un factor importante para conocer cuando la profundidad era menor o mayor al igual que la magnitud, teniendo en cuenta los valores de la tasa de cambio iniciamos el proceso de pendiente para calcular la tasa de cambio promedio, usamos la velocidad con la que se expande la lava por lo que consideramos para los metros de altura sobre el nivel del mar al que llegó dicho volcán, lo que no lo vemos tan descabellado porque.

Muchas de las herramientas de las que nos apoyamos fue la conversión de unidades para calcular metros a km, otra fue el uso de la derivada porque nos sirve para estudiar tasas de variación, valores máximos de una función, concavidad y convexidad”.

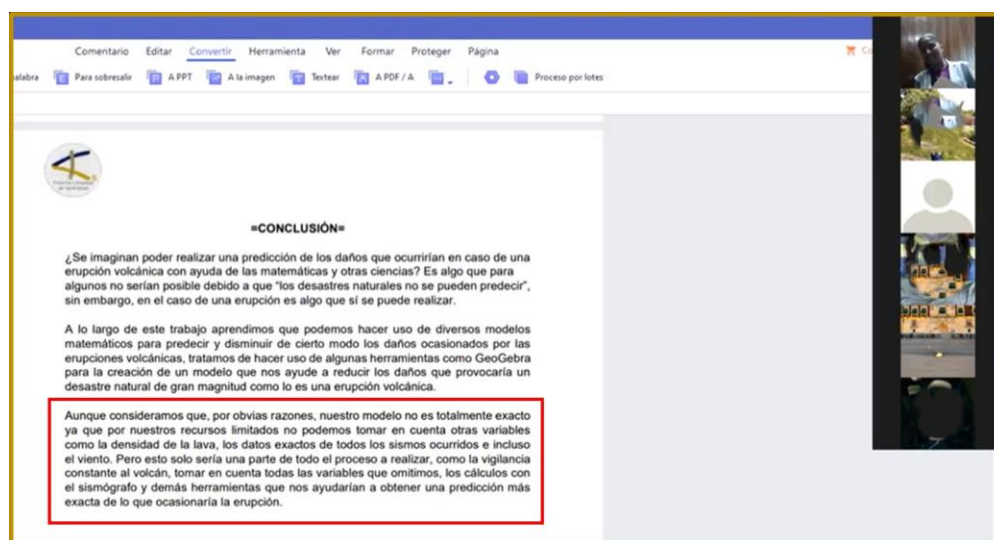
Comentario de un equipo de alumnos de VI-613, recuperado de la SD. “Caso de enseñanza”. Marzo del 2022.

Para finalizar la secuencia del caso de enseñanza la docente propició que los alumnos compartieran las conclusiones a las que llegaron después de haber realizado el análisis de diferentes modelos gráficos y haber resuelto los supuestos matemáticos, lo cual propició que los alumnos se dieran cuenta de que los modelos matemáticos que fueron generando tenían ciertas limitaciones

porque únicamente consideraron algunas de las variables que tenían disponibles, pero que ello les permitió hacer una estimación del cambio en la extensión de la lengua de lava, la evolución de los sismos y terremotos, así como hacer un estimado de la velocidad a la cual se expandía la lengua de lava (ver figura 29).

Figura 29.

Conclusión de uno de los equipos de M-VI después de realizar cada una de las acciones matemáticas implicadas en el caso de enseñanza.

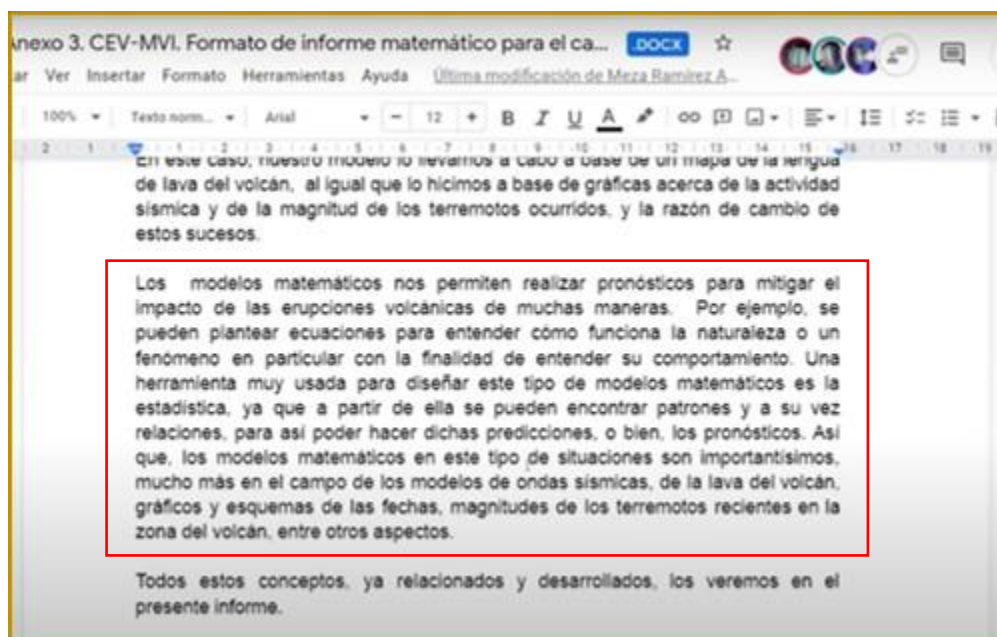


“Aunque consideramos que, por obvias razones nuestro modelo no es totalmente exacto, ya que, por nuestros recursos limitados no podemos tomar en cuenta otras variables como la densidad de la lava, los datos exactos de todos los sismos ocurridos e incluso el viento. Pero esto sólo sería una parte de todo el proceso a realizar, como la vigilancia constante del volcán, tomar en cuenta todas las variables que omitimos, los cálculos con el sismógrafo y demás herramientas que nos ayudarían a obtener una predicción más exacta de lo que ocasionaría la erupción”.

De igual manera, en las conclusiones elaboradas por los alumnos se puede observar que logran recuperar la importancia del uso de modelos matemáticos para poder realizar pronósticos que les permitan mitigar el impacto de las erupciones volcánicas, una posible estimación, recuperando la importancia del uso de ecuaciones, gráficas y esquemas para visualizar la evolución del fenómeno (ver figura 30).

Figura 30.

Conclusión de uno de los equipos de M-VI después de realizar cada una de las acciones matemáticas implicadas en el caso de enseñanza.



“Los modelos matemáticos nos permiten realizar pronóstico para mitigar el impacto de las erupciones volcánicas de muchas maneras. Por ejemplo, se pueden plantear ecuaciones para entender cómo funciona la naturaleza o un fenómeno en particular con la finalidad de entender su comportamiento. Una herramienta muy usada para diseñar este tipo de modelos matemáticos es la estadística, ya que a partir de ella se pueden encontrar patrones y a su vez relaciones, para así poder hacer dichas predicciones, o bien, los pronósticos. Así que los modelos matemáticos en este tipo de situaciones son importantísimos, mucho más en el campo de los modelos de ondas sísmicas, de la lava del volcán, gráficos y esquemas de las fechas, magnitudes de los terremotos recientes en la zona del volcán, entre otros aspectos”.

Comentario de un equipo de alumnos de VI-613, recuperado de la SD. “Caso de enseñanza”. Marzo del 2022.

Es importante señalar que a lo largo de todo el desarrollo de la actividad, la docente guío y acompañó las discusiones de los alumnos, el uso de las representaciones gráficas y del lenguaje matemático, así como el uso de las herramientas tecnológicas como GeoGebra, ya que para que los alumnos pudieran utilizarla debían tener claridad no sólo de la cuestión operativa del programa

sino de lo que querían modelar en el mismo, para poder obtener el área, el perímetro, un polígono o una ecuación algebraica. También resulta importante señalar que la docente aprovechaba cada una de las sesiones de zoom para organizar en salas a los equipos y con ello favorecer el trabajo colaborativo entre los alumnos para realizar la estimación y resolución de la problemática.

Al mismo tiempo, se pudieron recuperar comentarios de las docentes en función de la importancia que tiene el uso de las matemáticas dentro de actividades reales, debido a que toda la estructura de la actividad propiciaba que los alumnos estuvieran implicados en la resolución de la problemática real que les implicaba hacer uso de las matemáticas y llevar a cabo acciones matemáticas; y a partir de la mediación docente quien guió la discusión, haciendo uso de diferentes motores cognitivos, los estudiantes reconocieron la importancia de las matemáticas como una herramienta para interpretar la realidad, es decir, pudieron comprender ¿en qué momento de la actividad hicieron matemáticas? Y la docente compartió con ellos la siguiente conclusión:

Mtra. Eva: “En este pensamiento matemático o en esta matematización, si nosotros lo vemos en diferentes niveles o dimensiones, en lo primero que tenemos que pensar es en qué problema es el que voy a resolver; primero necesito ver el contexto, la situación, qué cosa voy a resolver y después qué herramienta de la matemática voy a utilizar para poder darle un sentido.”

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Septiembre del 2022.

Particularmente la modalidad del caso de enseñanza de Aleph5 es un dispositivo pedagógico con una estructura compleja y se presenta desde la perspectiva disciplinar de las matemáticas; es decir, creamos las condiciones para propiciar en los alumnos del bachillerato una interpretación disciplinar del caso y un posicionamiento para modelar matemáticamente una problemática de la realidad, haciendo uso de múltiples recursos semióticos. Esto resultó de interés para los alumnos ante la incógnita de lo que representaba el tema relacionado con los contenidos, en este caso la derivada como razón de cambio. De igual manera, el caso de enseñanza nos permitió dar cuenta de las expresiones que intervienen en cada una de las dimensiones del proceso de matematización, lo cual se ve objetivado en el informe matemático que elaboran los alumnos para presentar sus modelos y plantear sus argumentos matemáticos atendiendo la problemática de la realidad; el caso de enseñanza representó una *oportunidad para matematizar la realidad*.

Resumiendo todo lo anterior, se puede dar cuenta que la actividad determina las acciones del docente y el alumno, y están relacionadas con el logro de la meta de la actividad, en este caso la escritura de un informe matemático. Dado que la intención es promover las capacidades de pensamiento complejo en los alumnos es importante que cada una de las acciones les impliquen un reto cognitivo, es decir, que se vean en la necesidad de usar las matemáticas para interpretar, formular, tomar decisiones, argumentar y comunicar información, para resolver una problemática real. En el siguiente apartado se ilustra algunos ejemplos de los productos que elaboraron los alumnos como meta de la actividad.

6.1.2. Meta de la actividad como una producción compleja

Como ya se mencionó, cada una de las actividades guardaban una estructura particular, pero en todos los casos las actividades implicaron que los alumnos y la docente realizarán diferentes acciones matemáticas encaminadas al logro de una meta socialmente establecida, es decir, concretar una tarea compleja que requería poner en juego las dimensiones del proceso de matematización de forma integrada.

En este sentido, también se puso particular interés en el análisis de los productos que los alumnos tenían que entregar al final de cada actividad, por lo que se discutió con las maestras de matemáticas la pertinencia de trabajar especialmente la escritura matemática, lo cual nos ayudó a superar el tema de lo procedimental y que los alumnos no repitieran conocimientos sino que los utilizaran para lograr la meta de la actividad; por lo tanto, la tarea representó un desafío para los alumnos porque, en la mayoría de las secuencias, consistió en la elaboración de un “informe matemático”, en el cual los alumnos no sólo tenían que recuperar sus procedimientos sino la interpretación y argumentación de cada uno de los modelos utilizados y elaborados a lo largo de la actividad, incluyendo su validación y justificación. Cabe resaltar que la tarea concluía en el momento en el que los alumnos presentaban su informe de manera escrita y de manera verbal para propiciar el diálogo con todos los compañeros y con la docente; con lo cual se favoreció la comunicación matemática.

A partir de la investigación y en colaboración con las maestras de matemáticas y el Dr. Eugenio (asesor) se definió qué es un informe y un modelo matemático; a partir de ello, se elaboró un formato en el que se describen cada una de las características que conformaban el informe: Título, introducción (que incluía el objetivo, la pregunta clave y el supuesto matemático),

presentación del modelo matemático, validación del modelo, conclusiones y referencias. Dicho documento fue entregado a los alumnos para que pudieran conocer la estructura que tenían que considerar al momento de escribir su informe matemático. A continuación, se muestra un ejemplo de uno de los primeros informes matemáticos entregados en la Secuencia Didáctica “Aterrizaje de los aviones” en el que podemos observar que los alumnos al integrar la información en su primer informe matemático logran reconocer la problemática que deben resolver, simplifican la situación real considerando aspectos matemáticos que le serían de utilidad e identifican las variables que están implicadas en el aterrizaje y despegue de un avión, lo cual les permite traducir el problema real a un problema matemático y comprender que dicha problemática puede ser modelada matemáticamente (ver figura 31, recuadro rojo).

Figura 31.

Introducción del primer Informe matemático que elaboraron los alumnos en equipo para la SD “Aterrizaje de los aviones”.

Informe matemático: Avifunciones

Introducción:

En este informe matemático, el equipo explicará el tema y los argumentos acerca del aterrizaje y despegue de un avión con su respectivo modelo matemático. Como lo vimos en la noticia *Variar la inclinación de los aviones en el aterrizaje, la idea que ya se prueba en Londres para reducir el ruido*, los aviones comerciales se aproximan a la pista con un ángulo de 3 grados de media, y la idea es que lo hagan con 3.2 grados. Esta ligera variación supone un gasto menor de combustible y el avión realizará menos ruido de forma general. Esto lo que representaremos en nuestro informe.

La interacción de cuatro fuerzas aerodinámicas hacen posible el despegue de un avión. Estas son el peso (gravedad), la sustentación, el empuje, y la resistencia. El peso de la aeronave (la gravedad) tira el avión hacia abajo y lo mantiene en el suelo. La sustentación tira la aeronave hacia arriba y la mantiene en el aire. Pero sólo cuando la sustentación es mayor que la gravedad, el avión puede despegar. El empuje, a su vez, hace que el avión avance y la resistencia (fuerza contraria) lo frena. La interacción de estas cuatro fuerzas es un conocimiento muy complejo y la base de la construcción de aviones.

La maniobra de aterrizaje es la fase final de una aproximación en la que el avión empieza un descenso desde su fase de crucero y en la que debe realizar algunos procedimientos generales como: reducción de velocidad, desplegar el tren de aterrizaje (en caso de que sea retráctil), seguir un patrón determinado de aproximación.

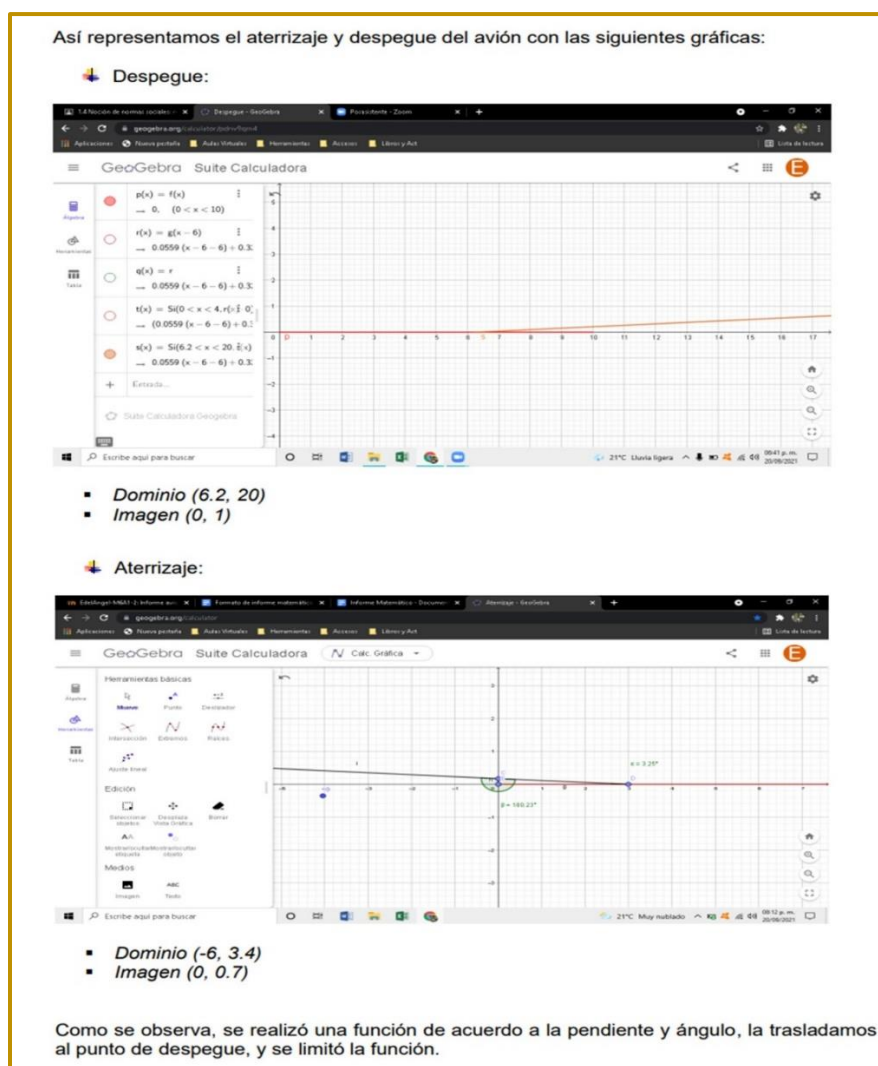
El avión ocupa una región o dominio del espacio tridimensional en torno a la cual fluye el aire, entre otros factores.

Así mismo, logran realizar la traducción del problema real al lenguaje formal matemático (notación matemática) y generar un modelo matemático gráfico y algebraico para representar el problema real. Para ello, hacen uso de GeoGebra, lo cual implica no sólo que conozcan la

plataforma sino que sean capaces de operar con el sistema matemático, es decir, elaborar cálculos, emplear axiomas, usar la notación matemática y las variables que les permitirían obtener el modelo adecuado y formular explicaciones a partir del mismo, en este caso, que utilizaran el dominio y la imagen de una función (ver figura 32).

Figura 32.

Presentación del modelo gráfico y algebraico del primer Informe matemático que elaboraron los alumnos en equipo para la SD “Aterrizaje de los aviones”.



De la misma forma, pudimos conocer que aunque los alumnos nunca se habían visto en la necesidad de escribir en matemáticas, dado que en otras experiencias únicamente realizaban ejercicios y procedimientos sin un contexto particular, lograron elaborar varios informes

matemáticos, en cada una de las diferentes secuencias didácticas, y cada vez se fueron especializando en la construcción de los mismos. Ante esto, los alumnos reconocen que aunque no conocían lo que era un informe, pudieron utilizar álgebra, derivadas, límites, y les permitió tener un cambio de pensamiento, como se puede ver en el siguiente comentario:

“Fue una experiencia grandiosa porque siempre me enseñaron a que las matemáticas son más práctica, práctica y tienes que llegar a una perfección y en esta ocasión me enseñaron más a un pensamiento más profundo sobre las matemáticas, para qué nos sirven, cómo se conectan con otras materias, historia, geografía, este... incluso con el español, haciendo el reporte matemático, yo nunca había hecho un reporte matemático y fue así como ¿y qué quiere que haga? La primera vez me quedé frío totalmente porque no sabía hacer un reporte matemático y decía, no pues esto es cosa de otro mundo y, mi maestra me ayudó mucho en repasar varios temas, como álgebra. Se me hacía muy difícil para mí el álgebra, la trigonometría y todas las ramas de las matemáticas pero últimamente con la maestra yo tuve un cambio de pensamiento y así pude llevar muy bien esta materia, supe hacer límites, supe hacer integrales, supe hacer derivadas mucho más rápido y mucho menos estresante que como lo llevo mi hermana.”

Testimonio de un alumno que cursó Matemáticas de VI,
Grupo focal, mayo 2022.

Con lo anterior, podemos observar que en los informes matemáticos se ve reflejado lo que es matematizar, hacer matemáticas. Y la escritura se convirtió en un momento necesario para poder consolidar e integrar cada una de las acciones matemáticas que realizaron los alumnos para solucionar la problemática que se les planteó; de esta manera, podemos ver objetivado todo el proceso del pensamiento matemático en el informe. Es importante señalar que la meta, el informe matemático, resultó ser algo original, una producción compleja que nos permite dar cuenta de las formas de pensar de los alumnos a lo largo de su participación en cada secuencia didáctica, haciendo uso de múltiples recursos, por ello en el siguiente apartado ejemplificamos algunas representaciones utilizadas a lo largo del ciclo escolar durante la implementación.

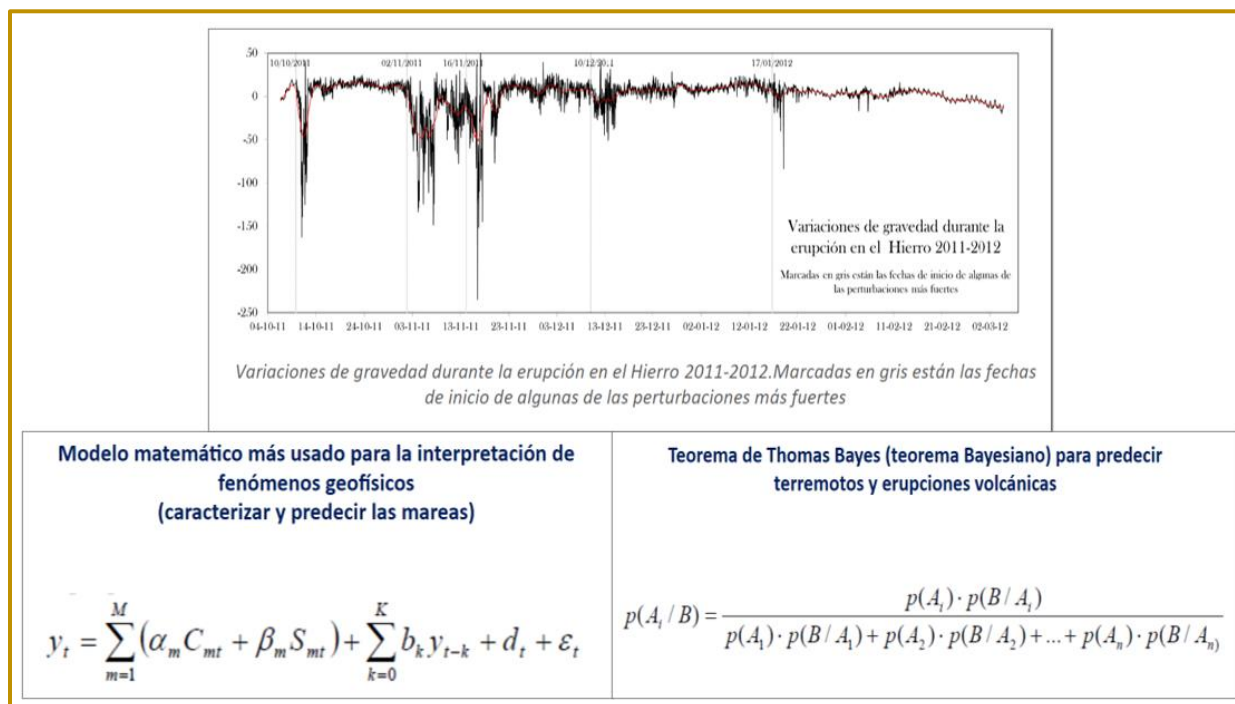
6.2. Uso reiterativo de múltiples recursos para pensar juntos

Otro de los ejes fundamentales en el análisis de las secuencias didácticas fue la importancia del uso de múltiples recursos dentro de la actividad y sus implicaciones para el desarrollo del pensamiento matemático, los cuales tenían un uso intencional en cada una de las actividades, ya que permitían que los alumnos interpretarán y llevarán a cabo acciones matemáticas para resolver un problema. En este sentido los recursos matemáticos permitían conectar el pensamiento de la docente con el de los alumnos, para que pensarán juntos.

Durante el diseño de cada una de las secuencias didácticas se acordó con la docente todos los recursos (modelos, artículos, textos) que se utilizarían a lo largo de la implementación del entorno para que estuviera familiarizada con dichos recursos y así poder tomar decisiones en colectivo ya que éstos se presentaban con una intención particular; acordando también el contenido o herramienta matemática que se utilizaría en cada una de las secuencias didácticas, teniendo presente que sería importante contar con documentos formales que ya están publicados y que ilustran los modelos matemáticos complejos. Por ejemplo, en el caso de enseñanza se acordó hacer uso de la derivada como razón de cambio y se recuperaron artículos publicados por matemáticos que se especializan en la Vulcanología y en la Geofísica, en los que se ilustran los modelos que se utilizan de manera profesional para hacer sus estimaciones respecto a las erupciones volcánicas; esto con la intención, no sólo de dar cuenta de que las matemáticas son necesarias, sino también pensando en que en Aleph5 estamos preocupados porque los alumnos comiencen a pensar en las matemáticas formales, por ello deben de estar expuestos y usar recursos reales de los matemáticos, *modelos matemáticos preestablecidos* (ver figura 33).

Figura 33.

Modelos matemáticos recuperados de las fuentes publicadas por vulcanólogos y geólogos.



A partir del diálogo con las docentes obtuvimos el siguiente comentario:

“Podríamos usar el texto y decirles que lo revisen y vean el tipo de matemáticas que están ocupando, mencionándoles que son matemáticas de otro nivel en donde incorporan más variables, no es que esos modelos sean complicados sino que están agregando más cosas que en nuestro caso no tomaremos en cuenta porque lo importante que queremos es que ellos identifiquen y usen la derivada como razón de cambio”.

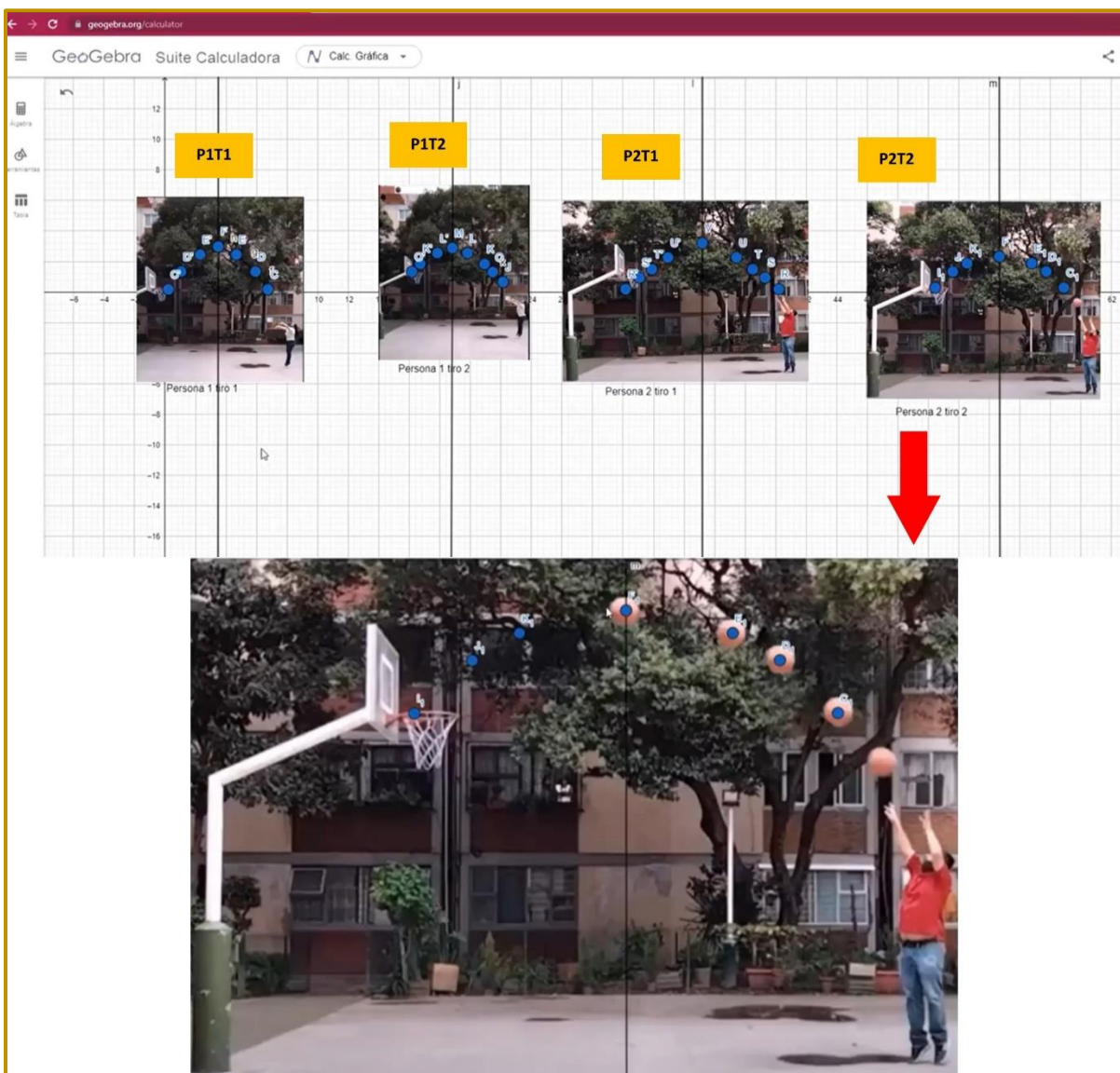
Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Enero del 2022.

Además de hacer uso de modelos matemáticos preestablecidos, también en el proceso de enseñanza y aprendizaje fue importante que los alumnos pusieran en juego la *modelización*, que forma parte del proceso de la matematización, la cual implica que los alumnos sean capaces de generar sus propios modelos matemáticos, geométricos o algebraicos, para resolver la problemática que se les planteaba en cada secuencia didáctica. Para ilustrar esta dimensión del proceso, se recuperan algunos ejemplos de los modelos geométricos y/o algebraicos que elaboraron los

alumnos dentro de la Secuencia Didáctica titulada “Básquetbol, ¿Encestarías?”, la cual tuvo como meta la elaboración de un informe matemático en el que se desarrollara el modelo (geométrico y/o algebraico) del lanzamiento del balón para lograr el tiro perfecto en basquetbol. Respondiendo la pregunta clave: ¿Qué ecuación modela o determina la trayectoria del tiro perfecto en basquetbol? Para ello, los alumnos debían hacer uso de diferentes videos de lanzamientos y predecir en cuál de ellos el tiro sería perfecto, utilizando la herramienta de GeoGebra para elaborar dicha representación. Es importante mencionar que en esta secuencia hicieron uso de la geometría analítica como herramienta matemática, en particular, empleando conceptos fundamentales que determinan una función y las características de las cónicas: parábola, hipérbola y elipse. Se pudo observar que algunos alumnos logran elaborar su representación del lanzamiento haciendo uso de las herramientas de GeoGebra, reconociendo el lugar geométrico de la cónica y empleando elementos como el vértice, la recta, el foco y la directriz (ver figura 34).

Figura 34.

Representación geométrica (concreta) elaborada por los alumnos en la SD de Básquetbol.



Nota: (P1T1=Persona 1, Tiro 1; P1T2=Persona 1, Tiro 2; P2T1=Persona 2, Tiro 1; P2T2=Persona2, Tiro 2).

Al momento de compartir y argumentar cómo construyeron sus modelos matemáticos, los alumnos comentan:

“Estos son mis modelos, lo voy a acercar uno por uno, ahí coloque puntos para trazar el movimiento del balón, que va a ser la primera mitad, y después de ahí trace una recta vertical para sacar la simetría de cada punto, entonces eso me llevó al resultado que la pelotita podría dar justo en el borde del aro,

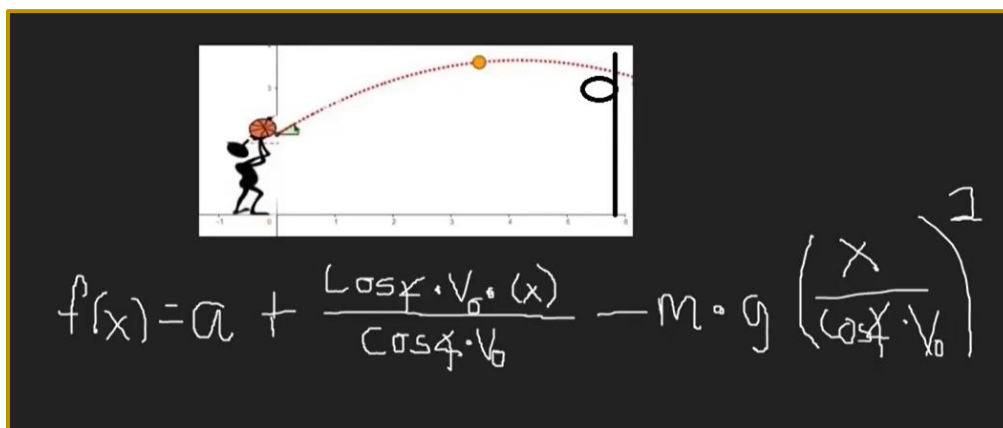
y eso significaba que no fuera canasta, según mi modelo, ese fue el tiro 1 de la persona 1. En la persona 1 tiro 2, hice exactamente lo mismo... La persona 2 tiro 2, ésta sí alcanza a caer en el borde del aro y es muy probable que sí enceste. Por lo tanto, proponemos que la persona que si encesta es la persona 2 en el tiro 2.”

Comentario de un alumno de VI-613, recuperado de la SD. “Básquetbol, ¿Encestarías?”. Octubre del 2021.

Por otro lado, otro de los equipos realizó una propuesta diferente para conocer el modelo algebraico (abstracto) que les permitirá representar el tiro del jugador 2 en su segundo tiro, para lo cual tomaron en cuenta las variables que intervienen en el lanzamiento, como la altura del jugador y el ángulo de lanzamiento, el peso del balón, además de investigar las fórmulas que les permitirían obtener la velocidad inicial, masa y gravedad, como se puede observar en la figura 35.

Figura 35.

Representación algebraica elaborada por los alumnos en la SD de Básquetbol.



Ante el modelo anterior los alumnos dan su explicación y comentan lo siguiente:

“A nosotros nos quedó de esta manera. Este es el cuarto tiro, es decir, el de la Persona 2, Tiro 2, y resulta que no encesto. La fórmula que utilice es f de x que es igual a la altura de la persona, pero nos percatamos que él realizaba un impulso, es decir, da un salto para lanzar el balón, entonces tomamos como referencia la altura cómo 1.9, el peso del balón 0.5... La fórmula inicial quedaría como: f de x es igual a la altura (a) más el coseno del ángulo por la

velocidad inicial (V_0) por x , que es una constante, y esto se multiplica por el coseno del ángulo por la velocidad inicial (V_0), a esto le restamos el peso (m) del balón por la gravedad (g) y se multiplicaría por x sobre el coseno del ángulo por su velocidad inicial y esto al cuadrado. Así quedaría la fórmula que desarrollamos para formar una parábola...”

Comentario de un alumno de VI-613, recuperado de la SD. “Básquetbol, ¿Encestarías?”. Octubre del 2021.

A partir de lo anterior se observa que los alumnos logran hacer diferentes propuestas de modelos matemáticos para llegar a la solución del problema, y a pesar de que en las primeras estimaciones estos modelos no sean del todo exactos, al momento de verbalizar sus procedimientos en el plano social, la maestra guía sus argumentos para que puedan hacer los ajustes correspondientes a dichos modelos y reconozcan los elementos que tienen que considerar para obtener un modelo viable. Lo relevante aquí, es que el modelo que construyen los alumnos permite que todos estén conectados con la actividad y consideren las observaciones para sus propios modelos; es decir, piensan juntos en relación a una misma problemática en particular y a un modelo específico.

Pero, cabe señalar que el *uso de los recursos* no se da de manera automática y por sí solos no despliegan las capacidades de pensamiento en los alumnos, sino que es indispensable que estos recursos, ya sean modelos preestablecidos o modelos elaborados por los propios alumnos, sean utilizados y mediados por la docente dentro de la actividad para propiciar en los alumnos la reflexión y la visualización, es decir, para que la docente y los alumnos se encuentren y piensen juntos. Por lo anterior, *si no hay símbolos (representaciones externas), no hay pensamiento, porque la actividad humana no puede suceder sin símbolos, dado que la actividad está significada, está materializada* (J. Alatorre Rico, comunicación personal, 18 de julio del 2023).

Para que dicha mediación fuera posible y los alumnos lograran desplegar capacidades de pensamiento especializadas, fue necesario acompañar cada uno de los recursos con motores cognitivos; es decir, preguntas detonadoras que le permitieran a la docente guiar el pensamiento de los alumnos hacia el objetivo de la actividad desde la disciplina de las matemáticas. En el siguiente apartado abordaremos algunos ejemplos de la guía que ofrece la docente al usar los recursos establecidos en el diseño de la actividad.

6.3. Guía docente para el logro de la meta establecida

Otra dimensión importante que se consideró en el análisis de la implementación fue el papel del docente, como guía y mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Debido a que es el docente quien al interior de la actividad es el encargado de conectar explícitamente los significantes, el lenguaje disciplinar, los recursos y las acciones matemáticas, siendo la actividad la que los une. La actividad es la que conecta desde el plano social (afuera) y es la docente la que realiza las acciones matemáticas frente a los alumnos y con ello propicia que vayan desarrollando su autonomía al participar dentro de las actividades; la maestra selecciona, abstrae, usa el lenguaje matemático, hace demostraciones, es decir, *recorta la realidad* para guiar el pensamiento de los alumnos.

Los modelos matemáticos de expertos, a los que también nos referimos como representaciones externas preestablecidas, sirven para que el pensamiento de la docente se conecte con el de los alumnos, dando pauta a la visualización, interpretación y al uso del lenguaje matemático que le da sentido a la representación externa bajo el contexto de la actividad matemática. En este proceso es la docente la que pone el lenguaje matemático, lo usa y lo conecta con la representación y con ello enriquece cada una de las acciones de los alumnos.

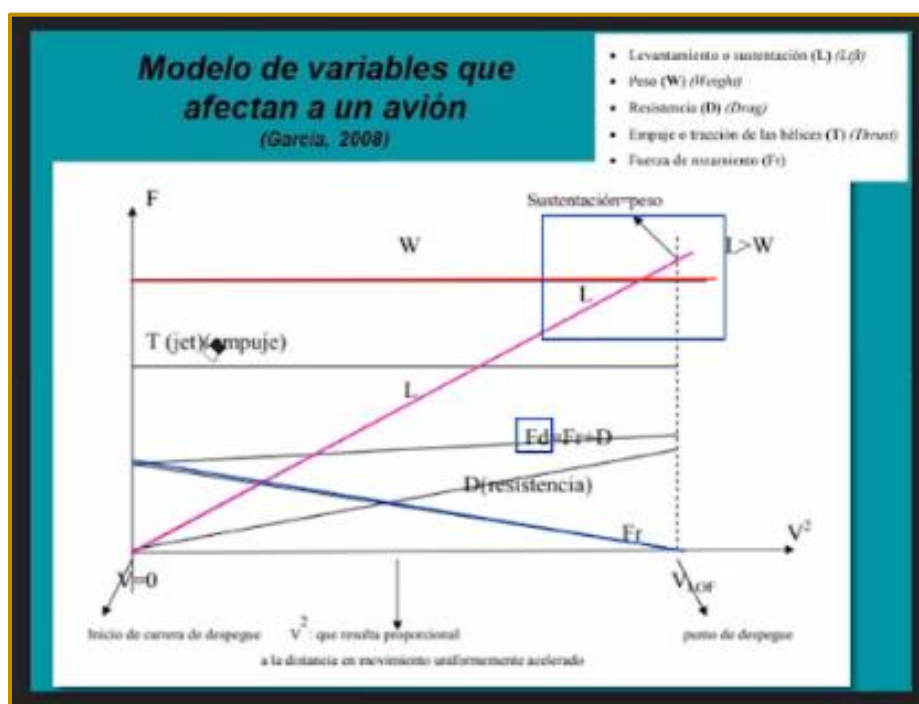
Lo anterior se puede observar en la SD titulada “Aterrizaje de los aviones”, la cual se diseñó para dirigir a los alumnos a la introducción a las funciones, haciendo uso de conceptos fundamentales que determinan una función: imagen, dominio, codominio o contradominio, y regla de correspondencia. En el momento de la contextualización de esta actividad, la maestra presenta el modelo matemático preestablecido¹⁵ correspondiente a las variables que afectan a un avión, tanto para el despegue como para el aterrizaje el cual ha sido utilizado en aeronáutica. La docente les muestra el modelo y les pide que le expliquen *¿Qué dice el modelo?* a lo que los alumnos realizan algunas interpretaciones y podemos observar que para plantear sus explicaciones se apoyan de las acotaciones que aparecen en el mismo modelo, los nombres de las variables y, empiezan a mencionar qué tipo de funciones son las que están representadas. Cabe resaltar que, para guiar las interpretaciones de los alumnos la maestra señaló con color rojo, azul y rosa las líneas a las cuales se estaban refiriendo los alumnos, y algunos alumnos mencionan que la línea roja (horizontal) corresponde a una función lineal, a lo que la maestra le pregunta, *“entonces, ¿qué tipo de función*

¹⁵ El modelo matemático fue recuperado de la Tesina de Licenciatura de Aeronáutica (García, 2008).

es la de color rosa y la azul?, ¿No son lineales? Ante esto, varios alumnos mencionan que no son lineales y en algunos casos intentaron realizar su interpretación pero haciendo uso de un lenguaje no matemático, es decir, mencionan que algunas variables van subiendo, otra va bajando y una acostada u horizontal, pero no usaban los términos creciente, decreciente y constante; lo cual le da la pauta a la maestra para que les pregunte *¿Cómo se leerían en lenguaje matemático?*, y algunos intentan elaborar una interpretación haciendo uso del lenguaje matemático. Con lo anterior, podemos observar que los alumnos en un primer momento de interpretación pensaban que las líneas representadas en el modelo como creciente (rosa) y decreciente (azul) no eran funciones lineales, por lo que la maestra recupera las aportaciones y les comenta que todas las líneas representan funciones lineales y lo que las diferencia es que unas son crecientes, otras decrecientes y otras constantes y al final los alumnos logran usar estos conceptos (ver figura 36).

Figura 36.

Modelo matemático preestablecido para interpretar las variables que afectan a un avión.

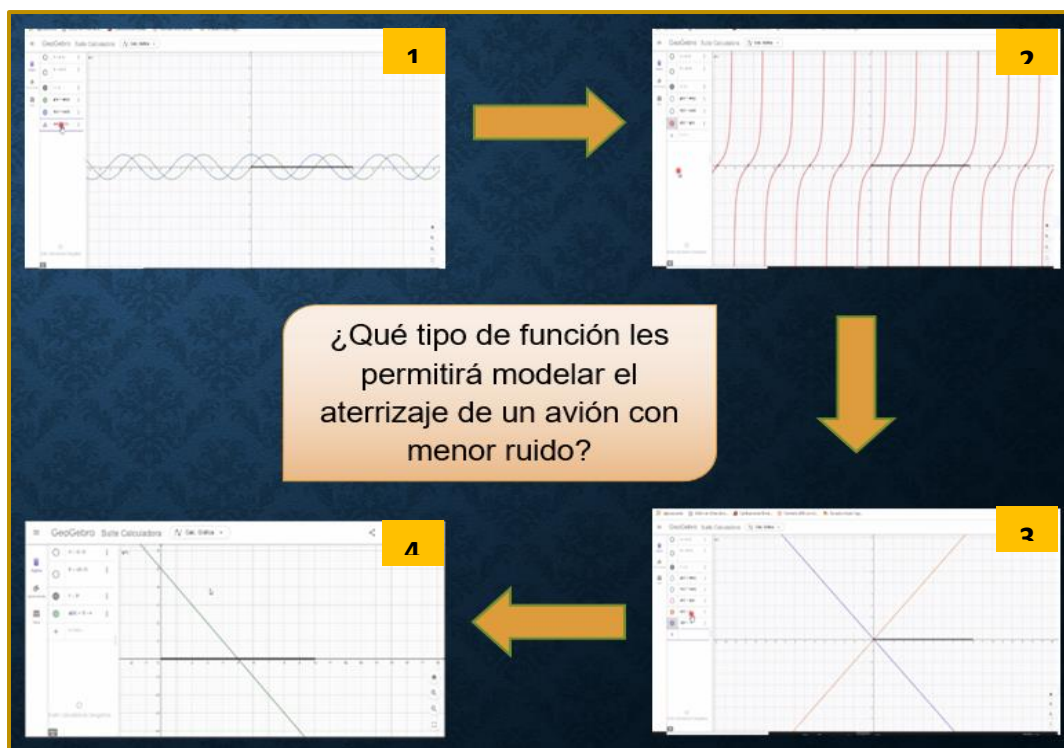


De igual manera, podemos resaltar que la docente no sólo guió con motores cognitivos, sino que la maestra *ilustra* lo que dice el alumno para que de manera visual pueda reconsiderar lo que está formulando. Para ello, la docente aprovechó la herramienta de GeoGebra y modeló cada una de las propuestas de los alumnos para hacer evidente si su propuesta era correcta o incorrecta, lo

cual permitió que los alumnos visualizarán la función a la cual hacían referencia, como se ve en el siguiente ejemplo, cuando la maestra les pregunta, *¿qué tipo de función les permitirá modelar el aterrizaje de un avión con menor ruido?* a lo que un alumno dice: “la de coseno” (1) y la docente modela en GeoGebra la función de coseno y pregunta *¿nos sirve?* y los alumnos responden: no. Por lo que otro alumno comenta: “entonces la de seno” (1), y la maestra la modela y los alumnos se dan cuenta que esa no es la función correcta. Posteriormente, un alumno dice (muy seguro): “entonces la función de tangente” (2) y cuando observa la representación de esa función en GeoGebra, el alumno corrige su propuesta porque es evidente que así no puede aterrizar un avión. Cuando la maestra modela los diferentes tipos de funciones que ellos proponían llegan a la conclusión de que esos no les sirven, y otro alumno menciona: “son las funciones lineales las que nos ayudan” y la maestra lo modela (3) propiciando que los alumnos lleguen a la conclusión de que las funciones lineales les van a permitir representar o modelar cómo aterriza un avión. Posteriormente forma equipos para que realicen una representación del aterrizaje de los aviones haciendo uso de las funciones lineales (4) (ver figura 37).

Figura 37.

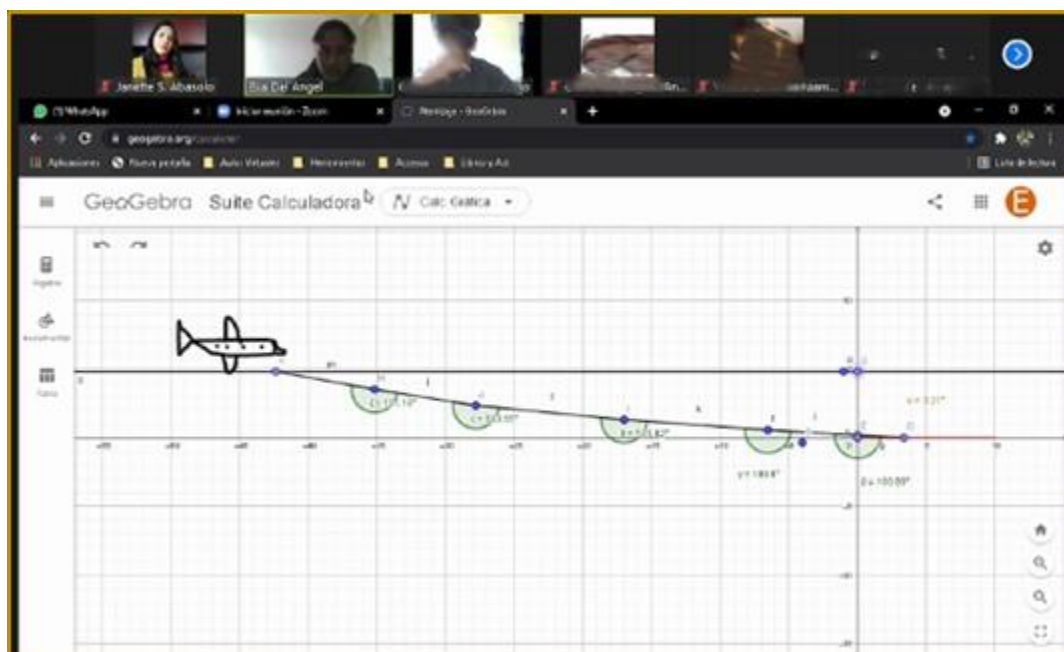
Modelización de las diferentes funciones, por parte de la maestra en el momento de contextualización de la actividad de aterrizaje de los aviones.



Cabe señalar que la maestra ayuda a que los alumnos visualicen sus errores en los modelos que proponen, porque los alumnos se van a equivocar, pero en el mismo proceso van a ir resignificando, modificando, reconceptualizando su modelo y se darán cuenta de en dónde estaba el error. Al finalizar el trabajo en equipo los alumnos explicaron sus primeras propuestas para modelar el aterrizaje de un avión y realizar una reflexión con todo el grupo, guiados por la docente. Este momento de presentación les permitió replantear sus propuestas y afinar sus modelos hasta obtener el modelo viable para resolver la problemática planteada (ver figura 38).

Figura 38.

Modelo matemático elaborado por los alumnos en la secuencia didáctica de aterrizaje de los aviones.



La intención de utilizar un modelo matemático experto de las variables que modelan el aterrizaje y despegue de un avión tenían la intención de hacer pensar a los alumnos en las funciones lineales y con ello la maestra no tuvo que iniciar dando una clase de la definición de qué es una función lineal, creciente, decreciente y constante, fue a partir del modelo que surge el reconocimiento y uso de los contenidos matemáticos, es dentro de la actividad en donde se convierten en una necesidad. Al final de esta sesión y reflexionar con la docente sobre la sesión del día, menciona:

“Recuerdo cuando yo me preguntaba en dónde iba a aparecer el contenido matemático y ahora me doy cuenta de que ahí está, ósea yo les pongo el modelo y el modelo nos hace pensar y nos hace ir al contenido matemático.”

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Septiembre del 2021.

Posterior a la implementación de la secuencia didáctica, en la sesión de seguimiento, se recuperó lo ocurrido en el aula para compartir con todo el equipo la importancia no sólo de presentar un modelo matemático experto sino la forma en la que la docente va guiando la interpretación que hacían los alumnos sobre el mismo. Al momento de preguntarle a la docente cuál fue su impresión al implementar esta primera secuencia didáctica, comenta:

“Usar un modelo matemático de las funciones me permitió enseñar, a la mayoría de los alumnos y en poco tiempo, un tema (funciones) que antes me tomaba más tiempo y que lograba con pocos alumnos.”

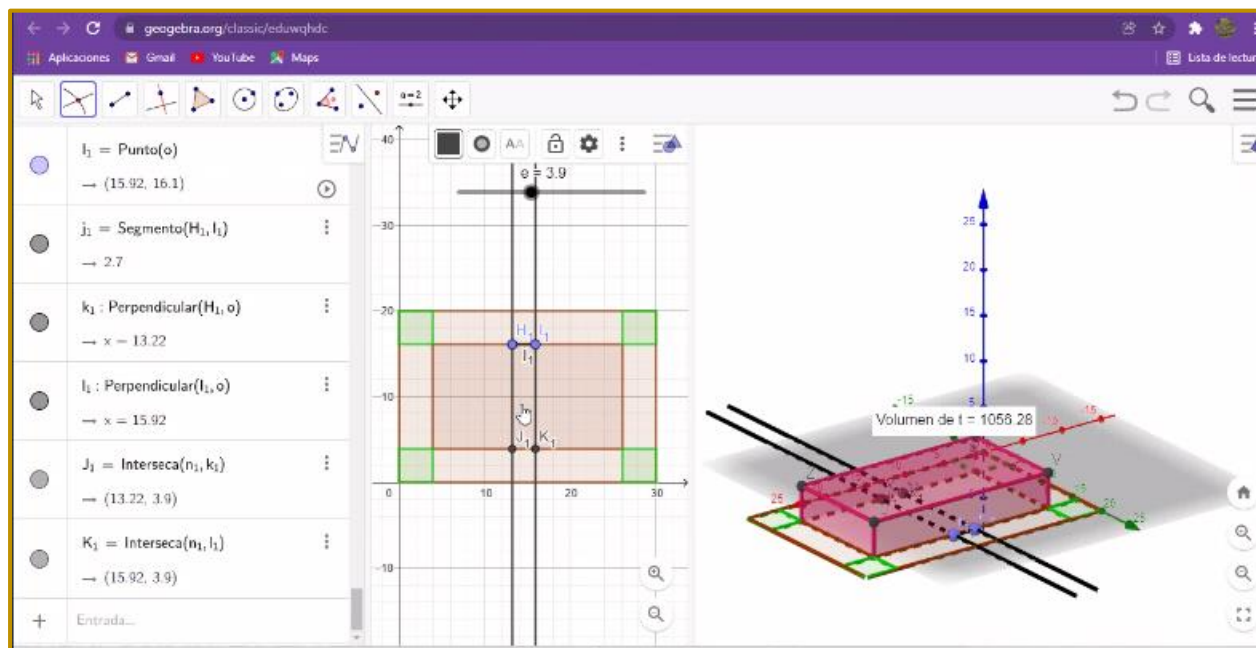
Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Septiembre del 2021.

Por otro lado, como se ha venido mencionando, cada una de las secuencias didácticas implicaba el uso de herramientas tecnológicas, en este caso el uso del programa de GeoGebra, herramienta que permite que los alumnos obtengan diferentes representaciones de un mismo objeto, como lo son la representación algebraica, bidimensional y tridimensional; pero el uso de este programa no es automático, también implica la guía de la docente quien para compartir su pensamiento con los alumnos recurre al lenguaje formal matemático y lo objetiva haciendo uso de representaciones geométricas y algebraicas apoyándose de GeoGebra; es decir, realiza acciones simbólicas frente al alumno y el sentido de esto está determinado por la actividad. Tal fue el caso de la SD titulada “Fábrica de empaque” la cual, tenía como meta consistió en la elaboración de un informe matemático del modelo y diseño de empaques sustentables con el fin de usar menos materia prima, y argumentar *¿de qué manera las matemáticas (la derivada de una función) se pueden aplicar en la fabricación de empaques sustentables?*, lo anterior implicaba que los alumnos elaborarán no solo su modelo algebraico, sino que además elaborarán la representación tanto bidimensional como tridimensional en GeoGebra y para ello la docente elaboró previamente un ejemplo de la modelización el cual presento en clase para ejemplificar cómo se utiliza GeoGebra

y qué tipo de notación matemática debían utilizar para que el programa representara lo que ellos querían (ver figura 39).

Figura 39.

Modelos matemáticos de la SD Fábrica de empaques, elaborada por la docente.



En suma, la maestra hace uso del lenguaje matemático en el plano social, y lo formaliza para los alumnos a partir de modelos matemáticos. De igual manera, se resalta la importancia de hacer uso de diferentes representaciones externas que se colocan con la intención de hacer pensar a los alumnos sobre una problemática y conocimientos matemáticos en particular que están implícitos en las representaciones. El usar múltiples formas de representar la misma problemática a partir de modelos matemáticos se convierten en recursos que permiten conectar el pensamiento de todos los alumnos con el pensamiento de la docente, siendo la docente la que abstrae para el alumno, en otras palabras, selecciona; y seleccionar es, decidir que deja fuera y qué deja adentro, es decir, el maestro selecciona los aspectos importantes en los que quiere que el alumno piense; el maestro le simplifica el mundo al alumno. En este sentido, para que el alumno pueda pensar disciplinariamente, la docente crea las condiciones, y selecciona lo que debe estar en su pensamiento, por eso la importancia del papel de la docente dentro de la actividad como guía y como mediadora (J. Alatorre Rico, comunicación personal, 14 de Agosto del 2023).

6.4. Visión holística del sistema matemático

Como ya se mencionó, en la presente investigación se busca que los alumnos logren tener una mirada holística e integrada sobre las matemáticas, las cuales les permitirán interpretar el mundo desde este ámbito disciplinar, ya que, tradicionalmente se presentan de manera fragmentada, únicamente repitiendo procedimientos sin contexto alguno, siendo que las matemáticas al ser abstractas permiten representar el mundo. Llegar a desarrollar esta visión integral no ocurre de forma automática, sino que desde el diseño de las secuencias didácticas tienen que planearse con antelación los elementos que promoverán en los alumnos formas de pensar complejas; es decir, el diseño no puede ser ingenuo, porque se construye un sujeto que piensa matemáticamente.

En cada una de las secuencias didácticas los alumnos tenían que poner en juego las dimensiones del proceso de matematización, partiendo de una situación real los alumnos: primero, tenían que identificar la problemática y las variables que les permitirían construir un modelo; después, transformar esas variables en el contexto de las matemáticas mismas para construir un modelo matemático, operar con el sistema y encontrar una solución; y finalmente, comunicar sus resultados, lo cual implicaba hacer una integración de todos sus procedimientos en el informe matemático, planteando argumentos que les permitieran justificar y validar sus modelos para resolver la problemática real. Por ejemplo, la SD del caso de enseñanza se implementó como última actividad del ciclo escolar e implicó que los alumnos integrarían los conocimientos matemáticos que habían utilizado a lo largo del ciclo escolar, y al mismo tiempo que pusieran en juego las dimensiones de la matematización; ante ello, los alumnos resaltan la importancia que tuvo el caso de enseñanza, como se observa en el siguiente comentario:

“El caso de enseñanza estuvo muy interesante porque tiene una contextualización muy buena y te ayudas precisamente de lo que ya aprendiste, ósea ya tienes derivada, ya tienes límites, ya tienes pendiente, entonces ya tienen como que todo armado y aparte te agregan un poquito más como para ya poder resolver los problemas, pero yo creo que el caso de la Palma es como un muy buen cierre, de decir, ya viste todo esto, te acabo de enseñar aquello, entonces aplícalo y volvemos a lo mismo, aplicación siempre.”

Testimonio de un alumno que cursó Matemáticas de VI,
Grupo focal, mayo 2022.

De igual manera, en los *informes matemáticos* podemos observar la *objetivación del pensamiento matemático integrado* que fueron desarrollando los alumnos a lo largo de la implementación. Los alumnos se vieron expuestos a elaborar un informe matemático previo al inicio de la implementación y un informe posterior a la misma, lo cual nos permitió hacer un contraste entre dichos informes para dar cuenta del cambio de pensamiento; ambos bajo el contexto de una actividad social y en la modalidad de caso de enseñanza, teniendo como objetivo crear un contexto complejo que demandaba el despliegue de conocimientos disciplinares, y fundamentalmente el despliegue de los objetivos de aprendizaje correspondientes al proceso de la matematización en los alumnos que cursaron Matemáticas VI. Cabe señalar que para ambas actividades se les presentó a los estudiantes los recursos (documentos oficiales, gráficas y tablas con datos), siendo la meta de la actividad elaborar un modelo matemático que capturará la problemática social real, usando el cálculo como herramienta matemática para responder y tomar un posicionamiento frente a la situación real.

En la primera actividad, titulada “La sobrepoblación, el caso de China”, los alumnos trabajaron en equipos y en este primer informe los estudiantes mostraron ciertas limitaciones, ya que únicamente identificaban el contexto y algunos aspectos matemáticos sin considerar un dato numérico. Realizaban una simplificación parcial del problema haciendo suposiciones elementales. En su interpretación no consideraban las variables necesarias para resolver el supuesto matemático y elaborar su modelo, por lo tanto, la modelización es muy precaria dado que pudieron identificar el modelo para representar la problemática, pero no especificar las variables que lo conforman y el procedimiento en el contexto matemático. Hay claras limitaciones para argumentar y comunicar los resultados porque existe una desintegración de la información y procedimientos matemáticos, el informe es muy breve y no cumple con las características de la estructura del informe matemático (ver figura 40).

Figura 40.

Informe matemático de la primera actividad “La sobrepoblación: el caso de china”. Equipo 2 de Matemáticas de VI, previo a la implementación.

La población en china, ¿Un problema?

Introducción

En 2021 las cifras oficiales reportaron que la población mundial estaba en 7,800 millones de habitantes, si nos ponemos a pensar esta cifra es realmente elevada, pero al momento de profundizar en cifra, es más alarmante que un solo país conforme el 18% de la población total, tal es el caso de China. La nación china ha sido durante los últimos años el país más poblado del mundo por mucha diferencia, esto llevó al gobierno chino a imponer restricciones respecto al número de hijos por pareja que se podían tener, limitándolos a solamente 1 en el año 1979, pero esto cambió en el año 2014 debido a que el gobierno chino se dio cuenta que su población se constituía principalmente por personas de la tercera edad, los cuales ya no generaban ingresos, y esto afecta a la economía ya que las retribuciones que hacían los trabajadores no alcanzaban a cubrir los gastos que tenía el gobierno, en este mismo año se aumentó el número de hijos que se podían tener por pareja a 2, pero al ver que no generaba un gran cambio en la situación, el presidente de china cambió la política permitiendo tener hasta 3 hijos por pareja, ya que no se vio un cambio en la tasa de natalidad del país.

Toda esta situación impulsó a nuestra profesora de matemáticas a alentarnos para crear un modelo matemático para darle una solución a esta problemática, siguiendo los criterios de que la población inicial de china está formada por 1400 millones de habitantes, suponiendo que la mitad son hombres y la mitad mujeres, y creyendo que forman una pareja que se apega a la política de los 3 hijos, enfocamos nuestro informe al resultado que traería las siguientes 3 generaciones (política de 3 hijos), basados en el siguiente modelo matemático.

La fórmula en la que nos apoyaremos es:

$$p=(pi/2)*3$$

p = población.

Según la fórmula que nosotros utilizamos, la población inicial es de 1400 millones de habitantes, para la primera generación la cifra aumentaría a 2,100 millones de habitantes, en la segunda generación la población sería 3,150 millones de habitantes y en la tercera generación sería 4,725

Formula primera población: $pp=(pi/2)*3$

Formula segunda generación: $ps=(pp/2)*3$

Fórmula tercera generación: $pt=(ps/2)*3$

Ya en el último informe, de la actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México” se observó un razonamiento mucho más avanzado y complejo. Se puede observar la dimensión correspondiente a la formulación e *interpretación* de la situación real, la cual ya descansa en la identificación de aspectos matemáticos relevantes, pueden simplificar la situación problema y desplegar las suposiciones necesarias para fincar su interpretación matemática, reconociendo que la problemática puede ser modelada matemáticamente (ver figura 41).

Figura 41.

Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.

Sobrepeso y obesidad, una problemática en México

Introducción:

El sobrepeso y la obesidad se define como la acumulación anormal o excesiva de grasa, la cual es muy perjudicial para la salud (OMS).

Esta problemática afecta a más de un tercio de la población mundial y es la responsable de casi 4.7 millones de muertes por año. México está dentro de los 5 países de latinoamérica con una prevalencia alta de sobrepeso y obesidad en adultos con casi el 43.9 %, siendo los hombres más propensos a tener estas enfermedades, el número de estas personas va aumentando conforme a la edad y los años.

Para este informe vamos a elaborar un modelo el cual nos va permitir representar y estimar el cambio de la prevalencia del sobrepeso y la obesidad en hombres adultos rurales.

Primero utilizaremos una gráfica donde se nos presenta la prevalencia de sobrepeso y obesidad en las diferentes poblaciones de México, esta prevalencia es el porcentaje de los hombres que presentan esta característica de sobrepeso y obesidad en un periodo determinado.

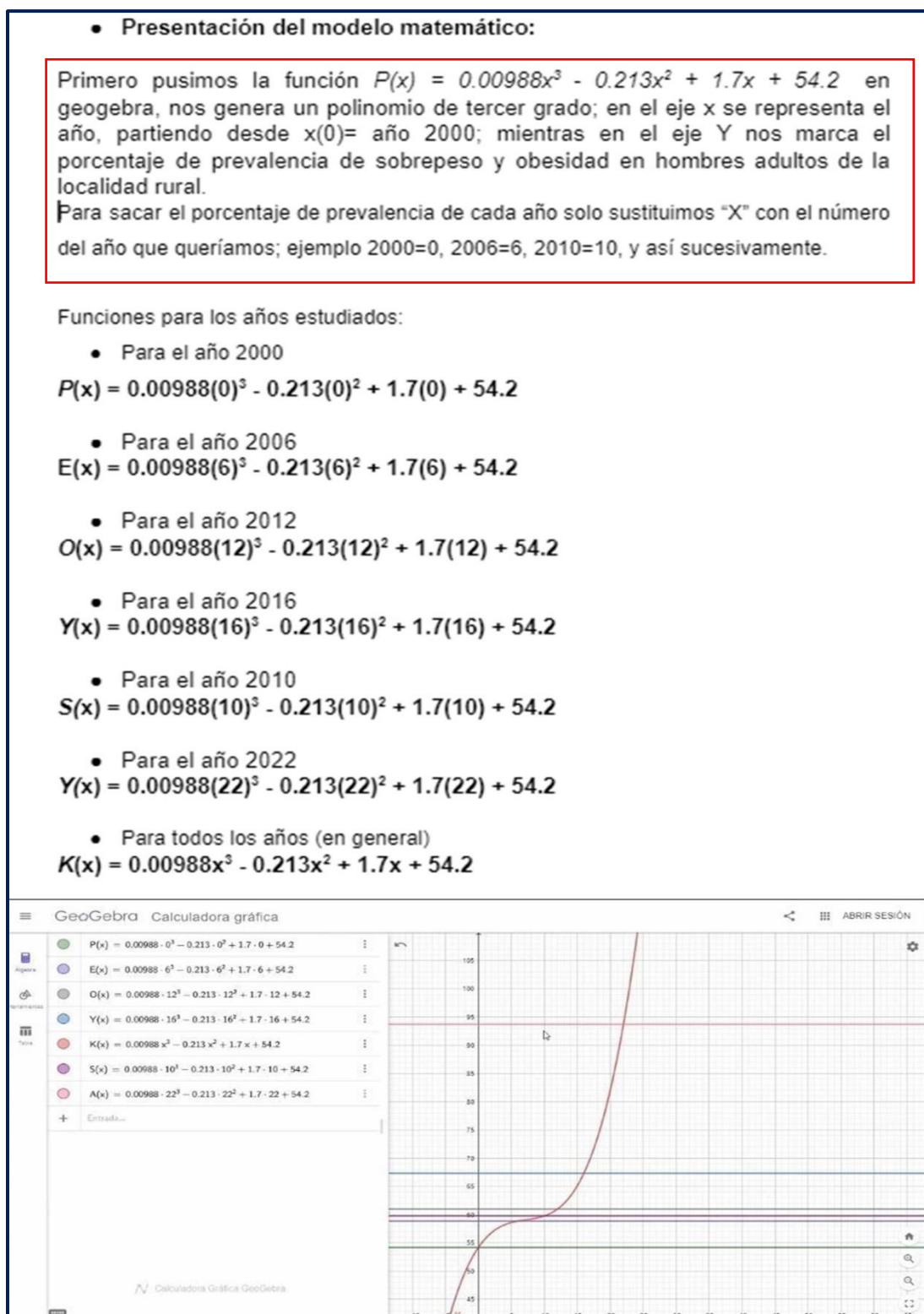
A partir de estos datos se hará un ajuste de los mismos, los cuales podremos utilizar en un modelo gráfico con ayuda de Geogebra y a partir de esta gráfica vamos a poder generar una razón de cambio el este grupo de hombres, esto en la categoría de los hombres adultos de 20 años y más, de esto se tomará en cuenta el periodo de tiempo del 2000 al 2016.

Posteriormente estimaremos el porcentaje de estos hombres para el 2010 y con la suposición de que estos datos se mantienen en la misma condición, estimaremos la prevalencia de estos hombres para el 2022

Así mismo, logran *traducir* el problema real a su lenguaje matemático para construir un modelo de carácter matemático (algebraico o geométrico) y resolverlo correctamente empleando el lenguaje formal y técnico, subíndices, notaciones y los elementos de la nominalización correspondientes a la derivada como razón de cambio. Utilizan diferentes formas para representar la problemática, es decir, usan gráficas, tablas y las funciones para interpretar y al mismo tiempo en prosa logran comunicar sus resultados, haciendo uso de herramienta tecnológicas como GeoGebra o Excel (ver figura 42).

Figura 42.

Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.



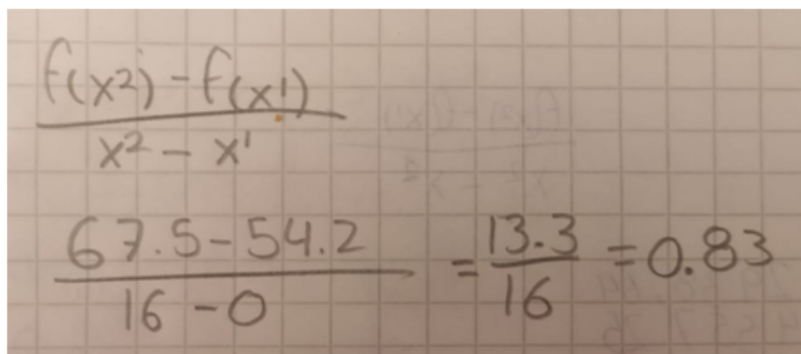
Posteriormente, en el momento de la *comunicación matemática*, proponen estimaciones a partir del modelo y lo contrasta con la problemática real. Logran formular explicaciones y argumentar con el lenguaje formal sus soluciones para validar su modelo y expresar de forma oral y escrita cuestiones matemáticas. En general, existe una integración de la información y procedimientos matemáticos y reconocen la importancia y uso del modelo matemático para la resolución de la problemática a partir de un supuesto matemático y tomar un posicionamiento (ver figura 43).

Figura 43.

Informe matemático de la segunda actividad titulada “Modelos matemáticos para mitigar los índices de obesidad en México”. Equipo 2 de Matemáticas de VI.

La razón de cambio entre los años 2000 a 2016 sería de 0.83%. Este dato lo obtuvimos utilizando la fórmula de la razón de cambio = $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Tomando el valor de x_1 como 0, haciendo referencia al 2000 y el valor de x_2 como 16, por el año 2016. Ya con estos valores tenemos que obtener los valores de las $f(x)$; para obtenerlos ocupamos los valores que nos daba el eje Y, lo que nos acabó dando como resultado que; $f(x_1)$ es igual a 54.2 y $f(x_2)$ era igual a 67.5.



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{67.5 - 54.2}{16 - 0} = \frac{13.3}{16} = 0.83$$

- **Validación del modelo:**

Según nuestro análisis de datos y de la fórmula nuestro modelo de prevalencia es completamente acertado, esto porque nuestro modelo sigue un cambio constante el cual se ve representado en las gráficas realizadas en GeoGebra.

Comparado con un modelo real, el modelo que tenemos se podría decir que sigue una línea funcional y real, tomando en cuenta que las fórmulas se usaron de manera correcta. Tal vez podría decirse que nuestro modelo podría ser más complejo si a este se le agregaran más variables para analizar, pero con las variables que contábamos este es completamente acertado y funcional.

Con lo anterior podemos constatar que el pensamiento matemático se objetivó en el informe matemático, en el cual se pudieron observar las tres dimensiones del pensamiento matemático: *interpretación*, *transformación* (trabajo matemático) y *comunicación matemática*. Por ello, la escritura disciplinar matemática fue fundamental dado que escribir en matemáticas implica que los alumnos hagan uso de las reglas y convenciones particulares y que usen todos los tipos de inscripciones, dado que escribir en matemáticas no solo es escribir una ecuación o solo números, implica también escribir en prosa, realizar inscripciones matemáticas como modelos gráficos que se deben leer para ser interpretados; la escritura organiza el pensamiento matemático y forma parte de la actividad societal misma. Por ello, podemos interpretar la escritura como una representación, porque refleja el pensamiento de los alumnos y, para que el alumno piense matemáticamente, la docente piensa para el alumno y esto lo hace a partir de la escritura.

Para concluir el presente capítulo, es importante resaltar que haber realizado la observación y un seguimiento sistemático en tiempo real de la implementación de las secuencias didácticas diseñadas, acompañado del diálogo reflexivo con las docentes de matemáticas, nos permitió dar cuenta de cómo funcionaron las actividades de enseñanza dentro del aula.

Al mismo tiempo, la perspectiva sociocultural como visión teórica, se utilizó como herramienta para guiar el diseño y análisis del entorno de enseñanza, y como premisa fundamental se consideraron de fondo a las actividades reales que están construidas a partir del sistema simbólico, las matemáticas, las cuales son una herramienta constitutiva de la misma actividad; en este sentido, para que el alumno desarrolle el pensamiento matemático, es imprescindible que entre en la actividad, que participe, haga uso del sistema simbólico que está en juego, pero su participación descansa en las diferentes formas de asistencia que la docente le dé a lo largo de la actividad; la mediación docente es fundamental porque es la que contribuye, promueve, sostiene y participa en el desarrollo del pensamiento especializado.

El ambiente complejo diseñado no fue ingenuo, partiendo de las premisas teóricas, la actividad, la mediación docente, el uso de recursos y la interacción entre pares, favoreció en los alumnos el surgimiento del pensamiento matemático especializado y la realización de acciones matemáticas para interpretar la realidad haciendo uso de las matemáticas como herramienta; y la ENP fue el espacio en el que en colaboración con las docentes se puso a disposición todo el conocimiento. En este mismo sentido, se crearon las condiciones para que los alumnos lograrán pensar disciplinariamente y en términos de entorno virtual coordinado esto es que el docente lo dinamizó y colocó a los alumnos en aquello que tenían que pensar. De igual manera, desde el

contrato didáctico se comenzó a resignificar en los alumnos la forma en la que deben aprender las matemáticas, porque en este marco que se construyó, los alumnos llegaban con una perspectiva de lo que para ellos eran las matemáticas, una idea muy tradicional, y al término de la implementación los alumnos reconocen la importancia de las matemáticas, su aplicación y la forma en la que surgieron a lo largo de la historia, además de la utilidad que tienen para resolver diferentes problemáticas del mundo, así como también en los docentes que se vieron implicados a lo largo de todo el proceso.

En suma, el análisis de la implementación del *Entorno Virtual Coordinado* nos permitió reconocer diversas implicaciones para pensar y plantear el rediseño de cada una de las secuencias didácticas. Por un lado, fue posible dar cuenta de las bondades del diseño del entorno de enseñanza, es decir, las cosas que sí funcionaron; al mismo tiempo, nos permitió reconocer las áreas de oportunidad, como por ejemplo, hacer cambios en el tipo de recursos que se utilizaron de manera virtual para poder hacerlo viable ahora de manera presencial en las aulas de clase y también hacer ajustes a algunas actividades e incorporar más recursos que propicien la escritura matemática.

A partir de las cuatro dimensiones abordadas a lo largo de este capítulo, en colaboración con las maestras de matemáticas, se reflexionó y se tomaron las decisiones pertinentes en el periodo interanual para realizar las mejoras pertinentes a las secuencias didácticas y contar con un rediseño de esta propuesta educativa; dichas decisiones se abordarán en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 7. IMPLICACIONES PARA EL REDISEÑO

Para continuar con las fases de la Investigación Basada en Diseño, en el presente capítulo se recuperan las implicaciones que tuvo la implementación para pasar a la fase del rediseño de la propuesta educativa, en la cual se consideran todos los elementos que permitirán mejorar la propuesta y conformar una nueva versión para una próxima implementación.

A partir del análisis de la implementación se ha podido ilustrar el impacto que tuvo el diseño y puesta en marcha de la propuesta educativa del entorno de enseñanza virtual coordinado en el desarrollo del pensamiento matemático especializado en los alumnos que cursaron Matemáticas VI y la ENP fue el espacio en el que en colaboración con las docentes se puso a disposición todo el conocimiento. Cabe señalar que, la virtualidad abrió otras oportunidades para que a partir del diseño de los ambientes de aprendizaje en bachillerato, basado en la investigación educativa, se pudiera ofrecer una propuesta curricular para superar a mediano plazo los bajos resultados académicos; orientar la práctica docente hacia los aprendizajes esperados para contribuir al perfil de egreso; y promover la conformación de comunidades reflexivas; y paulatinamente realizar el ajuste y refinamiento de la propuesta curricular, para el logro de los objetivos de aprendizaje establecidos en el programa de la ENP, asegurando que el currículo diseñado se concrete en las prácticas educativas dentro del aula.

Desde las premisas teóricas de la presente investigación, el ambiente de aprendizaje debe construir al sujeto, por lo tanto, el diseño de dicho ambiente no fue ingenuo y estuvo intencionado de tal manera que propició el despliegue de las acciones matemáticas que conforman el proceso de matematización. Por ello, fue importante observar en tiempo real cómo sucedían cada una de las actividades de enseñanza dentro del aula, para recuperar cada uno de los aspectos que funcionaron y distinguir las mejoras que puede tener el entorno, y de igual manera, tomar en cuenta las cosas que hicieron falta y que será necesario incorporar en la fase del rediseño de la propuesta para hacerla viable; todas las mejoras están en función de potenciar el pensamiento matemático.

A partir del diálogo entre las docentes y los investigadores educativos, las categorías que se consideraron para la fase del rediseño estuvieron enmarcadas en el enriquecimiento de las Secuencias Didácticas, las cuales son: la estructura de la actividad, la meta socialmente establecida, el uso de múltiples recursos y la guía docente. Al mismo tiempo, implicó realizar ajustes en la organización temporal de las secuencias (plan anual). En ese mismo sentido, surgieron

consideraciones generales para la investigación educativa (ver figura 44). En los siguientes apartados se comentarán dichos aspectos.

Figura 44.

Proceso rediseño del entorno de enseñanza y aprendizaje.



7.1. Enriquecimiento del Entorno Virtual Coordinado: Secuencias Didácticas

En este apartado se precisan las categorías principales en las que se han centrado los ajustes de la propuesta educativa que hemos analizado e implementado de manera virtual y, con ello, tomar las decisiones pertinentes para lograr un nuevo rediseño que pueda ser viable, considerando que en una nueva implementación se realizará de manera *presencial* en el aula de clases, siendo el docente quien gestionará cada una de las actividades haciendo uso de la plataforma de Classroom. Es decir, las sesiones que anteriormente se realizaron en línea haciendo uso de la plataforma de zoom, ahora se realizarán de manera presencial en el aula de clases de la ENP y las sesiones asincrónicas se gestionarán ahora desde la plataforma de Classroom en donde la docente realizará las asignaciones y notificaciones que se requieran de acuerdo a la estructura de la actividad que esté implementando.

Por lo anterior se resaltan a continuación las categorías en las que se ha observado una necesidad para poder rediseñar el entorno considerando la presencialidad pero sin dejar de lado las bondades de que ofrece la virtualidad: las secuencias didácticas, su estructura y la meta de ésta; los recursos; y, la guía del docente; así como la organización temporal de las mismas.

Secuencias didácticas

Las secuencias didácticas implementadas están integradas como un todo debido a que están interconectadas unas con otras a pesar de tener diferentes modalidades y temáticas, es decir, el diseño de todas las secuencias didácticas está en función de los objetivos de aprendizaje que se espera desarrollen los alumnos a lo largo del ciclo escolar, y son estos objetivos los que les dan unidad a las Secuencias Didácticas.

Cada una de las actividades de enseñanza o secuencias didácticas deben permitir que el alumno interprete la realidad desde la disciplina de las matemáticas, haciendo uso de las inscripciones del mismo sistema; lo cual es posible dado que no hay ninguna acción de la actividad que no esté pensada para favorecer el pensamiento matemático. A continuación, se mencionan los ajustes que se tomaron en cuenta para el rediseño de la estructura de la actividad y la meta socialmente establecida.

- *Estructura de la actividad*

Como se ha mencionado, la estructura de la actividad consiste en cada uno de los pasos a seguir, los cuales están pensados en función del proceso de matematización como objetivo de aprendizaje, y se consideraron los siguientes ajustes:

En primer lugar en cada secuencia didáctica se dejará una *nota introductoria* para la maestra, para que en el momento de la contextualización se aborde la problemática de la actividad haciendo un vínculo con las matemáticas con las que se relaciona, y que desde el inicio los alumnos reconozcan las matemáticas que van a usar para resolver la problemática planteada.

En segundo lugar, se incluirá el *momento adidáctico* de forma más consistente, momento en el que los alumnos podrán explorar los recursos que se elijan estratégicamente para la actividad, recursos como: modelos matemáticos o artículos expertos; con la finalidad de que los alumnos se familiaricen con las matemáticas que están implicadas en la problemática de la actividad y reconozcan cómo se aplican de manera profesional. De igual manera, el establecer este momento adidáctico, después de la contextualización de la actividad, le permitirá a la docente explorar sobre los conocimientos previos con los cuales cuentan los alumnos al inicio de la actividad y dirigir su pensamiento hacia lo que requiere que piensen en términos matemáticos, por ejemplo, si abordan

el tema de las cónicas, poder guiar el uso del lenguaje matemático en relación al tema, los tipos de cónicas, las elipses, hipérbolas y parábolas, así como sus características y el para qué les puede servir en la actividad.

En la mayoría de las Secuencias Didácticas será importante considerar de manera intencional un *momento de elaboración del modelo matemático en papel*, para que todos los alumnos lo puedan realizar y la docente observe la forma de pensar de los alumnos, dado que la presencialidad da la oportunidad de observar las elaboraciones de los alumnos en hojas milimétricas o apoyándose de otros materiales en concreto. Por ejemplo, como se mencionó, en la SD del caso de enseñanza de los volcanes, algunos de los alumnos realizaron la estimación del área de la lengua de lava imprimiendo el gráfico en una hoja cuadriculada, lo cual no estaba establecido en la SD, y posteriormente construyeron su polígono en GeoGebra y pudieron hacer un contraste entre ambos modelos para validar lo que habían realizado en papel: Paso 1: Contextualización; Paso 2: Momento adidáctico; Paso 3: realizar la estimación en papel; Paso 4: hacer la representación en GeoGebra; Paso 5: Contrastar ambas representaciones y validar tus resultados; Paso 6: Profundización; y Paso 7: Comunicación matemática.

Otro aspecto importante para ajustar es el *momento de profundización* para propiciar un momento en el que los alumnos puedan compartir en plenaria sus propuestas iniciales de modelos que van construyendo, haciendo uso del lenguaje matemático formal, de tal manera que puedan reconocer si su modelo es válido o requiere de un ajuste. Momento que también permitirá que la docente se asegure de que los alumnos ya han comprendido el modelo matemático que están utilizando y también si se han apropiado del lenguaje matemático.

De igual manera, se ha considerado reforzar el *momento de la comunicación matemática*, en donde los alumnos realizan la entrega de su artículo matemático y lo presentan de manera verbal, para que los alumnos compartan sus argumentos y reflexiones a las que llegaron en la actividad y puedan justificar si su modelo es viable para atender la problemática en el plano real.

Por último, para mejorar la estructura de las actividades, consideramos importante incorporando más aspectos históricos sobre el surgimiento de las matemáticas, investigando documentales y textos relacionados con el conocimiento matemático que los alumnos estén abordando en la actividad de enseñanza, esto porque la historia de las matemáticas permite que los alumnos se den cuenta de que las matemáticas surgieron bajo actividades sociales y que le han servido al hombre para resolver diversas problemáticas, lo cual permite que cambien su perspectiva respecto a las matemáticas.

- *Meta de la actividad*

Como ya se mencionó, todas las acciones de la actividad de enseñanza deben estar orientadas al logro de la meta de la actividad haciendo uso de las matemáticas, por lo que en todas las secuencias didácticas se incorporará como meta o producto complejo, la elaboración de un artículo matemático en lugar de un informe matemático, para favorecer la escritura matemática y que los alumnos puedan integrar todos sus modelos matemáticos ante un contexto o problemática de la realidad. Para ello, se realizaron recursos que los alumnos podrán utilizar para saber cómo construir un artículo matemático:

1. *Formato para elaborar artículo matemático.* Se realizó el ajuste en el formato considerando ahora la estructura de un artículo matemático, tomando en cuenta que la actividad societal es la de investigador matemático, y es allí a donde queremos acercar a los alumnos, a que escriban matemáticamente; dado que escribir es pensar matemáticamente. En este mismo formato, los alumnos podrán identificar qué es un artículo matemático, qué es un modelo matemático y se especificarán cada una de las características que debe contener su artículo matemático.
2. *Ficha de argumentación.* En esta ficha se les mostrará a los alumnos las características que tienen que considerar para construir un argumento matemático y en el momento de la actividad ellos puedan identificar que no solamente debe considerar las inscripciones matemáticas (ecuaciones, gráficas o cualquier otro modelo utilizado), sino que este debe estar acompañado de argumentos escritos en prosa que les permita explicar su modelo de manera más precisa.

El artículo matemático es importante, porque desde nuestra perspectiva el pensamiento está materializado en la escritura, está objetivado. Escribir es pensar matemáticamente y es en esta producción original en donde podemos dar cuenta de la forma en la que se integra el pensamiento de los alumnos y cada paso de la secuencia didáctica está encaminado al logro del mismo.

Uso intencional de recursos y herramientas dirigidas al pensamiento matemático

Es importante considerar un ajuste en los recursos que se seleccionan a partir de los ajustes de la estructura de la secuencia didáctica, ya que estos al igual que los pasos de la actividad, también tienen una intención al ser utilizados, estos deben estar pensados para favorecer el despliegue del pensamiento matemático especializado. Por ello, los ajustes están centrados en la incorporación de los siguientes recursos:

- *Modelos matemáticos de expertos.* Estos son importantes ya que permiten que los alumnos puedan explorar un modelo que ya un grupo de investigadores en matemáticas utilizó para explicar una problemática. Desde nuestra perspectiva es relevante porque si queremos favorecer el pensamiento complejo en los alumnos preparatorianos es imprescindible hacer uso de recursos reales, textos y modelos que han elaborado los matemáticos que trabajan en diferentes contextos como la vulcanología, la geofísica, la aeronáutica, entre otras áreas disciplinares, en las que su trabajo es una necesidad.
- *Incorporación de artículos expertos.* Al igual que en el caso de enseñanza, se considera importante integrar en todas las secuencias didácticas un artículo ya publicado por expertos en la disciplina, para que los alumnos puedan ser testigos de la forma en la que se escribe en matemáticas, que reconozcan qué hace un matemático y al mismo tiempo se den cuenta del tipo de producciones que ellos pueden llegar a elaborar.
- *Escritos matemáticos antiguos.* Estos están pensados para que los alumnos reconozcan cómo se escribían las matemáticas en la antigüedad y el tipo de inscripciones que se hacían para poder comunicar sus postulados, teoremas y axiomas.
- *Uso de GeoGebra y Excel.* El uso de estas herramientas tecnológicas es importante porque ambas les permiten a los alumnos construir modelos algebraicos y gráficos para contrastarlos con los modelos elaborados en papel, de tal manera que estas herramientas les son de utilidad para validar sus propuestas y elaborar interpretaciones matemáticas.
- *Diccionario matemático y tabla de signos y símbolos matemáticos.* La incorporación de estos recursos está planeada porque las matemáticas al igual que otras disciplinas ocupan un lenguaje particular y se requiere el uso formal de dicho lenguaje, además de que la intención no es que los alumnos memoricen cada contenido matemático, sino que usen el

diccionario para conocer las diferentes definiciones y procedimientos, reconociendo para qué sirven y que aprendan a utilizarlos bajo el contexto de la actividad social en la que participan.

- *Uso de objetos matemáticos (objetivaciones concretas).* En la presencialidad la docente puede favorecer el uso de diferentes objetos, como: la cinta métrica, el juego geométrico, el metro, hojas milimétricas, etc., para que los alumnos puedan solucionar las problemáticas. Por ejemplo, en la SD de Básquetbol necesitarán hacer uso de un metro o cinta métrica para medir la distancia y la altura desde la cual realizarán el lanzamiento del balón para lograr un tiro perfecto.
- *Producciones de los alumnos.* A lo largo de la implementación de la primera versión de la propuesta se recuperaron las producciones de los alumnos, modelos, informes matemáticos y videos, los cuales servirán como recursos para los nuevos alumnos que cursen la asignatura de matemáticas MVI, área I y II.

En la presencialidad es importante tomar en cuenta que no todos los alumnos cuentan con celular y/o con datos móviles para poder revisar los recursos; por ello, será necesario seleccionar los recursos necesarios para tenerlos impresos en tamaño cartulina o papel bond y que la docente pueda utilizarlos en el momento de la actividad en la que lo requiera. Cabe señalar que todas estas decisiones y ajustes se realizaron en colaboración con las docentes, y recuperamos la siguiente sugerencia:

“Cuando estábamos en la virtualidad podíamos mostrar y compartir pantalla de los modelos y otros recursos para la actividad, pero en lo presencial eso no se puede y entonces hay que pensar en colocarlo de manera previa a la clase para que los alumnos puedan revisarlo o imprimirlo con anticipación.”

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Febrero del 2023.

Guía docente para promover el pensamiento matemático

Otra de las categorías que han tenido ajustes es la forma en la que la docente guiará las acciones de los alumnos, ya que estos también deben estar pensados para el logro de los objetivos de aprendizaje. El trabajo en el aula y por equipos permite que la docente pueda realizar una

observación más precisa y detallada de las acciones que realizan los alumnos y de esta manera puede ofrecerle ayudas específicas para atender alguna dificultad que se les presente a los equipos.

En el caso de los *motores cognitivos* será importante replantear algunos de ellos en función de los recursos que se incorporen para que la maestra dirija la actividad y el pensamiento de los alumnos hacia el conocimiento matemático que pondrán en juego en cada actividad de enseñanza. De igual manera, la docente ahora aprovechará el pizarrón para realizar las *representaciones* que necesite para hacer pensar a los alumnos sobre el mismo modelo o para *modelar* alguna de las posibles soluciones a las que pueden llegar los alumnos. En el caso de que los alumnos necesiten compartir alguna de sus soluciones con todo el grupo, también podrán compartirlo.

Ajustes en la organización temporal de las secuencias

Por último, se realizaron los ajustes en la organización temporal para la implementación de las secuencias, organizando cada una en el plan anual. Para ello, ha sido importante considerar los tiempos en los que se realizaron las secuencias didácticas el ciclo anterior, tomando en cuenta los días feriados y las fechas de eventos conmemorativos para que la docente pueda implementar todas las secuencias didácticas en tiempo y forma y que éstas no se vean interrumpidas.

El plan anual se convirtió en nuestra herramienta para dialogar con las docentes sobre la distribución de las secuencias a lo largo del ciclo escolar, tomando en cuenta la potencialidad de cada una de éstas para decidir cómo aprovecharlas de tal manera que su implementación favorezca el pensamiento matemático de los estudiantes preparatorianos.

En suma, cada una de las implicaciones mencionadas anteriormente nos han permitido pensar en lo que se puede cambiar y mejorar del entorno de enseñanza y rediseñar una nueva versión para una próxima implementación, ahora tomando en cuenta la presencialidad, ya que dicha implementación se está realizando actualmente en el ciclo escolar 2023-2024. Es importante reconocer que diseñar así, con esta metodología y teniendo enfrente los objetivos de aprendizaje hizo que la propuesta fuera viable y positiva en su primera implementación, el diseño funcionó y superó las dificultades que se presentaron en la virtualidad gracias al trabajo colaborativo que se realizó con la docente de matemáticas y el equipo de investigación para que el diseño pudiera llevarse a cabo como estaba pensado, considerando siempre el contexto de la ENP.

7.2. Consideraciones Generales

El plantear una propuesta de diseño de un entorno de enseñanza que realmente ofrezca oportunidades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que cursan el nivel Bachillerato, conlleva un proceso en tiempo real de trabajo colaborativo y sistemático entre todos los agentes implicados en dicho proceso, maestros, alumnos e investigadores educativos; con ello, se logra beneficiar tanto a los docentes que implementan la propuesta educativa para que cuenten con estrategias innovadoras que les permita enriquecer su práctica, y al mismo tiempo lograr que los alumnos de este nivel educativo alcancen los objetivos de aprendizaje establecidos en el currículum; y por otro lado, los investigadores educativos pueden contar con evidencias del proceso de desarrollo del pensamiento matemático. Por ello, en el presente apartado se comentarán las consideraciones que recuperamos a lo largo de todo el proceso que implicó la elaboración del presente trabajo de tesis.

Hablar de matemáticas y sobre todo del para qué se enseña matemáticas es un tema complejo, aunque a lo largo de la historia las matemáticas han formado parte del desarrollo de la humanidad y en la actualidad permite atender múltiples problemáticas que comprenden ámbitos sociales, económicos, biológicos y fenómenos físicos, por mencionar algunos. A pesar de ello, la enseñanza de las matemáticas en la actualidad presenta grandes dificultades en México ya que los estudiantes tienen un bajo rendimiento en matemáticas, lo cual se puede constatar en los resultados obtenidos en las pruebas nacionales e internacionales; de igual manera, se crean reformas educativas y se actualizan los planes y programas de estudio para mejorar el nivel académico de los estudiantes pero no se logran resultados favorecedores.

Recuperar esta información es importante porque cada una de las evaluaciones que se realicen para conocer el nivel de aprendizaje con el que cuentan los alumnos tienen que estar ligadas a la mejora, es decir, hacer una revisión profunda de lo que funciona y lo que no para mejorar las alternativas pedagógicas, y de igual manera considerar el acompañamiento y trabajo colaborativo con los docentes expertos en la disciplina, porque son ellos los que concretan el currículo en el aula, por eso una consideración importante es que los docentes formen parte del diseño del plan o propuesta educativa para que puedan reflexionar sobre su práctica a partir del mismo y puedan implementar las mejoras de manera pertinente, siempre teniendo enfrente los objetivos de aprendizaje que se espera alcancen los alumnos.

Otro aspecto a resaltar es que en la actualidad la tecnología ha tenido un impacto muy importante en la educación y la virtualidad tiene un papel muy relevante al hablar de los Entornos Virtuales de Enseñanza Aprendizaje, los cuales cuentan con bondades particulares pero en la mayoría de los casos son espacios dinámicos en la red en los que prima la tecnología y el docente no participa de manera activa en el proceso de enseñanza y no se favorece la interacción entre los alumnos; desde nuestra perspectiva consideramos los entornos virtuales desde una mirada más amplia y es pertinente dar respuesta a las dificultades o limitaciones que se presentan en los entornos de enseñanza virtuales tradicionales como los MOOC o los entornos con modalidad híbrida.

En la presente investigación se propuso como alternativa pedagógica el diseño de un entorno de enseñanza virtual, la cual se conceptualizó como *Entorno de Enseñanza Virtual Coordinado (EEVC)*, cuya aproximación da cuenta de la forma en que se pueden coordinar actividades de aprendizaje entre los espacios sincrónicos y asincrónicos, gestionados por los docentes. Alternativa pensada para favorecer el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes preparatorianos. En este sentido, la tecnología nos abrió oportunidades para poder acercar a muchos de los alumnos al conocimiento desde otra perspectiva, es decir, nos dio la posibilidad de favorecer la socialización del conocimiento y utilizar recursos tecnológicos que enriquecen el aprendizaje de las matemáticas y que además permiten que los alumnos desarrollen una de las capacidades establecidas en el currículo, la cual es el uso de la tecnología para modelar matemáticamente ciertas problemáticas.

Para llevar a cabo el diseño del entorno complejo fue importante partir de las premisas teóricas y metodológicas que guiaron esta investigación, resaltando principalmente que las capacidades de pensamiento son de origen social y surgen dentro de actividades sociales, y que el pensamiento especializado está mediado por múltiples representaciones semióticas. Por ello, en Aleph5, creamos las condiciones para que desde la escuela se ofrezcan oportunidades y se acerque a los alumnos a la mirada universitaria y profesional desde el campo disciplinar de las matemáticas. Teniendo presente que los procesos de enseñanza y aprendizaje son complejos y de naturaleza cambiante y dinámica, y ante ello, hay que hacer que la propuesta responda a esas demandas.

Por lo anterior, se recupera el objetivo de la presente investigación el cual fue, diseñar un entorno virtual de enseñanza que desde su complejidad favoreció el aprendizaje de las matemáticas. A continuación comentaremos cómo la complejidad del ambiente y sus diferentes elementos

favorecieron el desarrollo del pensamiento matemático, resaltando el papel del docente a lo largo de todo el proceso y las posibilidades que brinda el entorno.

En primer lugar, para que el entorno de enseñanza virtual funcionará y promoviera el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de la ENP, se pensó, diseñó y planeó en colaboración con la comunidad de docentes quienes son los encargados de poner en marcha la iniciativa dentro del aula, son los mismos docentes los que tienen agencia y control sobre el entorno de enseñanza virtual. Su participación fue importante para construir diálogos cogenerativos y poder tomar decisiones respecto a los objetivos de aprendizaje que se buscaría lograr con las actividades de enseñanza, los cuales estuvieron dirigidos en términos del proceso de la matematización. Al mismo tiempo, la participación activa de las maestras en el diseño del entorno nos permitió conocer su perspectiva sobre la enseñanza de las matemáticas y compartir la perspectiva del proyecto desde la que estaba pensado el diseño y a lo largo de la escritura de las secuencias didácticas pudieran tener sentido cada una de las dimensiones que se consideraban; con ello, se logró construir una mirada compartida de la perspectiva teórica y de los objetivos de aprendizaje.

El establecer un trabajo cercano, particularmente con la maestra Eva quien implementó la propuesta, también permitió entender los objetivos de aprendizaje que se busca lograr en el bachillerato, y en particular en la asignatura de matemáticas de Matemáticas de VI de área II, en la cual los alumnos abordan temas relacionados con el cálculo diferencial e integral. Es relevante mencionar que en la escritura de cada una de las secuencias didácticas participaron activamente la docente y la investigadora educativa, ambas seleccionaron las actividades sociales, revisaron la información, las temáticas establecidas en el plan, los recursos que se utilizarían e incluso los motores cognitivos que se usarían en cada paso de la actividad. La docente estuvo implicada en todo el proceso de diseño y en sesiones posteriores a la implementación se recuperó el siguiente comentario:

Mtra. Eva: “Me siento satisfecha y orgullosa porque la secuencia de aviones y volcanes (caso de enseñanza) son de nuestras mejores secuencias.”

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Mayo del 2023.

Otro resultado, también muy importante del trabajo colaborativo entre docentes e investigadores educativos, psicólogos y pedagogos, fue poder establecer una comunidad interesada y preocupada en contribuir y crear oportunidades de enseñanza de calidad para los estudiantes de

bachillerato y al formar parte del proyecto los maestros se fueron apropiando de la metodología y premisas teóricas, lo cual les ha permitido participar de manera activa en ponencias para compartir lo que han realizado en el proyecto. Formar parte del proyecto permitió crear un sentido de identidad, tal como lo comenta una de las maestras que forma parte del proyecto, aunque ella imparte otra asignatura:

“El trabajo colegiado entre docentes e investigadores es muy importante porque como parte de Aleph nos da identidad, como una comunidad; y convertimos esto de la virtualidad en una oportunidad.”

Testimonio docente tomado de una sesión de trabajo. Marzo del 2023.

En suma, el trabajo en equipo a través de los diálogos cogenerativos representó un reto muy importante y podemos reconocer tanto la importancia del papel del docente experto en matemáticas para poder conocer la disciplina a profundidad, como el papel del investigador educativo en la construcción de las comunidades educativas para propiciar espacios en los que los docentes puedan reflexionar sobre su práctica, reorientarla y enriquecerla y con ello, lograr formar sujetos que piensen matemáticamente.

Ahora bien, en este trabajo fue importante comprender el bachillerato a nivel macro a partir de la revisión documental de investigaciones, de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), la propuesta del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM) y los planes y programas de la ENP. Pero hacer investigación no sólo implica revisar los planes y programas educativos, va más allá, es reconocer las condiciones reales del contexto en el que se implementa la propuesta educativa, a los alumnos y la comunidad de maestros para construir cambios productivos, por eso fue importante explorar el contexto de la ENP y al trabajar en colaboración con las docentes se pudieron reconocer las tensiones y los obstáculos con los cuales se enfrentaban dentro de la institución y revisar las posibilidades y las vías alternativas para diseñar el entorno de enseñanza virtual.

Como elementos centrales para el diseño del entorno de enseñanza, se consideraron la disciplina de las matemáticas que se quiere enseñar, al docente y a los alumnos, los cuales forman parte de la situación educativa dentro del contexto de la ENP. Estos elementos contribuyeron en el desarrollo de las capacidades de pensamiento matemático.

En el caso de la disciplina de matemáticas, se consideró importante presentar el segmento curricular de las matemáticas de la ENP desde una mirada holística, es decir, aunque las materias están organizadas por etapas (introdutoria, profundización y propedéutica) no son en lo individual, todas juntas contribuyen al pensamiento matemático en el transcurso de todo el bachillerato. Como ya se ha mencionado, para fines de este trabajo de tesis el diseño del entorno de enseñanza para favorecer el proceso de matematización en alumnos preparatorianos se centró en la asignatura de Matemáticas de VI (área II), asignatura relevante porque forma parte del nivel propedéutico del bachillerato, y la cursan únicamente los alumnos que tienen pensado dirigir sus estudios en particular a las Ciencias Biológicas y de la Salud. Por esta razón consideramos este momento como la última oportunidad que tienen los alumnos para desarrollar capacidades de pensamiento especializadas que les permitan enfrentar la vida profesional. Para implementar la asignatura fue importante contar con la participación de docentes quienes son profesionistas expertos en esta disciplina, es decir, son matemáticos; y particularmente se comparte con ellos la mirada hacia el logro de los objetivos de aprendizaje establecidos en el currículum para lograr que los alumnos sean capaces de matematizar. Por último, y no por eso menos importante, se considera a los alumnos porque son ellos los agentes implicados en este diseño, son los que se benefician de las bondades de esta propuesta, y para hacerla viable se consideraron las características socioeconómicas y de conectividad de los estudiantes debido a la problemática socio-histórica que enfrentamos en ese momento, lo cual requirió que los alumnos tomaran sus clases desde casa y se realizarán ajustes muy particulares para que pudieran aprovechar todos los recursos que se les presentaron para aprender matemáticas.

Como resultado de la implementación, es importante resaltar que el diseño del entorno de enseñanza también permitió un cambio de perspectiva de los alumnos frente a las matemáticas. Al inicio del ciclo escolar no todos los alumnos tenían interés en las matemáticas aunque sabían que el curso era necesario por el área que ellos habían elegido. En un inicio esperaban tener una clase tradicional en la que sólo les asignan ejercicios que deben resolver y entregar, pero desde el contrato didáctico los alumnos reconocieron la importancia de las matemáticas en diferentes ámbitos y que también requiere de una escritura especializada en la que se concrete todo el proceso de pensamiento. Se dieron cuenta que en las actividades del proyecto Aleph5 la dinámica de trabajo sería distinta, y con la incorporación de la escritura en matemáticas pudieron comprender los aprendizajes que se esperaba que desarrollaran al participar en dichas actividades y al mismo tiempo pudieran reconocer que las matemáticas les serían de utilidad en su carrera profesional. En

este sentido, fue muy alentador recuperar la voz de los alumnos quienes comentan sobre su experiencia al participar en todas las actividades haciendo comentarios como el siguiente:

“Yo concuerdo con la mayoría de los compañeros. A mí me gustó mucho trabajar de esta manera las matemáticas y me acuerdo muchísimo que al principio del año cuando nos propusieron el proyecto, todo mi grupo estaba así como de, suena muy mágico, suena muy bonito, lo romantizan mucho y, poco a poco, al menos en mi caso, yo me fui dando cuenta que sonaba muy romántico pero al menos lo cumplían, recuerdo que el caso anterior era con historia, pero en este caso con matemáticas lo supieron aplicar muy bien, las secuencias ayudan muchísimo a entender los temas y entender la aplicación, eso es algo a lo que yo le doy muchísimo valor al proyecto porque entiendes una aplicación de las matemáticas, quizás en cosas que uno no se imaginaba. A nosotros nos pusieron una secuencia en la que teníamos que predecir tiros de básquet y yo no cabía en mi cabeza decir: cómo puedo predecir un tiro de básquet con las matemáticas. Ósea, es una cosa que uno se imagina y dice, bueno sí tiene variables y tiene cosas allí, pero hacerlo ya práctico, cambia muchísimo el chip y la manera de pensar y ver las matemáticas. Creo que es un valor muy importante el que dan porque ya no es que tengas que hacer cuarenta ejercicios del mismo tema y estar toda la noche entendiendo y si te atoraste ni modo, al día siguiente no hubo tema, no. Y los profesores muy, muy buenos, en mi caso la maestra Eva resolvía dudas muy, muy seguido, nos ayudaba y nos apoyaba muchísimo y bueno sería eso, que en verdad las secuencias nos ayudaban muchísimo a entender los temas mucho más rápido, de una forma mucho más didáctica y que fuera mucho más dinámico, para mí la experiencia fue muy buena.”

Testimonio de un alumno que cursó Matemáticas de VI,
Grupo focal, mayo 2022.

En síntesis, con esta propuesta de diseño del entorno de enseñanza virtual, en el proyecto Aleph5 tenemos la intención de ofrecer una mirada teórica de los elementos que permiten que surjan las capacidades de pensamiento complejo especializado en matemáticas con el anhelo de ofrecer oportunidades para que desde la escuela, las docentes hagan inteligible las matemáticas

para los alumnos y que puedan usarlas en todos los ámbitos, social, cotidiano, profesional y público; y con ello transformar la institución.

Cabe señalar que por todo lo anterior el proyecto se nombra *Aleph5*, porque tiene que ver con la mirada teórica que subyace al mismo, tomando como referencia la idea del Aleph de Borges, que en uno de sus cuentos narra que encuentra en el Aleph, un punto en donde se reúne todo el conocimiento de una sola vez y es ahí en donde se concentra y menciona: “...*si todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten, ¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca?*” En este sentido, en *Aleph5* creamos las condiciones, los espacios que posibiliten los saberes de los alumnos, abriendo la ventana al conocimiento, proponiendo nuevas alternativas pedagógicas que posibiliten la construcción de saberes socialmente productivos. En el campo educativo a nivel bachillerato en matemáticas, el reto es formar sujetos matemáticos comprometidos, capaces de reflexionar y analizar sobre su contexto socio-histórico, sujetos que se apropien de los saberes y significados que les permitan posicionarse frente a las problemáticas que surgen en su entorno (realidad); los alumnos que cursen la preparatoria van a pasar por todas las materias que se diseñen con los profesores en matemáticas y se les pondrá todo el conocimiento enfrente haciendo uso de diferentes símbolos que les permita interpretar el mundo desde la disciplina de las matemáticas. Siendo importante considerar en el espacio de formación, el contexto histórico social concreto. Ante esto, es importante reconocer a la educación como el arte de saber encontrarnos, aprovechando también la tecnología que media las relaciones entre el docente y el alumno, pero no como mediaciones en sí, sino como oportunidades pedagógicas.

Este trabajo de tesis fue muy importante para tener un panorama de nuevas propuestas que sean viables para asegurar la formación integral de los estudiantes que cursan el bachillerato y que los aprendizajes que se desarrollen les puedan ser de utilidad para su vida individual y social. También con la intención de poder transformar la institución educativa, lo cual resulta muy complejo, pero que en la medida de lo posible nos permite contribuir con la mejora educativa. Si bien es cierto, quedan elementos pendientes como el diseño de todas las secuencias didácticas para las materias de matemáticas de VI correspondientes a las áreas III, IV y estadística y probabilidad y el rediseño para las secuencias de matemáticas de IV y V. Al mismo tiempo, hacer un análisis a profundidad del desarrollo del pensamiento matemático, lo cual se podrá abordar en otro trabajo de investigación.

REFERENCIAS

- Acebo-Gutiérrez, C.J., Rodríguez-Gallegos, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica*, 40(1), 13-29. <https://doi.org/10.14483/23448350.16068>
- Alatorre, J. (2008). *Entornos para el aprendizaje de las matemáticas en preescolar*. Programa de Prácticas Integrales. división de Estudios Profesionales. Coordinación de formación en la Práctica. UNAM.
- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Pp. 119-127. Santander: SEIEM.
- Alvarado, C., Sánchez, L. y Lugo, M. (5-10 de mayo del 2019). *Actualización de los programas de estudio de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: retos y horizontes* [Presentación en papel]. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME).
<https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1035/161>
- Anderson, T. (2005). Design-based research and its application to a call center innovation in distance education. *Canadian Journal of Learning and Technology*, 31(2), 69-84.
<https://doi.org/10.21432/T26K60>
- Angulo, R. G. (2019). Currículum y Discurso Docente en Matemática Educativa en México. En M. Á., Campos Hernández (Coord.). *Discurso, representaciones y conocimientos en el campo de matemática educativa*, 211-275. Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación. Serie: IISUE. UNAM.
<http://www.iisue.unam.mx/publicaciones/libros/discurso-representaciones-y-conocimientos-en-el-campo-de-matematica-educativa>
- Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 49-92.
- Area Moreira, M., San Nicolás Santos, M^a B. y Fariña Vargas, E. (2010). Buenas prácticas de aulas virtuales en la docencia universitaria presencial. En De Pablos Pons, J. (Coord.) Buenas prácticas de enseñanza con TIC. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11(1), 7-31.

- Ayil, J. S. (2018). Entorno Virtual de Aprendizaje: una herramienta de apoyo para la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Investigación en Tecnologías de la Información (RITI)*, 6(11), 34-39. <http://www.riti.es/ojs2018/inicio/index.php/riti/article/view/84/75>
- Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Science*, 2 (2), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be thought or learned? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Bossolasco, M. L. (2013). El concepto de entorno mediado de enseñanza-aprendizaje. Significados posibles. En Analía Claudia Chiecher ... [et.al.]; compilado por Analía Claudia Chiecher; Danilo Silvio Donolo; José Luis Córca. - 1a ed. - Mendoza: Editorial Virtual Argentina. Pp. 73-94.
- Brunner, J. J. (2000). Educación: Escenarios de Futuro. Nuevas Tecnologías y Sociedad de la Información. Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina y el Caribe: PREAL, N°16. https://educacion.udd.cl/files/2017/03/MS_Brunner-Educacion_escenarios_de_futuro-Nuevas_tecnologias_y_la_soc_info-1.pdf
- Bustos, S. A. y Coll, S. C. (2010). Los entornos virtuales como espacios de enseñanza y aprendizaje. Una perspectiva psicoeducativa para su caracterización y análisis. *Revista Mexicana de Investigación Educativa (RMIE)*. Enero-marzo, 15 (44), 163-189.
- Cárdenas Lugo, L. (2020). *Análisis del desarrollo de la capacidad de realizar actividades científicas: un proyecto de biología en preescolar* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://ru.dgb.unam.mx/handle/DGB_UNAM/TES01000803282
- Cárdenas Lugo, L. (2023). *Diseño de entornos virtuales para la enseñanza y aprendizaje de la biología en Bachillerato*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México]. <http://132.248.9.195/ptd2023/junio/0842374/Index.html>
- Castro Ávila, M. (2019). *Comprensión de la práctica docente en el campo de pensamiento matemático en preescolar desde una perspectiva sociocultural*. [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. <http://132.248.9.195/ptd2019/abril/0787908/Index.html>
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.)

The Cambridge handbook of the learning sciences, 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 13 (1), 15-42.

https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Coordinación de Desarrollo Educativo e Innovación Curricular. (2020). *Exámenes para el diagnóstico de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan a nivel licenciatura*. CODEIC. UNAM. <https://www.dee.cuaieed.unam.mx/index.php/resultado-de-diagnostico/>

Coordinación de Universidad Abierta, innovación Educativa y Educación a Distancia. (2021). *Evaluación diagnóstica de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan al bachillerato de la UNAM de la generación 2021 en comparativo con los obtenidos por la generación 2020*. CUAIEED. UNAM.

https://cuaieed.unam.mx/evaluacion_educativa#evaluaciones-bachillerato

Coordinación de Universidad Abierta, innovación Educativa y Educación a Distancia. (2021). *Evaluación diagnóstica de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan al bachillerato de la UNAM de la generación 2021 en comparativo con los obtenidos por la generación 2020*. CUAIEED. UNAM.

https://cuaieed.unam.mx/evaluacion_educativa#evaluaciones-bachillerato

Cordero, F. (1995). El pensamiento de la matemática avanzada en el aprendizaje cooperativo. Algunas argumentaciones del cálculo. *Serie Antologías. Número 1*. (pp. 171-180). México: Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Daniels, H. (2003). *Vigotsky y la Pedagogía*. Paidós.

De Benito, B. y Salinas, J. M. (2016). La investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *RIITE. Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*. 44-59. <https://doi.org/10.6018/riite2016/260631>

De la Peña, J. A. (2008). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. Siglo XXI editores.

Duhalde, M. y González, M. (1997). *Encuentros Cercanos con las Matemáticas*. Buenos Aires. Argentina: AIQUE.

Flesher, T. (2003). Writing to Learn in Mathematics. *The WAC Journal*, Vol. 14.

DOI:10.37514/WAC-J.2003.14.1.04

- Goldman, S. y Pellegrino, J. W. (2017). Investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza. Implicaciones para el currículo, la enseñanza y la evaluación. En *Reformas y Políticas Educativas*, 2, 27-49.
- García, E. (2008). Matemática y aviación: despegando matemáticamente. *Revista Argentina de psicopedagogía*, (62), 37. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3045273.pdf>
- García Peñalvo, F.J., Fidalgo Blanco, A. & Sein Echaluze, M.L. (2017). Los MOOC: un análisis desde una perspectiva de la innovación institucional universitaria. *La cuestión universitaria*, 9. https://www.researchgate.net/publication/320170485_Los_MOOC_un_analisis_desde_un_a_perspectiva_de_la_innovacion_institucional_universitaria
- González, A. y Weinstein, E. (2001) *¿Cómo enseñar Matemática en el Jardín?* Buenos Aires, Argentina: Colihue.
- Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. van den Akker, N., K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieven (Eds.). *Educational Design Research*, 17-51. Routledge.
- Guerrero, C. (2003) Los entornos virtuales de aprendizaje como instrumentos de mediación. *Teoría de la educación: educación y cultura en la sociedad de la información*, 10(18), 41-56.
- Guiza, M. (2011). *Trabajo Colaborativo en la web: entorno virtual de autogestión para Docentes*. [Tesis de Doctorado, Universitat de les Illes Balears. Departament de Pedagogia Aplicada i Psicologia de l'Educació].
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2008). *Pisa en el Aula: Matemáticas*. México: INEE. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2018/12/PISA_Matem%C3%A1ticas.pdf
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2017). *Resultados Nacionales PLANEA 2017. Educación Media Superior. Lenguaje y Comunicación y Matemática*. INEE. <http://planea.sep.gob.mx/ms/>
- Leontiev, A.N. (1975). *Actividad, conciencia y personalidad*. Cuba: Editorial pueblo y Educación.
- López, M. C. (2010). Las TICs y la comprensión matemática. *El proceso de Bolonia y la Educación*.

- Madrigal González, D. (2021). *Ambientes complejos de aprendizaje: una propuesta para el aprendizaje de las matemáticas en la "Escuela Nacional Preparatoria"*. [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México].
<http://132.248.9.195/ptd2021/octubre/0816813/Index.html>
- Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente*. La construcción infantil de los sistemas externos de representación. Madrid: Aprendizaje.
- Mercer, N. (2001). *Palabras y Mentes, cómo usamos el lenguaje para pensar juntos*. España: Paidós.
- México X (2021). *Acerca de*. Recuperado el 19 de julio de <https://www.mexicox.gob.mx/about>
- Miller, D. L. (1991). Writing to Learn Mathematics. *The Mathematics Teacher*. National Council of Teachers of Mathematics, 84 (7), 516-521. <https://www.jstor.org/stable/27967269>.
- Millroy, W. L. (1992). An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of Carpenters. En *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, 5, i-210. Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/749904>
- Moseley, L. J. (2014) Cartooning in Algebra and Calculus, *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24:3, 232-246, DOI:10.1080/10511970.2013.859643.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo económico (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. Published In: C. Kieran (Ed.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. 3-25. Springer.
- Reimann, P. (2011). Design-based Research. En Markauskaite L., Freebody P., Irwin J. (Eds.) *Methodological Choice and Design. Methods Series, 9*, 37-56. Springer.
- Revelo, J. y Carrillo, S. E. (2018). Impacto del uso de las TIC como herramientas para el aprendizaje de la matemática de los estudiantes de educación media. *Revista Cátedra*, 1(1), 70-91.
- Rinaudo, M., y Donolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la

Investigación educativa. *Revista de Educación a Distancia*, (22).

<http://revistas.um.es/red/article/view/111631>

- Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En J. Wertsch; P. Del Río. y A. Álvarez. *La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas*. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.
- Santiago Abasolo, J. (2019). *Estudio del Desarrollo sobre el Uso de la Geometría como parte de la Matemización en Educación Preescolar*. [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. <http://132.248.9.195/ptd2019/junio/0790304/Index.html>
- Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones*. Paidós.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. México: SEP.
<https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf>
- Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática. (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM. SUMEM*. Primera edición (México), Secretaría de Desarrollo Institucional.
https://www.ses.unam.mx/integrantes/uploadfile/jzubieta/Zubieta2014_ConsideracionesParaLaMejoraDeLaEducMat.pdf .
- Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática. (2016). *Estándares de Matemáticas para e Bachillerato de la UNAM. Grupo de trabajo sobre los estándares de matemáticas del SUMEM*. <https://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Bachillerato.pdf>
- Sepúlveda, E., González-Gómez, D., Villa-Ochoa, J. A. (2020). Analysis of a Mathematical Model. *Opportunities for the Training of Food Engineering Students. Mathematics*, 8, 1-16. <https://doi:10.3390/math8081339>.
- Siry, C. y Martin, S (2010). Coteaching in Science Education Courses: Transforming Teacher Preparation Through Shared Responsibility. En C. Murphy and K. Scantlebury (eds.), *Coteaching in International Contexts: Research and Practice*, Cultural Studies of Science Education. Springer, 1, 57-78. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-90-481-3707-7_4
- Siry, A. y Zawatski, E. (2011). Working with' as a methodological stance: collaborating with

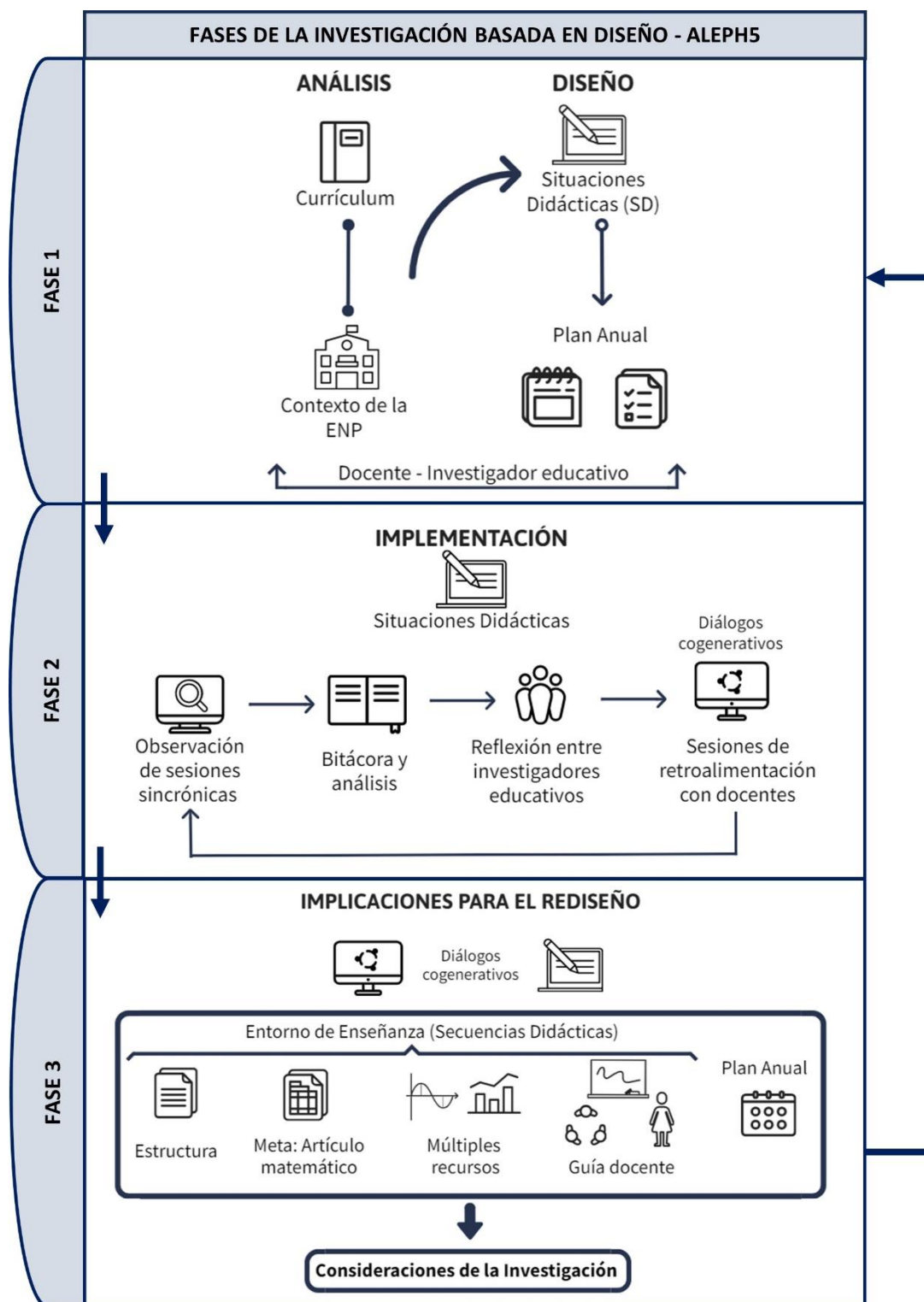
- students in teaching, writing, and research, *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 24(3), 343-361. <https://doi.org/10.1080/09518398.2010.539581>
- Solar, H., García, B., Rojas, F. y Coronado, A. (2014). Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, vol. 26, núm. 2, agosto de 2014
- Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), pp. 133-154
- Solares, A. y Sandoval I. (2013). Investigaciones sobre educación media superior. En: Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). *La investigación en educación matemática en México: 2002-2011*. En: Avila, A., Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, 77-94.
- Soletic, A. (agosto del 2021). *Modelos híbridos en la enseñanza: claves para ensamblar la presencialidad y la virtualidad*. Programa de educación. Laboratorio de Innovación y Justicia Educativa. CIPPEC. <https://www.cippec.org/publicacion/modelos-hibridos-en-la-ensenanza-claves-para-ensamblar-la-presencialidad-y-la-virtualidad/>
- Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas. En los últimos 10.000 años*. Crítica.
- Tobin, K. y Roth, W.-M. (2006). *Enseñar a aprender: una mirada desde el campo*. Sense Publishers.
- Tuirán R., et. al. (2019). Ganancia educativa en la educación media superior. *Papeles de población*. Universidad Autónoma del Estado de México. 25 (100), ISSN:1405-7425.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>
- Turpo, O. y García, F. (2020). *Didactic Interaction in Blended Learning: Analysis Models*. En *Blended learning: convergence between technology and pedagogy* (1st edition 2020). Springer International Publishing.
- Universidad Nacional Autónoma de México. (2018). *Escuela Nacional Preparatoria. Plan de estudios 1996. Programa Matemáticas VI Áreas I y II*. México: UNAM. http://enp.unam.mx/assets/pdf/planesdeestudio/6to/1600_matematicas_6_area_1_y_2.pdf
- Universidad Nacional Autónoma de México. (2020). *Propuesta de un Modelo Híbrido para la UNAM*. Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia. Secretaría de

Desarrollo institucional.

- Villa, L. (2010). *La Educación Media Superior: su construcción social desde el México Independiente hasta nuestros días*. Los grandes problemas de México. VII Educación. 272-309.
- Waissbluth, M. (2018). *Educación para el siglo XXI. El desafío latinoamericano*. Fondo de Cultura Económica Chile.
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona. Paidós.
- Xicoténcatl-Ramírez, G., Romero-González, R. M., Jacques-García, F. A., Hernández-Valerio, J. S. & Olmos-Trejo, C. A. (2015). B-learning in a program of higher education media, current situation. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, (2), 1-17. <https://www.pag.org.mx/index.php/PAG/article/download/515/553/>
- Zambrano, Y. A. y García, C. E. (2020). Plan de entornos virtuales de aprendizaje y su aplicación en la asignatura de ciencias sociales en tiempo de pandemia COVID-19 para Estudiantes de bachillerato en Portoviejo, Ecuador. *Revista Científica: Dominio de las ciencias*, 6 (2), 232-245.
- Zorrilla, J. F. (2010). *El futuro del bachillerato mexicano y el trabajo colegiado: lecciones de una intervención exitosa*. ANUIES.
- Zorrilla, J. F. (2015). *El bachillerato mexicano: Una formación académicamente precaria. Causas y consecuencias*. IISUE-UNAM.

ANEXOS

Anexo 1. Desglose de las Fases de la Investigación Basada en Diseño.



Anexo 2. Infografía correspondiente a la Secuencia Didáctica del caso de enseñanza.

**¿Las matemáticas pueden predecir las erupciones volcánicas?
El caso de La Palma**



META DE LA ACTIVIDAD

Informe del modelo matemático que ayude a tomar decisiones de prevención y mitigación ante una posible erupción volcánica.

Parte I
Contextualización y presentación del caso (trabajo individual)

Parte II
Profundización (trabajo en equipos).

Parte III
Transformación (plenaria).
Comunicación Matemática.

Caso de Enseñanza
ALEPH 5
Matemáticas VI