UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM - UMSNH

CLASIFICACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES PARCIALMENTE ORDENADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO **EN** CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
MARIO ALEJANDRO MOLINA PALMA

TUTOR: DR. ROBERT OECKL
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM CAMPUS MORELIA

MORELIA, MICHOACÁN, NOVIEMBRE 2023

AGRADECIMIENTOS

En el punto culminante de mi trabajo de tesis, reflexiono sobre el camino recorrido, que a veces transitó valles profundos y otras veces ascendió montañas empinadas. Sin embargo, finalmente alcancé la meta que me propuse. Reconozco que, en este mundo, ningún logro se alcanza solo; incluso los logros personales son el resultado de esfuerzos y colaboraciones de muchas personas. A continuación, deseo expresar mi sincero agradecimiento a quienes, de manera directa o indirecta, me han ayudado a lograr este propósito:

Agradezco a Dios por su constante favor y por guiar mis pasos en todos los aspectos de mi vida, ayudándome a realizar los deseos de mi corazón.

Quiero dedicar un agradecimiento especial a mi madre, Odilia, quien ha entregado su vida por mí desde el día en que nací. Tu amor incondicional y tu apoyo constante han sido y seguirán siendo mi refugio seguro a lo largo del camino de la vida.

A la familia Palma en el sur de Honduras, les agradezco por su cercanía y apoyo inquebrantable, que han sido fundamentales en mi desarrollo personal.

Expreso mi gratitud a mi Director de tesis, Robert Oeckl, por su generosidad al aceptar ser mi tutor, por su paciencia a lo largo de este proceso y por su valiosa compañía y orientación en mi tema de investigación.

A mis amigos, tanto en México como en Honduras, que estuvieron a mi lado durante mi maestría y mi trabajo de tesis. En México, Goretty, Diana, Rafa, Sandy, Axel, Migue y Carlos, hicieron que mi estancia en su país fuera inolvidable. En Honduras, Orlin y Gustavo, que a pesar de la distancia siempre me brindaron su apoyo y amistad, y Johan, por su invaluable compañía y cercanía en los tiempos finales de mi trabajo.

Mi reconocimiento se extiende al personal docente y administrativo del PCCM, de manera especial a la mesa jurado de mi examen de maestría, por su contribución a mi formación académica; lo mismo que al CONAHCyT, por el financiamiento de mis estudios de maestría.

Introducción

En [11] Robert Oeckl discute un marco novedoso para teorías físicas. En este marco, llamado formalismo positivo, la diferencia entre teorías físicas clásicas y cuánticas surge de ciertos espacios vectoriales parcialmente ordenados al ser estos retículas o antirretículas. El caso de una teoría física clásica corresponde al espacio vectorial parcialmente ordenado $\mathbb{R}^n$, y el caso de teoría física cuántica corresponde al espacio vectorial parcialmente ordenado $Herm(m, \mathbb{C})$. Es por esto que aparece el interés de conocer mejor la estructura de los espacios vectoriales parcialmente ordenados, así como su clasificación, que se traducirá en una clasificación de teorías físicas. En [10] Kenji Nakahira deriva teoría cuántica con reglas de superselección, la cual puede describir sistemas clásicos, cuánticos e híbridos a partir de postulados puramente operacionales únicamente. Basado en una teoría probabilística operacional muestra que cada espacio de estado es el cono de los cuadrados de un Álgebra de Jordan Euclídea y utiliza algunas propiedades elementales de las Álgebras de Jordan Euclídeas tales como el teorema espectral, la descomposición como suma directa de Álgebras de Jordan Euclídeas y la clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas debida a Jordan, Von Neumann y Wigner en 1934 [5].

Con estos dos hechos en mano, observamos que por una parte los espacios vectoriales parcialmente ordenados están en correspondencia uno a uno con los conos propios en un espacio vectorial, es decir: un espacio vectorial parcialmente ordenado contiene un cono propio, el cono de los positivos, mientras que un cono propio C en un espacio vectorial V induce un orden parcial en V compatible con la estructura de espacio vectorial, haciendo de V un espacio vectorial parcialmente ordenado. Por el lado de las Álgebras de Jordan Euclídeas tenemos que las Álgebras de Jordan Euclídeas simples están en correspondencia uno a uno con los conos simétricos irreducibles. La cerradura de un cono simétrico es un cono propio, por lo tanto la cerradura de un cono simétrico en un espacio vectorial también induce una estructura de espacio vectorial parcialmente ordenado.

En esta tesis aprovechamos la clasificación de las Álgebras de Jordan Euclídeas simples para obtener una clasificación de espacios vectoriales parcialmente ordenados, cuando el cono de los positivos es tal que su interior es un cono simétrico. En el capítulo 1 introducimos los conceptos concernientes a orden parcial, conos en espacios vectoriales, conos en espacios vectoriales topológicos y finalmente espacios vectoriales parcialmente ordenados, estudiamos en este capítulo la correspondencia uno a uno entre espacios vectoriales parcialmente ordenados y conos propios en un espacio vectorial. En el capítulo 2 abordamos la teoría de Álgebras de Jordan Euclídeas y propiedades como el teorema espectral, la descomposición como suma directa de Álgebras de Jordan Euclídeas simples y la correspondencia entre Álgebras de Jordan Euclídeas simples y conos simétricos irreducibles. En el capítulo 3 estudiamos la clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples. Finalmente, en el capítulo 4 presentamos la contribución novedosa de nuestra tesis, al aplicar la clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples a los espacios vectoriales parcialmente ordenados cuyo cono de los positivos es tal que su interior es un cono simétrico, a tales espacios les llamaremos espacios vectoriales parcialmente ordenados simétricos. Lo interesante radica en que, a pesar de que esta clasificación es restrictiva, en el sentido que requiere que el cono de los positivos sea tal que su interior es un cono simétrico, cubre los dos ejemplos importantes mencionados al inicio de la introducción. Finalizaremos presentando los ejemplos básicos de espacios vectoriales parcialmente ordenados y Álgebras de Jordan Euclídeas simples.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo encontramos las definiciones básicas para el propósito de la tesis, conjunto parcialmente ordenado, conos en espacios vectoriales, cono propio, cono generador, y orden arquimediano. Demostramos en este capítulo que el conjunto de los positivos en un espacio vectorial parcialmente ordenado es un cono propio y, recíprocamente, un cono propio en un espacio vectorial induce en el espacio un orden parcial que es compatible con la estructura de espacio vectorial, haciendo de este un espacio vectorial parcialmente ordenado. Finalizaremos el capítulo con una sección dedicada a conos y dualidad, aquí definiremos el concepto de cono simétrico. Las definiciones y resultados de este capítulo son tomados de [11], [1], [3] y [13]. Otras lecturas que fueron de ayuda para escribir este capítulo fueron [2], [4] y [14], y algunas lecturas que profundizan este tema son [6] y [7].

1.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Definición 1.1 (Conjunto parcialmente ordenado)**.** *Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto S con una relación binaria $\leq$ que satisface:*

1. $a \leq a$ *para todo* $a \in S$.
2. $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *implica* $a \leq c$ *para todo* $a, b, c \in S$.
3. $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *implica* $a = b$ *para todo* $a, b \in S$.

Usaremos las siguientes convenciones: (i) $a \geq b$ significa $b \leq a$, (ii) $b < a$ significa $b \leq a$ y $b \neq a$, y (iii) $b > a$ significa $a \geq b$ y $b \neq a$.

Definición 1.2 (Intervalo de orden)**.** *Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in S$ con $a \leq b$, el conjunto $\{x \in S : a \leq x \leq b\}$ será denotado por $[a, b]$. Tales conjuntos son llamados intervalos de orden.*

Definición 1.3. *Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Sea A un subconjunto de S. Si $a \leq x$ para todo $a \in A$ escribimos $A \leq x$ y decimos que x es una cota superior de A. Si $A \leq x$ y $x \in A$, entonces x se dice elemento máximo de A (tal elemento es único). Cotas inferiores y elementos mínimos se definen de forma similar. Si el conjunto de cotas superiores (inferiores) de A tiene elemento mínimo (máximo), este elemento es llamado el supremo (ínfimo) de A, y denotado por* $\sup A$ ($\inf A$)*.*

Definición 1.4 (Retícula). *Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado S tal que todo par de elementos $x, y \in S$ tiene supremo e ínfimo.*

Definición 1.5 (Antirretícula). *Una antirretícula es un conjunto parcialmente ordenado S en el que para cualquier par de elementos $x, y \in S$ un supremo o un ínfimo existe solo si $x \leq y$ o $y \leq x$.*

Ejemplo 1.6. *1. Sea X un conjunto con n elementos, $\mathbb{R}^X$ denota al espacio vectorial real de las funciones de X en $\mathbb{R}$. Considere el orden parcial en el que dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$, $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in X$. $\mathbb{R}^X$ con este orden parcial es una retícula.*
2. En el conjunto de las matrices hermitianas de tamaño $m \times m$ con entradas complejas podemos definir un orden parcial de la siguiente manera: $A \leq B$ si y solo si $B - A$ es una matriz semidefinida positiva. $Herm(m, \mathbb{C})$ con este orden parcial es una antirretícula.

1.2. Conos en espacios vectoriales

Definición 1.7 (Cono). *Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Un cono es un subconjunto no vacío $C \subseteq V$ que satisface:*
(i) para todo $\alpha > 0$ se tiene que $\alpha C \subseteq C$;
(ii) $C + C \subseteq C$.
Un cono C se dice punteado si $0 \in C$ y no punteado en otro caso.

Observación 1.8. *Todo subespacio vectorial de V es un cono. Un cono puede contener múltiplos negativos de sus elementos. Si C es un cono no punteado, entonces $C \cup \{0\}$ es un cono punteado. Si C es un cono punteado, $C - \{0\}$ no necesariamente es un cono.*

Proposición 1.9. *Un cono $C \subseteq V$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Es evidente a partir de la definición que para todos $\lambda \in (0, 1)$ y $x, y \in C$ tenemos que $\lambda x, (1 - \lambda)y \in C$, y también que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. □

Proposición 1.10. *Si C es un cono no vacío. Entonces, $C - C$ es subespacio vectorial de V. En particular, $C - C$ es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a C.*

Demostración. Si $W = C - C$, entonces W es no vacío. Entonces, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ distinto de 0 tenemos $\lambda W = W$, y $W + W = (C - C) + (C - C) = C + C - (C + C) \subseteq C - C = W$, lo que muestra que W es un subespacio vectorial. Finalmente, todo subespacio vectorial que contiene a C también contiene a W. □

Proposición 1.11. *Si C es un cono punteado, entonces $C \cap (-C)$ es el subespacio vectorial más grande contenido en C.*

Demostración. Si $W = C \cap (-C)$ entonces W es no vacío y $\lambda W = W$ para todo $\lambda \neq 0$. También, $W + W = C \cap (-C) + C \cap (-C) \subseteq (C + C) \cap (-(C + C)) \subseteq C \cap (-C) = W$. Luego W es subespacio vectorial. Además, claramente cualquier subespacio vectorial contenido en C está también contenido en W. □

Definición 1.12 (Cono propio). *Un cono propio es un cono punteado $C \subseteq V$ para el que se satisface $C \cap (-C) = \{0\}$.*

Proposición 1.13. *Un cono C es propio si y solo si no contiene múltiplos negativos de sus elementos.*

Demostración. $\Rightarrow$: Suponga que C es un cono propio. Si existe $c \in C$ distinto de 0 tal que c y $-c$ son elementos de C, entonces $c \in C \cap (-C)$ lo cual es una contradicción.
$\Leftarrow$: Ahora suponga que C no contiene múltiplos negativos de sus elementos. Si existe $x \neq 0$ elemento de $C \cap (-C)$, entonces, por una parte $x \in C$, y por otro lado $x = -x'$ con $x' \in C$. Teniendo así que x es un múltiplo negativo de un elemento de C. Lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 1.14. *Un cono punteado C es un cono propio si y solo si $C - \{0\}$ es un cono.*

Observación 1.15. *Una forma alternativa de definir un cono en un espacio vectorial V es la siguiente: Un cono es un conjunto convexo $C \subseteq V$ que satisface $rC \subseteq C$ para todo $r > 0$. Veamos que las dos definiciones son equivalentes. Sea V un espacio vectorial y C un conjunto que satisface la primera definición, entonces C es un conjunto convexo debido a la proposición 1.9, además $rC \subseteq C$ para todo $r > 0$ por la misma definición. Recíprocamente, si C satisface la definición alternativa entonces, por un lado $rC \subseteq C$ para todo $r > 0$ por la definición alternativa, mientras que por otro lado, dados $c_1, c_2 \in C$, tenemos que $c_1 + c_2 = (\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) + (\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2) = c' + c' = 2c'$, donde $c' := \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 \in C$ por ser C conjunto convexo, y $2c' \in C$ debido a la definición alternativa. Por lo que se tiene que $C + C \subseteq C$. Luego las definiciones son equivalentes.*

Definición 1.16 (Cono generador)**.** *Un cono generador en un espacio vectorial V es un cono C que satisface $V = C - C$.*

1.3. Conos en espacios vectoriales topológicos

Una forma alternativa de definir un conjunto convexo es mediante el concepto de homotecia,

Definición 1.17 (Homotecia)**.** *Sea V un espacio vectorial y sean $a \in V$ y $\lambda \neq 0$, la homotecia de centro a y radio λ es la transformación $V \to V$, $x \mapsto a + \lambda(x - a)$.*

Como $(1 - \lambda)a + \lambda x = a + \lambda(x - a)$ entonces la definición de conjunto convexo se puede formular como

Definición 1.18 (Conjunto convexo)**.** *Un conjunto A en un espacio vectorial V es un conjunto convexo si para todo $a \in A$ y $\lambda \in (0, 1)$, la transformación de A mediante la homotecia de centro en a y radio λ está contenida en A.*

Lema 1.19. *Sea V un espacio vectorial topológico y $A \subseteq V$ un conjunto convexo con al menos un punto interior x_0. Para cualquier punto $x \in \overline{A}$, los puntos de la forma $tx + (1-t)x_0$ con $t \in (0, 1)$, pertenecen a $\mathring{A}$.*

Demostración. Sea $t \in (0, 1)$ fijo pero arbitrario, sea $y = tx + (1-t)x_0$ y sea $\lambda = 1 - \frac{1}{t}$. Entonces la homotecia f con centro y y radio λ es tal que $f(x_0) = x$. Si U es una vecindad abierta de x_0 contenida en A entonces, por la invarianza bajo reescalamientos y traslaciones de la topología, $f(U)$ es una vecindad abierta de x, y ya que $x \in \overline{A}$ debe existir $z \in U \backslash \{x_0\}$ con $f(z) \in A$. Ahora,

$$f(z) - y = \lambda(z - y) = \lambda(z - f(z)) + \lambda(f(z) - y)$$

y por tanto, $y = f(z) + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(z - f(z))$. Considere la homotecia g con centro $f(z)$ y radio $\frac{\lambda}{\lambda-1} = 1 - t$, por lo anterior tenemos que $g(z) = y$. Como U es una vecindad abierta también de z contenida en A, entonces $g(U)$ es una vecindad abierta de y. Ya que $t \in (0, 1)$ entonces también $\frac{\lambda}{\lambda-1} = 1 - t \in (0, 1)$, esto junto al hecho que A es un conjunto convexo implica que $g(U)$ está contenida en A. Con esto hemos probado que y es un punto interior de A, concluyendo así la prueba. $\square$

Lema 1.20. *Sea A un conjunto convexo en un espacio vectorial topológico primero contable. Entonces, el interior de A es un conjunto convexo. Si $\mathring{A}$ es no vacío entonces coincide con el interior de $\overline{A}$, y $\overline{A}$ es un conjunto convexo que coincide con la cerradura de $\mathring{A}$.*

Demostración. Dados $x, y \in \mathring{A}$, aplicando el resultado anterior a $x \in \mathring{A}$ y $y \in \mathring{A} \subset \overline{A}$ obtenemos que $ty + (1-t)x \in \mathring{A}$ para cualquier $t \in (0,1)$, luego $\mathring{A}$ es un conjunto convexo. También por el resultado anterior, cualquier punto $x \in \overline{A}$ es también un punto de la cerradura de $\mathring{A}$, luego $\overline{A}$ coincide con la cerradura de $\mathring{A}$. Ahora probaremos que todo punto interior de $\overline{A}$ pertenece a $\mathring{A}$. Sea x un punto interior de $\overline{A}$ y suponga, sin pérdida de generalidad, que $x = 0$. Sea U una vecindad balanceada de x contenida en $\overline{A}$, sea $y \in U \cap \mathring{A}$, entonces $-y \in \overline{A}$ y por el resultado anterior tenemos que $0 \in \mathring{A}$, si $y \neq 0$, esto también es cierto trivialmente si $y = 0$. Finalmente probamos que $\overline{A}$ es un conjunto convexo. Dados $x, y \in \overline{A}$ existen sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ que convergen a x, y respectivamente y que están contenidas en A. Como A es un conjunto convexo, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que para cualquier $t \in (0,1)$ el punto $tx_n + (1-t)y_n \in A$, así, $\{tx_n + (1-t)y_n\}$ es una sucesión contenida en A que converge a $tx + (1-t)y$, y entonces $tx + (1-t)y \in \overline{A}$ para cualquier $t \in (0,1)$, luego $\overline{A}$ es un conjunto convexo. □

Proposición 1.21. *Sea C un cono en un espacio vectorial topológico. El interior $\mathring{C}$ de C, es un cono; si $\mathring{C}$ es no vacío entonces coincide con el interior de $\overline{C}$, y $\overline{C}$ es un cono punteado que coincide con la cerradura de $\mathring{C}$.*

Demostración. Para esta prueba usaremos la definición alternativa de un cono. Por el lema anterior tenemos que si C es un conjunto convexo entonces $\mathring{C}$ es un conjunto convexo. Veamos que $r\mathring{C} \subseteq \mathring{C}$ para todo $r > 0$. Si x es un elemento de $\mathring{C}$ y $r > 0$, $rx \in C$, entonces por lema 1.19, para cualquier $t \in (0,1)$ tenemos que $tx + (1-t)rx \in \mathring{C}$. Lo mismo ocurre para $r + \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$. Luego, $r\mathring{C} \subset \mathring{C}$ para cualquier $r > 0$. Con lo anterior tenemos que $\mathring{C}$ es un cono. También del lema anterior se sigue que si $\mathring{C}$ es no vacío entonces coincide con el interior de $\overline{C}$ y que $\overline{C}$ coincide con la cerradura de $\mathring{C}$. Finalmente, para probar que $\overline{C}$ es un cono punteado, dado $c \in C$ la sucesión $\{\frac{1}{n}c\}$ está contenida en C y converge a $0c = 0$, luego $0 \in \overline{C}$ y $\overline{C}$ es un cono punteado. □

Comentario 1.22. *En adelante, cuando consideremos un espacio euclídeo de dimensión finita $\mathbb{R}^n$, si no mencionamos explícitamente su topología supondremos que su topología es la topología estándar en $\mathbb{R}^n$, pues es la única topología de Hausdorff compatible con la estructura de espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$.*

1.4. Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Definición 1.23 (Espacio vectorial parcialmente ordenado)**.** *Sea V un conjunto equipado con la estructuras de espacio vectorial real y de conjunto parcialmente ordenado. Diremos que las dos estructuras son compatibles si y solo si (i) para cualquier $a, b, c \in V$ con $a \leq b$ tenemos que $a + c \leq b + c$ y (ii) para cualquier $a, b \in V$ con $a \leq b$ y $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda a \leq \lambda b$. En este caso llamamos a V un espacio vectorial parcialmente ordenado. Decimos que $v \in V$ es positivo si y solo si $v \geq 0$ y denotamos al conjunto de los elementos positivos mediante V^+.*

Definición 1.24. *Sean V, W espacios vectoriales parcialmente ordenados y $f : V \to W$ una función lineal. Decimos que f es positiva lineal si mapea elementos positivos a elementos positivos.*

Definición 1.25. *Sean V, W, X espacios vectoriales parcialmente ordenados y $f : V \times W \to X$ una función bilineal que lleva productos de elementos positivos a elementos positivos. En este caso decimos que f es* *positiva bilineal. Suponga además que dado cualquier* $a \in V$ *la desigualdad* $f(a,b) \geq 0$ *para todo* $b \in W^+$ *implica que* $a \geq 0$ *y que dado cualquier* $b \in W$*, la desigualdad* $f(a,b) \geq 0$ *para todo* $a \in V^+$ *implica que* $b \geq 0$*. Decimos entonces que* f *es fuertemente positiva.*

Teorema 1.26. *El conjunto de los elementos positivos en un espacio vectorial parcialmente ordenado es un cono propio. Recíprocamente, un cono propio* C *en un espacio vectorial* V *induce un orden parcial en el espacio vectorial haciendo* $a \leq b$ *si y solo si* $b - a \in C$*, este orden parcial es compatible con la estructura de espacio vectorial y el cono de elementos positivos coincide con* C*.*

Demostración. Sean $x, y \in V^+$ y $\lambda > 0$. Entonces $x + y \geq 0$ y $\lambda x \geq 0$, por lo que V^+ es un cono. Además $0 \in V^+$ y V^+ no contiene múltiplos negativos de sus elementos, luego es un cono propio. Recíprocamente, sea C un cono propio en V. Si hacemos $a \leq b$ si y solo si $b - a \in C$, vemos que esta relación es un orden parcial, pues (i) como $a - a = 0 \in C$ entonces $a \leq a$ para todo $a \in V$; (ii) si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $b - a, c - b \in C$, y como C es un cono tenemos que $(b - a) + (c - b) \in C$, pero $(b - a) + (c - b) = c - a$, luego $a \leq c$; (iii) si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $b - a$ y $a - b$ son elementos de C, pero C no contiene múltiplos negativos de sus elementos, por lo que $b - a = 0$, es decir $a = b$. Con lo anterior tenemos que C induce un orden parcial en V. Ahora veamos que el orden parcial es compatible con la estructura de espacio vectorial. En primer lugar, si $a \leq b$ entonces $b - a \in C$, pero $b - a = (b + c) - (a + c)$, con lo que $a + c \leq b + c$. Por otro lado $\lambda > 0$ implica $\lambda(b - a) \in C$, y $\lambda(b - a) = \lambda b - \lambda a$, esto implica que $\lambda a \leq \lambda b$. Así, V es un espacio vectorial parcialmente ordenado. Es claro ver que los elementos positivos son precisamente los elementos del cono propio C. Esto concluye la prueba. $\square$

Definición 1.27. *Sea* V *un espacio vectorial parcialmente ordenado. Una topología en* V *es compatible con la estructura de espacio vectorial parcialmente ordenado si es compatible con la estructura de espacio vectorial y además satisface que el cono de los positivos* V^+ *es cerrado en* V*.*

El cono de los elementos positivos no siempre es un cono generador, los siguientes resultados nos dan criterios para saber si el cono de los elementos positivos es un cono generador.

Lema 1.28. *Un cono* C *en un espacio vectorial* V *es un cono generador si y solo si para todo* $v \in V$ *existe* $x \in C$ *tal que* $v \leq x$*.*

Demostración. Suponga que C es un cono generador, entonces dado $v \in V$ existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $v = c_1 - c_2$, con lo que $c_2 = c_1 - v$ y así $c_1 - v \in C$, esto es, $0 \leq c_1 - v$, lo que es equivalente a $v \leq c_1$. Recíprocamente, si dado $v \in V$ existe $x \in C$ tal que $v \leq x$ entonces $x - v \in C$, esto es, $x - v = c$ para algún $c \in C$, de donde tenemos que $v = x - c$, $c \in C$. Luego $V = C - C$. $\square$

Definición 1.29. *Decimos que un conjunto* A *mayoriza a un conjunto* B *si para todo* $b \in B$ *existe* $a \in A$ *tal que* $b \leq a$*.*

Lema 1.30. *(1) Un subespacio vectorial* X *de* V *mayoriza a* V *si y solo si* $V = X - V^+$*.*
(2) El cono propio V^+ *es generador si y solo si el espacio vectorial* $V^+ - V^+$ *mayoriza a* V*.*

Demostración. (1) Suponga primero que X mayoriza a V, entonces para todo $v \in V$ existe $x \in X$ tal que $v \leq x$, es decir, $x - v \in V^+$, de donde se sigue que existe $v' \in V^+$ tal que $v = x - v'$, luego $V = X - V^+$. Ahora suponga que $V = X - V^+$, para todo $v \in V$ existen $x \in X, v' \in V^+$ tal que $v = x - v'$, entonces $x - v = v' \in V^+$, y con esto tenemos que $v \leq x$.
(2) Si el cono propio V^+ es generador entonces dado $v \in V$ existen $v_1, v_2 \in V^+$ tales que $v = v_1 - v_2 \leq v_1 - v_2$, luego $V^+ - V^+$ mayoriza a V. Ahora suponga que el subespacio vectorial $V^+ - V^+$ mayoriza a V, entonces por la parte (1) tenemos que $V = (V^+ - V^+) - V^+$, y con esto se tiene que $V = V^+ - (V^+ + V^+) \subseteq V^+ - V^+$. Así, $V = V^+ - V^+$. $\square$

Definición 1.31 (Orden arquimediano). *Un espacio vectorial parcialmente ordenado V se dice que tiene orden arquimediano cuando $v \in V$, $w \in V^+$ y $nv \leq w$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implican que $v \leq 0$.*

Proposición 1.32. *Un espacio vectorial V tiene orden arquimediano si y solo si para todo $v \in V^+$ se tiene que $inf\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$ existe y es igual a cero.*

Demostración. Suponga que V tiene orden arquimediano. Sea $v \in V^+$, entonces $0 \leq v$ y por tanto $0 \leq \frac{1}{n}v$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego 0 es una cota inferior del conjunto $\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$. Sea w otra cota inferior de $\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $w \leq \frac{1}{n}v$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ser V con orden arquimediano se tiene que $w \leq 0$. Luego $0 = inf\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora suponemos que para cada $v \in V^+$, $0 = inf\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$. Sean $w \in V$ y $v \in V^+$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $w \leq \frac{1}{n}v$ entonces $w \leq 0$ pues $0 = inf\{\frac{1}{n}v : n \in \mathbb{N}\}$, y entonces V tiene orden arquimediano. □

Otros resultados acerca de espacios vectoriales con orden arquimediano se presentan en la siguiente proposición.

Proposición 1.33. *Si un espacio vectorial parcialmente ordenado admite una topología para la cual el cono de los elementos positivos es cerrado entonces:*
(i) La topología es Hausdorff,
(ii) V tiene orden arquimediano,
(iii) los intervalos de orden son cerrados.

Demostración. (i) El conjunto de los elementos $x \leq 0$ es también un conjunto cerrado, entonces $\{0\}$ es la intersección de dos conjunto cerrados, se sigue que $\{0\}$ es un conjunto cerrado y por tanto V es un espacio de Hausdorff.
(ii) Sea $v \in V^+$ y $w \in V$, suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $nw \leq v$, entonces $0 \leq \frac{1}{n}v - w$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero la sucesión $\{\frac{1}{n}v - w\}$ converge a $-w$ y esto implica que $0 \leq -w$, esto es, $w \leq 0$. Luego V tiene orden arquimediano.
(iii) Basta ver que $[a, b] = (a + V^+) \cap (b - V^+)$. □

Definición 1.34 (Topología de orden). *Sea V un espacio vectorial parcialmente ordenado. La topología más fina que hace a V un espacio vectorial topológico localmente convexo y es tal que todos los intervalos de orden son acotados es llamada la topología de orden.*

Definición 1.35 (Unidad de orden). *Sea V un espacio vectorial parcialmente ordenado. Un elemento $e \in V$ es llamado unidad de orden si y solo si para cualquier $v \in V$ existe $\lambda > 0$ tal que $v \leq \lambda e$.*

Proposición 1.36. *Sea V un espacio vectorial parcialmente ordenado con unidad de orden e. La función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, definida por $\|v\| = inf\{\lambda > 0 : v \in [-\lambda e, \lambda e]\}$, es una seminorma en V. Además, si el orden es arquimediano entonces $\|\cdot\|$ es una norma.*

Demostración. (i) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, si $\alpha \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}|\alpha|\|v\| &= \alpha inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leq v \leq \lambda e\} \\ &= inf\{\alpha\lambda : -\alpha\lambda e \leq \alpha v \leq \alpha\lambda e\} \\ &= \|\alpha v\|.\end{aligned}$$

Un cálculo similar muestra que para $\alpha < 0$ también se tiene $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
(ii)Si $A = \{\lambda > 0 : -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}$, $B = \{\lambda > 0 : -\lambda e \leq y \leq \lambda e\}$ y $C = \{\lambda > 0 : -\lambda e \leq x+y \leq \lambda e\}$, entonces

$A+B \subset C$, de donde tenemos que $inf(C) \leq inf(A+B) = inf(A) + inf(B)$. Luego $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(iii) Si $v=0$ entonces $\|v\| = 0$.
Así, por (i), (ii) y (iii) se tiene que $\|\cdot\|$ es una seminorma en V. Además, si el orden es arquimediano, si $\|v\| = 0$, entonces $0 = inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leq v \leq \lambda e\}$, como $e \geq 0$, por la propiedad arquimediana tenemos que $0 \leq v \leq 0$ y entonces $v = 0$.

□

Definición 1.37 (Seminorma de orden)**.** *Sea V un espacio vectorial parcialmente ordenado con unidad de orden $e \in V$. A la seminorma de la proposición anterior la llamaremos seminorma de orden.*

Definición 1.38 (Espacio de Riesz)**.** *Un espacio vectorial parcialmente ordenado V se llama espacio de Riesz si y solo si todo par de vectores $x, y \in V$ posee supremo e ínfimo.*

Ejemplo 1.39. *Retomando los ejemplos presentados en 1.6:*
1. $\mathbb{R}^X$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado, el cono de los positivos es el conjunto de las funciones f tal que $f(x_i) \geq 0$ para toda $x_i \in X$. Además, por ser una retícula $\mathbb{R}^X$ también es un espacio de Riesz.
2. Visto como espacio vectorial, el cono de las matrices semidefinidas positivas induce en $Herm(m, \mathbb{C})$ un orden parcial compatible con la estructura de espacio vectorial, con este orden $Herm(m, \mathbb{C})$ es una anti-rretícula.

1.5. Conos y Dualidad

Definición 1.40 (Sistema dual)**.** *Un par dual o sistema dual es un par de espacios vectoriales (L, L') junto con una función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L' \to \mathbb{R}$ que satisface dos propiedades:*
(i) si $\langle x, x' \rangle = 0$ para toda $x' \in L'$, entonces $x = 0$,
(ii) si $\langle x, x' \rangle = 0$ para toda $x \in L$, entonces $x' = 0$.
La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L' \to \mathbb{R}$ es llamada la bilinealidad del par (L, L').

El par dual típico es un par de la forma (L, L') donde L es un espacio de Hausdorff localmente convexo, L' es su dual topológico, y la bilinealidad del par es definida para cada $(x, x') \in L \times L'$ por $\langle x, x' \rangle = x'(x)$.

Definición 1.41 (Cono dual cerrado)**.** *Sea (L, L') un sistema dual, y sea C un cono de L. El conjunto $C' := \{x' \in L' : \langle x, x' \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}$ es un cono llamado el cono dual cerrado de C.*

Definición 1.42 (Cono cerrado auto-dual)**.** *Sea (L, L') un sistema dual tal que $L = L'$, y sea C un cono de L tal que $C = C'$. Decimos que C es un cono cerrado auto-dual.*

A partir de este momento y a lo largo de toda la tesis, todos los espacios vectoriales topológicos son de dimensión finita con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y consideraremos la norma inducida por el producto interno $\|\cdot\|$ dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. En otras palabras, cualquier espacio vectorial topológico no es más que $\mathbb{R}^n$ con su topología estándar, su producto interno estándar y la norma inducida por este, a menos que se indique lo contrario. En los resultados sobre conos en los que no se hace mención explícita del espacio vectorial, supondremos que es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.43. *El conjunto polar S^0 de cualquier conjunto S en un espacio vectorial con producto interno V está definido como $S^0 = \{y \in V : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in S\}$.*

Teorema 1.44. *Para cualquier cono cerrado no vacío C, tenemos que $(C')' = C$.*

Demostración. Ya que C es un cono, es claro que $C' = -C^0$. Por lo tanto el resultado es un caso especial del siguiente teorema. □

Teorema 1.45. *Si S es un conjunto convexo cerrado que contiene a* 0*, entonces* $(S^0)^0 = S$.

Demostración. Es claro que $S \subset (S^0)^0$. Para la contención contraria, será suficiente probar que si $x_0 \notin S$ entonces existe y tal que para todo $x \in S$ se tiene que $\langle x, y\rangle \leq 1$ y $\langle x_0, y\rangle > 1$. Sea x_1 un punto de S desde el cual la distancia a x_0 es mínima. El punto x_1 existe por ser S un conjunto convexo cerrado, y al escoger una bola cerrada centrada en x_0, $\overline{B_r(x_0)}$, para algún $r > 0$, tal que $\overline{B_r(x_0)} \cap S \neq \emptyset$, como $\overline{B_r(x_0)} \cap S$ es compacto entonces la función distancia alcanza un mínimo en este conjunto.

$$\forall x \in S,\ \|x - x_0\| \geq \|x_1 - x_0\|.$$

Para $0 \leq \lambda \leq 1$, $x \in S$ tenemos que $\lambda x + (1-\lambda)x_1 \in S$, por tanto

$$\|\lambda x + (1-\lambda)x_1 - x_0\|^2 \geq \|x_1 - x_0\|^2$$

o equivalentemente,

$$\lambda^2\|x - x_1\|^2 + 2\lambda\langle x - x_1, x_1 - x_0\rangle \geq 0.$$

Como lo anterior es válido para todo λ con $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$\langle x - x_1, x_1 - x_0\rangle \geq 0$$

o lo que es lo mismo

$$\langle x, x_0 - x_1\rangle \leq \langle x_1, x_0 - x_1\rangle.$$

Si aplicamos esto último a $x = 0$ tenemos que el lado derecho de la desigualdad es no negativo. Por tanto, podemos escoger un número μ tal que

$$\langle x_1, x_0 - x_1\rangle < \mu < \langle x_0, x_0 - x_1\rangle$$

(lo cual es posible ya que $\langle x_0 - x_1, x_0 - x_1\rangle > 0$), tenemos entonces que $\mu > 0$. Las desigualdades siguientes son válidas para todo $x \in S$

$$\langle x, x_0 - x_1\rangle \leq \langle x_1, x_0 - x_1\rangle < \mu < \langle x_0, x_0 - x_1\rangle,$$

con lo anterior se tiene que $y = \frac{1}{\mu}(x_0 - x_1)$ satisface lo que deseamos.

□

Proposición 1.46. *Para cualquier cono cerrado C, $int(C') = \{y : \langle x, y\rangle > 0,\ \forall x \in C\backslash\{0\}\}$*

Demostración. Sea

$$D = \{y : \langle x, y\rangle > 0,\ \forall x \in C\backslash\{0\}\}.$$

Claramente, $D = \{y : \langle x, y\rangle > 0,\ \forall x \in C \cap S(V)\}$, donde $S(V)$ denota la esfera unitaria en V. Ya que $C \cap S(V)$ es compacto, tenemos que D es abierto. Se sigue que $D \subseteq int(C')$. Para el recíproco, suponga que $y \in int(C')$. Entonces si $x \in C\backslash\{0\}$, tenemos que $\langle x, z\rangle \geq 0$ para todo z en algún vecindario de y, esto es $\langle x, y\rangle + \langle x, u\rangle = \langle x, y + u\rangle \geq 0$ para todo u suficientemente pequeño. Se sigue que $\langle x, y\rangle > 0$. □

Definición 1.47 (Cono dual abierto). *El cono dual abierto de un cono abierto Ω está definido por*

$$\Omega^* = \{y \in V : \langle x, y\rangle > 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}\}.$$

Comentario 1.48. *Recuerde que un cono abierto es el interior de su clausura, por la proposición 1.21 Ω^* es el interior del cono dual cerrado de $\overline{\Omega}$. Si Ω^* es no vacío, se sigue del teorema 1.44 que $(\Omega^*)^* = \Omega$.*

Definición 1.49 (Cono abierto auto-dual). *Un cono abierto Ω se dice abierto auto-dual si $\Omega^* = \Omega$.*

Proposición 1.50. *En un espacio vectorial parcialmente ordenado V con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ bilineal positivo, el cono positivo V^+ es cerrado auto-dual si y solo si el producto interno es fuertemente positivo.*

Demostración. En efecto, si por un lado V^+ es cerrado auto-dual, entonces $V^+ = \{v \in V : \langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+\}$, con esto la desigualdad $\langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+$ implica que $v \in V^+$, y por la simetría del producto interno tenemos que la desigualdad $\langle w, v\rangle \geq 0\ \forall v \in V^+$ implica que $w \in V^+$, por tanto el producto interno es fuertemente positivo. Por otro lado, si el producto interno es fuertemente positivo entonces para cualquier $v \in V$ la desigualdad $\langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+$ implica que $v \in V^+$, por lo que $\{v \in V : \langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+\} \subseteq V^+$, mientras que por ser el producto interno bilineal positivo tenemos que $V^+ \subseteq \{v \in V : \langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+\}$. Luego $V^+ = \{v \in V : \langle w, v\rangle \geq 0\ \forall w \in V^+\}$ y V^+ es cerrado auto-dual. □

Definición 1.51. *El grupo de automorfismos $G(C)$ de un cono C se define como*

$$G(C) = \{g \in GL(V) : gC = C\}.$$

Un cono C se dice homogéneo si $G(C)$ actúa transitivamente en él.

Definición 1.52 (Cono simétrico). *Un cono simétrico es un cono abierto que es a la vez abierto auto-dual y homogéneo.*

Recordamos que en un espacio vectorial parcialmente ordenado topológico el cono de los elementos positivos debe ser cerrado para que las estruturas de topología y de orden sean compatibles. En este sentido, en secciones posteriores nos van a interesar espacios vectoriales parcialmente ordenados cuyo cono de elementos positivos sea tal que su interior es un cono simétrico.

Escribimos g^* para el elemento adjunto de un elemento $g \in GL(V)$, i.e. tenemos que

$$\langle gx, y\rangle = \langle x, g^*y\rangle,$$

$\forall x, y \in V$.

Proposición 1.53. *Para cualquier cono abierto Ω tenemos que $G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$. En particular, si $\Omega^* = \Omega$, entonces $g \in G(\Omega)$ implica $g^* \in G(\Omega)$.*

Demostración. Si $g \in G(\Omega)$ y $y \in \Omega^*$, entonces para todo $x \neq 0, x \in \overline{\Omega}$,

$$\langle x, g^*y\rangle = \langle gx, y\rangle > 0.$$

Esto prueba que $g^*\Omega^* \subset \Omega^*$. Por tanto $g^* \in G(\Omega^*)$ y luego $G(\Omega)^* \subset G(\Omega^*)$. Aplicando esto ahora a Ω^* tenemos $G(\Omega^*)^* \subset G(\Omega^{**}) = G(\Omega)$, obteniendo así el resultado.

Ejemplo 1.54. *1. En $\mathbb{R}$, el conjunto de los números postivos es un cono simétrico.*
2. En $Herm(m, \mathbb{C})$, las matrices definidas positivas son un cono simétrico.

□

La propiedad $G(\Omega)^* = G(\Omega)$ caracteriza a los conos simétricos sobre los conos homogéneos.

Capítulo 2

Álgebras de Jordan Euclídeas y conos simétricos

En este capítulo abordamos la teoría básica de Álgebras de Jordan Euclídeas y conos simétricos. Presentamos el teorema espectral para Álgebras de Jordan Euclídeas y la descomposición de un Álgebra de Jordan Euclídea como suma directa de Álgebras de Jordan Euclídeas simples. Estudiamos la correspondencia uno a uno entre los conos simétricos irreducibles y las Álgebras de Jordan Euclídeas simples. Recordamos en este punto que todos los espacios vectoriales son de dimensión finita. La teoría de Álgebras de Jordan Euclídeas fue tomada de [3]. La clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples es debida a Jordan, Von Neumann y Wigner en 1934 [5], la demostración que escribimos en esta tesis es la versión que aparece en [3]. Finalmente, los conceptos y resultados de Geometría fueron tomados de [8], mientras que los de análisis funcional son tomados de [12].

2.1. Álgebras de Jordan Euclídeas

Definición 2.1 (Álgebra con unidad)**.** *Sea $\mathbb{F}$ el campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ es un álgebra sobre $\mathbb{F}$ si existe una operación (producto) $(x, y) \mapsto xy$ bilineal de $V \times V$ en V y, además existe un elemento unidad (o identidad) $e \in V$ tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in V$.*

Definición 2.2. *Para un elemento $x \in V$ sea $L(x)$ el operador lineal de V definida por $L(x)y = xy$.*

Definición 2.3 (Álgebra de Jordan)**.** *Un álgebra V sobre $\mathbb{F}$ es un Álgebra de Jordan si para todos $x, y \in V$:*
(J1) $xy = yx$,
(J2) $x(x^2y) = x^2(xy)$.

Usando la notación $[S, T] = ST - TS$, con S, T endomorfismos del espacio vectorial V, la propiedad (J2) se puede escribir como $[L(x), L(x^2)] = 0$. Las siguientes identidades nos servirán para probar propiedades sobre Álgebras de Jordan Euclídeas.

Proposición 2.4. *Sea V un Álgebra de Jordan, las siguientes identidades se satisfacen.*
(i) $[L(x), L(y^2)] + 2[L(y), L(xy)] = 0$,
(ii) $L(x^2y) - L(x^2)L(y) = 2(L(xy) - L(x)L(y))L(x)$.

Demostración. La identidad (i) se obtiene al escribir $[L(y), L(y^2)]x = 0$ y diferenciar con respecto a x. Mientras que la identidad (ii) se obtiene al aplicar (i) a un elemento z y reordenar los términos. $\square$

Veamos los siguientes ejemplos de Álgebras de Jordan:

Ejemplo 2.5. *Si A es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$, podemos definir en A una estructura de Álgebra de Jordan definiendo un nuevo producto*

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

A este producto le llamamos producto de Jordan.

Ejemplo 2.6. *Si V es un subespacio lineal de un álgebra asociativa A que es "cuadrado estable", i.e. para cualquier $x \in V$ se tiene que $x^2 \in V$. Entonces V equipado con el producto de Jordan es un Álgebra de Jordan.*

Ejemplo 2.7. *Como un caso especial del ejemplo anterior podemos tomar A como el álgebra de las matrices cuadradas de tamaño n y entradas en $\mathbb{R}$, $M(n, \mathbb{R})$, y V como el subespacio de las matrices simétricas $Sym(n, \mathbb{R})$.*

Definición 2.8 (Ideales)**.** *Un ideal izquierdo (derecho) de un álgebra A es un subgrupo aditivo I de A tal que para cada $a \in A$ y $v \in I$ se tiene que $av \in I$ ($va \in I$). Un ideal bilateral, o simplemente ideal de A es un subgrupo aditivo de A que es simultáneamente ideal izquierdo e ideal derecho de A.*

En un álgebra V definimos x^n de forma recursiva: $x^n = x \cdot x^{n+1}$, $x^0 = e$. Un álgebra V se dice asociativa en potencias si para todo $x \in V$ se tiene que $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$. (Esto significa que el álgebra generada por x es asociativa). Un álgebra de Jordan es asociativa en potencias.

Sea V un álgebra asociativa en potencias de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ con elemento identidad e y sea $x \in V$. Definimos

$$m(x) = min\{k : e, x, \ldots, x^k \text{ son linealmente dependientes}\}.$$

Definición 2.9 (Polinomio mínimo)**.** *Dado $x \in V$, llamaremos polinomio mínimo de x al polinomio mónico de menor grado $p(\lambda)$ tal que $p(x) = 0$.*

Denotamos por $f(\lambda; x)$ el polinomio mínimo de x. Entonces tenemos que $m(x)$ coincide con el grado del polinomio mínimo de x. sea $\mathbb{F}[X]$ el álgebra sobre $\mathbb{F}$ de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{F}$. Para un elemento $x \in V$ definimos

$$\mathbb{F}[x] = \{p(x) : p \in \mathbb{F}[X]\}.$$

Esta es el subálgebra de V generada por x, e, es conmutativa y asociativa. Para $x \in V$ definimos el ideal $\mathcal{J}(x)$ como $\mathcal{J}(x) = \{p \in \mathbb{F}[X] : p(x) = 0\}$, $\mathcal{J}(x)$ es generado por el polinomio mínimo de x. El número $m(x)$ está acotado por $dim(V)$.

Definición 2.10 (Rango)**.** *Definimos el rango de V como*

$$r = max\{m(x) : x \in V\},$$

y un elemento $x \in V$ se dice regular si $m(x) = r$.

Usaremos el siguiente resultado sobre los elementos regulares en un Álgebra de Jordan, su demostración se encuentra en [3], p.28.

Proposición 2.11. *El conjunto de elementos regulares es abierto y denso en V. Existen polinomios $a_1, \ldots, a_r$ en V tales que el polinomio mínimo de cada elemento regular x es dado por*

$$f(\lambda; x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x).$$

El coeficiente $a_1(x)$ es llamado la traza de x, y lo denotamos por $tr(x)$. El coeficiente $a_r(x)$ es llamado el determinante de x, denotado por $det(x)$.

Definición 2.12 (Álgebra de Jordan Euclídea)**.** *Un álgebra de Jordan V sobre $\mathbb{R}$ se dice euclídea si existe en V un producto interno asociativo, es decir, si denotamos por $\langle u, v\rangle$ al producto interno, tenemos que $\langle xu, v\rangle = \langle u, xv\rangle$ para todos $x, u, v \in V$.*

Ejemplo 2.13. *$Sym(n, \mathbb{R})$ es un Álgebra de Jordan Euclídea con el producto de Jordan y $\langle A, B\rangle = Tr(AB)$.*

Definición 2.14 (Elemento idempotente)**.** *Un elemento $c \in V$ se dice idempotente si $c^2 = c$. Dos idempotentes se dicen ortogonales si $cd = 0$.*

Ya que

$$\langle c, d\rangle = \langle c^2, d\rangle = \langle c, cd\rangle,$$

idempotentes ortogonales son ortogonales respecto al producto interno.

Definición 2.15 (Sistema completo de idempotentes ortogonales)**.** *Decimos que $c_1, \ldots, c_k$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales si*

$$\begin{aligned} c_i^2 &= c_i, \\ c_i c_j &= 0 \text{ si } i \neq j, \\ c_1 + \cdots + c_k &= e \end{aligned}$$

A continuación recordamos algunas definiciones para operadores lineales

Definición 2.16. *Un operador lineal T en un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{F}$ es llamado*

- *unitario si $T^*T = TT^* = Id$.*
- *ortogonal si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y T es unitario.*
- *isometría si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in V$.*
- *normal si $T^*T = TT^*$.*
- *autoadjunto si $T^* = T$. Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $T^* = T$ decimos que el operador es simétrico.*
- *semidefinido positivo si T es autoadjunto y $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in V$.*
- *definido positivo si T es autoadjunto y $\langle Tx, x\rangle > 0$ para todo $x \in V \backslash \{0\}$.*

Proposición 2.17. *En un Álgebra de Jordan Euclídea V el operador de multiplicación por izquierda es simétrico.*

Demostración. En efecto, para todo $x, y, z \in V$ se tiene que

$$\langle L(x)y, z\rangle = \langle xy, z\rangle = \langle y, xz\rangle = \langle y, L(x)z\rangle.$$

□

Recordamos ahora algunos resultados sobre descomposición espectral de operadores normales, que nos servirán en la prueba de los teoremas espectrales para Álgebras de Jordan Euclídeas.

Teorema 2.18. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sea T un operador simétrico en V, Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los distintos eigenvalores de T. Entonces*
(1) $V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)$, con $E(\lambda_i)$ el espacio propio del eigenvalor λ_i.
(2) Sean $P_1, \ldots, P_k$ las proyecciones ortogonales sobre $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_k)$, respectivamente. Entonces $P_iP_j = 0$, para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, y

$$T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k,\ \ P_1 + \cdots + P_k = I.$$

Lema 2.19. *Sea T un operador simétrico en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{R}$. Suponga que $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ es la descomposición espectral de T. Si g es un polinomio entonces $g(T) = g(\lambda_1)P_1 + \cdots + g(\lambda_k)P_k$.*

Lema 2.20. *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ números reales distintos. Existe un polinomio p que se anula en todos los α_i, $i \neq 1$, y $p(\alpha_1) = 1$*

Lema 2.21. *Sea $\{T(t)\}$, $a \leq t \leq b$, una familia continua de operadores autoadjuntos en un espacio V, con $T(a)$ positivo y $T(b)$ con un eigenvalor negativo. Entonces existe $s \in (a, b)$ tal que 0 es un eigenvalor de $T(s)$.*

Demostración. Sea $S(t) = -T(t) + M(Id)$ con $M > 0$ suficientemente grande de modo que $S(t)$ es definido positivo para todo $t \in [a, b]$. La norma operador $\|S(t)\|$ es continua, y $\|S(a)\| < M$ mientras que $\|S(b)\| > M$, entonces existe $s \in (a, b)$ tal que $\|S(s)\| = M$. En este caso, existe $v \in V$ distinto de cero tal que $S(s)v = Mv$. Esto es, $T(s)v = 0$. Luego, 0 es un eigenvalor de $T(s)$. □

A continuación probamos la primera versión del teorema espectral para Álgebras de Jordan Euclídeas

Teorema 2.22. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea. Para $x \in V$ existen únicos números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, todos distintos, y un único sistema completo de idempotentes ortogonales $c_1, \ldots, c_k$ tal que*

$$x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k.$$

Para cada $j = 1, \ldots, k$ tenemos que $c_j \in \mathbb{R}[x]$. Los números λ_j se llaman eigenvalores y $\sum \lambda_j c_j$ la descomposición espectral de x.

Demostración. Para $y \in \mathbb{R}[x]$, sea $L_0(y)$ la restricción de $L(y)$ a $\mathbb{R}[x]$. Entonces $L_0(x)$ es un endomorfismo simétrico del espacio euclídeo $\mathbb{R}[x]$, por tanto, por el teorema 2.18, existen proyecciones ortogonales no cero $P_1, \ldots, P_k$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $P_1 + \cdots + P_k = I$, y números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ todos distintos tal que

$$L_0(x) = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k.$$

Adicionalmente, por el lema 2.20 tenemos que existen polinomios p_j tal que $p_j(\lambda_j) = 1$ y $p_j(\lambda_i) = 0$ si $i \neq j$. Por el lema 2.19 se obtiene entonces que $p_j(L_0(x)) = \sum_{i=1}^{k} p_j(\lambda_i)P_i = p_j(\lambda_j)P_j = P_j$. Hacemos $c_j = p_j(x)$. Usando la asociatividad del álgebra $\mathbb{R}[x]$ obtenemos

$$L_0(c_j) = L_0(p_j(x)) = p_j(L_0(x)) = P_j.$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
L_0(c_i c_j) &= L_0(c_i)L_0(c_j) = P_i P_j, \\
L_0(\sum c_j) &= \sum P_j = I, \\
L_0(\sum \lambda_j c_j) &= \sum \lambda_j P_j = L_0(x).
\end{aligned}
$$

Como L_0 es inyectivo (en efecto, si $L_0(y) = 0$, entonces $y = L_0(y)e = 0$), se sigue que

$$
\begin{gathered}
c_i^2 = c_i \ , \ c_i c_j = 0, \ \text{si } i \neq j \\
\sum c_j = e, \ \sum \lambda_j c_j = x.
\end{gathered}
$$

Teniendo con lo anterior la existencia de únicos números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, todos distintos, y un único sistema completo de idempotentes ortogonales $c_1, \ldots, c_k$ tal que

$$
x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k.
$$

Ahora probaremos la unicidad. Suponga que se tiene una descomposición $x = \sum \lambda_j c_j$ para $x \in V$. Entonces $p(x) = \sum p(\lambda_j) c_j$ para todo polinomio p. Definiendo, para un j fijo,

$$
p^{(j)}(X) = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i),
$$

tenemos

$$
p^{(j)}(x) = \prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) c_j,
$$

lo que muestra que $c_j \in \mathbb{R}[x]$, ya que los $\lambda_j's$ son todos diferentes. Entonces los operadors $L_0(c_j)$ son proyecciones ortogonales mutuamente, y entonces los números λ_j son necesariamente los eigenvalores de $L_0(x)$. Cada c_j es la proyección ortogonal $L_0(c_j)e$ de e sobre el eigenespacio de $L_0(x)$ conrrespondiente a λ_j. Esto hace que sean únicos. □

Definición 2.23 (Sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos)**.** *Decimos que un idempotente es primitivo si es no cero y no puede ser escrito como la suma de dos (necesariamente ortogonales) idempotentes no cero. Decimos que $c_1, \ldots, c_m$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, o marco de Jordan, si cada c_j es un idempotente primitivo y*

$$
\begin{gathered}
c_j c_k = 0, \ j \neq k, \\
\sum_{j=1}^{m} c_j = e.
\end{gathered}
$$

Probamos la segunda versión del teorema espectral:

Teorema 2.24. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea. Suponga V tiene rango r. Entonces para cada $x \in V$ existen un marco de Jordan $c_1, \ldots, c_r$ y números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tal que*

$$
x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j.
$$

Los números λ_j (con sus multipicidades) son únicamente determinados por x. Adicionalmente,

$$detx = \prod_{j=1}^{r} \lambda_j, \ trx = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j.$$

Más generalmente,

$$a_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

donde a_k $(1 \leq k \leq r)$ es el polinomio definido en la proposición 2.11.

Demostración. Si $x = \sum_1^k \lambda_i c_i$ es la descomposición espectral del teorema anterior, entonces, claramente, $p(x) = \sum_{i=1}^k p(\lambda_i) c_i$ para todo polinomio p. Por tanto, el polinomio mínimo de x es

$$f(X; x) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i).$$

De esto podemor ver que $k \leq r$, y $k = r$ cuando x es regular. En este último caso c_i es primitivo, en otro caso sería posible tener un marco de Jordan de más de r elementos, y uno podría construír elementos en V cuyo polinomio mínimo tenga grado mayor que r, contradiciendo la definición de rango.
La fórmula para $detx$ y trx son obvias cuando x es regular. Cuando x no es regular, es el límite de una sucesión x_n de elementos regulares (proposición 2.11). Entonces $x_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n c_i^n$ por el razonamiento de arriba, y tomando una subsucesión podemos asumir que existe los límites $\lambda_i = \lim \lambda_i^n$ y $c_i = \lim c_i^n$. Nuestra aseveración se sigue de esto. La unicidad se sigue del teorema anterior $\square$

Observamos que se sigue en particular que un marco de Jordan tiene exactamente r elementos.

2.2. El cono de los cuadrados en un Álgebra de Jordan Euclídea

Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea. Sea Q el conjunto de todos los cuadrados

$$Q = \{x^2 : x \in V\}.$$

Proposición 2.25. *Considere el conjunto $Q' := \{y \in V : \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall x \in Q\}$. Entonces Q' es un cono y $Q' = \{y : L(y)$ es positivo semi-definido$\}$.*

Demostración. Es claro a partir de las propiedad de producto interno que Q' es un cono. Además, como $\langle y, x^2 \rangle = \langle yx, x \rangle = \langle L(y)x, x \rangle$, tenemos que $Q' = \{y : L(y)$ es positivo semi-definido$\}$. $\square$

Definimos a continuación la representación cuadrática de un elemento $x \in V$, la cual será de utilidad en algunas demostraciones posteriores, enunciamos algunas propiedades útiles, la demostración de estas propiedades se encuentran en [3] p.32,33.

Definición 2.26 (Representación cuadrática). *Sea V un Álgebra de Jordan sobre $\mathbb{R}$ con elemento unidad e. Para $x \in V$ definimos*

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

La función P es llamada la representación cuadrática de V.

Definición 2.27. *Para dos elementos x, y definimos la representación cuadrática de x, y como*

$$P(x, y) = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(xy).$$

Proposición 2.28. *Para dos elementos x, y cualesquiera, tenemos que*

$$P(P(y)x) = P(y)P(x)P(y).$$

Si x, y son invertibles entonces $P(x)y$ es invertible.

Proposición 2.29. *Un elemento x es invertible si y solo si $P(x)$ es invertible. En este caso:*

$$\begin{aligned} P(x)x^{-1} &= x, \\ P(x)^{-1} &= P(x^{-1}). \end{aligned}$$

Teorema 2.30. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea. Sea Q el conjunto de todos los cuadrados*

$$Q = \{x^2 : x \in V\}.$$

Entonces, Q es un cono cerrado autodual y el interior Ω de Q es un cono simétrico. Además, Ω es el conjunto de elementos x en V para los cuales $L(x)$ es definido positivo.

Demostración. Considere el conjunto $Q' := \{y \in V : \langle x, y\rangle \geq 0 \ \forall x \in Q\}$. Note que Q' es un cono por proposición 2.25, probaremos que $Q' = Q$. Si

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j$$

es la descomposición espectral de un elemento $x \in V$, entonces

$$x^2 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 c_j,$$

y

$$L(x^2) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 L(c_j).$$

Ya que los operadores $L(c_j)$ son positivos, $L(x^2)$ es positivo y $Q \subset Q'$. Ahora sea $x \in Q'$. Ya que los vectores c_j son ortogonales, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{1}{\|c_j\|^2}\langle x, c_j\rangle \\ &= \frac{1}{\|c_j\|^2}\langle x, c_j^2\rangle \\ &= \frac{1}{\|c_j\|^2}\langle L(x)c_j, c_j\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto $x = y^2$ con $y = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{\lambda_j} c_j$. Entonces $Q' \subset Q$ y luego $Q' = Q$, esto es, Q es un cono cerrado auto-dual. Con esto $\Omega = int(Q)$ es un cono abierto debido a proposición 1.21. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{y \in V : \langle x, y\rangle > 0 \ \forall x \in Q\backslash\{0\}\} \\ &= \{y \in V : \langle x, y\rangle > 0 \ \forall x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}\} \\ &= \Omega^*\end{aligned}$$

Esto es, Ω es un cono abierto auto dual. Falta probar que $\Omega = int(Q)$ es homogéneo. Primero probaremos que Ω es el conjunto de elementos x en V para los cuales $L(x)$ es definido positivo. Para ello considere el conjunto

$$B = \{x \in V : L(x) \text{ es definido positivo}\} = \{x \in V : \langle x, y^2\rangle > 0 \ \forall y \in V\backslash\{0\}\},$$

entonces B es abierto, por tanto B está contenido en Ω. Para un elemento y distinto de cero en V consideremos la forma lineal definida en V por $l(x) = \langle x, y^2\rangle$. Entonces l no es idénticamente cero y para $x \in Q$ tenemos $l(x) \geq 0$, y para $x \in \Omega$ se tiene $l(x) > 0$ ya que Ω es abierto, lo que significa que Ω está contenido en B.
Ahora sea $x \in \Omega$, entonces por lo anterior y por proposición 2.17 $L(x)$ es simétrico y definido positivo, y si $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j$ es la descomposición espectral de x, tenemos que los valores λ_j son positivos para $j \in \{1, \cdots, k\}$. Entonces $det(x) > 0$. Luego x es invertible. Por la proposición anterior tenemos que $P(x)$ es también invertible. Notamos que $x^2 = P(x)e$, entonces $P(x)e \in \Omega$ cuando x es invertible. Se sigue que $P(x)\Omega \subset \Omega$, en efecto, si $x, y \in \Omega$ tenemos que $P(x)y$ es invertible por proposición 2.28, y además, si $t \in [0, 1]$ entonces $y(t) = (1-t)e + ty \in \Omega$. Sea $w(t) = P(x)y(t)$, $t \in [0, 1]$, y consideremos al operador $L(w(t))$. Para $t = 0$ tenemos que $P(x)y(t) = P(x)e = x^2 \in \Omega$ y para $t = 1$ tenemos $P(x)y(t) = P(x)y$, si suponemos que $P(x)y \notin \Omega$ entonces tenemos que $L(w_0)$ es definido positivo, pero $L(w(1))$ no lo es por no estar en Ω, sin embargo es invertible, entonces sus eigenvalores son distintos de cero. Por continuidad de los eigenvalores de una familia continua de operadores autoadjuntos (lema 2.21), existe $s \in (0, 1)$ tal que $L(w(s))$ tiene a 0 como eigenvalor, esto es, existe $z \neq 0$ tal que $L(w(s))z = 0$, lo cual no es posible pues $w(s) = P(x)y(s)$ es invertible. También tenemos que $P(x)^{-1}\Omega = P(x^{-1})\Omega \subset \Omega$. Luego $P(x) \in G(\Omega)$, y tenemos que

$$\Omega = \{x^2 : x \text{ es invertible}\} = \{P(x)e : x \text{ es invertible}\} \subset G(\Omega)e \subset \Omega$$

Esto es, $G(\Omega)$ es transitivo en Ω. □

Ejemplo 2.31. *El cono simétrico asociado con el Álgebra de Jordan Euclídea $Sym(n, \mathbb{R})$ es el cono de las matrices simétricas reales definidas positivas.*

Ejemplo 2.32. *Sea W un espacio vectorial real de dimensión finita, B una forma bilineal definida positiva en W. Sea $V = \mathbb{R} \times W$ el Álgebra de Jordan para la cual el producto es*

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu + B(u, v), \lambda v + \mu u),$$

entonces la forma bilineal $\lambda\mu + B(u, v)$ es asociativa y el Álgebra de Jordan V es Euclídea. El cono simétrico asociado a V es el cono de Lorentz: $\Omega = \{(\mu, v) | \mu > \sqrt{B(v, v)}\}$. De aquí en adelante llamaremos a esta construcción el Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana.

Ejemplo 2.33. *Considere el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

y el producto de Jordan definido por

$$x \circ y = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde x_i denota la i-ésima componente del vector $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\mathbb{R}^n$ es un Álgebra de Jordan Euclídea, con el conjunto $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$ como su conjunto de cuadrados.

Podemos probar también que cualquier cono simétrico es el interior del conjunto de los cuadrados de un Álgebra de Jordan Euclídea. Con lo que tenemos una correspondencia uno a uno entre los conos simétricos y las Álgebras de Jordan Euclídeas.

Sea Ω un cono simétrico en un espacio euclídeo V de dimensión finita n, con producto interno. Haremos la identificación de $GL(V)$ con $GL_n(\mathbb{R})$, con esto consideramos a $G(\Omega)$ como un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

Definición 2.34. *Para cualquier punto $a \in \Omega$ definimos el estabilizador de a en $G(\Omega)$ por*

$$G(\Omega)_a = \{g \in G(\Omega) : ga = a\}.$$

Proposición 2.35. *Se cumple que la componente conexa de la identidad en $G(\Omega)$, denotada de aquí en adelante por G, es transitiva en Ω.*

Demostración. Esto es porque Ω es la unión disjunta de $G-$órbitas, cada una de estas $G-$órbitas es abierta. Como Ω es un conjunto convexo entonces es conexo, luego Ω solo puede tener una órbita. Para más detalles de esta prueba puede leerse cap. 1 de [9]. □

Denotamos al estabilizador de a en G por G_a. Definimos

$$K = G \cap O(V),$$

donde $O(V)$ es el grupo ortogonal de V. Escribimos $\mathfrak{g}$ para el álgebra de Lie de G y $\mathfrak{k}$ para el álgebra de Lie de K. Entonces

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : X^* = -X\}.$$

Definimos

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : X^* = X\}.$$

Podemos ver por las condiciones de $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \bigoplus \mathfrak{k}$ como suma directa de espacios vectoriales. Usamos la identificación de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ con el espacio de matrices de $n \times n$ $M_n(\mathbb{R})$ de modo que las álgebras de lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ son vistos como subespacios de $M_n(\mathbb{R})$, también $\mathfrak{p}$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$. La siguiente proposición nos servirá para sustentar la construcción de una operación en un espacio vectorial, posteriormente. Antes enunciamos un resultado sobre conos simétricos cuya demostración omitimos, el lector puede encontrarla en [3], p. 5.

Proposición 2.36. *Si Ω es un cono simétrico, entonces para todo $a \in \Omega$, $G(\Omega)_a$ es compacto. Si $H \subset G(\Omega)$ es un subgrupo compacto, entonces $H \subset G(\Omega)_a$ para algún $a \in \Omega$.*

Definición 2.37. *Definimos el mapa exponencial $exp : \mathfrak{g} \to G$, $x \mapsto exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$.*

Proposición 2.38. *Si Ω es un cono simétrico, existen puntos $e \in \Omega$ tal que*

$$G(\Omega) \cap O(V) \subset G(\Omega)_e.$$

Para tales puntos e:

$$G_e = K.$$

El subgrupo K es conexo. Un elemento $X \in \mathfrak{g}$ pertenece a $\mathfrak{k}$ si y solo si $X \cdot e = 0$.

Demostración. Note que $G(\Omega) \cap O(V)$ es compacto. En efecto, como $O(V)$ es compacto, solo hace falta ver que $G(\Omega)$ sea cerrado. Primero observamos que debido a la continuidad de las transformaciones lineales, un elemento $g \in GL(V)$ está en $G(\Omega)$ si y solo si $g\overline{\Omega} = \overline{\Omega}$, al usar la topología de la norma operador en el espacio de transformaciones lineales podemos probar que lo anterior implica que $G(\Omega)$ es cerrado. Entonces por proposición anterior, $G(\Omega) \cap O(V) \subset G(\Omega)_e$ para algún $e \in \Omega$ y $K \subset G_e$. Ahora probaremos que $K = G_e$. Para esto veremos que $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_e$. Sea $X \in \mathfrak{g}_e$, entonces $X = X_1 + X_2$, con $X_1 \in \mathfrak{k}$ y $X_2 \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_e$ entonces se sigue que $X_2 \in \mathfrak{g}_e$. Entonces $exp(tX_2)$ es un elemento de G_e para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Como G_e es compacto entonces $exp(tX_2)$ es acotado para todo $t \in \mathbb{R}$. Al mismo tiempo X_2 es simétrico, se sigue que $X_2 = 0$. Por tanto $X = X_1$, y entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_e$. □

Note que el punto e no es único.

Proposición 2.39. *Para un punto $e \in \Omega$ tal que $G(\Omega) \cap O(V) \subset G(\Omega)_e$ tenemos que $Ge = \Omega$ implica $\mathfrak{g} \cdot e = V$. Esto implica que el mapeo $\mathfrak{p} \to V$, $X \mapsto X \cdot e$ es una biyección, y si L denota su inversa, tenemos que para $x \in V$, $L(x)$ es el único elemento en $\mathfrak{p}$ tal que $L(x) \cdot e = x$.*

Demostración. Si denotamos por f_e la función $G \to \Omega$, $g \mapsto ge$, la función f_e es continua. También la función exponencial de la definición anterior es continua. Consideremos la composición $f_e \circ exp$ y definamos la función $\alpha_e : \mathfrak{g} \to V$, $X \mapsto e + X \cdot e$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que al restringirnos a la bola de radio ϵ alrededor de 0 en $\mathfrak{g}$, α_e y $f_e \circ exp$ inducen un mapeo v entre las vecindades U, W de e en V, como observamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_\epsilon(0) \subset \mathfrak{g} \arrow[r, "exp"] \arrow[dr, "\alpha_e"'] & G \arrow[r, "f_e"] & W \subset V \\
& U \subset V \arrow[ur, dotted, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Este mapeo v es un homeomorfismo, por la transitividad de G en Ω tenemos que mediante este mapeo obtenemos $\mathfrak{g} \cdot e = V$. Luego, el mapeo $\mathfrak{p} \to V$, $X \mapsto X \cdot e$ es una biyección, pues $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \bigoplus \mathfrak{k}$ y un elemento $X \in \mathfrak{g}$ pertenece a $\mathfrak{k}$ si y solo si $X \cdot e = 0$. Denotamos por L su inversa: Para $x \in V$, $L(x)$ es el único elemento en $\mathfrak{p}$ tal que $L(x)e = x$. □

Usaremos la función L de la demostración anterior en el siguiente teorema para inducir una operación en V que nos dará una estructura de Álgebra de Jordan Euclídea.

Teorema 2.40. *Sea Ω un cono simétrico en un espacio vectorial euclídeo V. Definiendo en V el producto*

$$xy = L(x)y,$$

V es un Álgebra de Jordan Euclídea con elemento identidad e y

$$\overline{\Omega} = \{x^2 : x \in V\}.$$

Demostración. Es claro que el producto que hemos definido es bilineal. También es conmutativo, ya que

$$xy - yx = [L(x), L(y)] \cdot e = 0,$$

porque $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ y $\mathfrak{k} \cdot e = 0$.
El producto interno de V es una forma bilineal asociativa, ya que cada $L(x)$ pertenece a $\mathfrak{p}$ y es por tanto

simétrico. En order a probar la segunda propiedad (J2), definimos el asociador de tres elementos, $x, y, z \in V$ mediante

$$[x, y, z] = x(yz) - (xy)z = [L(x), L(z)]y.$$

Debemos probar que $[x^2, y, x] = 0$ para todos $x, y \in V$. Ahora, usando $[L(x), L(z)] \in \mathfrak{k}$, tenemos

$$\begin{aligned}[[L(x), L(z)], L(y)]e &= [L(x), L(z)](ye) \\ &= [x, y, z] = L([x, y, z])e.\end{aligned}$$

Ya que $X \mapsto X \cdot e$ es biyectivo de $\mathfrak{p}$ sobre V, se sigue que

$$[[L(x), L(z)], L(y)] = L([x, y, z]).$$

Aplicando esta identidad a y encontramos inmediatamente que

$$[x, y^2, z] = 2[x, y, z]y. \tag{2.1}$$

Ahora, para cualquiera $x, y, z \in V$, la asociatividad de el producto escalar da

$$\langle [x^2, y, x], z\rangle = \langle x^2(yx), z\rangle - \langle (x^2y)x, z\rangle = \langle x^2, (yx)z - y(xz)\rangle = \langle x^2, [y, x, z]\rangle. \tag{2.2}$$

Por un cálculo similar se tiene que

$$\langle [x^2, y, x], z\rangle = \langle x, y(x^2z) - (x^2y)z\rangle = \langle x, [y, x^2, z], \rangle$$

y usando la ecuación (2.1) vemos que adicionalmente esto es igual a

$$2\langle x, [y, x, z]x\rangle = 2\langle x^2, [y, x, z]\rangle.$$

Comparando con ecuación (2.2) vemos que

$$\langle [x^2, y, x], z\rangle = 0.$$

Esto se cumple para todo $x \in V$, por tanto $[x^2, y, x] = 0$, esto es

$$x^2(xy) = x(x^2y),$$

que es precisamente la propiedad (J2). Hemos probado que V es un Álgebra de Jordan.
Sea Ω_1 el cono simétrico asociado con el álgebra de Jordan V. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Omega_1 = expV &= \{expL(x) \cdot e : x \in V\} \\ &= \{expX \cdot e : X \in \mathfrak{p}\},\end{aligned}$$

por tanto Ω_1 está contenido en Ω. Ya que Ω y Ω_1 son auto duales, entonces $\Omega_1 = \Omega$.

□

Hasta este punto aún no hemos establecido la correspondencia uno-a-uno entre conos simétricos y Álgebras de Jordan Euclídeas. La estructura de álgebra depende de la elección del punto e.

Definición 2.41. *Un Álgebra de Jordan V se dice simple si no contiene ningún ideal no trivial.*

Proposición 2.42. *Si V es un Álgebra de Jordan Euclídea, entonces V se puede expresar de forma única como la suma directa de ideales simples.*

Demostración. Fijamos en V un producto interno asociativo. Sea $\mathcal{I}$ un ideal mínimo en V. Probamos que el complemento ortogonal $\mathcal{I}^{\perp}$:

$$\mathcal{I}^{\perp} = \{x \in V : \forall y \in \mathcal{I},\ \langle x, y\rangle = 0\},$$

es un ideal: sea $x \in V$ y $y \in \mathcal{I}^{\perp}$, entonces para cualquier $z \in \mathcal{I}$:

$$\langle xy, z\rangle = \langle y, xz\rangle = 0,$$

por tanto $xy \in \mathcal{I}^{\perp}$. Tenemos que

$$V = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^{\perp},\ \mathcal{I} \cdot \mathcal{I}^{\perp} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^{\perp} = \{0\},$$

por tanto V es la suma directa de las álgebras $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^{\perp}$. Ahora aplicamos el mismo proceso a $\mathcal{I}^{\perp}$, y después de un número finito de pasos obtenemos la descomposición.
Para probar la unicidad consideramos dos descomposiciones

$$\begin{aligned} V =& \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_k, \\ =& \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_l. \end{aligned}$$

La interssección $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{J}_1$ es un ideal, por tanto por minimalidad $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{J}_1 = \{0\}$ o $\mathcal{I}_i = \mathcal{J}_1$. Pero $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{J}_1$ no puede ser $\{0\}$ para cada i, ya que esto implicaría

$$\forall i,\ \mathcal{I}_i \cdot \mathcal{J}_1 \subset \mathcal{I}_i \cap \mathcal{J}_1 = 0,$$

por tanto $V \cdot \mathcal{J}_1 = 0$, y $\mathcal{J}_1 = e \cdot \mathcal{J}_1 = 0$. $\square$

Definición 2.43. *Un cono simétrico Ω en un espacio euclideo E se dice irreducible si no existe subespacios no triviales E_1, E_2 y conos simétricos $\Omega_1 \subset E_1$, $\Omega_2 \subset E_2$ tal que E es la suma directa de E_1, E_2 y $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$.*

Proposición 2.44. *Cualquier cono simétrico Ω se puede expresar de manera única como el producto directo de conos simétricos irreducibles Ω_i.*

Demostración. Sea Ω un cono simétrico en un espacio vectorial euclídeo V, por el teorema 2.40 (después de escoger un punto $e \in \Omega$ tal que $G_e = K$) existe en V una estructura de Álgebra de Jordan Euclídea. Por la proposición anterior V se descompone de manera única como suma directa de Álgebras de Jordan Euclídeas simples $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k$, por el teorema 2.30, a cada una de estas V_i le asociamos un cono simétrico que es el interior del cono de los cuadrados, $\Omega_i \subset V_i$. Estos conos deben ser irreducibles pues de lo contrario, si algún cono Ω_i no es irreducible existen W_{1i}, W_{2i} subespacios de V_i y conos simétricos $\Omega_{1i} \subset W_{1i}$, $\Omega_{2i} \subset W_{2i}$, tales que $V_i = W_{1i} \bigoplus W_{2i}$ y $\Omega_i = \Omega_{1i} + \Omega_{2i}$. Por el teorema 2.40 tenemos que existe en W_{1i}, W_{2i} estructuras de Álgebras de Jordan Euclídeas y entonces por proposición 2.42 W_{1i}, W_{2i} se descomponen de forma única como suma directa de ideales simples, pero esto no es posible pues V_i es simple. $\square$

Comentario 2.45. *Con los resultados de este capítulo tenemos que existe una correspondencia entre las Álgebras de Jordan Euclídeas simples y los conos simétricos irreducibles en un espacio vectorial. Además, hacemos notar que si V es un Álgebra de Jordan Euclídea que se descompone como suma directa de Álgebras de Jordan Euclídeas simples $V = \bigoplus V_i$, entonces el elemento identidad e se descompone como $e = \sum e_i$ con $e_i \in V_i$, los elementos e_i son elementos identidades en sus respectivas álgebras V_i.*

Capítulo 3

Clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples

Para entender la clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples, primero ofrecemos los conceptos de descomposición de Peirce en un Álgebra de Jordan. Luego estudiamos las Álgebras de Hurwitz Euclídeas, demostraremos que las únicas Álgebras de Hurwitz Euclídeas son $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Luego estudiamos las matrices con entradas en un Álgebra de Hurwitz Euclídea. La clasificación de las Álgebras de Jordan Euclídeas simples será en función de estas álgebras de matrices. Finalizamos el capítulo demostrando el teorema de clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples. Definiciones, resultados y ejemplos de este capítulo son tomados de [3].

3.1. Descomposición de Peirce

Sea V un Álgebra de Jordan, recordamos que un idempotente es un elemento $c \in V$ tal que $c^2 = c$.

Proposición 3.1. *Sea c un idempotente en un Álgebra de Jordan. Los únicos posibles eigenvalores de $L(c)$ son $0, \frac{1}{2}$ y 1. Debido a esto tenemos que V es la suma directa de los correspondientes eigenespacios:*

$$V = V(c, 0) \bigoplus V(c, \frac{1}{2}) \bigoplus V(c, 1). \tag{3.1}$$

Demostración. Usando la identidad (ii) de proposición 2.4 con x=y, obtenemos:

$$L(x^3) = 3L(x^2)L(x) - 2L(x)^3,$$

y para $x = c$ obtenemos:

$$2L(c)^3 - 3L(c)^2 + L(c) = 0.$$

Por tanto, un eigenvalor λ de $L(c)$ es una solución de

$$2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0$$

cuyas raíces son $0, \frac{1}{2}$ y 1. □

Definición 3.2. *(Descomposición de Peirce) Sea V un Álgebra de Jordan. La descomposición de la ecuación (3.1) se llama la descomposición de Peirce de V con respecto al idempotente c.*

Ejemplo 3.3. *Sea $V = \mathbb{R} \times W$ el Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana del ejemplo 2.32. Tenemos que*

$$(\lambda, u)^2 = (\lambda^2 + B(u,u), 2\lambda u),$$

y por tanto los idempotentes distintos de cero son

$$e = (1, 0),$$
$$c = (\frac{1}{2}, w),$$

donde w satisface $B(w,w) = \frac{1}{4}$. Para tal idempotente c:

$$V(c,1) = \mathbb{R}c,$$
$$V(c,0) = \mathbb{R}(\frac{1}{2}, -w),$$
$$V(c, \frac{1}{2}) = \{(0,u) : B(u,w) = 0\},$$

mientras que para e tenemos que

$$V(e,1) = V,$$
$$V(e,0) = \{0\},$$
$$V(e, \frac{1}{2}) = \{0\}.$$

Si $x = (\lambda, u)$ entonces $x^2 - 2\lambda x + (\lambda^2 - B(u,u))e = (0,0)$, luego el rango de V es 2.

Proposición 3.4. *Si V es un Álgebra de Jordan y c es un idempotente, entonces $V(c,1)$ y $V(c,0)$ son subálgebras de V. Son ortogonales en el sentido que*

$$V(c,1) \cdot V(c,0) = \{0\}.$$

Adicionalmente,

$$(V(c,1) + V(c,0)) \cdot V(c, \frac{1}{2}) \subset V(c, \frac{1}{2}),$$

$$V(c, \frac{1}{2}) \cdot V(c, \frac{1}{2}) \subset V(c,1) + V(c,0).$$

Demostración. Usando (ii) de proposición 2.4, con c en lugar de x y x en lugar de y, obtenemos para $x \in V(c,\lambda)$, $(\lambda = 0, 1, \frac{1}{2})$,

$$L(c^2x) - L(c^2)L(x) = 2(L(cx) - L(c)L(x))L(c).$$

Aplicando esto a un elemento $y \in V(c,\mu)$, $(\mu = 0, 1, \frac{1}{2})$, obtenemos

$$(L(\lambda x) - L(c)L(x))y = 2(L(\lambda x) - L(c)L(x))(\mu y),$$

de donde se tiene que

$$(2\mu - 1)(L(c) - \lambda)(xy) = 0.$$

Si $\mu = 0$ o 1, obtenemos $c(xy) = \lambda(xy)$ y entonces xy pertenece a $V(c, \lambda)$. Tomando $\lambda = 0$ o 1, esto prueba que $V(c, 1)$ y $V(c, 0)$ son subálgebras de V y que son ortogonales. Tomando $\lambda = \frac{1}{2}$, esto prueba que

$$(V(c,0) + V(c,1)) \cdot V(c, \frac{1}{2}) \subset V(c, \frac{1}{2}).$$

al considerar $\mu = 0$ y $(y + c)x = xy + \frac{1}{2}x \in V(c, \frac{1}{2})$.

Para la última aseveración, es suficiente probar que si $x \in V(c, \frac{1}{2})$, entonces $x^2 \in V(c, 1) + V(c, 0)$. Esto es,

$$x^2 = a_0 + a_1,$$

con $a_0 \in V(c, 0)$ y $a_1 \in V_(c, 1)$. En efecto, con

$$a_0 = x^2 - cx^2, \ a_1 = cx^2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} L(c)a_0 &= (I - L(c))a_1 \\ &= (L(x^2)L(c) - L(x^2c))c, \end{aligned}$$

y usando (ii) de proposición 2.4:

$$\begin{aligned} L(c)a_0 &= 2(L(x)L(c) - L(xc))L(x)c \\ &= (L(x)L(c) - \frac{1}{2}L(x))x \\ &= L(x)(L(c) - \frac{1}{2})x = 0. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.5. *Un álgebra V de rango mayor o igual que 2 es simple si y solo si $V(c, \frac{1}{2}) \neq \{0\}$ para cada idempotente distinto de cero y distinto de e.*

Demostración. Si $V(c, \frac{1}{2}) = \{0\}$, entonces por proposición 3.4 V es la suma directa de $V(c, 0), V(c, 1)$. Note que $V(c, 0), V(c, 1)$ no son triviales pues $c \in V(c, 1)$ y $e - c \in V(c, 0)$. Recíprocamente, si V es la suma directa de las subálgebras V_1 y V_2, entonces la proyección de e sobre V_1 es un idempotente de V tal que $V(c, \frac{1}{2}) = \{0\}$. □

En el resto del capítulo vamos a suponer que V es un Álgebra de Jordan Euclídea. Recordamos que un idempotente se dice primitivo si no se puede escribir como la suma de dos idempotentes distintos de cero. En la siguiente proposición probaremos que un idempotente c es primitivo si y solo si $dim V(c, 1) = 1$. Cualquier idempotente es una suma de dos idempotentes primitivos ortogonales.

Proposición 3.6. *Un idempotente c es primitivo si y solo si $dim V(c, 1) = 1$.*

Demostración. Si $dim V(c, 1) = 1$, suponga que c no es primitivo, entonces $c = c_1 + c_2$, con c_1, c_2 idempotentes distintos de cero, c_1, c_2 deben ser ortogonales de lo contrario no se cumpliría que $c^2 = (c_1 + c_2)^2 = c_1 + c_2 = c$. No obstante, no es posible tener c_1, c_2 ortogonales y linealmente dependientes, luego c debe ser primitivo. Recíprocamente, suponga que c es un idempotente primitivo. Si podemos escoger $b \in V(c, 1)$ de modo que

c, b son linealmente independientes, ortogonales y $x = \lambda c + b$, al considerar la descomposición espectral de b, $b = \sum \lambda_k c_k$, todos los idempotentes c_k son ortogonales a c, y entonces $x = \lambda c + \sum \lambda_k c_k$ es la descomposición espectral de x. Como $cx = x$, tenemos que $x = \lambda c$, lo que contradice la suposición. Como c es primitivo, entonces todos los elementos en $V(c, 1)$ son múltiplos escalares de c. Luego, $dim V(c, 1) = 1$. $\square$

Lema 3.7. *Si a, b son idempotentes ortogonales, entonces $L(a)$ y $L(b)$ conmutan.*

Demostración. Se sigue de (i) en proposición 2.4. $\square$

Proposición 3.8. *Sean a, b dos idempotentes primitivos ortogonales.*
(i) Si $x \in V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$, entonces

$$x^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2(a + b).$$

(ii) Si $V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2}) \neq 0$, entonces existe un elemento $w \in V$ con $w^2 = e$ tal que

$$P(w)a = b.$$

Demostración. La suma $a + b$ es un idempotente. Podemos expresar el álgebra $V(a + b, 1)$ como la suma directa de los espacios $V(a + b, 1) = V(a, 1) + V(b, 1) + V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$.

En efecto, por una parte se verifica que si $x = x_1 + x_2 + x_3$ con $x_1 \in V(a, 1)$, $x_2 \in V(b, 1)$ y $x_3 \in V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$ entonces $(a + b)x = x$. Por otro lado, usando proposición 3.6 vemos que $V(b, 1) \subset V(a, 0)$. Esto implica a su vez que $V(b, 1) \subset V(a + b, 1)$. Además, si nos restringimos a $V(a + b, 1)$ entonces $V(b, 1) = \tilde{V}(a, 0)$, donde la notación con tilde denota al subespacio de la descomposición de Peirce del álgebra $V(a+b, 1)$. Igualmente, si nos restringimos a $V(a+b, 1)$ entonces $\tilde{V}(b, \frac{1}{2}) = \tilde{V}(a, \frac{1}{2})$. Entonces la descomposición $V(a+b, 1) = \tilde{V}(a, 1)+\tilde{V}(a, 0)+\tilde{V}(a, \frac{1}{2})$ se puede escribir como $V(a+b, 1) = V(a, 1)+V(b, 1)+\tilde{V}(a, \frac{1}{2}) \subset V(a, 1) + V(b, 1) + V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$. La suma es una suma directa pues $V(a, 1), V(b, 1)$ son de dimensión 1 y además ortogonales, mientras que $(V(a, 1) + V(b, 1)) \cap V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2}) = \emptyset$, ya que $V(a, 1), V(b, 1)$ son de dimensión 1 y entonces un elemento en $(V(a, 1) + V(b, 1))$ es de la forma $\alpha a + \beta b$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Claramente un elemento de la forma $\alpha a+\beta b$ no puede estar en $V(b, \frac{1}{2})$, luego $(V(a, 1)+V(b, 1))\cap V(a, \frac{1}{2})\cap V(b, \frac{1}{2}) = \emptyset$.

Si $x \in V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$, de la proposición 3.4 se sigue que $x^2 \in V(a, 1) + V(b, 1)$:

$$x^2 = \lambda a + \mu b,$$

y

$$\lambda = \langle x^2, a\rangle = \langle x, ax\rangle = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Ahora, sea w_0 un elemento en $V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$ tal que $\|w_0\|^2 = 2$, entonces $w_0^2 = a + b$. Sea

$$w = w_0 + (e - a - b),$$

entonces,

$$w^2 = e, \ P(w)a = b$$

$\square$

Corolario 3.9. *Cualquier Álgebra de Jordan Euclídea simple de rango 2 es isomorfa al Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana presentada en los ejemplos 2.32 y 3.3.*

Demostración. Sean a, b dos idempotentes primitivos ortogonales. Tenemos que $V(a+b,1) = \mathbb{R}(a+b) + W$, con $W = \mathbb{R}(a-b) + V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$. En efecto, como vimos en la demostración de la proposición anterior, $V(a+b,1) = V(a,1)+V(b,1)+V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$ y por proposición 3.6 esto es igual a $\mathbb{R}(a)+\mathbb{R}(b)+V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$, y es fácil verificar que $\mathbb{R}(a) + \mathbb{R}(b) = \mathbb{R}(a+b) + \mathbb{R}(a-b)$.

Entonces $V(a+b,1)$ es isomorfa al Álgebra de Jordan $\mathbb{R} \times W$ asociada con la forma bilineal en V:

$$B(u,v) = \alpha\beta + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle,$$

si $u = \alpha(a-b)+x$, $v = \beta(a-b)+y$, con $x, y \in V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})$. Si V es de rango 2, y si a es un idempotente primitivo en V, entonces a y $b = e - a$ son idempotentes primitivos ortogonales. □

Ahora consideramos la descomposición de Peirce con respecto a un conjunto de idempotentes: Sea $\{c_1, \ldots, c_r\}$ un marco de Jordan. Consideramos los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} V_{ii} =& V(c_i, 1) = \mathbb{R}c_i, \\ V_{ij} =& V(c_i, \frac{1}{2}) \cap V(c_j, \frac{1}{2}), \ i \neq j. \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos brinda la descomposición de Peirce con respecto a un sistema de idempotentes, puede leerse su prueba en [3] p.69.

Teorema 3.10. *(i) El espacio V se descompone en la siguiente suma directa ortogonal:*

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}.$$

(ii) Si denotamos por P_{ij} a la proyección ortogonal sobre V_{ij}, entonces

$$\begin{aligned} P_{ii} &= P(c_i) \\ P_{ij} &= 4L(c_i)L(c_j) \end{aligned}$$

(iii) Adicionalmente,

$$\begin{aligned} &V_{ij} \cdot V_{ij} \subset V_{ii} + V_{jj}, \\ &V_{ij} \cdot V_{jk} \subset V_{ik}, \ \textit{si } i \neq k, \\ &V_{ij} \cdot V_{kl} = \{0\} \ \textit{si } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \{\}. \end{aligned}$$

Lema 3.11. *Sean i, j, k distintos. Si $x \in V_{ij}$, $z \in V_{jk}$, entonces*

$$\begin{aligned} L(x)(xz) =& \frac{1}{8}\|x\|^2 z, \\ \|xz\|^2 =& \frac{1}{8}\|x\|^2\|z\|^2 \end{aligned}$$

Demostración. Por proposición 3.8

$$x^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2(c_i + c_j).$$

Si usamos (ii) de proposición 2.4 con $y = c_j$ y aplicado a z obtenemos

$$(L(x^2c_j) - L(x^2)L(c_j))z = 2(L(xc_j) - L(x)L(c_j))(xz)$$

ya que $z \in V(c_j + c_k, 1) \subset V(c_i, 0)$ y $xz \in V_{ik} \subset V(c_j, 0)$ esta igualdad se puede escribir como

$$\begin{aligned}(x^2c_j)z - x^2(c_jz) =& 2L(xc_j)(xz)\\ \frac{1}{2}\|x\|^2c_jz - \frac{1}{2}\|x\|^2(c_i + c_j)(c_jz) =& L(x)(xz)\\ \frac{1}{8}\|x\|^2z =& L(x)(xz)\end{aligned}$$

y tomando producto interno con z obtenemos

$$\|xz\|^2 = \frac{1}{8}\|x\|^2\|z\|^2.$$

□

Lema 3.12. *Si V es un Álgebra de Jordan Euclídea simple. Sean (a, b) y (a_1, b_1) dos parejas de idempotentes primitivos ortogonales. Entonces*

$$dim(V(a, \frac{1}{2}) \cap V(b, \frac{1}{2})) = dim(V(a_1, \frac{1}{2}) \cap V(b_1, \frac{1}{2})).$$

La demostración puede leerse en sección 2 del cap. IV de [3]

3.2. Álgebras de Hurwitz

Definición 3.13. *Un Álgebra de Hurwitz es un álgebra A sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, con un elemento identidad 1, para la cual existe una forma cuadrática y multiplicativa no degenerada Q. Es decir, $Q : A \to \mathbb{F}$ satisface*

$$\begin{aligned}&Q(ax) = a^2Q(x) \text{ para todos } a \in \mathbb{F}, x \in A,\\ &\text{la función } q(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \text{ es bilineal,}\\ &Q(xy) = Q(x)Q(y) \text{ para todos } x, y \in A.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14. *(a) $A = \mathbb{R}, Q(x) = x^2$.*
(b) $A = \mathbb{C}$, $Q(x) = |x|^2$.

El Álgebra de Hurwitz se dice euclídea si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y la forma cuadrática Q es definida positiva. Entonces A está equipada con estructura euclídea: $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$, y

$$\|xy\| = \|x\|\|y\|.$$

El producto interno en A está dado por la forma polar de Q, es decir, $\langle\cdot,\cdot\rangle : A \times A \to \mathbb{R}$ es tal que $\langle x, x\rangle = Q(x)$ y este es positivo para $x \neq 0$. Los ejemplos (a), (b) del ejemplo 3.14 son euclídeas. Sea A un Álgebra de Hurwitz Euclídea. Identificamos $\mathbb{R}1$ con $\mathbb{R}$. El conjugado $\overline{x}$ de x es definido como

$$\overline{x} = 2\langle x, 1\rangle - x.$$

Comentario 3.15. *La conjugación puede verse como una simetría ortogonal con respecto al eje real* $\mathbb{R}1$, *pues al considerar una base ortogonal del espacio vectorial* $\{1, e_2, \ldots, e_n\}$ *el conjugado de un elemento* x *lo que hace es cambiar de signo las componentes en la dirección de* $e_2, \ldots, e_n$.

Proposición 3.16. *Para todo* $x \in V$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}\|\overline{x}\| =& \|x\| \\ \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle =& \langle x, y \rangle \\ \overline{(\overline{x})} =& x\end{aligned}$$

Demostración. La prueba es elemental. Basta sustitutir la definición del conjugado y usar la propiedad multiplicativa de la norma y de la forma cuadrática Q. ☐

Definición 3.17. *Sea* A *un Álgebra de Hurwitz. Definimos la parte real de un elemento* $x \in A$ *como* $\mathcal{R}x = \langle x, 1 \rangle$.

Por la definición del conjugado de un elemento tenemos que $\mathcal{R}x = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$.

Definición 3.18. *Sea* A *un Álgebra de Hurwitz. Para* $u \in A$ *definimos los endomorfismos* $L(u)$ *y* $R(u)$ *mediante*

$$L(u)x = ux \text{ y } R(u)x = xu.$$

Lema 3.19. *En un Álgebra de Hurwitz Euclídea se satisface la siguiente identidad:*

$$\langle xu, xv \rangle = \|x\|^2 \langle u, v \rangle.$$

Demostración. Esta propiedad surge al considerar la identidad

$$Q(x(u + v)) = Q(x)Q(u + v),$$

de donde obtenemos que $\langle x(u+v), x(u+v) \rangle = \langle x, x \rangle \langle u+v, u+v \rangle = \|x\|^2 \langle u+v, u+v \rangle$. Gracias a la linealidad y simetría de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y a la propiedad multiplicativa de la norma en un álgebra de Hurwitz euclídea, se llega al resultado. ☐

Lema 3.20. *En un Álgebra de Hurwitz Euclídea se satisface la siguiente identidad:*

$$2\langle u, v \rangle \langle x, y \rangle = \langle ux, vy \rangle + \langle vx, uy \rangle.$$

Demostración. Similar a la demostración del resultado anterior, obtenemos este resultado a partir de la identidad

$$Q((x + y)(u + v)) = Q(x + y)Q(u + v),$$

y usamos el resultado anterior junto con las propiedades de la norma y el producto interno para llegar al resultado. ☐

Proposición 3.21. *Sea* A *un Álgebra de Hurwitz Euclídea. Entonces*

$$\begin{aligned}&(i) L(u)^* = L(\overline{u}), R(u)^* = R(\overline{u}), \\ &(ii) \mathcal{R}(yx) = \mathcal{R}(xy), \\ &(iii) \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}, \\ &(iv) x\overline{x} = \|x\|^2, \\ &(v) L(u)^2 = L(u^2), R(u)^2 = R(u^2).\end{aligned}$$

Demostración. (i) Considere la identidad del lema 3.20 con $v = 1$, tenemos que $2\langle u, 1\rangle\langle x, y\rangle = 2\mathcal{R}(u)\langle x, y\rangle = \langle ux, y\rangle + \langle x, uy\rangle$. Pero $2\mathcal{R}(u) = u + \overline{u}$, entonces se tiene que $(u + \overline{u})\langle x, y\rangle = \langle ux, y\rangle + \langle x, uy\rangle$. Como $u + \overline{u}$ es un número real, lo podemos escribir dentro del producto interno en la expresión anterior, obteniendo $\langle (u + \overline{u})x, y\rangle = \langle ux + \overline{u}x, y\rangle = \langle ux, y\rangle + \langle \overline{u}x, y\rangle$. Entonces tenemos que $\langle ux, y\rangle + \langle \overline{u}x, y\rangle = \langle ux, y\rangle + \langle x, uy\rangle$. De donde se sigue que $\langle \overline{u}x, y\rangle = \langle x, uy\rangle$. Esto es, $L(\overline{u}) = L(u)^*$. De forma similar se puede probar que $R(u)^* = R(\overline{u})$.
(ii) Por una parte $\mathcal{R}(yx) = \langle yx, 1\rangle = \langle x, \overline{y}\rangle = \langle \overline{x}, y\rangle$ con la última igualdad gracias a proposición 3.16. Por otro lado $\mathcal{R}(xy) = \langle xy, 1\rangle = \langle y, \overline{x}\rangle = \langle \overline{x}, y\rangle$. Quedando con esto probado el resultado.
(iii) Para cualquier $z \in A$ tenemos que $\langle \overline{xy}, z\rangle = \langle xy, \overline{z}\rangle = \langle x, \overline{z}\overline{y}\rangle = \langle zx, \overline{y}\rangle = \langle z, \overline{y}\overline{x}\rangle = \langle \overline{y}\overline{x}, z\rangle$. Como esto es para todo $z \in A$, tenemos que $\overline{xy} = \overline{y}\overline{x}$.
(iv) Por lema 3.19 y por (i) tenemos que $\|x\|^2\langle u, v\rangle = \langle xu, xv\rangle = \langle \overline{x}(xu), v\rangle$. Entonces $\langle \|x\|^2 u, v\rangle = \langle \overline{x}(xu), v\rangle$. Luego $\|x\|^2 u = \overline{x}(xu)$, y como esto es válido para todo u en particular haciendo $u = 1$ se sigue el resultado.
(v) Lo anterior también prueba que $L(\overline{u})L(u) = \|u\|^2 I$. Y como $\overline{u} = 2\mathcal{R}(u) - u$ entonces $\|u\|^2 = \mathcal{R}(u) \cdot u - u^2$. Por tanto para todo $x \in A$ se tiene que $L(\overline{u})L(u)x = \|u\|^2 x$ que es equivalente a $(2\mathcal{R}(u) - L(u))L(u)x = (2\mathcal{R}(u) \cdot L(u) - L(u^2))x$, después de cancelar términos iguales tenemos $L(u)^2 x = L(u^2)x$. Como esto es válido para toda $x \in A$ se sigue que $L(u)^2 = L(u^2)$. De forma similar probamos que $R(u)^2 = R(u^2)$. $\square$

Proposición 3.22. *Un Álgebra de Hurwitz Euclídea es un álgebra con división.*

Demostración. En efecto, para $x \neq 0$ tenemos que $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2}$, pues $x\frac{\overline{x}}{\|x\|^2} = 1$ y $\frac{\overline{x}}{\|x\|^2}x = \frac{\overline{x}x}{\|x\|^2} = \frac{\overline{x}\overline{\overline{x}}}{\|x\|^2} = \frac{\overline{x\overline{x}}}{\|x\|^2} = \frac{x\overline{x}}{\|x\|^2} = 1$. $\square$

Definición 3.23 (Antiautomorfismo)**.** *Una función $\phi : V \to V$ se dice antiautomorfismo si ϕ es un isomorfismo $V \to V^{op}$, donde V^{op} es el álgebra opuesta de V, esto es, el mismo conjunto pero con la multiplicación en V^{op} satisfaciendo $x *_{op} y = yx$.*

Definición 3.24. *Sea A un álgebra sobre $\mathbb{R}$ con elemento identidad 1 y conjugación $x \mapsto \overline{x}$, i.e. un antiautomorfismo involutivo. Escribimos A^2 para denotar al conjunto $A \times A$ con un producto definido mediante*

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - \overline{v}y, y\overline{u} + vx).$$

Llamamos a A^2 la extensión de Cayley-Dickson del álgebra A.

Identificamos A con el subálgebra de A^2 consistente en los elementos de la forma $(x, 0)$, $x \in A$. El elemento identidad de A^2 es $(1, 0)$. Sea $j = (0, 1)$, entonces $j^2 = -1$, y cualquier elemento $(x, y) \in A^2$ puede ser escrito como $x + yj$. La conjugación en A^2 es definida por

$$\overline{x + yj} = \overline{x} - yj.$$

Por lo que tenemos la siguiente

Proposición 3.25. *El álgebra A^2 es nuevamente un álgebra con elemento identidad y con conjugación.*

Ejemplo 3.26. *(a) Si $A = \mathbb{R}$, entonces $A^2 = \mathbb{C}$.*
(b) Si $A = \mathbb{C}$, entonces $A^2 = \mathbb{H}$, el álgebra de los cuaternios. El álgebra $\mathbb{H}$ no es conmutativa. En efecto, para $x \in \mathbb{C}$ tal que $x \neq \overline{x}$:

$$jx = \overline{x}j \neq xj.$$

El álgebra $\mathbb{H}$ es asociativa. En efecto, este álgebra es isomorfa al álgebra de las matrices complejas de 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{bmatrix}$$

(c) Para $A = \mathbb{H}$, $A^2 = \mathbb{O}$, el álgebra de los octoniones. El álgebra $\mathbb{O}$ no es asociativa. En efecto, para $x, y \in \mathbb{H}$ tal que $xy \neq yx$:

$$x(yj) = (yx)j \neq (xy)j.$$

Proposición 3.27. *Sea A un Álgebra de Hurwitz Euclídea, entonces su extensión de Cayley-Dickson A^2, equipada con la norma definida por*

$$\|x + yj\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\|,$$

es un álgebra de Hurwitz euclídea si y solo si A es asociativa.

Demostración. Para que la extensión de Cayley-Dickson sea un Álgebra de Hurwitz Euclídea debemos probar que su norma posee la propiedad multiplicativa:

$$\|(x + yj)(u + vj)\|^2 = \|x + yj\|^2 \|u + vj\|^2$$

Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} \|(x + yj)(u + vj)\|^2 &= \|(xu - \overline{v}y) + (y\overline{u} + vx)j\|^2 \\ &= \|xu - \overline{v}y\|^2 + \|y\overline{u} + vx\|^2 \\ &= \langle xu - \overline{v}y, xu - \overline{v}y\rangle + \langle y\overline{u} + vx, y\overline{u} + vx\rangle \\ &= \|x\|^2\|u\|^2 - 2\langle xu, \overline{v}y\rangle + \|v\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2\|u\|^2 + 2\langle y\overline{u}, vx\rangle + \|v\|^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Mientras que

$$\|x + yj\|^2\|u + vj\|^2 = \|x\|^2\|u\|^2 + \|v\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2\|u\|^2 + \|v\|^2\|x\|^2.$$

Obtendremos la igualdad si y solo si $\langle xu, \overline{v}y\rangle = \langle y\overline{u}, vx\rangle$ y por proposición 3.21 esto es equivalente a $\langle v(xu), y\rangle = \langle y, (vx)u\rangle = \langle (vx)u, y\rangle$. Esto es, la igualdad es cierta si y solo si A es asociativa. $\square$

Proposición 3.28. *Sea A un Álgebra de Hurwitz Euclídea, y B un subálgebra de A tal que $1 \in B$, y $B \neq A$. Sea k un vector unitario en A ortogonal a B con respecto al producto interior. Entonces el subespacio Bk es ortogonal a B con respecto al producto interior y $B + Bk$ es un subálgebra isomorfa a la extensión de Cayley-Dickson de B, i.e. para $x, y, u, v \in B$, tenemos*

$$(x + yk)(u + vk) = (xu - \overline{v}y) + (y\overline{u} + vx)k.$$

Demostración. Para ver que el subespacio Bk es ortogonal a B considere $x, y \in B$. Entonces, $\langle xk, y\rangle = \langle k, \overline{x}y\rangle = 0$ pues $\overline{x}y \in B$ y k es ortogonal a B. Ahora demostraremos que $B + Bk$ es un subálgebra de A. Para ello basta probar que dados $x, y, u, v \in B$, $(x + yk)(u + vk) = (xu - \overline{v}y) + (y\overline{u} + vx)k$. Empezamos notando que $(x + yk)(u + vk) = xu + x(vk) + (yk)u + (yk)(vk)$. Debemos mostrar que
(i) $x(vk) = (vx)k$,
(ii) $(yk)u = (y\overline{u})k$, y

(iii) $(yk)(vk) = -\overline{v}y$.
Primero probaremos (ii), dado cualquier $z \in A$ tenemos que $\langle z\overline{u}, yk\rangle + \langle zk, y\overline{u}\rangle = \langle z\overline{u}, yk\rangle + \langle y\overline{u}, zk\rangle = 2\langle z, y\rangle\langle \overline{u}, k\rangle = 0$, donde la penúltima igualdad es gracias al lema 3.20 y la última igualdad es por ser k ortogonal a B. Tenemos entonces que $\langle z\overline{u}, yk\rangle + \langle y\overline{u}, zk\rangle = 0$ y esto implica que $\langle z, (yk)u\rangle + \langle zk, y\overline{u}\rangle = \langle z, (yk)u\rangle + \langle z, (y\overline{u})\overline{k}\rangle = 0$. Como esto es válido para cualquier z se sigue que $(yk)u = -(y\overline{u})\overline{k}$. Pero $\overline{k} = 2\langle k, 1\rangle - k = -k$ pues $1 \in B$ y k es ortogonal a B. Luego $(yk)u = (y\overline{u})k$.
Para probar (i), en el resultado del inciso (ii) hacemos $y = \overline{x}$ y $u = v$ y tomamos conjugado a ambos lados :

$$\overline{(\overline{x}k)v} = \overline{(\overline{x}\overline{v})k}.$$

Entonces $\overline{v}(\overline{\overline{x}k}) = \overline{k}(\overline{\overline{x}\overline{v}})$, usando las relaciones $\overline{xk} = -xk$ y $kx = \overline{x}k$ se obtiene (ii). Finalmente, (iii) se puede probar usando proposiciones 3.21 y 3.20.

□

Teorema 3.29 (Hurwitz)**.** *Las únicas Álgebras de Hurwitz Euclídeas son* $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *y* $\mathbb{O}$.

Demostración. Sea A un álgebra de Hurwitz euclídea. Sea $A_1 = \mathbb{R}1$. Si $A \neq A_1$, escogemos un vector j_1 que sea ortogonal a A_1. Por la proposición anterior tenemos que $A_2 = A_1 + A_1 j_1$ es una subálgebra de A isomorfa a $\mathbb{C}$ (la extensión de Cayley-Dickson de $\mathbb{R}$). Si $A \neq A_2$ entonces construimos de forma similar un subálgebra A_3 isomorfa a $\mathbb{H}$, y adicionalmente, si $A \neq A_3$, construimos un subálgebra A_4 isomorfa a $\mathbb{O}$. En tal caso debe suceder que $A = A_4$, pues de no ser así podríamos escoger un vector j_4 ortogonal a A_4 y construir un subálgebra $A_5 = A_4 + A_4 j_4$ que por la proposición anterior es isomorfa a la extensión de Cayley-Dickson de A_4. Entonces tenemos que la extyensión de Cayley-Dickson de $\mathbb{O}$ es un álgebra de Hurwitz euclídea, pero debido a la proposición 3.27 esto es imposible pues $\mathbb{O}$ no es asociativa. □

3.3. Matrices con entradas en un Álgebra de Hurwitz

Sea A un Álgebra de Hurwitz Euclídea, i.e. $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$. Denotamos por $M(m, A)$ el álgebra de matrices de $m \times m$ con entradas en A. Ya que $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ son asociativas, las correspondientes álgebras $M(m, A)$ son asociativas, pero $M(m, \mathbb{O})$ no es asociativa.

El siguiente lema se puede probar a partir de las propiedades de la parte real de un elemento x en un Álgebra de Hurwitz Euclídea A.

Lema 3.30. *Para* $x, y, z \in M(m, A)$ *se cumple que*
(i)$\mathcal{R}Tr(xy) = \mathcal{R}Tr(yx)$,
(ii) $\mathcal{R}Tr((xy)z) = \mathcal{R}Tr(x(yz))$.

Definición 3.31. *Denotamos por* $Herm(m, A)$ *el espacio vectorial real de matrices con entradas en* A *para las que* $x^T = \overline{x}$, *o equivalentemente, matrices para las que* $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$. *A tales matrices les llamaremos matrices hermitianas con entradas en* A.

La forma cuadrática

$$Q(x) = Tr(x^2) = \sum_{ij} x_{ij}x_{ji} = \sum \|x_{ij}\|^2, x \in Herm(m, A),$$

es definida positiva, por tanto, haciendo

$$\langle x, y\rangle = \mathcal{R}Tr(xy),$$

$Herm(m, A)$ es un espacio vectorial euclídeo. Definimos en $Herm(m, A)$ el siguiente producto de Jordan:

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Notamos que por las propiedades de la traza y por la definición de parte real de un elemento x en un Álgebra de Hurwitz Éuclídea, se tiene que

$$\langle x, y \rangle = Tr(x \circ y).$$

Para $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ el álgebra $M(m, A)$ es asociativa, por tanto $Herm(m, A)$, equipado con el producto de Jordan, es un Álgebra de Jordan pues la propiedad (J2) de la definición 2.3 de Álgebra de Jordan solo se satisface si $M(m, A)$ es asociativa. La siguiente proposición muestra que es un Álgebra de Jordan Euclídea. Veremos también que $Herm(m, \mathbb{O})$ es un álgebra de Jordan solo para $m \leq 3$.

Proposición 3.32. *El producto interno es asociativo con respecto al producto de Jordan,*

$$\langle x \circ y, z \rangle = \langle x, y \circ z \rangle.$$

Demostración. Gracias a la proposición anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle x \circ y, z \rangle =& \mathcal{R}Tr((x \circ y)z) \\
=& \frac{1}{2}\mathcal{R}Tr((xy)z) + \frac{1}{2}\mathcal{R}Tr((yx)z) \\
=& \frac{1}{2}\mathcal{R}Tr(x(yz)) + \frac{1}{2}\mathcal{R}Tr(x(zy)) \\
=& \langle x, y \circ z \rangle.
\end{aligned}$$

□

Para enunciar el siguiente teorema llamaremos H al grupo de automorfismos de $Herm(3, \mathbb{O})$ que preservan la traza. La demostración de este teorema puede hallarse en [3]p.90.

Teorema 3.33 (Freudenthal)**.** *Para cualquier $x \in Herm(3, \mathbb{O})$ existe $h \in H$ tal que $h(x)$ es diagonal.*

Corolario 3.34. *$Herm(3, \mathbb{O})$ es un Álgebra de Jordan Euclídea de rango 3.*

Demostración. Para ver que $Herm(3, \mathbb{O})$ es Álgebra de Jordan debemos probar que $L(x)$ y $L(x^2)$ conmutan. Por el teorema anterior podemos suponer que x es diagonal, y es fácil verificar que si $L(x), L(x^2)$ son diagonales entonces conmutan. El Álgebra de Jordan será euclídea por proposición 3.32. □

Para finalizar, veamos algunas definiciones en $Herm(m, A)$

Definición 3.35. *Sea $M \in Herm(m, A)$, con $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$, $\lambda \in A$ se llama eigenvalor de M si existe un vector $x \in A^m$ distinto de cero tal que $Mx = \lambda x$.*

Definición 3.36. *Sea $M \in Herm(m, A)$, con $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$, M se dice semidefinida positiva si para todo $x \in A^m$ se tiene que $x^*Ax \geq 0$, donde x^* denota al vector transpuesto conjugado.*

Note que si una matriz M es semidefinida positiva entonces todos sus eigenvalores son no negativos.

Proposición 3.37. *El cono de los cuadrados Q en el Álgebra de Jordan Euclídea $Herm(m, A)$ es el conjunto de las matrices semidefinidas positivas.*

Demostración. Veamos el caso de $Sym(r, \mathbb{R})$. Denotemos por W el conjunto de las matrices semidefinidas positivas. Por una parte, si $A \in V$ entonces A^2 es semidefinida positiva. Lo que implica que $Q \subset W$. Ahora suponga que A es una matriz semidefinida positiva. Ya que A es simétrica, de acuerdo al teorema espectral, existe una matriz ortogonal S tal que $A = SDS^T$, donde D es una matriz diagonal, $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ahora, ya que A es ssemidefinida positiva, todos sus eigenvalores son no negativos. Sea $D_0 = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Entonces $D = D_0^2$ y para $A_0 = SD_0S^T$ tenemos que $A_0^2 = A$. Note que $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ son los eigenvalores de A_0 y son todos no negativos, por lo que A_0 es semidefinida positiva. Además, A_0 es una matriz simétrica. Por lo que $W \subset Q$. Luego $Q = W$. De forma similar podemos probar esto para $Herm(3, \mathbb{O})$, $Herm(m, \mathbb{C})$, $Herm(m, \mathbb{H})$. □

3.4. El teorema de clasificación

Recordamos que, por el corolario 3.9, un Álgebra de Jordan Euclídea simple de rango $r = 2$ es isomorfa al Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana de los ejemplos 2.32 y 3.3.

Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea simple de rango $r \geq 3$. Consideramos la descomposición de Peirce

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}$$

con respecto a un marco de Jordan $\{c_1, \ldots c_r\}$. Veamos que el producto es asociativo en algunos casos especiales:

Lema 3.38. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea simple de rango $r \geq 4$. Sean i, j, k, l distintos, Sean $x \in V_{ij}$, $y \in V_{jk}$, $z \in V_{kl}$. Entonces*

$$x(yz) = (xy)z.$$

Demostración. Sea $c = c_i + c_j + c_k$. Entonces por la definición de representación cuadrática de un elemento, y la definición de los espacios V_{ij} tenemos que

$$\begin{aligned} x =& P(c)x, \\ y =& P(c)y, \\ P(c)z =& 0. \end{aligned}$$

Por tanto, por proposición 2.28 y definición 2.27

$$P(x, y)z = P(c)P(x, y)P(c)z = 0,$$

esto es,

$$L(x)L(y)z + L(y)L(x)z - L(xy)z = 0.$$

Pero debido a teorema 3.10 tenemos que $L(x)z = 0$, luego

$$x(yz) = (xy)z.$$

□

Lema 3.39. *Para $i \neq j$ existen elementos $e_{ij} \in V_{ij}$ tal que*
(i) $e_{ij}^2 = 4(c_i + c_j)$,
(ii) $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$.

Demostración. (i) Debido a la proposición 3.8 (i) es equivalente a $\|e_{ij}\|^2 = 8$. Escogemos arbitrariamente e_{1i}, $i = 2, \ldots, r$, tal que $\|e_{1i}\|^2 = 8$, entonces para $i, j \geq 2$ hacemos

$$e_{ij} = e_{1i}e_{1j}.$$

Notamos que $e_{ij} = e_{ji}$. Por el lema 3.11

$$\|e_{ij}\|^2 = \frac{1}{8}\|e_{1i}\|^2\|e_{1j}\|^2.$$

(ii) Supongamos primero que $i = 1$. Entonces

$$e_{1j}e_{jk} = e_{1j}(e_{1j}e_{1k}) = e_{1k}$$

por el lema 3.11. Ahora suponga $r \geq 4$. Suponga también que i, j, k son distintos y mayores o iguales que 2. Entonces,

$$e_{ij}e_{jk} = (e_{1i}e_{1j})e_{jk} = e_{1i}(e_{1j}e_{jk})$$

por el lema de la asociatividad, además por el caso anterior tenemos $e_{1j}e_{jk} = e_{1k}$, entonces

$$e_{ij}e_{jk} = e_{1i}e_{1k} = e_{ik}$$

por la definición que hicimos para los elementos e_{ij}. □

Definición 3.40. *Para i, j, k con $i \neq j$ y $k \neq i, j$, definimos W_{ij}^k como el álgebra consistente en el subespacio V_{ij} equipado con el producto definido por*

$$u * v = (e_{ik}u)(e_{kj}v),$$

y definimos la norma $N(u)^2 = \frac{1}{8}\|u\|^2$.

Observación 3.41. *Debido al teorema 3.10, podemos notar que el producto de la definición anterior es tal que $u * v = (e_{ik}u)(e_{kj}v) \in V_{ij}$.*

Proposición 3.42. *El álgebra recién definida es un Álgebra de Hurwitz Euclídea, con e_{ij} como elemento identidad. La función identidad $W_{ij}^k \to W_{ji}^k$ es un antiautomorfismo. Si $r \geq 4$, el producto es asociativo y no depende de k, por lo que podemos escribir W_{ij} en lugar de W_{ij}^k.*

Demostración. La propiedad multiplicativa de la norma N se sigue del lema 3.11. Para $u \in V_{ij}$

$$\begin{aligned} e_{ij} * u =& (e_{ik}e_{ij})(e_{jk}u) \\ =& e_{jk}(e_{jk}u) = u, \end{aligned}$$

nuevamente gracias a lema 3.11. Se puede probar de forma similar que $u * e_{ij} = u$, y con esto tenemos que e_{ij} es un elemento identidad.
Ya que el álgebra de Jordan V es conmutativa,

$$(e_{ik}u)(e_{jk}v) = (e_{jk}v)(e_{ik}u),$$

lo que significa que el mapa identidad $W_{ij} \to W_{ji}$ es un antiautomorfismo,

$$u *_{(i,j)} v = v *_{(j,i)} u.$$

Supongamos que $r \geq 4$. Usando el lema 3.38 muchas veces probamos que el producto no depende de k. En efecto, si $l \neq i, j, k$,

$$\begin{aligned}(e_{il}u)(e_{jl}v) &= ((e_{ik}e_{kl})u)(e_{jl}v)\\ &= (e_{kl}(e_{ik}u))(e_{jl}v)\\ &= (e_{ik}u)(e_{kl}(e_{jl}v))\\ &= (e_{ik}u)((e_{kl}e_{jl})v)\\ &= (e_{ik}u)(e_{jk}v).\end{aligned}$$

Uno prueba de forma similar que el producto es asociativo.

□

Definición 3.43. *Definimos la conjugación en W_{ij} mediante*

$$\overline{x} = \frac{1}{4}\langle x, e_{ij}\rangle - x.$$

Escribiremos L_{ij} para denotar al operador $L(e_{ij})$. Los siguientes lemas se enuncian sin demostración, el lector puede abocarse a [3] cap. V.

Lema 3.44. *Si i, j, k, l son distintos, entonces*
(i) $L_{ij}L_{jk}x = L_{ik}x$ para $x \in V_{kl}$,
(ii) $L_{ij}L_{jk}x = \overline{L_{ik}x}$ para $x \in V_{ij}$.

Lema 3.45. *Si i, j, k son distintos, entonces $L_{ij} : W_{ik} \to W_{kj}$ es un isomorfismo.*

Para $d = 1, 2, 4, 8$ sea A_d el álgebra de Hurwitz euclídea de dimensión d. Es decir, $A_d = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o $\mathbb{O}$. Enunciamos a continuación el teorema central de esta tesis, el teorema de clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples.

Teorema 3.46. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea simple de rango $r \geq 3$. Sea $d = dim(V_{ij})$ (por lema 3.12 no depende de la elección de i, j). Entonces V es isomorfa a $Herm(r, A_d)$. Si $r = 3$ entonces los posibles valores de d son 1,2,4,8. Si $r \geq 4$ entonces los posibles valores de d son 1,2,4.*

Demostración. Por la proposición 3.42, se sigue por el teorema de Hurwitz que W_{ij}, con el producto $*$, es isomorfa a A_d, $d = 1, 2, 4$, o 8. Si $r \geq 4$, sabemos que W_{ij} es asociativa, por lo tanto $d \neq 8$ ya que $A_8 = \mathbb{O}$ no es asociativa.
Escogemos elementos e_{ij} como en el lema 3.39, y denotamos por $L_{ij} = L(e_{ij})$ como antes. Fijamos un isomorfismo φ de A_d sobre W_{21} y definimos una familia de isomorfismos φ_{ij}, $(i \neq j)$,

$$\varphi_{ij} : A_d \to W_{ij}$$

primero haciendo $\varphi_{12}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\varphi_{21}(\alpha) = \varphi(\overline{\alpha})$. Luego, si $j \geq 3$,

$$\varphi_{1j}(\alpha) = L_{2j} \circ \varphi(\overline{\alpha}),\ \ \varphi_{j1}(\alpha) = \varphi_{1j}(\overline{\alpha}),$$

y si $i \geq 2$, $j > i$,

$$\varphi_{ji}(\alpha) = L_{1i}\varphi_{1j}(\alpha),\ \ \varphi_{ij}(\alpha) = \varphi_{ji}(\overline{\alpha}).$$

Entonces, haciendo uso repetidamente del lema 3.44, uno prueba que, para i, j, k distintos,

$$L_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik},$$
$$L_{ij}\varphi_{ki} = \varphi_{kj}.$$

Ahora, sea $\tilde{V} = Herm(r, A_d)$, y sea

$$\tilde{c}_i = E_{ii},$$
$$\tilde{e}_{ij} = 2(E_{ij} + E_{ji}),$$

donde E_{ij} denota la matriz con entrada en la posición i, j igual a 1 y cero en todas las demás. Denotaremos con una tilde a todos los elementos de $\tilde{V}$. Definimos $\Phi : \tilde{V} \to V$ por

$$\Phi((\alpha_{ij})) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ii}c_i + \sum_{i<j} \varphi_{ij}(\alpha_{ij}).$$

Entonces, aprovechando la definición de matrices hermitianas $x_{ji} = \overline{x}_{ij}$ se puede probar que

$$\Phi(\tilde{c}_i) = c_i,$$
$$\Phi(\tilde{V}_{ij}) = V_{ij},$$

y la restricción Φ_{ij} de Φ a $\tilde{V}_{ij}$ define un isomorfismo de el álgebra $\tilde{W}_{ij}$ sobre W_{ij}. De las relaciones probadas anteriormente se sigue que

$$\Phi \circ \tilde{L}_{ij} = L_{ij} \circ \Phi.$$

Veremos que estas relaciones implican que Φ es un isomorfismo de álgebras de Jordan. Para esto es suficiente probar que si $x \in \tilde{V}_{ij}$, $y \in \tilde{V}_{jk}$, i, j, k distintos, entonces $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$. (Teorema 3.10). Tenemos

$$xy = (\tilde{L}_{jk}x) *_{ik} (\tilde{L}_{ij}y),$$

y

$$\Phi(xy) = \Phi_{ik}((\tilde{L}_{jk}x) *_{(i,k)} (\tilde{L}_{ij}y)).$$

Ya que Φ_{ik} es un isomorfismo de $\tilde{W}_{ik}$ sobre W_{ik},

$$\begin{aligned}\Phi(xy) &= \Phi_{ik}(\tilde{L}_{jk}x) *_{(i,k)} \Phi_{ik}(\tilde{L}_{ij}y)\\ &= L_{jk}\Phi_{ij}(x) *_{(i,k)} L_{ij}\Phi_{jk}(y)\\ &= \Phi(x)\Phi(y).\end{aligned}$$

$\square$

Para resumir, la clasificación de Álgebras de Jordan Euclídeas simples es la siguiente:

- $\mathbb{R}$, los números reales, el Álgebra de Jordan Euclídea de rango 1, cuyo cono simétrico asociado es el conjunto de los reales positivos.
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, que no es más que el Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana de rango 2 mostrada en los ejemplos 2.32 y 3.3, cuyo cono simétrico asociado es el cono de Lorentz, este álgebra tiene dimensión n.
- $Herm(3, \mathbb{O})$ cuyo cono simétrico asociado es el cono de las matrices hermitianas definidas positivas, su dimensión es 27 y su rango es 3.
- $Sym(m, \mathbb{R})$, $m \geq 3$, las matrices simétricas, cuyo cono simétrico asociado es las matrices simétricas definidas positivas. Su dimensión es $\frac{1}{2}m(m+1)$ y su rango es m.
- $Herm(m, \mathbb{C})$, $m \geq 3$, las matrices hermitianas con entradas en $\mathbb{C}$, cuyo cono simétrico asociado es las matrices hermitianas definidas positivas. Su dimensión es m^2 y su rango es m.
- $Herm(m, \mathbb{H})$, $m \geq 3$, las matrices hermitianas con entradas en $\mathbb{H}$, cuyo cono simétrico asociado es las matrices hermitianas definidas positivas. Su dimensión es $m(2m-1)$ y su rango es m.

Además, notamos los siguientes isomorfismos:

- $Sym(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
- $Herm(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- $Herm(2, \mathbb{H}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^5$

Capítulo 4

Clasificación de espacios vectoriales parcialmente ordenados

En este capítulo aplicamos los resultados de capítulos anteriores a los espacios vectoriales parcialmente ordenados, con el fin de obtener una clasficación para estos. Finalizaremos el capítulo con los ejemplos más importantes de espacios vectoriales parcialmente ordenados y Álgebras de Jordan Euclídeas.

4.1. La clasificación

Por una parte, dada un Álgebra de Jordan Euclídea V, sabemos que $\Omega = int(Q)$ es un cono simétrico, donde Q es el cono de los cuadrados, $Q = \{x^2 : x \in V\}$. Entonces la cerradura de Ω es un cono propio (proposición 1.13) que induce en V un orden parcial que es compatible con la estructura de espacio vectorial en V, (Teorema 1.26). Si e es la unidad en V, entonces e es una unidad de orden en V:

Proposición 4.1. *Sea V un Álgebra de Jordan Euclídea y $e \in V$ la unidad en V. Entonces e es una unidad de orden en V al considerar el orden parcial inducido por $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea $v \in V$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado en el que 1 es una unidad de orden, entonces para todo $c \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$ existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda 1 \geq \frac{\langle v,c\rangle}{\langle e,c\rangle}$, lo que implica que $\langle \lambda e - v, c\rangle \geq 0$ para todo $c \in \overline{\Omega}$. Esto es, $\lambda e - v \in \overline{\Omega}$, por lo que $\lambda e \geq v$. Luego e es una unidad de orden. Note que si $c \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$ entonces $\langle e, c\rangle \neq 0$ pues $c = x^2$ para algún $x \in V\backslash\{0\}$ y entonces $\langle e, x^2\rangle = \langle x, x\rangle \neq 0$. $\square$

Corolario 4.2. *En un Álgebra de Jordan Euclídea V con cono de los cuadrados Q y cono simétrico asociado $\Omega = int(Q)$ se tiene que $\overline{\Omega}$ es un cono generador.*

Demostración. Como para todo $v \in V$ existe $\lambda e \in \Omega$, $\lambda > 0$, tal que $v \leq \lambda e$, por lema 1.28 $\overline{\Omega}$ es un cono generador. $\square$

Definición 4.3. *Un espacio vectorial parcialmente ordenado se dice irreducible si el cono de los positivos es irreducible. Un espacio vectorial parcialmente ordenado se dice simétrico si el cono de los positivos es tal que su interior es un cono simétrico.*

El siguiente teorema clasifica los espacios vectoriales parcialmente ordenados que son irreducibles y simétricos.

Teorema 4.4. *Sea V un espacio vectorial parcialmente ordenado que es simétrico y simple. Entonces V es isomorfo a alguno de los siguientes espacios vectoriales parcialmente ordenados*

- $\mathbb{R}$ *con cono de los positivos el subconjunto de los números reales no negativos*
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, *con cono positivo dado por la cerradura del cono de Lorentz.*
- $Herm(3, \mathbb{O})$ *con cono positivo el cono de las matrices hermitianas semidefinidas positivas.*
- $Sym(m, \mathbb{R})$, $m \geq 3$, *las matrices simétricas, con cono positivo el cono de las matrices hermitianas semidefinidas positivas.*
- $Herm(m, \mathbb{C})$, $m \geq 3$, *las matrices hermitianas con entradas en $\mathbb{C}$, con cono positivo el cono de las matrices hermitianas semidefinidas positivas.*
- $Herm(m, \mathbb{H})$, $m \geq 3$, *las matrices hermitianas con entradas en $\mathbb{H}$, con cono positivo el cono de las matrices hermitianas semidefinidas positivas.*

Demostración. Por definición, el cono de los positivos en V es tal que su interior es un cono simétrico irreducible. Esto induce en V una estructura de Álgebra de Jordan Euclídea simple. Sea r el rango de V, si $r = 1$ entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}$. Si $r = 2$ tenemos que V es isomorfa al álgebra lorentziana $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de los ejemplos 2.32 y 3.3, con cono simétrico dado por el cono de Lorentz. La cerradura de este cono es el cono de los positivos. Finalmente, si V es de rango $r \geq 3$, por el teorema 3.46 V es isomorfa a alguna de las álgebras $Sym(r, \mathbb{R})$, $Herm(r, \mathbb{C})$, $Herm(r, \mathbb{H})$, $Herm(3, \mathbb{O})$, dependiendo esto de la dimensión de los subespacios V_{ij} de la descomposición de Peirce.

□

4.2. Ejemplos

Estudiamos ahora algunos ejemplos de espacios vectoriales parcialmente ordenados, así como algunas Álgebras de Jordan Euclídeas y el orden inducido por el cono de los cuadrados (el interior del conjunto de los cuadrados).

1. El espacio $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden estándar es un espacio vectorial parcialmente ordenado. Tiene un cono generador y arquimediano, es una retícula, y tomando a 1 como unidad de orden la norma de unidad de orden coincide con el valor absoluto. Visto como Álgebra de Jordan Euclídea, es un álgebra de rango 1 pues todos los elementos son múltiplos del elemento identidad.

2. Considere el Álgebra de Jordan Euclídea Lorentziana de los ejemplos 2.32 y 3.3. Su cono simétrico asociado es el conjunto
$$\Omega = \{y = (\mu, v) : \mu > \sqrt{B(v, v)}\},$$
el llamado cono de Lorentz. Este álgebra es de rango 2, en efecto, si $x = (\lambda, u)$ entonces $x^2 - 2\lambda x + (\lambda^2 - B(u, u))e = 0$, con $e = (1, 0)$. Como ejemplo de esta construcción tenemos que $\mathbb{R}^n$ se puede ver como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ con cono simétrico asociado el conjunto $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 > \sqrt{x_2^2 + \cdots x_n^2}, x_1 > 0\}$. Visto como espacio vectorial, la cerradura de Ω induce en V un orden parcial dado por $x \geq y$ si y solo si $x_1 - y_1 \geq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}$ y $x_1 \geq y_1$, y entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado donde el cono de los positivos es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}\}$.

3. Sea X un conjunto con n elementos, $\mathbb{R}^X$ denota al espacio vectorial real de las funciones de X en $\mathbb{R}$. Entonces, $\mathbb{R}^X$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado en el que dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$, $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in X$. $\mathbb{R}^X$ es un espacio de Riesz. Además podemos definir en $\mathbb{R}^X$ un producto interno: $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son los elementos de X. Adicionalmente, si $f_i : X \to \mathbb{R}$ es la función que satisface $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker, entonces podemos definir un mapeo lineal de $\mathbb{R}^X$ en $\mathbb{R}^n$ dado por la asignación $f_i \mapsto e_i$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$; este mapeo es un isomorfismo de espacios vectoriales. Lo anterior induce una estructura de espacio vectorial parcialmente ordenado en $\mathbb{R}^n$ cuyo cono positivo es el conjunto $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$. Este espacio vectorial puede verse como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces, como vimos en el ejemplo 1, R es un álgebra de Jordan euclídea de rango 1.

4. El espacio de las matrices hermitianas con entradas complejas, con producto de Jordan, es un Álgebra de Jordan Euclídea, cuyo cono simétrico asociado es el conjunto de las matrices hermitianas definidas positivas. Visto como espacio vectorial, el cono de las matrices definidas positivas induce en $Herm(m, \mathbb{C})$ un orden parcial compatible con la estructura de espacio vectorial, con este orden $Herm(m, \mathbb{C})$ es una antiretícula.

Bibliografía

[1] ALIPRANTIS, CHARALAMBOS D.; TOURKY, RABEE, *Cones and Duality*, American Mathematical Society (2007).

[2] BOURBAKI, N., *Elements of Mathematics Topological Vector Spaces*, Springer (1987).

[3] FARAUT, J; KORANYI, A, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford mathematical monographs (Oxford University Press, 1994).

[4] JAMESON, GRAHAM, *Ordered Linear Spaces*, Springer, Series: Mathematics Institute, University of Warwick (1970)

[5] JORDAN, P; VON NEUMANN, J; WIGNER, E., *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism*, Annals of Mathematics , Jan., 1934, Second Series, Vol. 35, No. 1 (Jan., 1934)

[6] KADISON, RICHARD V., *A Representation Theory for Commutative Topological Algebra*, Memoirs of the American Mathematical Society, number 7, (1951).

[7] KADISON, RICHARD V., *Order Properties of Bounded Self-Adjoint Operators*, ProcAMS (1951).

[8] LEE, JEFFREY M., *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society (2009).

[9] MORRIS D. W., *Introduction to Arithmetic Groups*, Deductive Press (2015) .

[10] NAKAHIRA, K., *Derivation of Quantum Theory with Superselection Rules*, Physical Review A volume 101 p. 022104 (2020)

[11] OECKL, ROBERT, *A Local and Operational Framework for the Foundations of Physics*, Adv. Theor. Math. Phys. Volume 23, Number 2, 437-592 (2019)

[12] OECKL, ROBERT, *Functional Analysis Notes*, (2021)

[13] SCHAEFER, HELMUT H, *Topological Vector Spaces*, Springer (1964)

[14] VULIKH B.Z., *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces*, The Netherlands (1967)