



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

---

---

**ESQUEMA PERTURBATIVO APLICADO A UN SISTEMA DE  
LUBRICACIÓN POR COMPRESIÓN:  
MECANISMOS INERCIALES CORTANTES Y EXTENSIONALES**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA:**

**EFREN DAVID PALAFOX VARGAS**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**ASESORES**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA**

**M.C. DOCTORANTE, LUIS ANTONIO TORRES RAMÍREZ**

**MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 05 de diciembre del 2023**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno **Palafox Vargas Efrén David** con número de cuenta 419120195 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el día 05 del mes de diciembre del 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente 1:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez
Suplente 2:	M. en C. e I. M Luis Antonio Ramírez Torres

El título de la tesis que se presenta es: **Esquema perturbativo aplicado a un sistema de lubricación por compresión: mecanismos inerciales cortantes y extensionales.**

Opción de titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M. en C. e I.M. Luis Antonio Ramírez Torres

## AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN102823>> Modelado matemático y simulación computacional de fluidos complejos con aplicación en bioingeniería<< >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la unidad de Investigación en Bioingeniería UI-FESZ-110323.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

## DEDICATORIAS

- Con todo mi amor y cariño a mis padres María Leticia Vargas García y Arturo Palafox Hernández que me apoyan y están siempre incondicionalmente para mí, gracias por todo ese esfuerzo y confianza que han depositado en mí, este logro también es suyo.
- María Leticia Vargas García, madre, gracias por siempre confiar en mí, por tu apoyo y amor incondicional, nuestro esfuerzo, dedicación y desveladas juntos, hoy reflejados en este gran logro en mi vida, el cual también es tuyo. Te amo.
- Doctor Edtson Emilio Herrera Valencia, gracias por el apoyo, por compartir sus conocimientos, por ser un gran ejemplo de ser humano, motivar e inspirar siempre a sus estudiantes.
- Eberth Neftali Mata Santoyo, gracias por todo tu apoyo, por tu amistad, por ser y estar siempre; eres más que un amigo y lo sabes, siempre estaré para ti.
- Estefany Barreto Fierro, mi cómplice, mi confidente, mi mejor amiga de la carrera, gracias por ser y estar siempre.
- No tengo palabras para expresar lo feliz y orgulloso que me siento; agradecido con Dios, con mi familia y amigos (Luis R. M. P, Dayan I. H. D, Uriel A. C, Alfonso B.I y demás amigos,) que formaron parte de este gran logro, que me apoyan y están siempre. Los quiero demasiado.

## ÍNDICE

<b>NOMENCLATURA</b> .....	9
<b>RESUMEN</b> .....	11

### **CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN**

1. Preliminares .....	13
1.1. Flujo cortante y extensional en un sistema de lubricación .....	13
1.2. Estado del arte: Antecedentes .....	15
1.3. Hipótesis .....	15
1.4. Objetivos de la investigación .....	15
1.4.1. General .....	15
1.4.2. Particulares .....	15
1.5. Distribución del material .....	16

### **CAPÍTULO 2: PROBLEMA FÍSICO Y ECUACIONES**

2.1. Problema de estudio .....	18
2.1.1. Análisis de proceso flujo por compresión y continuo por compresión ....	18
2.1.2. Ecuaciones de transporte .....	18
2.1.3. Tensores cinemáticos .....	19

### **CAPÍTULO 3: FLUJO POR COMPRESIÓN**

3.1. Flujo continuo por compresión .....	23
3.1.1. Análisis de proceso: Flujo continuo por compresión .....	23
3.1.2. Ecuaciones teóricas .....	24
3.1.3. Componente $r$ de la ecuación de movimiento .....	24
3.1.4. Ecuación constitutiva de Newton .....	24
3.1.5. Perfil de velocidades radial y gradiente de presión .....	24
3.1.6. Fuerza en el plato superior .....	27
3.1.7. Flujo volumétrico a través de los discos .....	28
3.2. Flujo por compresión entre un sistema de platos concéntricos .....	29
3.2.1. Análisis de proceso: Flujo por compresión .....	29

3.2.2. Ecuación de continuidad .....	30
3.2.3. Ecuación de Movimiento .....	30
3.2.4. Ecuación reológica de Newton .....	30
3.2.5. Condiciones de frontera .....	30
3.2.6. Perfil de velocidades radial .....	30
3.2.7. Cálculo del perfil de presiones y gradiente de presión .....	31
3.2.8. Componente axial del campo de velocidades .....	32
3.2.9. Cálculo de la fuerza de compresión .....	32
3.2.10. Cálculo de la viscosidad aparente .....	33

#### **CAPÍTULO 4: PERTURBACIÓN**

4. Método perturbativo regular .....	35
4.1. Variables adimensionales .....	35
4.2. Ecuaciones de continuidad, movimiento y reológica adimensional .....	35
4.3. Ecuación reológica modelo de Newton .....	36
4.4. Análisis perturbativo .....	36

#### **CAPÍTULO 5: SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

5.1. Orden cero .....	40
5.1.1. Velocidad radial .....	40
5.1.2. Velocidad axial .....	41
5.1.3. Gradiente de presión .....	42
5.2. Primer orden .....	43
5.2.1. Velocidad radial .....	43
5.2.2. Velocidad axial .....	45
5.2.3. Gradiente de presión .....	47

#### **CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES**

6.1. Aportación al conocimiento .....	50
6.1. Trabajo en progreso .....	55

<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	57
---------------------------	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.1.</b> Ilustra los sistemas de lubricación analizados en este trabajo: (a) flujo continuo por compresión y (b) flujo por compresión .....	14
<b>Figura 3.1.</b> Flujo continuo por compresión. El fluido es inyectado en la parte de abajo del plato, simulando un medio poroso. El punto clave es deducir una expresión para la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del líquido .....	23
<b>Figura 3.2.</b> Flujo por compresión. El fluido es colocado en el plato inferior y el plato superior se aproxima con una velocidad $dh(t)/dt$ comprimiéndolo, de tal forma que se forma un laminado radial. Este sistema tiene la desventaja que contiene partes móviles las cuales implican que, en el balance de fuerzas, la inercia debe ser tomada en cuenta .....	29
<b>Figura 5.1.</b> Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial $r$ .....	40
<b>Figura 5.2.</b> Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema .....	41
<b>Figura 5.3.</b> Simulación del gradiente de presión vs longitud axial adimensionales en función del parámetro $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema .....	42
<b>Figura 5.4.</b> Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial $r$ , $m=0$ y $Re=4$ .....	44
<b>Figura 5.5.</b> Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial $r$ , $m=0$ y $Re=20$ .....	44
<b>Figura 5.6.</b> Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema, $r=0.5$ y $Re=4$ .....	46
<b>Figura 5.7.</b> Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema, $r=0.5$ , $Re=50$ .....	46
<b>Figura 5.8.</b> Simulación del gradiente de presión vs longitud axial adimensionales en función del parámetro $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema, $Re=4$ .....	48
<b>Figura 6.1.</b> Ilustra las zonas en donde se puede presentar los mecanismos de corte y extensionales en el sistema de estudio .....	55

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 4.1.</b> Resumen de las ecuaciones a ordenes cero y primero .....	37
--	----

## NOMENCLATURA

### Variables dimensionales

$a$	Radio del disco ( $r$ ) [m]
$z$	Separación entre discos $H(t)$ [m]
$V_z$	Velocidad Axial dimensional [m/s]
$V_r$	Velocidad Radial dimensional [m/s]
$\frac{dp}{dr}$	Gradiente de presión [Pa/m]
$Re$	Numero de Reynolds
$\{r,z\}$	Coordenadas axial y radial respectivamente [m]
$F_{Nm}$	Fuerza de compresión a flujo no homogéneo
$F_{N0}$	Fuerza de compresión a flujo homogéneo
$P$	presión hidrostática
$Patm$	presión atmosférica
$\langle V \rangle$	Velocidad promedio

### Variables adimensionales

$p_0$	Presion perturbada a orden cero
$p_1$	Presion perturbada a primer orden
$\frac{dp_0}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a orden cero
$\frac{dp_1}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a primer orden
$F_0$	Fuerza perturbada a orden cero
$F_1$	Fuerza perturbada a primer orden
$\{r^*,z^*\}$	Coordenadas axial y radial adimensional

$V_r^*$	Velocidad radial adimensional
$V_z^*$	Velocidad axial adimensional
$V_{z0}$	Velocidad axial perturbada a orden cero
$V_{r0}$	Velocidad radial perturbada a orden cero
$V_{z1}$	Velocidad axial perturbada a primer orden
$V_{r1}$	Velocidad radial perturbada a primer orden
$p^*$	Presión hidrostática adimensional
$t^*$	Tiempo adimensional
$h \cdot$	Altura adimensional (cambio de la altura respecto al tiempo)

### **Letras griegas**

$\mu$	Viscosidad del fluido [Pa*s]
$\rho$	Densidad del liquido [Kg/m <sup>3</sup> ]

### **Vectores y tensores**

$D$	Tensor de rapidez de deformación [1/s]
$\sigma$	Tensor de esfuerzos [Pa]
$V$	Vector velocidad. [m/s]
$\nabla V$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla V^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]

## RESUMEN

En este trabajo se analiza el flujo por compresión en sus dos versiones: (i) continuo y (ii) clásico mediante análisis de ordenes de magnitud, (iii) aproximación de lubricación y (iv) métodos perturbativos. El flujo continuo por compresión de un líquido viscoso newtoniano consiste en una configuración de platos concéntricos de radio  $r = a$  y separados a una distancia  $H$ . El plato inferior contiene una serie de orificios del mismo diámetro distribuidos aleatoriamente. El líquido es inyectado por el plato inferior provocando que el fluido entre por los orificios (medio poroso) e induciendo una fuerza en el plato superior seguido de un laminado radial. El punto clave es calcular la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del líquido incorporando los mecanismos inerciales. El segundo sistema es el flujo clásico por compresión en el cual, el líquido es colocado entre los dos platos y por efecto de su viscosidad y mecanismos de tensión superficial permanece en plato situado en  $z = 0$ . El plato superior se aproxima al fluido mediante una velocidad  $dh(t)/dt$  y comprime al fluido provocando un laminado radial. Ambos sistemas son equivalentes, sin embargo, el flujo por compresión clásico presenta un problema extra debido a la inercia del plato superior. Para resolver este último se invoca que el sistema está en estado cuasi-estacionario y se invoca la aproximación de lubricación que consiste en un análisis de ordenes de magnitud. Para esto, se propone un esquema perturbativo a orden cero (mecanismos viscosos) y a primer orden inerciales. Con el fin de resolver el sistema se propone un conjunto de variables adimensionales que permiten describir las ecuaciones en términos de un parámetro de pequeñez  $\alpha$ . Asumiendo que las variables cinemáticas y dinámicas del sistema pueden ser expresadas en términos de series de potencias de  $\alpha$ , se obtiene expresiones analíticas a ordenes:

- a) Cero
- b) Primero

En todos los órdenes se encuentran expresiones analíticas para: (i) perfil de velocidades radial, (ii) perfil de velocidades axial, (iii) presión radial y (iv) Fuerza normal. Estos resultados se pueden expresar en términos de las propiedades geométricas y de la no homogeneidad del líquido que entra en el plato inferior, o de la rapidez con la que se aproxima el fluido. Este sistema se puede emplear para la caracterización de fluidos newtonianos a través de la fuerza que experimenta y la altura del descenso del plato superior sobre el fluido. Este trabajo de investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas de flujo que puedan caracterizar fluidos a través de la función viscosidad.

***Palabras claves: Método perturbativo Fluido Newtoniano, Flujo continuo por compresión, Viscosimetría y análisis de ordenes de magnitud.***

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

## 1. Preliminares

### 1.1 Flujo cortante y extensional en un sistema de lubricación

Los sistemas de lubricación involucran aceites o líquidos newtonianos y no-newtonianos. Los fluidos newtonianos son aquellos en donde su viscosidad permanece constante e independiente de la rapidez con que estos, sean deformados (Bird et al. 2002; Engmann et al. 2005; Engmann et al. 2005). La mayoría de estos, se conforman con componentes viscosas y elásticas (Bird et al. 1987; Engmann et al. 2005) e involucran partes móviles y sistemas que mimetizan el bombeo en medios porosos (Flujo continuo por compresión, Waters y Gooden 1983). La dinámica lineal de estos sistemas, involucran componentes cortantes, extensionales y rotaciones de los elementos materiales que los componen (Waters y Gooden). En la reología y estudio de la mecánica de fluidos no-newtoniana, este tipo de sistemas se han utilizado en aplicaciones como ingeniería del tejido con la formación de películas de colágeno tipo II (Khadem y Rey 2021). Otras aplicaciones incluyen sistemas de lubricación y bio-materiales (Bhushan et al. 2002). En la literatura existen tres problemas básicos los cuales, son descritos a continuación:

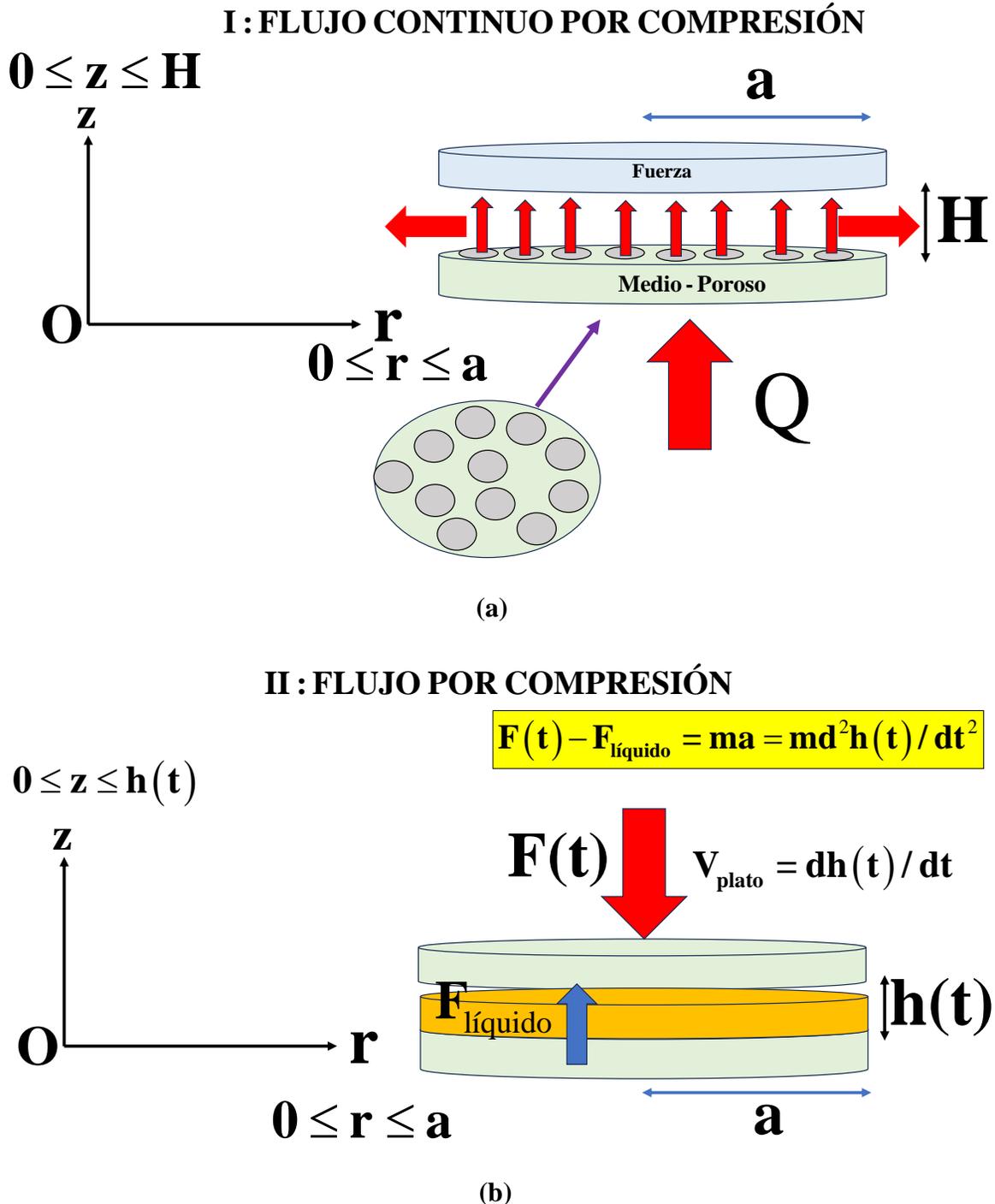
- A) Flujo radial entre discos paralelos (Bird et al. 2002)
- B) Flujo por compresión (Bird et al. 2002, 1977)
- C) Flujo por continuo por compresión (Waters and Goode 1983, 1984; Oliver et al. 1977).
- D) Recubrimiento de polímeros (Zheng et al. 2023; Zhou et al. 2023)

Estos sistemas representan un reto para deducir expresiones analíticas para los campos de velocidades radial, axial gradiente de presión y fuerza que experimenta el fluido debido a la compresión (Waters y Gooden 1984). En este punto, se han hecho esfuerzos en la dirección de encontrar expresiones analíticas para obtener la fuerza de compresión del plato superior para mantener el laminado radial (Bird et al. 2002; Engmann et al. 2005). Otro sistema de estudio es el flujo continuo por compresión. Este consiste en un sistema de platos separados a una distancia  $H$ . El líquido es inyectado en el plato inferior y entra al sistema por medio de una serie de orificios distribuidos aleatoriamente (Oliver et al. 1977). El fluido comprime al plato superior a una distancia fija  $H$  y se produce un laminado radial. Las diferencias principales entre el flujo por compresión y flujo continuo por compresión son mencionadas a continuación:

- A) **Flujo por compresión:** El líquido es colocado entre los dos platos separados a una distancia  $h(t)$ . Se supone que el líquido se queda adherido en el plato inferior y que no sale del sistema porque es lo suficientemente viscoso y su tensión superficial es alta. El plato superior, se aproxima con una velocidad  $dH(t)/dt$  y el líquido es comprimido radialmente. En este sistema, no se toma en cuenta la inercia del plato y se supone que el proceso es cuasi-estacionario (Bird et al. 1977; Bird et al. 2002; Engmann et al. 2005)
- B) **Flujo continuo por compresión:** El flujo continuo por compresión es un sistema de flujo que se estudia para evitar que existan partes móviles como el que se observa en el flujo por compresión tradicional. Es decir, este sistema se presenta como una alternativa al flujo por compresión tradicional. Así que, los platos se colocan a una distancia  $H(t)$  en donde en el plato inferior, se hace una serie de perforaciones que permite la entrada del fluido a flujo volumétrico constante. Esta inyección del fluido en el plato inferior permite simular el flujo por compresión que se define cuando el

fluido es comprimido por el plato superior, en el flujo por compresión clásico estudiado en mecánica de fluidos (Oliver y Shahidullah 1981; Oliver et al. 1978; Waters y Gooden 1983, 1984).

El sistema de flujo continuo por compresión y por compresión son ilustrados en la Fig.1



**Figura 1.1.** Ilustra los sistemas de lubricación analizados en este trabajo: (a) flujo continuo por compresión y (b) flujo por compresión

## **1.2 Estado del arte: Antecedentes**

Los sistemas de lubricación han sido analizados primeramente como fluidos newtonianos mediante análisis y ordenes de magnitud, y mediante la aproximación de lubricación (Bird et al. 2002; 1987). Estos sistemas han sido empleados en la biomecánica del cuerpo humano, bioingeniería del tejido (Bhushan et al 2002), estudio del colágeno (Campos et al. 2023) y la regeneración de huesos (Del Pierre et al. 2023; Deplaigne y Rochefort 2022). Las técnicas matemáticas empleadas en la descripción del flujo por compresión pueden ser empleadas para describir la formación de colágeno libre de defectos y complementarlas con otras técnicas avanzadas de simulación (Khadem y Rey 2021). Este sistema ha sido estudiado en geometrías complejas como esferas y puede ser punto de partida en la ciencia e ingeniería de polímeros (Zheng et al. 2023; Zhou et al. 2023). Desde el punto de vista experimental, esta configuración puede servir para analizar y caracterizar las propiedades materiales, mecánicas de plásticos (Roussel y Lanos 2003) y también de sólidos con texturas en la superficie (Meeten 2004). En conclusión, el flujo por compresión involucra en general problemas de lubricación con mecanismos cortantes, extensionales uniaxiales, biaxiales, rotaciones de cuerpo rígido e inerciales y que son punto de partida en el estudio de sistemas de lubricación (Burbidge y Servais **2004**; Kompani, Venerus **2000**).

Precisamente, este es un tópico tan importante, que merece ser estudiado y entendido. Esta es la razón principal de este trabajo de licenciatura, entender a profundidad este tipo de configuraciones asociadas a los sistemas de lubricación. Para entender los principios de este, se postula la siguiente hipótesis de trabajo.

## **1.3 Hipótesis**

Si el efecto combinado de los mecanismos inerciales, cortantes y extensionales afectan la dinámica de flujo por compresión, entonces esta será cuantificada a través de la fuerza por compresión, velocidad del plato superior, propiedades materiales, geométricas y el flujo volumétrico.

## **1.4 Objetivos de la investigación**

### **1.4.1 General**

Estudiar la respuesta dinámica del flujo por compresión de un fluido newtoniano en un sistema de platos paralelos.

### **1.4.2 Particulares**

- A) Utilizar las ecuaciones de continuidad, transporte y reológica los mecanismos viscosos, cortantes y extensionales en el flujo por compresión.
- B) Obtener expresiones analíticas para la velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión y fuerza de compresión en función de las variables geométricas, materiales cinemáticos del sistema

C) Obtener la fuerza que experimenta la geometría por efecto del líquido newtoniano.

D) Describir cualitativamente los mecanismos cortantes, extensionales y de rotación del cuerpo rígido asociados a estos sistemas.

### **1.5 Distribución del material**

En el capítulo 1 se prestó la introducción, estado de arte, hipótesis y objetivos general y particulares. En el capítulo 2, se describe el problema físico y las ecuaciones de transporte. En el tercer capítulo se resuelve el flujo continuo por compresión y por compresión para un fluido newtoniano. En el cuarto capítulo, se analiza el método perturbativo equivalente a las aproximaciones de lubricación a ordenes cero y primero. En el quinto capítulo, se presenta las simulaciones de los campos de velocidades y en el último se enlista la contribución al conocimiento y trabajo futuro.

# **CAPÍTULO 2**

## **PROBLEMA FÍSICO Y**

### **ECUACIONES**

## 2.1 Problema de estudio

### 2.1.1 Análisis de proceso flujo por compresión y continuo por compresión

#### A) Configuración geométrica 1:

La primera geometría analizada es un sistema de platos paralelos circulares de radio  $r = a$  y longitud  $L$ . El fluido es colocado en el sistema en el plato inferior y este se queda adherido por efecto de la tensión superficial en el sistema. El plato superior, se aproxima al fluido con una velocidad  $V_z = dh(t) / dt$ , y produce un laminado radial. En este sistema, se asume que: (i) El proceso es cuasi-estacionario, i.e. el plato se aproxima al fluido a velocidades muy bajas, de tal manera que el sistema llega al equilibrio, y se puede suponer que la rapidez instantánea puede ser despreciada, i.e.,  $\partial V_z / \partial t = 0$ . El proceso es isotérmico, es decir la temperatura es constante y por lo tanto las propiedades materiales del sistema no cambian. Existe simetría cilíndrica, es decir cualquier variable cinemática o dinámica no depende de la coordenada angular  $\theta$ , i.e.  $\partial \{ \} / \partial \theta = 0$ . Los mecanismos gravitacionales son despreciables, y el fluido se deforma continua e irreversiblemente por un gradiente de presión inducido por un balance mecánico mediante el formalismo de Bernoulli (**Bird et al 1987, 2002**).

#### B) Configuración geométrica 2:

La segunda configuración es un sistema de platos concéntricos separados a una distancia  $H$ . Los platos circulares tienen una longitud característica  $r = a$ . En el plato inferior, se hacen una serie de perforaciones distribuidas aleatoriamente y se supondrá que el tamaño de los orificios es el mismo. Un líquido es inyectado a flujo constante en el plato superior, y el líquido permea a través de este ejerciendo una fuerza en el plato superior seguido de un laminado radial (**Waters y Gooden 1983, 1984**). Las ventajas de este sistema, es que no existen partes móviles y que no se debe de tomar en cuenta la inercia del plato superior.

Las configuraciones de este trabajo, fueron descritas en las Fig. (1)

### 2.1.2 Ecuaciones de transporte

Las ecuaciones teóricas que se utilizarán en la descripción de la física del sistema.

#### A) Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{V} \quad (1)$$

#### B) Ecuación de Cauchy

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

#### C) Ecuación reológica

La ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3)$$

En la Ec. (3)  $\mu$  (Pas) es la viscosidad cortante y  $\mathbf{D}$  es el tensor rapidez de deformación definido como:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (4)$$

Sustituyendo la Ec. (3) en Ec. (2) y asumiendo que el líquido es incompresible y el proceso es isotérmico, se tiene la bien fundamentada ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (6)$$

El sistema se encuentra en estado estacionario, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Suponiendo que los mecanismos gravitacionales son despreciables, i.e.,

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \cong -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (8)$$

Por lo que la Ec. (8), toma la forma:

$$\therefore \boxed{\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}} \quad (9)$$

### 2.1.3. Tensores cinemáticos

Para obtener las componentes de las ecuaciones de transporte correspondientes, se emplarán los siguientes vectores y tensores cinemáticos y dinámicos en el sistema.

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (V_r(r, z), 0, V_z(r, z)) \quad (10)$$

El tensor gradiente de velocidad tiene la forma:

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (11)$$

El tensor rapidez de deformación  $\mathbf{D}$  y el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez deformación, corresponde a un flujo mixto:

$$\mathbf{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Extensionales}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Cortantes}} \quad (13)$$

El tensor de vorticidad  $\mathbf{W}$  (parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidad) puede ser descrito como:

$$\mathbf{W} = \frac{\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Y el tensor de esfuerzos este definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Una medida de los mecanismos que dominan el sistema de flujo, está definida en término del parámetro  $K$  (Poole 2023).

$$K(r,z) = \frac{|\mathbf{D}| - |\mathbf{W}|}{|\mathbf{D}| + |\mathbf{W}|} \quad (16)$$

En la Ec. (16), se  $|\mathbf{D}|$  es la norma del tensor rapidez de deformación,  $|\mathbf{W}|$  es la norma del tensor vorticidad. La Ec. (16) tiene la siguiente estructura matemática:

$$K(r,z) = \frac{\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} - \sqrt{2(\mathbf{W}:\mathbf{W})}}{\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} + \sqrt{2(\mathbf{W}:\mathbf{W})}} \quad (17)$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2} \quad (18)$$

De la misma manera, se tiene:

$$\sqrt{2(\mathbf{W}:\mathbf{W})} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2} = \left|\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right| \quad (19)$$

Finalmente combinando las Ecs. (17-19)

$$K(r,z) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 - \left|\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right|}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{V_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 - \left|\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right|}} \quad (20)$$

La Ec. (20) es una medida de los mecanismos cortantes, extensionales y las rotaciones de cuerpo rígido en el sistema de estudio:

$$K(r,z) = \begin{cases} 1: \text{Flujo extensional} \\ 0: \text{Flujo cortante} \\ -1: \text{Vorticidad} \end{cases} \quad (21)$$

En la siguiente sección analizaremos dos tipos de flujo por compresión y calcularemos este factor para analizar las zonas en las cuales domina estos mecanismos. Los flujos que serán analizados son:

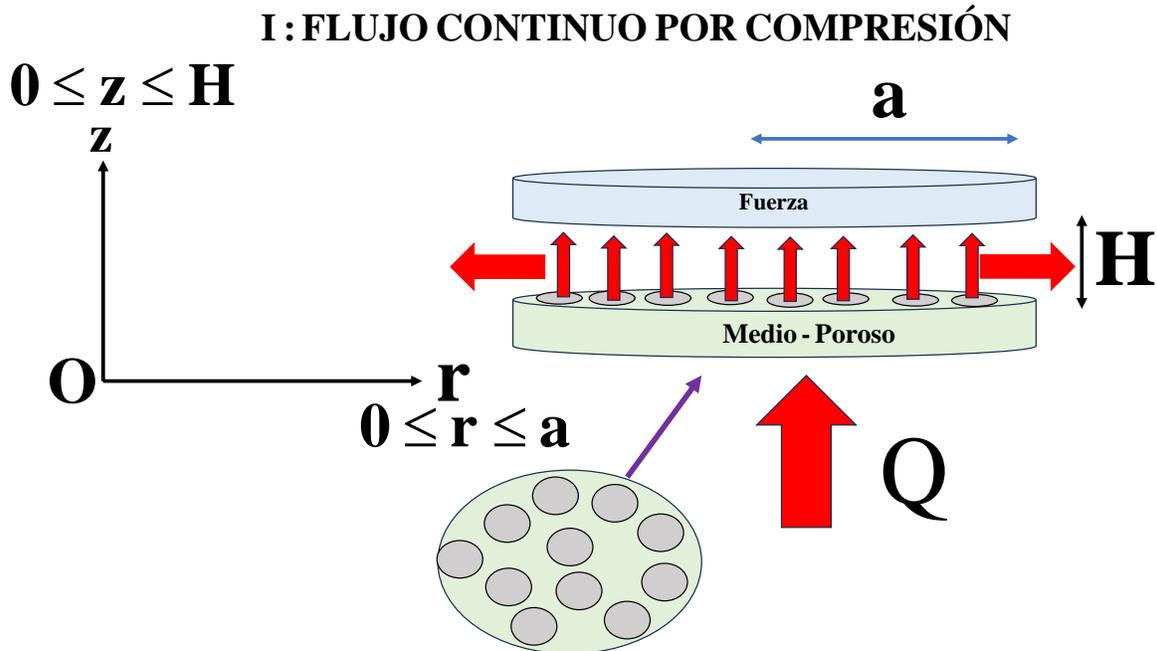
- A) Flujo continuo por compresión
- B) Flujo por compresión
- C) Esquema perturbativo

# **CAPÍTULO 3**

## **FLUJO POR COMPRESIÓN**

### 3.1 Flujo continuo por compresión

Este sistema consiste en dos platos concéntricos separados a una distancia  $H$  fija y de radio  $a$ . En el plato inferior, es inyectado un fluido a flujo volumétrico constante  $Q$ . El sistema se presenta en la Fig. (1a):



**Figura 3.1.** Flujo continuo por compresión. El fluido es inyectado en la parte de abajo del plato, simulando un medio poroso. El punto clave es deducir una expresión para la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del líquido.

#### 3.1.1 Análisis de proceso: Flujo continuo por compresión

Las siguientes restricciones son impuestas en el sistema de flujo continuo por compresión:

Proceso isotérmico

Mecanismos inerciales del líquido son despreciables

Simetría cilíndrica

Coordenadas cilíndricas

La presión en el sistema es solo función de la coordenada radial  $r$

$V_{z-h/2}$  es solo función de  $r$  en  $z = -h/2$

$V_{z-h/2}$  es pequeño en comparación de  $V_r$

El flujo es simétrico en  $r = 0$

### 3.1.2 Ecuaciones teóricas

Las ecuaciones teóricas se basan en principios de conservación de masa y de la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Es importante señalar que, simplificando la componente r de la ecuación de movimiento, se tiene lo siguiente:

### 3.1.3 Componente r de la ecuación de movimiento

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (1)$$

### 3.1.4 Ecuación constitutiva de Newton

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{dV_z}{dr} \quad (2)$$

### 3.1.5 Perfil de velocidades radial y gradiente de presión

$$-\int_0^r r V_z \cdot \frac{1}{r} dr = 2r \int_0^{h/2} V_r(r,z) dz \quad (3)$$

Combinando la componente en r de la ecuación de movimiento y la ecuación de Newton, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{d^2 V_r}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (4)$$

Al resolver la ecuación diferencial de segundo orden, obtenemos la expresión:

$$V_r(r,z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (5)$$

La primera condición de simetría, implica que:

$$\frac{\partial V_r(r,z)}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} z + C_1 \quad (6)$$

En  $z = 0$ , la velocidad  $V_r = 0$ , por lo que:

$$C_1 = 0 \quad (7)$$

La constante  $C_2$  puede ser calculada mediante la siguiente condición de no deslizamiento en la pared, i.e.

$$V_r\left(r, z = \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} \left(\pm \frac{h}{2}\right)^2 + C_2 = 0 \quad (8)$$

Despejando  $C_2$ , se tiene la siguiente expresión analítica:

$$C_2 = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dr} h^2 \quad (9)$$

Sustituyendo en el perfil de velocidades general:

$$V_r(r,z) = \frac{1}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dr} \right) (h^2 - 4z^2) \quad (10)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades radial, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$-\int_0^r r V_{z,-h/2} dr = 2r \int_0^{h/2} V_r(r,z) dz = r \frac{1}{12\mu} \left( -\frac{dp}{dr} \right) h^3 \quad (11)$$

Simplificando, se tiene la siguiente expresión:

$$\int_0^r r V_{z,-h/2} dr = r \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dr} h^3 \quad (12)$$

Derivando, con respecto a r, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dr} \left( \int_0^r r V_{z,-h/2} dr \right) = \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dr} h^3 \right) \quad (13)$$

Al resolver la ecuación, obtenemos:

$$r V_{z,-h/2} = \frac{1}{12\mu} h^3 \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) \quad (14)$$

La ecuación diferencial, puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) - r \frac{12\mu V_{z,-h/2}}{h^3} = 0 \quad (15)$$

El punto importante en esta expresión, es el flujo que entra debido a la distribución de orificios. Supongamos las siguientes condiciones:

Los orificios están distribuidos aleatoriamente

El área de los orificios es:  $A = \pi D^2/4$

El área de cualquiera de los platos es:  $A = \pi a^2$

El flujo de líquido que entra esta descrito po

$$Q = \frac{\pi D^4}{2^7 \mu} \frac{p - p_D}{L} \quad (16)$$

El flujo puede ser descrito como la velocidad promedio en la superficie del plato inferior por el área:

$$Q = \frac{V_s \pi D^2}{4} \quad (17)$$

Igualando los flujos volumétricos, se obtiene la velocidad promedio en la superficie:

$$V_s = \frac{D^2}{2^5 \mu} \frac{p-p_D}{L} \quad (18)$$

Considerando el plato inferior como un medio poroso, y suponiendo N orificios, la velocidad axial tiene la siguiente estructura matemática:

$$V_{z-h/2} = N \frac{\pi D^2 / 4}{\pi a^2} V_s = N \frac{\pi D^2 / 4}{\pi a^2} \frac{D^2}{2^5 \mu} \frac{p-p_D}{L} = N \frac{D^4}{2^7 a^2 \mu} \frac{p-p_D}{L} \quad (19)$$

Al sustituir en la ecuación de la presión, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) - r \frac{12\mu}{h^3} N \frac{D^4}{2^7 a^2 \mu} \frac{p-p_D}{L} = 0 \quad (20)$$

Simplificando

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) - r \left( 3 \frac{ND^4}{2^5 a^2 h^3 L} \right) (p-p_D) = 0 \quad (21)$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (p-p_D + p_D) - r \left( 3 \frac{ND^4}{2^5 a^2 h^3 L} \right) (p-p_D) = 0 \quad (22)$$

Si se hace:

$$P = p-p_D; \alpha^2 = 3 \frac{ND^4}{2^5 a^2 h^3 L} \quad (23)$$

Finalmente;

$$\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} P - r \alpha^2 P = 0 \quad (24)$$

Desarrollando el operador:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} P + r \frac{d}{dr} P + (i^2 r^2 \alpha^2 - 0^2) P = 0 \quad (25)$$

Mediante la derivada una composición de funciones:

$$(i\alpha r)^2 \frac{d^2}{d(i\alpha r)^2} P + (i\alpha r) \frac{d}{d(i\alpha r)} P + ((i\alpha r)^2 - 0^2) P = 0 \quad (26)$$

Si hacemos que  $x = i\alpha r$ , entonces:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} P + x \frac{d}{dx} P + (x^2 - 0^2) P = 0 \quad (27)$$

La solución general de este problema, está dada por las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie de orden cero:

$$P(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) \quad (28)$$

Por lo que,

$$P(r) = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 K_0(\alpha r) \quad (29)$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} r = 0; |P(r)| &\leq M \\ r = a; P &= -p_{RES} \end{aligned} \quad (30)$$

Para evaluar las constantes, se sustituyen las condiciones de frontera. La función de Bessel K no está definida cerca de una vecindad del cero por lo que, la constante  $C_2 = 0$ . La constante  $C_1$  tiene es calculada con la segunda condición de frontera:

$$C_1 = \frac{-P_{RES}}{I_0(\alpha a)} \quad (31)$$

Sustituyendo en la ecuación general de la presión,

$$P(r) = -P_{RES} \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a)} \quad (32)$$

Entonces

$$P(r) = p - p_{RES} = -p_{RES} \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a)} \quad (33)$$

Despejando la presión p (r)

$$p(r) = p_{RES} - p_{RES} \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a)} = p_{RES} \left( 1 - \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha a)} \right) \quad (34)$$

### 3.1.6 Fuerza en el plato superior

La fuerza en el plato superior, está definida de la siguiente manera:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a p(r) r dr \quad (35)$$

Sustituyendo el perfil de presiones en la fuerza normal, por lo que:

$$F = \pi p_{RES} a^2 \left( 1 - 2 \frac{I_1(\alpha a)/\alpha a}{I_0(\alpha a)} \right) \quad (36)$$

### 3.1.7 Flujo volumétrico a través de los discos

El flujo de líquido que sale por los platos se puede obtener mediante el perfil de velocidades y el área de flujo radial, por lo que:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} V_r |_{r=a} dz d\theta = 2\pi \cdot 2a \int_0^{h/2} V_r dz \quad (37)$$

Entonces, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q = \frac{\pi a h^3}{6\mu} \left( -\frac{dp}{dr} \right) \quad (38)$$

Al calcular la presión, se tiene la siguiente expresión:

$$\left( -\frac{dp(r)}{dr} \right) = p_{RES} \alpha \frac{I_1(\alpha a)}{I_0(\alpha a)} \quad (39)$$

Entonces, el flujo volumétrico tiene la forma:

$$Q = \frac{h^3 \pi p_{RES}}{6\mu} \alpha a \frac{I_1(\alpha a)}{I_0(\alpha a)} \quad (40)$$

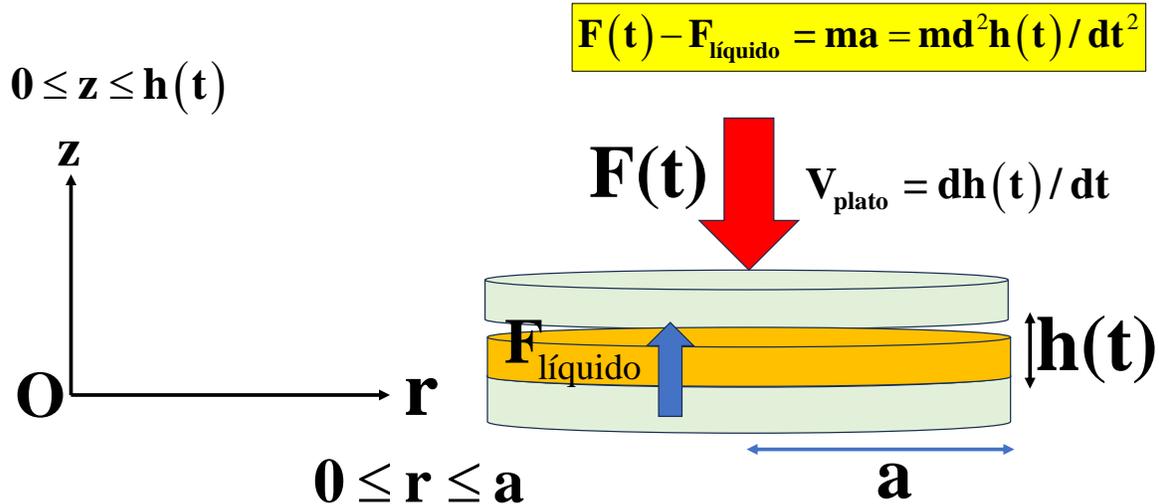
Despejando la presión  $p_{RES}$  se tiene:

$$\therefore F = \frac{Q a^2 6\mu}{h^3} \frac{I_0(\alpha a) / \alpha a}{I_1(\alpha a)} \left( 1 - 2 \frac{I_1(\alpha a) / \alpha a}{I_0(\alpha a)} \right) \quad (41)$$

### 3.2 Flujo por compresión entre un sistema de platos concéntricos.

Este sistema consiste en dos platos concéntricos separados a una distancia  $H$  fija y de radio  $a$ . En el plato inferior, es inyectado un fluido a flujo volumétrico constante  $Q$ . El sistema se presenta en la Fig. (3.2)

#### II : FLUJO POR COMPRESIÓN



**Figura 3.2.** Flujo por compresión. El fluido es colocado en el plato inferior y el plato superior se aproxima con una velocidad  $dh(t)/dt$  comprimiéndolo, de tal forma que se forma un laminado radial. Este sistema tiene la desventaja que contiene partes móviles las cuales implican que, en el balance de fuerzas, la inercia debe ser tomada en cuenta.

#### 3.2.1 Análisis de proceso: Flujo por compresión

Las siguientes restricciones son impuestas en el sistema de flujo continuo por compresión:

- A) Proceso isotérmico:  $T$  es constante
- B) Mecanismos inerciales del líquido son despreciables
- C) Simetría cilíndrica:  $\partial\{\}/\partial\theta = 0$
- D) Coordenadas cilíndricas:  $(r, \theta, z)$
- E) La presión en el sistema es solo función de la coordenada radial  $r$
- F)  $V_{z-h/2}$  es solo función de  $r$  en  $z = -h/2$
- G)  $V_{z-h/2}$  es pequeño en comparación de  $V_r$
- H) El flujo es simétrico en  $r = 0$

### 3.2.2 Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (42)$$

### 3.2.3 Ecuación de Movimiento

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (43)$$

### 3.2.4 Ecuación reológica de Newton

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{dV_r}{dz} \quad (44)$$

### 3.2.5 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\text{C.F.1: } V_r(r, z = h) = 0$$

$$\text{C.F.2: } \left. \frac{dV_r}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (45)$$

$$\text{C.F.3: } V_z(r, z = 0) = 0$$

$$\text{C.F.4: } V_z(r, z = h(t)) = \dot{h}(t)$$

### 3.2.6 Perfil de velocidades radial

Combinando la ecuación constitutiva con la de movimiento se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (46)$$

La solución de la ecuación diferencial está definida por un polinomio cuadrático

$$V_r(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (47)$$

Al sustituir las condiciones de frontera (primera y segunda) en la solución de la ecuación diferencial de segundo orden; se tiene lo siguiente:

$$V_r(r, z) = \frac{h^2(t)}{2\mu} \frac{dp}{dr} \left( \left( \frac{z}{h(t)} \right)^2 - 1 \right) \quad (48)$$

De la ecuación de continuidad se tiene lo siguiente:

$$V_z(z, r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int V_r dz \right) + C_3 \quad (49)$$

Al substituir la expresión para la velocidad radial se tiene lo siguiente:

$$V_z(z,r) = -\frac{h^3(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h(t)} \right)^3 - \left( \frac{z}{h(t)} \right) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dp}{dr} \right) + C_3 \quad (50)$$

Aplicando la tercera condición de frontera para la velocidad axial, la constante C3 vale cero, por lo que se obtiene:

$$V_z(z,r) = -\frac{h^3(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h(t)} \right)^3 - \left( \frac{z}{h(t)} \right) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dp}{dr} \right) \quad (51)$$

### 3.2.7 Cálculo del perfil de presiones y gradiente de presión

Finalmente, al aplicar la cuarta condición de frontera, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = \frac{3\mu h(t)}{h^3(t)} r \quad (52)$$

Integrando la ecuación diferencial para el gradiente de presión

$$\frac{dp}{dr} = \frac{3\mu h(t)}{2h^3(t)} r + \frac{C_4}{r} \quad (53)$$

Una segunda integración

$$p(r) = \frac{3\mu h(t)}{4h^3(t)} r^2 + C_4 \ln r + C_5 \quad (54)$$

Como la solución debe permanecer acotada, por consistencia física, el valor de C4 debe ser cero, si no la presión tendería a menos infinito. Aplicando la condición de que en  $r=a$ , la presión es la atmosférica se tiene lo siguiente:

$$p_a - \frac{3\mu h(t)}{4h^3(t)} a^2 = C_5 \quad (55)$$

Por lo que la presión se puede escribir como:

$$\therefore p(r) - p_a = \frac{3\mu h(t) a^2}{4h^3(t)} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (56)$$

A partir de la definición de la presión es fácil calcular el gradiente de presión:

$$\therefore \frac{dp}{dr} = \frac{3\mu h(t)}{2h^3(t)} r \quad (57)$$

### 3.2.8. Componente axial del campo de velocidades

Mediante el balance de masa y suponiendo que no existe deslizamiento en el plato inferior, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$V_z(z,r) = -\frac{h^3(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h(t)} \right)^3 - \left( \frac{z}{h(t)} \right) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = -\frac{h^3(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h(t)} \right)^3 - \left( \frac{z}{h(t)} \right) \right) \frac{3\mu \dot{h}(t)}{h^3(t)}$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$\therefore V_z(z,r) = \frac{3}{2} \dot{h}(t) \left( \left( \frac{z}{h(t)} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h(t)} \right)^3 \right) \quad (58)$$

### 3.2.9 Cálculo de la fuerza de compresión

Para calcular la fuerza en el plato superior por efecto del medio, se necesita evaluar la siguiente integral:

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( p - p_a + \sigma_{zz} \right) \Big|_{z=h} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( p - p_a + 2\mu \frac{dV_z}{dz} \right) \Big|_{z=h} r dr d\theta \quad (59)$$

Calculando la derivada de la integral y evaluando la integral se tiene lo siguiente:

$$F_z = 2\pi \int_0^a \left( p - p_a \right) \Big|_{z=h} r dr = 2\pi \left\{ \left( p - p_a \right) \Big|_{z=h} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{dp}{dr} \Big|_{z=h} r^2 dr \right\} = \pi \int_0^a \frac{dp}{dr} \Big|_{z=h} r^2 dr \quad (60)$$

Por lo tanto, la fuerza puede ser calculada mediante la siguiente expresión:

$$\therefore F_z = \pi \int_0^a \frac{dp}{dr} \Big|_{z=h} r^2 dr \quad (61)$$

Insertando el gradiente de presión en la expresión de la fuerza, se tiene:

$$F_z = \pi \int_0^a \left( \frac{3\mu \dot{h}(t)}{2h^3(t)} r \right) r^2 dr = \pi \frac{3\mu \dot{h}(t)}{2h^3(t)} \int_0^a r^3 dr = \pi \frac{3\mu (\dot{h}(t)) a^4}{8h^3(t)}$$

Por lo tanto, la expresión de Stefan tiene la siguiente forma:

$$\therefore F_z = \frac{3\pi \mu \dot{h}(t) a^4}{8h^3(t)} \quad (62)$$

### 3.2.10 Cálculo de la viscosidad aparente

Si la fuerza es constante, es decir  $F_z = F_0$ , la ecuación anterior se puede integrar para obtener:

$$\frac{8}{3\pi\mu a^4} F_0 dt = \left( -\frac{dh(t)}{h^3(t)} \right) \quad (63)$$

Integrando

$$\int h^{-3}(t) dh(t) = \int -\frac{8}{3\pi\mu a^4} F_0 dt$$

Finalmente

$$h^{-2}(t) = \frac{16}{3\pi\mu a^4} F_0 t + C_4$$

Aplicando la condición inicial de que al tiempo cero la separación del plato es  $h_0$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{h^2(t)} = \frac{1}{h_0^2(t)} + \frac{16F_0}{3\pi\mu a^4} t} \quad (64)$$

# **CAPÍTULO 4**

## **PERTURBACIÓN**

#### 4. Método perturbativo regular

En este capítulo se presenta el algoritmo para la solución de las ecuaciones adimensionales acopladas por el método de perturbación. Este método consiste en tres pasos principales: (i) Variables adimensionales que permitan obtener grupos adimensionales que describan los mecanismos macroscópicos y un parámetro de pequeñez o perturbativo, (ii) Las variables de interés son desarrolladas en series de potencias alrededor del parámetro perturbativo y (iii) obtener contribuciones a ordenes cero y primero respectivamente. A continuación, se desarrollan estos pasos.

##### 4.1 Variables adimensionales

Para simplificar el problema y preparar el método perturbativo se propone el siguiente conjunto de variables adimensionales para las coordenadas radial, axial, velocidades axial, radial, esfuerzo cortante, gradiente de presión, esfuerzo total, fuerza normal y segundo invariante del tensor rapidez de deformación:

$$z = \frac{z}{h}; r = \frac{r}{a}; V_r = \frac{V_r}{\langle V \rangle}; V_z = \frac{V_z}{\left(\frac{h}{a}\right)\langle V \rangle}; \sigma_{(ik)} = \frac{\sigma_{(ik)}}{\mu \frac{\langle V \rangle}{h}}; p = \frac{p}{\left(\frac{a}{h}\right) \eta_0 \frac{\langle V \rangle}{h}} \quad (65)$$

En donde  $\langle V \rangle$  es la velocidad media en  $r = a$ , dado por:

$$\langle V \rangle = \frac{\iint V \cdot dS}{\iint dS} = \frac{Q}{2\pi ah} \quad (66)$$

Es importante destacar que el volumen que entra en el disco inferior es  $\pi a^2 \langle V_z \rangle$  y debe ser igual por conservación de masa al volumen que sale radialmente por lo que, se tiene lo siguiente:  $2\pi ah \langle V_r \rangle$  en  $r = a$ . Así que, por conservación de masa, se tiene la siguiente expresión analítica:  $\langle V_r \rangle = (a/2h) \langle V \rangle$ . Para el método perturbativo, se argumenta que la velocidad radial  $V_r$  debe ser del orden de  $\langle V_r \rangle = a/2h \langle V \rangle$ .

##### 4.2 Ecuaciones de continuidad, movimiento y reológica adimensional

Sustituyendo las variables adimensionales en las Ecuaciones teóricas se tiene las siguientes Ecuaciones adimensionales:

$$\alpha \text{Re} \left( V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) V_r = \frac{\alpha}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{(rr)}) - \sigma_{(\theta\theta)} \right) + \frac{\partial \sigma_{(rz)}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (67)$$

$$\alpha^3 \text{Re} \left( V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) w = \alpha \left( \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{(rz)}) + \frac{\partial \sigma_{(zz)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (68)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0 \quad (69)$$

### 4.3 Ecuación reológica modelo de Newton

Sustituyendo las variables adimensionales en el modelo de Newton, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{(rz)} = \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (70)$$

$$\sigma_{(rr)} = 2\alpha \frac{\partial v}{\partial r} \quad (71)$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = 2\alpha \frac{v}{r} \quad (72)$$

$$\sigma_{(zz)} = 2\alpha \frac{\partial w}{\partial z} \quad (73)$$

Las condiciones de frontera se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} V_r(r,z)=0; \quad V_z(z,r) = u(r) & \quad \text{en} \quad z = 0 \\ V_r(r,z) = V_z(r,z) = 0 & \quad \text{en} \quad z = 1 \\ V_r(r,z) = V_z(r,z) = 0 & \quad \text{en} \quad r = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

En donde la variable  $u(r)$  es constante cuando el flujo volumétrico de entrada es el mismo, por lo que se tiene la siguiente expresión general.

$$\int_0^1 r u(r) dr = 1 \quad (77)$$

Experimentos en lubricación y en recubrimientos, has demostrado que el número de Reynolds es pequeño por lo que, se puede despreciar.

### 4.4 Análisis perturbativo

Para deducir expresiones analíticas en el sistema, se propone utilizar un esquema perturbativo para deducir una contribución analítica viscosa y de inercia.

Es claro que las ecuaciones deducidas dependen del parámetro  $\alpha$ . Nuestra hipótesis es que las variables dinámicas pueden ser expandidas en términos de  $\alpha$ , es decir:

$$V_r(r,z) = \alpha^0 V_{r_0}(r,z) + \alpha^1 V_{r_1}(r,z) + \dots + \alpha^j V_{r_j}(r,z) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j V_{r_j}(r,z) \quad (78)$$

$$V_z(r,z) = \alpha^0 V_{z_0}(r,z) + \alpha^1 V_{z_1}(r,z) + \dots + \alpha^j V_{z_j}(r,z) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j V_{z_j}(r,z) \quad (79)$$

$$p(r) = \alpha^0 p_0(r) + \alpha^1 p_1(r) + \dots + \alpha^j p_j(r) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j p_j(r) \quad (80)$$

$$\sigma_{(ik)j}(r,z) = \alpha^0 \sigma_{(ik)0}(r,z) + \alpha^1 \sigma_{(ik)1}(r,z) + \alpha^2 \sigma_{(ik)2}(r,z) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \sigma_{(ik)j}(r,z) \quad (81)$$

Al sustituir las series de potencias dadas por las Ecs. (78)-(81) en las ecuaciones de continuidad, movimiento, reológica Ec.(67)-(76), e igualando los coeficientes de los polinomios a orden cero y primero, se obtienen las siguientes ecuaciones analíticas resumidas en la Tabla 4.1

**Tabla 4.1. Resumen de las ecuaciones a ordenes cero y primero**

Ecuaciones	Orden cero: O ( $\alpha^0$ )	Primer orden: O ( $\alpha^1$ )
Balace de Masa	$\frac{\partial V_{z_0}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{r_0}) = 0$	$\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{r_1}) = 0$
Movimiento en r	$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V_{r_0}(r,z) = \frac{\partial p_0}{\partial r}$	$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V_{r_1}(r,z) = \frac{\partial p_1}{\partial r} + \text{Re} \left( V_{r_0}(r,z) \frac{\partial V_{r_0}(r,z)}{\partial r} + V_{z_0}(r,z) \frac{\partial V_{r_0}(r,z)}{\partial z} \right)$
Movimiento en z	$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0$
Condiciones de Frontera	$V_{r_0}(r, z=0) = 0$ $V_{r_0}(r, z=1) = 0$ $V_{z_0}(r, z=0) = u(r)$ $V_{z_0}(r, z=1) = 0$ $V_{r_0}(r=0, z) = V_{r_0}(r=0, z) = 0$	$V_{r_0}(r, z=0) = 0$ $V_{r_0}(r, z=1) = 0$ $V_{z_0}(r, z=0) = 0$ $V_{z_0}(r, z=1) = 0$ $V_{r_0}(r=0, z) = V_{r_0}(r=0, z) = 0$
Fuerza del líquido en el plato	$F_0 = -\frac{\pi \langle V \rangle a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{\partial p_0}{\partial r} r^2 dr$	$F_1 = -\frac{\pi \langle V \rangle a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{\partial p_1}{\partial r} r^2 dr$

La Tabla (4.1) es un resumen de las ecuaciones principales obtenidas por el método perturbativo. A continuación, se da un resumen de las ecuaciones teóricas a orden cero y primero:

**Orden cero:  $O(\alpha^0)$**

- a) El método perturbativo a orden cero, permite deducir expresiones analíticas para las velocidades radial, axial, gradiente de presión y fuerza a orden cero.
- b) Localmente, el orden cero se aproxima al flujo de Poiseuille en una rendija de espesor  $2B$ , ancho  $W$  y longitud  $L$ .
- c) El perfil de presiones es parabólico y esto es una diferencia significativa en comparación con el flujo de Poiseuille en una rendija de espesor  $2B$ , anchura  $W$  y longitud  $L$ . En este sistema, el perfil de presiones es lineal.
- d) A orden cero, los perfiles de velocidad, gradiente de presión, perfil de presiones y fuerza, coinciden con los obtenidos mediante la aproximación de lubricación.
- e) Las fuerzas obtenidas en el flujo por compresión y flujo continuo por compresión son equivalentes simplemente se debe de definir la velocidad promedio en el flujo continuo por compresión como  $\langle V \rangle = 2^{-1}a \, dLnh(t)/dt$  (**Waters y Gooden 1983**)

**Orden primero:  $O(\alpha^1)$**

En esta sección, se presentan los resultados más importantes del orden uno. Básicamente, estos se reducen a la contribución de los mecanismos inerciales los cuales, son punto de partida en la expresión analítica de la fuerza. A continuación, se presentan las ecuaciones cerradas para: (i) la velocidad radial, (ii) velocidad axial, y (iii) Fuerza normal.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -\frac{27}{35} \text{Re} \left\{ 3u(r) - \frac{2}{r^2} \int_0^r \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r} \right\} \frac{1}{r} \int_0^r \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r} \quad (82)$$

La fuerza a orden uno, tiene la siguiente forma:

$$F_{1m} = -\frac{\pi \mu a^3 V}{h^2} \int_0^1 r^2 \left\{ \frac{12}{r} \int_0^r \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{27 \alpha \text{Re}}{35} \times \left[ 3 \frac{u(r)}{r} - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r} \right] \int_0^r \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r} \right\} dr \quad (83)$$

En el caso de flujo homogéneo,  $u(r) = 2$ , por lo que se tiene la siguiente expresión analítica:

$$F_{1m} = F_{0m} \left\{ 1 + \frac{9(m+4)(3m+4)}{280(m+2)} \alpha \text{Re} \right\} \quad (84)$$

En el caso del flujo homogéneo, se tiene lo siguiente:

$$F_{10} = F_{00} \left\{ 1 + \frac{9}{35} \alpha \text{Re} \right\} \quad (85)$$

Las Ecs. (82)-(85) fueron obtenidas por **Waters and Gooden (1983, 1984)** mediante un esquema perturbativo regular.

# **CAPÍTULO 5**

## **SIMULACIÓN Y ANÁLISIS**

### **DE RESULTADOS**

En este capítulo se presentarán los resultados teóricos computacionales en el programa de Wólffram Mathematica. Los cálculos que se presentaran están basados en las ecuaciones desarrollados en los capítulos anteriores. Las simulaciones que se mostraran son: (i) velocidad radial, (ii) velocidad axial, (iii) gradiente de presión.

## 5.1. Orden cero

### 5.1.1. Velocidad radial

En la Fig. (5.1) se ilustra la velocidad radial vs posición axial para diferentes valores de la coordenada radial. Las siguientes observaciones matemáticas y físicas son observables en la Fig. (5.1):

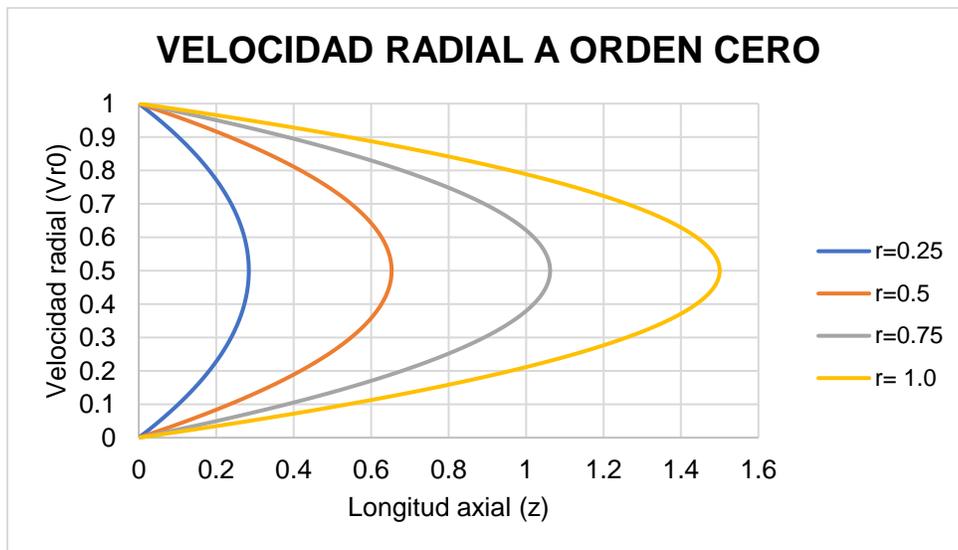
Matemáticamente

- Es claro, que, en todos los casos, se obtiene el clásico perfil parabólico descrito en la literatura científica.
- El máximo se obtiene en la mitad de compresión del sistema y es observable que la coordenada  $r$  permite el desarrollo del perfil de velocidades.

Físicamente

- Es evidente que, en las paredes, se cumple la condición de no deslizamiento ya que la velocidad en las paredes es cero debido a que existe una adherencia del líquido al sólido.
- El máximo es un acoplamiento entre las propiedades materiales y geométricas del sistema y se determina analíticamente a través de la siguiente ecuación:

$$Vr_0(r, z, m) = 6(r)^{2m+1}(z - z^2)$$



**Figura 5.1.** Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial  $r$ .

### 5.1.2. Velocidad axial

En la Fig. (5.2) se ilustra la velocidad axial vs posición axial para diferentes valores de  $m$  asociado a la homogeneidad del sistema. Es importante resaltar que la homogeneidad está asociada con la cantidad de fluido que entra a través de los orificios. Esta simulación toma como valor fijo a la coordenada radial  $r=0.5$ , es decir que el análisis del perfil de velocidades se realiza exactamente a la mitad del sistema. La expresión analítica que representa lo mencionado anteriormente está representada por la siguiente ecuación:

$$Vz_0(r, z, m) = (m + 2)r^m(1 + 2z^3 - 3z^2)$$

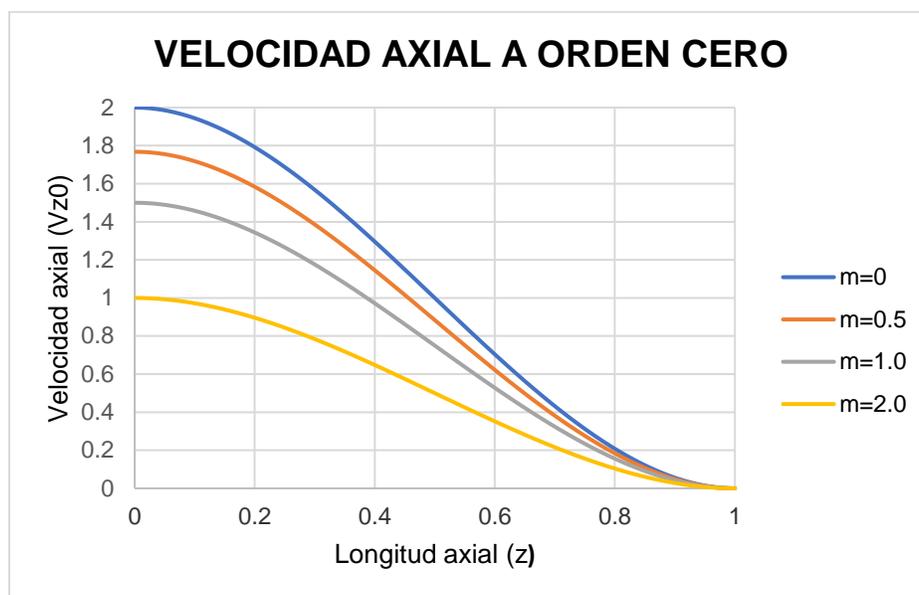
Lo siguientes puntos son observables en la Fig. (5.2):

#### Matemáticamente:

El comportamiento de las curvas en la es el mismo independientemente de la variación del parámetro  $m$ , sin embargo, se puede observar que a valores pequeños de la longitud axial las curvas tienden a formar una meseta y que al llegar a puntos críticos de la longitud axial ( $z$ ) se aprecia un comportamiento monótono decreciente en dichas curvas.

#### Físicamente:

Se observa que el parámetro  $m$  es una variable independiente que tiene un gran impacto con respecto a la componente  $z$  del vector velocidad en el sistema. Enfatizando que cuando  $m$  es igual a cero en el sistema se considera un flujo homogéneo, es decir, que el volumen que entra por los orificios del plato inferior es el mismo; mientras que para valores mayores a cero el sistema tendrá un flujo no homogéneo.



**Figura 5.2.** Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro  $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema.

### 5.1.3. Gradiente de presión

La Fig. (5.3) representa gráficamente el gradiente de presión vs posición axial para diferentes valores del parámetro  $m$  asociado a la homogeneidad del sistema, el cual está asociada con la cantidad de fluido que entra a través de los orificios ya sea para el valor de  $m=0$  homogéneo o para  $m>0$  no homogéneo. La expresión analítica para el gradiente de presión está representada por la siguiente ecuación:

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = -12(r)^{2m+1}$$

En la Fig. (5.3) podemos analizar las siguientes cuestiones matemática y físicamente:

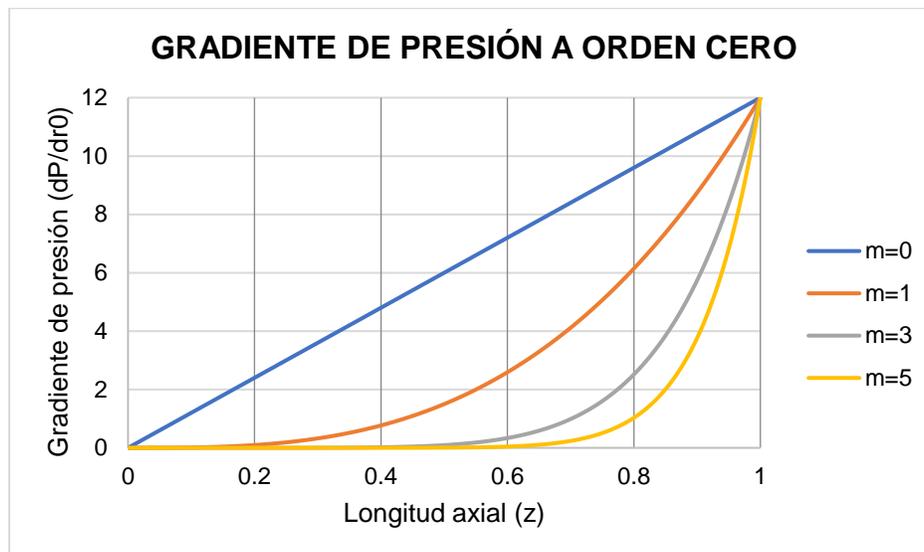
#### Matemáticamente:

Cuando el parámetro  $m$  es igual a cero la curva es lineal debido a que en este valor el sistema es homogéneo, es decir que la cantidad de fluido que entra al sistema por los orificios del plato inferior es el mismo; sin embargo, se puede observar que para la no homogeneidad del sistema (valores diferentes a 0), las curvas formadas tienen un comportamiento creciente exponencial.

#### Físicamente:

El gradiente de presión es una función exclusiva de no homogeneidad del plato inferior del sistema, es decir que su comportamiento dependerá del parámetro  $m$  no de las características del fluido.

El valor máximo del gradiente de presión se obtiene cuando el fluido llega al plato superior, en la Fig. (5.3) se puede apreciar que este valor es  $z=1$ .



**Figura 5.3.** Simulación del gradiente de presión vs longitud axial adimensionales en función del parámetro  $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema.

## 5.2. Primer orden

### 5.2.1. Velocidad radial

En la Fig. (5.4) y (5.5) se ilustran las simulaciones de la velocidad radial vs posición axial para diferentes valores de la coordenada radial con un valor fijo de  $m=0$  (flujo homogéneo) y variación del valor de Reynolds ( $Re$ ). Las siguientes observaciones matemáticas y físicas son observables en las Fig. (5.4) y (5.5).

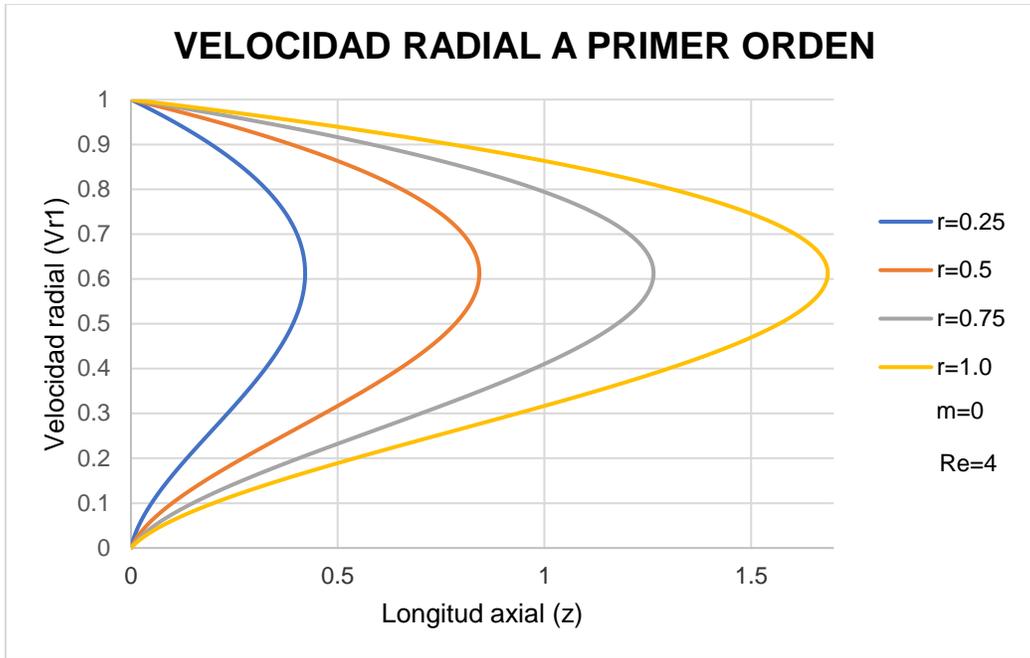
#### Matemáticamente:

- Se puede observar que en comparación con la velocidad radial a orden cero (Fig. 5.1), la velocidad radial a primer orden (Fig. 5.4) es afectada por el valor de Reynolds, en donde se asignó un valor de  $Re=4$  (flujo laminar) debido a que en el sistema el flujo de entrada se da a velocidades muy bajas, en este se obtiene el clásico comportamiento parabólico de las curvas descrito en la literatura científica, no obstante, al aumentar el valor de Reynolds  $Re=20$  se observa que comienza a formar otro perfil de velocidades pero en dirección contraria a la coordenada radial. (Fig.5.5).
- El máximo se obtiene en la mitad de compresión del sistema y es observable que la coordenada  $r$  permite el desarrollo del perfil de velocidades.

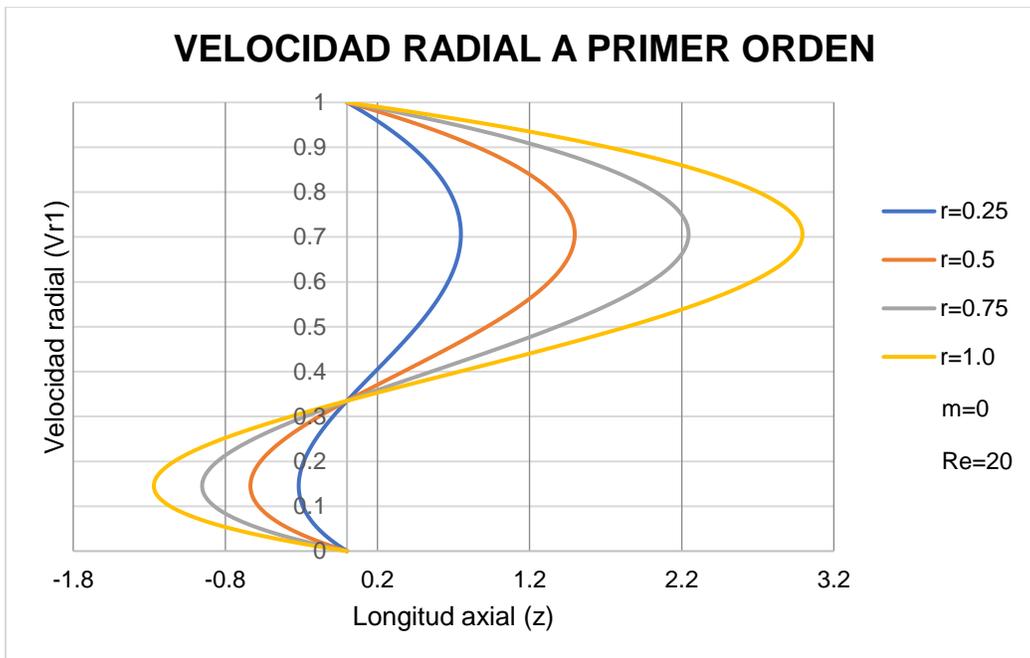
#### Físicamente:

- Se observa que, en las paredes, se cumple la condición de no deslizamiento ya que la velocidad en las paredes es cero debido a que existe una adherencia del líquido al sólido.
- Se observa que la variación del Reynolds causara un incremento de velocidad con respecto a la longitud axial, en comparación con la velocidad radial a orden cero (Fig 5.1).
- El máximo es un acoplamiento entre las propiedades materiales y geométricas del sistema y se determina analíticamente a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Vr}_1 = \left( -6(\mathbf{r})^{m+1} + \mathbf{Re}(2\mathbf{m} + 1) \left( -\frac{54}{70} \right) (\mathbf{r}^{4m+1}) + \mathbf{Re}(\mathbf{m} + 2) \left( -\frac{27}{70} \right) (\mathbf{r}^{3m+1}) \right) (\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}) + \mathbf{Re}(2\mathbf{m} + 1) \mathbf{r}^{4m+1} \left( 3\mathbf{z}^4 - \frac{18\mathbf{z}^5}{5} + \frac{18\mathbf{z}^6}{15} - \frac{3}{5}\mathbf{z} \right) + \mathbf{Re}(\mathbf{m} + 2) \mathbf{r}^{3m+1} \left( -\frac{4\mathbf{z}^6}{5} + \frac{12\mathbf{z}^5}{5} - \frac{3\mathbf{z}^4}{2} - 2\mathbf{z}^3 + 3\mathbf{z}^2 - \frac{11}{10}\mathbf{z} \right)$$



**Figura 5.4.** Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial  $r$ ,  $m=0$  y  $Re=4$ .



**Figura 5.5.** Simulación de la velocidad radial vs longitud axial adimensionales en función de la posición en el plato inferior asociado a la coordenada radial  $r$ ,  $m=0$  y  $Re=20$ .

### 5.2.2. Velocidad axial

En la Fig. (5.6) y (5.7) se ilustra gráficamente la velocidad axial vs posición axial para diferentes valores de  $m$  asociado a la homogeneidad del sistema. Es importante enfatizar que la homogeneidad está asociada con la cantidad de fluido que entra a través de los orificios en el sistema. Esta simulación toma como valor fijo a la coordenada radial  $r=0.5$ , es decir que el análisis del perfil de velocidades se realiza exactamente a la mitad del sistema; además se hace una variación del valor de Reynolds ( $Re$ ) en donde se puede observar como este valor modifica las curvaturas de las simulaciones. La expresión analítica que representa lo mencionado anteriormente está representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Vz_1 = & ((m + 2)r^m)(1 + 2z^3 - 3z^2) - Re(2m + 1)(4m + 2)(r^{4m}) \left( \left( -\frac{9z^3}{35} \right) + \left( \frac{3z^5}{5} \right) - \right. \\ & \left. \left( \frac{3z^6}{5} \right) + \left( \frac{6z^7}{35} \right) - \frac{3z^2}{10} \right) - \left( -\frac{27z^2}{70} \right) - Re(m + 2)(3m + 2)(r^{3m}) \left( \left( -\frac{9z^3}{70} \right) - \left( -\frac{27z^2}{140} \right) + \right. \\ & \left. \left( -\frac{4z^7}{35} \right) + \left( \frac{2z^6}{5} \right) - \left( \frac{3z^5}{10} \right) - \left( \frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) \end{aligned}$$

De las Fig. 5.6 y 5.7, se puede analizar matemática y físicamente los siguiente:

#### Matemáticamente

El comportamiento de las curvas en la es el mismo independientemente de la variación del parámetro  $m$ , sin embargo, se puede observar que a valores pequeños de la longitud axial las curvas tienden a formar una meseta y que al llegar a puntos críticos de la longitud axial ( $z$ ) se aprecia un comportamiento monótono decreciente en dichas curvas.

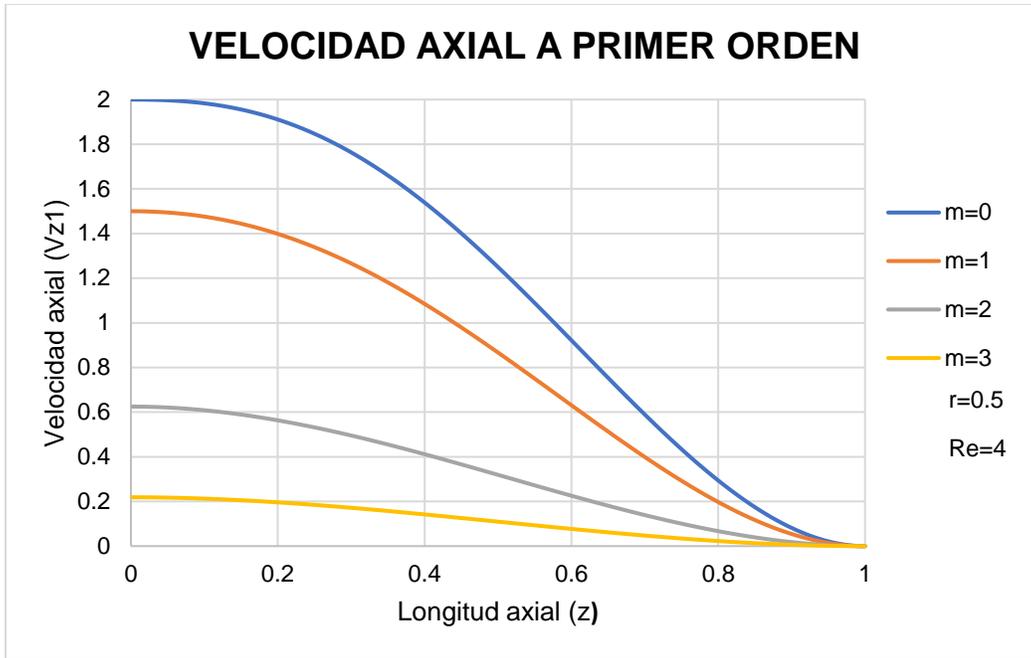
Se puede visualizar que conforme aumenta el valor de Reynolds la curvatura es más pronunciada para los valores pequeños en la longitud axial ( $z$ ) del sistema (Fig. 5.6 y 5.7) en comparación con la velocidad axial a orden cero (Fig. 5.2)

#### Físicamente

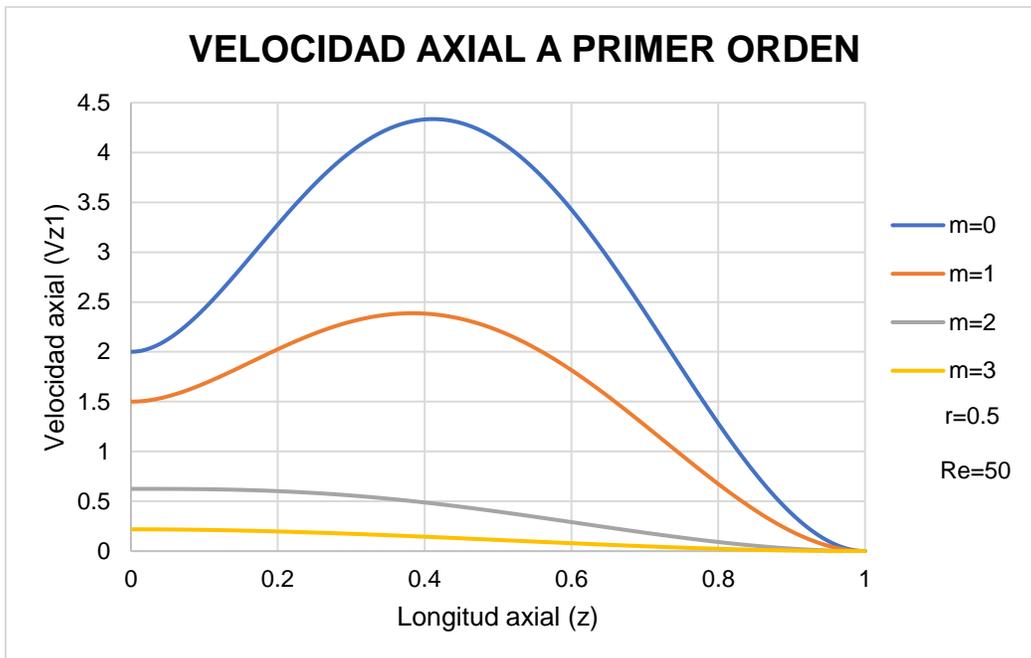
El parámetro  $m$  tiene la función de hacer que las curvas se trasladen a valores menores, es decir entre mayor es el valor de  $m$  la curvatura tendrá valores más pequeños en la velocidad axial del sistema, por lo tanto, el parámetro  $m$  controla el impacto de la componente  $z$  en la velocidad axial del sistema.

En los valores de Reynolds  $Re=4$  y  $Re=50$  de cada grafico se puede observar cómo los mecanismos inerciales dominan sobre los viscosos.

Se observa que el parámetro  $m$  es una variable independiente que tiene un gran impacto con respecto a la componente  $z$  del vector velocidad en el sistema. Enfatizando que cuando  $m$  es igual a cero en el sistema se considera un flujo homogéneo, es decir, que el volumen que entra por los orificios del plato inferior es el mismo; mientras que para valores mayores a cero el sistema tendrá un flujo no homogéneo.



**Figura 5.6.** Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro  $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema,  $r=0.5$  y  $Re=4$ .



**Figura 5.7.** Simulación de la velocidad axial vs longitud axial adimensionales en función del parámetro  $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema,  $r=0.5$ ,  $Re=50$ .

### 5.2.3. Gradiente de presión

La Fig. (5.8) representa gráficamente el gradiente de presión vs posición axial para diferentes valores del parámetro  $m$  asociado a la homogeneidad del sistema, el cual está asociada con la cantidad de fluido que entra a través de los orificios ya sea para el valor de  $m=0$  homogéneo o para  $m>0$  no homogéneo, con un valor fijo de Reynolds ( $Re=4$ ) debido a que en el sistema el flujo de entrada se da a velocidades muy bajas. La expresión analítica para el gradiente de presión está representada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(r)^{m+1} + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (r^{3m+1})$$

En la Fig. (5.8) podemos analizar las siguientes cuestiones matemática y físicamente:

#### **Matemáticamente:**

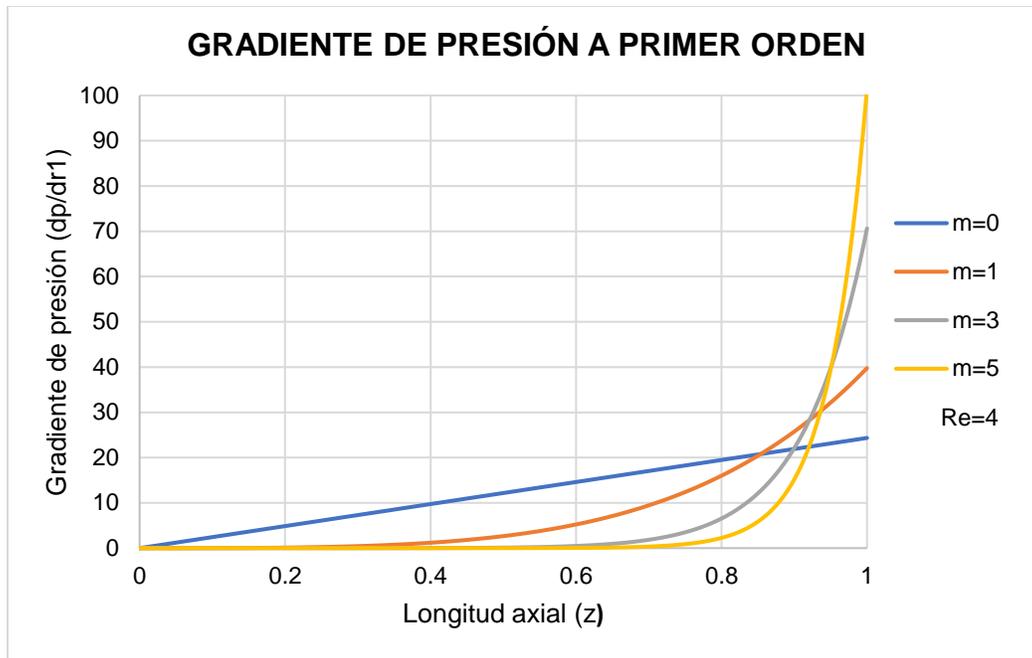
Cuando el parámetro  $m$  es igual a cero la curva es lineal debido a que en este valor el sistema es homogéneo, es decir que la cantidad de fluido que entra al sistema por los orificios del plato inferior es el mismo; sin embargo, se puede observar que para la no homogeneidad del sistema (valores diferentes a 0), las curvas formadas tienen un comportamiento creciente exponencial.

Se puede observar que en comparación con el gradiente de presión a orden cero (Fig. 5.3), el parámetro de Reynolds tiene un impacto significativo en las curvas ya que los valores de del gradiente de presión aumentan; para el caso de  $m=0$  (homogeneidad del fluido) los aumentan linealmente, sin embargo, para valores mayores a cero (no homogeneidad del sistema) potencializa significativamente los valores del gradiente de presión. Fig.5.8.

#### **Físicamente:**

El gradiente de presión es una función exclusiva de no homogeneidad y del parámetro de Reynolds del plato inferior del sistema, es decir que su comportamiento dependerá del parámetro  $m$  y del valor de Reynolds y no de las características del fluido del sistema en estudio.

El valor máximo del gradiente de presión se obtiene cuando el fluido llega al plato superior, en la Fig. (5.8) se puede apreciar que este valor es  $z=1$ .



**Figura 5.8.** Simulación del gradiente de presión vs longitud axial adimensionales en función del parámetro  $m$ , asociado a la homogeneidad del sistema,  $Re=4$ .

En la siguiente sección, se presentará un resumen del presente trabajo de investigación a nivel de licenciatura. A continuación, se enlistan los atributos de este capítulo

- A) Se obtuvieron las simulaciones a orden cero de las velocidades axiales, radiales y el gradiente de presión a orden cero.
- B) Se obtuvieron las simulaciones a primer orden de las velocidades axiales, radiales y gradiente de presión a primer orden.
- C) Se observa que los mecanismos inerciales del fluido aumentan la capacidad de carga del flujo por compresión, es decir la fuerza que impacta en el plato superior por efecto del líquido, o la fuerza de compresión sobre el fluido.

Finalmente, en el siguiente capítulo, se presentan las conclusiones finales de este trabajo, perspectivas a futuro y se sugieren las principales líneas de investigación que pueden continuar con este trabajo de fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos.

# **CAPÍTULO 6**

# **CONCLUSIONES**

## 6.1 Aportación al conocimiento

En este trabajo se propuso un esquema perturbativo aplicado a un sistema de lubricación por compresión. En particular se analizan los mecanismos inerciales, cortantes y extensionales. La geometría analizada es un sistema de platos paralelos circulares de radio  $r = a$  y longitud  $L$ . El fluido es colocado en el sistema en el plato inferior y este se queda adherido por efecto de la tensión superficial en el sistema. El plato superior, se aproxima al fluido con una velocidad  $V_z = dh(t) / dt$ , y produce un laminado radial. En este sistema, se asume que: (i) El proceso es cuasi-estacionario, i.e. el plato se aproxima al fluido a velocidades muy bajas, de tal manera que el sistema llega al equilibrio, y se puede suponer que la rapidez instantánea puede ser despreciada, i.e.,  $\partial V_z / \partial t = 0$ . El proceso es isotérmico, es decir la temperatura es constante y por lo tanto las propiedades materiales del sistema no cambian. Existe simetría cilíndrica, es decir cualquier variable cinemática o dinámica no depende de la coordenada angular  $\theta$ , i.e.  $\partial \{ \} / \partial \theta = 0$ . Los mecanismos gravitacionales son despreciables, y el fluido se deforma continua e irreversiblemente por un gradiente de presión inducido por un balance mecánico (Ecuación de Bernoulli).

Las variables cinemáticas y dinámicas importantes en el sistema son:

- A) Velocidad radial:  $V_r(r,z)$
- B) Velocidad axial:  $V_z(r,z)$
- C) Distribución de presiones:  $p(r)$
- D) Fuerza que ejerce el líquido en el plato superior
- E) Rapidez de deformación
- F) Rapidez de extensión

En este punto, la ecuación que resulta es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que describen los cambios de la velocidad en el tiempo-espacio y que para un fluido newtoniano se conoce como la ecuación de Navier-Stokes. Asumiendo que la masa se conserva, el conjunto de ecuaciones diferenciales que describe el sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \\ V_r(r,z=0) &= V_r(r,z=h(t)) = 0 \\ V_z(r,z=0) &= 0 \\ V_z(r,z=h(t)) &= dh(t)/dt \\ p(r=a) &= p_{atm} \end{aligned}$$

Este sistema es bastante complicado de manejar y la manera de abordarlo es con estas opciones:

- a) Numérico: (i) Diferencias finitas, (ii) Elemento finito, (iii) Sistemas híbridos
- b) Aproximaciones: (i) Ordenes de Magnitud, (ii) Perturbativo

Para los métodos simplificados, la clave es analizar como son los componentes del vector velocidad y entender que la componente dominante es la radial y la axial es pequeña. La masa que es comprimida es la que fluye radialmente por el sistema geométrico.

Fuido Comprimido-Axialmente = Fuido Comprimido-Radialmente

$$Mc = \rho Q = \rho \pi a^2 \left( -\frac{dh(t)}{dt} \right) = \rho 2\pi a h(t) \langle V_r(r = a, z) \rangle$$

Despejando la velocidad, se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\langle V_r(r = a, z) \rangle = \frac{1}{2} \frac{a}{h(t)} \left( -\frac{dh(t)}{dt} \right) \cong \frac{a}{h(t)} V_z$$

Entonces, esta aproximación, nos permite saber el orden de las velocidades. La velocidad radial es del orden de:

$$V_r \cong O\left( \frac{a}{h(t)} \left( -\frac{dh(t)}{dt} \right) \right) = O\left( \frac{a}{h(t)} V_0 \right)$$

$$V_z \cong O\left( -\frac{dh(t)}{dt} \right) = O(V_0)$$

$$r \cong O(r_c) = O(a)$$

$$z \cong O(z_c) = O(L)$$

$$p \cong O(p_c) = O\left( \frac{\mu V_0 a}{h^2(t)} \right)$$

$$\sigma_{ij} \cong O(\sigma_{(ij)c}) = O\left( \frac{\mu V_0 a}{h^2(t)} \right)$$

En las expresiones anteriores se definió la velocidad de aproximación del plato al fluido como:

$$V_0 = -\frac{dh(t)}{dt}$$

Estas velocidades son punto de partida para nuestro análisis adimensional. Cada uno de los términos de las ecuaciones es analizado con este criterio y se obtiene las siguientes expresiones, vía la derivada de una composición de funciones:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{Re} \alpha^1 \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \alpha^0 \left( -\frac{\partial p}{\partial r} \right) + \left( \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Re} \alpha^3 \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \alpha^0 \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \alpha^4 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \alpha^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

$$V_r(r, z = 0) = V_r(r, z = 1) = 0$$

$$V_z(r, z = 0) = 0$$

$$V_z(r, z = 1) = 1$$

$$p(r = 1) = p_{\text{atm}}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V_0 h}{\mu}; \alpha = \frac{h}{a} \ll 1; p_{\text{atm}} = \frac{p_{\text{atm}}}{\mu \frac{V_0}{h^2} a}$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales depende de dos números adimensionales asociados a los mecanismos inerciales y viscosos. Estos están definidos como:

$$\text{Re} = \frac{\rho V_0 h}{\mu}; \alpha = \frac{h}{a} \ll 1$$

El primero de ellos es el número adimensional de Reynolds asociado a la competencia entre las fuerzas viscosas e inerciales. El segundo de ellos, es el cociente entre dos longitudes características que relacionan el espacio en el sistema de estudio. Este número  $\alpha$  nos permite discriminar y proponer los términos a ordenes cero y primero y es punto de partida en nuestro análisis perturbativo. Los siguientes puntos importantes, son descritos a continuación:

- A) El parámetro perturbativo o de pequeñez es  $\alpha$ , i.e.,  $\alpha = h(t)/a \ll 1$
- B) Variables perturbadas: (i)  $V_r(r, z)$ , (ii)  $V_z(r, z)$ , (iii)  $p = p(r)$ , (iv)  $\sigma_{ij}(r, z)$

Entonces, la serie de potencias, que se propone para resolver el sistema, es la siguiente:

$$V_r = \alpha^0 V_{r_0} + \alpha^1 V_{r_1} + \alpha^2 V_{r_2} + \dots + \alpha^n V_{r_n}$$

$$V_z = \alpha^0 V_{z_0} + \alpha^1 V_{z_1} + \alpha^2 V_{z_2} + \dots + \alpha^n V_{z_n}$$

$$p = \alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots + \alpha^n p_n$$

Estas series de potencias, son substituidas en las ecuaciones de conservación de la masa y ecuaciones de movimiento para obtener las contribuciones a ordenes cero y primero respectivamente. A orden cero en el parámetro alfa, se tiene lo siguiente:

$O(\alpha^0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{r_0} + \frac{\partial V_{z_0}}{\partial z} &= 0 \\ 0 &= -\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_{r_0}}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ V_{r_0}(r, z=0) &= V_{r_0}(r, z=1) = 0 \\ V_{z_0}(r, z=0) &= 0 \\ V_{z_0}(r, z=1) &= 1 \\ p_0(r=1) &= p_{\text{atm}} \end{aligned}$$

A primer orden el parámetro alfa se tiene lo siguiente:

$O(\alpha^1)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_{r_1} + \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z} &= 0 \\ \text{Re} \left( V_{r_0} \frac{\partial V_{r_0}}{\partial r} + V_{z_0} \frac{\partial V_{r_0}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_{r_1}}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} \\ V_z(r, z=0) &= 0 \\ V_z(r, z=1) &= 0 \\ p(r=1) &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales es resuelto junto con las condiciones de frontera correspondientes y se obtienen los resultados presentados anteriormente. Los siguientes puntos importantes de las ecuaciones obtenidas, son enlistados a continuación:

### Orden cero

$O(\alpha^0)$ :

- A) A orden cero, el sistema se aproxima al flujo a gradiente de presión o flujo de Poiseuille en una rendija de espesor  $2B$ .
- B) Este método perturbativo es equivalente a la aproximación de lubricación propuesta en la literatura de mecánica de fluidos no-newtonianos y en la ciencia e ingeniería de polímeros.
- C) A orden cero, la presión describe un perfil parabólico en contraste con el perfil tradicional del flujo de Poiseuille. El flujo de Poiseuille es un perfil lineal, mientras que este, es similar al de la velocidad radial.

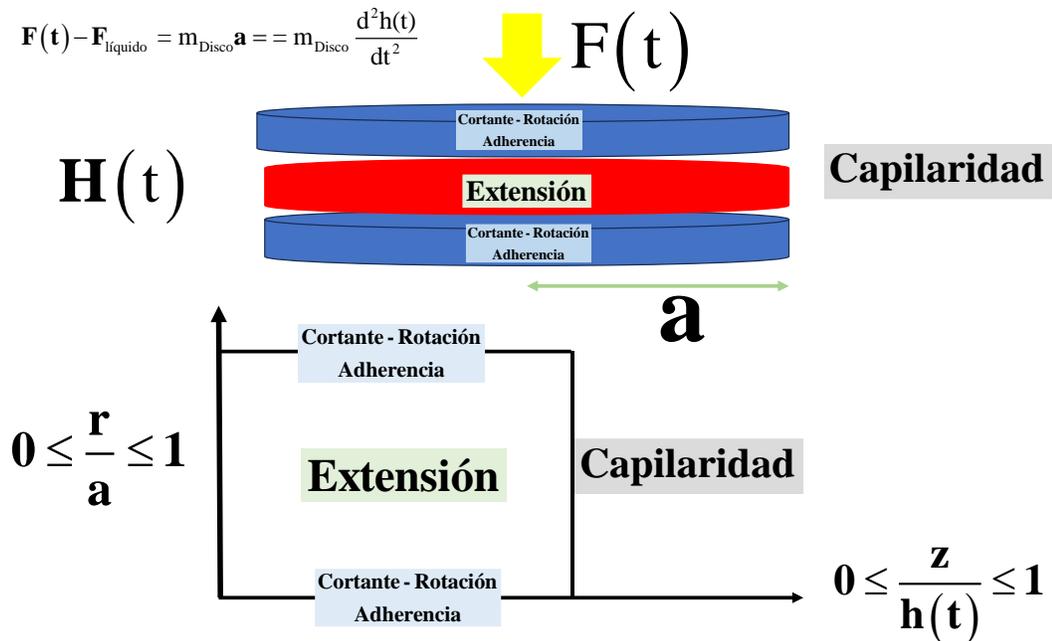
D) La expresión para la fuerza a orden cero, es la clásica expresión deducida por Stefan (1874). Esta fue deducida mediante análisis de ordenes de magnitud.

### **Primer orden**

#### **O ( $\alpha^1$ ):**

- E) A primer orden se incorporan los efectos convectivos del operador derivada material los cuales, están relacionados con los mecanismos inerciales y viscosos.
- F) De acuerdo con las condiciones de frontera, se observa que el perfil radial es parabólico y se desprecian los mecanismos de deslizamiento.
- G) El perfil axial es descrito por una ecuación cubica independiente de los números adimensional.
- H) A primer orden se observa un perfil parabólico modificado por los mecanismos inerciales a través del número de Reynolds.
- I) El perfil de velocidades axial se ve modificado por los mecanismos inerciales y presenta un aumento por efecto del número de Reynolds.
- J) El gradiente de presión involucra el número de Reynolds y su expresión matemática es cerrada, es decir es completamente analítica y no se recurre a métodos numéricos para su desarrollo.
- K) La fuerza a primer orden implica que existe una contribución por lo mecanismos viscosos e inerciales. Es claro que la fuerza, a primer orden aumenta por efecto de los mecanismos del fluido.

Este trabajo de investigación a nivel de licenciatura representa una aportación en entender los sistemas que presentan una mezcla cinemática de componentes cortantes y extensionales y es punto de partida en investigaciones en la formación de colágeno. Finalmente, en la siguiente Figura se hace un resumen del presente trabajo y cualitativamente, se busca las áreas en donde el flujo cortante, extensional y la mezcla cinemática de estos dos flujos.



**Figura 6.1** Ilustra las zonas en donde se puede presentar los mecanismos de corte y extensionales en el sistema de estudio.

A continuación, se presentarán las perspectivas del trabajo futuro y las líneas que se pueden seguir, en esta investigación a nivel de licenciatura.

## 6.2 Trabajo en progreso

Una línea natural de investigación de estos sistemas, es suponer que el fluido tiene componentes elásticas y que es de naturaleza compleja, es decir que se pueden emplear modelos más sofisticados para describir sus propiedades. A continuación, se mencionan algunas posibles líneas de investigación original:

- A) Emplear modelos que describan fluidos complejos como: (i) Sistemas micelares, (ii) Dispersiones de cristales líquidos, (iii) Polímeros, (iv) Fluidos biológicos: a) Sangre humana con hipercolesterolemia, b) Sangre con cirrosis hepática, c) Sangre con cancer, etc,
- B) Emplear ecuaciones reológicas nuevas que describan la formación y la destrucción de la estructura por efecto del flujo y que sean punto de partida en la descripción de fenómenos como: (i) Adelgazamiento al corte, (ii) Engrosamiento al corte, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexía, (v) Bando y (vi) efectos de concentración.
- C) Experimentos con fluidos no-newtonianos y complejos para contrastar las predicciones analíticas y numéricas con los datos experimentales.
- D) Simulaciones mediante computación científica en COMSOL-MULTIPHYSICS. En este punto, el espacio de estudio es una geometría rectangular de  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , con el fin de construir el mallado en el sistema, aplicar el método numérico y en el post-procesamiento construir las soluciones.

E) Evaluar los mecanismos inerciales de la geometría, a través de la segunda ley de Newton, i.e.,

$$F(t) - F_{\text{líquido}} = ma = m \frac{d^2 h(t)}{dt^2}$$

Finalmente, este trabajo de investigación representa una contribución en la búsqueda de sistemas complejos que utilizan como herramientas de carácter organizacional a los fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos y matemática aplicadas a sistemas de lubricación, ciencia de polímeros e ingeniería del tejido, entre otros.

# **BIBLIOGRAFÍA**

Bird RB, Stewart E, Lighfoot EN (2002), *Transport Phenomena*, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1987), *Dynamics of polymeric liquids*, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

Bhushan S, Singh S, Maiti TK, Sharma C, Dutt D, Sharma S, Li C, Eldin EMT (2022), Scaffold Fabrication Techniques of Biomaterials for Bone Tissue Engineering: A Critical Review. *Bioengineering*, 9, 728.

Campos LD, Santos Junior VA, Pimentel JD, Carregã GLF, Cazarin CBB (2023), Collagen supplementation in skin and orthopedic diseases: A review of the literature. *Heliyon*. 28, e14961.

Delpierre A, Savard G, Renaud M, Rochefort GY (2023), Tissue Engineering Strategies Applied in Bone Regeneration and Bone Repair, *Bioengineering*, 10, 644.

Deplaigne V, Rochefort GY (2022) Bone tissue engineering at a glance. *AIMS Bioeng.* 9, 22–25.

Engmann J, Servais C, Burbidge AS (2005), Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 132, 1-27.

Oliver DR, Shahidullah M (1981), Definitive load-enhancement effect by polymer-thickened oils in a squeeze film experiment, *J. Non-Newton. Fluid Mechs.* 9, 257-267.

Oliver DR, Ashton RC, Wadelin GD (1978), The load-bearing capacity of a continuous-flow squeeze film of liquid, *Appl. Sci. Res.* 34, 25-47.

Khadem SA, Rey AD (2021), Nucleation and growth of cholesteric collagen tactoids: A time-series statistical analysis based on integration of direct numerical simulation (DNS) and long

short-term memory recurrent neural network (LSTM-RNN). *J Coll. Interface Sci.* 15, 859-873.

Waters ND, Gooden DK (1984), The flow of an Oldroyd liquid in a continuous-flow squeeze film. *J. Non-Newton. Fluid Mechs.* 14, 361-376.

Waters ND, Gooden DK (1983), The flow of a power-law liquid in a continuous-flow squeeze film, *Appl. Sci. Res.* 40, 169-184.

Zheng Z, Xie H, Chen X, Liu X, Yang W, Xu Y, Huang W (2023), Squeeze flow of a Maxwell fluid between two parallel disks or two spheres. *Phys. Fluids*, 35, 083105

Zhou T, Lin D, Shen Y, Yang W, Xu C, Chen X (2023), The squeeze flow of a bi-viscosity fluid between two rigid spheres with wall slip, *Particuology*, 79, 153-160

Matsoukas A, Mitsoulis E, Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics (2003), *J. Non-Newton. Fluid Mechs.* 109, 231–240.

Roussel N, Lanos C (2003), Plastic fluid flow parameters identification using a simple squeeze test, *Appl. Rheol.* 13, 132–141.

Meeten GH (2004), Squeeze flow of soft solids between rough surfaces, *Rheol. Acta* 43, 6–16.

Burbidge AS, Servais C (2004), Squeeze flow of apparently lubricated thin films, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 124, 115–127.

Kompani M, Venerus DC (2000), Equibiaxial extensional flow of polymers melts via lubricated squeezing flow: I. Experimental analysis, *Rheol. Acta* 39, 444–451.