



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**ESTUDIO DEL FLUJO POR COMPRESIÓN ENTRE DOS PLATOS DE
UN LIQUIDO NEWTONIANO**

**TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO
PRESENTA:
ALEJANDRO CARRANZA DIAZ**

**DIRECTOR DE TESIS
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**ASESORES
DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA
M.C. DOCTORANTE, LUIS ANTONIO TORRES RAMÍREZ**

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 04 de diciembre del 2024





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Carranza Diaz Alejandro con número de cuenta 419118875 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de Diciembre del 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez
Suplente:	M. en C. e I. M. Luis Antonio Ramírez Torres

El título de la tesis que se presenta es: “Estudio del flujo por compresión de un líquido Newtoniano: Modelado matemático y simulación en el programa de Mathematica”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M. en C. e I. M. Luis Antonio Ramírez Torres

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> << Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la Unidad de Bio-Ingeniería UI-FESZ-110323
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LUI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LUI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

DEDICATORIAS

Con gran orgullo y dedicación hacia mis padres: **Aydee Diaz y Alejandro Carranza**, por siempre apoyarme y guiarme no solo largo de toda mi carrera, sino en toda mi vida, el cual ha sido de gran admiración y apoyo para permitirme culminar mi carrera profesional, el cual es el mejor regalo y herencia para toda mi vida. Con gran admiración, amor y respeto, siempre serán mi gran ejemplo para seguir.

A mi abuelita **Merced Miguel Valenzuela**, quien con sus bendiciones día a día, hacia que diera de mi lo mejor, además de que siempre me decía que podía con eso y más; por siempre cuidarme y nunca dejarme decaer, pues siempre fue mi motor para dar lo mejor de mí.

A mi hermano (**Israel Carranza Diaz**), porque siempre estuvo para mí, además de que me da muchos ánimos para nunca rendirme y así poder cumplir todas mis metas que yo mismo me proponga.

A mis grandes mejores amigos de la universidad (Carlos Armando Velázquez Guerra, Eberth Neftali Mata Santoyo, Efrén David Palafox Vargas y Barrios Islas José Alfonso), que siempre me dieron momentos tan maravillosos y divertidos a su lado, el cual disfruté durante toda mi estancia en la universidad, además de siempre estar cuando los necesité.

INDICE

AGRADECIMIENTOS.....	3
GLOSARIO	9
RESUMEN	11
CAPÍTULO 1	12
INTRODUCCIÓN	12
CAPÍTULO 2	16
PROBLEMA FÍSICO	16
2.1 Análisis del problema.....	17
2.2 Ecuaciones teóricas.....	17
CAPÍTULO 3	20
MODELADO MATEMÁTICO	20
3.1 Tensores cinemáticos.....	21
3.2 Modelado teórico.....	21
CAPÍTULO 4	28
MECANISMOS VISCOSOS	28
4.1 Teoría a orden cero.....	29
4.6 Resumen de las ecuaciones perturbadas.....	30
4.7 Calculo del gradiente de presión.....	31
4.8 Ecuacion de la fuerza perturbada a cero.....	32
4.9 Cálculo de la viscosidad aparente: Fuerza constante.....	33
4.10 Resumen de las ecuaciones obtenidas en la fuerza a orden cero.....	33
CAPÍTULO 5	34
MECANISMOS INERCIALES	34
5.1 Teoría a primer orden.....	35
5.6 Componente radial de la velocidad: $0\alpha 1$	37
5.7 Componente axial de la velocidad: $0\alpha 1$	38
5.4 Presión a primer orden: $0\alpha 1$	38
5.5 Fuerza a primer orden: $0\alpha 1$	38
5.6 Resumen de la ecuaciones obtenidas a primer orden.....	39
CAPÍTULO 6	40
SIMULACION Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	40
CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFIA	51

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Flujo por compresión	(14)
Figura 2. Ilustración del sistema de flujo continuo por compresión, el líquido newtoniano entre dos placas	(17)
Figura 3. representación grafica de la ec. De la velocidad radial obtenida perturbada a orden cero	(41)
Figura 4.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a orden cero.....	(42)
Figura 5.- Representación gráfica de del gradiente de presión a orden cero	(43)
Figura 6.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a primer orden	(44)
Figura 7.- Representación gráfica de la ec. obtenida de la velocidad axial perturbada a orden cero.....	(45)
Figura 8.- Representación gráfica del gradiente de presión a primer orden	(46)

NOMENCLATURA

Variables dimensionales.

a	Radio del disco (r) [m]
z	Separación entre discos $H(t)$ [m]
V_z	Velocidad Axial dimensional [m/s]
V_r	Velocidad Radial dimensional [m/s]
$\frac{dp}{dr}$	Gradiente de presión [Pa/m]
Re	Numero de Reynolds
$\{r,z\}$	Coordenadas axial y radial respectivamente [m]
F_{Nm}	Fuerza de compresión a flujo no homogéneo
F_{N0}	Fuerza de compresión a flujo homogéneo
P	presión hidrostática
P_{atm}	presión atmosférica
$\langle V \rangle$	Velocidad promedio

Variables adimensionales

p_0	Presion perturbada a orden cero
p_1	Presion perturbada a primer orden
$\frac{dp_0}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a orden cero
$\frac{dp_1}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a primer orden
F_0	Fuerza perturbada a orden cero
F_1	Fuerza perturbada a primer orden
$\{r^*,z^*\}$	Coordenadas axial y radial adimensional
V_{r^*}	Velocidad radial adimensional
V_{z^*}	Velocidad axial adimensional
V_{z0}	Velocidad axial perturbada a orden cero
V_{r0}	Velocidad radial perturbada a orden cero
V_{z1}	Velocidad axial perturbada a primer orden
V_{r1}	Velocidad radial perturbada a primer orden
p^*	Presión hidrostática adimensional
t^*	Tiempo adimensional

$h \dot{}$ Altura adimensional (cambio de la altura respecto al tiempo)

Letras griegas

μ Viscosidad del fluido [Pa*s]

ρ Densidad del liquido [Kg/m³]

Vectores y tensores.

D Tensor de rapidez de deformación [1/s]

σ Tensor de esfuerzos [Pa]

V Vector velocidad. [m/s]

∇V Tensor gradiente de velocidad [1/s]

∇V^T Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]

GLOSARIO

1. Deformación

Es aquel cambio relativo que hay de la posición con respecto a otra en un medio continuo, es decir, es la alteración de la forma de un cuerpo lograda mediante la aplicación de fuerzas sobre el.

2. Fluido

Es aquel medio continuo que es formado por alguna sustancia y que, al aplicarle un esfuerzo este se forma continua e irreversiblemente.

3. Fluido incompresible

Aquel medio continuo que es formado por alguna sustancia y que tiene una densidad constante.

4. Fluido Newtoniano

Es un fluido que tiene viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.

5. Fluido No-Newtoniano

Es un fluido donde su viscosidad es dependiente de la rapidez de deformación.

6. Fluido adelgazante al corte

Es aquel fluido en el que su viscosidad decrece por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.

7. Fluido engrozante al corte

Es aquel fluido en el que su viscosidad aumenta cuando existe o se da un efecto de rapidez de deformación.

8. Fluido volumétrico

Es el volumen de fluido que pasa por una superficie dada en un determinado tiempo, es decir, es el volumen por unidad de tiempo.

9. Rapidez de deformación

Es el cambio que se da en elongación o contracción de un material de un determinado componente, objeto o sistema de estudio, es decir, es el cambio o evolución temporal de la deformación.

10. Viscosidad

Es la medida de la resistencia que poseen los fluidos al movimiento o a fluir.

11. Ecuación de continuidad de Newton

Es una relación que hay entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico, como lo pueden ser: presión, volumen, tensión, deformación, temperatura, densidad, entropía, etc., es decir, es aquella ecuación que relaciona las variables dinámicas de un sistema, en donde particularmente para la reología se relaciona el esfuerzo y la deformación.

12. Ecuación de continuidad

Es una ecuación diferencial parcial que nos demuestra o representa la conservación de materia en un sistema físico.

13. Ecuación de movimiento

Es la segunda ley de Newton, la cual es aplicada en un medio continuo

14. Ecuación de Navier- Stokes

Es la ecuación de movimiento que se aplica a un fluido Newtoniano, las cuales describen el movimiento tridimensional de sustancias fluidas viscosas

15. Estado estacionario

Es cuando las variables que definen el comportamiento, respecto al tiempo, permanecen invariantes en un sistema o proceso, es decir, es el estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.

RESUMEN

En esta investigación a nivel de licenciatura se analiza un sistema que combina mecanismos cortantes y extensionales. El sistema que se analiza es la compresión de un fluido newtoniano entre dos geometrías circulares de radio $r = a$ y separados a una distancia $H(t)$. La fuerza ejercida por el plato superior induce un gradiente de presión y por lo tanto dos componentes del vector velocidad, una radial y axial respectivamente.

Asumiendo que el sistema se encuentra en estado pseudo-estacionario, isotérmico y líquido incompresible y que los mecanismos inerciales son despreciables, se obtiene un balance entre el gradiente de presión en la dirección radial y la componente rz de la ecuación de movimiento.

A partir de esto y la ecuación de Newton, se obtiene la velocidad radial y axial del sistema a través de la ecuación de continuidad. Suponiendo conservación de masa, se obtiene una expresión cerrada para el gradiente de presión radial.

A partir de las velocidades se obtiene las magnitudes del tensor rapidez de deformación y del tensor de vorticidad. A partir de esto, se calcula el tipo de flujo K que nos da una medida de los mecanismos cortantes, extensionales y de vorticidad.

El gradiente de presión con respecto a la sección transversal, se obtiene la expresión para la fuerza en función de las propiedades materiales del sistema.

Este sistema se puede emplear para la caracterización de fluidos newtonianos a través de la fuerza que experimenta y la altura del descenso del plato superior sobre el fluido.

Palabras claves:

Fluido Newtoniano, Flujo por compresión, Viscosimetría, Análisis de ordenes de magnitud y Teoría de perturbaciones a ordenes cero y primero.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Preliminares

El estudio de sistemas que involucran componentes cortantes es ampliamente investigado en mecánicas de fluidos y transferencia de momento (Ref). Este tipo de sistemas es el punto de partida de muchos cursos y trabajos de investigación en el área de mecánica de fluidos no-newtonianos (Ref). Este consiste principalmente en flujos homogéneos en donde, la rapidez de deformación del sistema es constante e independiente del líquido (Ref). El flujo extensional se origina cuando solamente tenemos, componentes en la diagonal principal del tensor gradiente de velocidad $\nabla\mathbf{V}$ o tensor rapidez de deformación \mathbf{D} . El flujo extensional es de lo más difícil de generar debido a que los experimentos muestran que se induce mediante una transición de flujo cortante en las paredes a extensional en el centro del sistema. Los puntos más importantes de este sistema son los siguientes:

- A) El flujo cortante es un flujo débil.
- B) El flujo extensional es un flujo fuerte que induce la orientación de los elementos materiales en el sistema de flujo.
- C) En un flujo no controlado existen los dos sistemas, es decir, son mezclas cinemáticas que contienen este tipo de deformaciones.

Ejemplos de flujos homogéneos controlados es el que se obtiene en un reómetro en el cual la rapidez de deformación es homogénea, no depende de la posición. El flujo no-homogéneo se genera en sistemas que son deformados continua e irreversiblemente mediante un gradiente de un potencial (presión, gravitacional, potencial eléctrico, Ref).

Por otra parte, existen sistemas en donde se obtiene la combinación de flujo cortante y extensional (Ref). Un ejemplo de este sistema, es en el recubrimiento de polímeros en el cual, hay un sustrato móvil en donde existen un fluido entre dos platos (Ref). El plato de arriba esta inclinado por lo que en las paredes se tienen componentes cortantes, y en el centro es extensional (Ref). Este tipo de sistemas se ha estudiado en la generación de tejido humano mediante colágeno tipo II.

En esta tesis, se discutirá una de los sistemas mas complejos desde el punto de vista de la reología, el cual contiene elementos cortantes y extensionales conocido como flujo por compresión entre discos paralelos. El flujo por compresión se estudia en el área de reología de sistemas newtonianos y no-newtonianos en biopolímeros. Este sistema, consiste en un fluido viscoso que descansa en el plato inferior de un sistema de platos paralelos separados a una distancia $H(t)$. En este sistema el plato superior se aproxima por medio de una velocidad constante y comprime el fluido generándose una transición de flujo cortante en las paredes extensional respectivamente. En este proyecto, la meta principal es entender y deducir la ecuación deducida por Stefan mediante un análisis de ordenes de magnitud.

$$F(t) = \frac{3}{2} \frac{\mu\pi \dot{H}(t)}{H^3} a^4$$

En donde η_0 es la viscosidad a bajo corte y dH/dt es la derivada de H en notación Newtoniana.

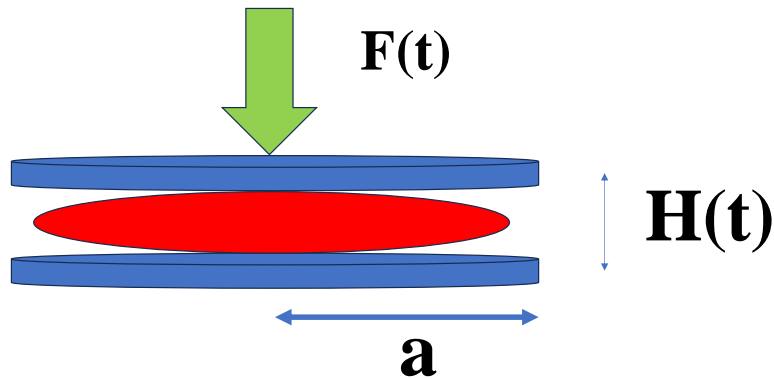


Figura 1.1 Ilustra el sistema de flujo por compresión. El líquido es colocado en el plato inferior y el plato superior se aproxima al líquido con una velocidad $-dh/dt$. El líquido es comprimido, de tal manera que el sistema presenta una transición de flujo de cortante en las paredes a extensional en el medio del sistema.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Flujo por compresión

El flujo por compresión consiste en un fluido que es colocado entre dos platos circulares separados a una distancia $H(t)$ (Ref). El plato superior se aproxima al plato superior comprimiendo al sistema, por lo que existe un laminado radial (Ref). Las investigaciones se han centrado en los siguientes puntos importantes (Ref):

- I. Fluidos
 - A) Fluidos viscosos newtonianos
 - B) Fluidos viscosos no-newtonianos inelásticos
 - C) Fluidos viscosos no-newtonianos elásticos
 - D) Fluidos complejos: (i) sistemas micelares, (ii) polímeros, (iii) dispersión de cristales líquidos, etc.
- II. Geometría
 - A) Platos paralelos
 - B) Rectangulares
 - C) Esféricas
- III: Métodos matemáticos
 - A) Asintóticos
 - B) Perturbativo
 - C) Numéricos
 - D) Simulaciones en COMSOL

Este trabajo estudia este tipo de fluidos estructurados en el régimen de viscoelasticidad lineal tomando en cuenta las contribuciones del solvente y las del polímero. De esta manera, se plantea la siguiente hipótesis de trabajo para la presente investigación a nivel de licenciatura

1.3 Hipótesis

Si el efecto del introducir una componente oscilatoria en el gradiente de presión modifica el flujo volumétrico, entonces esta será cuantificada a través de la función de transferencia compleja y los mecanismos inerciales, solvente y viscoelásticos. Para debatir esta hipótesis, se plantean los siguientes objetivos, los cuales son mencionados a continuación:

1.4 Objetivos de la investigación:

1.4.1 General

Estudiar la respuesta dinámica del flujo por compresión de un fluido newtoniano en un sistema de platos paralelos.

1.4.2 Particular

P.1 Utilizar las ecuaciones de continuidad y transporte con el fin de analizar mediante ordenes de magnitud, que términos son más importantes en el análisis del flujo por compresión.

P.2 Obtener expresiones analíticas para la velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión y fuerza de compresión en función de las variables geométricas, cinemáticas y la rapidez con la que se aproxima el plato al fluido

P.3. Obtener una expresión de la altura del plato suponiendo que en el sistema se aplica una fuerza constante $F(t) = F_0$.

P.4. Utilizar datos reométrico provenientes de la literatura con el fin de probar las bondades de los trabajos obtenidos.

1.5 Distribución del material

En este trabajo, el material se distribuye de la siguiente manera: En el primer capítulo se dio la introducción al flujo por compresión, el estado del arte, hipótesis, objetivo general, objetivos particulares, En el segundo capítulo, se presenta el problema físico y las ecuaciones de continuidad, transporte y reológica. En el tercer capítulo se deduce la ecuación de la fuerza que experimenta el fluido debido al plato superior, suponiendo que los mecanismos inerciales son despreciables, líquido compresible y estado cuasi-estacionario. En el cuarto capítulo se presenta el esquema perturbativo y el orden cero. En el quinto capítulo se presentan los mecanismos inerciales a través del primer orden. En el último capítulo, se dan las conclusiones, trabajo futuro y aportación al conocimiento.

CAPÍTULO 2

PROBLEMA FÍSICO

2.1 Análisis del problema

Para modelar el sistema se suponen las siguientes restricciones físicas. El sistema fluye por dos geometrías. La primera de ellas, es una rendija y la segunda es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.

- El líquido complejo es incompresible, i.e. su volumen no cambia.
- El proceso es isotérmico, i.e. la temperatura es constante y no es necesario el balance de energía.
- El fluido contiene dos contribuciones: c.1. Solvente y c.2 Polímero.
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables, el fluido es cortado por un gradiente de presión oscilatorio, el cual depende del tiempo y de la frecuencia.
- El sistema de coordenadas es colocado en el centro del tubo por lo que, se supone simetría cilíndrica.

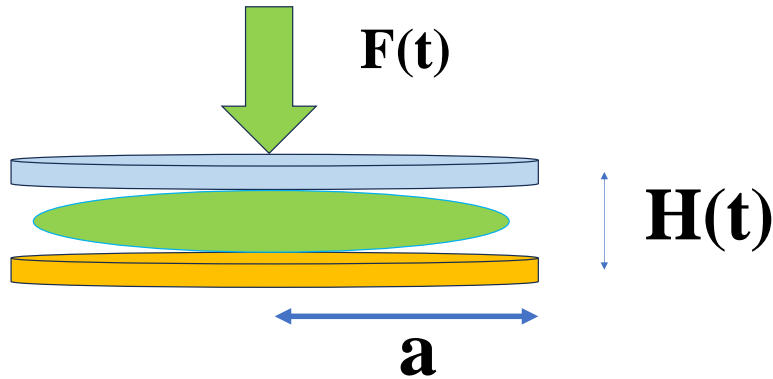


Figura 2.1. Ilustra el sistema de flujo por compresión. El líquido Newtoniano está entre las dos placas, a flujo volumétrico constante. La distancia de separación de los platos es H y el radio de los platos es $r = a$.

2.2 Ecuaciones teóricas

Las ecuaciones teóricas que se utilizarán en la descripción de la física del sistema.

2.2.1 Ecuación de continuidad

$$\frac{DLn\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

2.2.2 Ecuación de Cauchy en su segunda forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

Ecuación reológica

La ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} \quad (3)$$

En donde la contribución del solvente se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \quad (4)$$

Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (2)

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

Por conmutatividad

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (2D) + \rho g \quad (6)$$

Al combinar las Ecs. (4-6), se obtiene la siguiente expresión para la ecuación dinámica, i.e.,

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla \cdot [\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T]) + \rho g \quad (7)$$

Distribuyendo el operador divergencia, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}^T)) + \rho g \quad (8)$$

La Ec. (6), se puede simplificar a:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla [\nabla \cdot \mathbf{V}]) + \rho g \quad (9)$$

Suponiendo fluido incompresible, es decir densidad constante, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla [\nabla \cdot \mathbf{V}]) + \rho g$$

Por lo tanto, queda de la siguiente manera:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \quad (10)$$

Desarrollando la derivada material del vector velocidad \mathbf{V}

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \end{aligned} \quad (11)$$

El sistema se encuentra en estado estacionario, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \\ \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \end{aligned} \quad (13)$$

Suponiendo que los mecanismos gravitacionales son despreciables, i.e.,

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho g \cong -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (14)$$

Por lo que la Ec. (11), toma la forma:

$$\therefore \boxed{\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}} \quad (15)$$

2.3 Tipos de Flujo

En esta sección se presentan un instrumento matemático que permitirá establecer una metodología para deducir que mecanismo de flujo domina en el sistema (Poole 2023). Si se define el índice de flujo K de la siguiente manera:

$$K = \frac{|\mathbf{D}| - |\mathbf{W}|}{|\mathbf{D}| + |\mathbf{W}|} \quad (16)$$

En la Ec. (16), la magnitud de los tensores \mathbf{D} y \mathbf{W}

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})} \quad (17)$$

Por lo que

$$|\mathbf{W}| = \sqrt{2(\mathbf{W} : \mathbf{W})} \quad (18)$$

La Ec. (16) es una medida de los mecanismos cortantes y extensional. Existen tres valores asintóticos del parámetro K , por lo que:

$$K = \begin{cases} 1: \text{Flujo-extensional} \\ 0: \text{Flujo-cortante} \\ -1: \text{Rotacional} \end{cases} \quad (19)$$

En el siguiente capítulo se presentará la deducción de las ecuaciones principales:

- a) Velocidad radial
- b) Velocidad axial,
- c) Gradiente de presión
- d) Fuerza normal del plato al líquido
- e) Altura de descenso del plato

CAPÍTULO 3

MODELADO MATEMÁTICO

3.1 Tensores cinemáticos

Para obtener las componentes de las ecuaciones de transporte correspondientes, se empearán los siguientes vectores y tensores cinemáticos y dinámicos en el sistema.

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (V_r(r,z), 0, V_z(r,z)) \quad (1)$$

El tensor gradiente de velocidad tiene la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

El tensor rapidez de deformación \mathbf{D} y el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ tienen la siguiente forma:

$$2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Y el tensor de esfuerzos este definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4)$$

3.2 Modelado teórico

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\therefore \rho \neq \rho(r, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0$$

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

Como la derivada es constante:

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

En esta sección se modelará solamente el capilar de radio $r = a$ y longitud L . En coordenadas cilíndricas el sistema, se puede modelar de la siguiente manera:

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{(V_\theta)^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_r \right) \quad (7)$$

Se eliminarian en el componente teta por que no es de nuestro interes en este caso

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_\theta \right) \quad (8)$$

Se eliminarian los componentes de “Z” por que al igual no es de nuestro interes en este caso

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

Por lo tanto solo se conservara el de la componente en “r”, debido a que es la que se analizara.

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{(V_\theta)^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

Si, se desprecian los efectos de la curvatura del sistema geométrico, se tiene la siguiente expresión analítica en la coordenada radial r:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (11)$$

La Ec. (11) puede ser descrita como:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (12)$$

Integrando una vez con respecto a la coordenada axial z, se obtiene la siguiente expresion analítica:

$$\int \partial \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \int \partial z \quad (13)$$

Resultando lo siguiente:

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} (z) + C1 \quad (14)$$

De nuevo despejamos una parcial (∂z) de lado derecho para poder hacer la segunda integral respecto ala coordenada z

$$\int \partial V_r = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \int (z) \partial z + C1 \int \partial z \quad (15)$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades radial que depende de r y z, toma la forma:

$$V_r(r, z) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{z^2}{2} + C1z + C2 \quad (16)$$

Las condiciones de frontera para el perfil general tiene la siguiente: estructura:

$$z = 0 \Rightarrow V_r(r, z) = 0 \quad (17 \text{ a,b})$$

$$z = h(t) \Rightarrow V_r(r, z) = 0$$

Sustituyendo la condición de frontera C.F.1:

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{(0)^2}{2} + C1(0) + C2 \quad (18)$$

Despejando C2 de la primer condicion de frontera queda:

$$C2 = 0 \quad (19)$$

Aplicando la segunda condicion de frontera obtenemos:

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{[h(t)]^2}{2} + C1[h(t)] + 0 \quad (20)$$

Despejando C1 queda:

$$C1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} [h(t)] \quad (21)$$

Sustituyendo C1 y C2 en la ecuacion general queda:

$$Vr(r, z) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{z^2}{2} + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} [h(t)]\right)z + 0 \quad (22)$$

Al sustituir las condiciones de frontera, se tiene lo siguiente:

$$Vr(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} H(t)\right)z \quad (23)$$

Al integrar la ecuacion con respecto a z y utilizando la ecuación de continuidad, se tiene lo siguiente:

Con la ecuacion de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) + \frac{\partial Vz}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

Reacomodando la ecuacion para poder interarla respecto a z:

$$\frac{\partial Vz}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) \quad (25)$$

Despejando la parcial de Z (∂z) hacia el lado derecho para poder integrarla:

$$\partial Vz = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) (\partial z) \quad (26)$$

Integrandola respecto a z:

$$\int \partial Vz = \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) (\partial z) \quad (27)$$

Pero ahora sustituyendo la Ec. (23) en Vr quedaria como:

$$\int \partial Vz = \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{z^2}{2} + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} [h(t)]\right)z \right) \right] (dz) \quad (28)$$

Separando integrales y acomodando todo respecto a como va queda:

$$Vz(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^z r \frac{z^2}{2\mu} \frac{dp}{dr} dz + \int_0^z r \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dr} [h(t)] dz \quad (29)$$

$$Vz(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dr} \int_0^z z^2 dz + \left(-\frac{[h(t)]}{2\mu} \frac{dp}{dr}\right) \int_0^z z dz \quad (30)$$

$$Vz(r, z) = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{3} \frac{z^3}{\mu} \frac{dp}{dr} + \frac{r[h(t)]}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{z^2}{2} \right] \quad (31)$$

Factorizando $\left(r \frac{dp}{dr}\right)$ de la ecuacion queda como:

$$Vz(r, z) = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{z^3}{\mu} - \frac{[H(t)]}{\mu} \frac{z^2}{2} \right] \quad (32)$$

$$Vz(r, z) = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{3\mu} z^3 + \left(-\frac{1}{2\mu} H(t)\right) z^2 \right) \quad (33)$$

Sustituyendo la condicion de frontera, $z = H(t)$, la velocidad $Vz(r, t) = -dH(t)/dt$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$-\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{H(t)^3}{\mu} - \frac{H(t)^3}{2\mu} \right] \quad (34)$$

Realizamos la resta de fracciones y las quedamos:

$$-\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left[\frac{-1\mu H(t)^3}{6\mu^2} \right] \quad (35)$$

Simplificando la Ec. (35)

$$\frac{-\frac{dH(t)}{dt}}{\frac{1\mu H(t)^3}{6\mu^2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (36)$$

Resolviendo la division de las fracciones nos queda lo siguiente:

$$\frac{6\mu dH(t)}{H^3(t)dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (37)$$

Haciendo las diferenciales respecto a lo que nos indica en ese punto nos queda:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \frac{H(t)}{H^3} \quad (38)$$

Sustituyendo la Ec. (38) en la Ec.(27) del perfil de velocidades, se tiene lo siguiente:

$$Vz(r, z, t) = 6\mu \frac{H^0(t)}{H^3} \left[\frac{1}{3\mu} z^3 + \left(-\frac{1}{2\mu} H(t) \right) z^2 \right] \quad (39)$$

Simplificando

$$Vz(r, z, t) = 6\mu H^0(t) \left[\frac{1}{3\mu} \frac{z^3}{H^3(t)} + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{H(t)}{H^3(t)} \right) z^2 \right] \quad (40)$$

Eliminando la viscosidad μ queda:

$$Vz(r, z, t) = 6H^0(t) \left[\frac{1}{3\mu} \frac{z^3}{H^3(t)} + \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{z^2}{H^2(t)} \right) \right] \quad (41)$$

La Ec. (41) puede escribirse como:

$$Vz(r, z, t) = 6H(t) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{z}{H(t)} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{H(t)} \right)^2 \right) \quad (42)$$

Fuerza normal en plato superior

La fuerza que experimenta el plato superior por efecto del fluido, se puede calcular de la siguiente manera:

$$p = \frac{F}{A} \quad (43)$$

En forma diferencial, la Ec. (43) toma la forma:

$$-\frac{dF}{dA} = p \quad (44)$$

Sin embargo, como la presión está en función del componente r .

$$-\frac{dF}{dA} = p(r) \quad (45)$$

Despejando a $-dF$

$$-dF = p(r)dA \quad (46)$$

Integrando en ambos lados la Ec. (46)

$$-\int dF = \int p(r)dA \quad (47)$$

Por lo que,

$$-F = \int p(r)dA \quad (48)$$

Al integrar la Ec. (48), se tiene lo siguiente:

$$F = \int_S p(r)dA = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r)rdrd\theta \quad (49)$$

De la doble integral, primeramente se desarrollara la integral interna (por partes)

$$\int_0^a p(r)rdr \quad (50)$$

En donde se seleccionaron las siguientes variables

$$u = p(r); du = \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (51)$$

Y

$$dv = r dr; v = \frac{r^2}{2} \quad (52)$$

Tomando en cuenta que la formula de integracion por partes es igual a

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (53)$$

Sustituyendo en la formula de la integracion por partes

$$\int_0^a p(r) r dr = p(r) \frac{r^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (54)$$

Evaluando la funcion $p(r) \frac{r^2}{2}$ de 0 a "a"

$$\int_0^a p(r) r dr = \left[p(r) \frac{r^2}{2} \right]_0^a - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (55)$$

Realizando la evaluacion

$$\int_0^a p(r) r dr = \left[p(r = a) \frac{a^2}{2} - p(r = 0) \frac{0^2}{2} \right] - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (56)$$

Desarrollando

$$\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (57)$$

Realizando la integral exterior 0 a 2π con el resultado de la integracion por partes de la integral interior.

$$F = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \right] d\theta \quad (58)$$

Sacando constantes de la integral

$$F = \left[\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \right] \int_0^{2\pi} 1 d\theta \quad (59)$$

Realizando la integral de 0 a 2π

$$F = \left[\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \right] [\theta]_0^{2\pi} \quad (60)$$

Evaluando la integral resulta en los limites superior e inferior

$$F = \left[\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \right] [2\pi - 0] \quad (61)$$

Desarrollando

$$F = \left[\int_0^a p(r) r dr = p(r = a) \frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \right] [2\pi] \quad (62)$$

Realizando la multiplicacion de 2π

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = 2\pi p(r = a) \frac{a^2}{2} - 2\pi \int_0^a \frac{r^2}{2} \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (63)$$

Desarrollando y eliminando terminos comunes

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = \pi p(r = a) a^2 - \pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \quad (64)$$

Al integrar por partes, se tiene lo siguiente:

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = \pi p(r = a) a^2 - \pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \quad (65)$$

Si suponemos que en $r = a$, la presión es $p(r = a) = 0$, se tiene lo siguiente:

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = \pi p(r = a) a^2 - \pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \quad (66)$$

Como $p(r = a) = 0$, entonces

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = \pi a^2 0 - \pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \quad (67)$$

Quedando:

$$F = -\pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \quad (68)$$

Del gradiente de presión, integrando se tiene lo siguiente:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = -6\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_1 \quad (69)$$

Despejando la letra r hacia el otro lado es:

Por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -6\mu \frac{H(t)}{H^3} r + \frac{C_1}{r} \quad (70)$$

Al integrar, se tiene lo siguiente:

$$\partial p = -6\mu \frac{H(t)}{H^3} r \partial r + C_1 \frac{\partial r}{r} \quad (71)$$

Integrando:

$$\int \partial p = -6\mu \frac{H(t)}{H^3} \int r \partial r + C_1 \int \frac{\partial r}{r} \quad (72)$$

Quedando como:

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (73)$$

En $r = 0$, la presión debe de estar definida por lo que, se tiene lo siguiente:

Evaluando solo un r queda como

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_1 \ln(0) + C_2$$

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_2 \quad (74)$$

En $r = a$, la $p = 0$

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + C_2 \quad (75)$$

Evaluando:

$$p(0) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} a^2 + C_2 \quad (76)$$

Despejando para la constante C2, se tiene:

$$C_2 = 3\mu \frac{H(t)}{H^3} a^2 \quad (77)$$

Sustituyendo la constante C2 en la general queda :

$$p(r) = -3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + 3\mu \frac{H(t)}{H^3} a^2 \quad (78)$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$p(r) = + 3\mu \frac{H(t)}{H^3} a^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (79)$$

Sustituyendola en la ecuacion de la fuerza y haciendo la diferencial quedaria como:

$$\frac{d(-3\mu \frac{H(t)}{H^3} r^2 + 3\mu \frac{H(t)}{H^3} a^2)}{dr}$$

Haciendo la diferencial:

$$\frac{d(-3\mu \frac{H'(t)}{H^3} r^2 + 3\mu \frac{H'(t)}{H^3} a^2)}{dr} = -6\mu \frac{H'(t)}{H^3} r \quad (80)$$

Ya obteniendo la diferencial, esto se va a integrar en la formula de la fuerza

$$\begin{aligned} F &= -\pi \int_0^a -6\mu \frac{H'(t)}{H^3} r * r^2 dr \\ F &= -\pi \int_0^a -6\mu \frac{H'(t)}{H^3} r^3 dr \\ F &= \pi 6\mu \frac{H'(t)}{H^3} \int_0^a r^3 dr \end{aligned} \quad (81)$$

Finalmente, la fuerza se puede calcular como:

$$F(t) = \frac{3 \mu \pi H'(t)}{2 H^3} a^4 \quad (82)$$

La Ec. (82) es el modelo de Stefan y es base para el presente proyecto de investigación.

La fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del sistema. La Ec. (82), puede ser punto de partida en el cálculo de la viscosidad aparente.

$$F(t) = \frac{3 \mu \pi H'(t)}{2 H^3} a^4 = \frac{3}{2} \mu \pi \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2H^2} \right]_{H_0}^{H(t)} a^4 \quad (83)$$

Integrando y manteniendone la fuerza constante e independiente del tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{H_0^2} + \frac{4}{3} \frac{F(t)}{\mu \pi a^4} (t-t_0) = \frac{1}{H(t)^2} \quad (84)$$

A partir de claculos de altura y fueza se puede calcular la viscosidad del fluido.

CAPÍTULO 4

MECANISMOS VISCOSOS

4.1 Teoría a orden cero

Suponiendo que el conjunto de variables dinámicas se puede expandir en términos del parámetro alfa, se tiene que la velocidad radial, axial, presión, esfuerzos cortantes rz, esfuerzos normales rr y zz, adquieren la siguiente forma matemática:

$$V_r(r, z) = \alpha^0 V_{r0} + \alpha^1 V_{r1} + \alpha^2 V_{r2} + O(\alpha^2) \quad (1)$$

$$V_z(r, z) = \alpha^0 V_{z0} + \alpha^1 V_{z1} + \alpha^2 V_{z2} + O(\alpha^2) \quad (2)$$

$$p(r) = \alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2) \quad (3a)$$

$$\sigma_{rz} = \alpha^0 \sigma_{(rz)0} + \alpha^1 \sigma_{(rz)1} + \alpha^2 \sigma_{(rz)2} + O(\alpha^2) \quad (3b)$$

$$\sigma_{rr} = \alpha^0 \sigma_{(rr)0} + \alpha^1 \sigma_{(rr)1} + \alpha^2 \sigma_{(rr)2} + O(\alpha^2) \quad (3c)$$

$$\sigma_{zz} = \alpha^0 \sigma_{(zz)0} + \alpha^1 \sigma_{(zz)1} + \alpha^2 \sigma_{(zz)2} + O(\alpha^2) \quad (3d)$$

4.2 Perturbación de orden cero, en la ecuación de continuidad adimensional $O(\alpha^0)$:

Una vez que las Ecs. (1-3d) son sustituidas en la ecuación de continuidad y de movimiento, se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\alpha^0 \frac{\langle v \rangle}{a} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) + \alpha^0 \frac{\langle v \rangle}{a} \frac{\partial V z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4)$$

Desarrollando la ecuación de acuerdo con las multiplicaciones:

$$\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} V z_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} V z_1 + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial z^*} V z_2 + O(\alpha^2) + \alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_0) + \alpha^1 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_1) + \alpha^2 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_2) = 0 \quad (5)$$

Por lo tanto, como solo estamos obteniendo de orden cero las perturbaciones, son las que conservamos en nuestra ecuación final, nos queda como:

$$\therefore \frac{\partial}{\partial z^*} V z_0 + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_0) = 0 \quad (6)$$

4.3 Componente r de la ecuación de movimiento: $O(\alpha^0)$

$$\alpha^1 Re \left(V r^* \frac{\partial V r^*}{\partial r^*} + V z^* \frac{\partial V r^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 V r^*}{\partial z^{*2}} \quad (7)$$

Desarrollando las multiplicaciones y eliminando hasta la ecuación de orden 1 de la ecuación queda como:

$$\alpha^1 Re \left((\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_1 \right) + (\alpha^0 V z_0 + \alpha^1 V z_1) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_1 \right) \right) = \alpha^0 \left(- \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} p_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} p_1 \right) \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* (\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 (\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)}{\partial z^{*2}} \quad (8)$$

Si siguiendo las multiplicaciones, como solo estamos obteniendo de orden cero las perturbaciones, son las que conservamos en nuestra ecuación final, nos queda como:

$$\therefore 0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} \quad (9)$$

4.4 Componente z de la ecuación de movimiento: $O(\alpha^0)$

$$\alpha^3 Re \left(\left(Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \alpha^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (10)$$

queda como:

$$\begin{aligned} \alpha^3 Re \left(\left(\alpha^0 Vr_0 + \alpha^1 Vr_1 \right)^* \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} Vz_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} Vz_1 \right) + \left(\alpha^0 Vz_0 + \alpha^1 Vz_1 \right) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} Vz_0 + \right. \right. \\ \left. \left. \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} Vz_1 \right) \right) = - \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} p_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} p_1 \right) + \alpha^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \alpha^0 Vz_0 + r^* \alpha^1 Vz_1) \right) + \\ \alpha^2 \left(\alpha^0 \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} Vz_0 + \alpha^1 \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} Vz_1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Continuando el desarrollo, como solo estamos obteniendo de orden cero las perturbaciones, son las que conservamos en nuestra ecuación final, nos queda como:

$$0 = - \left(\frac{\partial}{\partial z^*} p_0 \right) \quad (12)$$

4.5 Perturbación de orden cero, en la ecuación de fuerza $O(\alpha^0)$:

$$F = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (13)$$

Desarrollando la ecuación de acuerdo con las multiplicaciones:

$$F = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(\alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2))^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (14)$$

Reacomodando nuestra ecuación final la obtenemos

$$F_0 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(p_0)^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (15)$$

4.6 Resumen de las ecuaciones perturbadas

4.6.1 Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial z^*} Vz_0 + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r)Vr_0) = 0 \quad (16)$$

4.6.2 Componente radial de la ecuación de movimiento

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} \quad (17)$$

4.6.3 Ecuación de Navier-Stokes en la componente axial “z”

$$0 = -\left(\frac{\partial p_0}{\partial z^*}\right) \quad (18)$$

4.6.4 Fuerza de compresión a orden cero

$$F_0 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3}\right) \int_0^1 \frac{d(p_0)^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (19)$$

4.7 Calculo del gradiente de presión

De la ecuación de Navier-Stokes de la componente r a orden cero

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} \quad (20)$$

Despejando la segunda derivada espacial de la velocidad con respecto a la coordenada radial r, se tiene lo siguiente:

$$-\frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} = -\frac{\partial p_0}{\partial r^*} \quad (21)$$

Ahora debemos integrar la Ec. (20)

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial Vr_0}{\partial z^*} = \frac{dp_0}{dr^*} \quad (22)$$

Separando variables,

$$\int \partial \frac{\partial Vr_0}{\partial z^*} = \frac{dp_0}{dr^*} \int \partial z^* \quad (23)$$

Quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$\therefore Vr_0(r, z) = \frac{dp_0}{dr^*} \frac{z^{*2}}{2} + C_1 z^* + C_2 \quad (24)$$

Las condiciones de frontera para el perfil de velocidades son:

$$z^* = 0 \rightarrow Vr(r, z) = 0$$

$$z^* = 1 \rightarrow Vr(r, z) = 0 \quad (25)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera

C.F.1:

$$(0) = \frac{dp_0(0)^*}{dr^*} \frac{0^2}{2} + C_1(0)^* + C_2$$

Despejando C_2 de la primera condición de frontera queda:

$$C_2 = 0$$

Despejando C_1 queda:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} \quad (26)$$

Se tiene lo siguiente:

$$Vr_0(r, z) = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} [z^{*2} - z^*] \quad (27)$$

Para deducir la expresión para la componente axial de la velocidad, se integra la ecuación de continuidad por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\int \partial Vz_0 = -\int \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \left[\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} [z^{*2} - z^*] \right] \right) (dz^*) \quad (28)$$

Por lo que,

$$Vz_0(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \left[\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right] \quad (29)$$

Sustituyendo la condicion de frontera, $z = 1$ y $V_z(r,z) = 1$,
Entonces finalmente

$$6 = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \quad (30)$$

Sustituyendo la Ec. (30) en la Ec. (29), obtenemos:

$$V_z(r, z) = 6 \left[\frac{1}{3} z^{*3} - \frac{1}{2} z^{*2} \right] \quad (31)$$

4.8 Ecuacion de la fuerza perturbada a cero

Del gradiente de presión, integrando se tiene lo siguiente:

$$r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -6r^{*2} + C_1 \quad (32)$$

Por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -6 r^* + \frac{C_1}{r^*} \quad (33)$$

Al integrar, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -6 r^* + \frac{C_1}{r^*} \quad (34)$$

Quedando como:

$$p_0(r^*) = -3r^{*2} + C_1 \ln[r^*] + C_2 \quad (35)$$

En $r = 0$, la presión debe de estar definida por lo que, se tiene lo siguiente:

$$p_0(r^*) = -3r^{*2} + C_2 \quad (36)$$

En $r = 1$, la $p = 0$, por lo que la constante C_2 , tiene la forma:

$$C_2 = 3 \quad (37)$$

Sustituyendo la constante C_2 , en la Ec. (36) se obtiene la expresión general de la presión

$$p_0(r^*) = 3(1 - r^{*2}) \quad (38)$$

La fuerza a orden cero, se puede expresar en terminos del gradiente de presión a orden cero, por lo que:

$$F_0 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(p_0)^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (39)$$

Al derivar la Ec. (38) con respecto a la coordenada radial, y sustituyendo en la Ec. (39), se obtiene la expresión para la fuerza

$$F = \pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) 6 \int_0^1 r^{*3} dr^* \quad (40)$$

Finalmente,

$$F = \frac{3 \mu \pi \langle v \rangle a^4}{2 h^3} \quad (41)$$

La velocidad $\langle V \rangle$ se define como el negativo de la rapidez con la que cambia la altura con respecto al tiempo:

$$F(t) = \frac{3 \mu \pi \dot{H}(t)}{2 H^3} a^4 \quad (42)$$

La Ec. (42) es base para el presente proyecto de investigación. La fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del sistema. Notese que la fuerza es negativa, es decir, la velocidad con la que desciende el plato es negativa, i.e., $\langle V \rangle = -dH(t)/dt$.

4.9 Cálculo de la viscosidad aparente: Fuerza constante

La Ec. (42), puede ser punto de partida en el cálculo de la viscosidad aparente.

$$F(t) = \frac{3 \mu \pi \dot{H}(t)}{2 H^3} a^4 = \frac{3 \mu \pi}{2} \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2H^2} \right]_{H_0}^{H(t)} a^4 \quad (43)$$

Integrando y manteniéndolo la fuerza constante e independiente del tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{H_0^2} + \frac{4 F(t)}{3 \mu \pi a^4} (t-t_0) = \frac{1}{H(t)^2} \quad (44)$$

A partir de claculos de altura y fueza se puede calcular la viscosidad del fluido

4.10Resumen de las ecuaciones obtenidas en la fuerza a orden cero

$$V_z(r, z) = 6 \left[\frac{1}{3} z^{*3} - \frac{1}{2} z^{*2} \right] \quad (45)$$

$$V_r(r, z) = 3r[z^* - z^{*2}] \quad (46)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -6r \quad (47)$$

$$F(t) = \frac{3 \mu \pi \dot{H}(t)}{2 H^3} a^4 \quad (48)$$

CAPÍTULO 5

MECANISMOS INERCIALES

5.1 Teoría a primer orden

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, se propone el siguiente esquema perturbativo para: (i) La velocidad radial, axial y presión en el sistema de estudio:

$$Vr(r,z) = \alpha^0 Vr_0 + \alpha^1 Vr_1 + \alpha^2 Vr_2 + O(\alpha^2) \quad (1)$$

$$Vz(r,z) = \alpha^0 Vz_0 + \alpha^1 Vz_1 + \alpha^2 Vz_2 + O(\alpha^2) \quad (2)$$

$$p(r) = \alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2) \quad (3a)$$

$$\sigma_{rz} = \alpha^0 \sigma_{(rz)0} + \alpha^1 \sigma_{(rz)1} + \alpha^2 \sigma_{(rz)2} + O(\alpha^2) \quad (3b)$$

$$\sigma_{rr} = \alpha^0 \sigma_{(rr)0} + \alpha^1 \sigma_{(rr)1} + \alpha^2 \sigma_{(rr)2} + O(\alpha^2) \quad (3c)$$

$$\sigma_{zz} = \alpha^0 \sigma_{(zz)0} + \alpha^1 \sigma_{(zz)1} + \alpha^2 \sigma_{(zz)2} + O(\alpha^2) \quad (3d)$$

Al sustituir las series de potencia en la ecuación de continuidad, obtenemos la ecuación del balance de masa a primer orden

5.2 Ecuación de continuidad: $O(\alpha^1)$

$$\frac{\langle v \rangle}{a} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) + \frac{\langle v \rangle}{a} \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4)$$

Al sustituir las series de potencia en las ecuaciones de continuidad y separando las contribuciones a primer orden, se tiene los siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} Vz_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} Vz_1 + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial z^*} Vz_2 + O(\alpha^2) + \alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_0) + \alpha^1 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_1) + \alpha^2 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_2) = 0 \quad (5)$$

Por lo tanto, como solo estamos obteniendo de primer orden las perturbaciones, son las que conservamos en nuestra ecuación, nos queda:

$$\alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} Vz_1 + \alpha^1 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_1) = 0 \quad (6)$$

Quitando el alfa queda como:

$$\therefore \frac{\partial Vz_1}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r) V r_1) = 0 \quad (7)$$

5.3 Componente r de la ecuación de movimiento: $O(\alpha^1)$

$$\alpha^1 Re \left(V r^* \frac{\partial V r^*}{\partial r^*} + V z^* \frac{\partial V r^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 V r^*}{\partial z^{*2}} \quad (8)$$

Desarrollando las multiplicaciones y eliminando hasta la ecuación de orden 1 de la ecuación queda como:

$$\alpha^1 Re \left((\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_1 \right) + (\alpha^0 V z_0 + \alpha^1 V z_1) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_1 \right) \right) = \alpha^0 \left(- \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} p_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} p_1 \right) \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* (\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 (\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)}{\partial z^{*2}} \quad (9)$$

Multiplicando y distribuyendo las derivadas y los productos, se tiene lo siguiente:

$$Re \left((\alpha^1 V r_0 + \alpha^2 V r_1) \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_0 + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} V r_1 \right) + (\alpha^1 V z_0 + \alpha^2 V z_1) \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_0 + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial z^*} V r_1 \right) \right) = \alpha^0 \left(- \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} p_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} p_1 \right) \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \alpha^0 V r_0 + r^* \alpha^1 V r_1) \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 (\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)}{\partial z^{*2}} \quad (10)$$

Finalmente

$$\therefore Re \left(V r_0 \frac{\partial V r_0}{\partial r^*} + V z_0 \frac{\partial V r_0}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 (V r_1)}{\partial z^{*2}} \quad (11)$$

5.4 Componente z de la ecuación de movimiento: $O(\alpha^1)$

$$\alpha^3 Re \left(\left(V r^* \frac{\partial V z^*}{\partial r^*} + V z^* \frac{\partial V z^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \alpha^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V z^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 V z^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (12)$$

Desarrollando las multiplicaciones de la ecuación queda como:

$$\alpha^3 Re \left(\left((\alpha^0 V r_0 + \alpha^1 V r_1)^* \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial r^*} V z_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial r^*} V z_1 \right) + (\alpha^0 V z_0 + \alpha^1 V z_1) \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} V z_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} V z_1 \right) \right) \right) = - \left(\alpha^0 \frac{\partial}{\partial z^*} p_0 + \alpha^1 \frac{\partial}{\partial z^*} p_1 \right) + \alpha^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \alpha^0 V z_0 + r^* \alpha^1 V z_1) \right) + \alpha^2 \left(\alpha^0 \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} V z_0 + \alpha^1 \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} V z_1 \right) \quad (13)$$

Simplificando la Ec. (13), se tiene lo siguiente:

$$0 = - \frac{\partial p_1}{\partial z^*} \quad (14)$$

5.5 Fuerza normal: $O(\alpha^1)$

Para calcular la fuerza a primer orden, se parte de la ecuación general de la fuerza

$$F = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (15)$$

Sustituyendo la serie de potencias para la presión, se tiene lo siguiente:

$$F = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(\alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2))^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (16)$$

Reacomodando nuestra ecuación final la obtenemos

$$F_1 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(p_1)^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (17)$$

5.6 Componente radial de la velocidad: $O(\alpha^1)$

De la ecuacion de Navier-Stoke de la componente r a primer orden

$$Re \left(\mathbf{V}r_0 \frac{\partial v r_0}{\partial r^*} + \mathbf{V}z_0 \frac{\partial v r_0}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(vr_1)}{\partial z^{*2}} \quad (18)$$

Sustituyendo las ecuacion obtenidas anteriormente $\mathbf{V}z_0$ y $\mathbf{V}r_0$ en la ecuacion del componente r queda como:

$$\frac{\partial^2(vr_1)}{\partial z^{*2}} = Re(3r[z^* - z^{*2}]3[z^* - z^{*2}] + (2z^{*3} - 3z^{*2})(\mathbf{3}r - \mathbf{6}rz)) + \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \quad (19)$$

Despejando la segunda derivada espacial de la velocidad como respecto a la cordenad radial r, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2(vr_1)}{\partial z^{*2}} = Re(3r[z^* - z^{*2}]3[z^* - z^{*2}] + (2z^{*3} - 3z^{*2})(\mathbf{3}r - \mathbf{6}rz)) + \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \quad (20)$$

Realizando el álgebra correspondientes e integrando, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial(vr_1)}{\partial z} = -\frac{3}{5}rRez^5 + \frac{3}{2}rRez^4 + \frac{\partial p_1}{\partial r^*}z + \mathbf{C1} \quad (21)$$

Una segunda integracion con respecto a la coordenada axial en ez

$$\frac{\partial(vr_1)}{\partial z} = -\frac{3}{5}rRez^5 + \frac{3}{2}rRez^4 + \frac{\partial p_1}{\partial r^*}z + \mathbf{C1} \quad (22)$$

El perfil de velocidades tiene la forma:

$$\therefore \mathbf{V}r_1 = -\frac{1}{10}rRez^6 + \frac{3}{10}rRez^5 + \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}z^2 + \mathbf{C1}z + \mathbf{C2} \quad (23)$$

Al sustituir las condiciones de frontera:

$$z^* = 0 \rightarrow Vr(r, z) = 0$$

$$z^* = 1 \rightarrow Vr(r, z) = 0 \quad (24)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera

C.F.1:

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{10}rRe(0)^6 + \frac{3}{10}rRe(\mathbf{0})^5 + \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}(\mathbf{0})^2 + \mathbf{C1}(\mathbf{0}) + \mathbf{C2} \quad (25)$$

Despejando C_2 de la primer condicion de frontera queda:

$$C_2 = 0 \quad (26)$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en la ecuacion general queda:

$$\mathbf{V}r_1 = -\frac{1}{10}rRez^6 + \frac{3}{10}rRez^5 + \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}z^2 - \frac{2}{10}rRez - \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}z \quad (27)$$

Factorizando se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{V}r_1 = rRe \left(-\frac{1}{10}z^6 + \frac{3}{10}z^5 - \frac{2}{10}z \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}(z^2 - z) \quad (28)$$

Al integrar la ecuacion con respecto a z y utilizando la ecuación de continuidad a orden cero, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{V}r_1 = rRe \left(-\frac{1}{10}z^6 + \frac{3}{10}z^5 - \frac{2}{10}z \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial r^*}(z^2 - z) \quad (29)$$

5.7 Componente axial de la velocidad: $O(\alpha^1)$

De la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r v_{r1}) = 0 \quad (30)$$

Al sustituir la Ec. (29) en la Ec. (30) e integrando se tiene lo siguiente:

$$v_{z1} = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r) \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) - 2(Re) \left(-\frac{z^7}{70} + \frac{z^6}{20} - \frac{z^2}{10} \right) \right] \quad (31)$$

Sustituyendo la condición de frontera, $z = 1$, la velocidad $v_z(r, z) = 0$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$0 = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r) \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - 2(Re) \left(-\frac{1}{70} + \frac{1}{20} - \frac{1}{10} \right) \right]$$

Simplificando, se tiene:

$$0 = \left[\frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r) \frac{\partial p_1}{\partial r^*} + (Re) \left(\frac{18}{140} \right) \right] \quad (32)$$

Integrando la Ec. (32), obtenemos el gradiente de presión a primer orden:

$$-\frac{1}{r} \int_0^r \frac{216}{140} r (Re) (dr^*) = \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \quad (33)$$

Al sustituir la Ec. (33) en la velocidad axial, se tiene

$$v_{z1} = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r) \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) - 2(Re) \left(-\frac{z^7}{70} + \frac{z^6}{20} - \frac{z^2}{10} \right) \right] \quad (34)$$

Simplificando la Ec. (34), obtenemos:

$$v_{z1} = (Re) \left(\frac{2z^7}{70} - \frac{2z^6}{20} + \frac{108z^3}{420} - \frac{13z^2}{70} \right) \quad (35)$$

5.4 Presión a primer orden: $O(\alpha^1)$

Del gradiente de presión, integrando se tiene lo siguiente:

$$-\int_0^r \frac{216}{140} r (Re) (dr^*) = (r) \frac{\partial p_1}{\partial r^*} \quad (36)$$

Integrando se obtiene:

$$p_1 = -\frac{27}{35} (Re) \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (37)$$

Suponiendo las siguientes condiciones de frontera::

$$C.F1 \quad r=1; \quad p_1 = 0$$

Sustituyendo la C_1 en la ecuación general queda como:

$$p_1 = -\frac{27}{70} (Re) r^2 + \frac{27}{70} (Re) \quad (38)$$

Finalmente, por lo que:

$$p_1 = \frac{27}{70} (Re) (1 - r^2) \quad (39)$$

5.5 Fuerza a primer orden: $O(\alpha^1)$

La fuerza a primer orden, se calcula de la siguiente manera:

$$F_1 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \frac{d(p_1)^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (40)$$

Al derivar la presión a primer orden, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{dp_1}{dr} = -\frac{54}{70} (Re) r \quad (41)$$

Sustituyendo la Ec. (41) en la Ec. (40), obtenemos:

$$F_1 = -\pi \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) \int_0^1 \left(-\frac{54}{70} (Re)r \right) r^{*2} dr^* \quad (42)$$

Finalmente

$$F_1 = \pi \frac{54}{280} \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) Re \quad (43)$$

5.6 Resumen de la ecuaciones obtenidas a primer orden

$$Vz_1 = (Re) \left(\frac{2z^7}{70} - \frac{2z^6}{20} + \frac{108z^3}{420} - \frac{13z^2}{70} \right) \quad (44)$$

$$Vr_1 = r(Re) \left(-\frac{1}{10} z^6 + \frac{3}{10} z^5 - \frac{27}{70} z^2 + \frac{13}{70} z \right) \quad (45)$$

$$\frac{dp_1}{dr} = -\frac{54}{70} (Re)r \quad (46)$$

$$F_1 = \pi \frac{54}{280} \left(\frac{\mu(v)a^4}{h^3} \right) Re \quad (47)$$

Las Ecs. (44-37) son el punto de partida en los calculos del siguiente capitulo. Es importante resaltar lo siguiente:

- A) Las ecauciones a orden cero, son idependientes del número de Reynolds
- B) Las ecuaciones a primer orden dependen exclusivamente del número de Reynolds.
- C) El orden cero coincide con la teoria de lubricación
- D) Las ecuaciones de las velocidades permitiran obtener una expresion para el índice K, relacionado con el índice de flujo.

CAPÍTULO 6
SIMULACION Y ANÁLISIS DE
RESULTADOS

6. Teoría de orden cero

6.1 Velocidad radial a orden cero

La velocidad a orden cero fue calculada mediante la aproximación de lubricación y depende de las coordenadas radial y axial del sistema.

$$V_{r0}(r, z) = 3rz(1 - z)$$

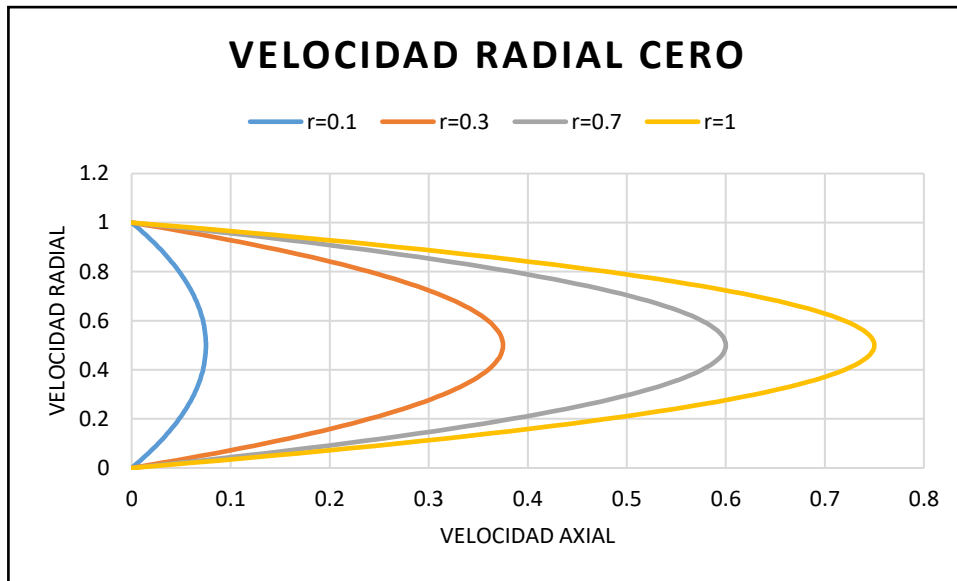


Figura 6.1. Representación gráfica de la ecuación obtenida perturbada a orden cero de la velocidad radial

En la Fig.(6.1) se ilustra la velocidad radial vs longitud axial para diferentes valores de la coordenada radial r. En todos los casos se observa el clásico comportamiento parabólico y este va aumentando con respecto a la coordenada radial en el sistema de flujo.

6.2 Velocidad axial a orden cero: $O(\epsilon^0)$

A continuación, se representa la ecuación obtenida de la velocidad axial perturbada a orden cero, con un flujo que permanece constante sobre los dos platos concéntricos, es decir, no va a ir variando ningún valor de flujo de entrada, mientras que el valor de la longitud radial (r) es el que va a ir variando, tomando valores distintos en cada caso.

$$V_{z0}(r, z) = 6rz^2(0.3333z - 0.5)$$

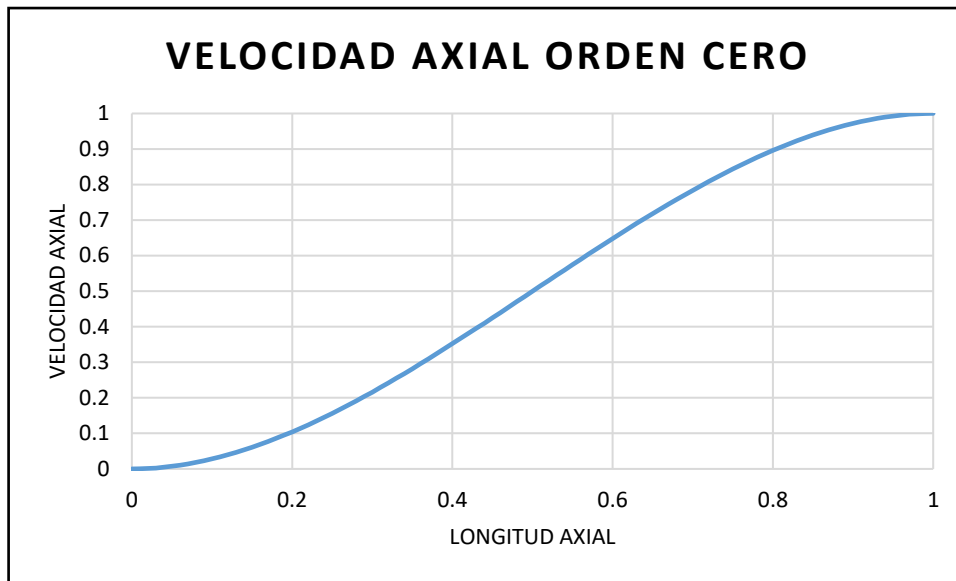


Figura 6.2. Representación gráfica de la ecuación obtenida de la velocidad axial perturbada a orden cero

En la Fig. (6.2) se ilustra la velocidad axial vs longitud axial para diferentes valores de la coordenada radial r . En todos los casos se observa el clásico comportamiento un poco lineal pero a la vez parabólico y este va aumentando con respecto a la coordenada axial en el sistema de flujo.

6.3 Gradiente de presión: $O(\epsilon^0)$

El gradiente de presión, se obtuvo mediante un balance entre el flujo que es comprimido y el flujo radial, por lo que se tiene la siguiente expresión analítica, i.e.
 $Q_{\text{comprimido}} = Q_{\text{radial}}$

$$-\frac{dp}{dr} = 6r^*$$

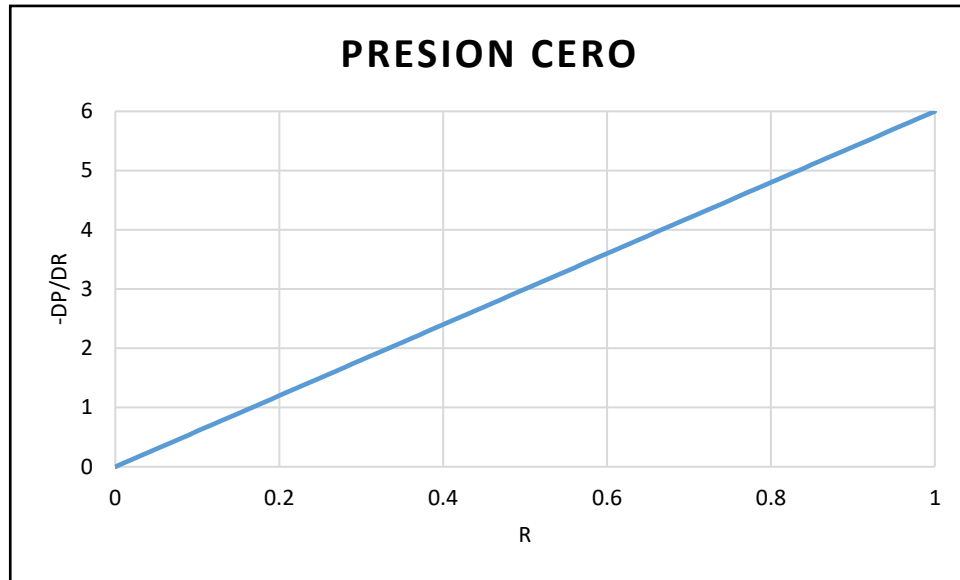


Figura 6.3. Representación gráfica de la ecuación obtenida del gradiente de presión perturbada a orden cero

En la Fig. (6.3) se ilustra el comportamiento del gradiente de presión (dP/dr_0) vs la longitud axial (z), para diferentes valores de radio (r). En particular, se está considerando $r=0$, $r=0.1$, $r = 0.5$ y $r = 1$, es decir, que la cantidad de fluido se mantiene. Se puede observar que el gradiente de presión va creciendo linealmente cuando el flujo es constante pero el radio distinto, es decir, el gradiente de presión va a permanecer constante, llegando al máximo gradiente de presión cuando choca con el plato superior ($z = a$ ó $z = 1$); sin embargo, si el flujo es cero, el gradiente de presión va decreciendo, llegando así al máximo gradiente de presión cuando el fluido llega al plato superior ($z = 1$ ó $z = a$).

6.4 Teoría a primer orden: $O(\epsilon^0)$

6.4.1 Velocidad radial a primer orden

La velocidad radial a primer orden se obtuvo al perturbar la ecuación de movimiento cuya expresión, es la siguiente:

$$Vr1(r, z) = r(Re) \left(-\frac{1}{10} z^6 + \frac{1}{10} z^5 - \frac{27}{70} z^2 + \frac{13}{70} z \right)$$

La velocidad radial depende de la posición radial y axial y contiene la física de los mecanismos inerciales y viscosos a través del Reynolds Re .

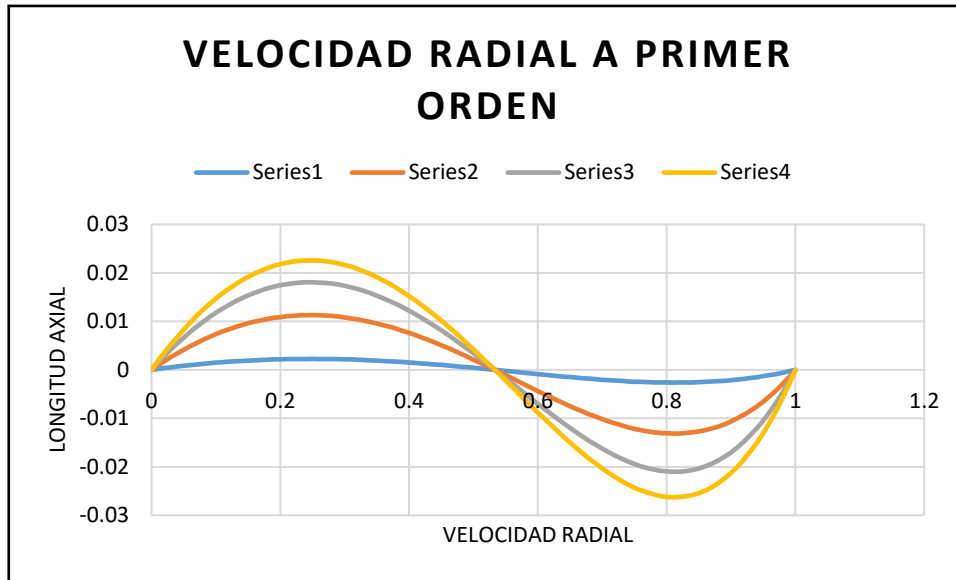


Figura 2.4 Representación gráfica de la ecuación de la velocidad radias perturbada a primer orden

En la Fig. (6.4) se observa el comportamiento de velocidad radial vs longitud axial en el caso del primer orden. Es claro que en todas las smiulaciones se obtiene un perfil parabólico y ala ves un parabolico descendente, el cual va evolucionando conforme la coordenada radial r y al numero de reynolds que es el que influye e nuestra teoria a primer orden.

6.5 Velocidad axial a primer orden: $O(\varepsilon^1)$

A continuación, se representa la ecuación obtenida de la velocidad axial perturbada a primer orden.

$$Vz1(r, z) = (Re) \left(\frac{2}{70} z^7 - \frac{2}{20} z^6 + \frac{108}{420} z^3 + \frac{13}{70} z^2 \right)$$

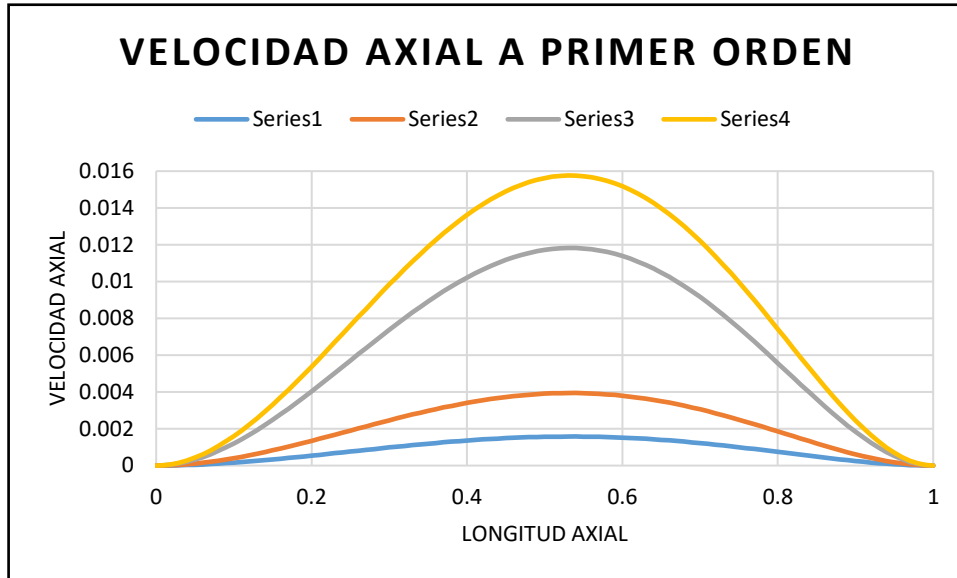


Figura 6.5 Representación gráfica de la ecuación obtenida de la velocidad axial perturbada a primer orden

En la Fig. (6.5) se ilustra el comportamiento de la velocidad axial a primer orden, poniendo la longitud axial vs la velocidad axial. En particular, se está considerando $r = 0$, $r = 0.3$, $r = 0.5$ y $r = 1$, es decir, que la cantidad de fluido que permanece constante. Se puede observar que la velocidad axial tiene un comportamiento parabólicamente cuando el flujo es constante pero el número de Reynolds distinto.

6.6 Gradiente de presión a primer orden: $O(\epsilon^0)$

El gradiente de presión perturbado a primer orden, en donde el flujo se mantiene constante en los platos y, es decir, se va variando el valor de “r” (donde los radios del plato inferior pueden ser iguales o de diferentes tamaños, en donde el volumen de puede ser por igual en todos ellos o diferente), y a la vez se va ir variando el número de Reynolds, mientras que el valor de la longitud radial se queda como una variable “r”.

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{54}{70} (Re) * r$$

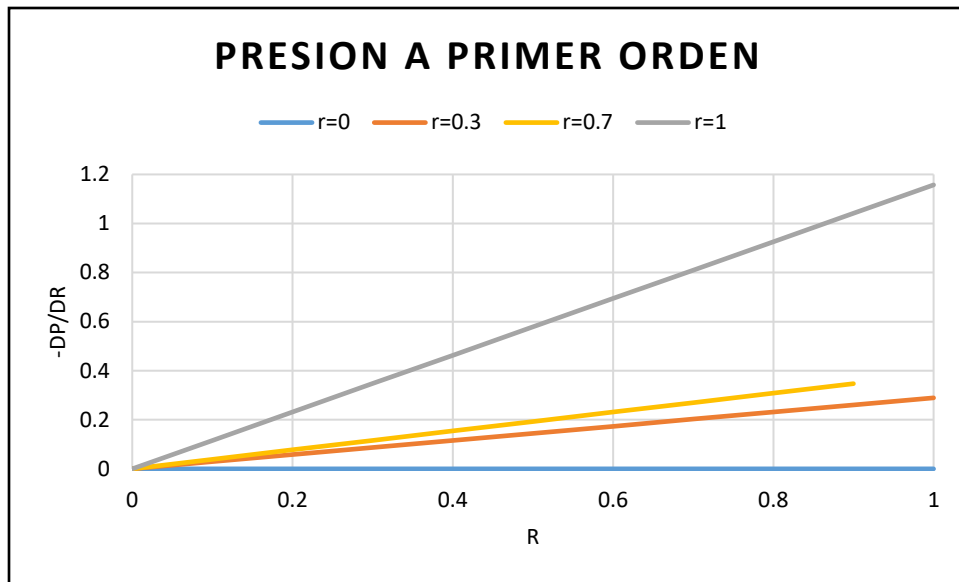


Figura 6.6. Representación gráfica de la ecuación obtenida del gradiente de presión perturbada a primer orden

En la Fig. (8) se observan el comportamiento lineal del gradiente de presión y del perfil de presiones, como se observa que el número de Reynolds modifica la pendiente del gradiente de presión. Obsérvese que, el gradiente de presión está relacionada con la fuerza del líquido y los efectos inerciales que aumentan la compresión del palto superior en el fluido.

6.7 Resumen del capítulo

En este capítulo se presentaron los resultados de los ordenes cero y primero. Los siguientes puntos importantes son deducidos mediante las simulaciones:

- A) La velocidad radial muestra un comportamiento parabólico inducido por un gradiente de presión radial.
- B) La velocidad axial es independiente del material y solo depende de las coordenadas radial y axial.
- C) El gradiente de presión a orden cero, tiene una dependencia lineal con la coordenada radial.
- D) El gradiente de presión a primer orden depende de la coordenada radial y del número de Reynolds.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7.1 Aportación al conocimiento universal

El aporte de este trabajo de investigación de tesis de licenciatura es el estudio de análisis de un flujo continuo por compresión de un líquido viscoso newtoniano entre dos placas paralelas. Es importante recalcar que la gran parte de trabajos de investigación de flujo continuo por compresión que se han llevado a cabo, se han realizado tomando como base diferentes ecuaciones constitutivas, sin embargo, estas investigaciones se han hecho utilizando fluidos no newtonianos, en donde dichos fluidos tienen una mayor complejidad para su estudio. En dicho trabajo, como ya se mencionó anteriormente, se analizará el flujo continuo por compresión de un fluido newtoniano entre dos placas paralelas, el cual, dicho sistema será modelado con la ecuación constitutiva de Newton, en donde para obtener las componentes de las ecuaciones de transporte correspondientes, se emplearán vectores y tensores cinemáticos, que para el caso del vector velocidad solo tendrá dos componentes, uno en la dirección radial y el restante en la dirección axial. Con el uso de la ecuación constitutiva de Newton, se modela el sistema, en donde se presentará una dependencia lineal entre el tensor de esfuerzos y el tensor de rapidez de deformación. Dicho sistema de estudio se modelará haciendo uso de coordenadas cilíndricas, debido a que se estudia específicamente el centro del tubo; por lo tanto, se deducirá el perfil de velocidades axial y radial, el gradiente de presión y la fuerza del disco superior hacia el fluido. Por lo tanto, las aportaciones más importantes del presente trabajo de investigación aplicado a los fenómenos de transporte en fluidos newtonianos, en un sistema donde se evita que existan partes móviles, son las siguientes:

- a) El estudio del flujo continuo por compresión de un fluido newtoniano entre dos placas paralelas circulares de radio $r=a$, y separación $z=H(t)$.
- b) Se acopla la ecuación de continuidad (conservación de la masa), con la ecuación de momento para un fluido newtoniano (el cual es la ecuación de Navier-Stokes)
- c) Mediante el uso de variables adimensionales relacionados a las variables r , s , V_r , V_z , p , t y h ; se adimensionará la ecuación de continuidad, la ecuación de Navier-Stokes para

componente axial y radial, para así obtener como resultados un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales dependerán de dos números adimensionales, como lo son, Alpha y Reynolds. El primer número adimensional depende de dos longitudes características como lo es la longitud axial ($z=H(t)$) y la longitud radial ($r=a$); por su parte, el segundo número adimensional relaciona dos tipos de mecanismos, inerciales y viscosos.

d) Suponiendo que los dos números adimensionales mencionados anteriormente (Alpha y Reynolds), son pequeños, el conjunto de ecuaciones adimensionales obtenidas se simplifica, al flujo entre placas paralelas por medio de un gradiente de presión radial constante. La aproximación que se hace es conocido como de lubricación y el método que se lleva a cabo, demuestra que las contribuciones son pequeñas, en vez de solo enfocarse a la aproximación de lubricación

e) De acuerdo con la geometría del sistema en las placas circulares paralelas, se toma en cuenta una geometría cilíndrica, donde el gradiente de presión se da en la longitud radial.

f) Primeramente, a partir del balance entre el gradiente de presión y la componente $\{r,z\}$ de la divergencia del tensor de esfuerzos, se obtendrán las expresiones analíticas de interés (esto tomando en cuenta la geometría cilíndrica), como lo son: (i) velocidad radial, (ii) velocidad axial, (iii) gradiente de presión, (iv) Perfil de presiones, (v) La fuerza ejercida del plato superior sobre el fluido que entra por debajo del plato inferior, como también la fuerza ejercida a flujo homogéneo y (vi) la altura en función del tiempo que se obtiene a partir de la expresión de la fuerza.

g) Posteriormente, se perturbarán a orden cero las ecuaciones adimensionales de continuidad y de Navier-Stokes para componentes axial y radial, para observar cómo afectan los efectos inerciales y viscosos en las expresiones que se buscan anteriormente ya mencionadas. Dichas ecuaciones a orden cero se desarrollarán y trabajaran de la misma forma, para así obtener las expresiones de velocidad, gradiente de presión, fuerza y altura; solo que en estas se analizaran los efectos viscosos o inerciales si es que los hay.

h) Por último, la ecuación de continuidad adimensional y de Navier-Stokes para componente axial y radial adimensionales, se perturbaran a primer orden; donde se hará uso de las expresiones de velocidad que se obtuvieron a orden cero, para así darle el mismo seguimiento y desarrollo a las ecuaciones perturbadas a primer orden y obtener por ultimo las expresiones de interés, como lo son las velocidades, el gradiente de presión, la fuerza del

plato superior sobre el fluido y la altura en función del tiempo que se obtiene a partir de la expresión de la fuerza. Todo esto en donde los efectos inerciales y viscosos ahora ya se toman en cuenta en la perturbación a primer orden.

i) A partir de las expresiones obtenidas, estas se modelarán mediante el uso del programa “Mathematica” y así poder estudiar el comportamiento del perfil de velocidades en cada uno de los órdenes planteados en las perturbaciones, como también los gradientes de presiones y la altura en función del tiempo de cada orden.

j) Este trabajo de investigación, es un punto de partida en la extensión de sistemas complejos con mecanismos deslizantes, lo que es de gran ayuda para aquellas industrias que se dedican a la elaboración de aditivos poliméricos que tienen un comportamiento viscoso y que se usan en la lubricación de engranajes, levas y pistones.

7.2 Trabajo futuro

Una extensión natural de este trabajo, puede ser la caracterización del flujo por compresión de un fluido no newtoniano, inelástico, elástico, viscoelástico lineal y no-lineal incluyendo un sistema con alta dependencia a la orientación como los cristales líquidos.

BIBLIOGRAFIA

Adams MJ, Biswas SK, Briscoe BJ, Kamyab M (1991), The effects of inter- face constraints on the deformation of pastes, *Powder Technol.* 65, 381–392.

Adams MJ, Edmondson C, Caughey DG, Yahya R (1994), An experimental and theoretical study of the squeeze-film deformation and flow of elasto-plastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 51, 61–78.

Barnes HA (1995), A review of the slip (wall depletion) of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers: its cause, character and cure, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 56, 221–251.

Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN (2002), *Transport Phenomena*, second ed., Wiley.

Burbidge AS, Servais C (2004), Squeeze flow of apparently lubricated thin films, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 124, 115–127.

Engmann J, Servais C, Burbidge AS (2005), Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 132, 1–27 25

Hasegawa T, Ushida A (2023), Elongational properties of liquids in contraction flow, *AIP Advances* 13, 055307.

Huilgol RR (1998), Variational principle and variational inequality for a yield stress fluid in the presence of slip, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 75 (1998) 231–251.

Kompani M, Venerus DC (2000), Equibiaxial extensional flow of polymermelts via lubricated squeezing flow: I. Experimental analysis, *Rheol. Acta* 39, 444–451.

Laun HM, Rady M, Hassager O (1999) Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 81, 1–15.

Matsoukas A, Mitsoulis E (2003), Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 109, 231–240.

Meeten GH (2004), Squeeze flow of soft solids between rough surfaces, *Rheol. Acta* 43, 6–16.

Pérez-Salas KY, Sánchez S, Velasco-Segura R, Ascanio G, Ruiz-Huerta L, Aguayo JP (2023), Rheological transient effects on steady-state contraction flows, *Rheol. Acta* 62, 171-181.

Poole RJ (2023), Inelastic and flow-type parameter models for no-newtonian fluids, *J. Non-Newton Fluid Mechs*, 320, 105106.

Roussel N, Lanos C (2003), Plastic fluid flow parameters identification using a simple squeeze test, *Appl. Rheol.* 13, 132–141.

Smyrniaios DN, Tsamopoulos JA (2001), Squeeze flow of Bingham plastics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 100, 165–190.